

Treball Fi de Grau

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

MODELAT I CONTROL D'UN SISTEMA TWIN ROTOR

MEMÒRIA

Autor: Rubén Mascaró Palliser
Director: Ramon Costa Castelló
Convocatòria: Juny 2015



Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



Resum

En aquest projecte es presenta el disseny i la implementació d'un sistema de control basat en l'aprenentatge de trajectòries per a un equip de laboratori assimilable a una maqueta d'helicòpter: l'anomenat *Twin Rotor MIMO System* (TRMS) de Feedback Instruments Ltd. L'equip es caracteritza per tenir els angles d'atac de pala fixos i es controla mitjançant la regulació de la velocitat dels rotors a través de dos motors d'accionament directe. El sistema resultant és multivariable (de dues entrades i quatre sortides), altament no lineal i fortament acoblat.

El treball realitzat es divideix en diferents fases. En primer lloc, es desenvolupa un model dinàmic complet del TRMS utilitzant la formulació d'Euler-Lagrange i ajustant els seus paràmetres a partir de dades experimentals. Seguidament, es procedeix a la creació d'un model de simulació en Matlab/Simulink capaç de representar de forma suficientment acurada el comportament del sistema. Finalment, es dissenya un sistema de control per al seguiment de trajectòries basat en una estratègia d'aprenentatge coneguda com a *Iterative Learning Control*.

L'aplicació presentada en aquest projecte es caracteritza per la capacitat del sistema de control de rebutjar perturbacions persistents i d'assolir una precisió elevada en el seguiment de trajectòries programades com a referència. La metodologia ha estat satisfactòriament verificada per mitjà de resultats experimentals.

Índex

Resum	I
Índex	IV
Llista de figures	V
Llista de taules	VII
Glossari	1
1. Introducció	3
1.1. Objectius del projecte	5
1.2. Abast del projecte	6
1.3. Contingut de la Memòria	6
2. Descripció del sistema	9
3. Model matemàtic del TRMS	11
3.1. Obtenició de la Lagrangiana del Sistema	12
3.1.1. Variables generalitzades	12
3.1.2. Paràmetres del TRMS	13
3.1.3. Càlcul de la Lagrangiana	13
3.2. Forces generalitzades	15
3.3. Equacions de moviment	17
3.4. Simplificació del model	18
4. Modelat i control dels conjunts motor-hèlix	21
4.1. Càlcul de les característiques estàtiques dels rotors	21
4.2. Modelat dels conjunts motor-hèlix	25
4.3. Control dels conjunts motor-hèlix i filtratge del soroll	28

5. Ajust dels paràmetres del model reduït	33
5.1. Ajust dels paràmetres associats als parells de fricció	33
5.1.1. Determinació del coeficient de fricció en el pla vertical	34
5.1.2. Determinació del coeficient de fricció en el pla horitzontal	34
5.2. Característiques estàtiques Velocitat-Força de propulsió dels rotors	36
6. Simulador del TRMS	43
6.1. El model de simulació del TRMS	43
6.2. Desenvolupament d'un laboratori virtual del TRMS	46
7. Sistema de control del TRMS	49
7.1. Bloc condicionador de la velocitat dels rotors	50
7.2. Controladors lineals tipus PID	51
7.2.1. Linealització del sistema entorn del punt $q=(0,0)$	51
7.2.2. Obtenció de les funcions de transferència del sistema linealitzat	53
7.2.3. Disseny dels controladors PID	54
7.3. Implementació de l'ILC	58
7.3.1. Formulació del problema de l' <i>Iterative Learning Control</i>	59
7.3.2. Aplicació de l'ILC al TRMS	60
8. Resultats experimentals	67
8.1. Seguiment de trajectòries amb els controladors PID	67
8.2. Seguiment de trajectòries amb l'ILC	70
9. Planificació	75
10. Pressupost	77
10.1. Costos d'adquisició d'equips i software	77
10.2. Costos de desenvolupament del projecte	78
11. Impacte ambiental i econòmic	79
Conclusions i treball futur	81
Agraïments	85
Bibliografia	87

Índex de figures

2.1	Twin Rotor MIMO System	9
3.1	Eixos de referència	14
3.2	Forces i parells aerodinàmics que actuen sobre la part mecànica TRMS	16
4.1	Característica Velocitat - Senyal de control del rotor principal	22
4.2	Característica Velocitat - Senyal de control del rotor de cua	23
4.3	Característica Senyal de control - Velocitat del rotor principal	24
4.4	Característica Senyal de control - Velocitat del rotor de cua	25
4.5	Comparació de la resposta del motor principal amb i sense linealització	26
4.6	Comparació de la resposta del motor de cua amb i sense linealització	26
4.7	Identificació del model del motor principal	27
4.8	Identificació del model del motor de cua	27
4.9	Resposta del sistema de control del motor principal	30
4.10	Resposta del sistema de control del motor de cua	31
5.1	Comparació de les oscil·lacions en el pla vertical del model i el sistema real abans i després de l'ajust	34
5.2	Comparació del moviment en el pla horitzontal del model i el sistema real per diferents posicions inicials (I)	35
5.3	Comparació del moviment en el pla horitzontal del model i el sistema real per diferents posicions inicials (II)	36
5.4	Característica Velocitat - Força de propulsió del rotor principal	39
5.5	Característica Velocitat - Força de propulsió del rotor de cua	39
5.6	Característica inversa Velocitat - Força d'impulsió rotor principal	41
5.7	Característica inversa Velocitat - Força d'impulsió rotor de cua	41
6.1	Model reduït del TRMS implementat en Simulink	43
6.2	Simulador del TRMS	44
6.3	Contingut de la llibreria TRMS_model_library	45
6.4	Laboratori virtual del TRMS implementat en EJS	46
6.5	Laboratori virtual del TRMS orientat en diferents posicions angulars	47
7.1	Esquema general de control	50

7.2	Resposta del TRMS davant una entrada graó $\mathbf{q}^{des} = (0, 0)$	57
7.3	Resposta del TRMS davant una entrada graó $\mathbf{q}^{des} = (0, 25; 0, 35)$	57
7.4	Resposta del TRMS davant una entrada graó $\mathbf{q}^{des} = (-0, 4; -0, 25)$	58
7.5	Esquema bidimensional d'un sistema ILC de primer ordre [6]	60
7.6	Comportament transitori per a l'ajust dels guanys proporcionals	63
7.7	Comportament transitori per a l'ajust de l'ample de banda dels filtres	64
7.8	Comportament transitori per a l'ajust dels guanys derivatius	65
8.1	Resposta del sistema real per la trajectòria 1	68
8.2	Resposta del model de simulació per la trajectòria 1	68
8.3	Resposta del sistema real per la trajectòria 2	69
8.4	Resposta del model de simulació per la trajectòria 2	69
8.5	Resultats de <i>tracking</i> obtinguts amb i sense l'ILC per a la trajectòria 1	70
8.6	Anàlisi d'errors durant el transitori d'aprenentatge de la trajectòria 1	71
8.7	Resultats de <i>tracking</i> obtinguts amb i sense l'ILC per a la trajectòria 2	72
8.8	Anàlisi d'errors durant el transitori d'aprenentatge de la trajectòria 2	73
9.1	Diagrama de Gantt amb les diferents fases del projecte	76

Índex de taules

3.1	Paràmetres del TRMS	13
3.2	Valors dels termes del model reduït del TRMS	19
4.1	Errors en l'ajust de les corbes $V(\omega)$ per diferents ordres dels polinomis . .	21
4.2	Errors en l'ajust de les corbes $\omega(V)$ per diferents ordres dels polinomis . .	24
4.3	Paràmetres dels models dels grups motor-hèlix	27
4.4	Paràmetres dels models de temps discret dels grups motor-hèlix	28
5.1	Constants que descriuen la relació de proporcionalitat entre les forces de propulsió i els parells reactius generats en cada rotor	38
5.2	Errors en l'ajust de les corbes $F(\omega)$ per diferents ordres dels polinomis . .	38
5.3	Errors en l'ajust de les corbes $\omega(F)$ per diferents expressions	40
7.1	Valors teòrics dels guanys dels controladors PID	55
7.2	Valors definitius dels guanys dels controladors PID	56
9.1	Llista de tasques del projecte	75
10.1	Pressupost d'adquisició d'equips i software d'investigació	77
10.2	Pressupost de desenvolupament del projecte	78

Glossari

ILC	<i>Iterative Learning Control</i>
MIMO	<i>Multiple-input multiple-output</i>
RC	Control Repetitiu, de l'anglès <i>Repetitive Control</i>
SISO	<i>Single-input single-output</i>
TRMS	<i>Twin Rotor MIMO System</i>

1. Introducció

Aquest projecte presenta la implementació d'un sistema de control basat l'*Iterative Learning Control* per al seguiment de trajectòries amb un equip de laboratori assimilable a una maqueta d'helicòpter i conegut com a *Twin Rotor MIMO System* (Feedback Instruments Ltd.). Aquest equip és un sistema mecànic multivariable i subactuat, és a dir, té menys senyals de control que graus de llibertat, i, a més, posseeix una dinàmica altament no lineal i acoblada.

En helicòpters convencionals, el control d'orientació i posició s'aconsegueix per mitjà de canvis apropiats d'inclinació de les hèlixs dels rotors, operacions que es duen a terme amb els actuadors cíclic i col·lectiu [1], mentre que les velocitats dels rotors es mantenen constants. Aquest fet, juntament amb no-linealitats i acoblaments intrínsecs, fa que aquests sistemes siguin especialment difícils de controlar, donat que els parells i forces necessaris no són aplicats directament, sinó transmesos a través dels efectes aerodinàmics de les hèlixs dels rotors.

En maquetes d'helicòpter de laboratori, en canvi, és habitual treballar amb angles d'atac de pala fixos i motors de velocitat variable, ja que el disseny mecànic dels mateixos es simplifica i es redueixen considerablement els costos de fabricació. Aquest és el cas del *TwinRotor*, l'equip amb què s'ha treballat en aquest projecte, i també el d'un altre sistema utilitzat en la literatura que es coneix com a *Toycopter* [2]. En ambdós casos, el control es duu a terme exclusivament per mitjà de la tensió elèctrica subministrada als motors. S'ha de ressaltar, però, que aquesta simplificació mecànica no necessàriament es tradueix en una simplificació del sistema a controlar. Al contrari, els parells i forces necessaris per a controlar el sistema són aplicats no només a través d'efectes aerodinàmics, sinó també a través de l'efecte d'acoblament que apareix entre la dinàmica dels rotors i la del cos de la maqueta, com a conseqüència del principi d'acció i reacció originat en l'acceleració i dels grups motor-hèlix. Aquest fet, unit a les incerteses de modelat, fa que el sistema requereixi de sistemes de control de gran robustesa, cosa que resulta difícil utilitzant tècniques bàsiques per al disseny de controladors.

Una forma habitual de fer front a aquesta dificultat és fer ús d'algunes hipòtesis simplificadores basades en l'existència de diferents escales de temps com a conseqüència de la diferència existent entre els valors dels moments d'inèrcia del cos de la maqueta i els dels grups motor-hèlix [2], [3]. D'aquesta manera, és possible desacoblar les dinàmiques del cos de la maqueta i dels grups motor-hèlix i descompondre el sistema de control del TRMS en dos sistemes en cascada realimentats, als quals es poden aplicar diverses tècniques de control específicament dissenyades per a ells.

En el cas d'aquest projecte, el sistema de control que s'ha implementat es basa en una estratègia d'aprenentatge que rep el nom d'*Iterative Learning Control*. L'ILC, com més comunament es fa referència a aquesta tècnica, neix de la noció que el funcionament d'un sistema que executa la mateixa tasca múltiples vegades i sota les mateixes condicions d'operació pot ser millorada a través d'un aprenentatge de les execucions prèvies.

Per a aquests tipus de sistemes, els controladors convencionals provoquen els mateixos errors de *tracking* cada cop que es duu a terme una tasca, ja el seu comportament es basa únicament en la mesura de l'error en l'execució actual. Envers això, l'objectiu de l'ILC és millorar el funcionament del sistema memoritzant l'error de les iteracions prèvies i incorporant aquesta informació en els senyals de control per a les iteracions subsegüents. D'aquesta manera, es pot aconseguir una elevada precisió en la realització de diferents tasques, com ara el seguiment de trajectòries, tot i la presència d'incerteses en el model i de pertorbacions periòdiques.

Les idees bàsiques sobre l'ILC poden ser trobades en una patent nord-americana que data de l'any 1967 [4]. Des de llavors, i més especialment a partir de la dècada de 1980, el nombre de publicacions sobre aquesta tècnica de control i les seves aplicacions ha crescut ràpidament fent que, actualment, es puguin obtenir resultats realment potents.

En aquest sentit, l'ILC s'ha focalitzat especialment en la millora del funcionament de sistemes que executen operacions senzilles i de forma repetida. Això inclou molts sistemes industrials destinats a la manufactura i a la robòtica, on la producció en massa en cadenes de muntatge porta associada l'execució de tasques repetitives, i també a diferents processos químics. Com mostra un estudi que recull i classifica la gran majoria de les publicacions referides a L'ILC aparegudes fins a l'actualitat [5], aquesta tècnica de control ha estat aplicada amb èxit a robots industrials, màquines de control numèric (CNC), màquines d'injecció i moldejat, extrusores d'alumini, motors d'inducció, vehicles autònoms i reactors químics, entre d'altres.

Actualment, L'ILC forma part d'un conjunt més ampli d'estratègies de control basades en aprenentatge on s'inclouen també el control adaptatiu, les xarxes neuronals i el control repetitiu (RC), tot i que presenta algunes diferències respecte d'aquestes. Així,

mentre que l'ILC modifica la consigna de control, que és un senyal, les estratègies de control adaptatiu modifiquen el controlador, que és un sistema. A més, els controladors del tipus adaptatiu típicament no aprofiten la informació continguda en senyals de consigna repetitius. De forma similar, l'aprenentatge basat en xarxes neuronals implica la modificació de certs paràmetres del controlador en lloc del senyal de control. En aquest cas, es modifiquen llargues xarxes de neurones no lineals, cosa que requereix de grans extensions de dades i dificulta la ràpida convergència de l'aprenentatge [6]. L'ILC, per la seva banda, habitualment convergeix adequadament en unes poques iteracions.

La tècnica de control on l'ILC troba més similituds és el RC, excepte pel fet que aquest és concebut per a l'operació contínua, mentre que l'ILC ho és per a l'operació discontinua. La diferència entre ambdós rau en l'establiment de les condicions inicials per a cada execució: en el cas de l'ILC, les condicions inicials són establertes al mateix valor en cada execució; en el RC, en canvi, les condicions inicials són les condicions finals de la iteració anterior, fet que porta a la utilització de diferents tècniques d'anàlisi i resultats [7].

1.1. Objectius del projecte

L'objectiu d'aquest projecte és el disseny d'un sistema de control basat en l'aprenentatge, concretament en l'ILC, per tal d'aconseguir precisió elevada en el seguiment de trajectòries. L'equip utilitzat per fer les comprovacions experimentals, com s'ha mencionat anteriorment, és el *Twin Rotor MIMO System* de Feedback Instruments Ltd., que es troba disponible al Laboratori docent de Tecnologia Informàtica I pertanyent al Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial (ESAI) de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC).

Per poder procedir al disseny dels controladors, el primer pas que es durà a terme és la determinació d'un model dinàmic del sistema, a partir del qual es calcularan les seves equacions de moviment.

Conegudes les equacions de moviment, s'implementarà un simulador en Matlab/Simulink que servirà per acabar d'ajustar alguns dels paràmetres del model mitjançant la comparació de la seva resposta amb la del sistema real.

Finalment, es procedirà al disseny del sistema de control de posició del TRMS. Els controladors proposats seran assajats prèviament amb el model de simulació i posteriorment es provaran amb l'equip de laboratori, fent un anàlisi exhaustiu dels resultats obtinguts.

Així doncs, els objectius concrets d'aquest projecte són:

- Desenvolupar i validar un model matemàtic que permeti obtenir, de forma prou acurada, les equacions de moviment del TRMS.
- Desenvolupar, calibrar i validar un model de simulació del TRMS.
- Dissenyar un sistema de control basat en l'ILC que permeti obtenir una precisió elevada pel que fa al seguiment de trajectòries programades com a referència.

1.2. Abast del projecte

La finalitat última d'aquest projecte és comprovar experimentalment la capacitat dels algorismes d'aprenentatge basats en l'ILC a l'hora de millorar el rendiment de sistemes que realitzen tasques de forma repetitiva i que requereixen de gran precisió. El que es pretén amb això és donar una visió més aviat generalista sobre una estratègia de control basada en l'aprenentatge que ha despertat un gran interès en les últimes dècades i ha anat trobant cada cop més aplicacions en el món de la indústria i la robòtica.

En aquest cas concret, es presenta la seva aplicació a un equip de laboratori caracteritzat per ser altament no lineal i fortament acoblat, amb totes les dificultats de modelat i control que això suposa, per tal de demostrar la potència dels resultats que es poden arribar a aconseguir en combinar l'ILC amb un sistema de control de realimentació correctament dissenyat.

Per a això, ha calgut desenvolupar un treball d'investigació que ha englobat diferents àrees de l'enginyeria com són la mecànica de sòlids i l'aerodinàmica, en referència a l'estudi cinemàtic i dinàmic que s'ha fet de la planta, i, més especialment, l'automàtica, disciplina en què s'inclou l'estudi, el disseny i la implementació de les tècniques de control esmentades.

1.3. Contingut de la Memòria

El present document, que recopila tot el treball realitzat per al desenvolupament d'aquest projecte, s'ha dividit en onze capítols. A continuació es descriuen breument els continguts dels capítols que segueixen a aquesta introducció.

El segon capítol inclou una breu descripció de les característiques de l'equip de laboratori que es vol arribar a controlar.

En el tercer capítol es descriu el procediment seguit per a l'obtenció del model matemàtic que regeix el moviment del TRMS, així com les hipòtesis i simplificacions assumides.

El quart capítol està dedicat a la part de modelat i control en cascada dels motors. S'hi poden trobar els experiments realitzats per obtenir les corbes característiques Voltatge-Velocitat dels grups motor-hèlix, així com la descripció dels controladors amb què s'ajusta la velocitat dels motors a la velocitat desitjada.

En el cinquè capítol es descriu el procediment d'ajust experimental que s'ha dut a terme per acabar de fixar tots els paràmetres del model dinàmic del TRMS, concretament els que fan referència a les forces externes que actuen sobre el sistema (forces aerodinàmiques i forces de fricció).

En el sisè capítol es presenta el simulador del TRMS implementat en Matlab/Simulink, la descomposició del model en els blocs que l'integren i la descripció de la funció que realitza cadascun d'ells. A més, s'hi inclou una breu descripció d'un laboratori virtual del TRMS implementat en Easy Java Simulations que s'ha començat a desenvolupar en col·laboració amb el tutor d'aquest projecte i un investigador de la UNED.

En el setè capítol es descriu amb detall el sistema de control de posició del TRMS, les bases teòriques sobre les quals es sustenta el procediment de disseny dels controladors i com les solucions adoptades segons la problemàtica que ha sorgit.

En el vuitè capítol es presenten els resultats de les simulacions i dels experiments realitzats amb l'equip de laboratori, en les quals s'han avaluat les prestacions del sistema de control pel que fa al seguiment de trajectòries construïdes a partir de polinomis de 5è grau.

En els tres últims capítols s'inclou una breu descripció de la planificació seguida per a la realització del projecte, el pressupost de desenvolupament del mateix i un petit estudi d'impacte ambiental i econòmic de les tècniques de control implementades.

Finalment, s'inclouen les conclusions a què s'ha arribat després del procés d'experimentació amb el sistema de control implementat i s'indiquen algunes propostes per a la realització de treballs futurs.

Com a Annexos, s'inclouen el desenvolupament detallat de les equacions del model dinàmic del TRMS, un manual d'ús del simulador i de les llibreries que s'han creat, i, finalment, un llistat dels arxius complementaris (funcions per a l'estimació dels paràmetres del TRMS, per al disseny dels controladors, etc.) que s'han anat desenvolupant en les diferents fases del projecte.

2. Descripció del sistema

El *Twin Rotor MIMO System* (TRMS) és un equip de laboratori desenvolupat per Feedback Instruments Ltd. que permet la realització d'experiments de control. Tota la informació referent al hardware utilitzat, sensors, actuadors, targeta d'adquisició, etc. pot trobar-se en els manuals de l'equip [8], [9].



Figura 2.1: Twin Rotor MIMO System

Com es pot veure a la Figura 2.1, el TRMS és un sistema mecànic constituït per un cos que pot girar lliurement tant en el pla vertical com en l'horitzontal per mitjà de dues articulacions centrals d'un grau de llibertat cadascuna. El sistema està propulsat per

dues hèlixs situades en plans perpendiculars, una a cada extrem de la barra principal, i accionades per dos motors de corrent continu. El cos del TRMS el completa un braç que es troba fixat perpendicularment al centre de la barra principal. Aquest braç disposa d'un contrapès al seu extrem que serveix per equilibrar el moment angular i determinar una posició d'equilibri estable.

Des del punt de vista de control, TRMS és un sistema multivariable, no lineal i fortament acoblat, l'estat del qual es pot descriure a través de quatre variables: les posicions angulars de capcineig (*pitch*) i guinyada (*yaw*), mesurades mitjançant dos encoders situats en el punt d'unió entre la barra principal i la columna de suport, i les velocitats de gir dels rotors, mesurades mitjançant tacòmetres que es troben acoblats als motors.

D'acord amb el que s'ha comentat a la introducció d'aquest treball, les forces aerodinàmiques no es controlen canviant l'angle d'atac de les hèlixs, com en el cas dels helicòpters convencionals, sinó regulant la velocitat de gir dels rotors. Així, les entrades del sistema són els valors de tensió que se subministren als motors de corrent continu. Un canvi en el valor d'aquestes tensions provoca una modificació de les velocitats de rotació de les hèlixs, que al seu torn resulta en una variació de la posició angular del sistema.

3. Model matemàtic del TRMS

Els problemes de modelat i control del TRMS han atret una gran atenció en la darrera dècada degut a l'elevada no linealitat i als acoblaments presents en la dinàmica del sistema, fet que ha propiciat la publicació de nombrosos articles relacionats amb aquesta temàtica. En les esmentades publicacions es distingeixen dues perspectives diferents a l'hora d'abordar el problema: l'enfocament newtonià o la formulació d'Euler-Lagrange. Per una banda, el propi fabricant proporciona un model newtonià simplificat a [8] i [9], tot i que, segons un estudi independent [10], no captura la dinàmica del sistema de forma prou acurada. Un estudi comparatiu entre un model newtonià i un model lagrangià és presentat a [11]. Si bé els dos enfocaments porten a equacions molt similars, el principal inconvenient que presenta l'aplicació de les equacions de Newton és que requereix tenir en compte diferents forces fictícies, els paràmetres de les quals no són fàcils d'identificar en aquest sistema en concret. Per contra, l'enfocament d'Euler-Lagrange es presenta, en el cas que ens ocupa, com una manera més rigorosa i natural d'obtenir les equacions de la dinàmica [10], [3].

En aquest treball, doncs, s'abordarà la deducció del model matemàtic del TRMS des de la perspectiva de la formulació d'Euler-Lagrange. Donat que el desenvolupament de les equacions pot resultar extens i una mica tediós, en aquest capítol s'explicarà breument el procediment de càlcul utilitzat i es presentaran les equacions de moviment resultants. Per a una descripció més detallada, remeti's a l'Annex A que es presenta juntament amb aquest document i a les referències bibliogràfiques que hi apareixen indicades. Així mateix, en la presentació en format digital d'aquest treball s'inclouen els arxius Maple a partir dels quals s'ha desenvolupat el model, i on es poden consultar i verificar tots els càlculs realitzats.

3.1. Obtenció de la Lagrangiana del Sistema

La metodologia d'obtenció de models matemàtics a partir de la formulació d'Euler-Lagrange consta dels següents passos [10]:

1. Definir un conjunt de coordenades generalitzades $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
2. Trobar l'energia cinètica $T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$, l'energia potencial $U(\mathbf{x}, t)$ i la Lagrangiana $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = T - U$ del sistema.
3. Trobar el vector de forces generalitzades \mathbf{F}_x .
4. Calcular l'equació d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}_x \quad (3.1)$$

3.1.1. Variables generalitzades

En el cas concret del TRMS, el vector de variables generalitzades es defineix com:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_v \\ q_h \\ \theta_t \\ \theta_m \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_h \\ \omega_t \\ \omega_m \end{bmatrix};$$

essent q_v la posició angular de capcineig, q_h posició angular de guinyada, θ_t la posició angular de l'hèlix de cua i θ_m la posició angular de l'hèlix principal.

Vegis que el sistema té quatre graus de llibertat, cadascun dels quals es correspon amb una de les coordenades generalitzades que s'acaben de descriure. Per tant, en aplicar el model de Lagrange s'obtenen quatre equacions de moviment: dues actuades, corresponents a les equacions dels grups motor-hèlix principal i de cua, i dues no actuades, corresponents als moviments de capcineig i guinyada del cos del TRMS. Així doncs, el sistema és subactuat, ja que el nombre d'accions de control (tensions aplicades a cadascun dels motors) és inferior al nombre de graus de llibertat del sistema (posicions angulars del cos del TRMS i posicions angulars dels rotors).

3.1.2. Paràmetres del TRMS

A continuació s'inclou una taula amb els paràmetres bàsics que s'han utilitzat per desenvolupar el model del TRMS.

Símbol	Paràmetre	Valor	Unitat
L_m	Longitud de la barra principal (part del motor principal)	0,24	m
L_t	Longitud de la barra principal (part del motor de cua)	0,25	m
L_b	Longitud de la barra del contrapès	0,26	m
L_d	Distància de la barra principal a l'articulació fixa	0,025	m
L_{cb}	Distància entre el contrapès i l'articulació mòbil	0,255	m
r_{cb}	Radi del contrapès	0,01	m
r_{ms}	Radi de l'escut del rotor principal	0,155	m
r_{ts}	Radi de l'escut del rotor de cua	0,10	m
h_{cb}	Altura del contrapès	0,03	m
h	Altura dels escuts dels dos rotors	0,05	m
M_{mr}	Massa del motor i el rotor principals	0,228	kg
M_{ms}	Massa de l'escut del rotor principal	0,225	kg
M_{tr}	Massa del motor i el rotor de cua	0,206	kg
M_{ts}	Massa de l'escut del rotor de cua	0,165	kg
M_m	Massa de la barra principal (part del motor principal)	0,0145	kg
M_t	Massa de la barra principal (part del motor de cua)	0,0155	kg
M_b	Massa de la barra del contrapès	0,022	kg
M_{cb}	Massa del contrapès	0,068	kg
M_{mh}	Massa de les hèlixs del rotor principal	0,0022	kg
M_{th}	Massa de les hèlixs del rotor de cua	0,0033	kg
J_{mr}	Inèrcia del rotor principal	$2,650 \cdot 10^{-5}$	kg m ²
J_{tr}	Inèrcia del rotor de cua	$1,6543 \cdot 10^{-5}$	kg m ²
g	Acceleració de la gravetat	9,81	m s ⁻²

Taula 3.1: Paràmetres del TRMS

3.1.3. Càlcul de la Lagrangiana

L'obtenció de la Lagrangiana del sistema s'ha dut a terme dividint el TRMS en diferents cossos, els quals apareixen detallats a continuació:

- El rotor principal, format per les hèlixs (C_m) i la part estructural fixa a la barra principal (B_m), això és, l'estator del motor i l'escut protector de les hèlixs.

- El rotor de cua, integrat per les hèlixs (C_t) i la part estructural fixa a la barra principal (B_t) que, igual que en el cas anterior, consta de l'estator del motor i de l'escut protector de les hèlixs.
- La barra principal, que ahora s'ha dividit entre la part que uneix l'articulació central amb el motor principal (D) i la que uneix l'articulació central amb el motor de cua (E).
- La barra que subjecta el contrapès (F).
- El propi contrapès (G).

Com es pot veure a la Figura 3.1, a cadascun dels cossos que conformen la planta se li ha associat un sistema de referència que permet definir la seva posició i orientació respecte d'un sistema de referència global fix (A). Aquest últim s'ha situat a l'articulació que uneix el cos del TRMS amb la columna vertical de suport.

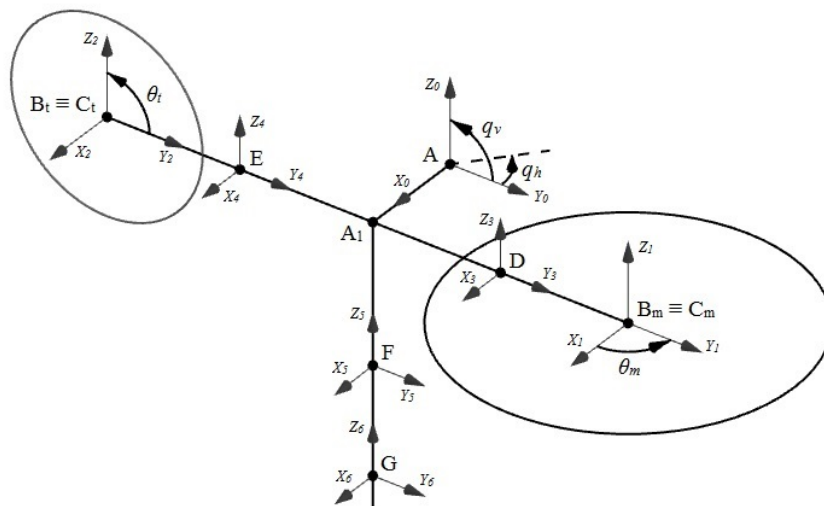


Figura 3.1: Eixos de referència

Per al càlcul de la Lagrangiana del sistema, en primer lloc s'han identificat els paràmetres físics de cadascun dels cossos que el formen: dimensions, masses i tensors d'inèrcia respecte dels seus eixos principals. En segon lloc, s'han obtingut les matrius de posició i orientació de les referències associades als diferents cossos i, a partir d'aquestes, s'han calculat les velocitats dels seus centres de gravetat i les seves velocitats angulars. Per últim, per a cada cos s'ha calculat la seva energia cinètica T_{c_x} i potencial gravitatòria U_{c_x} a partir de les expressions (3.2) i (3.3), respectivament:

$$T_{c_X} = \frac{1}{2} M_{c_X} \|\mathbf{v}_{AX}^X\|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{AX}^X T \mathbf{I}_{c_X} \boldsymbol{\Omega}_{AX}^X \quad (3.2)$$

$$U_{c_X} = M_{c_X} g h_X \quad (3.3)$$

Mitjançant el procediment de càlcul utilitzat [12], la velocitat \mathbf{v}_{AX}^X es pot interpretar com la velocitat de l'origen del sistema de referència X vista des de la referència global A , però orientada segons X . De la mateixa manera, $\boldsymbol{\Omega}_{AX}^X$ s'interpreta com la velocitat angular del sistema de referència X vista des d'una referència amb origen a A , però orientada segons X . Per altra banda, M_{c_X} és la massa del cos associat a la referència X i \mathbf{I}_{c_X} és el tensor d'inèrcia del mateix cos respecte dels seus eixos principals. Finalment, el terme h_X és la distància vertical del centre de la referència X respecte del punt considerat com a origen de les energies potencials, i g és l'acceleració de la gravetat.

Un cop obtingudes les expressions de les energies cinètiques i potencials de cadascun dels cossos del TRMS, s'ha obtingut la Lagrangiana total del sistema sumant totes les Lagrangianes parcials.

3.2. Forces generalitzades

Les següents forces es consideren externes al TRMS:

1. Les forces aerodinàmiques generades per les hèlixs dels rotors.
2. Les forces degudes al fregament entre les diferents parts mecàniques i l'aire.
3. Les forces electromecàniques generades pels motors de corrent continu.

D'acord amb la teoria aerodinàmica de l'element de pala [13], [14], cada grup rotor-hèlix del TRMS genera una força de propulsió T i un parell reactiu Q que són proporcionals al quadrat de la seva velocitat angular. El parell reactiu Q és generat per la resistència de l'aire oposant-se al moviment de rotació de les pales i s'exerceix sobre el rotor i l'estator del motor corresponent. A través de l'estator i de la barra principal, aquest parell es transmet també a les articulacions del sistema mecànic, fent que el cos del TRMS tendeixi a girar en sentit oposat al de les pales. Així doncs, les forces aerodinàmiques són un apartat que mereix especial atenció pel que fa a la formulació del vector de forces generalitzades, ja que esdevenen les principals responsables dels acoblaments presents en el sistema objecte d'estudi.

A la Figura 3.2 es representen les forces i els parells aerodinàmics que actuen sobre l'estructura mecànica del TRMS.

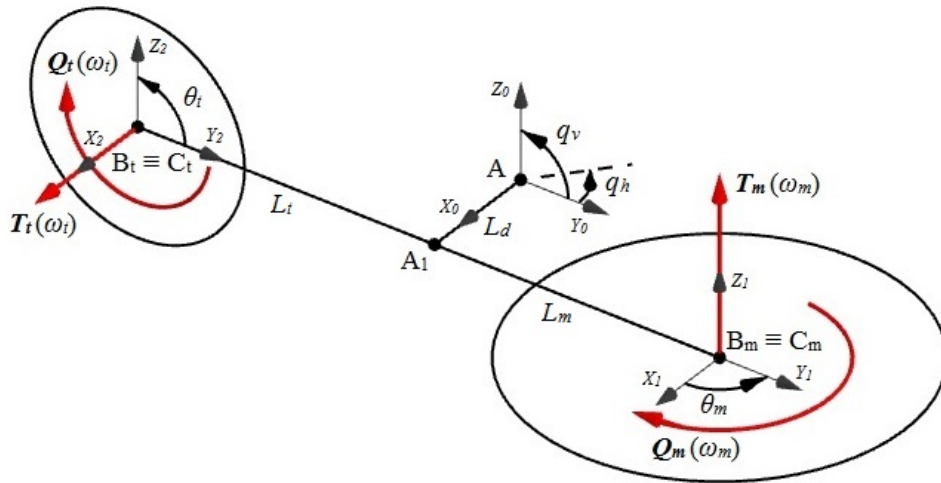


Figura 3.2: Forces i parells aerodinàmics que actuen sobre la part mecànica TRMS

Vegis que l'acció d'aquestes forces i parells sobre les articulacions del sistema es pot modelitzar segons l'equació (3.4). Per a una descripció més detallada sobre com s'han obtingut aquestes expressions, es pot consultar l'annex A d'aquest treball.

$$\begin{bmatrix} F_{a,q_v} \\ F_{a,q_h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_m & 0 \\ -L_d \sin q_v & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m(\omega_m) \\ Q_m(\omega_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ L_t \cos q_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_t(\omega_t) \\ Q_t(\omega_t) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Així, el rotor principal genera quatre magnituds vectorials: el parell de propulsió de magnitud $T_m(\omega_m) L_m$ actuant en l'angle q_v , el parell de propulsió $-T_m(\omega_m) L_d \sin q_v$ actuant en l'angle q_h (degut al desplaçament L_d existent entre l'articulació que permet el gir en el pla vertical, A_1 , i la que permet el gir en el pla horitzontal, A), el parell de magnitud $-Q_m(\omega_m) \cos q_v$ actuant en l'angle q_h i el parell reactiu de magnitud $-Q_m(\omega_m)$ actuant en l'angle θ_m . De forma similar, el rotor de cua provoca els següents parells: el parell de propulsió $T_t(\omega_t) L_t \cos q_v$ actuant en l'angle q_h , el parell $-Q_t(\omega_t)$ actuant en l'angle q_v i el parell reactiu de magnitud $-Q_t(\omega_t)$ actuant en l'angle θ_t .

Per la seva banda, els parells electromecànics generats pels motors de corrent continu es poden aproximar per l'expressió $k_t i$, on k_t és una constant del motor i i representa el corrent que hi circula. Finalment, pel que fa a les forces de fregament, s'ha considerat un model simplificat de fricció viscosa utilitzat habitualment en la modelització i el control de sistemes mecànics. Així, les magnituds dels parells de fricció per a cada coordenada generalitzada venen donats pels termes $-B_{x_1} \dot{q}_v$, $-B_{x_2} \dot{q}_h$, $-B_{x_3} \omega_m$ i $-B_{x_4} \omega_t$.

Agrupant totes les forces mencionades anteriorment en cadascuna de les coordenades generalitzades, es té que:

$$\begin{aligned}
 F_{q_v} &= T_m(\omega_m) L_m - Q_t(\omega_t) - B_{x_1} \dot{q}_v \\
 F_{q_h} &= T_t(\omega_t) L_t \cos q_v - T_m(\omega_m) L_d \sin q_v - Q_m(\omega_m) \cos q_v - B_{x_2} \dot{q}_h \\
 F_{\theta_m} &= k_{tm} i_m - Q_m(\omega_m) - B_{x_3} \omega_m \\
 F_{\theta_t} &= k_{tt} i_t - Q_t(\omega_t) - B_{x_4} \omega_t
 \end{aligned}$$

3.3. Equacions de moviment

Un cop s'ha obtingut la Lagrangiana del sistema i s'ha identificat el vector de forces generalitzades, desenvolupant l'equació (3.1) per a les quatre coordenades generalitzades es pot arribar a les equacions que descriuen el model dinàmic complet del TRMS. Reagrupant tots els termes convenientment, es pot veure que aquestes equacions prenen la forma genèrica:

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \mathbf{M}_q(\mathbf{q}) & \mathbf{M}_{q,\theta}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{M}_{q,\theta}(\mathbf{q})^T & \mathbf{M}_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\omega}) \\ \mathbf{c}_\theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{g}_q(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_x \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{i}, \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

De forma més compacta, es pot escriure:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f} \tag{3.6}$$

on $\mathbf{M}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ és la matriu associada a les inèrcies del sistema, $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^4$ són els termes associats als efectes de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$ són els termes derivats de les energies potencials, $\mathbf{B}_x \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$ són els termes associats a les dissipacions viscoses i $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^4$ són les forces aerodinàmiques i electromecàniques externes al sistema.

En aquest cas en particular, interessa principalment veure que la matriu associada a les inèrcies del sistema pren la forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \sin q_v + \beta_{12} \cos q_v & J_{tr} & 0 \\ \alpha_{12} \sin q_v + \beta_{12} \cos q_v & \beta_{222} \cos^2 q_v + \beta_{220} & 0 & J_{mr} \cos q_v \\ J_{tr} & 0 & J_{tr} & 0 \\ 0 & J_{mr} \cos q_v & 0 & J_{mr} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

En l'equació (3.7), J_{mr} , J_{tr} , α_{11} , α_{12} , β_{12} , β_{222} i β_{220} són paràmetres que deriven del càlcul de l'energia cinètica i que depenen de la geometria, les masses i les inèrcies (per a una informació més detallada arran de l'obtenció d'aquests paràmetres, remeti's a l'Annex A d'aquest treball).

3.4. Simplificació del model

En la classe de sistemes que ens ocupa, és usual considerar, com a hipòtesi de simplificació, que els moments d'inèrcia dels grups motor-hèlix són negligibles respecte dels moments d'inèrcia del cos de la maqueta. En aquest cas concret, es pot comprovar en l'equació (3.7) que els termes de $\mathbf{M}_{\mathbf{q},\theta}(\mathbf{q})$ són petits enfront els termes de $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$, de manera que l'acoblament entre $\boldsymbol{\omega}$ i $\dot{\mathbf{q}}$ és feble i es pot negligir. Tenint en compte això, la dinàmica del sistema pot ser separada en dues escales de temps, diferenciant-se dues dinàmiques:

- La dinàmica ràpida, que fa referència a la dinàmica dels actuadors, és a dir, dels grups motor-hèlix.
- La dinàmica lenta (sistema reduït), que fa referència a la dinàmica del cos del TRMS, concretament als moviments de capcineig i guinyada.

A més, assumint que és possible dissenyar un controlador local que, mesurant les velocitats $\boldsymbol{\omega}$ dels rotors, forci $\boldsymbol{\omega} \approx \boldsymbol{\omega}^{des}$, i suposant que $\boldsymbol{\omega}^{des}$ es fa evolucionar de forma suau, pot menysprear-se l'acceleració dels rotors en la caracterització de la dinàmica lenta i, consegüentment, les equacions del moviment del sistema reduït poden ser aproximades per una expressió del tipus:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{c}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{B}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.8)$$

on $\mathbf{M}_{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ correspon al tensor d'inèrcia, $\mathbf{c}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^2$ correspon a les forces centrífuges i de Coriolis, $\mathbf{g}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2$ correspon al terme de forces conservatives, $\mathbf{B}_{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ és una matriu diagonal que correspon a les forces dissipatives, $\mathbf{c}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^2$ correspon a les forces de Coriolis provocades sobre el cos del TRMS per efecte del gir de les hèlixs i $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^2$ correspon als parells provocats per les forces externes, que en el cas d'aquest model es prendran com a accions de control.

Bàsicament, el que es fa amb aquesta simplificació és suposar que el model es comporta com una planta en què les hèlixs no emmagatzemen energia cinètica: es considera únicament l'efecte net de les forces externes aplicades sobre l'eix de rotació de cada hèlix, menyspreant l'acoblament entre l'acceleració dels rotors i la dinàmica del cos del TRMS.

De manera més detallada, es pot comprovar que les equacions de moviment del model reduït presenten la forma que segueix:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{q,11} & M_{q,12}(q_v) \\ M_{q,12}(q_v) & M_{q,22}(q_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_v \\ \dot{q}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{q,1}(q_v) \dot{q}_h^2 \\ c_{q,12}(q_v) \dot{q}_v \dot{q}_h + c_{q,2}(q_v) \dot{q}_v^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{q,1}(q_v) \\ g_{q,2}(q_h) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \Gamma_{q_v}(\omega_m, \omega_t) \\ \Gamma_{q_h}(\omega_m, \omega_t, q_v) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{\omega,1}(q_v) \dot{q}_h \omega_m \\ c_{\omega,2}(q_v) \dot{q}_v \omega_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{q,11} & 0 \\ 0 & B_{q,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Els parells aerodinàmics, al seu torn, es poden separar en dos termes fent referència als que són provocats pel rotor principal i als que són provocats pel rotor de cua:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{q_v}(\omega_m, \omega_t) \\ \Gamma_{q_h}(\omega_m, \omega_t, q_v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_m & 0 \\ -L_d \sin q_v & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m(\omega_m) \\ Q_m(\omega_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ L_t \cos q_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_t(\omega_t) \\ Q_t(\omega_t) \end{bmatrix}$$

Les expressions associades als termes de $\mathbf{M}_q(\mathbf{q})$, $\mathbf{c}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{g}_q(\mathbf{q})$ i $\mathbf{c}_\omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\omega})$ s'obtenen directament en aplicar la formulació d'Euler-Lagrange, i són les que s'indiquen a la Taula 3.2.

Terme	Valor	Unitats
$M_{q,11}$	0,0349	kg · m ²
$M_{q,12}(q_v)$	$-2,8218 \cdot 10^{-4} \sin(q_v) + 5,0500 \cdot 10^{-4} \cos(q_v)$	kg · m ²
$M_{q,22}(q_v)$	$0,0233 \cos^2 q_v + 0,0089$	kg · m ²
$c_{q,1}(q_v)$	$0,0233 \cos(q_v) \sin(q_v)$	kg · m ²
$c_{q,12}(q_v)$	$-0,0466 \cos(q_v) \sin(q_v)$	kg · m ²
$c_{q,2}(q_v)$	$-2,8218 \cdot 10^{-4} \cos(q_v) - 5,0500 \cdot 10^{-4} \sin(q_v)$	kg · m ²
$g_{q,1}(q_v)$	$0,1982 \sin(q_v) + 0,1547 \cos(q_v)$	N · m
$g_{q,2}(q_h)$	$K_a(q_h - q_{h0})$	N · m
$c_{\omega,1}(q_v)$	$2,6500 \cdot 10^{-5} \sin(q_v)$	kg · m ²
$c_{\omega,2}(q_v)$	$1,6543 \cdot 10^{-5} \sin(q_v)$	kg · m ²

Taula 3.2: Valors dels termes del model reduït del TRMS

Val a dir que els paràmetres K_a i q_{h0} que modelitzen la constant recuperadora del cable i la posició d'equilibri en l'angle de guinyada, respectivament, són propis de cada planta i s'han hagut de determinar experimentalment tal i com es descriu a la secció 5.2 d'aquest document.

4. Modelat i control dels conjunts motor-hèlix

4.1. Càlcul de les característiques estàtiques dels rotors

Pel que fa a la part de modelat dels motors, primer de tot s'ha procedit a fer un estudi per tal de determinar les característiques estàtiques que relacionen els senyals de control amb les velocitats de gir de les hèlixs. Amb aquest objectiu, s'han realitzat una sèrie d'experiments que han consistit en mesurar les velocitats angulars de les hèlixs en estat estacionari per diferents valors de tensió aplicats a l'entrada dels motors. Per garantir la seguretat de l'equip de laboratori, especialment quan s'ha treballat amb velocitats elevades, aquests assaigs s'han dut a terme subjectant la protecció de l'hèlix principal a fi de mantenir el sistema en una posició fixa en tot moment.

Els resultats experimentals s'han representat en un gràfic que relaciona, per a cada motor, la tensió subministrada amb la velocitat de gir assolida a l'estat estacionari. Això ha donat lloc a l'obtenció d'unes corbes de punts que han estat interpolades polinòmicament mitjançant Matlab. A la Taula 4.1 s'indiquen els errors -calculats com la suma de distàncies al quadrat de cada punt experimental respecte de la corba- que es cometen segons l'ordre del polinomi amb què s'ajusten les dades. Tenint presents aquests valors, s'ha decidit utilitzar polinomis de setè ordre per identificar les corbes característiques dels dos motors, donat que l'ajust ja es considera prou bo i la millora que aporta augmentar més l'ordre del polinomi és poc significativa.

Ordre del polinomi	Error M. Principal	Error M. de Cua
5	0,1953	0,0256
6	0,1889	0,0232
7	0,1252	0,0151
8	0,1186	0,0145

Taula 4.1: Errors en l'ajust de les corbes $V(\omega)$ per diferents ordres dels polinomis

Els polinomis resultants d'aquest anàlisi són:

$$V_m(\omega_m) = 7,8762 \cdot 10^{-13} \omega_m^7 - 3,7020 \cdot 10^{-12} \omega_m^6 - 5,0381 \cdot 10^{-9} \omega_m^5 + 9,3735 \cdot 10^{-9} \omega_m^4 + 1,6150 \cdot 10^{-5} \omega_m^3 - 7,1247 \cdot 10^{-6} \omega_m^2 + 0,0084 \omega_m - 0.0293 \quad (4.1)$$

$$V_t(\omega_t) = 5,4367 \cdot 10^{-13} \omega_t^7 + 3,8501 \cdot 10^{-12} \omega_t^6 - 4,2122 \cdot 10^{-9} \omega_t^5 - 1,6967 \cdot 10^{-8} \omega_t^4 + 1,3784 \cdot 10^{-5} \omega_t^3 + 6,4374 \cdot 10^{-5} \omega_t^2 + 0,0241 \omega_t + 0.0580 \quad (4.2)$$

Com es pot veure a les Figures 4.1 i 4.2, els resultats experimentals han estat representats juntament amb el polinomi amb què s'han ajustat les dades, de manera que es pot veure tant la relació entre la velocitat de l'hèlix i la tensió aplicada com la bondat de l'ajust realitzat.

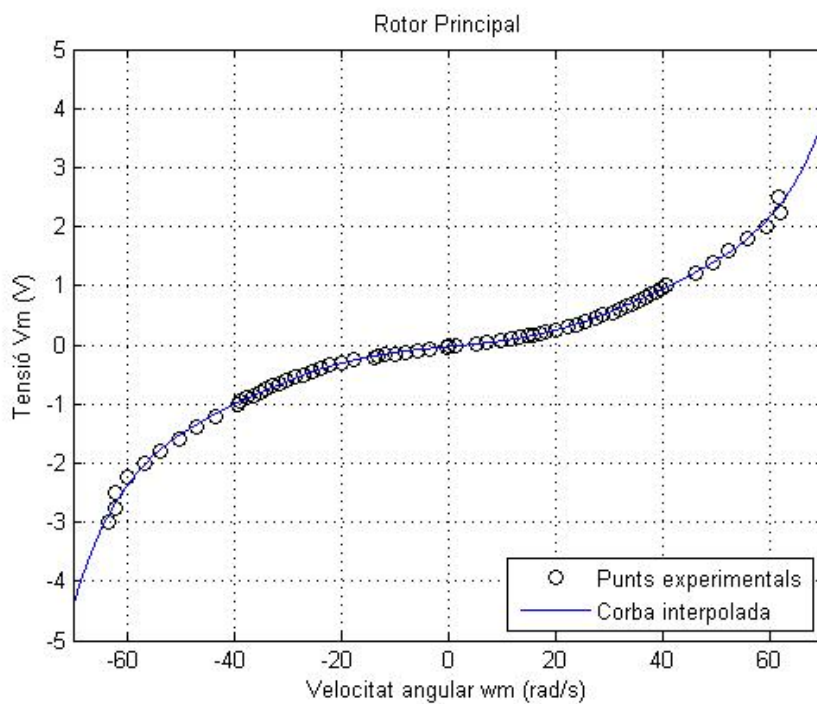


Figura 4.1: Característica Velocitat - Senyal de control del rotor principal

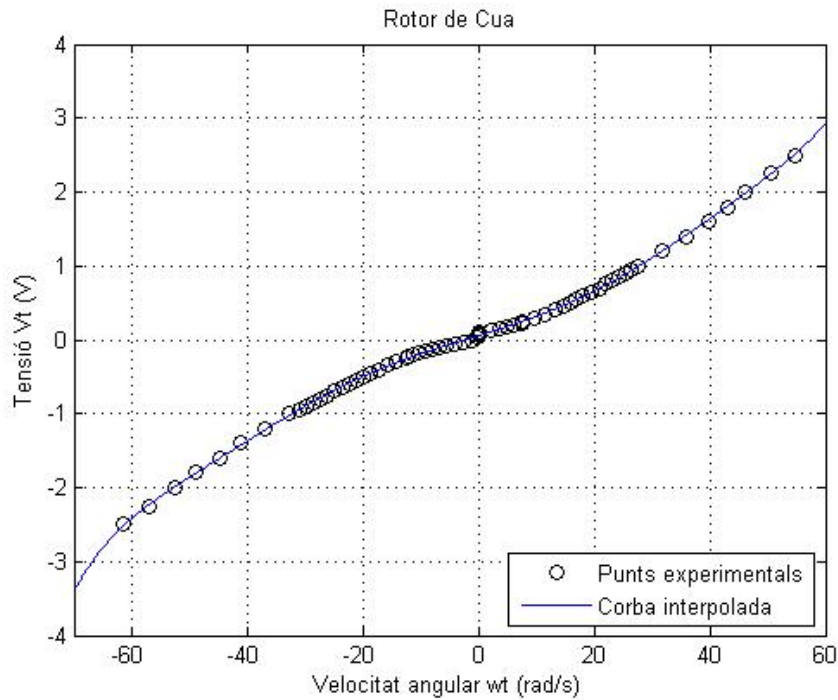


Figura 4.2: Característica Velocitat - Senyal de control del rotor de cua

Finalment, també s'ha fet un ajust de les característiques inverses (Senyal de control - Velocitat), ja que serà necessari introduir-les en el model de simulació del TRMS (donat un valor de tensió aplicat a l'entrada del model, caldrà calcular les velocitats de gir assolides pels rotors en règim estacionari). En aquest cas, també s'han trobat expressions polinòmiques que ajusten prou bé les dades, i són les que es presenten a continuació:

$$\omega_m(V_m) = 0,0756V_m^9 + 0,0703V_m^8 - 1,4467V_m^7 - 0,9499V_m^6 + 9,8159V_m^5 + 3,9261V_m^4 - 29,2888V_m^3 - 5,1726V_m^2 + 62,4302V_m + 2.2974 \quad (4.3)$$

$$\omega_t(V_t) = 0,0665V_t^9 - 0,0104V_t^8 - 1,0146V_t^7 + 0,1426V_t^6 + 5,4989V_t^5 - 0,6171V_t^4 - 13,4807V_t^3 + 0,6684V_t^2 + 38,8727V_t - 2,3695 \quad (4.4)$$

Vegis que els polinomis utilitzats són ara de novè ordre. Com a justificació de l'elecció d'aquestes expressions, a la Taula 4.2 s'indiquen els errors (expressats com la suma de distàncies al quadrat de cada punt experimental respecte de la corba) que es cometien segons l'ordre del polinomi amb què s'ajusten les dades.

Ordre del polinomi	Error M. Principal	Error M. de Cua
7	512,5769	46,3909
8	414,1949	46,0780
9	280,8926	29,0414
10	216,3001	28,6816

Taula 4.2: Errors en l'ajust de les corbes $\omega(V)$ per diferents ordres dels polinomis

Si bé és cert que, per al rotor principal, un polinomi de desè ordre ofereix un ajust millor en termes generals, s'ha observat que el polinomi de novè ordre ajusta millor la part corresponent a les velocitats positives. Donat que la major part de l'espai de treball del TRMS es situa per sobre del punt d'equilibri i, per tant, requereix ser explorat amb velocitats positives del rotor principal, s'ha considerat que el polinomi de novè ordre serà més útil de cara als objectius que es volen aconseguir en aquest projecte.

A les Figures 4.3 i 4.4 es poden veure uns gràfics on es representen els punts experimentals i les corbes polinòmiques amb què aquests s'han interpolat.

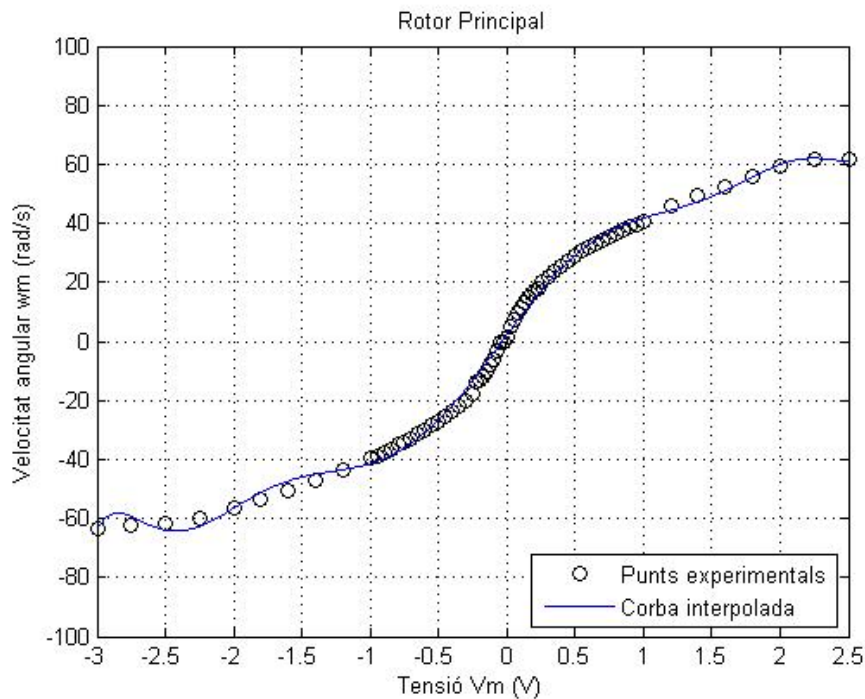


Figura 4.3: Característica Senyal de control - Velocitat del rotor principal

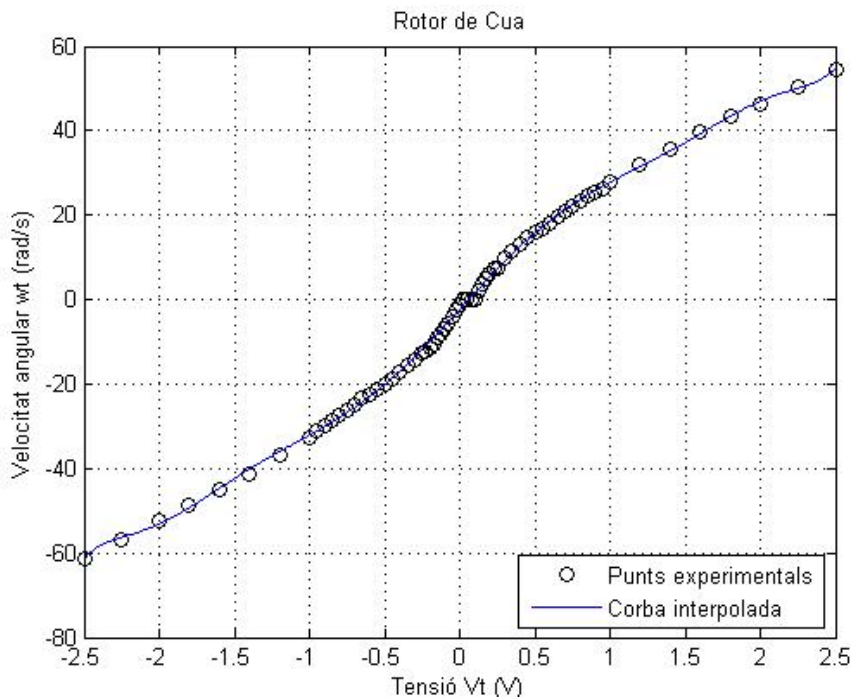


Figura 4.4: Característica Senyal de control - Velocitat del rotor de cua

4.2. Modelat dels conjunts motor-hèlix

Per tal de modelar els conjunts motor-hèlix, s'ha considerat l'existència d'unes característiques estàtiques que relacionen els senyals de control (tensions d'alimentació) amb les velocitats en règim permanent dels rotors, $\omega_{rp,i}(V_i)$, més uns sistemes de primer ordre que modelen la dinàmica de la resposta en velocitat.

L'estructura del model de temps continu d'un motor i , on i pot fer referència tant al motor principal com al de cua, és la següent:

$$G_i(s) = \frac{K_i}{1 + \tau_i \cdot s} \cdot W_{rp,i}(U_i(s)) \tag{4.5}$$

on K_i és el guany i τ_i és la constant de temps del sistema, representant el temps que triga en assolir el 63% d'un graó aplicat a la consigna.

Tenint en compte aquest model, es pot procedir a controlar les velocitats de gir dels rotors fent que els senyals de consigna siguin les velocitats desitjades. Per a això, cal incloure a l'entrada dels motors uns blocs integrats per unes funcions que calculen les tensions amb què s'assoleixen les velocitats desitjades en règim estacionari. Aquestes funcions són les característiques estàtiques $V_i(\omega_{rp,i})$ i es corresponen justament amb la

inversa de les funcions $\omega_{rp,i}(V_i)$ incloses en els models dels motors. Això fa que la resposta es pugui assimilar directament a la d'un sistema lineal de primer ordre, $G'_i(s)$:

$$G'_i(s) = \frac{K_i}{1 + \tau_i \cdot s} \cdot W_{rp,i}(W_{rp,i}^{-1}(\Omega_i(s))) \approx \frac{K_i}{1 + \tau_i \cdot s} \quad (4.6)$$

A les Figures 4.5 i 4.6 es mostren uns gràfics en què es comparen els senyals de control i les respostes dels motors abans i després d'aplicar la linealització esmentada.

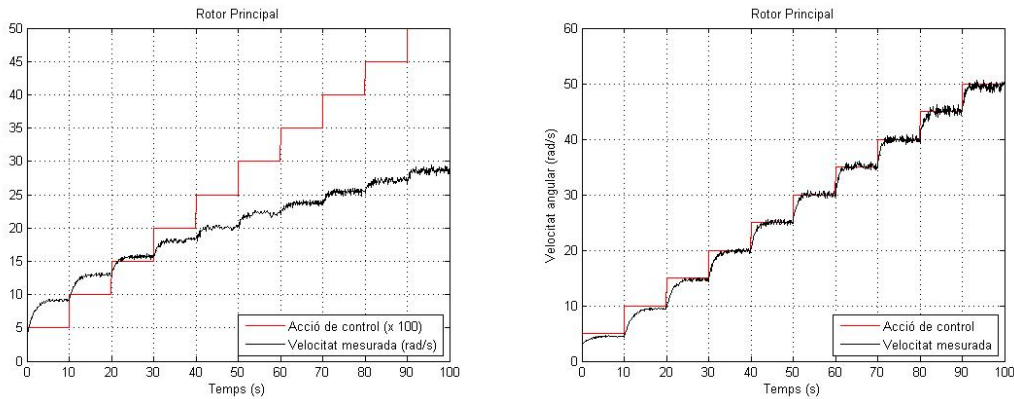


Figura 4.5: Comparació de la resposta del motor principal amb i sense linealització

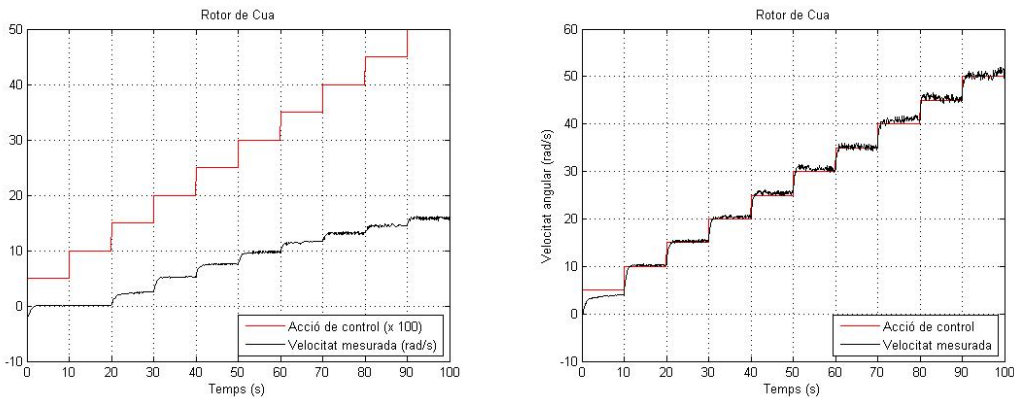


Figura 4.6: Comparació de la resposta del motor de cua amb i sense linealització

Un cop linealitzats els sistemes, s'han dut a terme diferents assaigs per tal de determinar els paràmetres K i τ de cadascun dels motors. Amb aquest objectiu, s'ha procedit a analitzar la resposta dels motors per diferents graons aplicats a l'entrada. Els paràmetres esmentats s'han estimat fent ús de la System Identification Toolbox de Matlab, i són els que es presenten a la Taula 4.3. A les Figures 4.7 i 4.8 es pot comprovar la bondat dels ajustos realitzats.

	K (adim.)	τ (s)
Rotor principal	1,0031	0,9822
Rotor de cua	1,0211	0,3768

Taula 4.3: Paràmetres dels models dels grups motor-hèlix

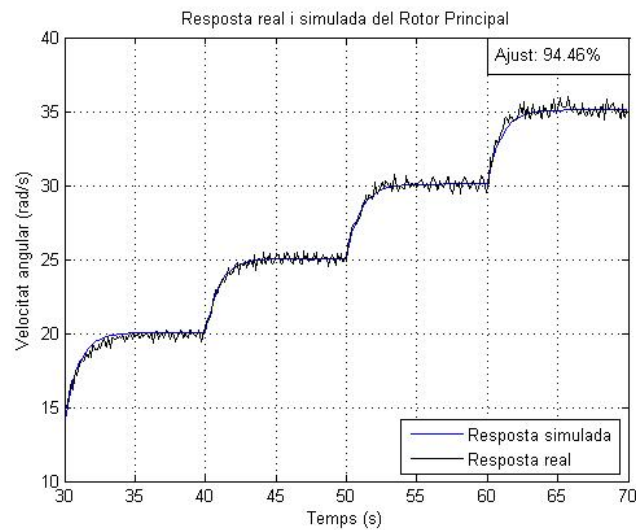


Figura 4.7: Identificació del model del motor principal

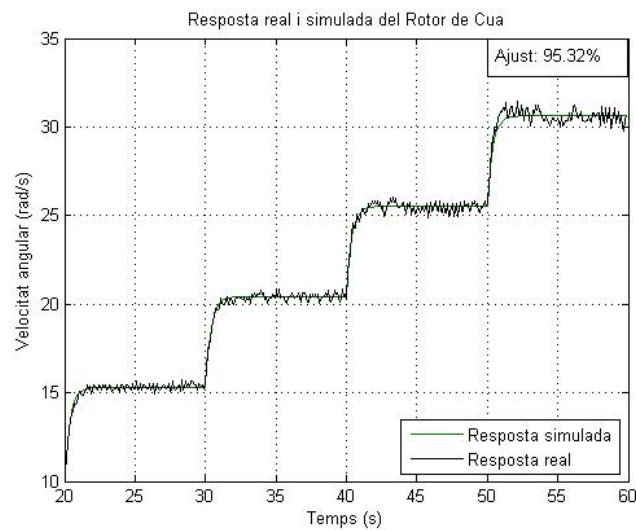


Figura 4.8: Identificació del model del motor de cua

4.3. Control dels conjunts motor-hèlix i filtratge del so- roll

Com es pot veure a l'equació del model reduït (3.8), els motors hauran de seguir una consigna que vindrà imposada pel sistema de control de posició del cos del TRMS. Això fa que sigui necessari, en primer lloc, dissenyar i implementar un sistema de control encarregat d'ajustar la velocitat dels rotors a la velocitat desitjada de forma suficientment ràpida i exacta.

Com que l'objectiu d'aquest projecte és controlar la planta per computador, s'ha considerat oportú utilitzar les tècniques de disseny de controladors en temps discret. Per a això, s'ha considerat un període de mostratge de 0,001 s. Les funcions de transferència de temps discret dels conjunts motor-hèlix, assumint que aquests van precedits d'un mantenidor d'ordre zero en el diagrama de blocs teòric del sistema (els senyals de control es mantenen constants durant el període de mostratge), es poden expressar com:

$$G'_i(z) = \frac{K_i (1 - e^{-\varphi_i T_s})}{z - e^{-\varphi_i T_s}} = \frac{K'_i}{z + b_{0,i}} \quad (4.7)$$

essent T_s el període de mostratge i $\varphi_i = 1/\tau_i$, on τ_i és la constant de temps del sistema de temps continu (igual que en l'apartat anterior, el subíndex i s'utilitza per fer referència a qualsevol dels dos motors del TRMS).

Els paràmetres K' i b_0 que defineixen la funció de transferència de temps discret de cadascun dels conjunts motor-hèlix s'han calculat mitjançant Matlab i es poden veure a la Taula 4.4.

	K'	b₀
Rotor principal	0,001021	-0,9990
Rotor de cua	0,002706	-0,9973

Taula 4.4: Paràmetres dels models de temps discret dels grups motor-hèlix

Un cop identificat el model de temps discret que regeix el comportament dels motors, s'ha dissenyat un controlador PI per al control de cadascun d'ells, de manera que s'assegura un error nul en estat estacionari davant entrades graó. Vegis que els controladors PI fan que, en llaç tancat, els sistemes es comportin com a sistemes de segon ordre:

$$W_i(z) = \frac{PI_i(z) \cdot G'_i(z)}{1 + PI_i(z) \cdot G'_i(z)} \quad (4.8)$$

essent $G'_i(z)$ la funció de transferència del model linealitzat del motor i en temps discret i $PI_i(z)$ el controlador a dissenyar per a aquest motor en concret:

$$G_i(z) = \frac{K'_i}{z + b_{0,i}} \quad (4.9)$$

$$PI_i(z) = K_{p,i} + K_{i,i} \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1} \quad (4.10)$$

Aleshores, es poden assignar els pols del llaç tancat en funció de les necessitats de control. Els controladors s'han dissenyat atenent als següents criteris:

- Donat que la resposta del motor principal en llaç obert és relativament lenta, el controlador associat a aquest motor tractarà de reduir el temps d'establiment de la resposta del sistema en llaç tancat. També s'ha imposat que el sistema resultant sigui subamortit, és a dir, que la resposta no presenti sobrepuig, cosa que s'aconsegueix fent que els pols del sistema en llaç tancat estiguin sobre l'eix real negatiu del pla s .
- Pel que fa al motor de cua, es considera que la resposta en llaç obert és suficientment ràpida. El controlador associat a aquest motor mantindrà aproximadament el temps de resposta en el llaç tancat, fent que aquesta tampoc presenti sobrepuig.

Després d'alguns experiments s'ha observat que, en realimentar el sistema, el soroll introduït pels encoders acoblats als motors s'amplifica, impeding que la velocitat de gir de les hèlixs pugui estabilitzar-se. Per a això, fent ús de la Filter Design Toolbox de Matlab, s'ha procedit a dissenyar uns filtres FIR que posteriorment s'han col·locat a la cadena de realimentació del sistema de control dels motors per eliminar el soroll provinent de la mesura de les velocitats angulars.

Com a breu apunt teòric, cal comentar que els filtres FIR (*Finite Impulse Response*) són un tipus de filtres digitals la resposta dels quals a un senyal impuls té un nombre finit de termes no nuls. Es caracteritzen perquè són estables, perquè poden dissenyar-se per tenir una resposta de fase lineal i per la seva facilitat d'implementació. La seva expressió un cop aplicada la transformada Z és de la forma:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k} = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{N-1} z^{-(N-1)} \quad (4.11)$$

Per resoldre el problema del soroll introduït pels encoders dels motors, s'han dissenyat uns filtres passabaixos FIR d'ordre 3 seguint el mètode de les finestres, situant la seva

frequència de tall als 250 Hz. Experiments posteriors han demostrat que, efectivament, el soroll disminueix i millora la resposta del sistema.

Els controladors i filtres que s'han implementat definitivament en els sistemes de control de velocitat dels motors responen als següents paràmetres:

- Controlador PI del motor principal: $K_{p,m} = 2,427$, $K_{i,m} = 2,445$
- Controlador PI del motor de cua: $K_{p,t} = 1,600$, $K_{i,t} = 3,682$
- Paràmetres dels filtres FIR: $h_0 = h_3 = 0,125$, $h_1 = h_2 = 0,375$

A continuació es mostren uns gràfics on es representa la resposta del sistema de control en laç tancat dels conjunts motor-hèlix, un cop introduïts els filtres a la cadena de realimentació. Com es pot veure, s'inclou tant la resposta obtinguda amb el sistema real com l'obtinguda a través d'un model de simulació construït a partir de l'equació (4.6).

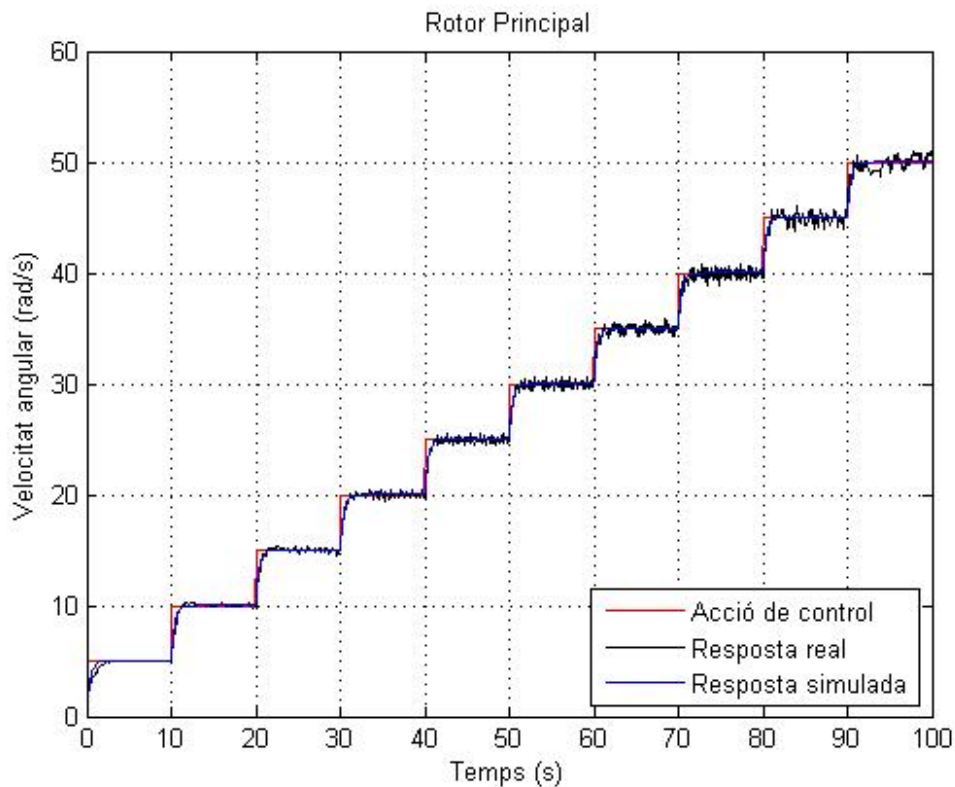


Figura 4.9: Resposta del sistema de control del motor principal

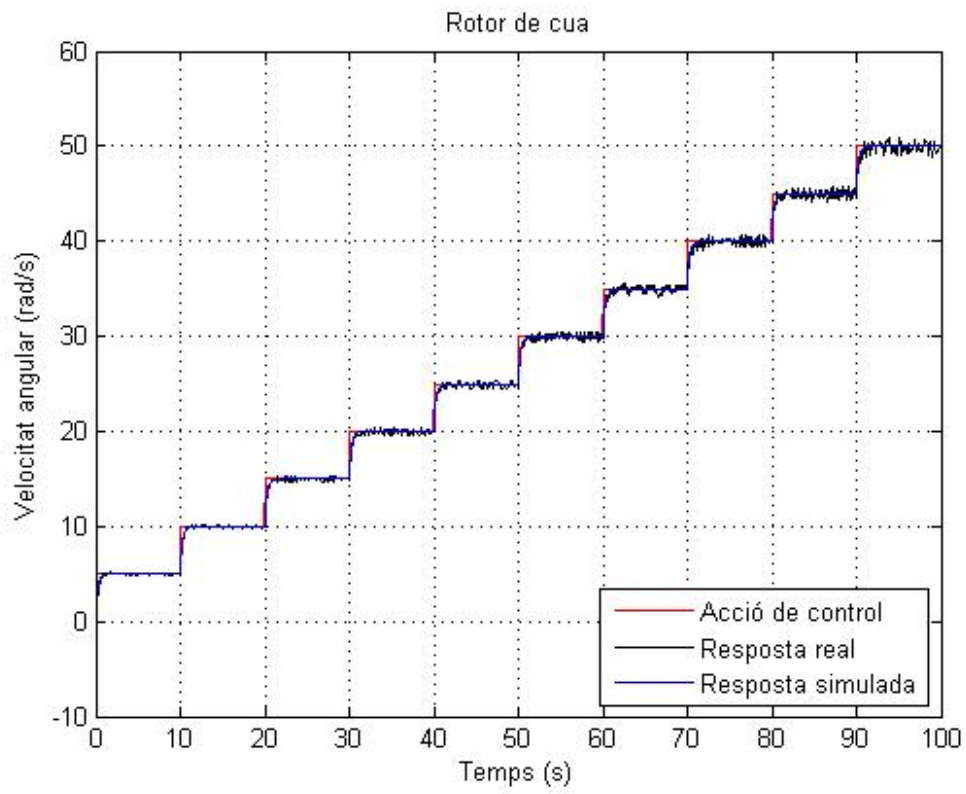


Figura 4.10: Resposta del sistema de control del motor de cua

5. Ajust dels paràmetres del model reduït

Un cop tancats els llaços de control de cadascun dels rotors, s'ha procedit a identificar els paràmetres del model reduït. En primer lloc, s'han revisat les equacions del model dinàmic tot comprovant que els paràmetres utilitzats són correctes. Per a això, s'han pres com a referència els valors nominals que aporta el manual del TRMS [8]. Fer un estudi més acurat de les dimensions i les masses dels components del sistema implicaria haver-lo de desmuntar i utilitzar aparells de mesura de què no es disposa, per la qual cosa s'ha considerat que els paràmetres nominals representen una aproximació prou bona donats els objectius que es volen aconseguir en aquest projecte.

Amb els paràmetres geomètrics i màssics establerts, es pot veure que queden completament definits els termes de la matriu d'inèrcies, $\mathbf{M}_q(\mathbf{q})$, els termes associats als efectes de Coriolis, $\mathbf{c}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, i els termes associats a les forces potencials, $\mathbf{g}_q(\mathbf{q})$. Així doncs, partint d'aquesta base, s'ha començat a confeccionar un model de simulació amb els termes coneguts de les equacions de moviment del TRMS i s'ha procedit a identificar experimentalment els termes associats a les forces externes que actuen sobre el sistema mecànic: aquestes són les forces aerodinàmiques provocades pels rotors i les forces de fricció que actuen tant en el pla vertical com en l'horitzontal.

5.1. Ajust dels paràmetres associats als parells de fricció

Com s'ha explicat en la secció 3.2 de la Memòria, el model de fricció viscosa que s'ha considerat respon a l'expressió:

$$\mathbf{\Gamma}_{fricc} = \begin{bmatrix} B_{q,11} & 0 \\ 0 & B_{q,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_h \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Per identificar els paràmetres que descriuen el model de fricció esmentat, s'han dut a terme dos experiments: el primer per determinar el coeficient de fricció associat al moviment en el pla vertical, $B_{q,11}$, i, el segon, per determinar el coeficient de fricció associat

al moviment en el pla horitzontal, $B_{q,22}$ (aquest últim, a més, ha permès reajustar el valor de la constant recuperadora del cable i el de la posició d'equilibri horitzontal).

5.1.1. Determinació del coeficient de fricció en el pla vertical

Per tal de realitzar el primer experiment, s'ha bloquejat mecànicament el moviment de la planta en el pla horitzontal, deixant lliure únicament el moviment en el pla vertical. Seguidament, amb les velocitats dels rotors fixades a zero, s'ha col·locat la barra principal en posició pràcticament horitzontal i s'ha deixat anar lliurement. Després, s'ha executat el model de simulació en les mateixes condicions amb què s'ha dut a terme l'experiment. Vegis que el moviment en el pla vertical, considerant $\dot{q}_h = \ddot{q}_h = 0$ es regeix per l'equació:

$$M_{q,11}\ddot{q}_v - B_{q,11}\dot{q}_v + g_{q,1}(q_v) = 0 \quad (5.2)$$

Aleshores, si M_{11} i $g_1(q_v)$ són conegudes, es pot determinar $B_{q,11}$ comparant la resposta temporal dels sistemes real i simulat. Així doncs, s'ha anat modificant el coeficient de fricció vertical en el model de simulació fins que les amplituds de les oscil·lacions d'ambdues respostes han coincidit, tal i com es pot veure a la Figura 5.1. Finalment, el coeficient de fricció vertical s'ha establert a un valor $B_{q,11} = 0,0016$.

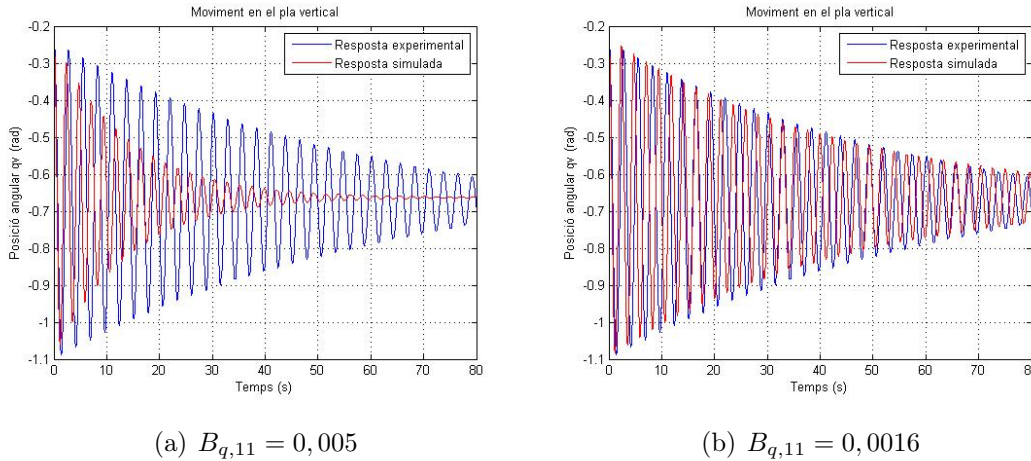


Figura 5.1: Comparació de les oscil·lacions en el pla vertical del model i el sistema real abans i després de l'ajust

5.1.2. Determinació del coeficient de fricció en el pla horitzontal

Per a la realització del segon experiment, s'ha bloquejat mecànicament el moviment de la planta en el pla vertical, deixant lliure el moviment en el pla horitzontal. Seguidament, amb les velocitats dels rotors fixades a zero, s'ha col·locat la barra principal en diferents

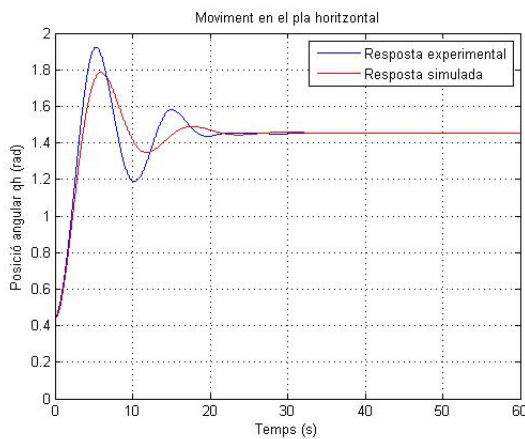
posicions i s'ha deixat que es mogués lliurement fins a aturar-se en el punt d'equilibri horitzontal. Després, s'ha executat el model de simulació en les mateixes condicions amb què s'ha dut a terme l'experiment. El moviment en el pla horitzontal, considerant $\dot{q}_v = \ddot{q}_v = 0$ es regeix per l'equació:

$$M_{q,22}(q_v)\ddot{q}_h - B_{q,22}\dot{q}_h + g_2(q_h) = 0 \tag{5.3}$$

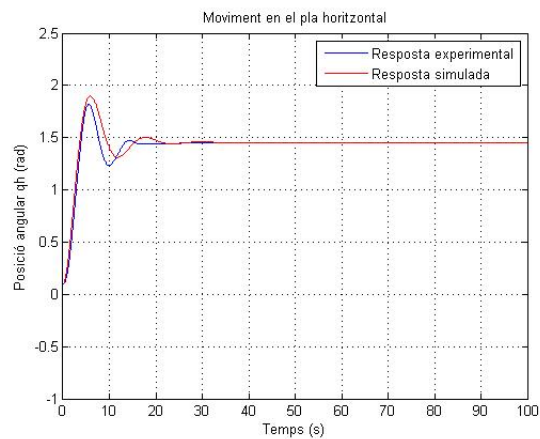
on $M_{22}(q_v)$ és coneguda i $g_2(q_h)$ és el parell exercit pel cable, que s'ha aproximat al parell exercit per una molla de torsió: $g_2(q_h) = K_a(q_h - q_{h0})$.

De forma similar a l'apartat anterior, la comparació d'ambdues respostes ha permès fixar el coeficient de fricció horitzontal a un valor $B_{q,22} = 0,009$. A més, també s'han pogut ajustar la constant recuperadora del cable, que prendrà un valor $K_a = 0,0075$ N·m/rad, i el punt d'equilibri horitzontal del TRMS, que es troba a un angle $q_{h0} = 1,455$ rad.

La bondat de l'ajust realitzat per diferents posicions inicials es mostra a les Figures 5.2 i 5.3. Com es pot veure, el comportament del cable no és exactament lineal, de manera que s'ha hagut de fer un ajust que permetés representar de forma més o menys aproximada el parell exercit en un entorn prou ampli de l'espai de treball del TRMS.



(a) $q_{h,ini} = 0,450$



(b) $q_{h,ini} = 0,100$

Figura 5.2: Comparació del moviment en el pla horitzontal del model i el sistema real per diferents posicions inicials (I)

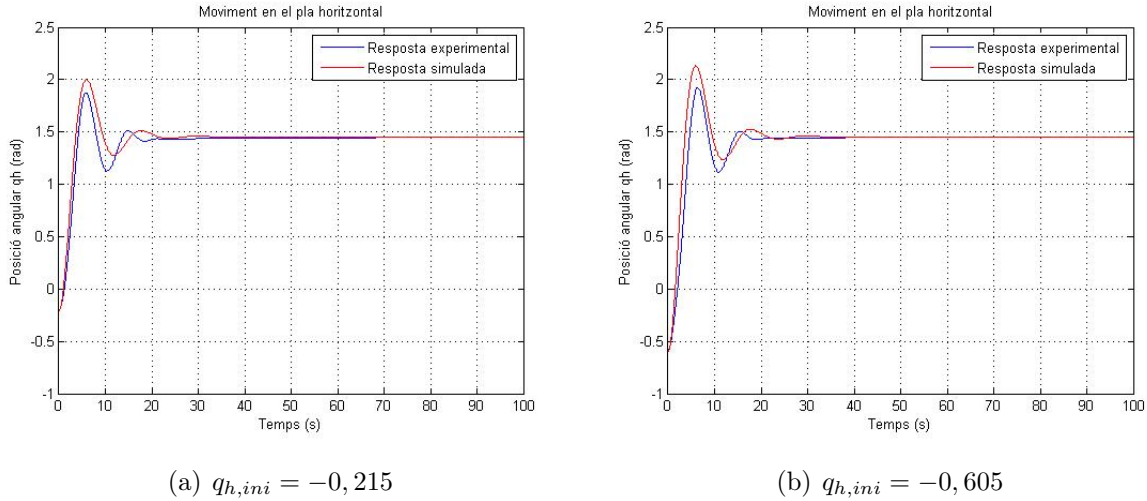


Figura 5.3: Comparació del moviment en el pla horitzontal del model i el sistema real per diferents posicions inicials (II)

5.2. Característiques estàtiques Velocitat-Força de propulsió dels rotors

Per acabar amb l'ajust de paràmetres del model, s'ha procedit a identificar les característiques estàtiques que relacionen les velocitats de gir de les hèlixs amb la força de propulsió i els parells reactius que aquestes exerceixen.

Els parells generats per les forces aerodinàmiques sobre les articulacions del TRMS es descriuen mitjançant les expressions deduïdes en l'apartat 3.2 d'aquesta Memòria:

$$\Gamma_{q_v}(\boldsymbol{\omega}) = T_m(\omega_m) L_m - Q_t(\omega_t) \tag{5.4}$$

$$\Gamma_{q_h}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = T_t(\omega_t) L_t \cos q_v - T_m(\omega_m) L_d \sin q_v - Q_m(\omega_m) \cos q_v \tag{5.5}$$

Recordis que $T_i(\omega_i)$ i $Q_i(\omega_i)$ són les forces de propulsió i els parells reactius, respectivament, provocats per cada rotor. Donat que el mòdul d'aquestes dues variables és teòricament proporcional al quadrat de la velocitat angular, es pot assumir un model en què els parells reactius de cada hèlix són proporcionals a les forces de propulsió generades:

$$Q_i(\omega_i) = k_i T_i(\omega_i), \quad k_i = ct.$$

i, aleshores, les equacions (5.4) i (5.5) es poden escriure de forma més compacta com:

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} L_m & k_t \\ -L_d \sin q_v - k_m \cos q_v & L_t \cos q_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m(\omega_m) \\ T_t(\omega_t) \end{bmatrix} = \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}) \quad (5.6)$$

El principal avantatge de descriure les forces tal i com es troben expressades a l'equació (5.6) és que només caldrà conèixer directament la relació entre la velocitat angular dels rotors i la força de propulsió generada per tenir una estimació prou acurada dels parells resultants totals aplicats sobre les articulacions del TRMS. A més, si les constants k_m i k_t són conegudes, el càlcul de les corbes característiques que relacionen velocitat i força de propulsió resulta directe seguint el mètode experimental que es descriurà a continuació.

Prenent aquestes consideracions com a punt de partida, doncs, els assaigs que s'han dut a terme per determinar les característiques esmentades han consistit en trobar els punts d'equilibri que assoleix la planta donades diferents velocitats de consigna en els rotors.

Vegis que, en un punt d'equilibri, es té que:

$$\dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

i, per tant:

$$\mathbf{g}_q(\mathbf{q}) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}) \quad (5.7)$$

de manera que, si $\mathbf{g}_q(\mathbf{q})$ és coneguda en qualsevol posició angular \mathbf{q} de la planta, és possible determinar la relació entre les velocitats de gir $\boldsymbol{\omega}$ dels rotors i les forces de propulsió $\mathbf{T}(\boldsymbol{\omega})$ resultants, les quals es poden calcular invertint la matriu $\mathbf{D}(\mathbf{q})$, tal i com s'indica a l'equació (5.8):

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{D}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{g}_q(\mathbf{q}) \quad (5.8)$$

Així, s'han dut a terme una sèrie d'experiments programant diferents consignes de velocitat a l'entrada dels motors i enregistrant tant la velocitat real de les hèlixs com la posició angular de la planta. Per controlar la velocitat de gir dels rotors s'han utilitzat els llaços de control que ja es tenien implementats (veure apartat 4.3), però modificant els controladors PI amb l'objectiu de fer la resposta molt lenta, aconseguint així un transitori suau fins a l'assoliment un punt d'equilibri per part del TRMS.

Els resultats d'aquests assaigs s'han representat en un gràfic que relaciona, per cada punt d'equilibri, la velocitat de gir real de cada rotor amb la força de propulsió resultant, calculada segons l'expressió (5.8). Cal remarcar que l'aplicació directa d'aquest càlcul

és possible suposant que les constants k_m i k_t que relacionen el mòdul de les forces de propulsió amb el mòdul del parell reactiu de cada hèlix són conegudes. En aquest cas, s'han assignat a aquestes constants uns valors extrets de la relació entre les funcions utilitzades en un estudi independent [10] per modelitzar les magnituds aerodinàmiques esmentades. Aquests valors han estat posteriorment validats de forma experimental, i són els que es mostren a la Taula .

k_m	0,0235
k_t	0,0200

Taula 5.1: Constants que descriuen la relació de proporcionalitat entre les forces de propulsió i els parells reactius generats en cada rotor

Les corbes de punts obtingudes han estat interpolades polinòmicament mitjançant Matlab. S'han utilitzat polinomis de cinquè ordre per modelitzar les forces de propulsió dels dos rotors, ja que la millora que aporta augmentar més l'ordre del polinomi és poc significativa. Això queda palès a la Taula 5.2, on s'indiquen els errors (calculats com la suma de distàncies al quadrat de cada punt experimental respecte de la corba) que es cometten segons l'ordre del polinomi amb què s'ajusten les dades.

Ordre del polinomi	Error M. Principal	Error M. de Cua
3	0,0192	0,003
4	0,0076	$3,7659 \cdot 10^{-4}$
5	0,0018	$3,6834 \cdot 10^{-4}$
6	0,0013	$3,2832 \cdot 10^{-4}$

Taula 5.2: Errors en l'ajust de les corbes $F(\omega)$ per diferents ordres dels polinomis

Els polinomis resultants són:

$$F_m(\omega_m) = -4,2796 \cdot 10^{-10} \omega_m^5 + 6,0230 \cdot 10^{-9} \omega_m^4 + 4,3235 \cdot 10^{-6} \omega_m^3 + 3,8052 \cdot 10^{-5} \omega_m^2 + 0,0024 \omega_m \quad (5.9)$$

$$F_t(\omega_t) = -5,6122 \cdot 10^{-11} \omega_t^5 - 1,4714 \cdot 10^{-8} \omega_t^4 + 2,5173 \cdot 10^{-6} \omega_t^3 + 2,2058 \cdot 10^{-5} \omega_t^2 + 7,5756 \cdot 10^{-4} \omega_t \quad (5.10)$$

Els resultats obtinguts experimentalment han estat representats gràficament juntament amb el polinomi amb què s'han ajustat les dades, de manera que es pot veure la

relació entre la velocitat de l'hèlix i la força de propulsió, així com la bondat de l'ajust realitzat (Figures 5.4 i 5.5).

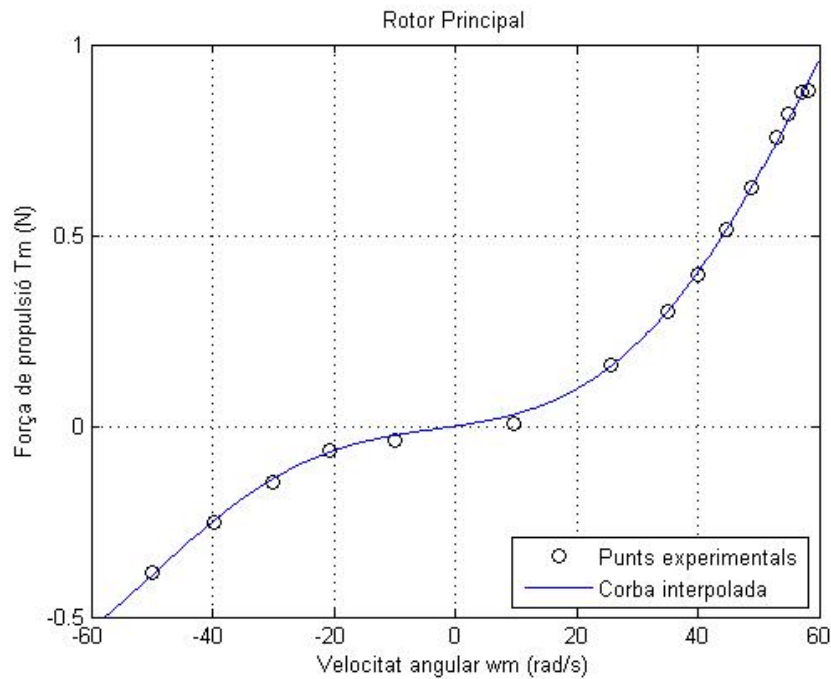


Figura 5.4: Característica Velocitat - Força de propulsió del rotor principal

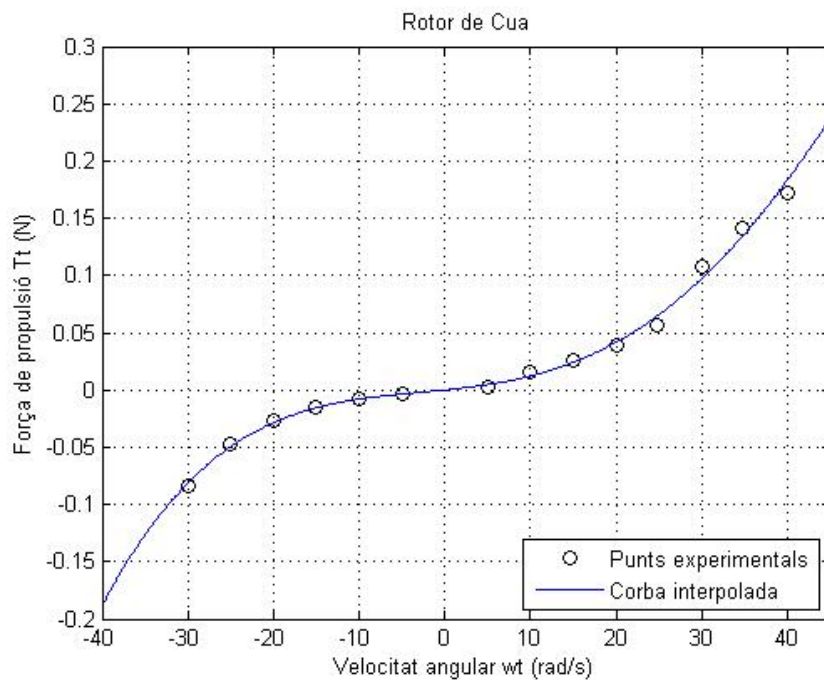


Figura 5.5: Característica Velocitat - Força de propulsió del rotor de cua

Finalment, també s'ha fet un ajust de les característiques inverses (Força de propulsió - Velocitat), ja que serà necessari introduir-les en el sistema de control del TRMS (donat un parell a aplicar a les articulacions i, per tant, unes forces de propulsió desitjades, caldrà calcular les velocitats a què han de girar els rotors). En aquest cas, s'ha comprovat que les corbes de punts no s'ajusten bé per mitjà de polinomis i s'ha tractat de buscar una expressió que permeti millorar l'ajust. Veient que la forma dels punts és similar a la d'una funció del tipus $f(x) = \sqrt{x}$, s'ha comprovat que una bona aproximació es pot aconseguir amb una expressió del tipus:

$$\omega(F) = \begin{cases} aF + b\sqrt{F} & , F \geq 0 \\ c(-F) + d\sqrt{-F} & , F < 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

A través de Matlab s'ha pogut comprovar que, utilitzant funcions d'aquests tipus per interpolar les dades, s'obtenen uns errors significativament menors que si s'utilitzen polinomis. A tall d'exemple, a la Taula 5.3 s'han indicat els errors, calculats com la suma de distàncies al quadrat de cada punt experimental respecte de la corba, que es cometien en ajustar les dades amb diferents expressions. També s'ha observat que l'error es fa lleugerament més gran tant si s'afegeixen termes quadràtics i/o cúbics com si s'elimina el terme lineal. Així doncs, les funcions que s'utilitzaran per calcular les característiques inverses en els models de simulació són:

$$\omega_m(F_m) = \begin{cases} -8,7395F_m + 69,0628\sqrt{F_m} & , F_m \geq 0 \\ -36,7207(-F_m) - 60,9066\sqrt{-F_m} & , F_m < 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\omega_t(F_t) = \begin{cases} -5,9652F_t + 96,9668\sqrt{F_t} & , F_t \geq 0 \\ 68,2969(-F_t) - 126,0478\sqrt{-F_t} & , F_t < 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

Funció d'ajust	Error M. Principal	Error M. de Cua
Polinomi d'ordre 7	165,5698	102,6860
Polinomi d'ordre 9	110,1121	47,7307
Funció tipus (5.11)	19,2597, $F_m \geq 0$ 23,8619, $F_m < 0$	12,1977, $F_t \geq 0$ 8,8120, $F_t < 0$

Taula 5.3: Errors en l'ajust de les corbes $\omega(F)$ per diferents expressions

Com es pot comprovar a les Figures 5.6 i 5.7 l'ajust que s'ha aconseguit de les dades experimentals per mitjà de les corbes és prou satisfactori.

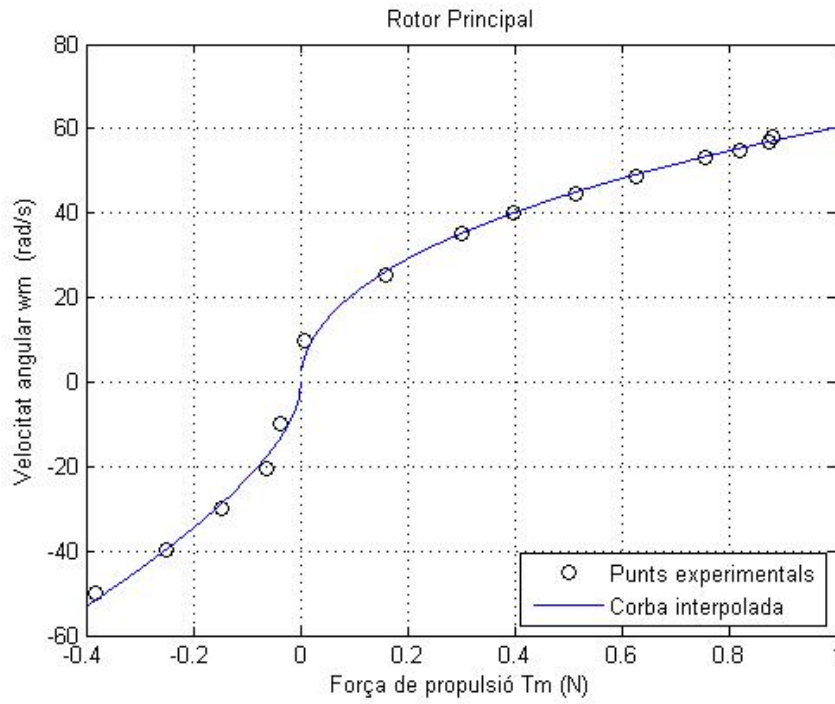


Figura 5.6: Característica inversa Velocitat - Força d'impulsió rotor principal

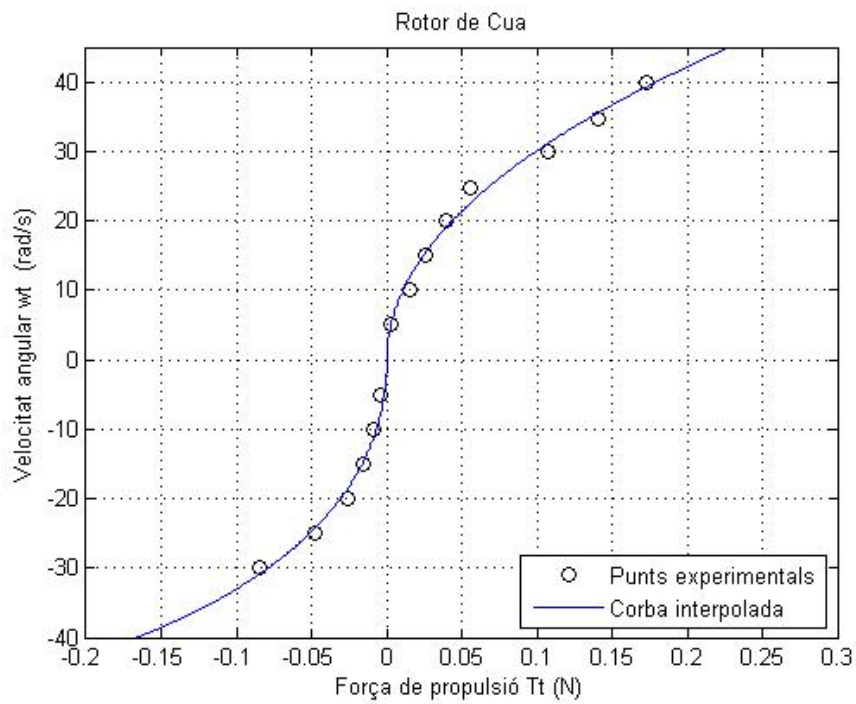


Figura 5.7: Característica inversa Velocitat - Força d'impulsió rotor de cua

6. Simulador del TRMS

6.1. El model de simulació del TRMS

Un cop establertes les equacions de moviment i ajustats els paràmetres del model, s'ha passat a confeccionar un simulador del TRMS que permeti assajar el sistema de control proposat en aquest projecte.

L'eina utilitzada per a la construcció del simulador és el programa Matlab i, més concretament, l'entorn Simulink, un entorn gràfic interactiu que permet el modelat, l'anàlisi i la simulació de gran varietat de sistemes dinàmics (discrets, analògics i híbrids) mitjançant la utilització de diagrames de blocs.

En primer lloc, s'ha desenvolupat el model reduït del TRMS que es mostra a la Figura 6.1. Aquest model respon a les equacions del sistema reduït presentades en la secció 3.4 d'aquest document, i s'utilitza per resoldre el problema dinàmic directe a partir de la informació provinent de l'entrada (forces de propulsió dels rotors) i de l'estat del sistema (posicions i velocitats angulars). Com a resultat s'obtenen les acceleracions angulars \ddot{q}_v i \ddot{q}_h , les quals, integrades dos cops, permeten conèixer la posició angular del sistema.

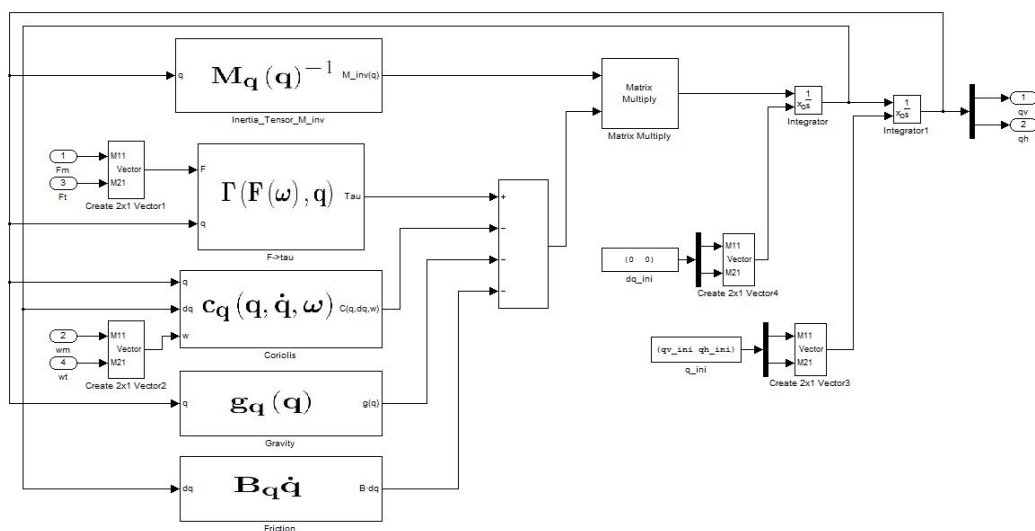


Figura 6.1: Model reduït del TRMS implementat en Simulink

El model reduït del TRMS inclou els blocs següents:

- Bloc **Inertia_Tensor_inv**, que inverteix la matriu d'inèrcia, calculada en funció de la posició angular del sistema.
- Bloc **F->tau**, que calcula els parells de propulsió en els plans vertical i horitzontal a partir de les forces de propulsió dels rotors.
- Bloc **Coriolis**, que calcula el vector de forces de Coriolis en funció de la posició i velocitat angulars del sistema mecànic.
- Bloc **Gravity**, que calcula els termes associats a l'efecte de la gravetat sobre el sistema en funció de la seva posició angular.
- Bloc **Friction**, que calcula els parells de fricció que actuen sobre el sistema en funció de la seva velocitat angular.

Seguidament, s'ha empaquetat tot el model reduït en un únic bloc i s'han afegit a la seva entrada els models de cadascun dels motors i les corbes característiques que relacionen les seves velocitats de gir amb les forces de propulsió que generen. El simulador complet a què s'ha arribat al final de tot aquest procés es mostra a la Figura 6.2. Com es pot veure, es tracta d'un sistema amb dues entrades i quatre sortides. Igual que en el sistema real, les entrades són els valors de tensió aplicats a cadascun dels motors, mentre que les sortides corresponen a les magnituds mesurables per mitjà dels encoders: les posicions angulars de capcineig i guinyada i les velocitats de gir de cadascun dels rotors.

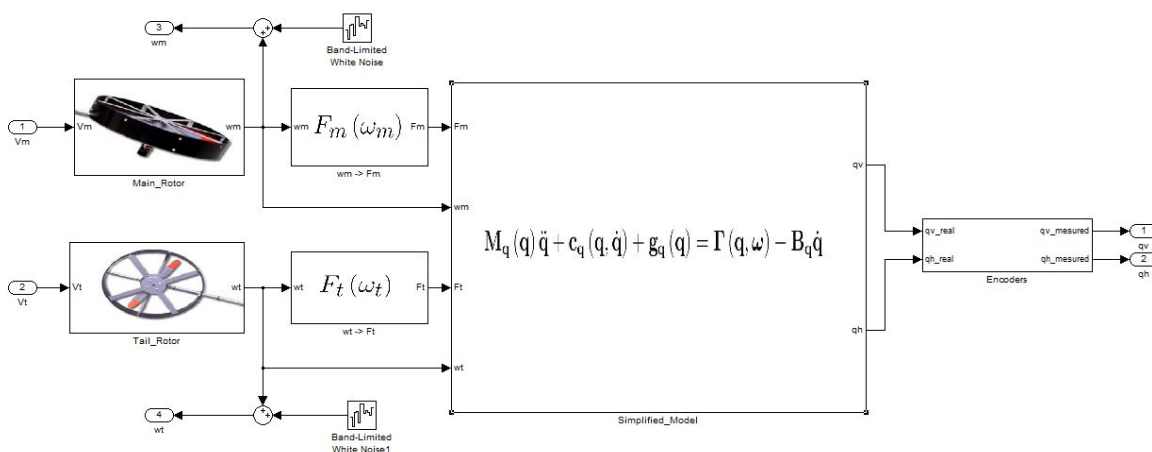


Figura 6.2: Simulador del TRMS

Els blocs que integren el simulador complet del sistema són els que es detallen a continuació:

- **Models associats a la dinàmica dels motors:** Donades les consignes de control (valors de tensió), aquests blocs simulen la resposta en velocitat dels rotors. Cadascun d'ells s'ha modelat com un sistema de primer ordre més una característica que relaciona el senyal de control amb la velocitat de gir del rotor en estat estacionari, tal i com s'explica a la secció 4.2. També s'hi han afegit uns blocs generadors de soroll per tal de reproduir el soroll que introdueixen els encoders en el sistema real.
- **Blocs de càlcul de les forces de propulsió:** Aquests blocs inclouen les característiques estàtiques que relacionen les velocitats de gir dels rotors amb les forces de propulsió aerodinàmica que generen.
- **Model reduït del TRMS:** Inclou les equacions de moviment no lineals descrites a la secció 3.4 d'aquest treball, a partir de les quals s'obtenen les posicions angulars del sistema mecànic.

Finalment, un cop comprovat el correcte funcionament del model, s'ha creat una llibreria que inclou tots els blocs utilitzats en la confecció del simulador (Figura 6.3). El resultat és un arxiu fàcilment accessible i distribuïble, que es preveu que pugui ser útil per al desenvolupament de treballs posteriors.

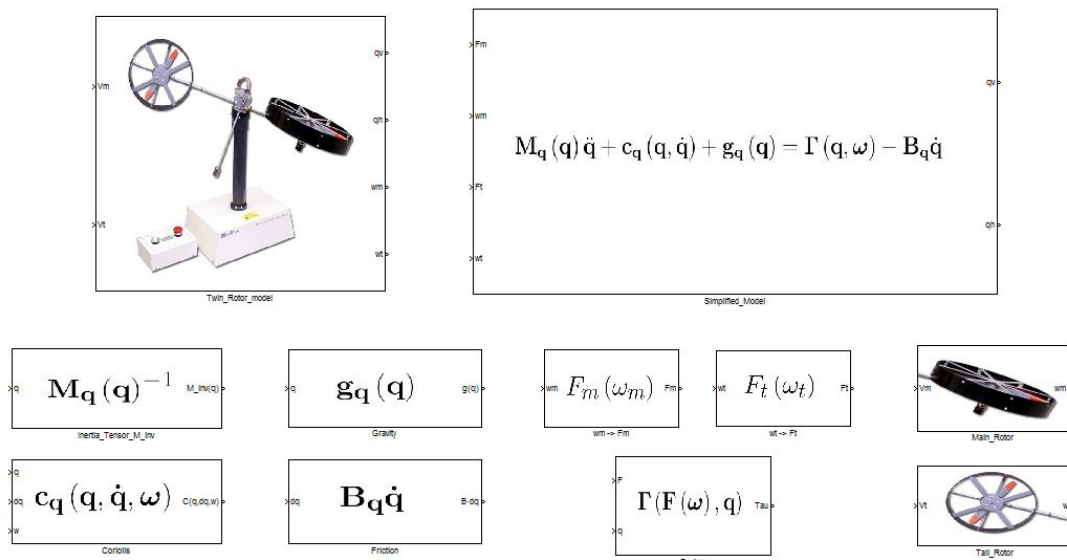


Figura 6.3: Contingut de la llibreria TRMS_model_library

6.2. Desenvolupament d'un laboratori virtual del TRMS

A mesura que han anat avançant les tasques en la realització d'aquest projecte, s'ha considerat l'opció de desenvolupar un laboratori virtual interactiu del TRMS utilitzant el programari Easy Java Simulations (EJS).

El treball s'ha centrat sobretot en temes relacionats amb la visualització d'un model 3D del TRMS, la qual cosa s'ha aconseguit mitjançant la creació d'un *PanelDisplay3D* amb objectes 3D a la vista, als que posteriorment s'han aplicat les relacions geomètriques entre ells a la pestanya de *Relaciones Fijas*. Per a això, ha estat necessària la revisió de tots els paràmetres geomètrics dels diferents cossos que componen el TRMS, així com de les matrius que defineixen les transformacions geomètriques entre ells. Aquestes transformacions han estat implementades en codi Java a fi d'establir una correcta disposició dels objectes en el panell de visualització i obtenir, en conjunt, un model virtual del TRMS d'aspecte prou versemblant. Totes les relacions geomètriques i cinemàtiques a què s'ha fet referència es poden consultar a l'annex A que es presenta juntament amb aquesta Memòria.

La Figura 6.4 mostra una imatge estreta del panell de visualització de l'EJS on es pot veure el resultat aconseguit.

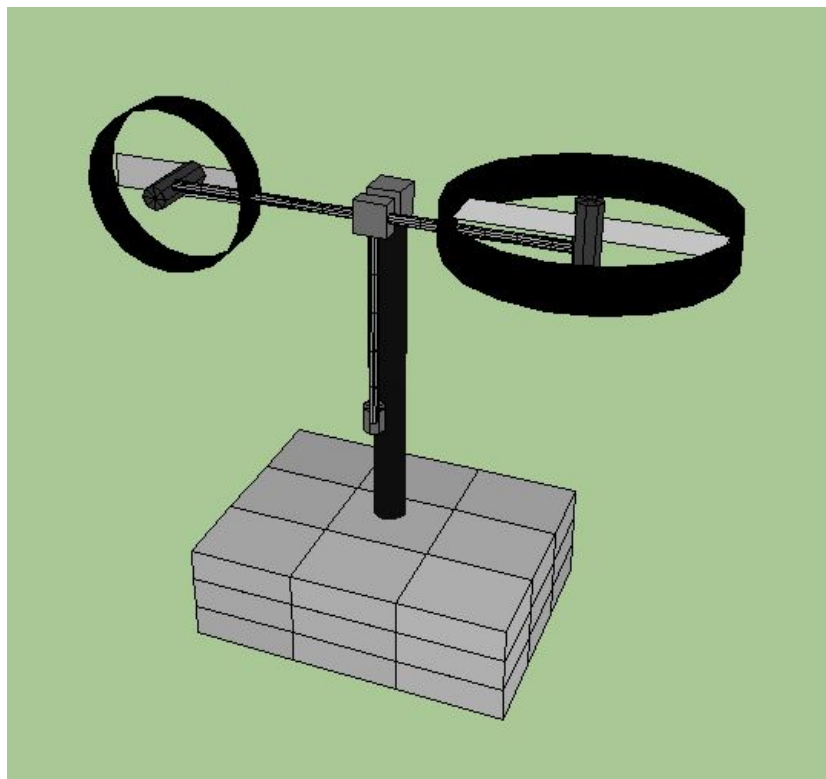


Figura 6.4: Laboratori virtual del TRMS implementat en EJS

La validesa de les relacions geomètriques implementades s'ha comprovat variant manualment el valor dels paràmetres q_v i q_h , que fan referència a les posicions angulars de capcineig i guinyada, respectivament. Així, en la Figura 6.5 es mostra el TRMS virtual orientat en diferents posicions.

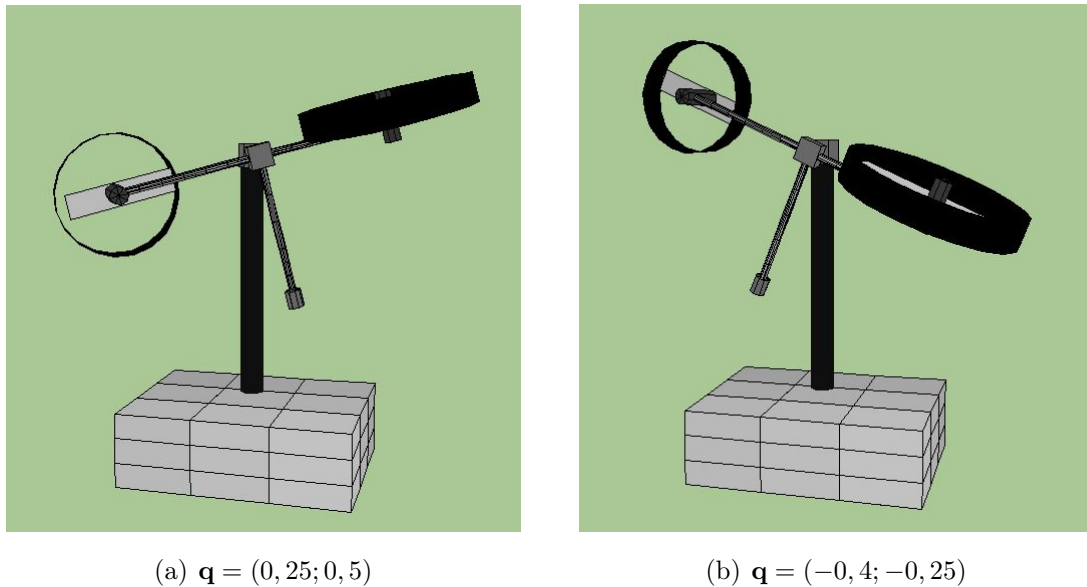


Figura 6.5: Laboratori virtual del TRMS orientat en diferents posicions angulars

Actualment, s'està treballant per aconseguir establir una connexió entre el laboratori virtual i el model de simulació creat en Matlab/Simulink per poder visualitzar la resposta del sistema en funció de les tensions aplicades als motors. L'objectiu és que l'EJS vagi actualitzant el valor de les variables de posició angular tant del cos del TRMS com de les hèlixs amb el valor que prenen aquestes variables a la sortida del model de simulació, i faixi evolucionar la posició dels elements en el panell de visualització 3D en conseqüència.

Establir la comunicació entre els dos programes ha esdevingut un problema complex ja que es requereix un element de connexió que actualment es troba en fase de proves. Per a això, s'està treballant en col·laboració amb un investigador de la UNED que ha contribuït en la creació d'aquest element amb l'objectiu acabar de resoldre alguns problemes de connectivitat que resten pendents.

Tot i que el desenvolupament d'aquest laboratori virtual no entrava inicialment dins els objectius bàsics d'aquest projecte, es tractarà de fer una demostració del seu funcionament el dia en què el treball sigui presentat en públic. En cas que finalment no es puguin acabar de resoldre els problemes de connectivitat entre l'EJS i el Matlab/Simulink, es deixarà aquesta línia de treball oberta per a futures investigacions.

7. Sistema de control del TRMS

El sistema de control que s'ha dissenyat es basa en una estratègia coneguda com *Current-Iteration Iterative Learning Control* que, a grans trets, es caracteritza per combinar l'ILC amb un controlador de realimentació (en aquest cas, un controlador lineal tipus PID).

Des d'un punt de vista pràctic, l'objectiu de l'ILC és generar un senyal en llaç obert que inverteix aproximadament la dinàmica de la planta per seguir la referència i rebutjar perturbacions periòdiques. Idealment, l'ILC aprèn només d'aquestes perturbacions repetitives, però no té cap mecanisme de realimentació per respondre davant qualsevol tipus de soroll o de perturbacions no periòdiques i no anticipades. És per això que un controlador de realimentació combinat amb l'ILC implica grans beneficis en la majoria de casos. D'aquesta manera, a més d'utilitzar la informació procedent de l'error comès en la iteració anterior, també s'utilitza l'error de la iteració actual per tal de calcular l'acció de control.

En el cas d'aquesta planta en particular, l'estratègia esmentada es combina, al seu temps, amb un sistema de control en cascada de la velocitat dels rotors. Així doncs, es pot separar el sistema de control del TRMS en tres grans blocs:

- El **sistema de control de posició**, que, al seu torn, es divideix en dues parts: per una banda, els controladors lineals tipus PID, encarregats d'assegurar un comportament estable de la planta, i, per l'altra, els controladors basats en l'aprenentatge, encarregats de millorar el seguiment de trajectòries programades en base a l'error comès en les execucions prèvies.
- Un **bloc condicionador de la velocitat dels rotors**, el qual, donats uns parells de referència a la sortida dels controladors de posició, calcula les velocitats a què han de girar els rotors.
- I, finalment, el **sistema de control en cascada de la velocitat dels motors**, encarregat d'ajustar en tot moment la velocitat de gir de les hèlixs a la velocitat de referència. Aquest sistema és el que s'ha descrit a la secció 4.3 d'aquest document.

La Figura 7.1 mostra un esquema general del sistema de control implementat.

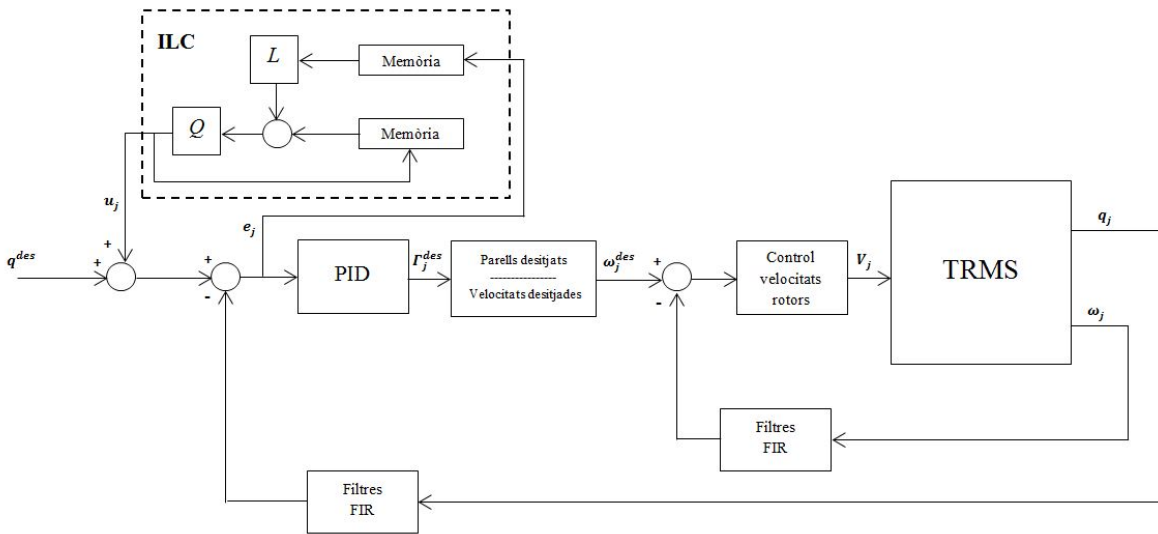


Figura 7.1: Esquema general de control

Pel que fa a la notació utilitzada en aquest esquema, cal indicar que totes les branques corresponen a conjunts de senyals de dues dimensions. Els subíndexs j , per la seva banda, s'utilitzen per indicar el número corresponent a la iteració actual. Així, tenim que, en una iteració j , $\mathbf{q}^{des} = (q_v^{des}, q_h^{des})$ és la trajectòria de referència, $\mathbf{u}_j = (u_{v,j}, u_{h,j})$ són els senyals provinents del bloc d'aprenentatge, $\mathbf{e}_j = (e_{v,j}, e_{h,j})$ són els errors de posició, $\mathbf{\Gamma}_j^{des} = (\Gamma_{v,j}^{des}, \Gamma_{h,j}^{des})$ són els parells desitjats a les articulacions del TRMS, $\boldsymbol{\omega}_j^{des} = (\omega_{m,j}^{des}, \omega_{t,j}^{des})$ són les velocitats desitjades dels rotors, $\mathbf{V}_j = (V_{m,j}, V_{t,j})$ són els senyals de tensió que s'envien als motors i $\mathbf{q}_j = (q_{v,j}, q_{h,j})$ i $\boldsymbol{\omega}_j = (\omega_{m,j}, \omega_{t,j})$ són les posicions angulars del cos del TRMS i les velocitats dels rotors, respectivament.

7.1. Bloc condicionador de la velocitat dels rotors

Com s'ha explicat a la introducció d'aquest capítol, el sistema de control de posició dóna a la sortida els parells necessaris que cal aplicar a les articulacions del TRMS per tal que aquest segueixi la trajectòria de referència. Així doncs, cal afegir un bloc encarregat de comunicar al sistema de control en cascada dels motors les velocitats a què aquests han de girar per tal d'assolir els parells desitjats a les articulacions.

El procediment que aplica aquest bloc per calcular les velocitats dels rotors a partir d'uns parells de referència coneguts és el següent:

- En primer lloc, donats els parells de referència, $\mathbf{\Gamma}^{des}$, es calculen les forces de pro-

pulsió aerodinàmiques que els provoquen, \mathbf{T}^{des} , a partir de la següent expressió:

$$\mathbf{T}^{des} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{\Gamma}^{des} \quad (7.1)$$

on \mathbf{D} és la matriu que transforma les forces de propulsió generades per cada hèlix en els parells resultants sobre les articulacions del sistema (veure secció 5.2).

- Finalment, donades les forces de propulsió desitjades, es calculen les velocitats desitjades a partir de les característiques Força de propulsió - Velocitat descrites també a la secció 5.2 d'aquest document. Les velocitats $\omega_m^{des}(T_m^{des})$ i $\omega_t^{des}(T_t^{des})$ són les que s'envien com a senyal de consigna als sistemes de control en cascada de la velocitat dels motors.

7.2. Controladors lineals tipus PID

Com s'ha vist en el capítol 3 d'aquesta Memòria, es disposa d'un sistema que respon a unes equacions de moviment no lineals i acoblades entre sí.

Per dissenyar controladors lineals sobre el sistema, el primer que s'ha de fer és linealitzar-lo. Per a això, s'ha aplicat el mètode de linealització al voltant d'un punt d'operació amb l'objectiu d'implementar dos controladors tipus PID que facin el sistema estable en un cert espai de treball entorn d'aquest punt.

7.2.1. Linealització del sistema entorn del punt $\mathbf{q}=(0,0)$

Segons la formulació d'espai d'estats, un sistema no lineal es pot descriure com:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (7.2)$$

essent \mathbf{x} el vector de variables d'estat, \mathbf{u} les accions de control i \mathbf{y} la sortida del sistema.

Sigui $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ un punt d'equilibri del sistema, aleshores es té que:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \end{aligned} \quad (7.3)$$

i es pot definir un sistema lineal del tipus

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\chi}} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\chi} + \mathbf{D}\boldsymbol{\mu} \end{aligned} \quad (7.4)$$

que representa el comportament del sistema entorn del punt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$.

Per tal d'estudiar i analitzar el comportament local del sistema al voltant del punt esmentat, se suposa que tant $\mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ com $\mathbf{u} - \mathbf{u}^*$ són petits, tals que pertorbacions no lineals poden ser ignorades en comparació amb els termes lineals (d'ordre baix). Vegis que, si s'aplica una expansió de Taylor a les funcions no lineals, resulta:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \dots \quad (7.5)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \dots \quad (7.6)$$

Llavors, definint unes variables $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\mu}$ tals que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \\ \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{y} - \mathbf{y}^* \\ \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \end{aligned}$$

es té que les matrius \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} del sistema linealitzat entorn del punt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ són les matrius jacobianes de \mathbf{f} i \mathbf{h} respecte de \mathbf{x} i de \mathbf{u} , avaluades en l'esmentat punt d'equilibri:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}, \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}$$

En el cas que ens ocupa, s'ha definit el vector de variables d'estat del model reduït del TRMS com:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_v \\ q_h \\ \dot{q}_v \\ \dot{q}_h \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_h \\ \ddot{q}_v \\ \ddot{q}_h \end{bmatrix}$$

de manera que el sistema no lineal es pot descriure a l'espai d'estats segons l'expressió:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} \end{aligned} \quad (7.7)$$

D'acord amb els propòsits d'aquest projecte, s'ha decidit linealitzar el sistema entorn del punt $\mathbf{q} = (0, 0)$. Amb això es pretén obtenir un sistema lineal vàlid per al disseny de dos controladors PID que permetin estabilitzar el sistema en un espai de treball centrat

en el punt que s'ha pres com a origen de coordenades. Aleshores, el sistema linealitzat es pot calcular com:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{q}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\tilde{\Gamma} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{q}} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_{\mathbf{q}} + \mathbf{0}\tilde{\Gamma}\end{aligned}\tag{7.8}$$

on:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \left. \frac{\partial[\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}\boldsymbol{\Gamma}]}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=(0,0)} & - \left. \frac{\partial[\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{q})]}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=(0,0)} - \left. \frac{\partial[\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}]}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{\mathbf{q}=(0,0)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \left. \frac{\partial[\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}\boldsymbol{\Gamma}]}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \right|_{\mathbf{q}=(0,0)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

D'aquestes expressions s'obté, finalment, el sistema que segueix:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5,6825 & 0,0034 & -0,0459 & 0,0041 \\ 0,0892 & -0,2333 & 0,0007 & -0,2799 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 28,6760 & -0,4503 \\ -0,4503 & 31,1042 \end{bmatrix} \tilde{\Gamma} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\Gamma}\end{aligned}\tag{7.9}$$

7.2.2. Funcions de transferència del sistema linealitzat

Donat un sistema lineal en la forma d'espai d'estats (Eq. 7.4) i expressat en el domini de Laplace:

$$\begin{aligned}s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}(s)\end{aligned}\tag{7.10}$$

es poden obtenir les funcions de transferència del sistema a partir de la següent expressió:

$$\frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\tag{7.11}$$

Aplicant l'expressió (7.11) al sistema linealitzat (7.9), s'obté una matriu 2×2 de funcions de transferència

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{\Gamma}(s)} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

on interessa veure que

$$G_{11}(s) = \frac{28,6760}{s^2 + 0,04597s + 5,6830}, \quad G_{22}(s) = \frac{31,1042}{s^2 + 0,2798s + 0,2332} \quad (7.13)$$

Vegis que $G_{11}(s)$ és la funció de transferència linealitzada que representa el comportament del sistema en l'angle de capcineig davant una consigna en el parell de propulsió vertical i $G_{22}(s)$ és la funció de transferència, també linealitzada, que descriu el moviment del sistema en l'angle de guinyada davant una consigna en el parell de propulsió horitzontal. Aquestes són les funcions de transferència que s'han utilitzat per dissenyar els dos controladors lineals tipus PID encarregats d'ajustar els parells de propulsió en els angles de capcineig i guinyada en funció de l'error entre la posició real i la posició desitjada.

7.2.3. Disseny dels controladors PID

Per al disseny del sistema de control de posició del TRMS, s'han separat les accions de control en els angles de capcineig i guinyada. Així doncs, es disposa de dos controladors PID: el primer s'encarrega d'ajustar el parell de propulsió necessari en el pla vertical a partir de l'error d'orientació en l'angle de capcineig, mentre que el segon ajusta el parell de propulsió necessari en el pla horitzontal en funció de l'error d'orientació en l'angle de guinyada.

Val a dir que la utilització de controladors lineals tipus PID, linealitzant entorn d'un punt de treball, està justificada per controlar el sistema en un rang relativament petit de l'espai de treball, de manera que s'ha hagut d'optar per ajustos conservadors i fer que els temps característics de la dinàmica lenta siguin considerablement grans.

Partint de les funcions de transferència linealitzades (7.13), s'ha procedit a fer un disseny de dos controladors PID en temps discret utilitzant un període de mostratge $T_s = 0,001$ segons i atenent a les següents especificacions:

- En el cas del moviment de capcineig, s'ha imposat que la resposta davant una entrada graó sigui subamortida (pols reals negatius en el pla s), amb un temps d'establiment pròxim als 25 segons.
- Pel que fa al moviment de guinyada, s'han imposat com a criteris de disseny un sobrepuig del 2,5% i un temps d'establiment de 40 segons davant una entrada graó.

Tenint presents aquests criteris i aplicant el mètode de disseny per assignació de pols, s'han obtingut, per als guanys dels controladors, els valors que s'indiquen a la Taula 7.1.

Controlador	K_p	K_i	K_d
PID parell de capcineig	0,0253	0,0381	0,1700
PID parell de guinyada	0,0256	0,0028	0,1599

Taula 7.1: Valors teòrics dels guanys dels controladors PID

Un aspecte que no s'ha tingut en compte en el disseny teòric, i que repercuteix negativament sobre la generació de les accions de control, és l'efecte de quantificació provocat pels encoders amb què es mesura la posició angular del sistema. Bàsicament, els encoders converteixen una successió de mostres de posició angular contínua en una successió de valors discrets, la resolució dels quals depèn de l'electrònica que els dispositius esmentats porten incorporada. Així, en un cas ideal de precisió il·limitada, la posició mesurada s'aniria actualitzant en cada instant de mostratge i, si el període de mostratge fos suficientment petit, les corbes resultants tindrien aspecte pràcticament continu donat que els increments de posició serien ínfims. En el cas de la planta amb què es treballa, en canvi, es tenen uns encoders amb una resolució que no els permet detectar increments en la posició del sistema cada instant de temps que es pren una mostra (donat que el sistema té una dinàmica lenta, el canvi de posició angular que té lloc en una mil·lèsima de segon és pràcticament imperceptible). Això fa que el senyal de realimentació evolucioni en forma de petits graons en lloc de tenir un aspecte pràcticament continu. En conseqüència, la derivada de l'error presenta pics de magnitud no menyspreable, de manera que, amb els valors dels K_d obtinguts a partir del disseny teòric, les accions de control es desapareixen.

Per això, prenent com a punt de partida els controladors obtinguts en el disseny teòric, s'han hagut de dur a terme alguns ajusts en el sistema de control, els quals es detallaran a continuació. Aquestes modificacions han estat testejades amb el model de simulació i validades experimentalment amb el sistema real.

Així, el primer que s'ha fet ha estat disminuir els valors dels guanys de la part derivativa d'ambdós controladors amb l'objectiu de reduir la magnitud dels impulsos presents en les accions de control sense influir negativament en la resposta del sistema. També s'han afegit uns filtres a la cadena de realimentació de posició a fi de suavitzar l'efecte de quantificació. Per a això, s'han fet servir els mateixos filtres FIR que s'utilitzen a la cadena de realimentació de les velocitats dels rotors (veure apartat 4.3).

Després de fer alguns experiments en simulació per avaluar el comportament dels controladors, els valors definitius a què s'han fixat els seus guanys s'indiquen a la Taula 7.2.

Controlador	K_p	K_i	K_d
PID control parell de capcineig	0,0250	0,0350	0,0250
PID control parell de guinyada	0,0250	0,0030	0,0250

Taula 7.2: Valors definitius dels guanys dels controladors PID

Finalment, ha calgut introduir uns altres filtres a la sortida del bloc de condicionament de les velocitats dels rotors. El problema que s'ha observat és que aquest bloc té un guany molt elevat (transforma parells de l'ordre de les centèsimes de N·m a velocitats de l'ordre de les desenes de rad/s). A més, els controladors PID són passa-alts, de manera que, per petit que sigui el soroll que entra a través de la realimentació de posició, aquest s'amplifica considerablement fins a arribar a l'entrada dels llaços de control de velocitat dels motors. Per pal·liar aquest efecte d'amplificació del soroll, s'han dissenyat uns filtres FIR gaussians amb la Filter Design Toolbox de Matlab. Les freqüències de tall s'han ajustat a 15 Hz a l'entrada del llaç de control de velocitat del rotor principal i a 7,5 Hz a l'entrada del llaç de control de la velocitat del rotor de cua.

Les Figures 7.2, 7.3 i 7.4 mostren una comparativa de la resposta en llaç tancat del sistema real i del model per diferents entrades graó. Com es pot veure, els controladors compleixen amb l'objectiu d'estabilitzar el TRMS en posicions properes al punt $\mathbf{q} = (0, 0)$, amb uns temps característics similars als que s'han imposat en el disseny teòric.

Si es comparen les respostes obtingudes amb el sistema real i amb el model, s'observa que són raonablement similars entre elles i que els temps d'establiment són pràcticament idèntics. Les principals diferències s'observen en els transitoris: pel que fa al moviment en el pla vertical, el model presenta unes oscil·lacions més accentuades fins a assolir una posició estable; en relació al pla horitzontal, les discrepàncies que es detecten són degudes als errors comesos en aproximar amb un model lineal la força exercida pel cable. Per altra banda, el sistema real es veu afectat per nombroses perturbacions que fan que el cos del TRMS no resti immòbil un cop assolida la posició d'equilibri, sinó que estigui constantment presentant petites desviacions respecte de la referència i tractant de corregir-les.

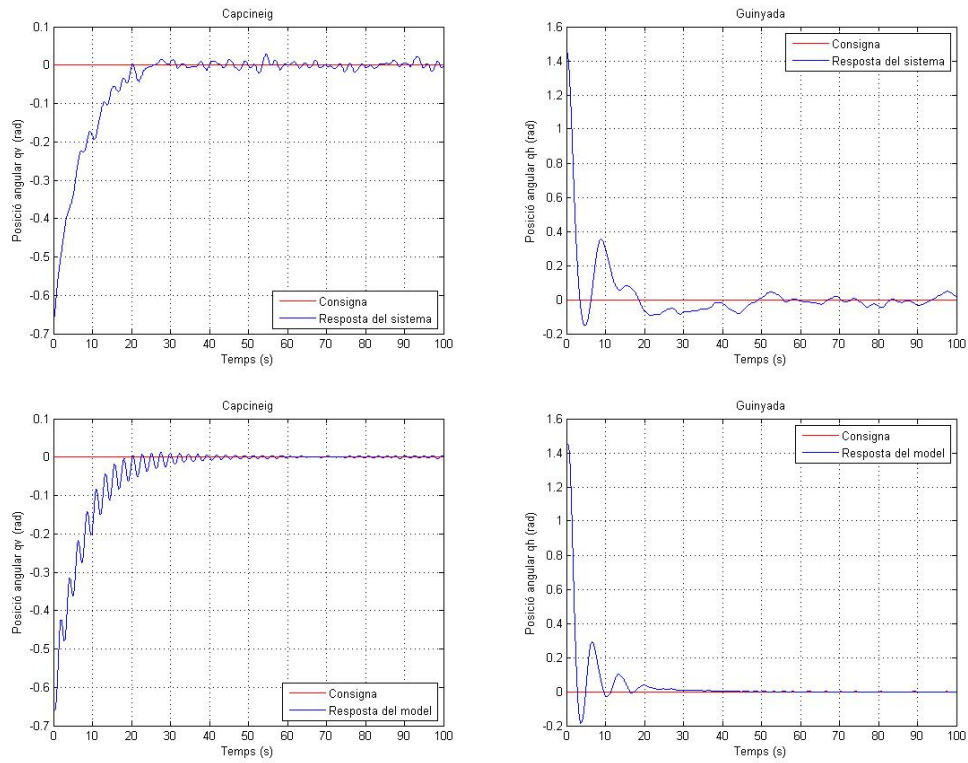


Figura 7.2: Resposta del TRMS davant una entrada graó $\mathbf{q}^{des} = (0, 0)$

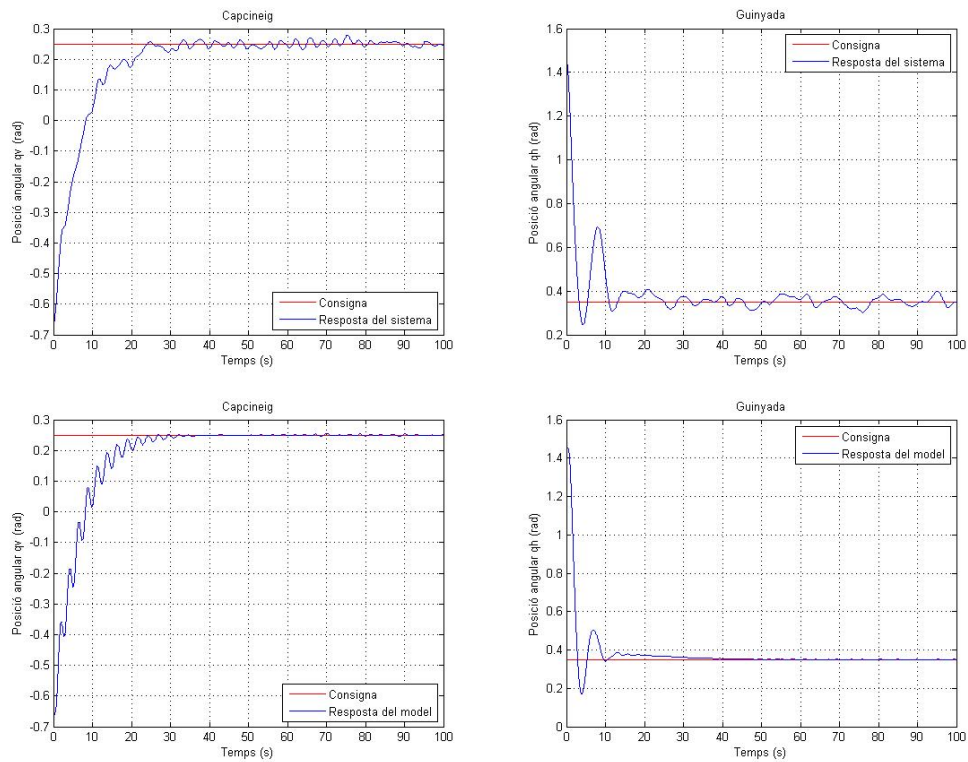


Figura 7.3: Resposta del TRMS davant una entrada graó $\mathbf{q}^{des} = (0, 25; 0, 35)$

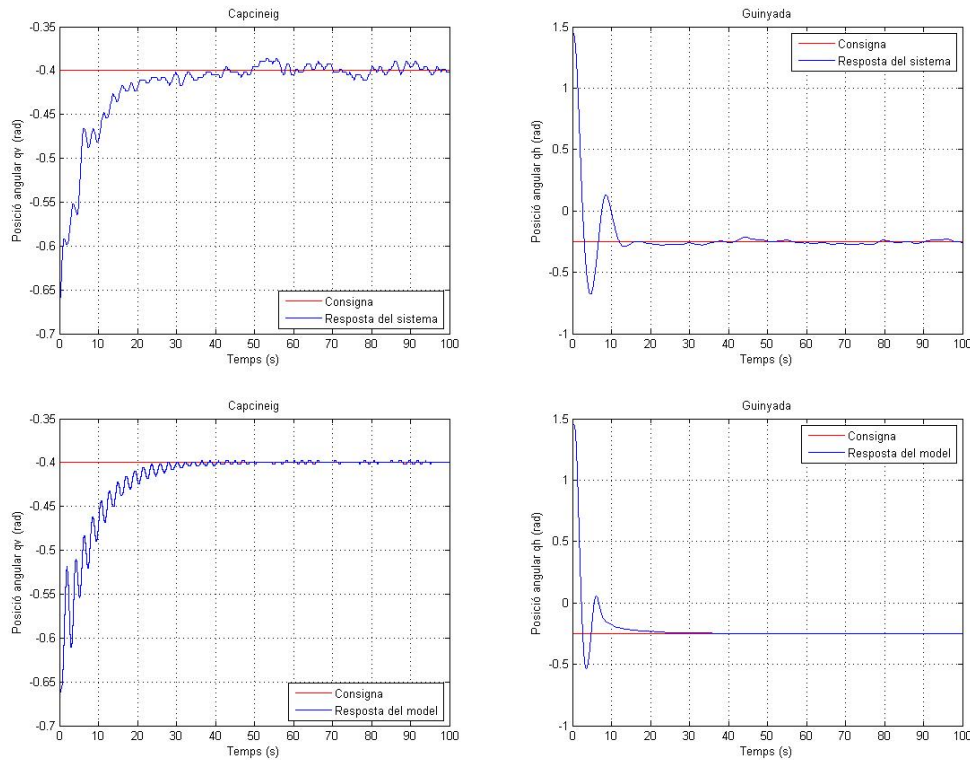


Figura 7.4: Resposta del TRMS davant una entrada graó $\mathbf{q}^{des} = (-0, 4; -0, 25)$

7.3. Implementació de l'ILC

En aquesta secció s'explica amb detall el procediment seguit per al disseny de dos controladors basats en l'aprenentatge, un cop verificat el correcte funcionament dels PIDs com a estabilitzadors del comportament de la planta. L'objectiu és millorar el rendiment del sistema de control de posició del TRMS pel que fa al seguiment de trajectòries programades a la seva entrada.

La secció s'inicia amb uns apartats introductoris en què es descriuen la formulació del problema de l'ILC i les característiques principals dels algorismes d'aprenentatge utilitzats. Per simplificar la notació, s'ha suposat el cas general d'un sistema SISO lineal de temps discret. Amb això es pretén donar una visió bàsica i entenedora sobre els aspectes fonamentals d'aquesta estratègia de control, sense entrar en definicions matemàtiques gaire complexes. Finalment, s'adapta la notació al cas concret del TRMS i es descriu el procediment de disseny i ajust dels paràmetres que conformen els algorismes d'aprenentatge.

7.3.1. Formulació del problema de l'*Iterative Learning Control*

Consideris un sistema SISO (*single-input single-output*) invariant temporal i de temps discret, tal que la seva dinàmica ve representada per l'expressió:

$$y_j(k) = P(q) u_j(k) + d(k) \quad (7.14)$$

on k és l'índex de temps, j és l'índex associat a la iteració actual, q és l'operador de decalatge $qx(k) = x(k+1)$, y_j és la sortida, u_j és el senyal de control i d representa una pertorbació que es repeteix en cada iteració. S'assumeix que la planta és asimptòticament estable (en cas que no ho sigui, pot ser estabilitzada amb un controlador de realimentació i aplicar-se l'ILC al llaç tancat) i que té un retard -o grau relatiu- m .

Consideris també la seqüència de N mostres d'entrades i sortides en cada iteració

$$\begin{aligned} u_j(k), \quad k &\in \{0, 1, \dots, N-1\}, \\ y_j(k), \quad k &\in \{m, m+1, \dots, N+m-1\}, \\ d(k), \quad k &\in \{m, m+1, \dots, N+m-1\}, \end{aligned}$$

i la sortida desitjada del sistema

$$y_d(k), \quad k \in \{m, m+1, \dots, N+m-1\}.$$

Cada cop que el sistema envia una entrada al sistema, $u_j(k)$, aquesta es guarda juntament amb l'error resultant del sistema, $e_j(k) = y_d(k) - y_j(k)$. A la pràctica, la durada N de la iteració sempre és finita, tot i que de vegades és útil considerar una durada infinita per qüestions d'anàlisi i disseny. A banda d'això, s'assumeix també la condició estàndard de *reset* de l'ILC: $y_j(0) = y_0$ per tot j . Per simplicitat en la formulació, es suposarà en aquest apartat introductori que el retard de la planta és $m = 1$.

Aleshores, per aquest sistema, l'objectiu del controlador basat en l'aprenentatge és el d'inferir un senyal de control òptim $u^*(k)$ per $k \in [0, N-1]$ avaluant l'error $e_j(k) = y_d(k) - y_j(k)$ a l'interval $k \in [1, N]$. Això s'aconsegueix ajustant el senyal de control de la iteració actual, $u_j(k)$, a un nou senyal $u_j(k+1)$ per a la iteració següent. Un algorisme d'aprenentatge iteratiu àmpliament utilitzat és

$$u_{j+1}(k) = Q(q) [u_j(k) + L(q) e_j(k+1)] \quad (7.15)$$

on els termes $Q(q)$ i $L(q)$ reben el nom de filtre Q i funció d'aprenentatge, respectivament.

La Figura 7.5 mostra l'estructura bidimensional d'un sistema ILC de primer ordre (només es té en compte la iteració anterior per calcular u_{j+1}) com el que es descriu a l'equació (7.15). Vegis que, al final de cada iteració, l'error és filtrat a través de L , afegit al senyal de control anterior i filtrat novament a través de Q . El senyal de control actualitzat és aplicat a la planta P en la següent iteració.

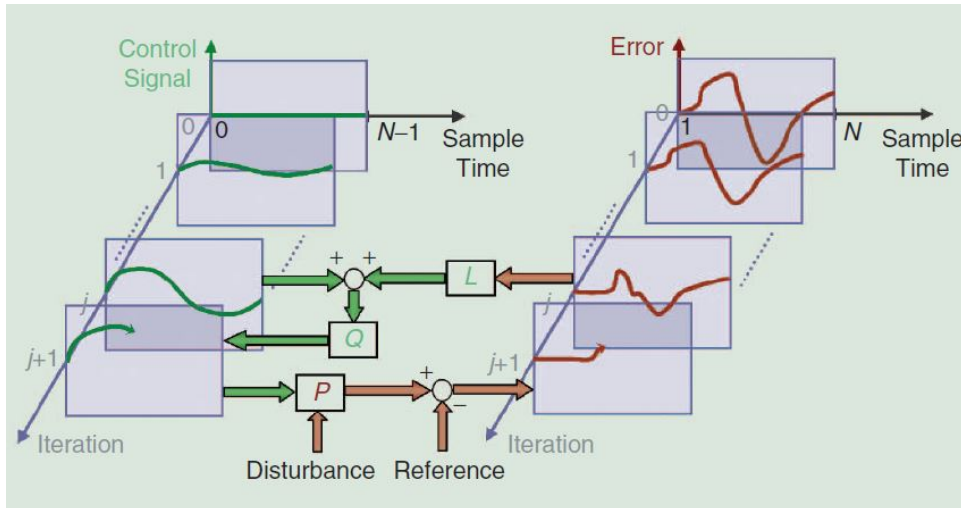


Figura 7.5: Esquema bidimensional d'un sistema ILC de primer ordre [6]

7.3.2. Aplicació de l'ILC al TRMS

En els apartats anteriors, s'ha presentat l'ILC com un sistema de control que utilitza únicament senyals de control enllaç obert, cosa que no permet compensar els errors deguts a pertorbacions no periòdiques. Per això, en la majoria d'implementacions físiques, s'utilitza un controlador de realimentació en combinació amb l'ILC.

A l'hora de combinar l'ILC amb unllaç tancat de control existeixen dues possibilitats [6]: la disposició en sèrie, en què el senyal de control associat a l'ILC és aplicat a la consigna, abans delllaç de realimentació; i la disposició en paral·lel, en què es combinen el senyal de control associat a l'ILC i el senyal generat pel controlador delllaç tancat.

Per a la disposició en sèrie, la dinàmica d'un sistema SISO, $G(q)$, amb un controlador $C(q)$ i realimentació unitària respon a l'expressió:

$$y_j(k) = (1 + G(q)C(q))^{-1} G(q)C(q) u_j(k) + (1 + G(q)C(q))^{-1} G(q)C(q) y_d(k)$$

mentre que, per a la disposició en paral·lel, es té:

$$y_j(k) = (1 + G(q)C(q))^{-1} G(q) u_j(k) + (1 + G(q)C(q))^{-1} G(q)C(q) y_d(k)$$

Així, establint l'*input* associat a l'ILC, u_j , a zero, s'obté en ambdós casos un sistema de control en llaç tancat estàndard per a la referència y_d , de forma que l'ILC pot ser desactivat quan no s'utilitzen trajectòries repetitives.

En el cas que ens ocupa, s'ha implementat una arquitectura de control del tipus sèrie perquè resulta més útil a l'hora d'aplicar l'ILC a un sistema que utilitza uns controladors preexistents [6]. D'aquesta manera, s'ha pogut procedir al disseny d'algorismes d'aprenentatge i a l'ajust dels seus paràmetres adequant-los al comportament dels controladors PID que ja es tenien dissenyats, però sense haver de modificar aquests últims.

Per altra banda, s'han seleccionat els mètodes més simples de disseny, això és, els que utilitzen unes funcions d'aprenentatge tipus P i tipus PD. Com el seu nom indica, aquestes funcions es basen en aplicar un guany proporcional, o bé un guany proporcional i un guany derivatiu, sobre l'error de la iteració anterior. L'integrador és rarament utilitzat en aquest tipus de funcions perquè l'ILC ja posseeix un integrador natural d'una iteració a la següent. La particularitat d'aquests algorismes de control és que depenen en gran part de l'ajust dels guanys esmentats, de manera que la seva implementació no requereix d'un model gaire acurat. És per això que són àmpliament utilitzats, especialment en el cas de sistemes no lineals.

La funció d'aprenentatge tipus P de temps discret aplicada a un sistema SISO es pot escriure com:

$$u_{j+1}(k) = Q(q) [u_j(k) + k_p e_j(k+1)] \quad (7.16)$$

Al seu torn, l'algorisme d'aprenentatge tipus PD de temps discret, aplicat també a un sistema SISO, té la forma:

$$u_{j+1}(k) = Q(q) [u_j(k) + k_p e_j(k+1) + k_d (e_j(k+1) - e_j(k))] \quad (7.17)$$

A les equacions (7.16) i (7.17), k_p són els guanys proporcionals i k_d és el guany derivatiu. L'ús d'un filtre passabaix Q , tot i no ser necessari en aquests tipus d'algorismes, resulta favorable per a la consecució d'una convergència monòtona, ja que pot ser utilitzat per deshabilitar l'aprenentatge a freqüències elevades. A més, aporta beneficis en el sentit que confereix robustesa al sistema de control i el dota de capacitat de filtrar sorolls d'alta freqüència.

El mètode més utilitzat per seleccionar els guanys de les funcions d'aprenentatge tipus P i PD és l'ajust experimental, preferiblement després d'haver obtingut uns valors orientatius pels guanys a través de models de simulació. Els objectius principals del disseny consisteixen en assolir transitoris d'aprenentatge ràpids i un error asimptòtic baix. Tot i que no existeixen regles formals sobre com realitzar aquests ajusts, una sèrie de consells

són proposats a [6]. Segons aquests, un bon mètode consisteix en reinicialitzar l'aprenentatge per a cada conjunt de guanys k_p i k_d , i executar-lo amb les iteracions suficients per determinar el comportament transitori i l'error asimptòtic. Inicialment, els guanys i l'ample de banda del filtre s'estableixen a valors baixos. Després d'obtenir un comportament transitori i un error estable, aquests es prenen com a base i s'incrementen els guanys i l'ample de banda, tractant de fer l'aprenentatge més efectiu. En les aplicacions més habituals, els guanys influeixen en la velocitat de convergència, mentre que el filtre Q influeix en l'error un cop l'aprenentatge ha convergit. Incrementar l'ample de banda del filtre disminueix la robustesa però millora l'execució, mentre que disminuir l'ample de banda té l'efecte contrari.

A continuació es descriuen les característiques dels dos algorismes d'aprenentatge utilitzats, així com el procediment que s'ha seguit per tal d'ajustar els seus paràmetres. Vegis que, donat que el sistema de control en llaç tancat del TRMS és un sistema MIMO amb dues entrades, s'ha hagut d'implementar una doble funció d'aprenentatge, una per al control de la posició angular de capcineig i l'altra per al control de la posició angular de guinyada.

Algorisme d'aprenentatge tipus P

En el cas de la planta MIMO de què es disposa, la funció d'aprenentatge tipus P es pot escriure com:

$$\begin{bmatrix} u_{qv,j+1}(k) \\ u_{qh,j+1}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{qv}(q) & 0 \\ 0 & Q_{qh}(q) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} u_{qv,j}(k) \\ u_{qh,j}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{p,qv} & 0 \\ 0 & k_{p,qh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{qv,j}(k+1) \\ e_{qh,j}(k+1) \end{bmatrix} \right) \quad (7.18)$$

on k_{p,q_i} són els guanys proporcionals associats a les funcions d'aprenentatge i $Q_{q_i}(q)$ són dos filtres passabaixos de segon ordre del tipus Butterwoth. És important destacar que els algorismes d'aprenentatge s'han implementat fora de línia, al final de cada iteració i utilitzant la comanda de filtrat *filtfilt* que aporta el Matlab, amb la qual s'evita la distorsió de fase pròpia dels filtres IIR.

Per tal d'ajustar els paràmetres de la funció d'aprenentatge, s'ha començat utilitzant uns guanys petits $k_{p,qv} = k_{p,qh} = 0,1$ i un ample de banda dels filtres de 0,1 Hz. L'elecció d'un ample de banda tant baix es justifica perquè el TRMS té tendència a oscil·lar lleugerament mentre segueix les trajectòries de referència. Llavors, interessa que la funció d'aprenentatge només afecti al moviment a gran escala del sistema i menysprei l'error degut a aquestes oscil·lacions (en cas contrari, l'algorisme podria tendir a amplificar-les, fent que l'aprenentatge no arribés a convergir).

Així doncs, mantenint l'ample de banda dels filtres constant, s'ha anat augmentant el valor dels guanys i representant l'evolució de la mitjana quadràtica dels errors i de l'error màxim envers el nombre d'iteracions. A la Figura 7.6 es mostren alguns dels resultats obtinguts per una trajectòria de referència. D'aquests resultats, s'han escollit els guanys $k_{p,q_v} = 1$ i $k_{p,q_h} = 0,75$, ja que s'ha observat que, per guanys majors, el transitori d'aprenentatge deixa de tenir convergència monòtona i podria provocar que no arribés a convergir en el sistema real.

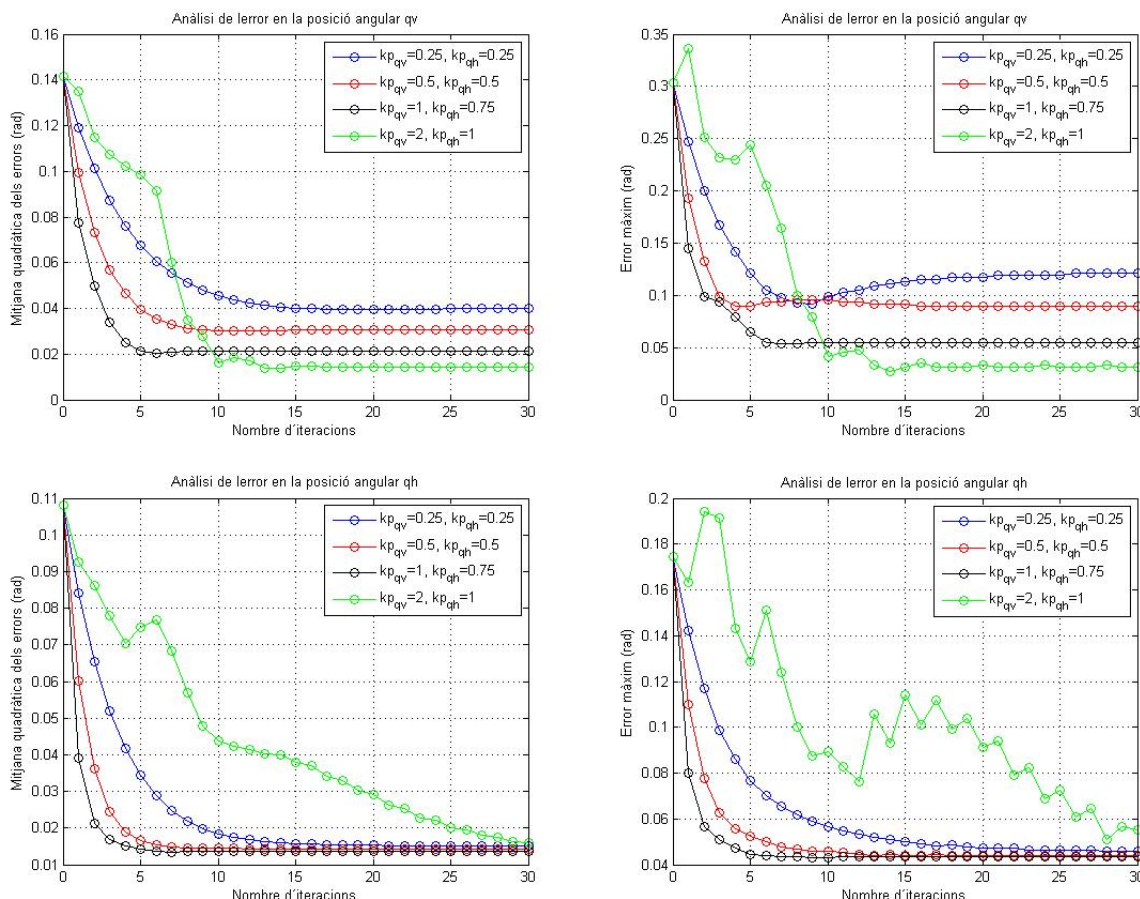


Figura 7.6: Comportament transitori per a l'ajust dels guanys proporcionals

Posteriorment, mantenint aquests guanys constants, s'ha provat d'augmentar l'ample de banda del filtre. Alguns dels resultats obtinguts en simulació, pel que fa a l'anàlisi dels errors durant el període d'aprenentatge, es mostren a la Figura 7.7. En vista d'aquests gràfics, s'han establert les freqüències de tall del filtres Q_{q_v} i Q_{q_h} a 0,2 Hz i 0,15 Hz, respectivament. Si bé és cert que amb un ample de banda més gran del filtre Q_{q_v} s'aconsegueix un error asimptòtic més petit pel que fa a la posició de capcineig, en el transitori de l'aprenentatge s'observa la presència d'oscil·lacions que es creu que podrien ésser amplificades en el sistema real, repercutint negativament en l'error de la posició de

guinyada a causa dels acoblaments existents entre les forces i parells exercits pels rotors. Per altra banda, augmentant l'ample de banda del filtre Q_{qv} també s'observen transitoris estranys, sobretot pel que fa a l'error màxim en la posició de guinyada. L'objectiu és fer que el sistema s'acomodi a les trajectòries programades de forma suau, d'aquí que s'hagi pres un ajust una mica conservatiu.

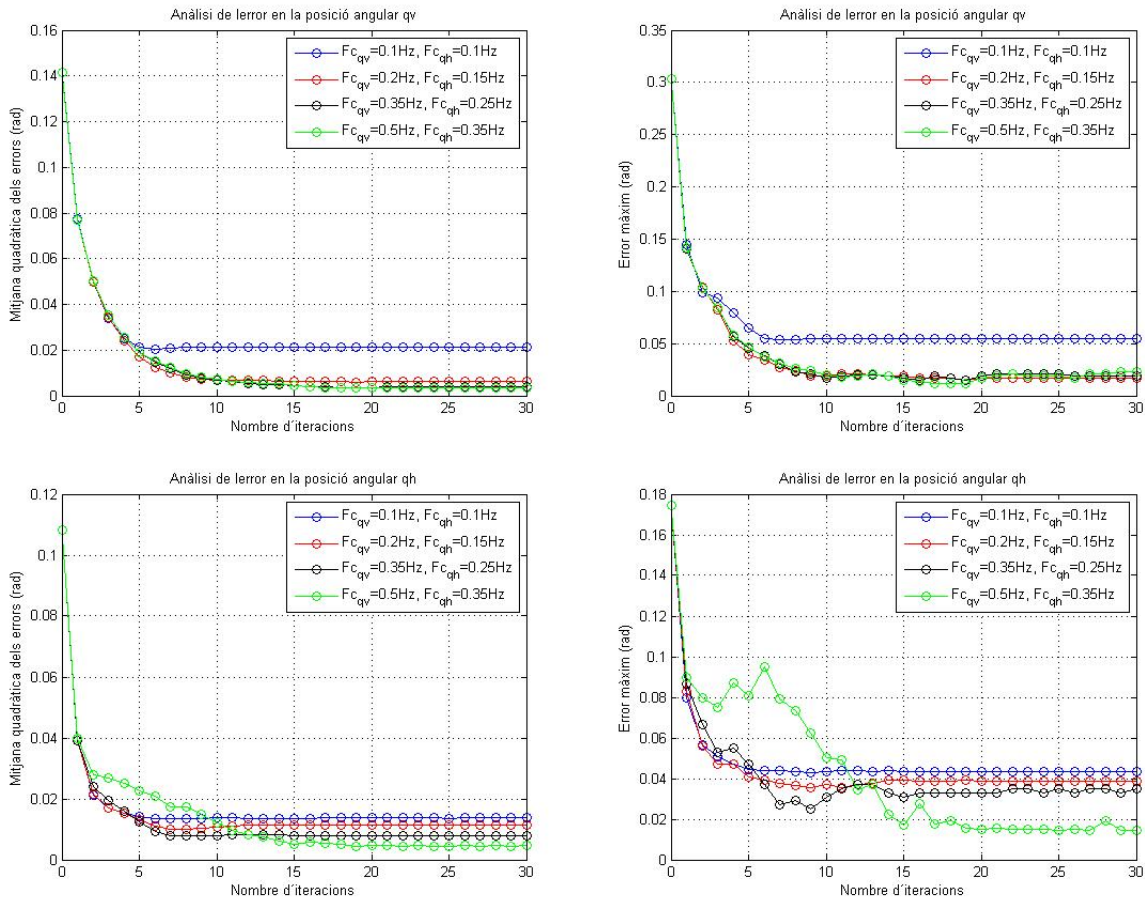


Figura 7.7: Comportament transitori per a l'ajust de l'ample de banda dels filtres

Algorisme d'aprenentatge tipus PD

Un cop ajustats els paràmetres de la funció d'aprenentatge tipus P, s'ha procedit a estudiar quin és l'efecte d'afegir-hi una part derivativa.

En el cas que ens ocupa, l'algorisme tipus PD que finalment s'ha implementat té la forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{qv,j+1}(k) \\ u_{qh,j+1}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{qv}(q) & 0 \\ 0 & Q_{qh}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{qv,j}(k) \\ u_{qh,j}(k) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} k_{p,qv} & 0 \\ 0 & k_{p,qh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{qv,j}(k+1) \\ e_{qh,j}(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{d,qv} & 0 \\ 0 & k_{d,qh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{qv,j}(k+1) - e_{qv,j}(k) \\ e_{qh,j}(k+1) - e_{qh,j}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.19)$$

on k_{d,q_i} són els guanys derivatius associats a les funcions d'aprenentatge, i k_{p,q_i} i $Q_{q_i}(q)$ són els guanys proporcionals i els filtres implementats en l'apartat anterior.

Com es pot veure en la Figura 7.8, el fet d'afegir un guany derivatiu contribueix a fer que l'aprenentatge convergeixi més ràpidament. En aquest cas, donat que els filtres tenen una freqüència de tall relativament baixa, s'han d'augmentar molt els guanys de la part derivativa per observar el seu efecte. Així doncs, s'han escollit uns guanys $k_{d,qv}$ i $k_{d,qh}$ de 1000 i 700, respectivament, amb els quals s'aconsegueix que l'aprenentatge convergeixi, teòricament, en unes cinc o sis iteracions.

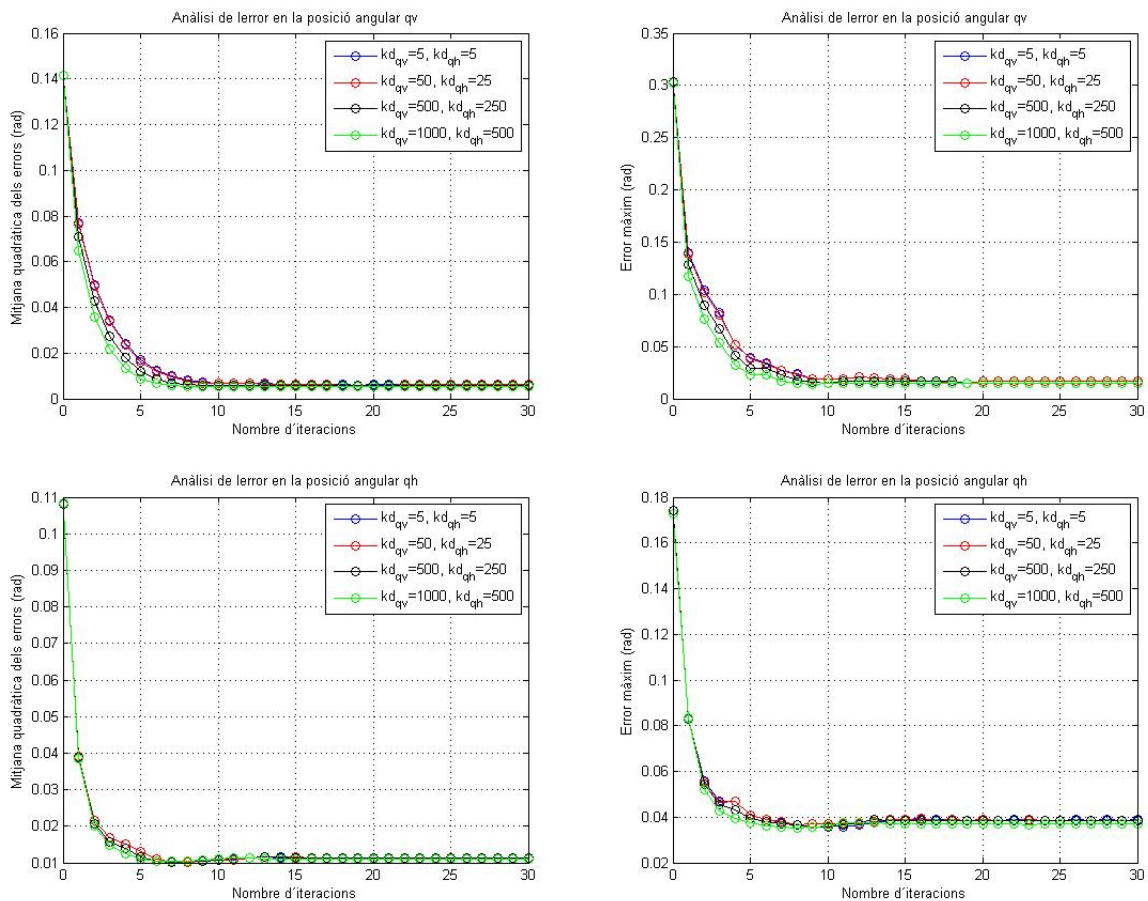


Figura 7.8: Comportament transitori per a l'ajust dels guanys derivatius

8. Resultats experimentals

Un cop explicat el procés de disseny del sistema de control implementat, en aquest capítol es procedirà a presentar els resultats experimentals que s'han obtingut tant amb el sistema real com amb el model de simulació.

L'objectiu dels experiments realitzats ha estat estudiar com la planta és capaç de millorar el seguiment d'una trajectòria de referència a través d'un aprenentatge de les execucions prèvies. Per a això, inicialment s'han definit dues trajectòries fent ús de la funció *mstraj* de la Robotics Toolbox de Matlab [15], que permet la creació de trajectòries multi-eix i multi-segment basades a partir d'una matriu de punts de pas, un vector de duracions de cada segment i un temps d'acceleració. L'avantatge principal d'aquesta funció és que retorna una trajectòria que interpola els punts de pas amb polinomis de cinquè ordre, els quals tenen la particularitat de tenir ben definides les derivades primera i segona (velocitats i acceleracions).

Pel que fa a la realització dels experiments, en primer lloc s'ha estudiat el comportament dels controladors PID donades les dues trajectòries com a senyal de consigna. Després, s'ha afegit al sistema la part de control basada en aprenentatge i s'ha fet un anàlisi de les millores que això implica en el seguiment de les mateixes.

8.1. Seguiment de trajectòries amb els controladors PID

Com s'ha explicat anteriorment, els primers experiments han consistit en veure la capacitat dels controladors PID de fer que el sistema segueixi les trajectòries de referència de forma raonable i sense desestabilitzar-se. Aquests experiments han servit per validar el disseny dels controladors i, ahora, per confirmar la validesa del model de simulació, donada la seva capacitat d'aproximar de forma prou acurada la resposta del sistema real pel que fa a les quatre variables d'estat (posicions angulars i velocitats dels rotors).

A continuació es mostren els resultats obtinguts en els assajos amb el sistema real, tot comparant-los amb les respostes del model de simulació.

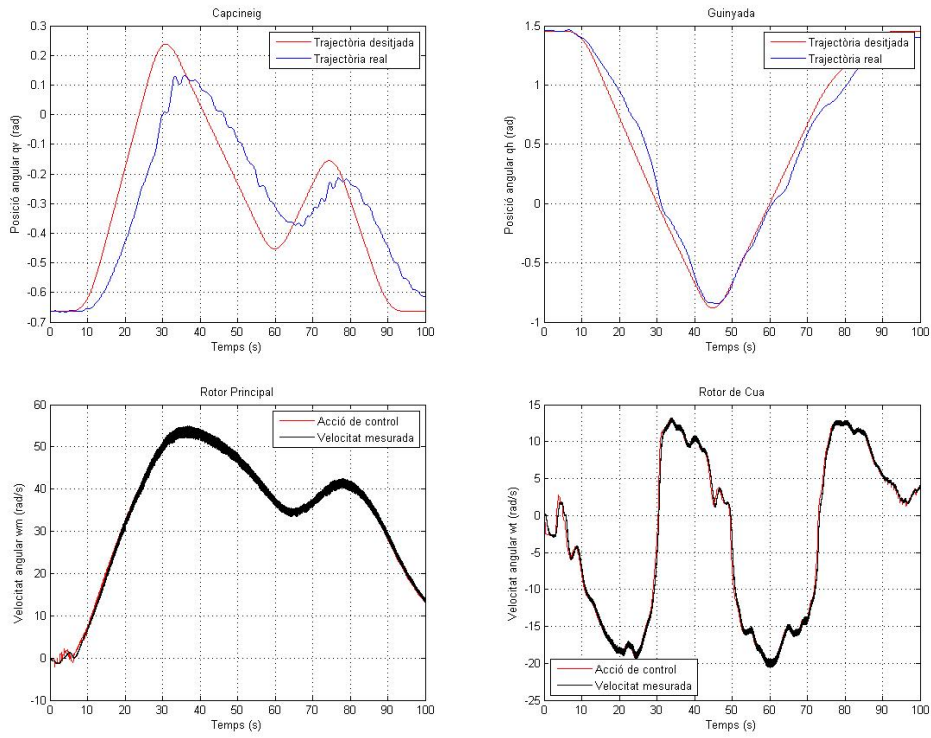


Figura 8.1: Resposta del sistema real per la trajectòria 1

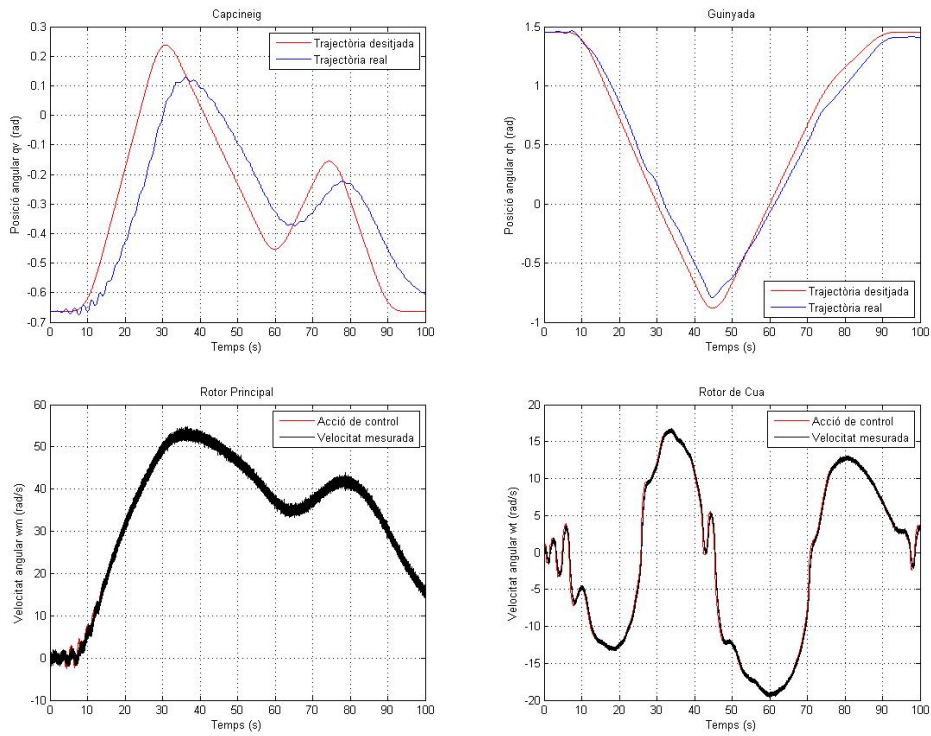


Figura 8.2: Resposta del model de simulació per la trajectòria 1

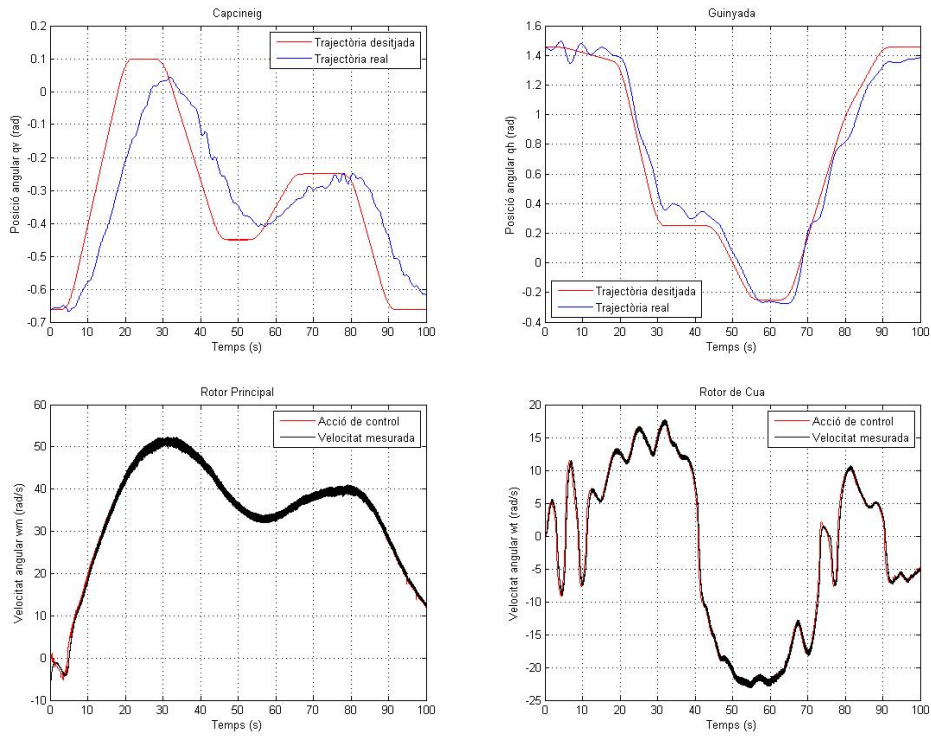


Figura 8.3: Resposta del sistema real per la trajectòria 2

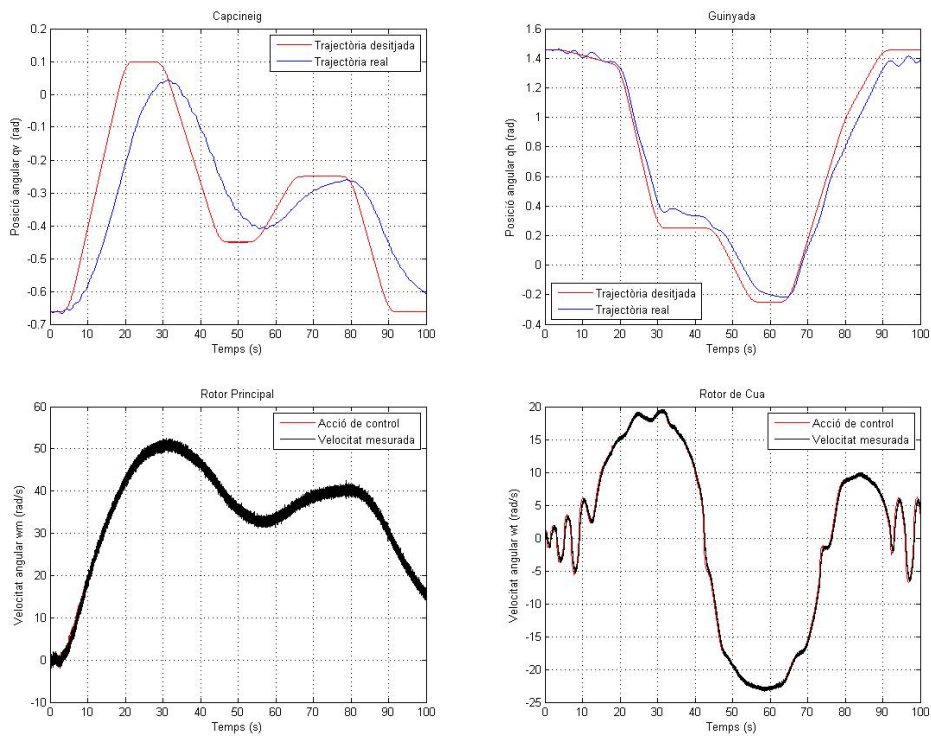


Figura 8.4: Resposta del model de simulació per la trajectòria 2

8.2. Seguiment de trajectòries amb l'ILC

Un cop dissenyat i implementat el sistema de control basat en l'aprenentatge, s'ha procedit a avaluar les seves prestacions en el sistema real. Per a això, amb els paràmetres dels controladors i de les funcions d'aprenentatge que s'han establert en el capítol 7, s'han realitzat una sèrie d'assajos que han consistit en executar 20 repeticions per a cadascuna de les trajectòries de referència.

A continuació es mostren els resultats obtinguts experimentalment.

Trajectòria 1

La Figura 8.5 mostra una comparació de la trajectòria efectuada pel TRMS sense l'ILC i amb l'ILC després de 20 iteracions d'aprenentatge. Com es pot veure, utilitzant l'ILC la sortida del sistema real és molt similar a la referència.

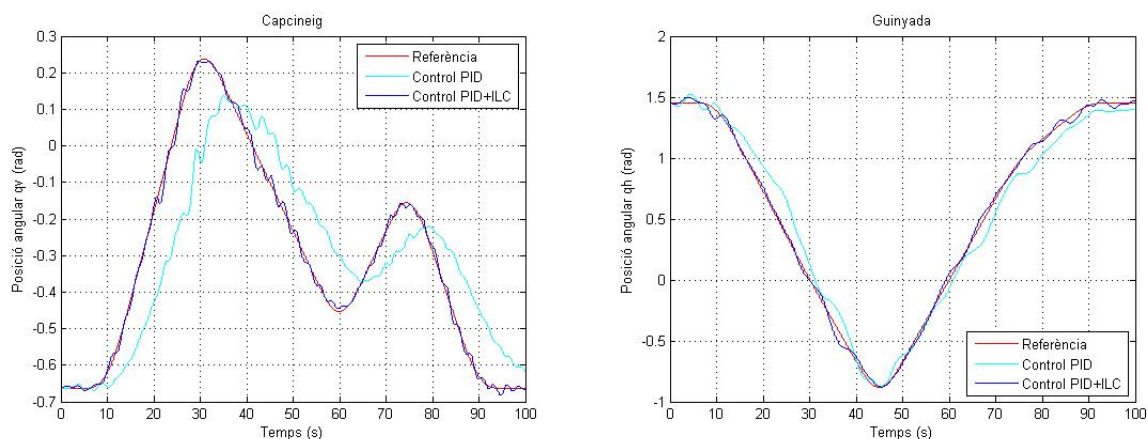


Figura 8.5: Resultats de *tracking* obtinguts amb i sense l'ILC per a la trajectòria 1

Per altra banda, la Figura 8.6 mostra una representació de les mitjanes quadràtiques dels errors de posició, i també dels errors màxims absoluts, en funció del nombre d'iteracions. Tal i com s'havia previst amb el model de simulació, es comprova que l'aprenentatge convergeix en sis iteracions, si bé és cert que l'error comés un cop l'aprenentatge ha convergit és una mica major que l'obtingut amb el model teòric. Això es deu a les nombroses perturbacions no periòdiques per les quals es veu afectat el sistema real. Amb tot, però, s'aconsegueixen uns resultats força robustos, fent que tant la mitjana quadràtica dels errors com els errors màxims quedin fitats en un rang de valors realment petit donada la baixa repetibilitat que caracteritza el sistema de què es disposa.

A partir dels gràfics esmentats, s'ha analitzat la capacitat de l'ILC de reduir els errors de posició en l'execució de la trajectòria 1. Per a això, s'ha calculat la variació percentual

entre l'error comès en la iteració inicial i la mitjana dels errors comesos a partir de la sisena iteració, un cop l'aprenentatge ha convergit, tal i com indica l'equació (8.1).

$$\% \Delta_{error} = \frac{E_0 - \frac{1}{15} \sum_{j=6}^{20} E_j}{E_0} \cdot 100 \tag{8.1}$$

Vegis que les E_j en aquesta expressió poden representar tant la mitjana quadràtica dels errors com l'error màxim absolut, segons escaigui, i cal diferenciar-les de les variables e_j utilitzades en apartats anteriors per fer referència al vector d'errors en la iteració j (d'aquí que s'hagi utilitzat la lletra majúscula l'expressió anterior). Aplicant aquest càlcul a les dades experimentals obtingudes resulta que, per a la trajectòria 1, l'ILC redueix l'error màxim un 86,78% en l'angle de capcineig i un 68,19% en l'angle de guinyada. La mitjana quadràtica dels errors, per la seva banda, es veu reduïda un 91,83% en el cas de l'angle de capcineig i un 71,62% en l'angle de guinyada.

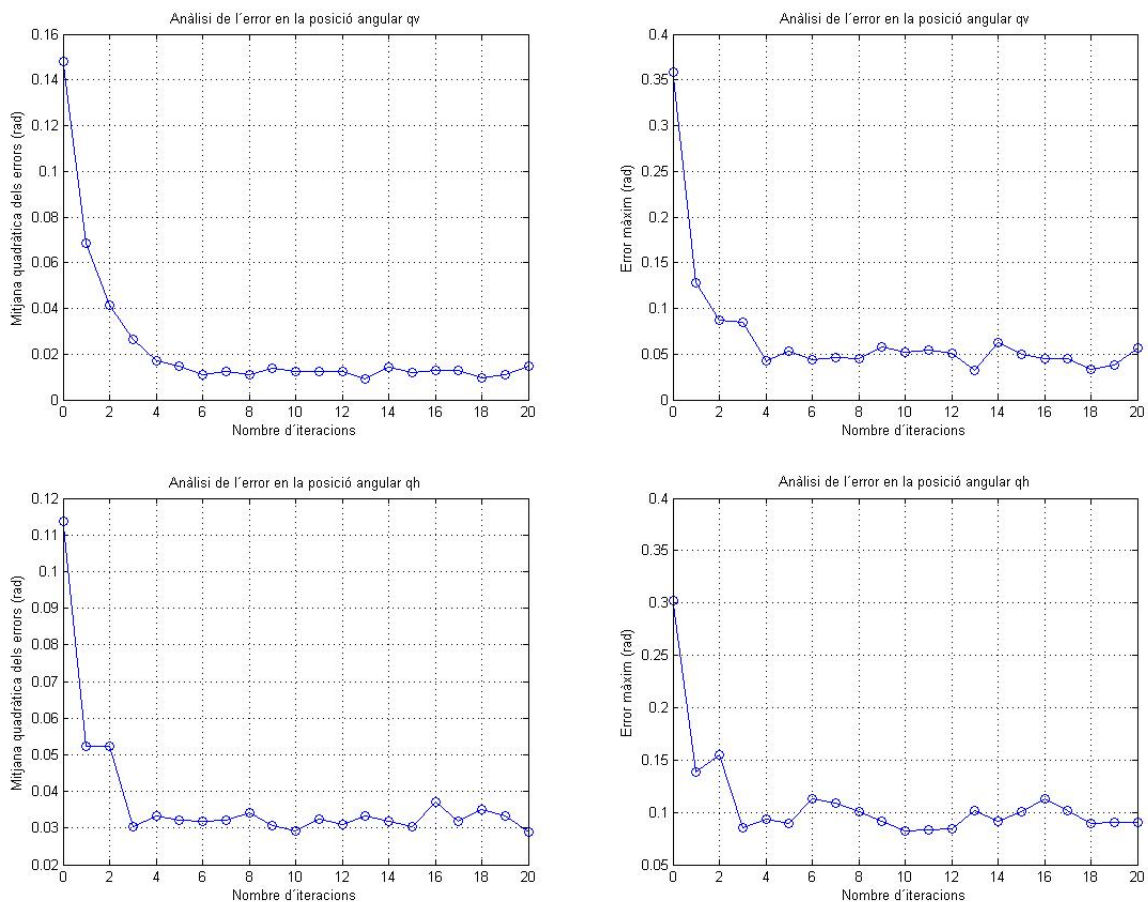


Figura 8.6: Anàlisi d'errors durant el transitori d'aprenentatge de la trajectòria 1

Trajectòria 2

Pel que fa a la segona trajectòria, s'ha seguit el mateix procediment d'anàlisi que en l'apartat anterior. A la Figura 8.7 es pot veure una comparació de la trajectòria efectuada pel TRMS sense l'ILC i amb l'ILC després de 20 iteracions d'aprenentatge. En aquest cas, els canvis de direcció durant la trajectòria són una mica més bruscos que en l'anterior, i s'observen algunes dificultats d'adaptació als trams que apareixen en forma de rectes horitzontals en els gràfics (posició angular constant durant un cert interval de temps), especialment pel que fa a l'angle de guinyada. Val a dir que el control de posició de guinyada és considerablement més complicat que el de capcineig, ja que es veu afectat per la força incerta exercida pel cable i per l'acoblament amb el parell reactiu provocat pel rotor principal.

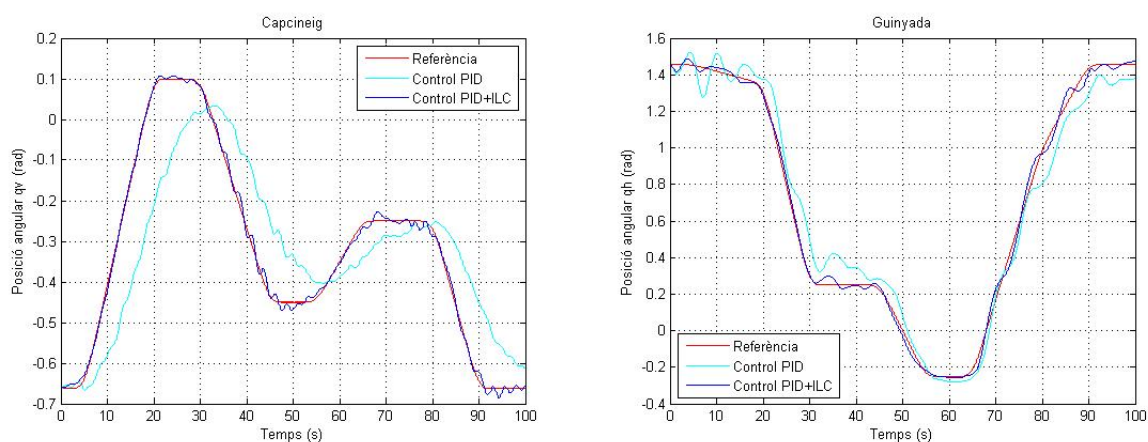


Figura 8.7: Resultats de *tracking* obtinguts amb i sense l'ILC per a la trajectòria 2

Així mateix, la Figura 8.8 mostra una representació de les mitjanes quadràtiques dels errors de posició, i també dels errors màxims absoluts, en funció del nombre d'iteracions. En aquest cas, les dificultats d'adaptació als canvis bruscs de direcció, especialment en l'angle de guinyada, es fan palesos en una major variabilitat de l'error màxim absolut i una evolució més lenta de l'aprenentatge de la trajectòria en el pla horitzontal: després de la sisena iteració, quan ja ha convergint l'aprenentatge en el pla vertical, la mitjana dels errors en l'angle de guinyada no queda completament estable, sinó que tendeix a continuar disminuint lentament.

Aplicant l'equació (8.1) a aquestes dades, s'obté que l'ILC redueix l'error màxim un 88,28% en l'angle de capcineig i un 56,28% en l'angle de guinyada. La mitjana quadràtica dels errors, per la seva banda, es veu reduïda un 91,87% en el cas de l'angle de capcineig i un 64,42% en l'angle de guinyada.

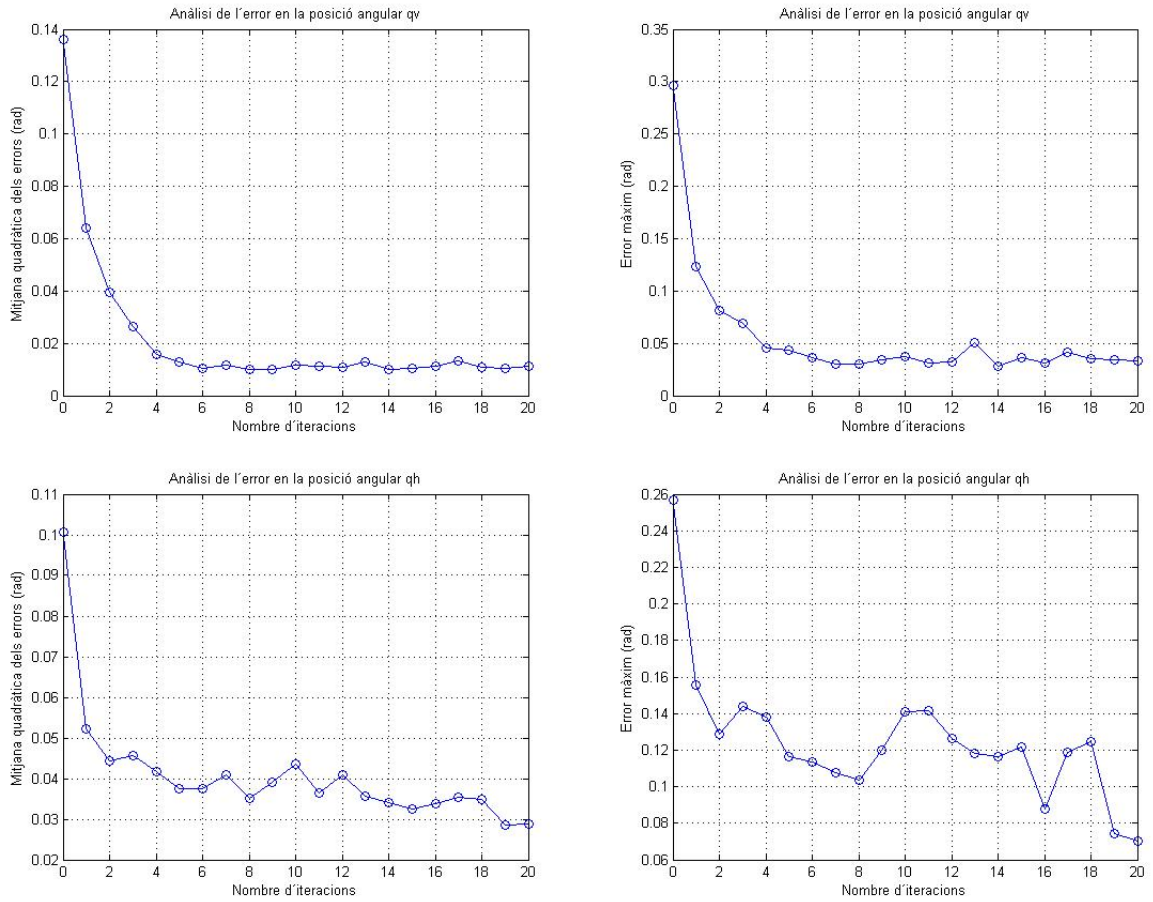


Figura 8.8: Anàlisi d'errors durant el transitori d'aprenentatge de la trajectòria 2

9. Planificació

Per dur a terme aquest projecte s'ha seguit de forma satisfactòria una planificació realitzada a l'inici del mateix. Aquesta ha servit com a guia per anar desenvolupant les diferents tasques i tenir, en tot moment, un control del treball realitzat a fi de no perdre de vista l'objectiu final.

En la Taula 9.1 es mostra el llistat de tasques específiques que s'han realitzat juntament amb les seves dates d'inici i acabament, mentre que la Figura 9.1 mostra un diagrama de Gantt amb la programació establerta.

Activitat	Data inici	Data fi
Planificació del TFG	13/02/2015	15/02/2015
Autoaprenentatge d'edició de textos en LaTeX	16/02/2015	29/03/2015
Estudi del model del TRMS	16/02/2015	22/02/2015
Corbes característiques dels motors	23/02/2015	01/03/2015
Modelat i control dels motors	02/03/2015	15/03/2015
Ajust experimental de paràmetres	16/03/2015	29/03/2015
Implementació del model en Matlab/Simulink	30/03/2015	05/04/2015
Linealització i control PID del TRMS	06/04/2015	03/05/2015
Estudi i investigació sobre l'ILC	20/04/2015	03/05/2015
Disseny dels algorismes ILC	04/05/2015	17/05/2015
Desenvolupament del laboratori virtual (EJS)	18/05/2015	28/06/2015
Experimentació amb l'equip de laboratori	18/05/2015	07/06/2015
Anàlisi de resultats i conclusions	08/06/2015	14/06/2015
Pressupost i anàlisi d'impacte ambiental	15/06/2015	21/06/2015
Redacció del TFG	01/03/2015	28/06/2015
Confeció dels annexos	30/03/2015	28/06/2015

Taula 9.1: Llista de tasques del projecte

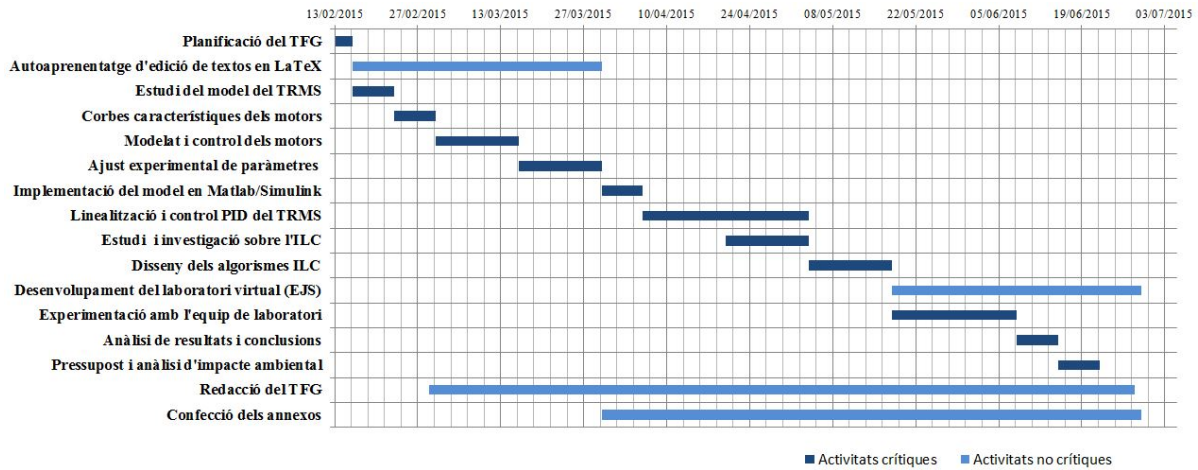


Figura 9.1: Diagrama de Gantt amb les diferents fases del projecte

Vegis que, en el diagrama de Gantt, s’han marcat amb un color més obscur les tasques que es considera que formen part del camí crític, això és, aquelles activitats sense l’acabament de les quals no s’han pogut començar les subsegüents. Les tasques esmentades són essencialment les que fan referència a la part de modelat del TRMS i de disseny i implementació del sistema de control, sense les quals no s’haguessin assolit els objectius bàsics del projecte. Paral·lelament a aquestes, s’han anat desenvolupant altres tasques com la confecció de la present Memòria i dels Annexos que l’acompanyen (cosa que ha requerit un procés previ d’autoaprenentatge sobre edició de textos en LaTeX), així com el desenvolupament d’un laboratori virtual del TRMS utilitzant el programari Easy Java Simulations.

10. Pressupost

L'estudi econòmic realitzat en aquest projecte es pot dividir en dues parts: per una banda, s'han tingut en compte els costos d'adquisició de l'equip de laboratori i del software amb què s'ha desenvolupat el treball d'investigació; per altra banda, s'han considerat els costos associats a tot el procés de disseny i implementació del simulador i el sistema de control, així com al temps dedicat a l'experimentació.

10.1. Costos d'adquisició d'equips i software

Tot i que, en el cas d'aquest projecte, s'ha disposat des d'un principi de l'equip de laboratori (la seva compra data de l'any 1998) i de tot el software necessari, s'inclou una partida referent al cost que suposaria adquirir-los per tal de desenvolupar projectes d'investigació similars. Per accedir a la llibreria i al simulador virtual del TRMS que s'han desenvolupat, caldria assumir només els costos de software (versions acadèmiques del programari Matlab/Simulink i Maple). No obstant això, per treure el màxim profit del simulador, és recomanable poder experimentar també amb el sistema real, per la qual cosa caldria assumir els costos de compra de l'equip de laboratori.

Activitat	Descripció	Cost unitari [€]	Unitats	Preu [€]
Compra o arrendament d'equips, instruments i software d'investigació				
Equip de laboratori	Twin Rotor MIMO System	9.014,97	1	9.014,97
Software	Llicència Matlab/Simulink	6000,00	1	6000,00
	Llicència Maple	1245,00	1	1245,00
TOTAL				16.259,97

Taula 10.1: Pressupost d'adquisició d'equips i software d'investigació

10.2. Costos de desenvolupament del projecte

En aquesta partida s'inclou una estimació dels costos que ha suposat la realització d'aquest projecte. Per a això, s'ha considerat el treball de l'enginyer o investigador tant pel que fa a les hores d'investigació i autoaprenentatge, donat l'important pes que han tingut en el correcte desenvolupament del projecte, com les hores dedicades a la implementació dels simuladors i sistemes de control i a l'experimentació amb l'equip de laboratori.

Pel que fa al cost associat a l'ús dels equips, s'ha considerat el consum d'energia elèctrica tenint en compte que el TRMS consumeix 100 W de potència i que s'han dedicat unes 50 hores a l'experimentació amb l'equip. A més, també s'ha inclòs una partida dedicada als costos fixos de manteniment dels equips del laboratori (principalment ordinadors). Segons els responsables, aquesta partida ascendeix a uns 3.000 euros anuals per al conjunt dels equips que s'hi tenen. Aquest valor s'ha dividit entre els 10 ordinadors que es calcula que hi ha funcionant al laboratori, i s'ha calculat la part corresponent als cinc mesos de durada que ha tingut el projecte.

Finalment, s'ha considerat una partida dedicada al material d'oficina i a tota la documentació impresa que s'ha fet servir. El resultat es mostra a la Taula 10.2.

Activitat	Descripció	Cost unitari [€]	Unitats	Preu [€]
A. Personal				
Enginyer/Investigador	Investigació i estudi previs (hores)	15,00	50	750,00
	Desenvolupament i revisió del model (hores)	35,00	30	1050,00
	Implementació del simulador i lab. virtual (hores)	35,00	30	1050,00
	Disseny i implementació del control (hores)	35,00	120	4200,00
B. Equips				
Consum d'energia	kWh consumits	0,13	5	0,65
Manteniment d'equips	Cost mensual de manteniment del lab.	25,00	5	125,00
C. Materials				
Fungibles	Ús de material d'oficina	-	-	20,00
Fotocòpies	Impressió de documentació bibliogràfica	-	-	40,00
TOTAL				7.235,65

Taula 10.2: Pressupost de desenvolupament del projecte

11. Impacte ambiental i econòmic

Si bé és cert que aquest projecte com a tal no presenta una repercussió ambiental o econòmica que pugui ésser considerada directament, la gran versatilitat i efectivitat dels algorismes de control implementats fa que en l'actualitat l'ILC estigui trobant aplicacions molt diverses pel que fa a l'optimització de processos industrials i de generació d'energia, i també pel que fa a la reducció de les emissions de contaminants a l'atmosfera.

Així doncs, en aquest capítol es presenta una breu discussió sobre les qüestions ambientals i econòmiques en què es centra actualment la recerca en l'àmbit de les tècniques de control que s'han exposat en aquest projecte.

En relació a la part de medi ambient, l'ILC està trobant importants aplicacions pel que fa al control del flux actiu en aeronaus, permetent permet millorar el rendiment aerodinàmic i, al mateix temps, disminuir el consum de combustible, les emissions i també el soroll, sobretot en les fases d'enlairament i aterratge [16]. L'ILC també ha estat aplicat satisfactòriament a sistemes de control de processos de combustió amb l'objectiu de maximitzar l'eficiència energètica i de reduir les emissions de gasos contaminants [17]. Finalment, un altre exemple que es pot trobar en la literatura és l'aplicació de sistemes de control basats en aprenentatge molt similars a l'ILC per al control de micro-turbines generadores d'energia eòlica. Els resultats aconseguits són realment potents: s'assoleix una producció d'energia molt propera al punt òptim en només un minut d'execució i sense tenir un model dinàmic previ de les turbines [18].

Pel que fa a l'aspecte econòmic, les aplicacions més freqüents de l'ILC es troben en els robots manipuladors industrials, sistemes rotatius i problemes de control de processos, que són fonamentalment periòdics pel que fa a les tasques a realitzar i a les pertorbacions externes que els afecten [5]. En aquest sentit, l'ILC esdevé una solució d'aplicació relativament poc costosa i que permet augmentar la precisió i la velocitat d'execució de les tasques programades, cosa que es tradueix en un increment de la productivitat i també de la qualitat.

Conclusions i treball futur

En aquest projecte s'ha presentat la implementació d'un sistema de control basat en una estratègia d'aprenentatge coneguda com a *Iterative Learning Control* per a l'obtenció d'una eficiència elevada en el seguiment de trajectòries amb un equip de doble rotor de laboratori, similar a una maqueta d'helicòpter.

Com qualsevol problema de control, la fase inicial s'ha centrat en l'obtenció i la validació d'un model dinàmic del sistema a controlar. A partir de la informació recopilada de nombrosos articles que aborden aquesta temàtica [11], [10], [3], s'ha construït un model dinàmic fent ús de la formulació d'Euler-Lagrange i parant especial atenció a les forces aerodinàmiques provocades pels rotors, que són les principals responsables dels acoblaments existents entre els diferents graus de llibertat del sistema. El model s'ha acabat de completar fent un ajust de paràmetres de forma experimental amb l'equip de laboratori amb què s'ha treballat. És important recalcar, doncs, que les equacions obtingudes han estat adaptades a un sistema concret i inclouen termes que s'haurien de revisar en el cas de treballar amb altres equips. Concretament, aquests termes són els que fan referència al model lineal utilitzat per aproximar els parells exercits pel cable en el pla horitzontal (la constant recuperadora K_a i la posició d'equilibri en l'angle de guinyada q_{h0} , que són pròpies de cada planta). Pel que fa a les corbes estàtiques que relacionen la tensió aplicada als motors amb la velocitat assolida en règim estacionari i les que relacionen la velocitat de rotació de les hèlixs amb les forces de propulsió aerodinàmica generades, es preveu que puguin funcionar correctament amb altres equips, tot i que caldria comprovar la seva validesa.

Un cop definides les equacions de moviment del sistema, s'ha creat i un model de simulació en Matlab/Simulink per al desenvolupament de diferents estratègies de control. Tots els blocs que el componen s'han dotat d'imatges i equacions i han estat incorporats a una llibreria d'aspecte atractiu i molt intuïtiu que es preveu que pugui ser utilitzada en la realització de treballs futurs. En el cas d'aquest projecte, s'ha demostrat que el model de simulació ofereix resultats prou fidels al comportament real del TRMS i que pot ser de gran utilitat a l'hora de dissenyar sistemes de control i avaluar-ne les prestacions abans

d'assajar-lo amb l'equip de laboratori.

Pel que fa a la part de control, inicialment s'ha dissenyat un sistema en cascada que, donades unes posicions de referència, ajusta els parells necessaris a les articulacions del TRMS amb dos controladors tipus PID i, en conseqüència, adapta la velocitat dels motors amb dos controladors PI. Aquest sistema és capaç d'estabilitzar el TRMS en qualsevol posició entorn del punt de treball que s'ha pres com a origen de coordenades, $\mathbf{q} = (0, 0)$, com s'ha demostrat a la secció 7.2 d'aquesta Memòria. No obstant això, els controladors de posició que s'han dissenyat tenen el defecte de fer que la resposta del sistema sigui relativament lenta (en tractar-se de controladors lineals aplicats a un sistema altament no lineal, s'han hagut de prendre ajustos molt conservatius), de manera que no resulten gaire eficients a l'hora de realitzar tasques associades al seguiment de trajectòries.

Per a això, en combinació amb aquests s'ha implementat un sistema basat en l'ILC, el qual permet millorar en gran mesura les prestacions del sistema de control mitjançant la repetició d'una mateixa tasca varis cops, fent que el propi sistema modifiqui les accions de control segons l'error comès en les execucions prèvies. En base a articles i estudis centrats en aquesta temàtica [5], [6], [7], s'ha identificat la consecució de transitoris d'aprenentatge monòtonament convergents com una condició essencial per a assegurar l'estabilitat de forma pràctica. Prenent aquesta premissa com a referència, s'han ajustat uns algorismes d'aprenentatge tipus PD amb el model de simulació abans de procedir a l'experimentació amb el sistema real. Val a dir que, en el cas de la planta amb què s'ha treballat, ha estat necessari dotar les funcions d'aprenentatge de gran robustesa, permetent només la seva actuació a freqüències baixes. Això es deu a que el comportament del TRMS es veu afectat en gran mesura per pertorbacions no periòdiques i per sorolls que fan que el sistema sigui lleugerament oscil·lant i que, si són tinguts en compte per l'ILC, poden provocar que l'aprenentatge no arribi a convergir.

Tot i això, els resultats obtinguts tant en simulació com amb l'equip de laboratori han demostrat l'efectivitat de l'ILC pel que fa a l'augment de la precisió en el seguiment de trajectòries de forma repetitiva. S'ha observat com l'ILC és capaç de reduir la mitjana quadràtica dels errors comesos en més d'un 90% en l'angle de capcineig i entre un 60% i un 70% en l'angle de guinyada. Al seu torn, l'error màxim absolut es disminueix més d'un 85% en l'angle de capcineig i entre un 55% i un 70% en l'angle de guinyada. Si bé és cert que els resultats semblen millors en la posició de capcineig, cal remarcar que el control de guinyada resulta molt més complex ja que es veu afectat per la incertesa en el comportament del cable i pels acoblaments amb el parell reactiu provocat per la rotació de l'hèlix principal.

Així doncs, es pot concloure que els resultats obtinguts amb la implementació del sistema de control basat en l'ILC han estat realment satisfactoris. Les dades experimentals presentades en aquest treball posen de manifest que s'ha complert l'objectiu principal d'aconseguir una efectivitat elevada en el seguiment de trajectòries amb un sistema no lineal i fortament acoblat, característiques que el fan particularment difícil de controlar.

En definitiva, la realització d'aquest projecte ha permès demostrar la capacitat dels algorismes ILC més senzills a l'hora de millorar el rendiment de sistemes que realitzen tasques de manera repetitiva i que requereixen de gran precisió. Tot això, unit a la seva relativa facilitat de disseny i implementació, fa que aquests algorismes de control presentin un gran ventall de possibles aplicacions (robots manipuladors industrials, màquines de control numèric, sistemes de transport en cadenes de muntatge, control de processos químics, processos de manufactura a l'escala micro, sistemes electrònics de control de potència, etc.) i siguin cada cop més estudiats i utilitzats en l'àmbit de l'enginyeria de sistemes i l'automàtica industrial.

Com a treball futur, es proposa l'experimentació amb funcions d'aprenentatge en què els termes creuats de les matrius de guanys proporcionals i derivatius siguin diferents de zero, així com la realització d'un estudi complet sobre l'estabilitat dels algorismes d'aprenentatge implementats. Ja a nivells més avançats, també es podria experimentar amb algorismes d'aprenentatge més complexos que s'han deixat de banda en aquest projecte, tals com els anomenats mètodes d'inversió la planta, que utilitzen models de la dinàmica invertida de la planta com a funcions d'aprenentatge, els mètodes H_∞ , utilitzats en dissenys que busquen una ràpida convergència, o bé el mètode de disseny quadràticament òptim, en què les funcions d'aprenentatge són dissenyades per tal de minimitzar un cost quadràtic associat a la següent iteració atenent a diferents criteris [6].

Agraïments

En primer lloc, donar les gràcies al tutor d'aquest projecte, el professor Ramon Costa Castelló, per tot el material complementari que ha estat facilitat i per haver contribuït en la redacció d'un article per a les *XXXVI Jornades d'Automàtica 2015* sobre la part d'aquest treball dedicada al desenvolupament del model de simulació del Twin Rotor.

Així mateix, agrair a Jesús Chacón Sombría, investigador de la UNED, la seva col·laboració en la posada en marxa del laboratori virtual del TRMS i la seva dedicació a la resolució dels problemes de comunicació entre l'EJS i el Matlab/Simulink.

Donar les gràcies també al Javier Martín i a la Cristina Lampón, responsables dels laboratoris d'Automàtica i de Tecnologia Informàtica de l'ETSEIB, per la seva predisposició a l'hora de facilitar-me l'accés a l'equip amb què s'ha desenvolupat aquest projecte.

I en últim lloc, però no menys important, agrair a l'Anna Barjau Condomines, professora del departament de Mecànica, el temps que ha dedicat amablement a la resolució d'uns dubtes referents al model dinàmic del TRMS.

Finalment, cal dir que la realització d'aquest treball no hagués estat possible sense el suport i l'interès mostrat en tot moment per familiars, amics, companys de classe i de pis i, especialment, per aquelles persones que han estat una mica més properes durant tots aquests mesos: pares, Oscar, Francina. A tots ells, de tot cor, moltes gràcies.

Bibliografia

- [1] U.S. DEPARTMENT OF TRANSPORTATION. FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION. *Helicopter Flying Handbook*. Oklahoma City, 2012, p.3-2 a 3-5.
- [2] MULLHAUPT, PH., SRINIVASAN, B., LÉVINE, J. i BONVIN, D. *Cascade Control of the Toycopter*, European Control Conference, 31 Agost - 3 Setembre 1999, Karlsruhe, Alemanya.
- [3] LÓPEZ-MARTÍNEZ, M., ORTEGA, M.G., VIVAS, C. i RUBIO, F.R. "Control no lineal robusto de una maqueta de helicóptero con rotores de velocidad variable", *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 4(3), Juliol 2007, p. 46-60.
- [4] GARDEN, M. "Learning control of actuators in control systems", U.S. Patent 3555252, 1971.
- [5] AHN, HS., CHEN, YQ., MOORE, K.L. "Iterative Learning Control: Brief Survey and Categorization". *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part C: Applications and Reviews*, 37(6), Novembre 2007, p. 1-24.
- [6] BRISTOW, D.A., THARAYIL, M. i ALLEYNE, A.G. "A Survey of Iterative Learning Control. A learning-based method for high-performance tracking control", *IEEE Control Systems Magazine*, 26(3), Juny 2006, p. 96-114.
- [7] LONGMAN, R.W. "Iterative learning control and repetitive control for engineering practice", *International Journal of Control*, 73(10), Juliol 2000, p. 930-954.
- [8] FEEDBACK INSTRUMENTS. *Twin Rotor MIMO System. Advanced Teaching Manual 1. 33-007-4M5*. Feedback Instruments Ltd., Park Road, Crowborough, East Sussex, TN6 2QR, UK, 1998.
- [9] FEEDBACK INSTRUMENTS. *Twin Rotor MIMO System. Control Experiments. 33-949S*. Feedback Instruments Ltd., Park Road, Crowborough, East Sussex, TN6 2QR, UK, 2006.

- [10] TASTEMIROV, A., LECCHINI-VISINTINI, A. i MORALES, R.M. *Complete dynamic model of the Twin Rotor MIMO System (TRMS) with experimental validation* [en línia]. Disponible a: <http://www2.le.ac.uk/departments/engineering/people/academic-staff/andrea-lecchini-visintini/ERF13.pdf>
- [11] RAHIDEH, A., SHAHEED, M.H. i HUIJBERTS, H.J.C. “Dynamic modelling of a TRMS using analytical and empirical approaches”. *Control Engineering Practice*, Vol. 16, Març 2008, p.241-259.
- [12] MURRAY, R.M., LI, Z. i SASTRY, S.S. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, 1994, p. 51-58.
- [13] HOUGHTON, E.L., i BROCK, A.E. *Aerodynamics for Engineering Students*, 5a edició. Butterworth-Heinemann, 2003, p. 541-549.
- [14] PARK, S., BACK, N. i RYU, K.W. “A Dynamics Model of Rotor Blades for Real-time Helicopter Simulation”, *International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering*, 7(2), Abril 2012, p. 209-220.
- [15] CORKE, P. *Robotics, Vision and Control. Fundamental Algorithms in MATLAB*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, p. 43-48.
- [16] CAI, Z., CHEN, P., ANGLAND, D., i ZHANG, X. *A Position Based Iterative Learning Control Applied to Active Flow Control*, 2013 American Control Conference, 17-19 Juny 2013, Washington DC, Estats Units.
- [17] CHEN, J., SU, L.S., MUNOZ, J. i CHENG, Y.C. *Image Distribution Model Based Iterative Learning Control for Combustion Processes*, 6th International Conference on Process Systems Engineering (PSE ASIA), 25-27 Juny 2013, Kuala Lumpur, Malàisia.
- [18] KOLTER, J.Z., JACKOWSKI, Z., TEDRAKE, R. *Design, Analysis, and Learning Control of a Fully Actuated Micro Wind Turbine*, 2012 American Control Conference, 27-29 Juny 2012, Montreal, Canadà.