Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing. (2010) 26: 163-170

Construyendo soluciones en serie de potencias de modelos diferenciales aleatorios

L. Villafuerte · J.C. Cortés · L. Jódar

Recibido: Marzo 2010, Aceptado: Abril 2010
©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

Resumen En este artículo se construyen soluciones analítico-numéricas de ecuaciones diferenciales lineales aleatorias a través de métodos basados en series de potencias y se dan condiciones suficientes para garantizar la convergencia en media cuadrática de dichas series. A partir de la truncación de las series construidas se calculan aproximaciones de las funciones media y varianza del proceso solución de los modelos diferenciales estudiados. El artículo concluye mostrando diferentes ejemplos ilustrativos donde se comparan los resultados que se obtienen con la técnica aquí desarrollada con respecto a los proporcionados por métodos tipo Monte Carlo.

CONSTRUCTING POWER SERIES SOLUTIONS FOR RANDOM DIFFERENTIAL MODELS

Summary This paper deals with the construction of analytic-numerical solutions of random linear differential equations by means of a power series method. Sufficient conditions for the mean square convergence of the series solution are established. The mean and variance functions of the approximate solution stochastic process are also computed. Lastly, several illustrative examples where the proposed method is compared with respect to Monte Carlo approximations are included.

L. Villafuerte
Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
Calle 4^a Ote. Nte. 1428, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México
e-mail: laura.villafuerte@unach.mx

J.C. Cortés · L. Jódar
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universidad Politécnica de Valencia
Edificio 8G, 46022, Valencia, España
e-mail: jccortes@imm.upv.es; ljodar@imm.upv.es

1. Introducción

Durante los últimos años, los esfuerzos en la modelización matemática de sistemas se han orientado hacia la producción de herramientas y técnicas capaces de aproximar mejor los fenómenos reales objeto de estudio, lo que supone la consideración en dichos modelos de los factores aleatorios inherentes a la propia complejidad del mundo real. Más aún, el estudio de dichos fenómenos muchas veces se basa en la medición de magnitudes, lo que acarrea la posibilidad de la introducción de errores de medida de los propios aparatos de medida. Durante los últimos años, las ecuaciones diferenciales aleatorias han demostrado ser una potente herramienta para modelizar fenómenos reales complejos en cuya formulación subyace implícitamente la introducción de la aleatoriedad por los motivos previamente señalados. Este tipo de ecuaciones son ecuaciones diferenciales donde la aleatoriedad se puede introducir a través de las condiciones iniciales, el término independiente y/o los coeficientes de dichas ecuaciones. Como consecuencia de ello, las soluciones de dichas ecuaciones son procesos estocásticos, en lugar de funciones determinísticas. Durante las últimas dos décadas, la investigación en el campo de las ecuaciones diferenciales aleatorias se ha intensificado notablemente, fruto de lo cual, se han desarrollado métodos tanto analíticos como numéricos para abordar la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales que aparecen en la modelización de problemas en áreas tan diversas como la física, la química, la biología, la economía, la sociología, la psicología, la medicina o la ingeniería, [1], [2], [3], [4].

En este artículo se presenta un método de resolución basado en serie de potencias para problemas de valor inicial de la forma

$$\dot{X}(t) = AX(t), \qquad X(0) = X_0, \tag{1}$$

donde tanto el coeficiente A como la condición inicial X_0 son variables aleatorias. En los trabajos previos [5], [6], se desarrolló un cálculo operacional apropiado para justificar que ciertos procesos estocásticos previamente propuestos son soluciones del modelo (1). A diferencia de este enfoque, en este artículo se construyen procesos estocásticos solución de dicho modelo a través de series de potencias aleatorias y, siguiendo las ideas presentadas en [5], se establecerá su convergencia en el sentido de la media cuadrática. Además de determinar el proceso estocástico solución en forma de serie, es también de interés en las aplicaciones obtener información sobre su comportamiento estadístico calculando sus principales funciones estadísticas como son la media y la varianza. Para alcanzar este objetivo, se truncará la serie de potencias solución y se obtendrán aproximaciones de dichas funciones estadísticas, garantizando que dichas aproximaciones convergen a los correspondientes valores exactos. Para ilustrar la validez del método, se propondrán diferentes ejemplos del modelo (1) donde se calcularán las funciones media y varianza del proceso estocástico solución, comparando los resultados con los obtenidos utilizando las técnicas Monte Carlo, así como los correspondientes a los valores exactos. Los ejemplos muestran que la técnica aquí propuesta mejora los resultados que se obtienen mediante Monte Carlo, la cual constituye en la práctica uno de los métodos más habitualmente empleados [7].

Este artículo está organizado del siguiente modo: en el Apartado 2 se resumen las principales definiciones, propiedades y resultados del cálculo en media cuadrática, los cuales pueden encontrarse en [1]. Motivados por la construcción de procesos solución en forma de serie de potencias del modelo (1), en el Apartado 2 se introducen algunos resultados del denominado cálculo estocástico de orden cuatro (*mean fourth stochastic calculus*), el cual se requiere para garantizar la convergencia en media cuadrática de los procesos solución construidos en forma de serie de potencias del modelo (1); esto está expuesto en el Apartado 3. Las aproximaciones de las principales funciones estadísticas tales como la media y la varianza del proceso solución exacto del modelo (1) se calculan en el Apartado 3. El trabajo concluye con el Apartado 4 donde se muestran dos ejemplos ilustrativos de la técnica propuesta.

2. Preliminares

Para mayor claridad en la exposición, este apartado empieza con una revisión de algunos resultados importantes pertenecientes al cálculo estocástico en media cuadrática que se necesitarán más tarde. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, una variable aleatoria real X definida sobre dicho espacio que cumple la condición $\mathrm{E}\big[X^2\big] < +\infty$, se denomina una variable aleatoria de segundo orden (2-v.a.), donde E denota el operador esperanza. El conjunto L_2 de todas las 2-vs.as. dotado de la norma $\|X\|_2 = \sqrt{\mathrm{E}[X^2]}$ tiene estructura de espacio de Banach [1, Chap 4]. Un hecho importante para el objetivo de este trabajo es que esta norma no satisface la desigualdad de Banach, i.e., $\|XY\|_2 \leq \|X\|_2\|Y\|_2$, [5]. Sin embargo, si X e Y son vs.as. independientes entonces $\|XY\|_2 = \|X\|_2\|Y\|_2$.
Un proceso estocástico $\{X(t) : t \in T\}$, siendo T un intervalo cerrado de la recta real $\mathbb{R}$, se denomina de segundo orden (y en lo sucesivo lo denotaremos abreviadamente por 2-p.e.) si, para cada $t \in T$, $X(t)$ es una 2-v.a. Una sucesión de 2-vs.as. $\{X_n : n \geq 0\}$ es convergente en media cuadrática (m.c.) en L_2 a la 2-v.a. X cuando $n \to \infty$ si

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_2 = 0\,.$$

Esta convergencia se denotará por $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.c.}} X$.
Dado un 2-p.e. $\{X(t) : t \in T\}$, siempre se le puede asociar dos funciones determinísticas que describen su comportamiento estadístico. La primera, denominada función media, $\mu_X(t) = \mathrm{E}[X(t)]$ proporciona el comportamiento estadístico medio del proceso sobre el dominio T. La función varianza está dada por

$$\mathrm{Var}[X(t)] = \mathrm{E}\Big[\left(X(t)\right)^2\Big] - \left(\mu_X(t)\right)^2, \tag{2}$$

y mide la dispersión del proceso con respecto a su función media. Esta función se denotará por $\sigma_X^2(t)$.
Un 2-p.e. $\{X(t) \colon t \in T\}$ es continuo en media cuadrática (ó m.c. continuo) en el punto $t \in T$, si $X(t+\Delta t) \xrightarrow[\Delta t\to 0]{\text{m.c.}} X(t)$, donde $t + \Delta t \in T$.
El 2-p.e. $\{\dot{X}(t) \colon t \in T\}$ es la m.c. derivada del proceso $\{X(t) \colon t \in T\}$ si

$$\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{\text{m.c.}} \dot{X}(t) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \left\| \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} - \dot{X}(t) \right\|_2 = 0\,.$$

Ejemplo 1 *Consideremos el 2-p.e. $X(t) = At^n$, donde A es una 2-v.a. y $t \in T$. La m.c. derivada de $X(t)$*

está dada por $\dot{X}(t) = Ant^{n-1}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t\to 0}\left\| \frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} - \dot{X}(t)\right\|_2 \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\left\| \frac{A(t+\Delta t)^n - At^n}{\Delta t} - Ant^{n-1}\right\|_2 \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\|A\|_2 \left| \frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t} - nt^{n-1}\right| = 0,
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos aplicado que $\|A\|_2 < \infty$ (ya que $A \in L_2$) y la diferenciabilidad de la función determinística $f(t) = t^n$.

Para cada 2-p.e. $\{X(t) : t \in T\}$ dos veces m.c. diferenciable sobre T, se puede demostrar que la media de sus dos primeras m.c. derivadas siempre existen y están dadas por

$$\mathrm{E}\left[\dot{X}(t)\right] = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{E}\left[X(t)\right]\right), \quad \mathrm{E}\left[\ddot{X}(t)\right] = \frac{d^2}{dt^2}\left(\mathrm{E}\left[X(t)\right]\right) \quad \forall\, t \in T, \qquad (3)$$

donde $\frac{d}{dt}$ y $\frac{d^2}{dt^2}$ denotan la primera y la segunda derivadas determinísticas, respectivamente. Este resultado puede ser extendido a la m.c. derivada de orden n siempre que $\{X(t) : t \in T\}$ sea n veces m.c. diferenciable sobre T (véase [1, p.97]).

En el último apartado, el siguiente resultado jugará un papel crucial para garantizar que la esperanza y la varianza de los procesos aproximantes de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales aleatorias construidos por métodos analítico-numéricos convergen a las soluciones teóricas correspondientes.

Lema 1 *([1, p.88]) Sean $\{X_n : n \geq 0\}$ e $\{Y_n : n \geq 0\}$ dos sucesiones de 2-vs.as. m.c. convergentes a las 2-vs.as., X e Y, respectivamente, i.e.,*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.c.} X \qquad , \qquad Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.c.} Y.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n Y_n] = \mathrm{E}[X\, Y]\,.$$

Nota 1 *Obsérvese que bajo las hipótesis del Lema 1, si $Y_n = 1$, se tiene que $\mathrm{E}[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{E}[X]$, y si $Y_n = X_n$, entonces $\mathrm{E}[(X_n)^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{E}[X^2]$, y por tanto $\mathrm{Var}[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} Var[X]$.*

Si X e Y son 2-vs.as., la desigualdad de Schwarz establece que

$$\mathrm{E}[\,|X\,Y|\,] \leq \left(\mathrm{E}\left[X^2\right]\right)^{1/2} \left(\mathrm{E}\left[Y^2\right]\right)^{1/2}. \qquad (4)$$

Más tarde se necesitará la siguiente propiedad básica

$$AX_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.c.}} AX, \qquad (5)$$

la cual se cumple si $A \in L_2$, $\{X_n : n \geq 0\}$ es una sucesión de 2-vs.as. tales que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.c.}} X$ y, A y X_n son vs.a.s independientes para cada n. Sin embargo, la hipótesis de independencia no puede asumirse en muchos escenarios de interés práctico tales como los que se considerarán más adelante en las aplicaciones. Esto motiva la introducción de otro tipo de vs.as. X tales que $\mathrm{E}\left[X^4\right] < +\infty$, las cuales se denominan 4-vs.as. Obsérvese que una 4-v.a. es siempre una 2-v.a. El conjunto L_4 de todas las 4-vs.as. dotado de la norma $\|X\|_4 = \sqrt[4]{\mathrm{E}[X^4]}$ es un espacio de Banach (véase [2, p.9]). Un p.e. $\{X(t) \colon t \in T\}$, donde $\mathrm{E}\left[(X(t))^4\right] < +\infty$ para todo $t \in T$, se denomina un 4-p.e.

Definición 1 *Una sucesión de 4-vs.as. $\{X_n : n \geq 0\}$ se dice que es convergente en el sentido de la media cuarta a una 4-v.a. X si*

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_4 = 0.$$

Este tipo de convergencia se denotará $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.f.} X$. Para evitar confusiones con la m.c. convergencia, usaremos la abreviatura sajona m.f. para este tipo de convergencia.

El siguiente lema establece la conexión entre los dos tipos de convergencia previamente introducidas.

Lema 2 *Sea $\{X_n : n \geq 0\}$ una sucesión de 4-vs.as. y supongamos que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.f.} X$. Entonces $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.c.} X$.*

Prueba. Aplicando la desigualdad de Schwarz (4), se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\|X_n - X\|_2\right)^2 &= \mathrm{E}\left[1 \times (X_n - X)^2\right] \leq 1 \times \left(\mathrm{E}\left[(X_n - X)^4\right]\right)^{1/2} \\
&= \left(\|X_n - X\|_4\right)^2.
\end{aligned}$$

Como $\|X_n - X\|_4 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (ya que X_n es m.f. convergente a X), se deduce que $\|X_n - X\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y por tanto $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.c.}} X$.

Ahora, podemos dar condiciones suficientes para que la propiedad (5) se cumpla sin exigir ninguna hipótesis de independencia.

Lema 3 *Sea A una 2-v.a. y $\{X_n : n \geq 0\}$ una sucesión de 4-vs.as. tales que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.f.} X$. Entonces $AX_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.c.} AX$.*

Prueba. Por una parte, por la definición de la norma $\|\cdot\|_2$, se tiene

$$\left(\|A(X_n - X)\|_2\right)^2 = \mathrm{E}\left[A^2 (X_n - X)^2\right]. \qquad (6)$$

Por otra parte, la hipótesis $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.f.}} X$ implica por definición que $(X_n - X)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.c.}} 0$ y, como claramente $A^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.c.}} A^2$, entonces por (6) y el Lema 1 se obtiene $\|A(X_n - X)\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y por tanto $AX_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.c.}} AX$.

En el siguiente lema introducimos la clase de vs.as. A a través de las cuales introduciremos la incertidumbre en la ecuación diferencial del modelo (1).

Lema 4 *Sea $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Supongamos que la v.a. A satisface la siguiente propiedad*

$$\|A^{n+1}\| = O(n^p)\|A^n\|, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad p \geq 0, \tag{7}$$

siendo $\|A^{n_0}\| < +\infty$. Entonces, existen constantes no negativas H y M tales que

$$\|A^n\| \leq HM^{n-1}((n-1)^p)!, \qquad \forall n \geq n_0+1, \qquad p \geq 0. \tag{8}$$

Prueba. La hipótesis (7) significa que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|A^{n+1}\| \leq Mn^p\|A^n\|, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Utilizando esta desigualdad recursivamente, se obtiene

$$\|A^{n+1}\| \leq \frac{M^{-n_0+1}}{((n_0-1)!)^p} M^n (n!)^p \|A^{n_0}\|, \ \forall n \geq n_0.$$

Teniendo en cuenta que $\|A^{n_0}\|$ es finita y haciendo $H = \|A^{n_0}\| \frac{M^{-n_0+1}}{((n_0-1)!)^p}$ en la expresión anterior, se concluye la demostración.

En los ejemplos del último apartado mostraremos que importantes vs.as. como las gaussianas o las gamma satisfacen la propiedad (7).

El siguiente resultado muestra cómo se puede calcular la esperanza de una función de una v.a. continua X con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$, sin que primero sea necesario determinar su distribución

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx. \tag{9}$$

En particular, si $g(x) = x$ a partir de (9) se puede calcular la $\mathrm{E}[X]$ y, si $g(x) = x^2$ teniendo en cuenta (2), se puede obtener la varianza.

Esta sección concluye con el enunciado de un resultado de diferenciación sobre la m.c. convergencia de series, el cual puede encontrarse en [3].

Proposición 1 *Supongamos que para $n \geq 1$, el proceso $\{X_n(r) : r \in I\}$ satisface*

i) $X_n(r)$ es m.c. diferenciable y $\dot{X}_n(r)$ es m.c. continuo,

ii) $X(r) = \sum_{n\geq 1} X_n(r)$ es m.c. convergente,

iii) $\sum_{n\geq 1} \dot{X}_n(r)$ es uniformemente m.c. convergente en un entorno de cada $r \in I$.

Entonces, para cada $r \in I$, $X(r)$ es m.c. diferenciable y $\dot{X}(r) = \sum_{n\geq 1} \dot{X}_n(r)$.

3. Soluciones en serie de potencias aleatorias y principales funciones estadísticas

En esta sección construiremos una solución en serie de potencias aleatoria del modelo (1), mediante el método de Frobenius. Para esto, buscaremos una solución formal de la forma:

$$X(t) = \sum_{n\geq 0} X_n t^n, \tag{10}$$

donde X_n son vs.as a determinar. Utilizando el Ejemplo 1, la m.c. derivada formal de $X(t)$ está dada por

$$\dot{X}(t) = \sum_{n\geq 0} (n+1) X_{n+1} t^n. \tag{11}$$

Haciendo que (10)-(11) satisfaga la ecuación diferencial aleatoria (1) resulta

$$\sum_{n\geq 0} (n+1) X_{n+1} t^n = \sum_{n\geq 0} A X_n t^n. \tag{12}$$

Obsérvese que en el último paso, se ha supuesto que la serie (10) satisface las hipótesis del Lema 3, lo cual justifica la conmutación de la v.a. A y la suma infinita. Luego de (12) se obtiene

$$\sum_{n\geq 0} \left[(n+1)X_{n+1} - AX_n\right] t^n = 0.$$

Por lo tanto, un proceso candidato m.c. solución del problema (1) se obtiene imponiendo

$$X_{n+1} = \frac{1}{n+1} A X_n, \quad n \geq 0,$$

de donde se obtiene los coeficientes X_n en términos de los datos

$$X_n = \frac{1}{n!} A^n X_0, \quad n \geq 0.$$

En lo que sigue mostraremos que

$$X(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} A^n X_0 t^n, \tag{13}$$

es también una solución rigurosa. En principio justificaremos la conmutación en (12). En virtud del Lema 2, es suficiente ver que la serie (13) es m.f. convergente. Para esto, supondremos sin pérdida de generalidad en el Lema 3 que $n_0 = 0$, luego por la independencia de las 4-vs.as A y X_0 y la suposición que A satisface la condición (7) dada en el Lema 4 se infiere

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\|A^n X_0\|_4|t|^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\|A^n\|_4\|X_0\|_4|t|^n$$
$$\leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}HM^{n-1}((n-1)!)^p\|X_0\|_4|t|^n. \quad (14)$$

Haciendo $\gamma_n^{(p)} = \frac{1}{n!}HM^{n-1}((n-1)!)^p\|X_0\|_4|t|^n$ y utilizando la prueba de D'Alembert se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1}^{(p)}}{\gamma_n^{(p)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{M|t|n^p}{n+1} = \begin{cases} M|t| & \text{if } p = 1, \\ 0 & \text{if } p < 1, \forall t. \end{cases} \quad (15)$$

De (14) y (15) concluimos que la serie (13) es absolutamente m.f. convergente en toda la recta real, si $p < 1$ y, en el dominio $|t| < 1/M$ si $p = 1$. Notemos que por el Lema 2 la serie dada por (13) es también m.c. convergente. Más aún, el argumento anterior justifica la m.c. convergencia uniforme de la serie dada en (13), así como también su derivada formal (11) en cualquier intervalo cerrado en el dominio de convergencia. Entonces, del Teorema 1, la derivada en (11) es rigurosa.

Nota 2 *Observe que la 4-norma es también no submultiplicativa como la 2-norma, pero si X y Y son 4-vs.as independientes, entonces, $\|XY\|_4 = \|X\|_4\|Y\|_4$. Esta última propiedad se aplicó en (14).*

En resumen se ha probado el siguiente resultado:

Teorema 1 *Considere el problema de valor inicial (1), donde A satisface la condición (7) para la 4-norma y X_0 es una 4-v.a. independiente de A. Entonces (13) es una m.c. solución de (1). Más aún, el dominio de convergencia de la serie de potencias aleatoria (13) depende del valor p asociado a la v.a. A mediante la condición (7).*

En la práctica, es interesante no sólo la obtención del proceso solución del problema de valor inicial (1), si no también las principales funciones estadísticas; media y varianza. Para esto truncaremos la serie dada en (13), entonces

$$X_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}A^n X_0 t^n,$$

de la independencia de A y X_0 se sigue

$$\mathrm{E}\left[X_N(t)\right] = \mathrm{E}\left[X_0\right] \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\mathrm{E}\left[A^n\right] t^n, \quad (16)$$

$$\mathrm{E}\left[(X_N(t))^2\right] = \mathrm{E}\left[(X_0)^2\right] \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\mathrm{E}\left[A^{2n}\right] t^{2n}}{(n!)^2} + 2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\mathrm{E}\left[A^{n+m}\right] t^{n+m}}{n!m!}\right). \quad (17)$$

Puesto que ya probamos que la serie (13) es m.c. convergente, una importante consecuencia del Lema 1 es que (16) y (17) nos permiten calcular aproximaciones que convergen a la función media y varianza teórica, respectivamente, cuando $N \to +\infty$.

Nota 3 *Puesto que la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}A^n t^n$ es m.c. convergente, por [6], esta define el proceso exponencial e^{At}, en consecuencia, la m.c. solución dada en (13) se puede escribir como $X(t) = X_0\mathrm{e}^{At}$. Este trabajo se relaciona con [6], puesto que ambos permiten definir el proceso exponencial como una m.c. solución del modelo diferencial aleatorio (1). Sin embargo, es importante señalar que ahora se propone un método constructivo basado en el desarrollo aleatorio de Frobenius, mientras que en [6], se propone un m.c. candidato solución y se requieren reglas de derivación (veáse Teorema 8, [6]) para probar que el proceso exponencial satisface el problema de valor incial (1). Note que las hipótesis de ambos métodos son compatibles.*

4. Ejemplos y conclusiones

Muchos problemas de la física, biología e ingeniería se modelan a través de la ecuación diferencial (1). Por ejemplo, el problema de crecimiento o descenso poblacional, donde se supone que la tasa de cambio de la población de cierta especie en el tiempo t, $\frac{dP}{dt}$, es proporcional a la población P, esto es, $\frac{dP}{dt} = kP$, siendo k el parámetro que mide la diferencia entre las especies muertas y vivas en el tiempo t. Es claro que en este parámetro k, están involucradas las tasas de cambio del nacimiento y muerte de la población, que a su vez están influenciadas por muchos factores, como el clima, agua, epidemias, restricciones de espacio, comida, etc. Estos factores evidencian que el parámetro k debe modelarse como una v.a. en lugar de un valor determinista. Más aún, la población inicial P_0 debería ser considerada como una v.a. puesto que en la práctica este dato no se conoce con certeza, veáse [4]. Otros problemas que se modelan mediante (1) se pueden encontrar en termodinámica. De hecho, en muchas situaciones físicas el cambio de temperatura T de un cuerpo se supone proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo T y la temperatura α del medio que lo rodea. Si $\alpha = 0$, entonces $\frac{dT}{dt} = kT$, donde el parámetro k como la condición inicial T_0 deben ser de nuevo consideradas como vs.as por errores de medición. Varios ejemplos similares se puede citar relacionados a situaciones físicas como evaporación y problemas de difusión. Los próximos ejemplos se centrarán en el problema de dinámica poblacional, cuyo objetivo primordial será clarificar la teoría expuesta en la sección anterior.

Ejemplo 2 *Consideremos el modelo de dinámica poblacional dado por la ecuación diferencial aleatoria de valor inicial (1), donde k se modela mediante una v.a. normal $A \sim N(0\,;1)$ y la población inicial X_0 se considera como una v.a. independiente de A tal que $E[X_0] = 1$ y $E[(X_0)^2] = 2$. A modo de obtener la esperanza y varianza del proceso solución, se debe verificar que A satisface la condición (7). En efecto*

$$\frac{\|A^{n+1}\|_4}{\|A^n\|_4} = \sqrt[4]{\frac{(4n+4)!\,2^{2n}(2n)!}{(4n)!\,2^{2n+2}(2n+2)!}} = \sqrt[4]{16n^2+16n+3} = O(n^{1/2}),$$

donde se utilizó que $\mathrm{E}\left[A^{2k}\right] = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$. *De (16) y (17) se obtiene*

$$\mathrm{E}[X_N(t)] = \sum_{n=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{t^{2n}}{2^n n!}, \tag{18}$$

donde $[\cdot]$ *denota la función parte entero y*

$$\mathrm{E}\left[(X_N)^2\right] = 4\sum_{r=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\sum_{s=0}^{r-1} \frac{(2(r+s+1))!\,t^{2(r+s+1)}}{2^{r+s+1}(2s+1)!(2r+1)!(r+s+1)!}$$
$$4\sum_{r=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\sum_{s=0}^{r-1} \frac{(2(r+s))!\,t^{2(r+s)}}{2^{r+s}(2s)!(2r)!(r+s)!}$$
$$2\sum_{n=0}^{N} \frac{(2n)!\,t^{2n}}{(n!)^3 2^n} \quad si \quad N \text{ es impar}, \tag{19}$$

y

$$\mathrm{E}\left[(X_N)^2\right] = 4\sum_{r=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]}\sum_{s=0}^{r-1} \frac{(2(r+s+1))!\,t^{2(r+s+1)}}{2^{r+s+1}(2s+1)!(2r+1)!(r+s+1)!}$$
$$4\sum_{r=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\sum_{s=0}^{r-1} \frac{(2(r+s))!\,t^{2(r+s)}}{2^{r+s}(2s)!(2r)!(r+s)!}$$
$$2\sum_{n=0}^{N} \frac{(2n)!\,t^{2n}}{(n!)^3 2^n} \quad si \quad N \text{ es par}. \tag{20}$$

En la Tabla 1 se muestra la esperanza de la población dada por (18) para diferentes valores del orden de truncación $N = 5, 10, 15$ y puntos selectos en el intervalo $t \in [0, 2]$. Las columnas $\mu_X^{50000}(t)$ y $\mu_X^{100000}(t)$ contienen las aproximaciones de la esperanza utilizando el método de Monte Carlo con 50000 y 100000 simulaciones para las vs.as A y X_0. Como en este caso se conoce la solución teórica, veáse Nota 3, se obtiene $\mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X_0]\mathrm{E}[e^{At}] = e^{t^2/2}$, de aquí se comparan los resultados aproximados con los teóricos. Note, que la convergencia en este caso de $\mathrm{E}[X_N(t)] \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{E}[X(t)]$ es en toda la recta real, además para cada t, y N fijos las aproximaciones $\mathrm{E}[X_N(t)]$ mejoran para puntos t cerca del origen $t = 0$, donde la solución aleatoria en forma de serie de potencias está centrada. Se observa que el método de Monte Carlo mejora sus aproximaciones de la esperanza cuando el número de simulaciones crece de 50000 a 100000, pero desde el punto de vista computacional, el método de truncación por serie es mejor, puesto que es más exacto usando valores de truncación pequeños, más aún este ahorra tiempo computacional. En la Tabla 2, se muestra los resultados de la varianza de la población, los cálculos se obtienen de (19)-(20). Aquí $\sigma_X^{2;m}(t)$ denota las aproximaciones de la varianza obtenidas a partir del método de Monte Carlo para m simulaciones. Note que la varianza exacta dada por $\mathrm{Var}[X(t)] = e^{t^2}\left(2e^{t^2}-1\right) > 0$. Comentarios similares que la esperanza en el caso computacional, se pueden hacer para la varianza de ambos métodos.

Ejemplo 3 *Consideremos el modelo de dinámica poblacional (1), pero ahora supongamos que A es una v.a con distribución Gamma de parámetros $r > 0$, $a > 0$, es decir, $A \sim Ga(r; a)$, y la población inicial X_0 es una 4-v.a. independiente de la 4-v.a. A tal que $\mathrm{E}[X_0] = 1$ y $\mathrm{E}\left[(X_0)^2\right] = 2$. En este caso A satisface la condición (7) para la 4-norma con $p = 1$. De hecho*

$$\frac{\|A^{n+1}\|_4}{\|A^n\|_4} = \sqrt[4]{\frac{(r+4n)(r+4n+1)(r+4n+2)(r+4n+3)}{a^4}} = O(n), \tag{21}$$

donde se ha usado que para $A \sim Ga(r; a)$

$$\mathrm{E}\left[A^k\right] = \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)}{a^k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

De (21) el valor M en (8) puede ser escogido más grande que $4/a$, por lo tanto por (15) se puede asegurar que la serie solución de potencias aleatoria dada en (13) es m.c. convergente para $|t| < a/4$. Observe que el dominio de convergecia de la serie solución crece cuando el parámetro a crece, independientemente del parámetro r. En consecuencia de (16)-(17) y Nota 1 los momentos

$$\mathrm{E}\left[X_N(t)\right] = \sum_{n=0}^{N} \frac{(r+n-1)!\,t^n}{n!(r-1)!a^n}, \tag{22}$$

Tabla 1. Esperanza exacta y aproximada del Ejemplo 2 con $A \sim \mathrm{N}(0;1)$

t	$\mathrm{E}[X_5(t)]$	$\mathrm{E}[X_{10}(t)]$	$\mathrm{E}[X_{15}(t)]$	$\mu_X^{50000}(t)$	$\mu_X^{100000}(t)$	$\mathrm{E}[X(t)]$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.01225	1.00299	1.0000
0.20	1.0202	1.0202	1.0202	1.01759	1.02309	1.0202
0.40	1.0832	1.08329	1.08329	1.07993	1.08598	1.08329
0.60	1.1962	1.19722	1.19722	1.19302	1.19954	1.19722
0.80	1.3712	1.37713	1.37713	1.37275	1.3786	1.37713
1.00	1.6250	1.64870	1.64872	1.64661	1.64805	1.64872
1.20	1.9792	2.05422	2.05443	2.0612	2.04814	2.05443
1.40	2.4602	2.66303	2.66443	2.69619	2.64347	2.66446
1.60	3.0992	3.58921	3.59643	3.6907	3.5375	3.59664
1.80	3.9322	5.02075	5.05166	5.29397	4.89525	5.05309
2.00	5.0000	7.26667	7.38095	7.96505	6.97603	7.38906

Tabla 2. Varianza exacta y aproximada para el Ejemplo 2 con $A \sim \mathrm{N}(0;1)$

t	$\mathrm{Var}[X_5(t)]$	$\mathrm{Var}[X_{10}(t)]$	$\mathrm{Var}[X_{15}(t)]$	$\sigma_X^{2;50000}(t)$	$\sigma_X^{2;100000}(t)$	$\mathrm{Var}[X(t)]$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	0.995243	1.00269	1.0000
0.20	1.12576	1.12576	1.12576	1.12245	1.12674	1.12576
0.40	1.58029	1.58074	1.58074	1.59068	1.57785	1.58074
0.60	2.66475	2.67553	2.67554	2.70583	2.66201	2.67554
0.80	5.16854	5.29649	5.29680	5.51251	5.24664	5.29688
1.00	11.0219	12.0513	12.0598	13.2413	11.8691	12.0598
1.20	24.7395	31.2506	31.4068	37.305	30.6881	31.4079
1.40	56.3908	91.5262	93.6678	121.849	91.4166	93.7016
1.60	127.334	297.066	320.892	451.471	319.45	321.735
1.80	280.676	1035.76	1261.56	1846.27	1332.75	1278.41
2.00	599.400	3741.12	5622.86	8118.9	6629.60	5907.32

Tabla 3. Esperanza exacta y aproximada del Ejemplo 3 con $A \sim Ga(r=1;a=2)$

t	$\mathrm{E}[X_{20}(t)]$	$\mathrm{E}[X_{30}(t)]$	$\mathrm{E}[X_{40}(t)]$	$\mu_X^{50000}(t)$	$\mu_X^{100000}(t)$	$\mathrm{E}[X(t)]$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	0.994639	0.999233	1.0000
0.25	1.14286	1.14286	1.14286	1.13788	1.14185	1.14286
0.50	1.33333	1.3333	1.3333	1.3289	1.3323	1.3333
0.75	1.6000	1.6000	1.6000	1.59522	1.59912	1.6000
1.00	2.0000	2.0000	2.0000	1.98796	1.99703	2.0000
1.25	2.66653	2.66667	2.66667	2.60862	2.64002	2.66667
1.50	3.99049	3.99946	3.99997	3.67272	3.78619	4.000
1.75	7.51554	7.87255	7.96647	5.66778	6.0675	8.000
2.00	21.000	31.000	41.000	9.76052	11.1415	divergent
2.25	86.9058	300.19	992.791	18.8786	23.610	divergent
2.50	429.681	4034.97	37611.8	40.6549	56.843	divergent
2.75	2136.9	51680.9	1.24847×10^6	95.5911	151.087	divergent
3.00	9973.77	575251.0	3.3172×10^7	240.002	430.89	divergent

$$\mathrm{E}\left[(X_N(t))^2\right] = 2\sum_{n=0}^{N}\frac{(r+2n-1)!\,t^{2n}}{a^{2n}(n!)^2(r-1)!} + 4\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(r+n+m-1)!\,t^{n+m}}{n!m!(r-1)!a^{n+m}}, \quad (23)$$

también convergen en el mismo dominio cuando $N \to +\infty$. *Es importante señalar que en la práctica, el dominio de convergencia para la aproximación de la esperanza en (22) puede ser más grande que* $|t| < a/4$. *Este hecho se sigue de la propia definición de m.c. convergencia. En este caso es fácil verificar por el criterio de D'Alembert que (22) converge para* $|t| < a$. *La Tabla 3 ilustra esta situación cuando* $A \sim Ga(r=1;a=2)$. *Aquí, el domino de convergencia para la esperanza dada en (22) se presenta en* $|t| < 2$. *Mientras que la Tabla 4 muestra que la aproximación de la varianza de las ecuaciones (23) y (22) converge para* $|t| < 1$. *Para los cálculos de la esperanza* $\mathrm{E}[X(t)]$ *y varianza* $\mathrm{Var}[X(t)]$ *teórica en las Tablas 3 y 4, se usaron las formulas (9) y (2). En ambas Tablas, se observa mejores resultados utilizando nuestro método que el método de Monte Carlo. Finalmente, note que el proceso exponencial* e^{At} *con*

Tabla 4. Varianza exacta y aproximada para el ejemplo 3 con $A \sim Ga(r=1; a=2)$

t	$\mathrm{Var}[X_{20}(t)]$	$\mathrm{Var}[X_{30}(t)]$	$\mathrm{Var}[X_{40}(t)]$	$\sigma_X^{2;50000}(t)$	$\sigma_X^{2;100000}(t)$	$\mathrm{Var}[X(t)]$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	0.999724	0.9996	1.0000
0.25	1.3605	1.3605	1.3605	1.36553	1.36139	1.3605
0.50	2.2222	2.2222	2.2222	2.22092	2.22561	2.2222
0.75	5.43967	5.4400	5.4400	4.85051	5.07959	5.4400
1.00	69.710	107.485	145.594	15.9162	18.9778	divergent
1.50	2.2949×10^{7}	6.40172×10^{10}	1.8704×10^{14}	508.132	927.164	divergent
3.0	6.8158×10^{18}	1.9486×10^{28}	5.8964×10^{37}	$2{,}44065\times10^{8}$	$1{,}5241\times10^{9}$	divergent

$A \sim Ga(r;a)$ está solamente definido para $|t| < a/4$, por lo tanto el dominio de definición e^{At} en este caso, crece, cuando el parámetro a crece.

En resumen, en este trabajo se introdujo un método basado en el desarrollo de Frobenius para construir una solución en forma de serie de potencias aleatoria para modelos lineales de la forma (1), lo que permitió introducir el proceso exponencial mediante la truncación de una serie solución. También se obtuvo de forma explícita aproximaciones de las funciones esperanza y varianza que convergen a sus respectivas funciones teóricas. Además, mediante varios ejemplos se comparó estas aproximaciones con las que se obtienen a través del Método de Montecarlo, y concluímos que el método aquí propuesto provee mejores resultados. Se mostró que en contraste con el caso determinista, el proceso exponencial $e^{At} = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!} t^n$ no converge en toda la recta real para cualquier v.a. A. En efecto, si A es una variable aleratoria que satisface la condición (7) con $p=1$, entonces la serie de potencias aleatoria solución sólo converge para $|t| < 1/M$. Pero se puede extender el dominio de convergencia de la siguiente manera. Una vez que el proceso exponencial este definido en $0 \leq t < 1/M$, se fija $\hat{t} : 0 < \hat{t} < 1/M$ y se busca una solución en serie de potencias aleatoria de la forma (10), pero centrada en $\hat{t}$ para el problema de valor inicial dado por (1) y con condición inicial $X(\hat{t})$, siendo $X(t)$ la solución previamente calculada en $|t| < 1/M$.

5. Agradecimientos

Este artículo ha sido parcialmente financiado por la ayuda del M.C.Y.T. español MTM2009-08587, la ayuda PAID06-09-2588 de la Universidad Politécnica de Valencia, Mexican Conacyt, Mexican Promep.

Referencias

1. Soong T.T. (1973) *Random Differential Equations in Science and Engineering.* Academic Press, New York
2. Arnold L., (1974) *Stochastic Differential Equations Theory and Applications.* John Wiley, New York
3. Cortés J.C., Sevilla-Peris P., Jódar L. (2005) Analytic-numerical approximating processes of diffusion equation with data uncertainty. *Comput. Math. Appl.* 49:1255–1266
4. Kegan B., West R. (2005) Modeling the simplest epidemic with determinist differential equations and random initial conditions. *Math. Biosci.* 195:179-193
5. Villafuerte L., Braumann C.A., Cortés J.C., Jódar L. (2010) Random differential operational calculus: Theory and applications. *Comput. Math.Appl.* 59:115–125
6. Cortés J.C., Jódar L. , Villafuerte L. (2009) Random linear-quadratic mathematical models: computing explicit solutions and applications. *Math. Comput. Simulat.* 79:2076–2090
7. Fishman G.S. (1996) *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications.* Springer-Verlag, New York