

ACOTACION DE LA PROBABILIDAD DE ERROR EN UN SISTEMA DE  
TRANSMISION DIGITAL POR FIBRA OPTICA

R. AGUSTI, G. JUNYENT

Departamento de Comunicaciones. Universidad Politécnica de Barcelona

ABSTRACT.- Dans ce papier, on a obtenu des bornes inférieure et supérieure de la probabilité d'erreur par symbole dans un système de transmission numérique par Fibre Optique. Pour cela, nous avons employé une simplification de la méthode exhaustive qui permet de connaître, pour chaque message transmis, la valeur de l'interférence intersymboles et du bruit de grenaille.

L'approximation gaussienne sur le bruit de grenaille permet une réduction considérable du temps de calcul. La précision sur la probabilité d'erreur, mesurée par l'écart entre les bornes supérieure et inférieure, augmente avec le nombre de symboles du message numérique pris en compte.

Enfin, les résultats obtenus permettent de déterminer l'espacement des répéteurs.

INTRODUCCION.

En este trabajo se ha desarrollado un método para calcular, con una exactitud suficiente, la probabilidad de error mediante una acotación superior e inferior de la misma, con un tiempo de cálculo relativamente pequeño. Ello permite expresar la probabilidad de error de una forma muy sencilla en función de todos los parámetros del sistema, así como optimizarlos con el fin de obtener una distancia entre repetidores máxima.

ESTUDIO ESTADISTICO.

La fig. 1 muestra el diagrama de bloques simplificado de un sistema actual de transmisión digital

A la salida del codificador de línea existe un mensaje digital  $A$  que modula a un Diodo Laser o a un Diodo Electroluminiscente, el cual inyecta a la fibra una potencia óptica,  $P_i(t)$ , dada por:

$$P_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n P_1 h_1(t-nT)$$

$$h_1(t) \leq 1$$

Debido a que la fibra se comporta como un canal lineal,  $/ 1 /$ , la potencia óptica a su salida es:

$$P(t) = P_i(t) * h_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n P_0 h_r(t-nT)$$

Donde:

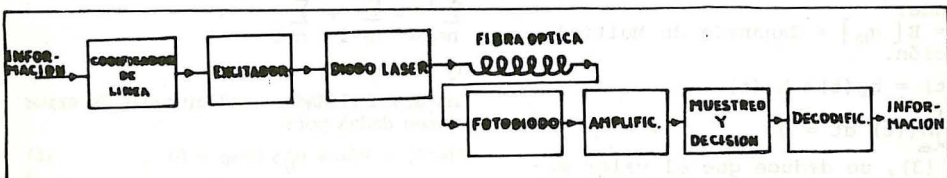


figura 1

$P_0 = P_1$  - Atenuación de la fibra

$$h_R(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$h_2(t)$  = Respuesta impulsional de la fibra.

De /2/, la corriente generada por el fotodiodo de avalancha viene dada por:

$$i(t) = q \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m \delta(t-t_m)$$

$q$  = Carga eléctrica del electrón.

$\delta(t)$  = Función generalizada delta.

$\{g_m\}$  = Secuencia de variables aleatorias independientes que representan la ganancia de cada portador por choque-ionización.

$\{t_m\}$  = Secuencia de instantes de tiempo en los que son generados los portadores de carga.

La secuencia  $\{t_m\}$  sigue una estadística de Poisson, siendo el número medio de portadores por unidad de tiempo,  $\lambda(t)$ , proporcional a  $P(t)$ :

$$\lambda(t) = \frac{S}{q} P(t) + \lambda_0$$

Donde:

$S$  = Sensibilidad del fotodiodo

$$\lambda_0 = \frac{I_0}{q}$$

$I_0$  = Corriente de Oscuridad del fotodiodo.

El proceso aleatorio a la entrada del muestreador es:

$$y(t) = i(t) * h_3(t) = q \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m h_3(t-t_m) \quad (1)$$

$h_3(t)$  = Respuesta impulsional del amplificador + circuito equivalente de pequeña señal del fotodiodo. La expresión (1) la podemos descomponer como:

$$y(t) = E[y(t)] + s(t) \quad (2)$$

De /3/:

$$E[y(t)] = SM P_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t-nT) \quad (3)$$

Donde:

$M = E[g_m]$  = Ganancia de Multiplicación.

$$h(t) = h_R(t) * h_3(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_3(t) dt = 0$$

De (3), se deduce que el valor medio se comporta como la 'señal', siendo  $s(t) = y(t) - E[y(t)]$  el ruido

Shot del receptor.

De /4/,  $s(t)$  se puede aproximar por una estadística gaussiana de media cero y varianza:

$$\sigma_s^2(t) = E[s^2(t)] = q^2 E[g^2] \lambda(t) * h_3^2(t)$$

$$= q S E[g^2] P_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m h_m(t-mT) +$$

$$+ q E[g^2] I_0 B_N$$

Con:

$$h_n(t) = h_R(t) * h_3^2(t)$$

$$B_N = \int_{-\infty}^{\infty} h_3^2(t) dt$$

De /5/,  $E[g^2]$  viene dada por:

$$E[g^2] = M^2 F(M)$$

$F(M) = KM + (1-K) \cdot (2 - \frac{1}{M})$  = Factor de Ruido en exceso del fotodiodo.

$K$  = Constante del fotodiodo.

Si a la expresión (2) le añadimos el Ruido Térmico,  $n_T(t)$ , del receptor, la expresión general del proceso  $y(t)$  es:

$$y(t) = SM P_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t-nT) + n(t) \quad (4)$$

Siendo:

$$n(t) = s(t) + n_T(t)$$

$n_T(t)$  = Proceso aleatorio gaussiano, estacionario, de media cero y independiente del mensaje A.

$$E[n_T^2(t)] = \sigma_T^2$$

$s(t)$  = Proceso aleatorio gaussiano, no estacionario, de media cero y estadísticamente dependiente del mensaje A.

CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE ERROR.

Si en el instante  $t_0$  se muestrea el símbolo  $a_0$ , se deduce, (4), :

$$y(t_0) = SM P_0 a_0 h(t_0) + SM P_0 \omega + n_0 \quad (5)$$

Donde:

$$\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t_0-nT) = \text{Interferencia entre símbolos}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t_0-nT) = \sum_{n=-1}^{-\infty} + \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$n_0 = n(t_0)$$

Las probabilidades condicionadas de error vienen dadas por:

$$P(e/0) = P(\omega + n_0' > D/a_0 = 0) \quad (6)$$

$$P(e/1) = P(\omega + n_0' < - [h(t_0) - D] / a_0 = 1) \quad (7)$$

Con:

$D' = S M P_0 D =$  Umbral de decisión

$n'_0 = n_0 / (S M P_0)$

En (5) se aprecia que tanto la Interferencia entre Símbolos como  $n'_0$  dependen de todos los símbolos transmitidos. Se pueden simplificar los cálculos considerando solamente los símbolos más próximos al muestreado,  $(a_{-N_1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_{N_2})$ ,

obteniendo una cota inferior y superior de la probabilidad de error. Para calcular dichas cotas, se aumentan los índices  $N_1$  y  $N_2$  hasta que el error por truncamiento del mensaje sea despreciable. Para ello se definen las siguientes variables aleatorias:

$$r = \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n h(t_0 - nT)$$

$$l = \sum_{\substack{n > N_2 \\ n < -N_1}} a_n h(t_0 - nT)$$

De (6) y (7), las probabilidades de error son:

$$P(e/0) = P(r + n'_0 > D - l/a_0 = 0)$$

$$P(e/1) = P\{r + n'_0 < -[h(t_0) - D] - l/a_0 = 1\}$$

Si  $L$  es una cota superior de  $l$ :  $L \geq |l|$ , resulta, [6], :

$$P_-(e/0) \leq P(e/0) \leq P_+(e/0)$$

$$P_-(e/0) = P(r + n'_0 \geq D + L/a_0 = 0) =$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{D - r(m) + L}{\sqrt{2} \sigma'_{S,0,m}} \right] P(m)$$

$$P_+(e/0) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{D - r(m) - L}{\sqrt{2} \sigma'_{I,0,m}} \right] P(m)$$

$$P_-(e/1) \leq P(e/1) \leq P_+(e/1)$$

$$P_-(e/1) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{h(t_0) - D + r(m) + L}{\sqrt{2} \sigma'_{S,1,m}} \right] P(m)$$

$$P_+(e/1) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{h(t_0) - D + r(m) - L}{\sqrt{2} \sigma'_{I,1,m}} \right] P(m)$$

Donde:

$$M = 2^{(N_1 + N_2)}$$

$$r(m) = \sum_{i=-N_1}^{N_2} a_{m,i} h(t_0 - iT)$$

$(a_{m,-N_1}, \dots, a_{m,-1}, a_{m,1}, \dots, a_{m,N_2}) =$  Secuencia que corresponde al número  $m$  expresado en binario.

$$\sigma_{S,0,m}^2 = B_0(m) + \sigma_T^2$$

$$\sigma_{I,0,m}^2 = A_0(m) + \sigma_T^2$$

$$\sigma_{S,1,m}^2 = B_1(m) + \sigma_T^2$$

$$\sigma_{I,1,m}^2 = A_1(m) + \sigma_T^2$$

$$A_0(m) = q M^2 F(M) S P_0 \sum_{i=-N_1}^{N_2} a_{m,i} h_n(t_0 - iT) +$$

$$+ q M^2 F(M) I_0 B_N$$

$$A_1(m) = A_0(m) + q M^2 F(M) S P_0 h_n(t_0)$$

$$B_0(m) = A_0(m) + q M^2 F(M) S P_0 \sum_{\substack{i > N_2 \\ i < -N_1}} h_n(t_0 - iT)$$

$$B_1(m) = A_1(m) + q M^2 F(M) S P_0 \sum_{\substack{i > N_2 \\ i < -N_1}} h_n(t_0 - iT)$$

$P(m) =$  Probabilidad del mensaje  $m$ .

#### CALCULO DE LA DISTANCIA ENTRE REPETIDORES.

De las anteriores expresiones se obtiene, para unas determinadas probabilidades de error, el valor de  $P_0$  en función de la distancia  $L$ . Con lo cual la distancia entre repetidores tiene que verificar la siguiente desigualdad.

$$P_1 \text{ dB}_m - \alpha_F L \geq P_0(L) \text{ dB}_m$$

$\alpha_F =$  Atención a la fibra (dB/Km)

#### RESULTADO DE LA SIMULACION.

Datos:

- Velocidad de transmisión: 34 y 140 Mbit/s
- Codificación: RZ (50%)
- Función de transferencia de la fibra, /7/;

$$H_2(f) = \exp \left[ -\gamma \left( \frac{f}{f_0} \right)^2 \right]$$

$$\gamma = \ln 2$$

$$f_0 = f_{01} \cdot L^{-\alpha}$$

- Función de transferencia del receptor: Bessel.
- Receptor optimizado desde el punto de vista de Ruido Térmico, M<sup>ó</sup>ptima, Umbral

óptimo, frecuencia de corte del receptor óptima y instante de muestreo óptimo.

-  $P(e/0) = P(e/1) = 10^{-9}$

- Amplificador : figura 2

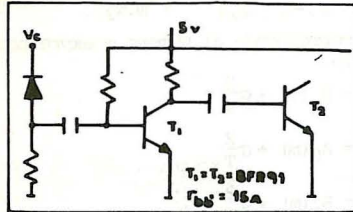


figura 2

- Fotodiodo, 8 :  
 Fotodiodo de avalancha (APD):  
 $\lambda = 0.85\mu\text{m}$ ,  $S=0.5816$ ,  $K=0.02$ ,  $I_0=10\text{pA}$   
 Fotodiodo sin efecto multiplicativo (PIN):  
 $M=1$ ,  $F(M)=1$ ,  $I_0=10\text{nA}$

Para dichos datos el resultado de la simulación viene dado en la figura 3, donde  $P_0$  es la potencia óptica necesaria para tener una probabilidad de error de  $10^{-9}$  en función de la distancia L.

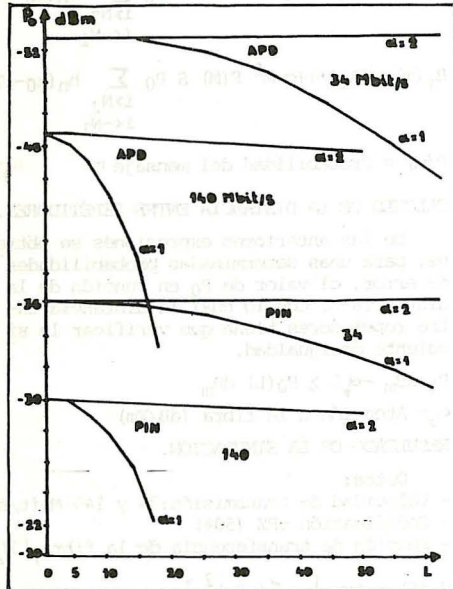


figura 3

BIBLIOGRAFIA.

/1/ S.D. Personick, The Bell System. Techn. Journal, pp. 1175-1194, September 1973.  
 /2/ S.D. Personick, The Bell System. Techn. Journal, pp. 843-

874, July-August 1973.

/3/ A. Papoulis, Probability, Random variables and stochastic Processes. Mc Graw Hill, 1965  
 /4/ S.D. Personick, P. Balaban, J.H. Bobsin and P.R. Kumar. IEEE Trans. on Comm. pp. 541-548, May 1977.  
 /5/ P.P. Webb, R.J. Mc Intyre and J. Conradi. RCA Review, pp. 234-278, June 1974.  
 /6/ G.Junyent. Tesis Doctoral. ETSITelecom. de Barcelona. Septiembre de 1979  
 /7/ R.Bouillie, J-C. Bizeul et M. Guibert. Ann. Télécomm., pp. 149-157, Mars-Avril 1977  
 /8/ J. Conradi, F.P. Kapron and J.C. Dymont. IEEE Trans. on Elect. Devices, pp. 180-192, February 1978.