Inversa de matrices circulantes con tres parámetros[Ⓢ]

M. Mitjana

Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya.
E-mail: `margarida.mitjana@upc.edu`

Resumen. Utilizando técnicas relacionadas con la resolución de problemas de contorno para ecuaciones en diferencias de segundo orden, se dan condiciones necesarias y suficientes para la invertibilidad de matrices circulantes que dependen de tres parámetros. En los casos que existe, se da la expresión de los coeficientes de la matriz inversa reduciendo significativamente el coste computacional. Como aplicación, se obtiene la matriz inversa de circulantes cuyos coeficientes son progresiones aritméticas o geométricas entre otros. Se obtiene también, la matriz inversa de una matriz tridiagonal circulante sin necesidad de suponer la hipótesis de dominancia diagonal.

Palabras clave. *Matriz Circulante, Matriz Inversa, Polinomio de Chebyshev, Ecuaciones en diferencias*

1 Introducción

La modelización de muchos problemas lleva a plantear sistemas lineales cuyos coeficientes son circulantes. Ello está motivado por la periodicidad de los problemas como por ejemplo, los que se plantean al utilizar el método de diferencias finitas para aproximar ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico con condiciones iniciales periódicas. Las matrices circulantes aparecen en ámbitos tan distintos como el procesamiento de imágenes o en la teoria de códigos correctores de errores, ver [2] y referencias citadas.

Publicaciones recientes, [3, 6], han abordado el problema de dar expresiones efectivas para el cálculo del determinante, los valores propios y la inversa de ciertas matrices circulantes.

En este trabajo se consideran matrices circulantes de los tipos $\mathrm{Circ}(a, b, c, \dots, c)$ y $\mathrm{Circ}(a, b, c, \dots, c, b)$, se da una condición necesaria y suficiente para determinar su invertibilidad y además se obtiene una fórmula cerrada para la expresión de los coeficientes de la matriz inversa cuando ésta existe.

[Ⓢ] Trabajo subvencionado parcialmente por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología en el marco de los proyectos MTM2011-28800-C02-01 and MTM2011-28800-C02-02.

2 Preliminares

Fijado $n \in \mathbb{N}^*$, se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar habitual denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Los vectores $\mathsf{0}$ y $\mathsf{1}$ de $\mathbb{R}^n$ son aquellos vectores cuyas componentes son todas igual a 0 y 1 respectivamente. Asimismo se denota el vector $\mathsf{e} \in \mathbb{R}^n$ como $\mathsf{e} = (1, 0, \ldots, 0)^\top$. Las matrices de orden n de coeficientes reales I y J son respectivamente, la matriz identidad y la matriz cuyos coeficientes son todos igual a 1. Como todas las matrices que aparecen en este trabajo son de orden n de coeficientes reales, en lo que sigue se va a omitir mencionarlo reiteradamente.

Una matriz $\mathsf{A} = (a_{ij})$ es *circulante con parámetros* $a_1, \ldots, a_n$ si

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

o equivalentemente,

$$a_{ij} = a_{1+(j-i)(\operatorname{mod} n)} \tag{2}$$

Observese que $\mathrm{Circ}(\mathsf{e}) = \mathsf{I}$ y $\mathrm{Circ}(\mathsf{1}) = \mathsf{J}$.

Sea τ una permutation del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ definida como,

$$\tau(1) = 1, \quad \tau(j) = n + 2 - j, \quad j = 2, \ldots, n. \tag{3}$$

La matriz $\mathsf{P}_\tau = (p_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, se define $p_{\tau(j)j} = 1$ y $p_{ij} = 0$, en caso contrario. Es inmediato comprobar que P_τ es invertible y que además se satisface $\mathsf{P}_\tau^{-1} = \mathsf{P}_\tau^\top = \mathsf{P}_{\tau^{-1}} = \mathsf{P}_\tau$.

Sea $\mathsf{a}_\tau = \mathsf{P}_\tau \mathsf{a}$ el vector cuyas componentes son $(a_\tau)_1 = a_1$ y $(a_\tau)_j = a_{n+2-j}$, $j = 2, \ldots, n$. Se cumple que $\mathsf{1}_\tau = \mathsf{1}$ and $\langle \mathsf{a}_\tau, \mathsf{1} \rangle = \langle \mathsf{a}, \mathsf{1} \rangle$. Además,

$$\mathrm{Circ}(\mathsf{a}_\tau) = \mathsf{P}_\tau \mathrm{Circ}(\mathsf{a}) \mathsf{P}_\tau. \tag{4}$$

Dado $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$, las matrices

$$\mathrm{Circ}_\tau(\mathsf{a}) = \mathsf{P}_\tau \mathrm{Circ}(\mathsf{a}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \tag{5}$$

$$\mathrm{Circ}^\tau(\mathsf{a}) = \mathrm{Circ}(\mathsf{a})\, \mathsf{P}_\tau = \begin{bmatrix} a_1 & a_n & \cdots & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

se llaman *circulante por la izquierda y circulante por la derecha con parámetros* $a_1, \dots, a_n$, respectivamente. Ambas matrices son simétricas y es por esta razón que en [2] fueron llamadas matrices simétricas circulantes. Las referencias a este tipo de matrices se harán utilizando la notación introducida anteriormente. Observese que de la identidad (4) se obtiene $\mathrm{Circ}^{\tau}(\mathsf{a}) = \mathrm{Circ}_{\tau}(\mathsf{a}_{\tau})$ para $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$.

En el siguiente lema se enumeran propiedades de las matrices circulantes que seran ultilizadas en el presente trabajo. Todas ellas son de demostración inmediata.

Lema 1. *Dados* $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^n$*, las siguientes propiedades se cumplen:*

(i) *Para cualquier* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Circ}(\alpha\mathsf{a} + \beta\mathsf{b}) = \alpha\mathrm{Circ}(\mathsf{a}) + \beta\mathrm{Circ}(\mathsf{b})$.

(ii) $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})^{\top} = \mathrm{Circ}(\mathsf{a}_{\tau})$. *En particular,* $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})$ *es simétrica sii* $\mathsf{a} = \mathsf{a}_{\tau}$.

(iii) $\mathrm{Circ}_{\tau}(\mathsf{a}) = \mathrm{Circ}(\mathsf{a})$ *sii* $\mathrm{Circ}^{\tau}(\mathsf{a}) = \mathrm{Circ}(\mathsf{a})$. *Se cumple la igualdad sii* $\mathsf{a} = \mathsf{a}_{\tau}$.

(iv) $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})\mathsf{1} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{1} \rangle\, \mathsf{1}$. *Además, si* $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})$ *es invertible entonces* $\langle \mathsf{a}, \mathsf{1} \rangle \neq 0$.

(v) $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})\mathsf{b} = \mathrm{Circ}(\mathsf{b}_{\tau})\mathsf{a}_{\tau}$ *y* $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})\mathrm{Circ}(\mathsf{b}) = \mathrm{Circ}(\mathsf{b})\mathrm{Circ}(\mathsf{a}) = \mathrm{Circ}(\mathsf{c}_{\tau})$*, donde* $\mathsf{c} = \mathrm{Circ}(\mathsf{a})\mathsf{b}_{\tau} = \mathrm{Circ}(\mathsf{b})\mathsf{a}$.

(vi) $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})$ *es invertible sii el sistema lineal de ecuaciones* $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})\mathsf{g} = \mathsf{e}$ *es compatible. En este caso, existe una única solución* $\mathsf{g}(\mathsf{a})$ *que además satisface* $\langle \mathsf{g}(\mathsf{a}), \mathsf{1} \rangle = \langle \mathsf{a}, \mathsf{1} \rangle^{-1}$. *Asimismo,* $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})^{-1} = \mathrm{Circ}\big(\mathsf{g}(\mathsf{a})\big)^{\top}$ *y* $\mathsf{a}_{\tau} = \mathsf{a}$ *sii* $\mathsf{g}(\mathsf{a})_{\tau} = \mathsf{g}(\mathsf{a})$.

(vii) $\mathrm{Circ}_{\tau}(\mathsf{a})$ *y* $\mathrm{Circ}^{\tau}(\mathsf{a})$ *son invertibles sii* $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})$ *es invertible y, en este caso se cumple*

$$\mathrm{Circ}_{\tau}(\mathsf{a})^{-1} = \mathrm{Circ}_{\tau}\big(\mathsf{g}(\mathsf{a})\big) \ \ y \ \ \mathrm{Circ}^{\tau}(\mathsf{a})^{-1} = \mathrm{Circ}^{\tau}\big(\mathsf{g}(\mathsf{a})\big).$$

Uno de los principales retos al estudiar matrices circulantes es determinar condiciones de invertibilidad y el cálculo de la matriz inversa cuando ésta exista. Del lema anterior, se obtiene que para cualquier $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$ la existencia de la inversa de las matrices $\mathrm{Circ}_{\tau}(\mathsf{a})$ and $\mathrm{Circ}^{\tau}(\mathsf{a})$ y su cálculo, se deduce de la existencia y cálculo de la matriz inversa de $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})$. Además, el estudio de la invertibilidad de $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})$ se reduce al estudio de la compatibilidad de un sistema lineal de ecuaciones, cuya solución permite obtener los coeficientes de la matriz inversa de $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})$ cuando existe.

En general, el problema de calcular la matriz inversa de una matriz circulante ha sido estudiado utilizando las raíces primitivas de la unidad y de un polinomio asociado a los coeficientes de la matriz, ver [6].

Concretamente, sea $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ la n–ésima raíz de la unidad y sea el vector $\mathsf{t}_j = \left(1, \omega^j, \ldots, \omega^{j(n-1)}\right)^\top, \in \mathbb{R}^n$, para $j = 0, \ldots, n-1$. Para cada $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$ se define el polinomio $P_\mathsf{a}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x^{j-1}$. Observese que $\mathsf{t}_0 = \mathsf{1}$ y que para cada $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$, $P_\mathsf{a}(1) = \langle \mathsf{a}, \mathsf{1} \rangle$. El siguiente lema establece una condición necesaria y suficicente para la invertibilidad de $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})$ y da una fórmula para el cálculo de la inversa.

Lema 2. *Para cualquier* $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$*, se cumple:*

(i) $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})\mathsf{t}_j = P_\mathsf{a}(\omega^j)\mathsf{t}_j$*, para* $j = 0, \ldots, n$*. En particular,* $\det \mathrm{Circ}(\mathsf{a}) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} P_\mathsf{a}(\omega^k)$.

(ii) $\mathrm{Circ}(\mathsf{a})$ *es invertible sii* $P_\mathsf{a}(\omega^j) \neq 0$*,* $j = 0, \ldots, n-1$*. En este caso,* $\mathrm{Circ}^{-1}(\mathsf{a}) = \mathrm{Circ}(\mathsf{h}_\mathsf{a})$ *donde* $(h_\mathsf{a})_j = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^{-k(j-1)} P_\mathsf{a}(\omega^k)^{-1}$.

En consecuencia, todas la matrices circulantes tienen los mismos vectores propios pero distintos valores propios. Aunque desde un punto de vista teórico el problema está resuelto, la complejidad computacional de la fórmula (ii) aumenta con el tamaño de la matriz y el cálculo de la inversa es inviable computacionalmente. En este trabajo se reduce significativamente el coste computacional de aplicar el lema anterior abordando el problema de calcular la inversa de una matriz circulante mediante la resolución de una ecuación en diferencias de orden a lo sumo dos.

3 Matrices $\mathrm{Circ}(a, b, c, \ldots, c)$

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, se define el vector $\mathsf{a}(a, b, c) = (a, b, c, \ldots, c)^\top$, y por tanto se utilizará la notación $\mathrm{Circ}(a, b, c, \ldots, c) = \mathrm{Circ}\big(\mathsf{a}(a, b, c)\big)$.

Para cualquier $q \in \mathbb{R}$, se considera el vector $\mathsf{z}(q) = (q^{n-1}, q^{n-2}, \ldots, q, 1)^\top$. Es inmediato observar que $\mathsf{z}_\tau(q) = (q^{n-1}, 1, q, \ldots, q^{n-2})^\top$ y que $\langle \mathsf{z}(q), \mathsf{1} \rangle = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$. Esta última identidad se cumple también para $q = 1$, ya que $\lim\limits_{q \to 1} \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = n$.

La relación $\mathrm{Circ}(a, b, c, \ldots, c) = \mathrm{Circ}(a-c, b-c, 0, \ldots, 0) + c\mathsf{J}$, lleva a estudiar previamente las propiedades de las matrices del tipo $\mathrm{Circ}(q, -1, 0, \ldots, 0)$.

Proposición 1. *Dado* $q \in \mathbb{R}$*,* $\mathrm{Circ}\big(\mathsf{a}(q, -1, 0)\big)\mathsf{z}_\tau(q) = [q^n - 1]\mathsf{e}$*. Además,*

(i) $\mathrm{Circ}\big(\mathsf{a}(q,-1,0)\big)$ *es invertible sii* $q^n \neq 1$, *y su inversa es*

$$\mathrm{Circ}\big(\mathsf{a}(q,-1,0)\big)^{-1} = (q^n-1)^{-1}\mathrm{Circ}\big(\mathsf{z}(q)\big).$$

(ii) *El sistema lineal* $\mathrm{Circ}\big(\mathsf{a}(1,-1,0)\big)\mathsf{h} = \mathsf{v}$ *es compatible sii* $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 0$. *En este caso para cualquier* $\gamma \in \mathbb{R}$, *la única solución que satisface* $\langle \mathsf{h}, \mathsf{1}\rangle = \gamma$ *es*

$$h_j = \frac{1}{n}\Big[\gamma - \sum_{i=1}^{n} i v_i\Big] + \sum_{i=j}^{n} v_i, \quad j = 1,\dots,n.$$

De forma inmediata se obtiene la matriz inversa de una matriz circulante cuyos parámetros estan en progresión geométrica.

Corolario 1. *Dados* $a, r \in \mathbb{R}$, *la matriz* $\mathrm{Circ}(ar^{n-1},\dots,ar,a)$ *es invertible sii* $a(r^n-1) \neq 0$. *En este caso su inversa es*

$$\mathrm{Circ}(ar^{n-1},\dots,ar,a)^{-1} = \big(a(r^n-1)\big)^{-1}\mathrm{Circ}\big(\mathsf{a}(r,-1,0)\big).$$

El resultado principal en esta sección establece una condición necesaria y suficiente para la invertibilidad de las matrices circulantes aquí consideradas, y además da una expresión simple y cerrada para el cálculo de los coeficientes de la inversa, si existe.

Teorema 1. *Dados* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *la matriz circulante* $\mathrm{Circ}(a,b,c,\dots,c)$ *es invertible sii*

$$\big[a+b+(n-2)c\big]\big[(a-b)^2 + \big(1-(-1)^n\big)(c-b)^2\big] \neq 0$$

y en este caso, $\mathrm{Circ}(a,b,c,\dots,c)^{-1} = \mathrm{Circ}\big(\mathsf{k}(a,b,c)\big)$ *donde, si* $a \neq 2c-b$

$$k_j(a,b,c) = \frac{(c-b)^{j-1}(a-c)^{n-j}}{\big((a-c)^n-(c-b)^n\big)} - \frac{c}{(a+b-2c)\big(a+b+(n-2)c\big)},$$

j=1,...,n, y

$$k_j(2c-b,b,c) = \frac{1}{n}\Big[\frac{1}{nc} + \frac{n-1}{2(c-b)}\Big] - \frac{(j-1)}{n(c-b)}, \quad j = 1,\dots,n.$$

Aplicando el teorema anterior, se obtiene una caracterización de la matriz inversa de una matriz circulante cuyos parámetros forman progresión aritmética. Por supuesto, el resultado coincide con los previamente obtenidos en [1] y [2].

Corolario 2. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, la matriz* $\operatorname{Circ}\big(a, a+b, \dots, a+(n-1)b\big)$ *es invertible sii* $\big(2a+(n-1)b\big)b \neq 0$ *y en este caso,*

$$\operatorname{Circ}\big(a, a+b, \dots, a+(n-1)b\big)^{-1} = \frac{2}{n^2\big(2a+(n-1)b\big)}\,\mathsf{J} - \frac{1}{nb}\operatorname{Circ}\big(\mathsf{a}(1,-1,0)\big).$$

En particular, para $m \in \mathbb{Z}$ tal que $2m+n \neq 1$, la matriz $\operatorname{Circ}(m, m+1, \dots, m+n-1)$ *es invertible y su inversa es*

$$\operatorname{Circ}(m, m+1, \dots, m+n-1)^{-1} = \frac{2}{n^2(2m+n-1)}\,\mathsf{J} - \frac{1}{n}\operatorname{Circ}\big(\mathsf{a}(1,-1,0)\big).$$

4 Matrices $\operatorname{Circ}(a, b, c, \dots, c, b)$

Para las matrices consideradas en esta sección se va a suponer $b \neq c$ ya que el caso $b = c$ se discutió en la seccion anterior. El caso $c = 0$ fue analizado en [5] suponiendo que $|a| > 2|b| > 0$; es decir que la matriz circulante es estrictamente diagonalmente dominante.

Observamos de nuevo que

$$\operatorname{Circ}(a, b, c, \dots, c, b) = \operatorname{Circ}(a-c, b-c, 0, \dots, 0, b-c) + c\mathsf{J}.$$

Se estudiarán en primer lugar las propiedades de $\operatorname{Circ}\big(\mathsf{b}(2q, -1, 0, \dots, 0, -1)\big)$. Para $q = 1$ se trata de la matriz Laplaciana de un ciclo y en general, para cualquier $q \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Circ}\big(\mathsf{b}(2q, -1, 0, \dots, 0, -1)\big)$ es la matriz asociada al operador de Schrödinger de un ciclo con potencial constante $2(q-1)$. Por lo tanto, su inversa es la función de Green de un ciclo. La inversión de matrices del tipo $\operatorname{Circ}\big(\mathsf{b}(2q, -1, 0, \dots, 0, -1)\big)$ involucra la resolución de ecuaciones en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes que a su vez involucra a las secuencias $\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que satisfacen la recurrencia

$$Q_{n+1}(x) = 2xQ_n(x) - Q_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Dichas secuencias se denominan secuencias de Chebyshev. Se denota por $\{T_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ y $\{U_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ a los *polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie* respectivamente y son las secuencias de Chebyshev que se obtiene al escoger $T_0(x) = U_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $U_1(x) = 2x$. Ver [4] para más detalles.

Para $q \in \mathbb{R}$, se definen los vectores $\mathsf{u}(q)$, $\mathsf{v}(q)$ and $\mathsf{w}(q)$ cuyas componentes se describen en términos de los polinomios de Chebyshev de la forma $u_j = U_{j-2}(q)$, $v_j = U_{j-1}(q)$ and $w_j = U_{j-2}(q) + U_{n-j}(q)$, respectivamente.

Lema 3. *Para cualquier $q \in \mathbb{R}$, se cumple*

(i) $\mathsf{w}_\tau(q) = \mathsf{w}(q)$ *and* $\langle \mathsf{w}(q), \mathsf{1}\rangle = \dfrac{T_n(q)-1}{q-1}$. *Además,* $\mathsf{w}(1) = n\mathsf{1}$.

(ii) $\mathsf{w}(q) = \mathsf{0}$ *sii* $q = \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, $j = 1, \dots, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.

Obsérvese que el cociente $\frac{T_n(q)-1}{q-1}$ está bien definido para $q = 1$, porque $T_n(1) = 1$, $U_n(1) = n+1$, y $T_n'(q) = nU_{n-1}(q)$.

De las propiedades anteriores se concluye que para $q \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\mathrm{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)\mathsf{w}(q) = 2[T_n(q)-1]\mathsf{e}.$$

El siguiente lema da la condición necesaria y suficiente para la invertibilidad de la matriz $\mathrm{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0,\dots,0,-1)\big)$

Proposición 2. *Para cualquier $q \in \mathbb{R}$, se cumple que*

(i) $\mathrm{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)$ *es invertible sii* $q \neq \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, $j = 0, \dots, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ *y,*

$$\mathrm{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)^{-1} = \frac{1}{2[T_n(q)-1]}\mathrm{Circ}\big(\mathsf{w}(q)\big).$$

(ii) *If* $q = 1$, *el sistema de ecuaciones* $\mathrm{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)\mathsf{h} = \mathsf{v}$ *es compatible sii* $\langle \mathsf{v}, \mathsf{1}\rangle = 0$ *en este caso, para* $\gamma \in \mathbb{R}$, *la única solución tal que* $\langle \mathsf{h}, \mathsf{1}\rangle = \gamma$ *es*

$$h_j = \frac{\gamma}{n} - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} |j-i|(n-|i-j|)v_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

El resultado principal de esta sección da una condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa de la matriz circulante $\mathrm{Circ}(a,b,c,\dots,c,b)$, así como una expresión simple para el cálculo de los coeficientes de la matriz inversa, cuando ello es posible.

Teorema 2. *Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Circ}(a,b,c,\dots,c,b)$ es invertible sii*

$$\big(a+2b+(n-3)c\big)\prod_{j=1}^{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}\left[a-c+2(b-c)\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right] \neq 0$$

y en este caso $\mathrm{Circ}(a,b,c,\dots,c,b)^{-1} = \mathrm{Circ}\big(\mathsf{g}(a,b,c)\big)$, *donde si* $a \neq 3c-2b$

$$g_j(a,b,c) = \frac{U_{j-2}(q)+U_{n-j}(q)}{2(c-b)[T_n(q)-1]} - \frac{c}{(a+2b-3c)\big(a+2b+(n-3)c\big)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

con $q = \dfrac{c-a}{2(b-c)}$, *mientras que*

$$g_j(3c-2b,b,c) = \frac{1}{12n(c-b)}\big(n^2-1-6(j-1)(n+1-j)\big) + \frac{1}{n^2c}, \quad j=1,\dots,n.$$

Como corolario se obtiene la matriz inversa de una matriz tridiagonal circulante sin necesidad de suponer como en [5] que la matriz es diagonalmente dominante. Observese que hipótesis de dominancia diagonal $|a| > 2|b|$ claramente implica que $a + 2b\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \neq 0$ para cualquier $j = 0,\dots,n$.

Corolario 3. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, *la matriz circulante* $\operatorname{Circ}(a,b,0,\dots,0,b)$ *es invertible sii*

$$\prod_{j=0}^{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}\left[a+2b\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right] \neq 0$$

y en este caso

$$\operatorname{Circ}(a,b,0,\dots,0,b)^{-1} = \operatorname{Circ}\big(\mathsf{g}(a,b,0)\big),$$

donde

$$g_j(a,b,0) = \frac{(-1)^j}{2b[1-(-1)^nT_n(\frac{a}{2b})]}\left[U_{j-2}\Big(\frac{a}{2b}\Big) + (-1)^nU_{n-j}\Big(\frac{a}{2b}\Big)\right], \quad j=1,\dots,n.$$

Referencias

[1] M. Bahsi, S. Solak, On the circulant matrices with arithmetic sequence, Int. J. Contemp. Math. Sci. 5 (25-28) (2010) 1213–1222.

[2] J.-Q. Wang, C.-Z. Dong, Inverse matrix of symmetric circulant matrix on skew field, Int. J. Algebra 1 (9-12) (2007) 541–546.

[3] L. Fuyong, The inverse of circulant matrix, Appl. Math. Comput. 217 (21) (2011) 8495 – 8503.

[4] J. Mason, D. Handscomb, Chebyshev Polynomials, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[5] O. Rojo, A new method for solving symmetric circulant tridiagonal systems of linear equations, Computers Math. Applic. 20 (1990), 61-67.

[6] S.-Q. Shen, J.-M. Cen, Y. Hao, On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers, App. Math. Comput. 217 (23) (2011) 9790 – 9797.