

Grau en Matemàtiques

Títol: Simulació de Models Deformables Interactius amb MEF Corrotacionals

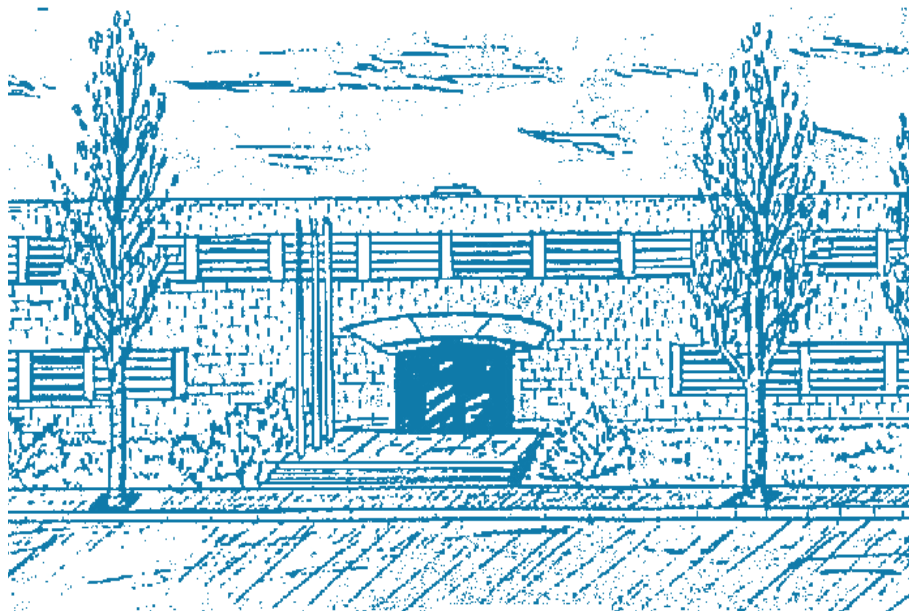
Autor: Sandra Díaz Romo

Director: Antonio Susín

Codirectora: Marta Fairén

Departament: Matemàtica Aplicada I

Convocatòria: 2015/2016



Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Treball de Fi de Grau

**Simulació de Models Deformables
Interactius amb MEF Corrotacionals**

Sandra Díaz Romo

Director: Antonio Susín, Marta Fairén

Departament de Matemàtica Aplicada I - UPC

Per a la meva família, per a tots el que hi són,
però sobretot per als que trobo a faltar.

Resum

Paraules clau: Mètodes Numèrics, Integració Numèrica, Mètode dels Elements Finites, Deformacions, Corrotacional.

MSC2000: 65-01, 65-05, 65D30.

L'objectiu principal d'aquest treball de fi de grau és realitzar un estudi del comportament dinàmic d'objectes tridimensionals sòlids deformables en la seva interacció amb forces externes.

Amb aquest propòsit, en el treball es dedueix un model físic que descriu el comportament d'aquests objectes, es planteja la resolució numèrica del model obtingut mitjançant el mètode dels elements finits i el mètode d'Euler enrere i es visualitza la solució numèrica obtinguda així com s'interpreta i es critica aquesta.

A causa d'alguns efectes indesitjats obtinguts, es proposa el mètode Corrotacional com a alternativa per a la resolució del problema. Finalment, es comenta la solució obtinguda per aquest segon mètode i es fa una comparació dels dos mètodes en termes de resultats obtinguts i de rapidesa computacional.

Abstract

Keywords: Numerical Methods, Numerical Integration, Finite Elements Method, Strain, Warped Stiffness.

MSC2000: 65-01, 65-05, 65D30.

The principal aim of this bachelor's thesis is the study of the dynamic behaviour of tridimensional deformable solid objects interacting with external forces.

In order to fulfill that purpose, we derive a physical model which describes the behaviour of these objects, we set out a numerical strategy for solving the stated model using the Finite Elements Method and using the backward Euler method and we display, analyze and evaluate the numerical solution obtained.

Due to some artifacts that can be seen in the obtained solution, we suggest the Warped Stiffness method as an alternative to solve our problem. Lastly, we evaluate the solution obtained using the suggested method and compare both methods regarding its results and its computational efficiency.

1

Introducció

Avui en dia, és freqüent que els centres públics i les empreses contractin a experts que utilitzin les matemàtiques com a eina per tractar de predir certs comportaments físics. Ja que, fent un estudi teòric d'aquestes situacions físiques, s'obté un estalvi en recursos i en capital. Per dur a terme aquesta tasca amb èxit, els experts han de solucionar els problemes físics proposats, així com visualitzar eficientment les solucions trobades. Com els problemes que es volen resoldre representen situacions que es donen al nostre dia a dia, les solucions obtingudes han de ser físicament fidedignes, ja que, d'elles s'espera extreure'n conclusions per tal de millorar certs aspectes.

Però no només és important que les solucions siguin el més exactes possibles. Gràcies als avenços en matèria de gràfics obtinguts en els últims temps, també és important que la visualització d'aquesta solució obtinguda sigui realista i que el client en pugui interactuar en temps real.

Alguns dels estudis plantejats per les empreses són l'estudi del comportament de fluids, l'estudi de la difusió de calor en certs materials o la difusió d'un contaminant en un medi ambient, l'estudi del comportament dels mercats de borsa, l'anàlisi estructural, etc.

Per això, és freqüent la creació d'aplicacions gràfiques que permetin visualitzar, per exemple, el comportament d'un òrgan en concret al ser tallat per un busturí, com afectarien vents de velocitats concretes a la expansió d'un contaminant que surt continuament per una xemeneia industrial, comportaments dinàmics de certs personatjes de videojocs, etc.

En aquest treball ens proposem estudiar el comportament d'objectes sòlids no-rígid tridimensionals que es deformaran sota l'efecte de diversos fenòmens físics, com poden ser forces externes. El nostre objectiu serà trobar un model matemàtic que descriu el seu comportament dinàmic i solucionar aquest numèricament, així com interpretar la solució trobada i fer una crítica de la validesa d'aquesta mitjançant la seva visualització utilitzant el programa matemàtic Matlab.

Nocions Preliminars

En aquesta primera secció presentem alguns dels conceptes físics i matemàtics als quals ens referirem reiteradament en les següents seccions del treball. En concret, parlarem dels conceptes de medi continu i isotropia d'un material, definirem matemàticament els conceptes de cos i configuració i, per últim, esmenarem certes propietats elàstiques dels materials que ens seran d'interés.

2.1 Medis continus

A la natura, tots els materials, ja siguin sòlids, líquids o gasosos, estàn formats per molècules. Aquestes molècules estan separades per espais buits, per tant, no tenim, a escala microscòpica, continuïtat en el material.

Malgrat aquestes discontinuïtats, assumirem que la matèria és continua. És a dir, considerarem que la matèria del cos està distribuïda uniformement per tot l'espai que ocupa. Aquesta simplificació a l'hora de modelitzar el comportament del material serà vàlida quan la distància entre les partícules del material sigui molt petita en comparació a la mida del problema.

La hipòtesi de continuïtat del material ens permet considerar que les propietats característiques de cada material són contínues, el qual, ens permetrà definir-les matemàticament com a funcions contínues.

2.2 Cossos i configuracions

Sigui \mathcal{B} un cos. Considerant aquest com a continu, definim formalment un cos \mathcal{B} com una col·lecció d'elements volumètrics que es poden posar en correspondència bijectiva amb una regió connexa \mathcal{R} de l'espai. Un element volumètric $p \in \mathcal{B}$ s'anomena partícula o punt material.

És a dir, donat un cos \mathcal{B} , existeix un morfisme bijectiu $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{R}$ tal que

$$\mathbf{x} = \chi(p) \text{ on } p \in \mathcal{B}, \mathbf{x} \in \mathcal{R} \quad (2.1)$$

Per tant, el morfisme χ porta les partícules del cos a la seva ubicació en l'espai. Com aquest és bijectiu, existeix i està ben definit el morfisme invers $\chi^{-1} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{B}$.

Diem que el morfisme χ és una configuració del cos \mathcal{B} , que \mathbf{x} és la posició que ocupa la partícula p en la configuració χ i que \mathcal{R} és la regió de l'espai que ocupa el cos en la configuració χ , per això, normalment es denota $\mathcal{R} = \chi(\mathcal{B})$.

És remarcable el fet de que tant cos com partícula son conceptes abstractes als quals ens podem referir a través de les configuracions.

2.3 Deformacions

Com el nostre objectiu és estudiar la deformació d'un cos, ens agradaria identificar la posició d'una partícula en diferents instants de temps. Amb aquest propòsit, diferenciarem entre dos tipus de configuracions. Aquestes són, la configuració de referència, o inicial, i les configuracions donat instant de temps t .

Anomenarem configuració de referència, o inicial, al morfisme $\chi_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{R}_0$ que envia les partícules p del cos a la configuració en qual el cos està en repòs, si en volem estudiar la dinàmica, o a una configuració escollida.

Així mateix, donat un instant de temps t , anomenarem configuració deformada en l'instant t al morfisme $\chi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{R}_t$ que envia les partícules del cos a les posicions d'aquest en l'instant t .

Donades dues configuracions, la inicial χ_0 i la deformada passat un temps t , χ_t , definim la deformació del cos \mathcal{B} com el morfisme $\chi_t \circ \chi_0^{-1}$. Així, definim la deformació d'un punt $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_0$ passat un temps t com el punt

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \chi_t \circ \chi_0^{-1}(\mathbf{x}) = \chi_t(\chi_0^{-1}(\mathbf{x})) \in \mathcal{R}_t \quad (2.2)$$

De la mateixa forma, donats dos instants de temps t_1, t_2 , podem considerar el morfisme $\chi_{t_2} \circ \chi_{t_1}^{-1}$, o la seva inversa $\chi_{t_1} \circ \chi_{t_2}^{-1}$, que ens relacionen les posicions del cos en els dos instants de temps.

2.4 Propietats dels materials

A part de la hipòtesi de continuïtat de la matèria, per al nostre problema també considerarem que els cossos estan fets de materials isòtrops, és a dir, de materials en els quals les seves característiques no depenen de la direcció en la qual són mesurades, això és, que tenen el mateix valor en totes les direccions.

A continuació, estudiarem algunes del paràmetres que mesuren la duresa i la resposta a la deformació dels materials elàstics.

2.4.1 Mòdul de Young

El mòdul de Young, E , també conegut com mòdul d'elasticitat, és la mesura de la rigidesa d'un material elàstic. El definim com la relació entre la tensió, força per unitat d'àrea, i la deformació provocada al material per aquesta. És a dir, el mòdul de Young és una mesura de quant un material es deforma sota l'acció d'una força donada.

Aquesta propietat mecànica dels materials té unitats de pressió, en el Sistema Internacional es mesura amb pascals (Pa). Un mòdul de Young molt gran implicarà que tractem amb un material molt rígid.

Matemàticament, podem considerar el mòdul de Young com una funció $E : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Donat un material isòtrop, és una funció constant per a tot el material, és a dir $E(\mathbf{x}) = E_{\mathcal{B}} \forall \mathbf{x}$ on $E_{\mathcal{B}}$ és el mòdul de Young del material en qüestió.

2.4.2 Coeficient de Poisson

Considerem un prisma de material elàstic lineal i isòtrop que s'està comprimint en una direcció. Normalment, el prisma s'allargarà en les dues direccions perpendiculars a la direcció de compressió. El coeficient de Poisson, ν , és una constant elàstica que mesura aquest fenomen. No té unitats.

Gràcies a la hipòtesi d'isotropia del material, podem considerar el coeficient de Poisson com la funció constant $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ que envia cada punt de la regió \mathcal{R} al seu valor del coeficient de Poisson, en aquest cas, constant.

2.4.3 Mòdul d'elasticitat transversal

El mòdul d'elasticitat transversal, també conegut com mòdul de cisallament, és una constant elàstica que caracteritza el canvi de forma que experimenta un material elàstic quan s'apliquen esforços tallants.

Serà una propietat del material que ens interesi perquè per a un material isòtrop elàstic lineal aquest mòdul està relacionat amb el mòdul de Young i el coeficient de Poisson mitjançant l'expressió

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.3)$$

Gràcies a (2.3), podem deduir que les unitats del mòdul d'elasticitat són les mateixes que les del mòdul de Young, ja que el coeficient de Poisson és adimensional. És a dir, les seves unitats són els pascals (Pa).

3

Deducció del model matemàtic

En aquesta secció deduirem les equacions que governen la dinàmica d'un objecte tridimensional sòlid deformable sota l'acció de forces externes, aportant les interpretacions físiques de les nostres eleccions matemàtiques.

3.1 Descripció del problema

El nostre objectiu és descriure matemàticament el comportament en el temps, o, el que és el mateix, la dinàmica, d'un cos tridimensional sòlid no rígid, és a dir, que es pot deformar a causa de l'acció de forces externes.

Per aquesta raó, assumirem continuïtat en la matèria, ja que no tractarem amb objectes d'escala microscòpica. Així mateix, considerarem que el material pel qual està format el cos és isotròpic, és a dir, que les seves propietats mecàniques, com poden ser la densitat, el coeficient de Poisson, el mòdul de Young, etcètera, no depenen de la direcció des de la qual són mesurades.

3.2 Consideracions prèvies

3.2.1 Desplaçament

Com estem interessats en descriure el moviment que descriu un cos, necessitem poder saber com es deforma a través del temps. Una forma de fer-ho és mesurant el seu desplaçament respecte un temps inicial, és a dir, calculant la diferència entre certes posicions que ocupava el cos en l'espai en la seva configuració inicial i la seves respectives posicions a la configuració deformada.

Sigui \mathcal{B} un cos situat a una regió de l'espai \mathcal{R} . Considerem que la posició $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ de l'espai és la que ocupa una partícula en concret del cos. Quan hi apliquem una força, passat un temps t , aquesta partícula es desplaça fins a una nova posició $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})^T$.

Així, definim el desplaçament d'aquesta partícula passat un temps t com el vector

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x} \quad (3.1)$$

on notem les components del vector de desplaçament com

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}, t) \\ v(\mathbf{x}, t) \\ w(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

El vector de desplaçament $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ indueix el camp de desplaçaments $\mathbf{u}(\cdot, t)$ a Ω , amb el qual ens es possible mesurar el desplaçament de totes les partícules del cos passat un temps t .

3.2.2 La Llei de Hooke

L'aplicació de dues forces, amb la mateixa direcció però amb diferents mòduls, en un mateix punt \mathbf{x} dóna lloc a dos desplaçaments diferents de la partícula que ocupava la posició \mathbf{x} . Per aquest motiu, volem establir una relació entre la força exercida i el desplaçament ocasionat per aquesta.

Considerem primer el cas unidimensional. Suposem que tenim el problema d'una barra unidimensional de longitud l i de secció circular A col·locada sobre l'eix x . Quan es produeix una força f , en la direcció de les x , sobre la barra, aquesta s'estira i la seva longitud augmenta en Δl .

La llei de Hooke relaciona la força exercida sobre la barra amb l'allargament d'aquesta mitjançant l'igualtat

$$\frac{f}{A} = E \frac{\Delta l}{l} \quad (3.3)$$

on E és el mòdul d'elasticitat, també conegut com mòdul de Young. Podem escriure aquesta llei de forma més compacta com

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.4)$$

on $\sigma = \frac{f}{A}$ denota la tensió mecànica, és a dir, la força aplicada per unitat d'àrea, i on $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ és a deformació produïda per la força aplicada.

Per al nostre cas, el tridimensional, volem generalitzar de la llei de Hooke per a obtenir una equació constitutiva que ens relacioni la deformació amb les tensions mecàniques del cos.

3.3 Deformació

Per poder dur a terme la generalització de la llei de Hooke, és prioritari trobar l'expressió de la deformació que experimenta el cos tridimensional del qual n'estudiem la dinàmica.

Al cas unidimensional, la deformació ε s'expressava mitjançant un escalar. Quan treballem considerant tres dimensions, la deformació ja no es pot representar mitjançant un escalar, sinó que es representa mitjançant un tensor simètric. Donada una base de l'espai en el qual treballem, el podem expressar com la matriu simètrica

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Considerem el punt $\mathbf{p}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$, amb t fixe, que pertany a un entorn de \mathbf{x} . És a dir, considerem un desplaçament petit del punt \mathbf{x} passat un temps t . Podem suposar, sense perdre la generalitat, que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Així, podem aproximar $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ linealment com

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{0}) + \nabla \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + O(|\mathbf{x}|^2) = \mathbf{p}(\mathbf{0}) + \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + O(|\mathbf{x}|^2) \quad (3.6)$$

Negligint els termes d'ordre superior a 1, obtenim l'aproximació

$$\mathbf{p}(x, y, z) \approx \mathbf{p}(\mathbf{0}) + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \cdot z \quad (3.7)$$

En la nova configuració, els punts que pertanyien a un entorn del punt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, s'expressen en el sistema de referència format pel punt $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{0})$, com a origen, amb els vectors $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z}$ com a eixos.

Per tal de que l'entorn de $\mathbf{0}$ no es distorsioni, és a dir, que només es traslladi en l'espai conservant les distàncies entre els punts, hem de demanar que els nous eixos siguin vectors unitaris, així com linealment independents. Aquests dos requeriments es poden expressar de forma compacta com

$$(\nabla \mathbf{p})^T \nabla \mathbf{p} = I \quad (3.8)$$

on

$$(\nabla \mathbf{p})^T \nabla \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x}^T \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y}^T \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x}|^2 & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} & |\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y}|^2 & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} & |\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z}|^2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Considerem un punt del cos \mathbf{x} en la configuració inicial. Passat un temps t , aquesta partícula del cos es troba en $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$. El compliment de la condició (3.8) per part d'aquest punt implica que no hi ha hagut cap deformació en el seu entorn, així, és coherent definir la deformació d'un punt $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, respecte el seu punt inicial \mathbf{x} , com

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = (\nabla \mathbf{p}(\mathbf{x}, t))^T \nabla \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) - I \quad (3.10)$$

Utilitzant aquesta definició, obtindrem que les components de ε positives si el material s'estira i negatives si el material es contreu.

Si expressem (3.10) en funció de \mathbf{u} , tenint en compte que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$ implica que, derivant respecte les coordenades espaials, $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{I}$, obtenim

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + I)^T (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + I) - I \quad (3.11)$$

Expressió que, desenvolupada, dóna lloc a la definició del tensor de deformacions

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (3.12)$$

Aquest tensor es conegut com el tensor de deformacions de Green si hi afegim un factor $\frac{1}{2}$.

Per al nostre problema considerarem la linealització del tensor de deformacions de Green, és a dir, considerarem que el tensor de deformacions, per a cada punt \mathbf{x} i per a cada instant de temps t , és

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T) \quad (3.13)$$

conegut com el tensor de deformacions de Green-Cauchy.

El fet de considerar la part lineal del tensor de deformacions és suposar que les forces elàstiques de l'objecte es comporten de forma lineal.

3.4 Tensió mecànica

La tensió mecànica és la magnitud física que representa força per unitat d'àrea en l'entorn d'una partícula d'un material continu.

En l'espai euclidi tridimensional, així com passava amb la deformació, la tensió mecànica es representa amb un tensor simètric. Donada una base de l'espai euclidi tridimensional, el podem expressar com la matriu simètrica

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Donada una partícula d'un cos, la seva deformació depèn de la direcció en la qual la mesurem. Aquesta mateixa idea s'aplica a la tensió mecànica: considerem que \mathbf{n} és el vector en la direcció en la qual volem mesurar la tensió mecànica. Aleshores,

$$\frac{d\mathbf{f}}{dA} = \sigma \mathbf{n} \quad (3.15)$$

És a dir, la força per àrea d'una partícula respecte un cert pla amb normal \mathbf{n} s'obté multiplicant el tensor σ per la normal.

3.5 Equació constitutiva

Un cop hem definit els conceptes de deformació i de tensió mecànica en tres dimensions, volem trobar una expressió que els relacioni, és a dir, una equació constitutiva d'aquests dos conceptes físics, de la forma

$$\sigma = D\varepsilon \quad (3.16)$$

Per fer això, generalitzarem la llei de Hooke unidimensional. Considerem un cos \mathcal{B} , que ocupa una regió \mathcal{R} de l'espai donada una certa configuració χ . Considerem que, en la seva representació física, el material pel qual està format el cos és isotrop.

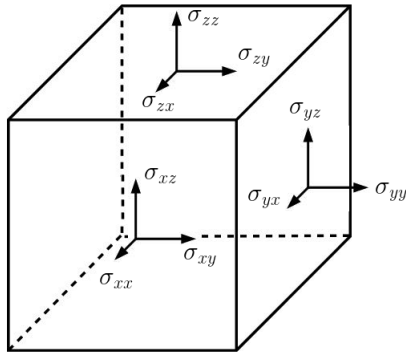


Fig. 3.1

Dintre d'aquest cos, considerem un element de volum en forma de cub, com a la Figura 1.1, on hem representat també les direccions de la tensió mecànica i on els escalars σ_{ij} amb $i, j \in \{x, y, z\}$ que representen la magnitud de la deformació, són les components de la matriu σ .

Si apliquem una força normal, en direcció de les x i de mòdul σ_{xx} , al centre de les cares del cub perpendiculars a l'eix x , obtenim una deformació

$$\varepsilon_{xx}^{(1)} = \frac{1}{E}\sigma_{xx}, \quad \varepsilon_{yy}^{(1)} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx}, \quad \varepsilon_{zz}^{(1)} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} \quad (3.17)$$

on E és el mòdul de Young i on ν és el coeficient de Poisson.

Utilitzant el mateix raonament, si apliquem forces normals σ_{yy} , σ_{zz} al centre de les cares del cub perpendiculars als eixos y, z , en aquestes direccions, respectivament, obtenim les deformacions

$$\varepsilon_{yy}^{(2)} = \frac{1}{E}\sigma_{yy}, \quad \varepsilon_{xx}^{(2)} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{yy}, \quad \varepsilon_{zz}^{(2)} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{yy} \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(3)} = \frac{1}{E}\sigma_{zz}, \quad \varepsilon_{xx}^{(3)} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz}, \quad \varepsilon_{yy}^{(3)} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \quad (3.19)$$

Considerem el cas en que el cub es sotmés a totes aquestes forces a la vegada. Com suposem que l'elasticitat és lineal, la deformació s'obté superposant les deformacions en cada direcció. Així, tenim

$$\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{xx}^{(2)} + \sigma_{xx}^{(3)} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{yy} = \sigma_{yy}^{(1)} + \sigma_{yy}^{(2)} + \sigma_{yy}^{(3)} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(2)} + \sigma_{zz}^{(3)} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (3.22)$$

A més, sabem que les tensions tangencials i les deformacions tangencials estan relacionades mitjançant el mòdul d'elasticitat transversal, per tant, podem escriure

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\sigma_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\sigma_{yz}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G}\sigma_{zx} \quad (3.23)$$

on $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Així, considerant totes les relacions obtingudes i utilitzant que treballam amb tensors simètrics, podem expressar la relació entre la deformació i les tensions mecàniques mitjançant la matriu

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Finalment, invertint la matriu donada a l'expressió (3.24), obtenim l'expressió del tensor de tensió mecànica respecte el tensor de deformacions, donada per

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

3.6 Equació del moviment

La segona llei de Newton aplicada a un punt material \mathbf{x} del cos, s'escriu com

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = \mathbf{f} \quad (3.26)$$

En l'expressió anterior, tenim que $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t)$ és la funció que ens dóna la posició de la partícula \mathbf{x} en l'instant t , és a dir, $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$. Per tant, podem escriure

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} = \mathbf{f} \quad (3.27)$$

on $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$. Aquesta expressió és vàlida donat un únic punt \mathbf{x} . El nostre objectiu és generalitzar-la per a un element de volum infinitesimal $dV = dxdydz$ situat a la posició \mathbf{x} en la configuració inicial del cos. Com la massa m d'un element volumètric dV no està definida, hem de dividir l'equació del moviment pel volum de l'element $dxdydz$ per així aconseguir l'equació del moviment en funció de la densitat (kg/m^3), en comptes de la massa (kg), i de forces de volum (N/m^3), en comptes de forces puntuals (N). Així, obtenim

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.28)$$

on ρ és la densitat de l'element i $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ és la suma de les forces externes, com la gravetat, i les forces internes, ocasionades per la deformació, que actuen sobre el cos.

Les forces internes que actuen sobre l'element de volum infinitesimal són la suma de les forces que actuen a cada una de les sis cares d'aquest.

Considerem primer les dues cares perpendiculars a l'eix x . Considerem que el centre de la primera està situat a $(x, y, z)^T$ amb normal $(-1, 0, 0)^T$ i el centre de la segona cara està situat a $(x + dx, y, z)^T$ amb normal $(1, 0, 0)^T$. Utilitzant (3.15), sabem que les forces per unitat d'àrea que actuen sobre aquestes cares són

$$-\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \Big|_{(x,y,z)} dydz, \quad , \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \Big|_{(x+dx,y,z)} dydz \quad (3.29)$$

respectivament. Per obtenir les forces volumètriques, hem de dividir les forces per $dV = dxdydz$. Així, la força total de les dues cares és

$$\mathbf{f}_x = \frac{1}{dx} \left(\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \Big|_{(x+dx,y,z)} - \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \Big|_{(x,y,z)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Considerant el mateix per les 4 cares restants de l'element volumètric, obtenim

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_x + \mathbf{f}_y + \mathbf{f}_z = \nabla \cdot \sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Així, podem escriure l'equació del moviment (3.28) com

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_{ext} \quad (3.32)$$

Aquest sistema d'EDPs hiperbòlic és el que governa la dinàmica dels materials elàstics i és el que s'utilitza per calcular les coordenades $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ de totes les partícules del cos \mathbf{x} per a cada instant de temps.

Si derivem (3.7) dos cops respecte el temps, obtenim que $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}$, i així, tenim que (3.32) es pot reescriure com

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_{ext} \quad (3.33)$$

Utilitzant aquest sistema, expressat en funció del vector de desplaçaments, en comptes de l'obtingut a (3.32), enllacem les expressions obtingudes dels tensors de deformació i de tensió mecànica i, a més, ens serà més senzill, i físicament intuïtiu, imposar condicions de contorn per al nostre problema.

3.7 Condicions de contorn

Considerem la frontera del domini Ω , és a dir, la superfície tridimensional $\partial\Omega$, com la unió disjunta

$$\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t \quad (3.34)$$

Donada aquesta definició, distingim dos tipus de condicions de contorn per a aquest tipus de problemes de deformacions elàstiques:

- El primer tipus de condició de contorn es basa en imposar l'actuació de forces sobre la superfície $\Gamma_t \in \partial\Omega$. És a dir, imposem

$$\sigma \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad (3.35)$$

per a forces $\bar{\mathbf{t}}$ conegudes.

- El segon tipus de condicions de contorn que podem imposar és fixar la part de la frontera Γ_u , és a dir, imposar que no experimenti cap desplaçament. Això s'expressa matemàticament com la condició

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u, \forall t \quad (3.36)$$

3.8 Model matemàtic del problema

El sistema d'equacions que modela el comportament d'un sòlid elàstic sota l'acció de forces externes és

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{ext} & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t > 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} & \mathbf{x} \in \Gamma_t, \quad t > 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (3.37)$$

on Ω és l'espai físic ocupat per l'objecte del qual volem estudiar el comportament elàstic.

El sistema d'EDPs del problema (3.37) està format per 3 equacions amb 3 incògnites. Aquestes són les funcions components del vector de desplaçaments, u , v i w . No considerem les components de $\boldsymbol{\sigma}$, σ_{ij} , com a incògnites del problema ja que tenim la seva expressió en funció del tensor de deformacions $\boldsymbol{\varepsilon}$, mitjançant (3.16), i aquest es pot expressar en funció de les tres incògnites del sistema, u , v i w , mitjançant (3.13).

Com a conseqüència d'haver escollit que el tensor de deformacions sigui lineal i a més, a causa de la isotropia del material, que la llei constitutiva que relaciona aquest amb el tensor de tensió mecànica també tingui una expressió lineal, el nostre sistema d'EDPs és un sistema lineal d'equacions en derivades parcials.

4

Model numèric

Amb el propòsit de resoldre numèricament el problema tridimensional (3.37), discretitzarem l'espai i obtindrem un sistema lineal d'equacions mitjançant l'ús del mètode dels elements finits i utilitzarem el mètode implícit Euler enrere per a la seva resolució al llarg temps.

4.1 Mètode dels elements finits tridimensional

Malgrat que, per a la construcció del model, hem considerat que l'objecte físic que correspon al cos és un medi continu, computacionalment no és viable resoldre el problema per als infinits punts d'aquest. La forma més usual d'abordar aquesta dificultat és considerar una discretització del nostre domini i calcular numèricament la solució del nostre problema en un conjunt finit de punts.

Donat un conjunt de P_Ω punts del domini, considerarem una malla d'aquests formada per tetraedres, és a dir, poliedres formats per quatre cares i quatre vèrtexs. On els vèrtexs pertanyeran al conjunt dels P_Ω punts.

Per a la resolució numèrica de les incògnites, considerarem l'aproximació de la funció de desplaçaments

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{P_\Omega} N_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j^H(t) = \sum_{j=1}^{P_\Omega} N_j(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} u_j(t) \\ v_j(t) \\ w_j(t) \end{pmatrix} = N(\mathbf{x}) \mathbf{u}^H(t) \quad (4.1)$$

on N és la matriu

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_{P_\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_{P_\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_{P_\Omega} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

en la qual, $N_i \equiv N_i(\mathbf{x}) \forall i$, i on

$$\mathbf{u}^H = (u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \dots \quad u_{P_\Omega} \quad v_{P_\Omega} \quad w_{P_\Omega})^T \quad (4.3)$$

amb les components d'aquest vector dependents del temps.

Les funcions que conformen les components de la matriu N s'anomenen funcions de forma, i són funcions $N_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tals que compleixen

$$N_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} = \mathbf{p}_j, \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} = \mathbf{p}_i, i \neq j \end{cases}$$

Per tal de treballar amb expressions de les funcions de forma el més senzilles possible i facilitar els càlculs a fer en cada tetraedre, aplicarem una transformació isoparamètrica a cada element per, així, treballar en el tetraedre unitat, és a dir, el tetraedre que té com a vèrtexs els punts $(0, 0, 0)^T$, $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$.

4.1.1 Transformació isoparamètrica

Sigui Ω_e el tetraedre que té com a vèrtexs els punts $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$, on $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$.

Una factor a tenir en compte és com escollim aquests punts, és a dir, el criteri de numeració dels nodes. Per a numerar els nodes, el nostre criteri és, agafant un node qualsevol com a \mathbf{p}_4 , numerar els restants en sentit antihorari quan s'observa la cara que formen des de \mathbf{p}_4 . Escollim aquest criteri perquè així el volum V del tetraedre, que es calcula com

$$V = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

serà positiu. Un volum negatiu no té cap significat físic.

Considerem les coordenades baricèntriques del tetraedre per descriure els punts d'aquest, és a dir, donat un punt $\mathbf{p} = (x, y, z)^T$ que pertany a l'interior del tetraedre, el podem descriure com

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\xi + (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)\eta + (\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1)\mu \quad (4.5)$$

per a $\xi, \eta, \mu \in [0, 1]$. L'expressió (4.5) es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Diem que $\tilde{\mathbf{p}} = (\xi, \eta, \mu)$ són les coordenades baricèntriques del punt \mathbf{p} respecte el tetraedre Ω_e .

El jacobià d'aquest canvi de coordenades és

$$J = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Mitjançant l'equació (4.6), podem expressar les coordenades baricèntriques en funció de les coordenades cartesianes com

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Així, donat un tetraedre Ω_e , definim la transformació isoparamètrica, φ , com

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

on $\varphi : \Omega_e \rightarrow \tilde{\Omega}$, on $\tilde{\Omega}$ denota el tetraedre unitat.

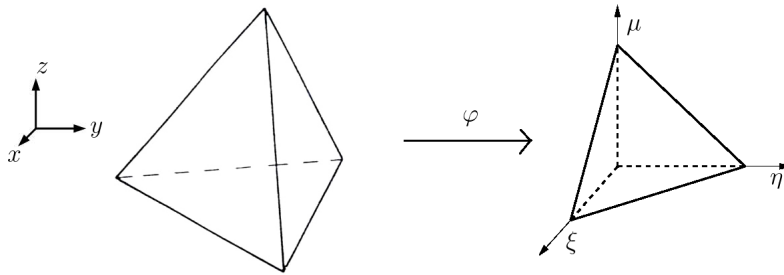


Fig. 4.1

Suposem que tenim una funció $f : \Omega_e \rightarrow \tilde{\Omega}$ definida al tetraedre Ω_e , aleshores, podem expressar f en funció de les coordenades baricèntriques definint-la com la composició $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) := f(\varphi(\mathbf{x}))$.

A més, utilitzant la regla de la cadena, obtenim que

$$\nabla f = (J^T)^{-1} \tilde{\nabla} \tilde{f} \quad (4.10)$$

on J és la matriu jacobiana del canvi de base.

4.1.2 Funcions de forma

Gràcies a l'aplicació d'una transformació isoparamètrica sobre els diferents tetraedres que conformen el domini, treballarem únicament amb el tetraedre unitat. Així, necessitem definir les funcions de forma sobre aquest.

Per tant, busquem funcions $\tilde{N}_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que compleixin

$$\tilde{N}_j(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{p}}_j, \\ 0 & \text{if } \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{p}}_i, i \neq j \end{cases}$$

on, pel tetraedre unitat $\tilde{\Omega}$, $\mathbf{p}_1 = (0, 0, 0)^T$, $\mathbf{p}_2 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{p}_3 = (0, 1, 0)^T$ i $\mathbf{p}_4 = (0, 0, 1)^T$.

Com les coordenades dels punts del tetraedre unitat són senzilles, les expressions de les funcions de forma són també senzilles. Aquestes són

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1(\xi, \eta, \mu) &= 1 - \xi - \eta - \mu \\ \tilde{N}_2(\xi, \eta, \mu) &= \xi \\ \tilde{N}_3(\xi, \eta, \mu) &= \eta \\ \tilde{N}_4(\xi, \eta, \mu) &= \mu \end{aligned}$$

Podem trobar les expressions de les funcions de forma expressades en funció de les coordenades cartesianes utilitzant que $\tilde{N}_i(\tilde{\mathbf{x}}) := N_i(\varphi(\mathbf{x}))$, és a dir, aplicant un canvi de base.

4.2 Forma feble

Aplicarem el mètode de Galerkin per trobar la forma feble del nostre problema. Aquest mètode consisteix en multiplicar el sistema d'EDPs per unes certes funcions, anomenades funcions de pes, que compleixen les condicions de Dirichlet homogènies en la frontera de Dirichlet, i en integrar sobre el domini tota l'equació.

Considerem l'equació vectorial

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \sigma - \mathbf{f}_{ext} = 0 \quad (4.11)$$

obtinguda de l'equació (3.33) de la secció anterior.

Multiplicant (4.11) per una funció escalar $w \equiv w(\mathbf{x})$, que compleix que $w \in V(\Omega) = \{\mathbf{v}(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \Omega \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u\}$, i integrant respecte el domini Ω , obtenim

$$\int_{\Omega} w \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \sigma - \mathbf{f}_{ext} \right) d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

Separant les integrals, tenim

$$\int_{\Omega} \rho w \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega - \underbrace{\int_{\Omega} w (\nabla \cdot \sigma) d\Omega}_{(*)} - \int_{\Omega} w \mathbf{f}_{ext} d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

i integrant (*) per parts,

$$\int_{\Omega} \rho w \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega - \int_{\partial\Omega} w \sigma \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma \nabla w d\Omega - \int_{\Omega} w \mathbf{f}_{ext} d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

Per últim, considerant la definició de la frontera (3.34), tenim que

$$\int_{\Omega} \rho w \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega - \underbrace{\int_{\Gamma_u} w \sigma \cdot \mathbf{n} d\Gamma}_{=0, \text{ ja que } w \in V(\Omega)} - \int_{\Gamma_t} w \sigma \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma \nabla w d\Omega - \int_{\Omega} w \mathbf{f}_{ext} d\Omega = 0 \quad (4.15)$$

Així, definim la forma feble, o integral, del nostre problema com:

Busquem $\mathbf{u} \in V(\Omega) = \{\mathbf{v}(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \Omega \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u\}$ tal que

$$\int_{\Omega} \rho w \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla w d\Omega = \int_{\Gamma_t} w \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} w \mathbf{f}_{ext} d\Omega \quad (4.16)$$

$\forall w \in V(\Omega)$.

4.3 Sistema lineal d'equacions

A partir de la forma feble del problema, busquem trobar un sistema d'equacions, en aquest cas, lineal. Per tal de trobar el sistema per al problema global, és a dir, amb domini Ω , primer calcularem l'expressió de les matrius i vectors que conformen el sistema d'equacions elemental i després les ensamblarem per a obtenir el sistema global.

4.3.1 Problema elemental

Considerem primer la forma feble del problema (4.16) considerant Ω_e com a domini en comptes de Ω . És a dir, considerem el problema per a un sol element. Aquesta s'escriu com:

Busquem $\mathbf{u}^e \in V(\Omega_e) = \{\mathbf{v}(\cdot, t) : \Omega_e \rightarrow \Omega_e \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{u_e}\}$ tal que

$$\int_{\Omega_e} \rho w \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial t^2} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \sigma \nabla w d\Omega_e = \int_{\Gamma_{t_e}} w \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_e + \int_{\Omega_e} w \mathbf{f}_{ext} d\Omega_e \quad (4.17)$$

$\forall w \in V(\Omega)$.

Per trobar l'expressió de les matrius que formen part del sistema d'equacions, considerarem

$$w(\mathbf{x}) = N_i(\mathbf{x}) \quad \text{per a } i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.18)$$

A més, en un element format per 4 nodes, com és el cas dels tetraedres lineals, podem aproximar la funció de desplaçaments com

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}_H^e(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^4 N_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j^{e,H}(t) = \sum_{j=1}^4 N_j(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} u_j^e(t) \\ v_j^e(t) \\ w_j^e(t) \end{pmatrix} = N(\mathbf{x}) \mathbf{u}^{e,H}(t) \quad (4.19)$$

on N és la matriu

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

en la qual, $N_i \equiv N_i(\mathbf{x}) \forall i, \mathbf{x}$ on

$$\mathbf{u}^{e,H} = (u_1^e \quad v_1^e \quad w_1^e \quad u_2^e \quad v_2^e \quad w_2^e \quad u_3^e \quad v_3^e \quad w_3^e \quad u_4^e \quad v_4^e \quad w_4^e)^T \quad (4.21)$$

amb les components d'aquest vector dependents del temps.

Així, introduïrem les expressions de w i $\mathbf{u}^e(\mathbf{x})$, (4.18) i (4.19) respectivament, a l'equació integral de la forma feble elemental

$$\underbrace{\int_{\Omega_e} \rho w \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial t^2} d\Omega_e}_{(1)} + \underbrace{\int_{\Omega_e} \sigma \nabla w d\Omega_e}_{(2)} = \underbrace{\int_{\Gamma_{t_e}} w \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_e}_{(3)} + \underbrace{\int_{\Omega_e} w \mathbf{f}_{ext} d\Omega_e}_{(4)} \quad (4.22)$$

on hem diferenciat les diferents integrals per a fer les substitucions de cada part per separat.

(1) Matriu de massa.

Substituint l'expressió (4.19) en (1), trobem

$$\int_{\Omega_e} \rho w \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial t^2} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \rho N_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{e,H}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) d\Omega_e = \underbrace{\int_{\Omega_e} \rho N_i N d\Omega_e}_{\mathbf{M}_{e_i}} \frac{d^2 \mathbf{u}^{e,H}}{dt^2}(t) \quad (4.23)$$

on N és la matriu donada per (4.20).

Així, obtenim la matriu de massa elemental

$$\mathbf{M}^e = \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{M}_1^e \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{M}_2^e \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{M}_3^e \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{M}_4^e \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^e & \mathbf{M}_{1,2}^e & \mathbf{M}_{1,3}^e & \mathbf{M}_{1,4}^e \\ \mathbf{M}_{2,1}^e & \mathbf{M}_{2,2}^e & \mathbf{M}_{2,3}^e & \mathbf{M}_{2,4}^e \\ \mathbf{M}_{3,1}^e & \mathbf{M}_{3,2}^e & \mathbf{M}_{3,3}^e & \mathbf{M}_{3,4}^e \\ \mathbf{M}_{4,1}^e & \mathbf{M}_{4,2}^e & \mathbf{M}_{4,3}^e & \mathbf{M}_{4,4}^e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12 \times 12} \quad (4.24)$$

on

$$\mathbf{M}_{i,j}^e = \begin{pmatrix} \int_{\Omega_e} \rho N_i N_j d\Omega_e & 0 & 0 \\ 0 & \int_{\Omega_e} \rho N_i N_j d\Omega_e & 0 \\ 0 & 0 & \int_{\Omega_e} \rho N_i N_j d\Omega_e \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

(2) Matriu de rigidesa.

Per trobar l'expressió de la matriu de rigidesa del sistema, necessitem primer trobar l'expressió de la matriu que representa la tensió mecànica. Amb aquest fi, considerem la definició de la deformació amb el tensor de Cauchy.

Tenim que aquest és $\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^e + (\nabla \mathbf{u}^e)^T)$, on

$$\nabla \mathbf{u}^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^e}{\partial x} & \frac{\partial u^e}{\partial y} & \frac{\partial u^e}{\partial z} \\ \frac{\partial v^e}{\partial x} & \frac{\partial v^e}{\partial y} & \frac{\partial v^e}{\partial z} \\ \frac{\partial w^e}{\partial x} & \frac{\partial w^e}{\partial y} & \frac{\partial w^e}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Per tant, l'expressió del tensor simètric ε en funció de les derivades espaials de les components de \mathbf{u}^e és

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^e}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^e}{\partial y} + \frac{\partial v^e}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^e}{\partial z} + \frac{\partial w^e}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} + \frac{\partial u^e}{\partial y} \right) & \frac{\partial v^e}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^e}{\partial z} + \frac{\partial w^e}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^e}{\partial x} + \frac{\partial u^e}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^e}{\partial y} + \frac{\partial v^e}{\partial z} \right) & \frac{\partial w^e}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Així, podem obtenir, utilitzant l'expressió de la deformació trobada, l'expressió de la tensió mecànica en funció de les derivades espaials de les components de \mathbf{u}^e , que és

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu)\frac{\partial u^e}{\partial x} + \nu\frac{\partial v^e}{\partial y} + \nu\frac{\partial w^e}{\partial z} \\ \nu\frac{\partial u^e}{\partial x} + (1-\nu)\frac{\partial v^e}{\partial y} + \nu\frac{\partial w^e}{\partial z} \\ \nu\frac{\partial u^e}{\partial x} + \nu\frac{\partial v^e}{\partial y} + (1-\nu)\frac{\partial w^e}{\partial z} \\ \frac{1-2\nu}{2}\left(\frac{\partial u^e}{\partial y} + \frac{\partial v^e}{\partial x}\right) \\ \frac{1-2\nu}{2}\left(\frac{\partial v^e}{\partial z} + \frac{\partial w^e}{\partial y}\right) \\ \frac{1-2\nu}{2}\left(\frac{\partial u^e}{\partial z} + \frac{\partial w^e}{\partial x}\right) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Un cop tenim l'expressió del tensor simètric, substituint aquesta a l'integral (2), trobem

$$\int_{\Omega_e} \sigma \nabla w \, d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \sigma \nabla N_i \, d\Omega_e$$

on

$$\sigma \nabla N_i = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \sigma_{xz} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \sigma_{yx} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \sigma_{yz} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \sigma_{zx} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \sigma_{zy} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Desenvolupant les components d'aquest vector, i agrupant-les degudament, obtenim

$$\sigma \nabla N_i = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (*)_1 \\ (*)_2 \\ (*)_3 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

amb

$$\begin{aligned} (*)_1 &= \sum_{j=1}^4 \left((1-\nu) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) u_j^e(t) \\ &+ \sum_{j=1}^4 \left(\nu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) v_j^e(t) \\ &+ \sum_{j=1}^4 \left(\nu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) w_j^e(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*)_2 &= \sum_{j=1}^4 \left(\frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) u_j^e(t) \\ &+ \sum_{j=1}^4 \left(\frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) v_j^e(t) \\ &+ \sum_{j=1}^4 \left(\nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) w_j^e(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*)_3 &= \sum_{j=1}^4 \left(\frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \nu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) u_j^e(t) \\
&+ \sum_{j=1}^4 \left(\frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \nu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) v_j^e(t) \\
&+ \sum_{j=1}^4 \left(\frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + (1-\nu) \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) w_j^e(t)
\end{aligned}$$

Podem expressar el vector $\sigma \nabla N_i$ de forma més compacta com $K_{i,j}^e \mathbf{u}^{e,H}$, on

$$K_{i,j}^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

on tenim que $a = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $b = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ i $c = \frac{E(1-2\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$.

Per tant, tenim

$$\int_{\Omega_e} \sigma \nabla N_i d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (*)_1 \\ (*)_2 \\ (*)_3 \end{pmatrix} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} K_{i,j}^e d\Omega_e \mathbf{u}^{e,H} \quad (4.33)$$

i, així, l'expressió de la matriu de rigidesa elemental és

$$K^e = \begin{pmatrix} K_{1,1}^e & K_{1,2}^e & K_{1,3}^e & K_{1,4}^e \\ K_{2,1}^e & K_{2,2}^e & K_{2,3}^e & K_{2,4}^e \\ K_{3,1}^e & K_{3,2}^e & K_{3,3}^e & K_{3,4}^e \\ K_{4,1}^e & K_{4,2}^e & K_{4,3}^e & K_{4,4}^e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12 \times 12} \quad (4.34)$$

on les matrius $K_{i,j}^e$ són les definides a (4.31).

(3) Forces de tracció.

Quan parlem de forces exercides sobre el tetraedre, en distingim dos tipus. Per una banda, tenim les forces que actuen únicament sobre la superfície dels elements, tals com la pressió, o les forces de tracció i, per una altra banda, tenim les forces que actuen sobre tot el volum que ocupa el tetraedre, com poden ser la gravetat o les forces electromagnètiques. Aquestes últimes també són conegudes com forces volumètriques.

Sobre la superfície dels tetraedres, considerarem les forces de tracció, que són forces que actuen a causa d'una pressió exercida, ja sigui per ser condició de contorn, o deguda a la mateixa deformació del tetraedre, que es deforma a causa de la pressió exercida pels tetraedres colindants.

Així,

$$\int_{\Gamma_{t_e}} w \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_e = \int_{\Gamma_{t_e}} N_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_e \quad (4.35)$$

Considerarem que les forces tracció imposades són forces normals, és a dir, de la forma

$$\bar{\mathbf{t}} = t_n \mathbf{n} \quad (4.36)$$

on l'escalar t_n s'anomena coeficient de tracció.

Per tant, tenim que el vector de forces de tracció del tetraedre Ω_e és

$$\mathbf{f}_t^e = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{t,1}^e \\ \mathbf{f}_{t,2}^e \\ \mathbf{f}_{t,3}^e \\ \mathbf{f}_{t,4}^e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12 \times 1} \quad \text{amb } \mathbf{f}_{t,i}^e = \int_{\Gamma_{t_e}} N_i t_n \mathbf{n} d\Gamma_e \quad (4.37)$$

A la pràctica, només calcularem les forces de tracció a les cares dels tetraedres Ω_e que formin part de la frontera $\partial\Omega$, ja que les forces entre els tetraedres interns, creades per la pressió de la deformació, es compensen a l'hora de d'ensamblar el vector de forces per obtenir-ne el global.

(4) Forces externes

Donada una força volumètrica \mathbf{b} , tenim

$$\int_{\Omega_e} w \mathbf{f}_{ext} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} N_i \mathbf{b} d\Omega_e \quad (4.38)$$

Així, definim

$$\mathbf{f}_{ext}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext,1}^e \\ \mathbf{f}_{ext,2}^e \\ \mathbf{f}_{ext,3}^e \\ \mathbf{f}_{ext,4}^e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12 \times 1} \quad \text{amb } \mathbf{f}_{ext,i}^e = \int_{\Omega_e} N_i \mathbf{b} d\Omega_e \quad (4.39)$$

Considerant els dos tipus de forces diferents que actuen sobre el tetraedre, i la seva frontera, definim el vector de forces elemental com

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_t^e + \mathbf{f}_{ext}^e \in \mathcal{M}_{12 \times 1} \quad (4.40)$$

Així, per a cada element, obtenim el sistema d'equacions lineal

$$M^e \frac{d^2 \mathbf{u}^{e,H}}{dt^2} + K^e \mathbf{u}^{e,H} = \mathbf{f}^e \quad (4.41)$$

Per trobar els valors numèrics de les components d'aquestes matrius, és a dir, per a calcular les integrals corresponents, utilitzarem quadratures de Gauss-Legendre, de segon ordre, adaptades a triangles i a tetraedres.

4.3.2 Problema global

Un cop hem trobat els sistemes lineals de tots els problemes elementals plantejats, podem passar al problema global. Per tal de considerar aquest problema, que té com a domini Ω , ensamblarem la matriu de massa, la matriu de rigidesa i el vector de forces

$$M = \bigwedge_e M^e, \quad K = \bigwedge_e K^e, \quad \mathbf{f} = \bigwedge_e \mathbf{f}^e$$

on \bigwedge és l'operador utilitzat per indicar l'ensamblatge d'aquestes matrius.

Cal recalcar que les matrius obtingudes M i K , són matrius quadrades de mida $3P_\Omega$, i que $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_{3P_\Omega \times 1}$.

Així, ensamblant, obtenim el sistema lineal d'EDOs de segon ordre

$$M \frac{d^2 \mathbf{u}^H}{dt^2} + K \mathbf{u}^H = \mathbf{f} \quad (4.42)$$

4.4 Resolució al llarg del temps: Euler enrere

Per trobar la solució aproximada $\mathbf{u}^H(t)$ del sistema (4.42), utilitzarem el mètode implícit d'Euler enrere. Hem escollit aquest mètode perquè la seva implicitat ens garanteix que és incondicionalment estable per a qualsevol pas de temps Δt que escollim. L'estabilitat de la solució és vital per a simulacions a temps real.

Considerem, primer, transformar el sistema d'equacions de segon ordre en un sistema d'equacions de primer ordre. Per a això, considerarem com a noves variables $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}^H$ i $\mathbf{u}_2 = \frac{d\mathbf{u}^H}{dt}$.

Així, obtenim el sistema d'equacions de primer ordre

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = \mathbf{u}_2 \\ \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = M^{-1}(\mathbf{f} - K\mathbf{u}_1) \end{cases} \quad (4.43)$$

Recordem que el mètode d'Euler enrere, donat un sistema d'equacions de la forma

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

s'escriu com

$$Y^{n+1} = Y^n + \Delta t f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) \quad (4.44)$$

on Y^n és la aproximació a $y(t^n)$ donada pel mètode i Δt és el pas de temps escollit.

Aplicant el mètode (4.44) al sistema d'equacions (4.43), obtenim

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1^{n+1} = \mathbf{u}_1^n + \Delta t \mathbf{u}_2^{n+1} \\ \mathbf{u}_2^{n+1} = \mathbf{u}_2^n + \Delta t M^{-1} (\mathbf{f} - K \mathbf{u}_1^{n+1}) \end{cases} \quad (4.45)$$

Introduint l'expressió de \mathbf{u}_1^{n+1} en la segona equació vectorial de (4.45), treballem amb l'equació vectorial

$$\mathbf{u}_2^{n+1} = \mathbf{u}_2^n + \Delta t M^{-1} (\mathbf{f} - K (\mathbf{u}_1^n + \Delta t \mathbf{u}_2^{n+1})) \quad (4.46)$$

Multiplicant aquesta per la matriu M i aillant els termes amb \mathbf{u}_2^{n+1} cap a l'esquerra, obtenim

$$(M + \Delta t^2 K) \mathbf{u}_2^{n+1} = M \mathbf{u}_2^n - \Delta t (\mathbf{f} - K \mathbf{u}_1^n) \quad (4.47)$$

Així,

$$\mathbf{u}_2^{n+1} = (M + \Delta t^2 K)^{-1} (M \mathbf{u}_2^n - \Delta t (\mathbf{f} - K \mathbf{u}_1^n)) \quad (4.48)$$

Obtindrem la solució \mathbf{u}^H a temps t^{n+1} amb \mathbf{u}_1^{n+1} , utilitzant

$$\mathbf{u}_1^{n+1} = \mathbf{u}_1^n + \Delta t \mathbf{u}_2^{n+1} \quad (4.49)$$

5

Simulacions

En aquesta secció comentarem els resultats de resoldre, seguint la metodologia explicada a les seccions anteriors, i simular la solució obtinguda del problema plantejat en aquest treball utilitzant diferents exemples d'objectes tridimensionals.

5.1 Barra

Per començar, hem considerat el nostre problema utilitzant un objecte relativament petit i que té una geometria senzilla, com és la d'un prisma rectangular.

Sigui una barra, com la representada a la Figura 5.1. Considerem la seva discretització en l'espai mitjançant una malla formada per 81 nodes i 192 tetraedres. Per a aquest exemple, hem utilitzat una malla senzilla, on tots els tetraedres tenen el mateix volum.

Hem escollit, per a caracteritzar el material del qual està formada la barra, un mòdul de Young $E = 100 \text{ MPa}$ i un coeficient de Poisson $\nu = 0.33$. Així mateix, hem considerat que l'estructura té una densitat $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

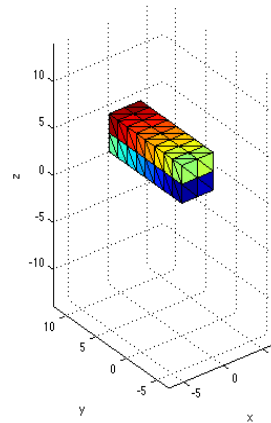


Fig. 5.1

Matemàticament, com a condicions de contorn per a aquest problema, imposarem que $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ on $\mathbf{x} \in \Gamma_u = \{(x, y, z)^T \mid y = 12\}$, per als punts que pertanyen a la barra. La interpretació física d'aquestes condicions és considerar que la barra està fixa a una paret pel seu extrem esquerre, respecte la Figura 5.1.

Suposarem que l'única força externa que actua sobre la barra és la gravetat.

A més, considerarem, com a condicions inicials, que apliquem una força sobre la barra en la direcció negativa de l'eix z . L'aplicació d'aquesta fa que la barra es desplaçi en la direcció de la força. Per al nostre problema, això equival a dotar a cada node d'una taxa de canvi del desplaçament en el temps de la forma $\mathbf{u}_2^0 = (0, 0, -f)$.

Estudiarem el comportament dinàmic de la barra resolent el problema utilitzant mètode d'Euler enrere, diferenciant entre dos casos segons si el valor f donat genera deformacions petites o grans.

5.1.1 Deformacions petites

Considerem que apliquem una força inicial petita en direcció negativa de l'eix z sobre la barra, el que implica una taxa de canvi del desplaçament dels nodes com la definida anteriorment. Escollim el valor $f = 20$.

Resolem el problema considerant un pas de temps $\Delta t = 7 \cdot 10^{-2} s$ i realitzant 100 iteracions.

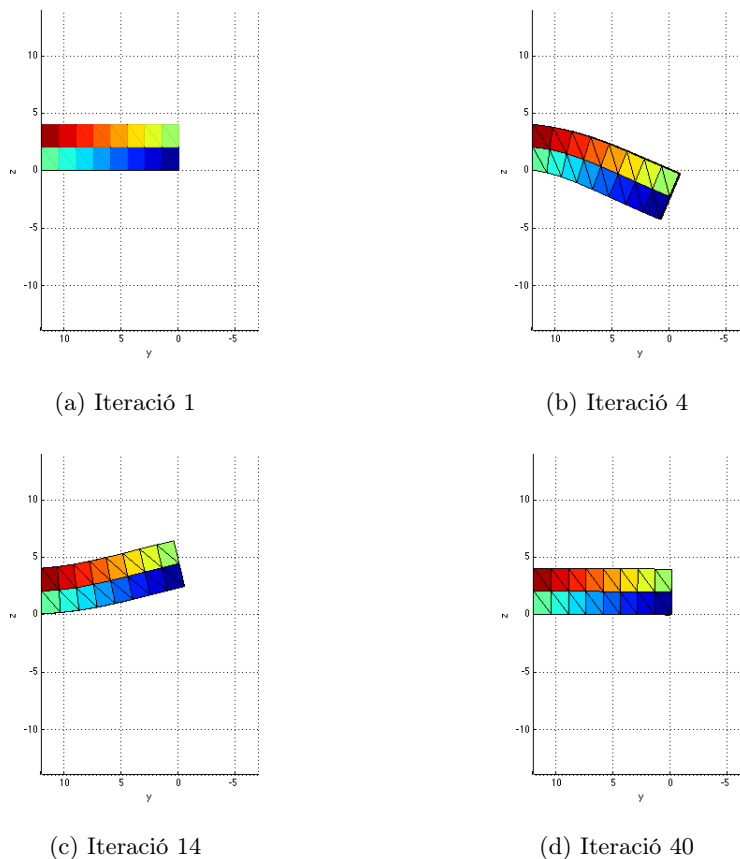


Fig. 5.2

A la figura 5.2 hem representat la solució obtinguda en algunes de les iteracions

realitzades. La barra respon a l'empenta donada com era d'esperar: oscil·lant verticalment i elàsticament, amb oscil·lacions d'amplitud cada cop més petita fins que s'atura.

5.1.2 Deformacions grans

Considerem ara el mateix problema, però aquest cop amb $f = 40$. És a dir, imposem que el desplaçament experimenta un canvi el doble de brusc.

Un cop fixades les condicions inicials, resollem el sistema utilitzant un pas de temps $\Delta t = 7 \cdot 10^{-2}$ i realitzant 100 iteracions.

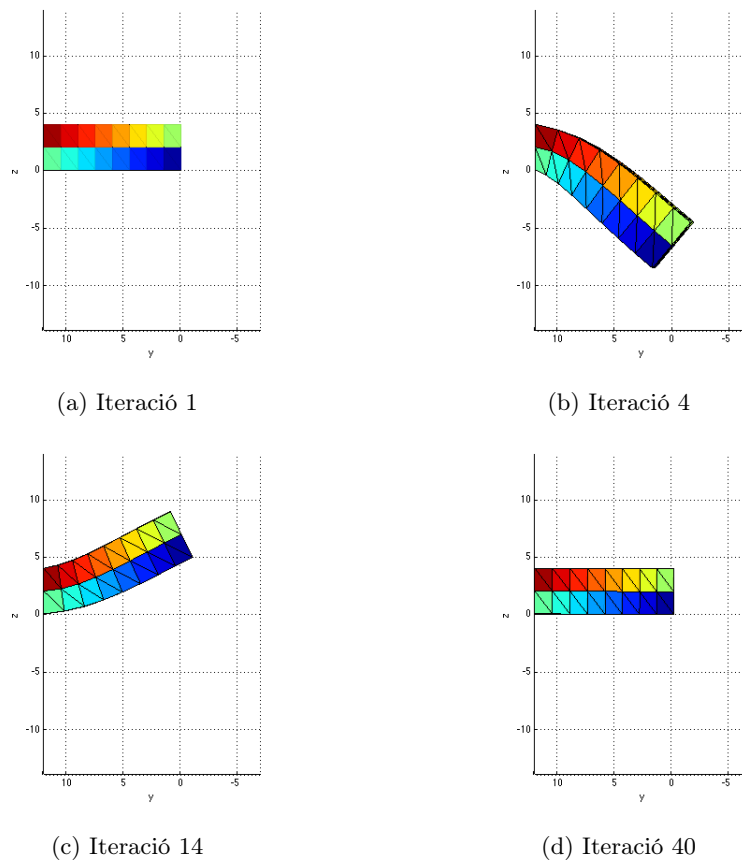


Fig. 5.3

A la Figura 5.3 podem veure que, com a l'exemple anterior, la barra respon a l'impuls inicial donat oscil·lant verticalment, de forma elàstica, fins que s'atura. Malgrat això, aquesta vegada podem observar un creixement dels tetraedres de l'extrem dret de la barra, que es produeix a les primeres iteracions, quan l'amplitud de les oscil·lacions són més grans.

Per tal de conèixer la magnitud d'aquest creixement, hem representat el volum dels tetraedres, al llarg de la simulació, en la següent figura. Esperem un creixement més gran per part dels tetraedres situats a l'extrem dret de la barra.

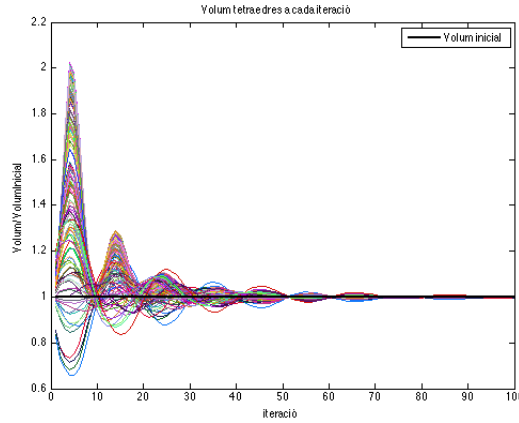


Fig. 5.4

Partint d'un volum inicial d' 1 m^3 per a tots els tetraedres, veiem que durant la simulació, els tetraedres experimenten un canvi en el volum que arriba, en el cas dels que es troben en l'extrem dret de la barra, a un màxim de 2.0245 m^3 , aproximadament el doble del volum inicial. Com ja veïem a la simulació, aquest augment del volum és més gran a les primeres iteracions, qual el moviment és més ràpid i les oscil·lacions són d'amplituds més grans.

5.2 Bolet

Considerem ara una estructura més gran, amb una geometria més complicada i amb una malla amb tetraedres amb formes menys regulars.

Sigui una estructura amb forma de bolet, com la de la Figura 5.5. En aquest cas, hem considerat una malla formada per 219 nodes i 656 tetraedres, pràcticament 3 cops més nodes i més de 3 cops més tetraedres que als exemples anteriors.

Per a aquesta estructura, hem utilitzat els mateixos paràmetres del material que en el cas de la barra, és a dir, considerem $E = 100\text{ MPa}$, $\nu = 0.33$ i $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$.

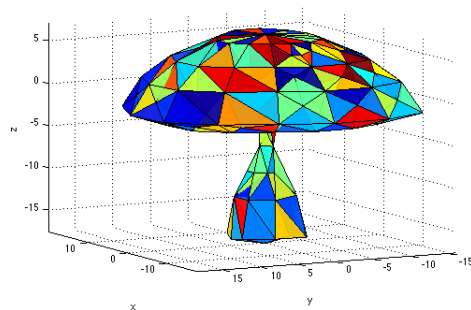
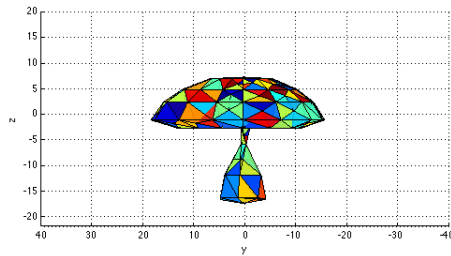


Fig. 5.5

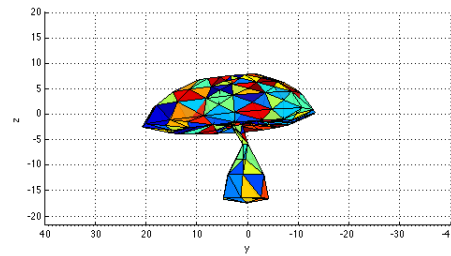
Com a condicions de contorn, considerem fixats tots el nodes amb un valor de z per sota de -10 , aquesta condició és equivalent a suposar que el bolet està soterrat per sota d'aquesta alçada.

En aquesta ocasió, a causa de la forma de l'estructura i donat que repartim el pes de forma uniforme entre els nodes, hem considerat que no hi hagi gravetat, ja que cauria pel seu propi pes a causa de la distribució d'aquest.

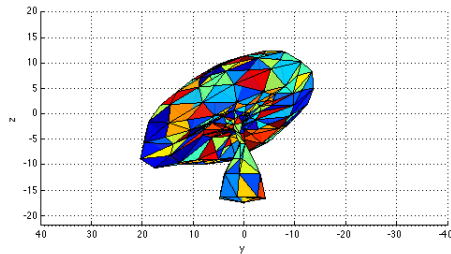
Considerant, en aquest cas, una taxa de canvi en el desplaçament nodal de la forma $(f, f, 0)^T$ amb $f = 2.5$, i resolent el problema, amb un pas de temps $\Delta t = 7 \cdot 10^{-2}s$, realitzant 100 iteracions, obtenim



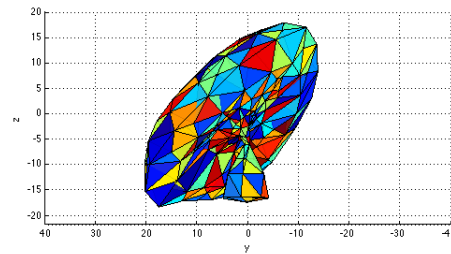
(a) Iteració 1



(b) Iteració 20



(c) Iteració 40



(d) Iteració 60

Fig. 5.6

Durant la simulació, podem veure com el bolet es mou en la direcció indicada per les condicions inicials donades, però, passades 40 unitats de temps Δt , el capell del bolet experimenta una rotació i es fa gran repetidament.

Per veure la magnitud d'aquest creixement, hem representat el volum dels tetraedres a la Figura 5.7

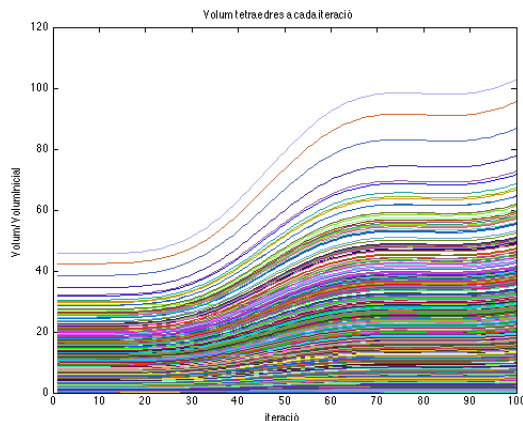


Fig. 5.7

Com es feia patent a la simulació, els tetraedres que formen part del capell del bolet experimenten un creixement del seu volum que, a l'última iteració, arriba a un creixement màxim d'aproximadament 2.25 cops el volum inicial dels tetraedres.

5.3 Armadillo

Per últim, considerem un cas amb un nombre elevat de nodes i tetraedres en el qual actuen forces externes que no són les usuals.

Sigui una estructura amb forma d'armadillo que apareix a la Figura 5.8. En aquest cas, hem considerat una malla formada per 285 nodes i 787 tetraedres.

Per a caracteritzar el material d'aquesta estructura hem escollit que el valor del mòdul de Young sigui $E = 32 \text{ MPa}$, $\nu = 0.10$ i $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$. Com és menys pesat i menys dur que els exemples anteriors, en aplicar forces petites veurem deformacions molt grans.

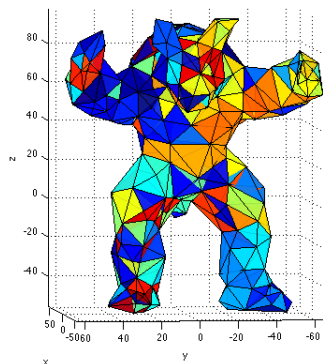
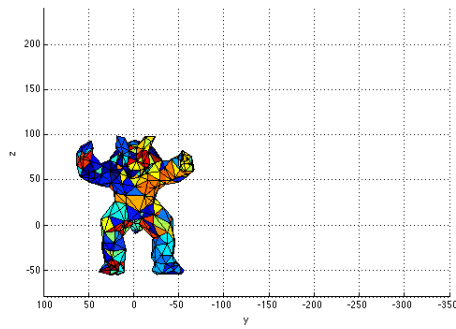


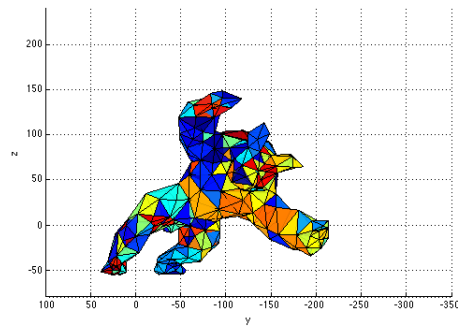
Fig. 5.8

En comptes d'utilitzar les condicions inicials per aconseguir moviment, el que farem serà considerar condicions inicials nul·les i imposar una força externa $\mathbf{b} = (0, -18, -9)^T$.

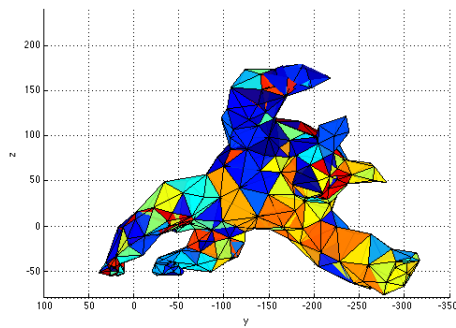
Resolent el problema, amb un pas de temps $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, realitzant 100 iteracions del mètode, obtenim



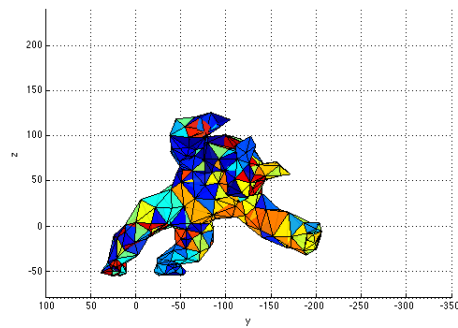
(a) Iteració 1



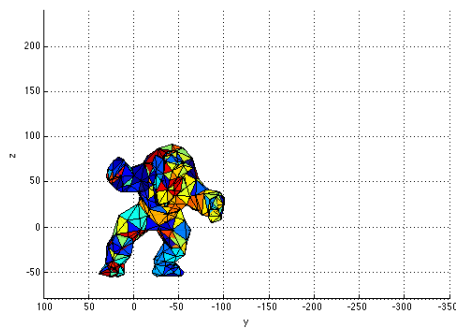
(b) Iteració 16



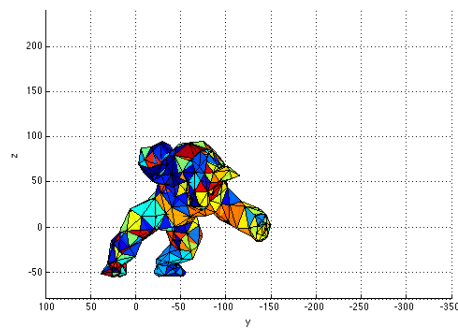
(c) Iteració 26



(d) Iteració 40



(e) Iteració 50



(f) Iteració 63

Fig. 5.9

Com es pot veure, l'Armadillo és arrossegat per la força externa que hem imposat i, quan la deformació és molt gran, el seu volum augmenta considerablement. Malgrat aquest fet, l'Armadillo torna a la seva posició elàsticament intentant trobar una posició d'equilibri però, després, torna a ser empentat per la força externa.

Un cop més, representem el volum dels tetraedres.

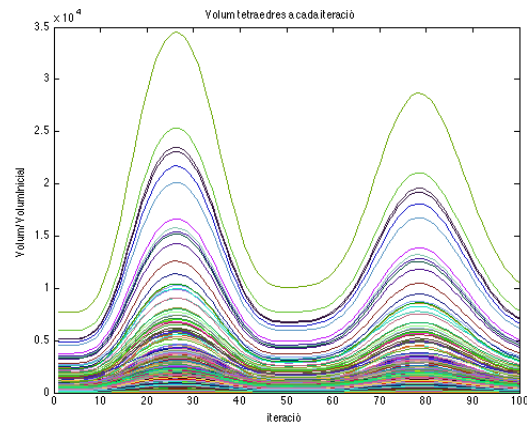


Fig. 5.10

Com podem veure, es produeix un augment del volum més gran durant la primera empenta que a la segona. En aquest cas, tenim que certs tetraedres s'inflen notablement més que altres, fet que també era visible a la Figura 5.9. El màxim creixement obtingut, que es troba a la 26^a iteració, dota al tetraedre d'un volum de $3.45 \cdot 10^4 m^3$, que és 6.335 cops superior al volum inicial d'aquest.

6

Mètode Corrotacional

6.1 Motivació

El fet d'haver considerat que forces elàstiques que actuen sobre el sòlid deformable tenen un comportament lineal ens ha aportat diversos avantatges. El primer d'aquests és que els coeficients de la matriu de duresa K són constants. Gràcies a aquesta característica de la matriu, podem precalcular-la abans de resoldre el sistema d'equacions que ens defineix la deformació del sòlid. Per tant, només és necessari calcular-la una sola vegada en comptes d'haver-ho de fer a cada iteració, el qual suposa un estalvi considerable en el cost computacional.

També gràcies a que K és una matriu constant, per tant, no depèn de les incògnites u , v i w , tenim que el sistema d'equacions resultant és lineal. Així, a l'hora d'aplicar un mètode implícit per a la seva resolució, en el nostre cas utilitzant Euler enrere, només hem de resoldre un sistema lineal a cada iteració.

Per últim, si tenim una malla raonable, és a dir, si la configuració original dels tetraedres és prou bona, obtenim una matriu del sistema $(M + \Delta t^2 K)$ ben condicionada durant tota la simulació, el que minimitzarà la propagació d'errors durant les iteracions del mètode d'Euler enrere.

Malgrat tots els avantatges obtingut gràcies a l'assumpció de linealitat a les forces elàstiques, aquesta simplificació només és vàlida per a deformacions petites i amb poca rotació. Quan calculem deformacions grans, i amb rotació, que s'allunyen de la configuració d'equilibri, el fet de considerar elasticitat lineal causa un creixement irreal del volum dels tetraedres, com hem pogut veure a les simulacions de la secció anterior, ja que el tensor de deformacions lineal de Green-Cauchy no és capaç de representar fidedignament els desplaçaments amb rotacions.

Es proposa utilitzar el mètode Corrotacional per a corregir aquest efecte indesitjat.

6.2 Mètode Corrotacional

Considerem un tetraedre Ω_e i considerem els seus vèrtexs, els quals, en la configuració inicial, tenen coordenades \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , \mathbf{x}_3 i \mathbf{x}_4 i en la configuració deformada tenen

coordenades $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ i \mathbf{p}_4 , on $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(\mathbf{x}_i, t)$ per a un temps t donat.

Considerem les forces que actuen sobre els vèrtexs \mathbf{x} d'un tetraedre Ω_e , quan s'ha produït una petita deformació sobre aquests, quedant en les posicions \mathbf{p} . Les podem aproximar com

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^e(\mathbf{p}) &= \mathbf{f}^e(\mathbf{x} + \mathbf{u}^e) = \mathbf{f}^e(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} K^e \mathbf{u}^e + \mathcal{O}(|\mathbf{u}^e|^2) \\ &= \nabla_{\mathbf{x}} K^e \mathbf{u}^e + \mathcal{O}(|\mathbf{u}^e|^2) \\ &= \nabla_{\mathbf{x}} K^e (\mathbf{p} - \mathbf{x}) + \mathcal{O}(|\mathbf{p} - \mathbf{x}|^2) \end{aligned}$$

El terme $\mathbf{f}_e(\mathbf{x})$ es cancel·la perquè a la configuració d'equilibri les forces que hi actuen són zero. A més, considerant un desplaçament petit \mathbf{u}^e , a prop de la configuració d'equilibri podem fer l'aproximació $\nabla_{\mathbf{x}} K^e \approx K^e$. Així, negligint els termes d'ordre superior a 1, tenim que les forces es poden expressar com

$$\mathbf{f}^e(\mathbf{p}) = K^e(\mathbf{p} - \mathbf{x}) \quad (6.1)$$

Observem que, a causa de l'elecció del tensor lineal de deformacions de Green-Cauchy, aquesta expressió és lineal.

Suposem que coneixem la part rotacional R_e de la deformació d'un tetraedre Ω_e , el mètode utilitzat per a la seva obtenció s'explica a la subsecció 6.2.1. Aquesta és una matriu 12×12 diagonal per blocs que conté 4 matrius de rotació idèntiques de mida 3×3 .

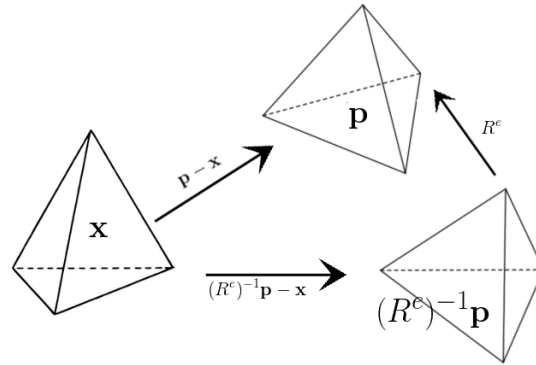


Fig. 6.1

Considerem la Figura 6.1. Si \mathbf{x} són les posicions d'un tetraedre a la seva configuració inicial i \mathbf{p} són les posicions dels vèrtexs dels tetraedre a la configuració deformada, l'aplicació de la inversa de la matriu de rotació a les coordenades en aquesta configuració, és a dir, $(R^e)^{-1}\mathbf{p}$, descriu les coordenades de l'element en una configuració en la qual el cos ha sigut deformat sense haver-se produït cap rotació.

El desplaçament dels vèrtexs \mathbf{p} del tetraedre en la configuració deformada sense rotació és $(R^e)^{-1}\mathbf{p} - \mathbf{x}$. Així, les forces aplicades als vèrtex del tetraedre en aquesta configuració, seguint l'expressió (6.1), són $K^e ((R^e)^{-1}\mathbf{p} - \mathbf{x})$.

Finalment, per tornar a la configuració deformada, apliquem la matriu de rotació R^e . Així, obtenim que les forces que actuen sobre els vèrtexs del tetraedre en la configuració deformada són

$$\mathbf{f}_R^e(\mathbf{x}) = R^e K^e ((R^e)^{-1}\mathbf{p} - \mathbf{x}) \quad (6.2)$$

són exactament les mateixes forces que havíem obtingut a (6.1) expressades de forma diferent.

La idea principal d'aquest mètode és calcular les forces que són aplicades a cada vèrtex del tetraedre en la seva configuració deformada a partir de la seva expressió en una configuració deformada però que no inclou cap mena de rotació, per a, així, un cop calculades, tornar a la configuració deformada mitjançant una rotació.

Al realitzar el càlcul de les forces en aquesta configuració no rotada, la linealitat de l'elasticitat no ens ocasionarà el canvi de volum als tetraedres, gràcies a la manca de rotació, i ens mantindrà la linealitat del sistema d'equacions.

De cara a la utilització d'aquesta expressió, (6.2), al sistema d'equacions que governa la dinàmica del sòlid, serà important, computacionalment, utilitzar que, com R^e és una matriu de rotació, és ortonormal i, per tant, es compleix que $(R^e)^{-1} = (R^e)^T$. Per tant, no farà falta invertir cap matriu, només haurem de transposar-la.

L'expressió que utilitzarem en el sistema d'equacions serà

$$\mathbf{f}_R^e(\mathbf{x}) = R^e K^e ((R^e)^T (\mathbf{u} + \mathbf{x}) - \mathbf{x}) \quad (6.3)$$

on hem utilitzat la definició (3.1) del vector de desplaçaments per evitar l'aparició d'una nova incògnita \mathbf{p} al sistema d'equacions.

Ensamblant la matriu $(K^e)' = \bigwedge_e R^e K^e (R^e)^T$, i el vector $\mathbf{f}_0^e = \bigwedge_e R^e K^e \mathbf{x}$, en la matriu K' , i el vector \mathbf{f}_0 respectivament, obtenim

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{x}) = K' \mathbf{p} - \mathbf{f}_0 \quad (6.4)$$

o, de la mateixa forma, tenim

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{x}) = K' (\mathbf{u} + \mathbf{x}) - \mathbf{f}_0 \quad (6.5)$$

6.2.1 Matriu de rotació

Donada una matriu quadrada complexa $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sempre existeixen les matrius U , $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$, on U és una matriu unitària, és a dir, les columnes de U formen una base ortonormal de \mathbb{C}^n respecte al producte escalar usual, i on P és una matriu hermitica semidefinida positiva, tals que

$$A = UP \quad (6.6)$$

A més, si A és regular, la descomposició és única.

Aquesta descomposició s'anomena descomposició polar de la matriu A .

Considerem un tetraedre Ω_e , els vèrtexs del qual tenen coordenades $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ i \mathbf{x}_4 en la configuració inicial i tenen coordenades $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ i \mathbf{p}_4 en la configuració deformada.

Considerant la configuració inicial, podem descriure un punt $\mathbf{x} \in \Omega_e$ com la combinació lineal dels vèrtexs del tetraedre, com

$$\mathbf{x} = b_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + b_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) + b_3(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Així mateix, en la configuració deformada, si considerem el punt $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(\mathbf{x})$, que pertany al tetraedre deformat, tenim que

$$\mathbf{p} = b_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

on les b_i són les mateixes que a la configuració inicial. Així, tenim que aïllant el vector de les b_i de (6.7) i introduint el resultat a (6.8), obtenim

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{x} \quad (6.9)$$

Així, tenim que la part sense translació del morfisme entre la configuració inicial i la configuració deformada del tetraedre Ω_e és la matriu 3×3

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}^{-1} \quad (6.10)$$

Un cop trobada aquesta matriu de deformació, el que volem és trobar la seva matriu de rotació R , és a dir, una matriu unitària que compleixi

$$A = RP$$

El mètode utilitzat per a la construcció d'aquesta matriu de rotació és el mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt per a les dues primeres columnes i el producte vectorial d'aquestes per a la tercera. És a dir, construïm els vectors columna de la matriu com

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{a}_0}{\|\mathbf{a}_0\|}, \quad \mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{a}_1 - (\mathbf{r}_0^T \mathbf{a}_1) \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{a}_1 - (\mathbf{r}_0^T \mathbf{a}_1) \mathbf{r}_0\|}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_1$$

i definim la matriu de rotació R de la matriu A com

$$R = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{r}_0 & \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Per construcció, garantim que els vectors són ortogonals entre ells i, a més, que són unitaris.

6.3 Resolució al llarg del temps: Euler enrere

Introduint les noves forces (6.4) al sistema d'equacions (4.45), obtenim el sistema d'equacions de primer ordre

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1^{n+1} &= \mathbf{u}_1^n + \Delta t \mathbf{u}_2^{n+1} \\ \mathbf{u}_2^{n+1} &= \mathbf{u}_2^n + \Delta t M^{-1} (\mathbf{f} - K' \mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{f}_0) \end{cases} \quad (6.12)$$

Com al sistema (6.12) tenim una nova incògnita \mathbf{p}^{n+1} , el que farem serà utilitzar l'expressió (6.5) per tornar a les \mathbf{u}_1^{n+1} . Així, obtenim el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1^{n+1} &= \mathbf{u}_1^n + \Delta t \mathbf{u}_2^{n+1} \\ \mathbf{u}_2^{n+1} &= \mathbf{u}_2^n + \Delta t M^{-1} (\mathbf{f} - K' (\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{x}) - \mathbf{f}_0) \end{cases} \quad (6.13)$$

Com abans, substituint l'expressió de \mathbf{u}_1^{n+1} , a la segona equació vectorial del sistema, obtenim

$$\mathbf{u}_2^{n+1} = \mathbf{u}_2^n + \Delta t M^{-1} (\mathbf{f} - K' ((\mathbf{u}_1^n + \Delta t \mathbf{u}_2^{n+1}) + \mathbf{x}) - \mathbf{f}_0) \quad (6.14)$$

Així, multiplicant tota l'equació per M i aïllant el terme \mathbf{u}_2^{n+1} a l'esquerra de la igualtat, obtenim

$$(M + \Delta t^2 K') \mathbf{u}_2^{n+1} = M\mathbf{u}_2^n + \Delta t (\mathbf{f} - K' (\mathbf{u}_1^n + \mathbf{x}) - \mathbf{f}_0) \quad (6.15)$$

Finalment,

$$\mathbf{u}_2^{n+1} = (M + \Delta t^2 K')^{-1} [M\mathbf{u}_2^n + \Delta t (\mathbf{f} - K' (\mathbf{u}_1^n + \mathbf{x}) - \mathbf{f}_0)] \quad (6.16)$$

Trobem la solució \mathbf{u}_1^{n+1} incorporant aquesta última expressió a la primera equació vectorial de (6.13).

Cal remarcar que la matriu de rotació R^e canvia en cada iteració en el temps, per tant, per a cada interacció hem de calcular la matriu de tots els elements, i ensamblar la matriu K' . Això implica un augment del cost computacional.

7

Simulacions Corrotacional

En aquesta secció repetirem les simulacions, fetes a la secció 5, aquest cop utilitzant el mètode del Corrotacional per corregir l'augment en el volum dels tetraedres.

7.1 Barra

Tornem a considerar el problema amb un prisma rectangular, com el de la Figura 7.1, utilitzant els mateixos paràmetres per als materials que vam utilitzar a la secció 5, és a dir, considerant un mòdul de Young $E = 100 \text{ MPa}$, un coeficient de Poisson $\nu = 0.33$ i una densitat $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Així mateix, tornem a considerar les mateixes condicions de contorn, que suposaven fixar la barra pel seu extrem esquerre. Suposarem que l'única força externa actuant és la gravetat $g = (0, 0, -9.81)^T$.

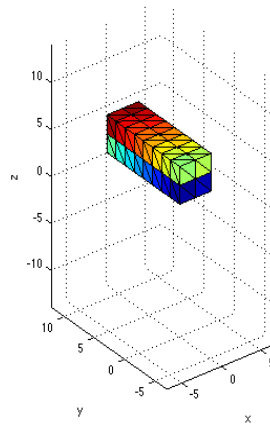


Fig. 7.1

Al afegir la correcció que proporciona el mètode Corrotacional a la resolució del problema, el que esperem és obtenir una disminució significativa en el creixement del volum dels tetraedres quan aquests experimenten grans deformacions i un resultat molt semblant a l'obtingut pel mètode d'Euler implícit quan les deformacions són petites.

Com vam fer a la secció anterior, per a la barra considerarem dos casos, segons si les deformacions d'aquesta són grans o no.

7.1.1 Deformacions petites

Tornem a imposar una taxa de canvi del desplaçament de la forma $(0, 0 - f)^T$ a tots els nodes, on $f = 20$, i resollem el problema utilitzant, com abans, un pas de temps $\Delta t = 7 \cdot 10^{-2}s$ i realitzant 100 iteracions.

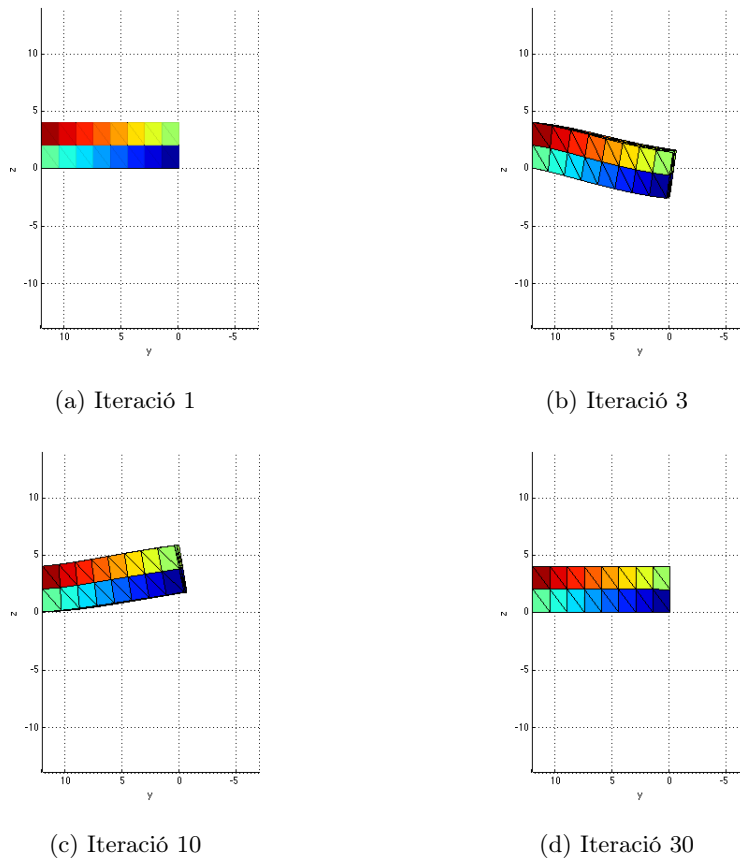


Fig. 7.2

A la Figura 7.2 hem representat la solució obtinguda en diferents iteracions. Hem escollit aquelles iteracions on l'amplitud de la oscil·lació és més gran. Com, en aquest cas tractem amb deformacions petites, ens trobem amb amplitud d'oscil·lació petites i, a ull nu, no s'observa cap tipus de creixement en el volum dels tetraedres, com tampoc se'n observava en aquest cas sense utilitzar el mètode Corrotacional.

Malgrat que el creixement del volum no és observable, hem representat a la següent figura el volum d'alguns dels tetraedres al llarg de la simulació. Observem que sí es produeix un creixement del volum dels tetraedres, malgrat això, estem parlant de creixements petits. En les dues simulacions s'obtenen resultats molt semblants. Podem concloure amb aquest exemple que, per a deformacions petites, l'assumpció d'elasticitat lineal és vàlida.

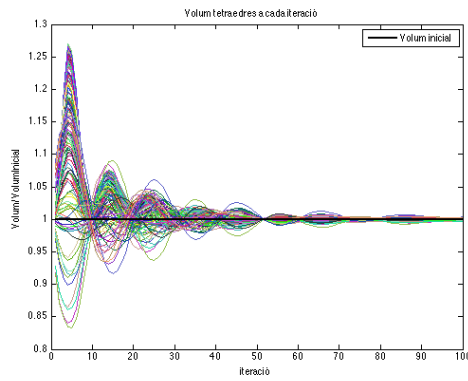


Fig. 7.3: Sense la correcció.

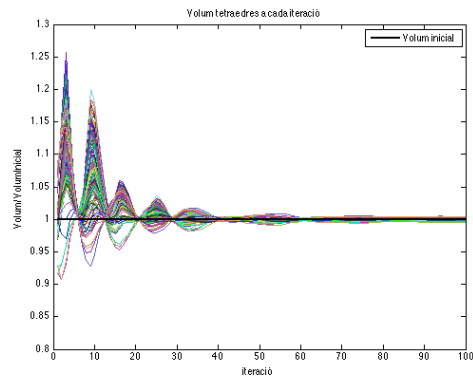
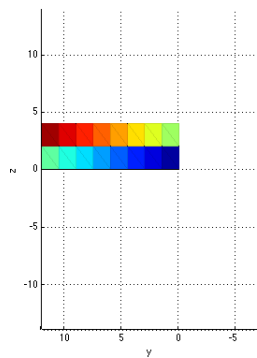


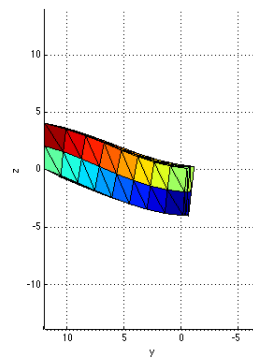
Fig. 7.4: Amb la correcció.

7.1.2 Deformacions grans

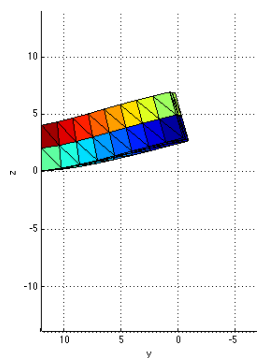
Resolguem ara el problema dinàmic considerant que $f = 40$. Obtenim,



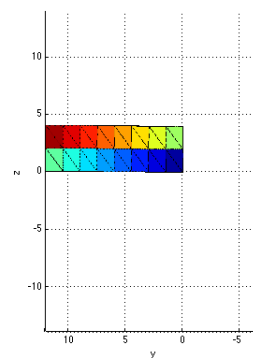
(a) Iteració 1



(b) Iteració 3



(c) Iteració 8



(d) Iteració 35

Fig. 7.5

Considerant, per a la resolució del problema, com abans, un pas de temps $\Delta t = 7 \cdot 10^{-2} s$ i realitzant 100 iteracions, hem obtingut els resultats representats a la Figura 7.5.

Malgrat que, en aquest cas, la barra es deforma notablement tampoc s'observa cap creixement del volum dels tetraedres ni cap comportament no esperat. Si representem l'evolució del volum dels tetraedres al llarg de la simulació, obtenim les següents figures.

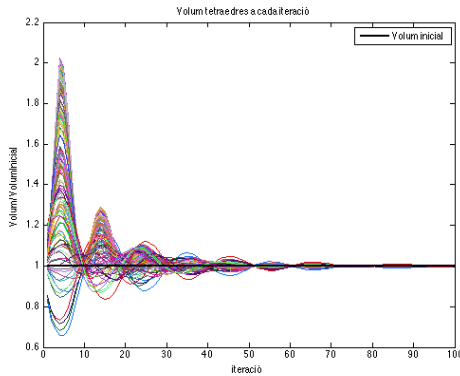


Fig. 7.6: Sense la correcció.

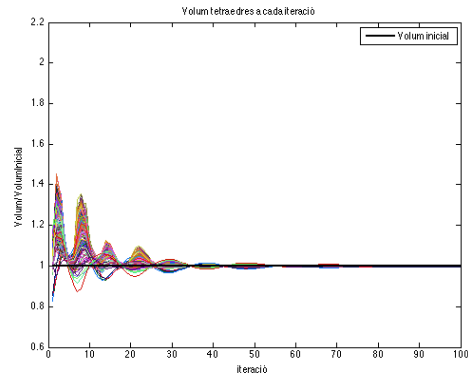


Fig. 7.7: Amb la correcció.

El volum màxim assolit en un tetraedre en el cas de no aplicar el mètode és de $2.024 m^3$, $0.754 m^3$ més que en el de les deformacions petites, en canvi, en el cas d'aplicar la correcció, obtenim un volum de $1.45 m^3$ en el mateix tetraedre, $0.18 m^3$ més que abans. Per tant, veiem que en els dos mètodes existeix un creixement del volum però aquest és més patent a la simulació si no apliquem el mètode Corrotacional.

7.2 Bolet

Tornem a considerar l'exemple del bolet. Recordem que en la solució aquest cas, sense aplicar-ne cap tipus de correcció, observàvem un creixement del volum molt accentuat.

Per a aquesta estructura, teniem, com a la barra, un mòdul de Young $E = 100 MPa$, un coeficient de Poisson $\nu = 0.33$ i una densitat $\rho = 1000 kg/m^3$. A més, com a condicions inicials, imposàvem, nodalment, que la derivada del vector de desplaçament fos de la forma $(f, f, 0)^T$ amb $f = 2.5$. No consideràvem l'actuació de cap força externa.

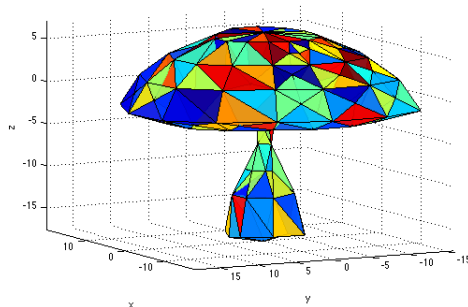
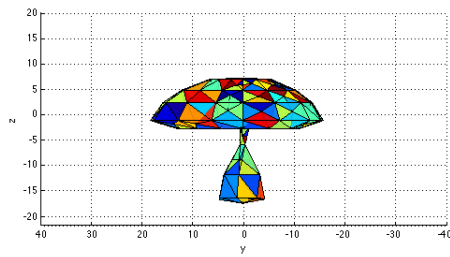
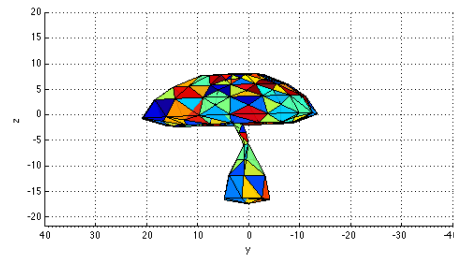


Fig. 7.8

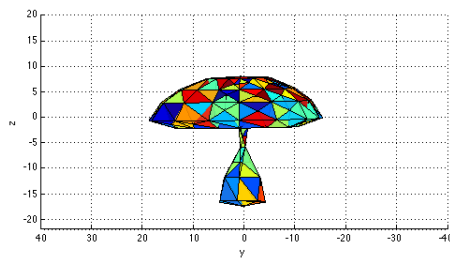
Així, tornat a resoldre el problema seguint l'estratègia proposada pel mètode Corrotacional, hem representat la solució trobada per algunes de les iteracions a la Figura 7.9.



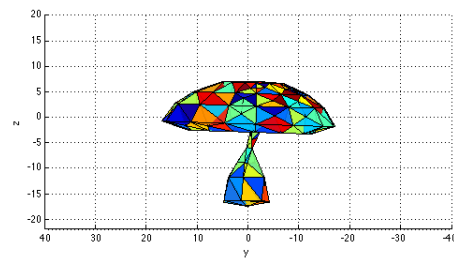
(a) Iteració 1



(b) Iteració 20



(c) Iteració 50



(d) Iteració 70

Fig. 7.9

El bolet respon a les condicions inicials imposades amb moviments elàstics en la direcció marcada per aquestes, oscil·lant fins que s'atura. Durant la simulació de la solució del problema no s'observa cap tipus de creixement del volum.

Per comprovar que realment no es produeix una variació en el volum, representem aquest en la següent Figura, juntament amb la Figura 5.7, obtinguda a la secció 5.

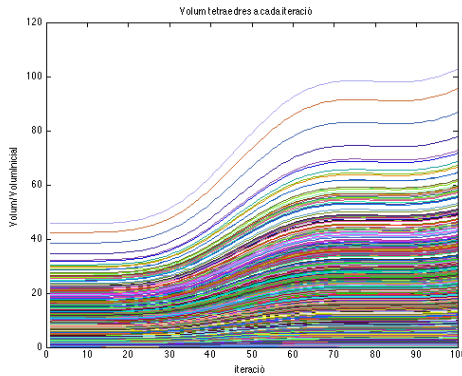


Fig. 7.10

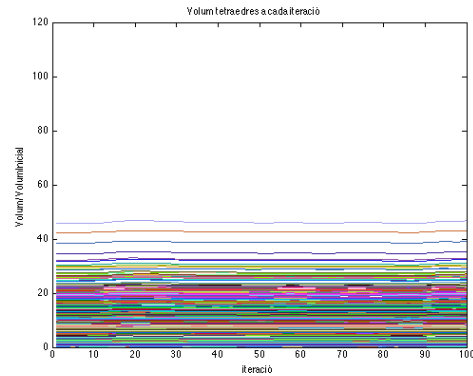


Fig. 7.11

En aquest cas es veu molt clara la millora que aporta el mètode Corrotacional. Encara que podem veure a la Figura 7.11 que sí que hi ha petites oscil·lacions en el volum dels tetraedres durant la simulació, aquestes no són visibles a ull nu i, comparades amb el creixement del volum representat a la Figura 7.10, són infinitessimals.

7.3 Armadillo

Per últim, tornem a considerar el cas de l'armadillo, el qual experimentava també un creixement molt gran del volum dels tetraedres de la seva malla sota grans deformacions.

Considerem l'estructura amb forma d'armadillo representada a la Figura 7.12. Recordem que la malla considerada està formada per 285 nodes i 787 tetraedres.

Per a caracteritzar el material d'aquesta estructura havíem escollit que el valor del mòdul de Young fos $E = 32 \text{ MPa}$, que el coeficient de Poisson fos $\nu = 0.10$ i que l'estructura tingués una densitat $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$.

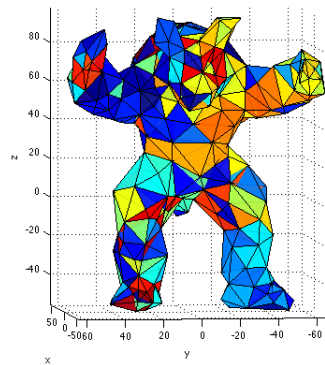
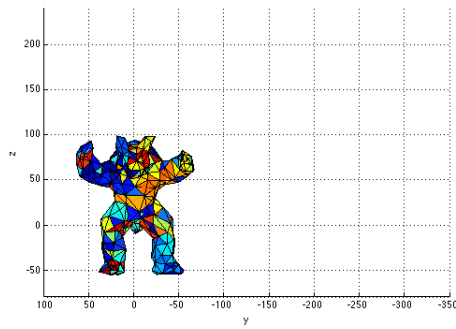


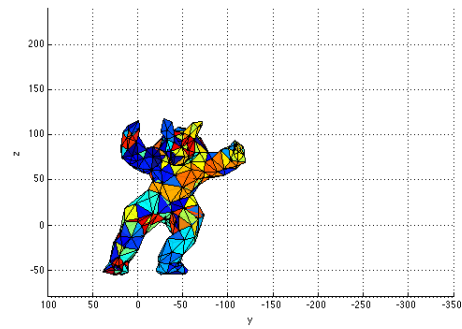
Fig. 7.12

Considerem $\mathbf{b} = (0, -18, -9)^T$ com a força externa.

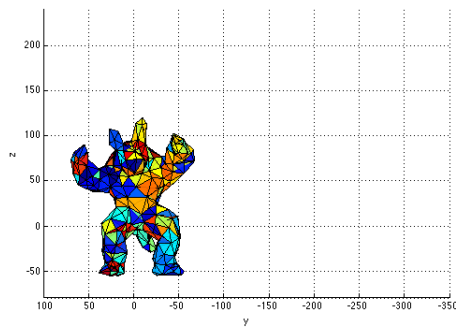
Resolent el problema utilitzant el mètode Corrotacional, amb un pas de temps $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ i realitzant 100 iteracions, obtenim



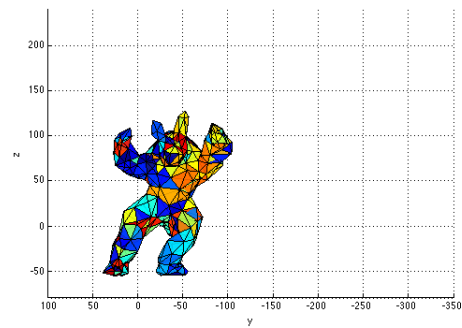
(a) Iteració 1



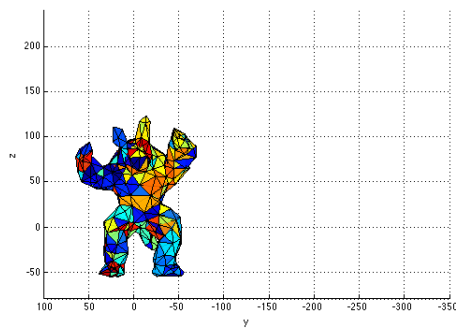
(b) Iteració 15



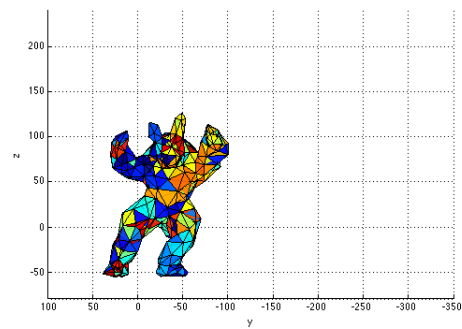
(c) Iteració 30



(d) Iteració 45



(e) Iteració 60



(f) Iteració 75

Fig. 7.13

Aquest cop, veiem com l'armadillo és empentat per la força externa imposada i que es mou impulsat per aquesta però sense ser observable cap tipus de comportament extrany o creixement del volum dels tetraedres que el formen.

Representem el volum dels tetraedres de l'armadillo durant la simulació, comparant el resultat obtingut amb el que vam obtenir en la seva simulació a la secció 5.

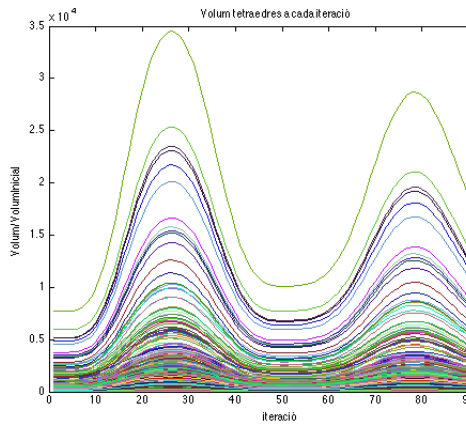


Fig. 7.14

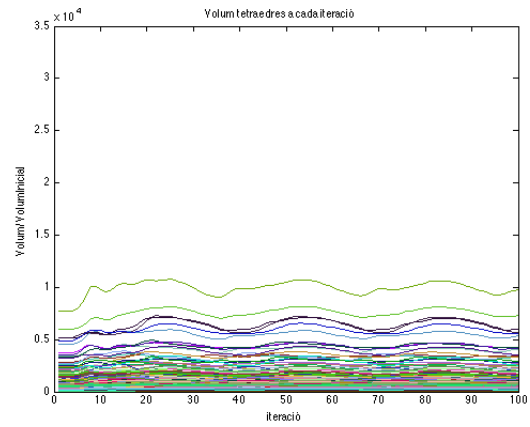


Fig. 7.15

En aquest cas, observem que malgrat que el mètode Corrotacional no aconsegueix evitar totalment el creixement del volum dels tetraedres, aquest és un creixement petit en comparació al vist amb la solució obtinguda amb el mètode d'Euler enrere. Per tant, com a més, aquest petit creixement no crea un efecte irreal a la simulació, prendrem la solució numèrica obtinguda com una bona aproximació a la solució real.

7.4 Temps d'execució

Com hem pogut comprovar en aquesta secció, utilitzant el mètode Corrotacional resollem l'efecte irreal que suposava el creixement del volum dels tetraedres. Malgrat això, també hem de tenir en compte que el nostre objectiu és que les simulacions, a més de fidels a la realitat física, siguin interactives. Per tant, necessitem que els mètodes utilitzats siguin suficientment ràpids com per a obtenir les solucions a temps real.

Considerem primer el mètode d'Euler enrere per a la resolució del model.

Model	Nodes	Tetraedres	Mètode	Temps/Iter.	Imatges/s
Barra	81	192	Euler Implícit	0.002688s	372
Bolet	192	656	Euler Implícit	0.009096s	109
Armadillo	285	787	Euler Implícit	0.009873s	101

Taula 7.1

Hem representat a la Taula 7.1 el temps que triga aquest mètode en resoldre les 100 iteracions per als 3 casos estudiats a les seccions anteriors.

Com podem interpretar de la taula, malgrat els resultats obtinguts, aquest mètode és molt ràpid i podria fer-se servir per a simular la dinàmica d'objectes a temps real i, així, permetre interaccions de l'usuari amb aquests.

Considerem ara el mètode Corrotacional. Ja havíem vist a seccions anteriors que, en aquest mètode, hem de calcular la matriu de rotació per a cada element i ensamblar matrius en cada iteració, per tant, sabíem que és computacionalment més costós.

Hem representat a la Taula 7.2 el temps que ha trigat el mètode en resoldre els exemples proposats a les seccions anteriors per, així, saber si el podríem utilitzar per simulacions en temps real.

Model	Nodes	Tetraedres	Mètode	Temps/Iter.	Imatges/s
Barra	81	192	Corrotacional	0.083354s	12
Bolet	219	656	Corrotacional	0.37631s	2
Armadillo	285	787	Corrotacional	0.454307s	2

Taula 7.2

Amb els resultats en segons obtinguts per a aquest mètode, en les condicions i amb les eines amb les que s'ha dut a terme l'estudi dels dos mètodes en aquest treball, no seria viable utilitzar el mètode Corrotacional per a simulacions en temps real.

8

Conclusions

En aquest treball, amb la finalitat de simular el comportament d'objectes deformables, hem deduït el sistema d'equacions que governen la dinàmica d'objectes tridimensionals sòlids no-rígid, hem plantejat una estratègia de resolució numèrica del sistema lineal donat pel model proposat, hem simulat els resultats obtinguts utilitzant l'eina matemàtica Matlab, i, utilitzant dos mètodes diferents, hem comparat el comportament numèric de les solucions obtingudes.

El primer mètode que va ser considerat per a resoldre el sistema lineal d'equacions obtingut va ser el mètode d'Euler enrere. Malgrat la rapidesa del mètode, per a grans deformacions s'observa en la solució un creixement anormal del volum dels objectes simulats. Això es deu a que el considerar que el comportament de les forces elàstiques és lineal no és capaç de representar fidedignament les deformacions amb rotacions.

Amb l'objectiu de solucionar el problema del creixement incontrolat del volum dels objectes, es va proposar el mètode Corrotacional, que consisteix en calcular les forces exercides sobre l'objecte en la seva configuració deformada però sense rotació i tornar després a la configuració deformada amb rotació. Així, l'assumpció de que les forces elàstiques es comporten de força lineal serà una bona aproximació al seu comportament real i no es produiran efectes com el creixement de volum de l'objecte. I, efectivament, aconseguim que el volum dels objectes es mantingui però, a canvi, obtenim un mètode bastant més lent que l'anterior.

En cas de voler utilitzar algun d'aquests dos mètodes per a la simulació a temps real de la dinàmica d'objectes deformables, s'escolliria el mètode del Corrotacional, ja que ens mostra resultats físicament fidels a la realitat. Malgrat que, amb les eines disposades per a la realització d'aquest treball, no sigui possible una simulació en temps real amb els temps obtinguts amb aquest mètode, amb un equip més potent seria viable obtenir temps molt millor i, així, poder visualitzar la solució del problema en temps real.

Referències

- [1] M. Müller, J. Stam, D. James, N. Thiirey, *Real Time Physics Class Notes*, in Siggraph 2008, pp 21-35, Los Angeles, California, 12-14 Agost, 2008.
- [2] M. Müller, M. Gross, *Interactive Virtual Materials*, in Proceedings of Graphics Interface (GI 2004), pp 239-246, Londres, Regne Unit, Ontario, Canadà, 17-19 Maig, 2004.
- [3] E. Oñate, *Structural Analysis with the Finite Element Method: Linear Statics. Volume 1. Basis and Solids*, Springer, pp 250-308, Barcelona, Espanya, 2009.
- [4] Universitat de Colorado, *Advanced Finite Element Methods (ASEN 6367)*, Capítol 9: The Linear Tetrahedron, Colorado, Boulder, 2013.
- [5] R. Abeyaratne, *Continuum Mechanics. Volume II of Lecture notes on The Mechanics of Elastic Solids*, pp 1-100, Estats Units, Massachusetts, 11 Maig, 2012.
- [6] A. Quateroni, *Numerical Models for Differential Problems (Second Edition)*, Springer, pp 179-212, Itàlia, Milà, Octubre, 2013.

