

Síntesis de prensiones con “force-closure” para un objeto articulado 3D con 3 eslabones

Noé Alvarado Tovar^{1,2}Raúl Suárez¹¹ Inst. d'Organització i Control de Sistemes Industrials (IOC), Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)² Instituto Tecnológico Superior de Lerdo

Resumen

Este trabajo aborda el problema de la síntesis de prensiones con “force-closure” para un objeto articulado 3D constituido por 3 eslabones y considerando contactos sin fricción. La superficie de cada eslabón se representa por medio de un conjunto finito de puntos. En primer lugar se presenta una metodología por medio de la cual se define el espacio de fuerzas generalizadas generado por fuerzas aplicadas en los eslabones de un objeto articulado 3D. En segundo lugar se describe el algoritmo por medio del cual se calcula el conjunto de puntos que permiten una presión con FC. El enfoque ha sido implementado y en el artículo se incluyen algunos ejemplos ilustrativos.

Palabras clave: Prensiones con force-closure, síntesis de prensiones

1. Introducción

El problema de prensiones y fijación de objetos usando manos robóticas o dispositivos fijadores ha sido uno de los principales campos de aplicación de investigación en robótica [14]. Los objetos a ser sujetados o fijados pueden ser de diferentes formas y tamaños, y pueden ser tanto rígidos como articulados (eslabones rígidos unidos por algún tipo de articulación). La Figura 1 muestra algunos ejemplos de objetos articulados.

En la literatura del área de prensiones con manos robóticas se describen dos propiedades muy importantes que una presión debe satisfacer: “form-closure” y “force closure”(FC) [6]. Ambas propiedades pueden ser caracterizadas en el espacio de configuraciones del objeto. El espacio

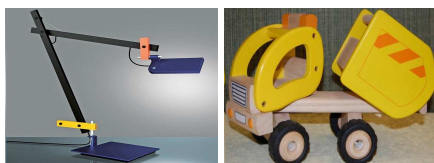


Figura 1: Ejemplos de objetos articulados.

de configuración de un objeto 3D rígido tiene una dimensión $m = 6$ (grados de libertad), y el número de contactos necesarios para su inmovilización es $k = m + 1 = 7$ sin fricción (excepto objetos con simetría rotacional) [12][11]. La búsqueda de prensiones para cualquier objeto 3D que satisfagan las dos propiedades ya mencionadas y considerando contactos sin fricción, es un problema que ha sido tratado en un gran número de trabajos, por ejemplo, usando 7 contactos sobre objetos poliédricos [23], o usando más de 7 contactos sobre cualquier tipo de objeto [10],[19],[15]. No obstante, utilizando la teoría de movilidad de segundo orden [17], los objetos poliédricos y los que tengan contornos con derivada primera continua (“smooth”) se pueden inmovilizar con 4 contactos sin fricción [16]. Los trabajos [21][7] presentan un sumario de trabajos relacionados con la síntesis de prensiones para objetos rígidos.

Sin embargo, pocos trabajos han abordado el problema de presión, fijación y manipulación de objetos articulados, algunos de los cuales utilizan percepción interactiva [9] ó sistemas de oclusión [8]. Rimon and Van der Stappen [18] presentan un trabajo relevante en el cual se describe un procedimiento para encontrar un conjunto de puntos de contacto sin fricción que inmovilicen un objeto articulado 2D con n eslabones poligonales. Para cadenas de $n \neq 3$ polígonos sin bordes paralelos o cadenas de $n = 3$ con unas condiciones determinadas demuestran que la inmovilización es posible con $n + 2$ contactos, mientras que, para el caso general, hacen falta $n + 3$ contactos para inmovilizar cualquier objeto articulado con n polígonos.

Aunque hay bastantes trabajos en los cuales se presentan enfoques para la búsqueda de prensiones con FC para objetos rígidos 3D, y muy pocos trabajos para objetos articulados 2D, no se tiene conocimiento de trabajos que aborden la síntesis de prensiones con FC de objetos articulados 3D. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es la propuesta de un procedimiento que encuentre prensiones con FC de objetos articulados 3D con $n = 3$ eslabones considerando contactos sin

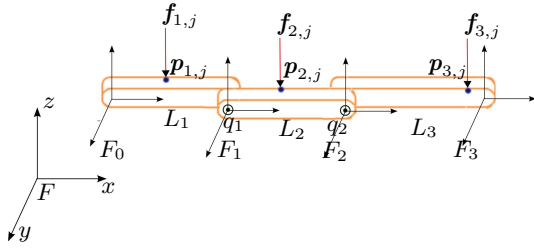


Figura 2: Esquema general de un objeto articulado con 3 eslabones (una fuerza genérica $\mathbf{f}_{i,j}$ que actúa en un punto de contacto $\mathbf{p}_{i,j}$ es representada en cada eslabón i).

fricción. El enfoque propuesto primero define el espacio de fuerzas generalizadas y el vector de fuerzas generalizadas que producen las fuerzas aplicadas en cada eslabón, y después busca las presiones con FC.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. La Sección 2 provee la descripción del problema, incluyendo las principales asunciones. La metodología para encontrar los elementos del vector de fuerzas generalizadas se presenta en la Sección 3. La Sección 4 describe el algoritmo para encontrar una presión con FC. La Sección 5 muestra ejemplos demostrativos del enfoque propuesto. Finalmente, las conclusiones y trabajos futuros se presentan en la Sección 6.

2. Definición del problema

Considerando un objeto articulado 3D con 3 eslabones, como el mostrado en la Figura 2, los problemas a resolver son:

1. Representación de fuerzas generalizadas para un objeto articulado 3D.
2. Búsqueda de un conjunto de puntos de contacto sobre la superficie de los eslabones que permita una presión con FC.

Se toman en cuenta las siguientes asunciones:

1. Los eslabones están conectados por medio de articulaciones de rotación.
2. Las superficies de cada eslabón se representan mediante un conjunto suficientemente grande de puntos, y los eslabones pueden ser de cualquier forma.
3. Se consideran contactos sin fricción.

3. Fuerzas generalizadas para un objeto articulado 3D con 3 eslabones

3.1. Caso de un objeto rígido

Considerando contactos sin fricción, una fuerza \mathbf{f}_i aplicada en un punto \mathbf{p}_i descrito respecto al centro de masa del objeto (CM) genera un torque $\tau_i = \mathbf{p}_i \times \mathbf{f}_i$; \mathbf{f}_i y τ_i se agrupan en un vector de fuerzas generalizadas $\mathbf{w}_i = (\mathbf{f}_i, \tau_i)^T$. Para presiones sin fricción, las fuerzas se aplican en dirección normal a la superficie del objeto, por lo tanto el vector \mathbf{w}_i está dado por:

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{p}_i \times \mathbf{f}_i \end{bmatrix} = f_i \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}}_i \\ \mathbf{p}_i \times \hat{\mathbf{n}}_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

siendo f_i la magnitud de \mathbf{f}_i .

Para objetos 3D, son suficientes 7 contactos sin fricción para asegurar una presión con FC, es decir que un conjunto de puntos $G = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_7\}$ permiten un conjunto de fuerzas generalizadas $W = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_7\}$. La información en W es suficiente para analizar si G permite o no una presión con FC.

3.2. Caso de un objeto articulado 3D

Esta sección presenta una metodología para calcular el vector de fuerzas generalizadas para un objeto articulado 3D con 3 eslabones. Dicha metodología está basada en el procedimiento presentado en [1] y [4] para objetos articulados 2D, y empleado para el cálculo de presiones óptimas [2] y regiones de contacto independientes [3]. La metodología considera un robot virtual que contiene el objeto articulado y otros elementos auxiliares (Figura 3).

Nomenclatura básica a emplearse en este artículo:

L_i : Eslabón i del robot virtual, $i = -4, \dots, 3$. Notar que los eslabones $-4, \dots, 0$ son virtuales, y los eslabones 1 a 3 corresponden al objeto articulado.

q_i : Articulación i del robot virtual, $i = -5, \dots, 2$. Notar que las articulaciones $-5, \dots, 0$ son virtuales, mientras las articulaciones 1 y 2 son las del objeto articulado.

F : Marco de referencia principal para el objeto articulado.

F_b : Marco de referencia base del robot virtual, es decir para $i = -5$.

F_i : Marco de referencia fijado en el eslabón L_i .

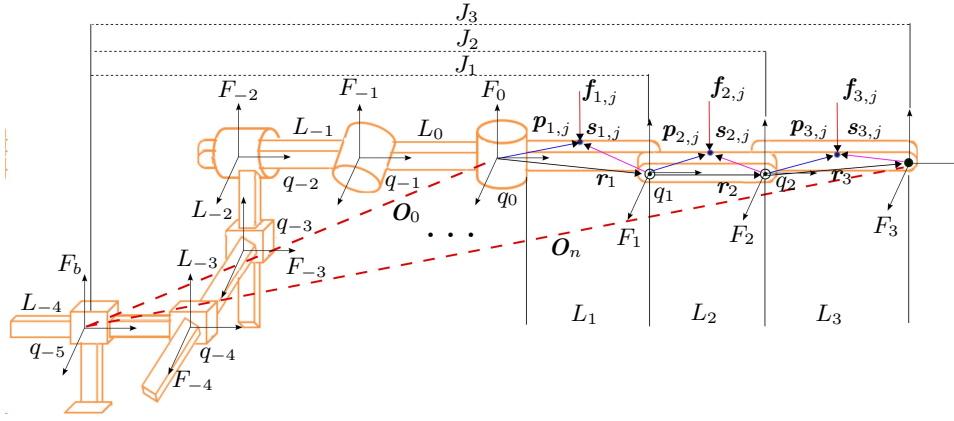


Figura 3: Esquema general del robot virtual, donde $L_{-4} \dots L_3$ y $q_{-5} \dots q_3$ representan los eslabones y articulaciones totales del robot, mientras $L_1 \dots L_3$ y $q_1 \dots q_3$ son los eslabones y articulaciones reales del objeto articulado. También se muestran otros elementos importantes empleados para calcular el vector de fuerzas generalizadas.

O_i : Posición del origen del marco de referencia F_i , $i = -4, \dots, 3$ respecto a F_b .

r_i : Posición del origen del marco de referencia F_i respecto a F_{i-1} (es decir $r_i = O_i - O_{i-1}$).

$p_{i,j}$: Punto de contacto j en el eslabón L_i representado con respecto a F_{i-1} , $i = 1, \dots, 3$, $j = 1, \dots, k_i$, donde k_i es el número de puntos de contacto en L_i . Notar que el número total de puntos de contacto es $k = \sum_i k_i$.

$s_{i,j}$: Punto de contacto j en el eslabón L_i respecto al F_i (es decir $s_{i,j} = p_{i,j} - r_i$).

$f_{i,j}$: Fuerza j aplicada sobre el eslabón L_i en el punto $p_{i,j}$.

$W_{i,j}$: Vector de fuerza generalizado generado por la fuerza $f_{i,j}$ aplicada en $p_{i,j}$.

J_i : Jacobiano para cada eslabón L_i .

Los pasos principales de la metodología propuesta para calcular el vector de fuerzas generalizadas para un objeto articulado 3D con 3 eslabones están presentados en el Algoritmo 1. Este procedimiento está basado principalmente en conceptos ampliamente empleados en el análisis general de una cadena cinemática abierta [22]. Los pasos se explican a continuación.

En el paso (1) se propone un esquema de un robot virtual. Este robot tiene un rol importante en el desarrollo del procedimiento ya que las primeras 6 articulaciones están relacionadas con los 6 *GDL* del primer eslabón del objeto articulado, además de que el objeto articulado forma parte de este robot. El número de eslabones del robot virtual resultante es 8, 3 corresponden al objeto articulado y 5 a los segmentos virtuales del

Algoritmo 1 Representación del vector de fuerzas generalizadas

- 1: Elaborar un esquema de un robot virtual que contenga el objeto articulado.
 - 2: Calcular la posición y orientación de cada marco F_i con respecto al marco base F_b .
 - 3: Calcular el Jacobiano geométrico J_i para cada eslabón L_i .
 - 4: Relacionar las fuerzas $f_{i,j}$ aplicadas en cada eslabón L_i con los torques y fuerzas τ_k en cada articulación del robot virtual.
 - 5: Obtener el vector de fuerzas generalizado $W_{i,j}$ a partir de τ_k .
-

robot propuesto. Las articulaciones q_{-5}, \dots, q_0 son virtuales, pero útiles en el desarrollo del modelo, mientras que las articulaciones q_1 a q_2 representan cada uno de los grados de libertad del objeto. q_{-5}, \dots, q_{-3} son articulaciones prismáticas y q_{-2}, \dots, q_0 son rotacionales. Por otro lado, los eslabones del robot virtual son L_{-4} a L_3 , donde L_1 a L_3 corresponden al objeto articulado. Finalmente, el robot virtual soporta las fuerzas $f_{i,j}$ aplicadas en cada punto de contacto $p_{i,j}$ en los eslabones L_i del objeto articulado.

En el paso (2) se emplea la cinemática directa para calcular la posición y orientación de cada marco F_i con respecto al marco F_b . Estos marcos están asociados a los eslabones L_i donde se aplica una fuerza $f_{i,j}$. Estos cálculos serán empleados en el siguiente paso relacionado con el cálculo del Jacobiano geométrico. En este paso se emplea el procedimiento ya conocido de Denavit-Hartenberg [22], y la posición y orientación de los

marcos F_1 a F_3 quedan definidos por :

$$\begin{aligned} F_3 &= A_{-4}^b \dots A_0^{-1} A_1^0 A_2^1 A_3^2 & (2) \\ F_2 &= A_{-4}^b \dots A_0^{-1} A_1^0 A_2^1 \\ F_1 &= A_{-4}^b \dots A_0^{-1} A_1^0 \end{aligned}$$

donde A_i^{i-1} , $i = -4, \dots, 3$, son matrices de transformación homogéneas.

En el paso (3) el objetivo es el cálculo del Jacobiano geométrico J_i , $i = 1, \dots, 3$, para cada L_i del robot virtual donde se aplica una fuerza $\mathbf{f}_{i,j}$. Por lo que los Jacobianos J_i (Figura 3) se expresan como [22]:

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{bmatrix} J_{P_b} & \dots & J_{P_0} & J_{P_1} & J_{P_2} & J_{P_3} \\ J_{O_b} & \dots & J_{O_0} & J_{O_1} & J_{O_2} & J_{O_3} \end{bmatrix} & (3) \\ J_2 &= \begin{bmatrix} J_{P_b} & \dots & J_{P_0} & J_{P_1} & J_{P_2} & 0 \\ J_{O_b} & \dots & J_{O_0} & J_{O_1} & J_{O_2} & 0 \end{bmatrix} \\ J_1 &= \begin{bmatrix} J_{P_b} & \dots & J_{P_0} & J_{P_1} & 0 & 0 \\ J_{O_b} & \dots & J_{O_0} & J_{O_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El paso (4) relaciona las fuerzas $\mathbf{f}_{i,j}$ en cada L_i con los torques y fuerzas τ_k en cada articulación del robot virtual bajo condiciones de equilibrio. La siguiente expresión establece la relación entre las fuerzas en un elemento final y los torques en las articulaciones por medio de la matriz transpuesta del Jacobiano geométrico [22]

$$\tau = J^T(q) \mathbf{F} \quad (4)$$

Considerando la ec. (4) el vector $\tau_{i,j}$ de torques $\tau_{k_{i,j}}$ en las articulaciones q_k necesarios para balancear el efecto de un vector de fuerzas generalizadas $\mathbf{w}_{i,j}$ generado por una fuerza $\mathbf{f}_{i,j}$ aplicada en el eslabón L_i se obtiene como

$$\tau_{i,j} = [\tau_{-5_{i,j}}, \dots, \tau_{0_{i,j}}, \tau_{1_{i,j}}, \dots, \tau_{2_{i,j}}]^T = J_i^T \mathbf{w}_{i,j} \quad (5)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{i,j} &= [f_{x_{i,j}} \ f_{y_{i,j}} \ f_{z_{i,j}} \ Ms_{x_{i,j}} \ Ms_{y_{i,j}} \ Ms_{z_{i,j}}]^T \\ Ms_{i,j} &= s_{i,j} \times \mathbf{f}_{i,j} = (p_{i,j} - r_i) \times \mathbf{f}_{i,j} \\ Ms_{x_{i,j}} &= (p_{y_{i,j}} - r_{y_i}) f_{z_{i,j}} - (p_{z_{i,j}} - r_{z_i}) f_{y_{i,j}} \\ Ms_{y_{i,j}} &= (p_{z_{i,j}} - r_{z_i}) f_{x_{i,j}} - (p_{x_{i,j}} - r_{x_i}) f_{z_{i,j}} \\ Ms_{z_{i,j}} &= (p_{x_{i,j}} - r_{x_i}) f_{y_{i,j}} - (p_{y_{i,j}} - r_{y_i}) f_{x_{i,j}} \end{aligned}$$

El vector τ_i de torques τ_{k_i} en las articulaciones q_k debido a todas las fuerzas j aplicadas sobre L_i resulta

$$\begin{aligned} \tau_i &= [\tau_{-5_i}, \dots, \tau_{0_i}, \tau_{1_i}, \dots, \tau_{2_i}]^T = \\ &= \sum_{j=1}^{k_i} \tau_{i,j} = \sum_{j=1}^{k_i} J_i^T \mathbf{w}_{i,j} \end{aligned} \quad (6)$$

Los torques τ_k en las articulaciones q_k debido a todas las fuerzas $\mathbf{f}_{i,j}$ aplicadas a todos los

eslabones L_i se dan en

$$\begin{aligned} \tau &= [\tau_{-5}, \dots, \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_2]^T = \\ &= \sum_{i=-4}^3 \sum_{j=1}^{k_i} \tau_{i,j} = \sum_{i=-4}^3 \sum_{j=1}^{k_i} J_i^T \mathbf{w}_{i,j} \end{aligned} \quad (7)$$

En el paso (5) las ecuaciones (5), (6) y (7) se usan para obtener un espacio de fuerzas generalizadas \mathcal{W} definido por la base $\{\hat{\tau}_{-5}, \dots, \hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_2\}$ y por lo tanto las fuerzas generalizadas $\mathbf{W}_{1,j}$, $\mathbf{W}_{2,j}$, $\mathbf{W}_{3,j}$ generadas, respectivamente, por las fuerzas $\mathbf{f}_{1,j}$, $\mathbf{f}_{2,j}$, $\mathbf{f}_{3,j}$.

Vale la pena observar que la dimensión de \mathcal{W} es $d = 3 + 5 = 8$, y que $\mathbf{W}_{i,j}$ tiene por lo tanto $3 + 5 = 8$ componentes. Considerando contactos sin fricción, son necesarios $k = d + 1 = 9$ contactos para lograr una presión con FC.

3.3. Prueba de Force-closure

Considerando el conjunto

$$G = \{\mathbf{p}_{i,j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k_i\} \quad (8)$$

de $k = \sum_i k_i$ puntos de contactos (con k_i el número de puntos de contacto en el eslabón L_i), y una fuerza $\mathbf{f}_{i,j}$ aplicada en cada $\mathbf{p}_{i,j}$, se obtiene el conjunto $W = \{\mathbf{W}_{i,j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k_i\}$. La condición necesaria y suficiente para la existencia de una presión con FC es que el origen del espacio de fuerzas generalizadas esté dentro del convex hull $\text{CH}(W)$ [12, 13]. Esto garantiza que la presión pueda generar fuerzas generalizadas apropiadas para contrarrestar fuerzas de perturbación en cualquier dirección, es decir, para compensar cualquier fuerza(s) $\mathbf{f}_{i,j}$ aplicada en cualquier eslabón L_i . La prueba considerada en este trabajo para verificar la condición de FC es derivada de [20] para el caso de un objeto sólido rígido y extendida en [4] para objetos articulados 2D. Sea P el centroide de las fuerzas generalizadas en W , O el origen del espacio de fuerzas generalizadas y H_i un hiperplano que define una cara del $\text{CH}(W)$: para que una presión sea FC, P y O deben estar en el mismo lado de $H_i \ \forall i$.

4. Síntesis de presiones

El algoritmo descrito en esta sección es una extensión del presentado en [4] para objetos articulados 2D. El procedimiento genera una presión inicial G^m , $m = 1$, seleccionando k puntos de contacto aleatorios del conjunto Ψ que describe el contorno del objeto, entonces se calcula el correspondiente conjunto W^m . El siguiente paso es probar si los puntos en G^m dan lugar a una presión con FC. Si G^m no

Algoritmo 2 Generar presión con FC

Salida: : Presión G^m con FC

- 1: Generar una presión inicial G^m , $m = 1$.
 - 2: **repetir**
 - 3: Calcular el conjunto de fuerzas generalizadas correspondientes W^m .
 - 4: Determinar el subconjunto G_R^m con los puntos a reemplazar de G^m .
 - 5: Generar el subconjunto Ω_C^m con los puntos candidatos para reemplazar uno de los puntos en G_R^m .
 - 6: Obtener una presión auxiliar G_{aux} reemplazando un punto de G_R^m por un punto de Ω_C^m .
 - 7: Actualizar el contador $m = m + 1$.
 - 8: $G^m = G_{aux}$.
 - 9: **mientras** G^m no sea una presión con FC
 - 10: **retornar** G^m
-

genera una presión con FC, entonces se inicia una búsqueda de nuevos puntos de contacto. Esta búsqueda se basa en hiperplanos de separación en el espacio de fuerzas generalizadas que definen puntos candidatos para reemplazar uno de los puntos actuales en G^m para obtener otra presión G^{m+1} . Esto se repite iterativamente hasta que se encuentra una presión con FC. El procedimiento se detalla en el Algoritmo 2 y los pasos se explican a continuación .

Si la presión G^m falla la prueba de FC mencionada en la Sección 3.3, el procedimiento de búsqueda, paso (4) a (8), iterativamente trata de mejorar la presión al cambiar uno de los puntos en G^m .

En el paso (4) se genera el subconjunto $G_R^m \subset G^m$ con los puntos del espacio de fuerzas generalizadas que simultáneamente pertenecen a los hiperplanos H críticos, es decir, aquellos hiperplanos que definen $CH(W)$ y que producen un fallo de la prueba de FC.

En el paso (5) se genera el subconjunto Ω_C^m con los puntos candidatos para reemplazar un punto en G_R^m . Ω_C^m está determinado por los hiperplanos H' que pasan por el origen y paralelos a los hiperplanos H . Los puntos candidatos son aquellos que están simultáneamente en el lado opuesto del punto P con respecto a todos los hiperplanos H' .

En el paso (6) uno de los puntos en G_R^m se reemplaza por otro punto tomado aleatoriamente de Ω_C^m generando una fuerza generalizada W_* . W_* reemplaza el punto más cercano en G_R^m , generando una presión auxiliar G_{aux} . Se calcula entonces el centroide P^* y la distancia $|P^*O|$ de las fuerzas generalizadas de la presión auxiliar G_{aux} . Sea P^m el centroide del conjunto W en la iteración m . Si se cumple la relación $|P^*O| < |P^mO|$, entonces la presión auxiliar G_{aux} se selecciona como

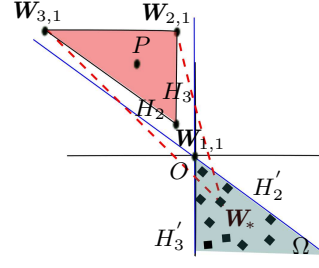


Figura 4: Búsqueda de una presión con FC en un espacio 2D de fuerzas generalizadas. La zona de color contiene el conjunto Ω con los puntos candidatos.

una nueva presión. Si todos los puntos en G_R^m han sido reemplazados y ninguno de ellos reduce la distancia $|P^mO|$, la selección es la presión candidata G^* que tenga la menor distancia $|P^*O|$. La presión G^m generada en cada iteración se guarda para que no sea tomada en cuenta en iteraciones subsecuentes. Esta consideración evita caer en un mínimo local y permite la exploración del espacio de fuerzas generalizadas hasta encontrar una presión con FC (si hay una).

La Figura 4 muestra un ejemplo en un hipotético espacio de fuerzas generalizadas 2D (notar que la dimensión del espacio de fuerzas generalizadas real es 8). La presión G^m genera $W^m = \{W_{1,1}, W_{2,1}, W_{3,1}\}$ no FC, siendo H_2 y H_3 los hiperplanos que producen el fallo. Entonces, el conjunto de puntos posibles a ser reemplazados es $G_R^m = \{p_{1,1}\}$, es decir el punto que genera $W_{1,1}$. Los puntos de contacto que producen fuerzas generalizadas situadas en el área de color pertenecen a Ω_C^m , que es determinada por los hiperplanos H'_2 y H'_3 . La presión auxiliar G_{aux} con W_* reemplazando $W_{1,1}$, es decir, $W^{m+1} = \{W_*, W_{2,1}, W_{3,1}\}$, es FC.

5. Ejemplos

En esta sección se presentan 2 ejemplos de objetos articulados 3D con 3 eslabones, en los cuales se muestra en primer lugar la representación del vector de fuerzas generalizadas y posteriormente las presiones con FC. La implementación fue hecha usando Matlab and C++ en un ordenador con procesador Intel Core2 Duo 2.0 GHz. Los objetos articulados fueron generados en SolidWorks y se empleó la librería Qhull [5] para el cálculo del convex hull.

5.1. Ejemplo 1

La Figura 5a muestra el objeto articulado para el ejemplo 1. La posición y orientación de los marcos F_1 a F_3 quedan definidos por la ec. (2).

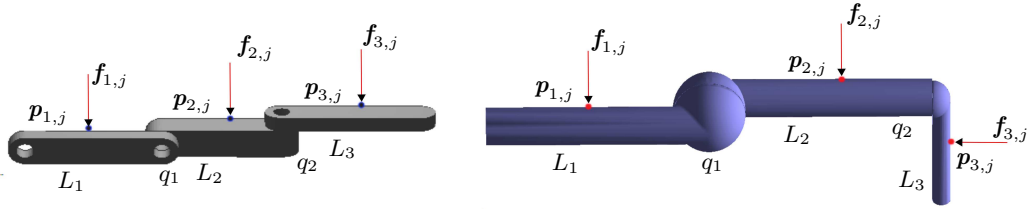


Figura 5: Objetos Articulado con 3 eslabones, a) Ejemplo 1, b) Ejemplo 2

Considerando la ec. (3) los Jacobianos J_1, J_2, J_3 quedan expresados como:

$$J_3 = \begin{bmatrix} z^{-5} & z^{-4} & z^{-3} & z^{-2} \times (O_3 - O_{-2}) & z^{-1} \times (O_3 - O_{-1}) \\ 0 & 0 & 0 & z_{-2} & z_{-1} \\ z_0 \times (O_3 - O_0) & z_1 \times (O_3 - O_1) & z_2 \times (O_3 - O_2) & & \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} z^{-5} & z^{-4} & z^{-3} & z^{-2} \times (O_2 - O_{-2}) & z^{-1} \times (O_2 - O_{-1}) \\ 0 & 0 & 0 & z_{-2} & z_{-1} \\ z_0 \times (O_2 - O_0) & z_1 \times (O_2 - O_1) & 0 & & \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} z^{-5} & z^{-4} & z^{-3} & z^{-2} \times (O_1 - O_{-2}) & z^{-1} \times (O_1 - O_{-1}) \\ 0 & 0 & 0 & z_{-2} & z_{-1} \\ z_0 \times (O_1 - O_0) & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

donde z_i , es un vector unitario orientado según el eje de cada articulación i , definido con respecto a la base del robot que está dado por los 3 primeros elementos de la tercera columna de A_i^b [22].

Usando la ec. (5), los torques en $\tau_{i,j}$ se relacionan con $w_{i,j}$ generado por una fuerza $f_{i,j}$ aplicada sobre el eslabón L_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\tau_{1,j} = [\tau_{-5,j}, \dots, \tau_{0,j}, \tau_{1,j}, \tau_{2,j}]^T = J_1^T w_{1,j}, \text{ similar } \forall i$$

donde

$$w_{1,j} = [f_{x1,j} \ f_{y1,j} \ f_{z1,j} \ Ms_{x1,j} \ Ms_{y1,j} \ Ms_{z1,j}]^T, \text{ similar } \forall i$$

Apartir de la ec. (6), se obtienen los torques en τ_i relacionados con todas las fuerzas $f_{i,j}$ aplicadas en el eslabón L_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\tau_1 = [\tau_{-5}, \dots, \tau_0, \tau_1, \tau_2]^T = \sum_{j=1}^{k_i} \tau_{1,j} = \sum_{j=1}^{k_i} J_1^T w_{1,j}$$

Considerando todas las fuerzas $f_{i,j}$ aplicadas en todos los eslabones L_i , los torques τ_k en las articulaciones q_k se calculan tomando en cuenta la ec. (7). Utilizando el Algoritmo 1, el espacio de fuerzas generalizadas \mathcal{W} queda definido por la base $\{\hat{\tau}_{-5}, \dots, \hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_2\}$ obtenida a partir de

$$\begin{aligned} \tau_{-5} &= f_{x1,j} + f_{x2,j} + f_{x3,j} \\ \tau_{-4} &= f_{y1,j} + f_{y2,j} + f_{y3,j} \\ \tau_{-3} &= f_{z1,j} + f_{z2,j} + f_{z3,j} \\ \tau_{-2} &= Mx_{p1,j} + (Mx_{p2,j} + Mx_{r1}) + (Mx_{p3,j} + Mx_{r2} + Mx_{r1}) \\ \tau_{-1} &= My_{p1,j} + (My_{p2,j} + My_{r1}) + (My_{p3,j} + My_{r2} + My_{r1}) \\ \tau_0 &= Mz_{p1,j} + (Mz_{p2,j} + Mz_{r1}) + (Mz_{p3,j} + Mz_{r2} + Mz_{r1}) \\ \tau_1 &= 0 + My_{p2,j} + (My_{p3,j} + My_{r2}) \\ \tau_2 &= 0 + 0 + Mz_{p3,j} \end{aligned}$$

haciendo $\tau_k = 0, \forall k$ resulta

$$\begin{aligned} \tau_{-5} &= f_{x1,j} + f_{x2,j} + f_{x3,j} \\ \tau_{-4} &= f_{y1,j} + f_{y2,j} + f_{y3,j} \\ \tau_{-3} &= f_{z1,j} + f_{z2,j} + f_{z3,j} \\ \tau_{-2} &= Mx_{p1,j} + (Mx_{p2,j} + Mx_{r1}) + (Mx_{p3,j} + Mx_{r2} + Mx_{r1}) \\ \tau_{-1} &= My_{p1,j} + My_{r1} + My_{r1} \\ \tau_0 &= Mz_{p1,j} + (Mz_{p2,j} + Mz_{r1}) + (Mz_{r2} + Mz_{r1}) \\ \tau_1 &= 0 + My_{p2,j} + (My_{p3,j} + My_{r2}) \\ \tau_2 &= 0 + 0 + Mz_{p3,j} \end{aligned}$$

Entonces, los vectores de fuerzas generalizadas $W_{1,j}, W_{2,j}, W_{3,j}$ generados por las fuerzas $f_{1,j}, f_{2,j}, f_{3,j}$, respectivamente, son

$$W_{1,j} = \begin{bmatrix} f_{x1,j} \\ f_{y1,j} \\ f_{z1,j} \\ Mx_{p1,j} \\ My_{p1,j} \\ Mz_{p1,j} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad W_{2,j} = \begin{bmatrix} f_{x2,j} \\ f_{y2,j} \\ f_{z2,j} \\ Mx_{p2,j} + Mx_{r1} \\ My_{r1} \\ Mz_{p2,j} + Mz_{r1} \\ My_{p2,j} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{3,j} = \begin{bmatrix} f_{x3,j} \\ f_{y3,j} \\ f_{z3,j} \\ Mx_{p3,j} + Mx_{r2} + Mx_{r1} \\ My_{r1} \\ Mz_{r2} + Mz_{r1} \\ My_{p3,j} + My_{r2} \\ Mz_{p3,j} \end{bmatrix}$$

La figura 6 muestra la presión inicial aleatoria y la presión final con FC. La presión con FC se consigue en 28 iteraciones en 8.2 s. El número de contactos para cada eslabón de la presión con FC es: $k_1 = 4, k_2 = 1, k_3 = 4$.

5.2. Ejemplo 2

El objeto articulado del ejemplo 2 se muestra en la figura 5b. El espacio de fuerzas generalizadas \mathcal{W} y los vectores de fuerzas generalizadas $W_{1,j}, W_{2,j}, W_{3,j}$ generados por las fuerzas $f_{1,j}, f_{2,j}, f_{3,j}$, respectivamente son:

$$\begin{aligned} \tau_{-5} &= f_{x1,j} + f_{x2,j} + f_{x3,j} \\ \tau_{-4} &= f_{y1,j} + f_{y2,j} + f_{y3,j} \\ \tau_{-3} &= f_{z1,j} + f_{z2,j} + f_{z3,j} \\ \tau_{-2} &= Mx_{p1,j} + (Mx_{p2,j} + Mx_{r1}) + (Mx_{r2} + Mx_{r1}) \\ \tau_{-1} &= My_{p1,j} + My_{r1} + My_{r1} \\ \tau_0 &= Mz_{p1,j} + (Mz_{p2,j} + Mz_{r1}) + (Mz_{p3,j} + Mz_{r2} + Mz_{r1}) \\ \tau_1 &= 0 + My_{p2,j} + (My_{p3,j} + My_{r2}) \\ \tau_2 &= 0 + 0 + Mx_{p3,j} \end{aligned}$$

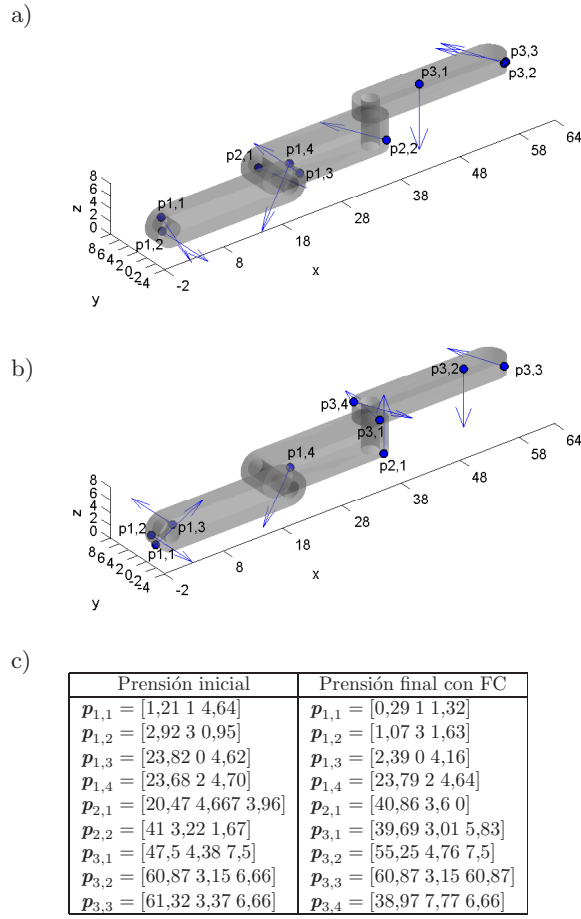


Figura 6: Ejemplo 1: a) Presión inicial aleatoria sin FC, b) presión final obtenida con FC, c) Tabla con las coordenadas de los puntos de contacto.

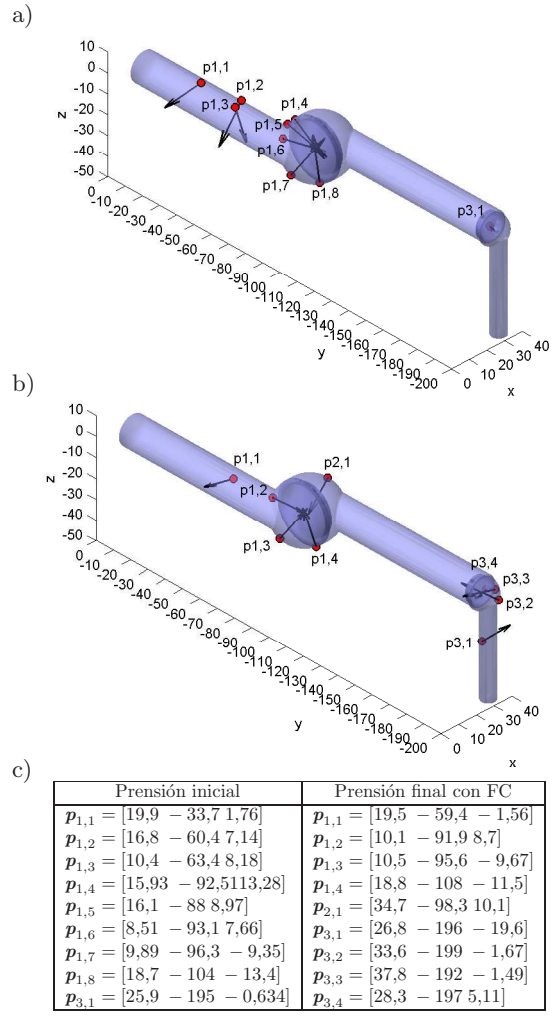


Figura 7: Ejemplo 2: a) Presión inicial aleatoria sin FC, b) presión final obtenida con FC, c) Tabla con las coordenadas de los puntos de contacto.

$$W_{1,j} = \begin{bmatrix} f_{x1,j} \\ f_{y1,j} \\ f_{z1,j} \\ Mx_{p1,j} \\ My_{p1,j} \\ Mz_{p1,j} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad W_{2,j} = \begin{bmatrix} f_{x2,j} \\ f_{y2,j} \\ f_{z2,j} \\ (Mx_{p2,j} + Mx_{r1}) \\ My_{r1} \\ (Mz_{p2,j} + Mz_{r1}) \\ My_{p2,j} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{3,j} = \begin{bmatrix} f_{x3,j} \\ f_{y3,j} \\ f_{z3,j} \\ (Mx_{r2} + Mx_{r1}) \\ My_{r1} \\ (Mz_{p3,j} + Mz_{r2} + Mz_{r1}) \\ (My_{p3,j} + My_{r2}) \\ Mx_{p3,j} \end{bmatrix}$$

La Figura 7 muestra la presión inicial aleatoria y la presión final con FC. La presión con FC se consigue en 30 iteraciones en 9.68 s. El número de contactos para cada eslabón de la presión con FC es : $k_1 = 4, k_2 = 1, k_3 = 4$.

6. Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se propone un enfoque para obtener una presión FC en objetos articulados 3D con 3 eslabones considerando contactos sin fricción. El enfoque tiene 2 etapas: la primera define el espacio de fuerzas generalizadas y los elementos que contendrá el vector de fuerzas generalizadas, generado por una fuerza aplicada en cada eslabón del objeto articulado. La segunda lleva a cabo la síntesis de presiones con FC. La dimensión del espacio de fuerzas generalizadas es igual al número de grados de libertad del objeto articulado $d = 3 + 5 = 8$, y el número de contactos para lograr una presión con FC es $k = d + 1 = 9$.

Como trabajos futuros se incluye la generalización del enfoque a objetos articulados 3D con n eslabones, con contactos con y sin fricción, la búsqueda de presiones óptimas usando una medida de calidad específica y el cálculo de regiones de contacto independientes.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente financiado por el Gobierno Español a través de los proyectos DPI2011-22471, DPI2013-40882-P y DPI2014-57757-R. Noé Alvarado contó con una beca PROMEP.

Referencias

- [1] Alvarado, N. and Suárez, R. (2013). “Grasp Analysis and Synthesis of 2D articulated objects with 2 and 3 links.” In *Proc. IEEE Conf. on Emerging Technologies and Factory Automation*, pp. 1–8.
- [2] Alvarado, N. and Suárez, R. (2014). “Searching force-closure optimal grasps of articulated 2D objects with n links.” In *Proc. IFAC World Congress*, vol. 19, pp. 9334–9340.
- [3] Alvarado, N. and Suárez, R. (2015). “Determining independent contacts regions to immobilize 2D articulated objects.” In *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp. 1–6.
- [4] Alvarado, N. and Suárez, R. (2015). “Grasp analysis and synthesis of 2d articulated objects with n links.” *J. Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 31(0):81 – 90.
- [5] Barber, C. B. and et al. (1996). “The quickhull algorithm for convex hulls.” *ACM Transactions on Mathematical Software*, 22(4):469–483.
- [6] Bicchi, A. (1995). “On the closure properties of robotic grasping.” *Int. J. Robotics Research*, 14(4):319–44.
- [7] Bohg, J. and et al. (2014). “Data-Driven Grasp Synthesis : A Survey.” *IEEE Trans. Robotics*, 30(2):289–309.
- [8] Huang, X. and et al. (2012). “Occlusion-Aware Reconstruction and Manipulation of 3D Articulated Objects.” In *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp. 1365–1371.
- [9] Katz, D. and Brock, O. (2008). “Manipulating articulated objects with interactive perception.” In *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp. 272–277.
- [10] Liu, Y.-H. and et al. (2004). “A Complete and Efficient Algorithm for Searching 3-D Form-Closure Grasps in the Discrete Domain.” *IEEE Trans. Robotics*, 20(5):805–816.
- [11] Markenscoff, X. and Papadimitriou, C. H. (1990). “The Geometry of Grasping.” *Int. J. Robotics Research*, 9(1):61–74.
- [12] Mishra, B. and et al. (1987). “On the existence and synthesis of multifinger positive grips.” *Algorithmica*, 2(4):541–558.
- [13] Murray, R., Li, Z., and Sastry, S. (1994). *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC PressINC.
- [14] Prattichizzo, D. and Trinkle, J. C. (2008). *Handbook of robotics*, chap. 28 Grasping. Springer.
- [15] Rakesh, V. and et al. (2015). “Application of a modified genetic algorithm for enhancing grasp quality on 3d objects.” In *Proc. Int. Conf. Robotics, Automation, Control and Embedded Systems*, pp. 1–5.
- [16] Rimon, E. (2001). “A curvature-based bound on the number of frictionless fingers required to immobilize three-dimensional objects.” *IEEE Trans. Robotics and Automation*, 17(5):679–697.
- [17] Rimon, E. and Burdick, J. (1998). “Mobility of bodies in contact. i. a 2nd-order mobility index for multiple-finger grasps.” *IEEE Trans. Robotics and Automation*, 14(5):696–708.
- [18] Rimon, E. and Van der Stappen, F. (2012). “Immobilizing 2-D Serial Chains in Form-Closure Grasps.” *IEEE Trans. Robotics*, 28(1):32–43.
- [19] Roa, M. and Suarez, R. (2007). “Geometrical approach for grasp synthesis on discretized 3d objects.” In *Proc. Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, pp. 3283–3288.
- [20] Roa, M. A. and Suárez, R. (2009). “Finding locally optimum force-closure grasps.” *J. Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 25(3):536–544.
- [21] Sahbani, A. and et al. (2012). “An overview of 3D object grasp synthesis algorithms.” *J. Robotics and Autonomus Syst.*, 60(3):326–336.
- [22] Siciliano, B., et al. (2009). *Robotics modelling, planning and control*. Springer.
- [23] Wagner, R. and et al. (1995). “Fixturing faceted parts with seven modular struts.” In *Proc. IEEE Int. Symp. Assembly and Task Planning*, pp. 133–139.