Disseny i validació d’un model predictiu de l’evolució de la borsa amb cadenes de Markov

Treball final de grau

Estudiant: Roger Barceló i Heras

Directora: M. Isabel Garcia Planas

etseib
Escola Tècnica Superior d’Enginyeria Industrial de Barcelona

Resum

Aquest treball tracta sobre les cadenes de Markov, més concretament aplicades a la borsa.

En el primer punt es fa una breu introducció sobre què són i què fan els mercats financers, oferint algunes dades històriques i fent especial èmfasi en la modelització financera.

El segon punt del treball tracta les cadenes de Markov, començant per explicar qui era Andréi Màrkov i què és un procés estocàstic. Posteriorment entra més en detall en les cadenes de Markov, explicant conceptes com la matriu de transició d'estats i posant algun exemple. S'expliquen algunes propietats importants, com la distribució límit, i es defineixen els diferents tipus de cadenes de Markov que es poden trobar.

Finalment, estudiant el cas de quatre empreses de l'IBEX 35 es comprova que l'evolució del preu de les accions de la borsa pot ser tractada com una cadena de Markov, i s'apliquen conceptes tractats en el segon punt del treball, com per exemple la matriu de transició d'estats, per a realitzar una predicció del valor de les accions d'aquestes empreses a llarg termini.

Sumari

ETSEIB

1. Prefaci

1.1. Origen del projecte

A l'arribar a l'últim quadrimestre del Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials es força a l'estudiant a acabar de decidir en un espai limitat de temps el tema d'un projecte en el que haurà de dedicar un nombre d'hores important al llarg de quatre mesos per després presentar-lo i obtenir una nota lligada a 12 crèdits ECTS. Això posa a l'estudiant en una situació relativament tensa, intentant pensar algun tema interessant en el que dedicar-hi hores no sigui una tasca pesada.

Existeix una borsa de projectes on el professorat proposa temes a tractar, però excepte en casos molt concrets és difícil que l'estudiant trobi un tema proposat que realment li interessi. Afortunadament però, en aquest cas es va trobar un projecte sobre la utilització Cadenes de Màrkov, que finalment, després de converses entre la directora del treball i l'estudiant, va acabar esdevenint aquest projecte, Disseny i Validació d'un Model Predictiu de l'Evolució de la Borsa amb Cadenes de Markov.

1.2. Motivació

La motivació que ha empès a realitzar aquest projecte és la voluntat d'aplicar eines matemàtiques, en un principi desconegudes, a un entorn que segons a qui es pregunti pot ser tan tècnic com subjectiu, la borsa. Tenir un model capaç de predir els seus moviments pot arribar a ser fins i tot lucratiu, fet que tot i no ser l'objectiu del treball, és sens dubte un incentiu.

El tema resulta especialment interessant si es té en compte que si el resultat és l'esperat pot esdevenir una eina útil que podria ajudar a gestionar millor la cartera de valors de les persones.

2. Introducció

2.1. Objectius del treball

L'objectiu principal d'aquest treball és, a part d'introduir el concepte de mercat financer i d'explicar què són les cadenes de Markov, aconseguir provar que el preu de les accions de borsa pot ser tractat com a una cadena de Markov i, per tant, ser predit utilitzant aquesta eina.

Al mateix temps, complir l'objectiu anterior suposa obrir les portes a futurs treballs, potser de més complexitat, que poden resultar molt interessants, per tant es podria dir que l'objectiu és doble.

2.2. Abast del projecte

Degut al nombre limitat d'hores que hi ha per dedicar a aquest treball (12 crèdits ECTS), aquest projecte abasta l'estudi de l'evolució del preu de les accions de quatre empreses determinades de l'IBEX 35 des del punt de vista de les cadenes de Markov. L'objectiu però, és fer veure que si amb aquestes quatre empreses és possible, l'aplicació de les cadenes de Markov a la borsa pot resultar útil, i així donar pas a altres idees o diferents punts de vista on pugui ser útil utilitzar les cadenes de Markov en aquest àmbit financer.

3. Els mercats financers

Un mercat financer és un lloc, mecanisme o sistema on el seus membres comercien amb valors mobiliaris, matèries primeres i altres elements intercanviables amb transaccions de baix cost i amb preus que segueixen la llei de l'oferta i la demanda. Els valors mobiliaris incloeixen accions i bons, i a les matèries primeres s'hi inclouen metalls preciosos i béns agrícoles.

En llenguatge econòmic, el terme mercat significa la suma de possibles compradors i venedors d'un cert bé o servei i les transaccions entre ells.

El terme mercat a vegades és utilitzat estrictament per referir-se a les organitzacions d'intercanvis, organitzacions que faciliten el comerç de valors mobiliaris, com per exemple una borsa. Aquestes poden ser un lloc físic, com el NYSE (New York Stock Exchange) i la Borsa de Madrid, o un sistema electrònic, com el NASDAQ. La majoria del comerç d'accions de corporacions és dóna en aquestes organitzacions, però les accions corporatives, com podrien ser fusions o creacions d'spin-offs, es fan fora d'organitzacions d'intercanvi, de manera que qualssevol empreses o persones poden posar-se d'acord per vendre accions d'un a l'altre sense necessitat d'utilitzen una de les organitzacions esmentades.

Les activitats de comerç de divises i bons solen ser bilaterals, tot i que alguns bons sí que es comercien en borses de valors i s'estan creant sistemes electrònics per comerciat amb aquestes mercaderies, de forma similar al que passa amb les borses. [1]

3.1. Història de la borsa de valors

La paraula "borsa" prové d'un edifici que va pertànyer a la família Van der Bürse a la ciutat de Bruixes (Bèlgica), on es realitzaven reunions i trobades de caràcter mercantil al segle XIII. L'escut d'armes dels Bürse exhibia tres bosses de pell, els moneders de l'època. Els habitants de la ciutat flamenca van començar a denominar Bürse a l'activitat econòmica que es duia a terme en aquella casa.

No obstant això, es considera que la primera borsa va ser creada a Anvers Bèlgica, l'any 1460 i la segona a Amsterdam en els primers anys del segle XVII, quan aquesta ciutat es va convertir en el més important centre del comerç mundial.

La Borsa de Valors de Ámsterdam es considerada com la més antiga del món. Va ser fundada Però va ser al segle XVII quan els mercats de valors van començar a evolucionar fins a arribar al que podríem considerar la primera borsa coneguda, que segons molts autors va ser la de Amsterdam (Holanda), fundada l'any 1602 per la Companyia holandesa de les Índies Orientals coneguda per (Verenigde Oostindische Compagnie, o les seves sigles "VOC") per fer tractes amb les seves accions i bons. Posteriorment va ser re nomenada com Amsterdam Bourse i va ser la primera a negociar formalment amb actius financers.

La Borsa de Valors tal com avui la coneixem va sorgir després de la Revolució francesa a finals del segle XVIII. [4]

3.2. Tipus de mercats financers

Normalment el terme "mercat financer" s'utilitza agrupant tots els mercats del sector financer, tot seguit s'hi troben alguns exemples.

- Mercats capitals, que consisteixen en:
    - Borses de valors, que proveeixen finançament a través de l'emissió d'accions i possibiliten el comerç de les mateixes.
    - Mercats de bon, que proveeixen finançament a través de l'emissió de bons, i possibiliten el comerç dels mateixos.
- Marcats de matèries primeres, faciliten el comerç de matèries primeres.
- Mercats monetaris, proporcionen finançament i inversió de deute a curt termini.
- Mercats de derivats, proporcionen instruments per a la gestió del risc financer.
- Mercats de futurs, permeten contractes "forward" estandaritzats per a comerciar amb productes en una data futura determinada.
- Mercats d'assegurances, faciliten la redistribució de riscos variats.
- Mercats de divises, faciliten el comerç amb divises estrangeres.

Els mercats capitals també es poden dividir entre mercats primaris i mercats secundaris. Els valors acabats de crear són venuts i comprats en mercats primaris, com per exemple es el cas d'una empresa quan fa una IPO (Oferta Pública Inicial). Els mercats secundaris permeten als inversors comprar i vendre valors ja existents. Les transaccions als mercats primaris es donen entre emissors i inversors, mentre que en el secundari es dóna entre els inversors.

La liquiditat és un aspecte crucial dels valors que són comerciats en mercats secundaris. Aquest concepte es refereix a la facilitat amb la que aquest valor pot ser venut sense perdre vàlua. Els inversors es beneficien dels valors líquids perquè poden vendre el que posseeixen sempre que vulguin; un valor no líquid por forcar al venedor a desfer-se de la seva propietat a un preu molt reduït. [1] [6]

3.3. Atracció de capital

Els mercats financers atrauen capital d'inversors i el canalitzen cap a les empreses. Per tant, permeten a les empreses finançar les seves operacions i aconseguir créixer. Els mercats monetaris permeten a les empreses cedir fons a curt termini, i per altra banda els mercats capitals permeten a les empreses guanyar finançament a llarg termini per a recolzar l'expansió.

Sense els mercats financers, els prestataris tindrien moltes dificultats per trobar prestamistes. A més, per ajudar en aquest procés existeixen intermediaris, com poden ser bancs, bancs d'inversió, entre d'altres. També poden deixar diners a aquells que en demanen. Els bancs normalment cedeixen diners en forma de préstecs i hipoteques.

Les transaccions més complexes requereixen mercats on prestamistes i els seus agents puguin trobar-se amb prestataris i els seus agents, i on contractes existents puguin ser traspassats a altres propietaris. Un bon exemple d'aquests mercats financers és la borsa de valors. Una empresa pot atraure capital venent accions a inversors i les accions ja existents poden ser comprades i venudes. [1]

A la taula següent (Taula 1) es pot veure la relació entre prestamistes i prestataris:

Relació entre pretamistes i prestataris			
Prestamistes	Intermediaris financers	Mercats financers	Prestataris
Persones Empreses	Bancs Asseguradores Fons de pensions Fons mutus	Borsa de valors Mercat monetari Mercat de bons Divises estrangeres	Persones Empreses Govern Entitats públiques

Taula 1. Relació entre prestamistes i prestataris

A continuació es detallen els protagonistes de la taula anterior:

3.3.1. Prestamistes

El prestamista dóna diners a algú altre temporalment sota la condició de que se li retorni la quantitat deixada juntament amb un interès o preu.

3.3.1.1. Individus

Moltes persones no són conscients de que són prestamistes, però gairebé tothom presta diners de moltes maneres. Un individu està deixant diners quan:

- Ingressa diners a un compte d'estalvis.
- Contribueix en un pla de pensions.
- Paga primes a companyies asseguradores.
- Inverteix en bons de l'estat.

3.3.1.2. Empreses

Les empreses tendeixen a ser prestatàries. Tot i així, quan tenen un superàvit líquid que no resultarà necessari a curt termini, és possible que intentin treure profit d'aquest superàvit prestant-lo a través de mercats de curt termini, els mercats monetaris mencionats anteriorment. També és habitual però que les empreses decideixin retornar el superàvit a als seus accionistes (dividends).

3.3.2. Prestataris

Els individus reben diners a través de préstecs bancaris per a necessitats a curt termini o hipoteques a llarg termini per a finançar la compra d'una casa.

Les empreses reben diners per a donar suport al cash flow a curt o a llarg termini. També demanen préstecs per finançar la modernització o l'expansió de l'empresa.

Els governs solen trobar-se amb que les seves despeses superen els ingressos que vénen a través dels impostos. Per a compensar aquesta diferència, necessiten demanar crèdit. Els governs també demanen crèdits en nom d'empreses públiques, municipis i altres entitats públiques. Els governs reben diners emetent bons. [6]

3.4. Anàlisi dels mercats financers

Durant molts anys s'han dedicat molts esforços a l'estudi dels mercats financers i a estudiar com varien els preus amb el temps. Charles Dow, un dels fundadors de Dow Jones & Company i The Wall Street Journal, va enunciar una sèrie d'idees sobre el tema que ara són conegudes com la Teoria de Dow. Aquesta va ser la base del conegut mètode de l'anàlisi tècnic per intentar predir canvis en el futur. Un dels principis d'aquest mètode és que les tendències del mercat donen són un indicador pel futur, al menys a curt termini. Els anunciats que afirma l'anàlisi tècnic són criticats per molts acadèmics, que diuen que les dades apunten a la Teoria del Passeig Aleatori, que afirma que l'estat següent no està relacionat amb l'últim estat i per tant no pot ser predit.

El paper de la psicologia humana sobre la variació de preus també és important. Una alta volatilitat sovint indica que factors emocionals estan tenint efecte sobre el preu. La por i la incertesa poden causar caigudes excessives i l'avarícia pot crear les conegudes bombolles.

Tal i com s'ha anat esmentant, l'escala de canvis de preu respecte certa unitat de temps s'anomena volatilitat. Benoît Mandelbrot va descobrir que els canvis en el preu no segueixen una distribució gaussiana, sinó que es poden modelar millor mitjançant distribucions estables de Lévy.

3.4.1. Els models matemàtics a les finances

El modelatge financer és la tasca de construir una representació abstracte (un model) d'una situació financera real. El model matemàtic és dissenyat per representar una versió simplificada del rendiment d'un bé financer o d'una cartera de negocis, projecte o qualsevol altra inversió. El modelatge financer és un terme general que pot significar diferents coses per a diferents usuaris; sovint està relacionat amb comptabilitat i aplicacions de finances corporatives o bé a aplicacions de finances quantitatives.

Tot i que s'ha debatut molt sobre la naturalesa del modelatge financer, és una activitat que ha estat guanyant acceptació i rigor amb el pas dels anys. Actualment, el modelatge financer consisteix en traduir una sèrie d'hipòtesis sobre el comportament de mercats a prediccions numèriques. Per exemple, les decisions d'una empresa sobre inversions (l'empresa invertirà el 20% dels seus béns) o el profit d'una inversió. [7]

3.4.1.1. En finances corporatives

En finances corporatives, banca d'inversió i en comptabilitat, el modelatge financer és gairebé un sinònim de pronòstic d'estats financers. Això sol comportar la preparació de models amb detalls específics de l'empresa en qüestió utilitzats per a l'anàlisi financer i prendre decisions.

Les aplicacions més habituals són:

- Valoració financera de negoci.
- Planificació i presa de decisions corporatives.
- Pressupostació.
- Cost de capital.
- Anàlisis financer.
- Project finance.
- Fusions i adquisicions.

Aquests models, com que són construïts a partir d'estats financers, els càlculs i resultats són mensuals o anuals. A més, es treballa amb suposicions, és l'analista qui especifica el valor que serà utilitzat per les variables en cada període (taxes de canvi, percentatge d'impostos, etc.). Aquestes dues característiques es veuen reflectides en la forma matemàtica d'aquests models: Els models són discrets en el temps i són deterministes.

Tot i que existeix software específic per a aquests models, la majoria estan basats en fulls de càlcul i dades, com en el cas d'aquest treball, ja que els models són gairebé sempre específics per a una empresa en concret. Cada analista té els seus propis criteris i mètodes, però ara per ara l'eina més utilitzada és el Microsoft Excel, superant a l'antiquat Lotus 1-2-3 dels anys noranta. [7]

3.4.1.2. En finances quantitatives

En finances quantitatives, el modelatge financer implica el desenvolupament d'un model matemàtic més sofisticat. Aquí els models han de tenir en compte preus d'actius, moviments del mercat, rendiments de carteres, etc.

Les aplicacions més habituals inclouen:

- Valoració d'opcions i càlcul de "les gregues".
- Altres derivats, especialment derivats de crèdit i derivats exòtics.
- Modelatge de l'estructura trimestral de taxes d'interès.
- Avaluació de riscos.

- Problemes de previsió d'activitats de finances corporatives.
- Optimització de cartera.
- Valoració d'opcions reals.
- Modelització del risc.
- Anàlisi financer dinàmic.

Aquest problemes normalment són estocàstics i continus, i els models requereixen algoritmes complexos, incloent simulacions per computador i mètodes numèrics avançats (per exemple, equacions diferencials, programació dinàmica, etc.).

Tot i que en aquest camp l'ús de fulls de càlcul també popular, sovint es prefereix crear programes personalitzats en llenguatge C++ o utilitzar software d'anàlisi numèric com MATLAB, particularment quan l'estabilitat o la velocitat són importants. El MATLAB és l'eina més utilitzada per a la recerca en el camp de l'economia gràcies a la seva programació intuïtiva i capacitats gràfiques, però el C++ se li avança quan es tracta d'aplicacions que requereixen un alt cost computacional, on el MATLAB és massa lent. [8]

4. Cadenes de Màrkov

4.1. Andréi Màrkov

Fig.1. Andréi Màrkov

Andréi Andréyevich Màrkov (1856 – 1922), nascut a Riazan, Rússia, va ser un matemàtic famós pels seus treballs en teoria dels nombres i teoria de probabilitats.

Abans de complir deu anys, es va traslladar a Sant Petesburg, degut a la feina del seu pare, funcionari. Allà va a entrar a estudiar en un institut de la ciutat. Des del principi va mostrar un gran talent per a les matemàtiques, i al graduar-se el 1874 ja coneixia a diversos matemàtics de la Universitat de Sant Petesburg, on va entrar al finalitzar l'institut. Allà va ser deixeble de Chebyshov i, després de realitzar les tesis de màster i doctorat, el 1886 va accedir com a associat a l'Acadèmia de Ciències de Sant Petesburg a proposta de Chabyshov. Deu anys més tard Màrkov ja s'havia guanyat el lloc d'acadèmic regular. Des del 1880, ja impartia classes a la Universitat i, quan tres anys després Chebyshov va abandonar la Universitat, va ser el propi Màrkov qui el va substituir en els cursos de teoria de la probabilitat. Després de vint-i-cinc anys, al 1905, Màrkov es va retirar definitivament de la Universitat, tot i que va seguir impartint alguns cursos sobre teoria de la probabilitat.

Apart del seu perfil acadèmic, Andréi Màrkov va ser un fort activista polític. Es va oposar als privilegis de la noblesa tsarista i, en forma de protesta per algunes decisions polítiques relacionades amb l'Acadèmia de les Ciències, va arribar a refusar les condecoracions del propi tsar.

Màrkov va arrossegar tota la seva vida problemes relacionats amb una malformació congènita al genoll. Va haver de passar diverses vegades pel quiròfan i, finalment, el 20 de juliol de 1922 va ser la causa de la seva mort, quan en una de les moltes operacions a les que es va sotmetre va contraure una infecció generalitzada de la qual no es va poder recuperar.

Tot i que Màrkov va influir en altres camps de les matemàtiques, com per exemple amb els seus treballs sobre fraccions contínues, la història el recordarà principalment pels seus resultats relacionats amb la teoria de la probabilitat. El 1887 va completar la prova que permetia generalitzar el teorema central del límit, que ja havia avançat Chebyshov. Però la seva aportació més coneguda és una altra.

El seu treball teòric en el camp dels processos en els que estan involucrats processos aleatoris (processos estocàstics) donaria fruit en un instrument matemàtic que actualment coneixem com Cadena de Markov: seqüències de valors d'una variable aleatòria en les que el valor de la variable en el futur depèn del valor de la variable en el present, però és independent de la història d'aquesta variable. Les Cadenes de Markov es consideren actualment una eina essencial en disciplines com l'economia, l'enginyeria i la investigació d'operacions, entre d'altres. [1]

4.2. Conceptes previs

Fig.2. El resultat de llançar uns daus és aleatori..

Un procés o successió d'esdeveniments que es desenvolupa en el temps en el qual el resultat en qualsevol etapa conté algun element que depèn d'un procés a l'atzar s'anomena procés aleatori o procés estocàstic.

Un exemple molt senzill de procés estocàstic es una successió d'assajos de Bernouilli. Per exemple, una successió de llançaments d'un dau. En aquest cas, el resultat en qualsevol etapa és independent de tots els resultats previs. Tot i això, en la majoria dels processos estocàstics cada resultat depèn del que ha succeït en etapes anteriors del procés. Per exemple, les condicions atmosfèriques d'un dia determinat no és aleatori del tot, sinó que és en cert grau afectat pel clima de dies anteriors.

El cas més simple de procés estocàstic en el que els resultats depenen de resultats previs es dóna quan el resultat de cada etapa només depèn del resultat de l'etapa anterior. Aquest tipus de procés s'anomena Cadena de Markov. [1]

A continuació es dóna la definició formal d'aquest últim concepte.[1]

4.2.1. Definició de Cadena de Markov

Considerem un sistema amb un nombre finit d'estats *{X_0 X_1, ..., X_k, ...,}* en el que l'estat pot evolucionar només en punts discrets del temps. Per a facilitar la comprensió, utilitzarem l'expressió $X_k = j$ per indicar que el procés està en estat *j* en el temps *k*.

Suposem que un sistema que evoluciona en el temps està en l'estat i_k en l'instant *k*. Si en l'instant *k-1* està en l'estat i_{k-1}, llavors:

$$P(X_k = i_k \,|X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}) = P(X_k = i_k \mid X_{k-1} = i_{k-1}) = p_{i_{k-1},i_k} \quad (1)$$

L'equació (1) reflecteix el que abans s'ha anomenat propietat de Màrkov. S'anomena Cadena de Markov al procés que compleix aquesta propietat.

4.3. Cadenes homogènies

Una Cadena de Markov és homogènia si la probabilitat d'anar de l'estat *i* a l'estat *j* en un pas no depèn del temps o de l'instant en el que es troba la cadena. Això esdevé l'equació Eq. 2 següent:

$$P(X_k = j|\, X_{k-1} = i) = P(X_1 = j|\, X_0 = i);\ \forall n, i, j \quad (2)$$

Si per alguna parella d'estats *i* i *j* i per algun temps *k* l'equació (2) no es compleix, es diu que la Cadena de Markov és no homogènia.

4.4. Probabilitat de transició i matriu de transició

La probabilitat d'anar de l'estat *i* a l'estat *j* en *k* unitats de temps és:

$$p_{ij}(k) = P(X_n = j|X_0 = i) \quad (3)$$

Aleshores,

$$\begin{cases} p_1(k+1) = p_{11}(k)p_1(k) + \cdots + p_{1n}(k)p_n(k) \\ \vdots \\ p_n(k+1) = p_{n1}(k)p_1(k) + \cdots + p_{nn}(k)p_n(k) \end{cases} \quad (4)$$

Expressió que de forma matricial esdevé:

$$\begin{pmatrix} p_1(k+1 \\ \vdots \\ p_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & \cdots & p_{1n}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(k) & \cdots & p_{nn}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(k) \\ \vdots \\ p_n(k) \end{pmatrix} \quad (5)$$

I anomenem matriu de transició d'estats a la matriu:

$$A(k) = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & \cdots & p_{1n}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(k) & \cdots & p_{nn}(k) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Observem que de manera més sintètica el sistema és:

$$p(k+1) = A(k)p(k) \quad (7)$$

Considerem ara que es tracta d'una cadena homogènia, o en altres paraules, que les probabilitats $p_{ij}(k)$ no depenen de *k*. Llavors direm que coneguda una probabilitat inicial $p(0) = (p_1(0), \ldots, p_n(0))$ es compleix que:

$$p(k) = A^k p(0) \quad (8)$$

En altres paraules, si es coneix la probabilitat inicial es coneix la solució del sistema. A continuació es demostra per inducció la igualtat anterior:

Comprovem que la igualtat es compleix per *k*=1 i *k*=2:

$$p(1) = Ap(0); p(2) = Ap(1) = AAp(0) = A^2 p(0) \quad (9)$$

Ara suposem que $p(k-1) = A^{k-1}p(0)$. Observem que l'enunciat és cert per a *k*:

$$p(k) = Ap(k-1) = AA^{k-1}p(0) = A^k p(0) \quad (10)$$

■[3]

4.5. Exemple de l'autoestopista

Tal i com s'ha vist en l'equació (2), en una cadena de Markov homogènia les probabilitats de transició només depenen de la diferència entre els instants de temps i no en el seu valor absolut. Aquesta característica es compleix en molts casos d'interès pràctic. Per a veure més clarament els conceptes explicats fins ara, es presenta el següent exemple.

Hi havia una vegada un autoestopista, que eventualment va decidir quedar-se deambulant entre 3 pobles, Almacera, Alboraya i Tavernes. L'autoestopista en un moment donat del dia es pot cansar del poble en què es troba, sortir a la carretera i començar a fer autoestop. En el diagrama de la *Fig. 3* es veuen representades les probabilitats de que el reculli algú en la direcció donada. De tant en tant, decideix quedar-se a Alboraya i passar-hi la nit.

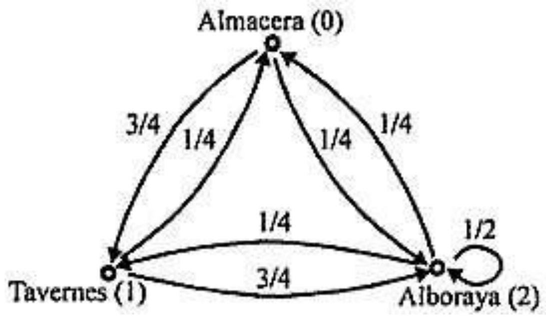

Fig. 3 Diagrama de transició d'estats [2]

La matriu de transició, per tant, serà:

$$T(i, i+1) = T = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^t$$

I és independent del temps.

4.6. Propietats de les cadenes de Markov

4.6.1. Distribució límit d'una cadena de Markov

S'anomena distribució límit o estacionaria d'una cadena de Markov en cas d'existir:

$$\pi = \lim_{k\to\infty} p(k) \tag{11}$$

Es diu que un vector de probabilitat (finit o infinit numerable) és invariant per a una cadena de Markov si es compleix la condició següent:

$$Av = v \tag{12}$$

On *A* és la matriu de transició de la cadena de Markov. Aquest concepte tant es pot anomenar distribució límit com distribució d'equilibri o vector de probabilitat invariant.

4.6.2. Classes de comunicació

Tenint dos estats *i,j* en l'espai d'estats *E*, direm que de *i* s'accedeix a *j* si $p_{ij}^{(n)} > 0$per algun valor d'*n*, i s'indica de la forma *i→j*. Si *i→j* i *j→i*, llavors es diu que *i* comunica amb *j* i s'indica de la forma *i↔j*.

La propietat "↔" és una relació d'equivalència. Aquesta relació provoca una partició en l'espai d'estats. A aquestes classes d'equivalència s'anomenen classes de comunicació. [1]

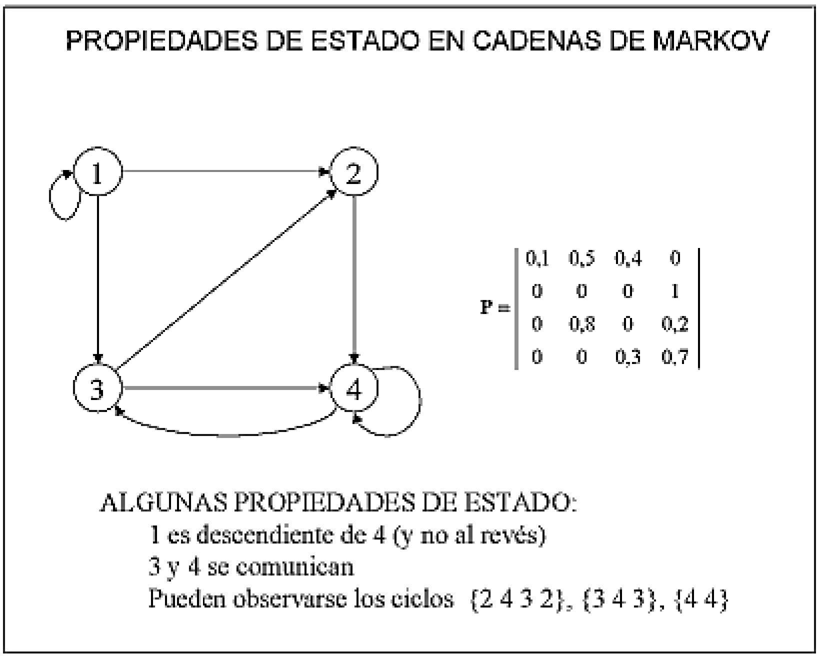

Fig. 4. Relacions de comunicació. [2]

Donat un estat *x*, denotarem a la seva classe de comunicació com *C(x)*.

Es diu que un subconjunt *C* de l'espai d'estats (*E*) és tancat si cap estat de *E-C* pot ser accedit des d'un estat de *C*, és a dir, si $p_{xy}^{(m)} = 0$ per a tot *x*є*C*, per a tot *y*є*E-C* i per a tot natural *m*>0.

4.6.3. Temps d'entrada

Sigui *C* un subconjunt de *E*, definim el primer temps d'entrada a *C* com la variable

$$T_c = \begin{cases} \min\{n > 0 | X_n \epsilon C\} & \text{si } \{n > 0 | X_n \epsilon C\} \neq 0 \\ \infty & \text{si } \{n > 0 | X_n \epsilon C\} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

En altres paraules, això significa que T_c és la primera vegada que la cadena entra al conjunt d'estats *C*.

4.6.4. Recurrència

En una cadena de Markov amb espai d'estats *E* es defineix:

$$L_x = \mathrm{P}(X_n\, per\ alguna\, n \in \mathrm{N} | X_n = x)\ on\ x \epsilon E \quad (14)$$

I direm que:

- *x* és estat recurrent si L_x=1.
- *x* és transitori si L_x<1.
- *x* és absorbent si $p_{x,x}$=1.
- Una classe de comunicació és classe recurrent si tots els seus estats són recurrents.

Notem per:

$$\mu_x = \mathrm{E}(T_x | X_0 = x)\ on\ x \epsilon E \quad (15)$$

I direm que:

- *x* és zero-recurrent si $\mu_x = \infty$.
- *x* és positivo-recurrent si $\mu_x < \infty$.

El nombre real μ_x s'interpreta com el temps promig de recurrència.

4.6.5. Periodicitat

El període d'un estat *x*ϵ*E* es defineix de la forma següent:

$$d(x) = \mathrm{mcd}\left\{n : P_{x,x}^{(n)} > 0\right\} \quad (16)$$

on *mcd* és el màxim comú divisor.

La periodicitat pot donar dos casos característics:

- Que *d(x)*=1, i en aquest cas direm que *x* és un estat aperiòdic.

- Que tots els estats d'una cadena de Markov siguin aperiòdics, i en aquest cas direm que es tracta d'una cadena aperiòdica.

4.7. Tipus de cadenes de Markov

4.7.1. Cadenes irreductibles

Una cadena de Markov és irreductible si es compleix qualsevol de les següents condicions, equivalents entre si:

1. Des de qualsevol estat de *E* es pot accedir a qualsevol altre.
2. Tots els estats es comuniquen entre si.
3. $C(x)=E$ per algun $x \epsilon E$.
4. $C(x)=E$ per tot $x \epsilon E$.
5. L'únic conjunt tancat és el total.

La cadena d'Ehrenfest o la caminada aleatòria sense barreres absorbents són exemples de cadenes de Markov irreductibles.

4.7.2. Cadenes positiu-recurrents

Una cadena de Markov es diu positiu-recurrent si tots els seus estats són positiu-recurrents, és a dir, si els tots els seus estats verifiquen la condició de recurrència i a més hi ha un nombre finit d'estats. Si el nombre d'estats és infinit aleshores es diu que la cadena es recurrent nul·la.

Si la cadena és positiu-recurrent i a més és irreductible, és possible demostrar que existeix un únic vector de probabilitat invariant, cada component del qual donat per:

$$\pi_x = {}^{1}/_{\mu_x} \tag{17}$$

4.7.3. Cadenes de Markov en temps continu

Si en lloc de considerar una seqüència discreta X_1, X_2. ..., X_i, ..., on i és natural, es consideren les variables aleatòries X_t, on t varia en un interval continu del conjunt de nombres reals, tindrem una cadena de Markov en temps continu. Per a aquest tipus de cadenes, la propietat de Markov s'expressa de la manera següent:

$$P(X(t_{n+1}) = x_{n+1}|X(t_n) = x_n, \dots, X(t_1) = x_1) = P(X(t_{n+1}) = x_{n+1}|X(t_n) = x_n) \tag{18}$$

tal que $t_{n+1}>t_n>t_{n-1}>\ldots>t_1$.

Per una cadena de Markov continua amb un nombre finit d'estats es pot definir una matriu estocàstica d'estats donada per:

$$\mathrm{P}(t_1, t_2) = [p_{ij}(t_1, t_2)]_{i,j=1,\dots,N}, \;\; p_{ij}(t_1, t_2) = P[X(t_2) = j | X(t_1 = i], 0 \geq t_1 < t_2 \qquad (19)$$

La cadena s'anomena homogènia si $P(t_1, t_2)=P(t_2-t_1)$. Per a una cadena de Markov en temps continu homogènia i amb un nombre finit d'estats, es pot definir l'anomenat generador infinitesimal de la manera següent:

$$Q = \lim_{h \to 0^+} \frac{P(h)-1}{h} \qquad (20)$$

I es pot demostrar que la matriu estocàstica ve donada per:

$$P(t) = e^{Qt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^t t^n}{n!} \qquad (21)$$

4.7.4. Cadenes absorbents

Una cadena de Markov amb espai d'estats finit es diu absorbent si es compleixen les dues condicions següents:

1. La cadena té, com a mínim, un estat absorbent, és a dir, un estat en el qual un cop s'hi ha entrat ja no se'n pot sortir.
2. De qualsevol estat no absorbent s'accedeix a algun estat absorbent.

Si anomenem *A* al conjunt de tots els estats absorbents i al seu complement l'anomenem *D* obtenim els següents resultats:

- La seva matriu de transició sempre es pot escriure de la forma $P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

  On la submatriu *Q* correspon als estats del conjunt *D*, *I* és la matriu identitat, *0* és la matriu nul·la i *R* és alguna submatriu.
- $P_x(T_A < \infty) = 1$. Això és, no importa on es trobi la cadena, tard o d'hora acabara en un estat absorbent.

4.7.5. Cadenes ergòdiques o regulars

La següent cadena de Markov, *C1*, de dos estats, té la matriu de probabilitats de transició:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}^t$$

Calculem la setzena potència d'aquesta matriu per tal d'aproximar la matriu de probabilitats estacionàries:

$$P_1^{16} = \begin{pmatrix} 0{,}429 & 0{,}571 \\ 0{,}429 & 0{,}571 \end{pmatrix}^t$$

Com es pot observar, les probabilitats d'estat estable dels diferents estats són independents del seu estat d'origen, raó per la qual la matriu de probabilitats estacionàries té totes les files iguals. Tenim llavors una cadena de Markov regular en la que les probabilitats estacionàries no depenen de l'estat inicial. A més, cap de les probabilitats és igual a cero. Es tracta doncs, d'una cadena de Markov ergòdica.

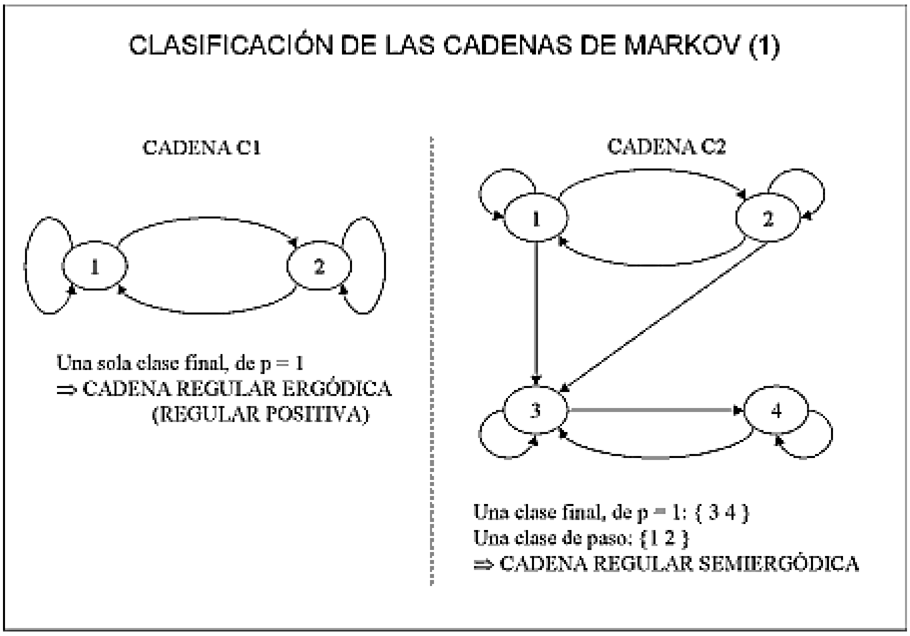

Fig.5. Cadena ergòdica i cadena semiergòdica [2]

4.7.6. Cadenes semiergòdiques

Tenim ara una cadena, *C2*, de quatre estats, amb la matriu de probabilitats següent:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}^t$$

Calculant com abans la setzena potència:

$$P_2^{16} = \begin{pmatrix} 0,005 & 0,007 & 0,475 & 0,563 \\ 0,002 & 0,005 & 0,426 & 0,567 \\ 0 & 0 & 0,429 & 0,571 \\ 0 & 0 & 0,429 & 0,571 \end{pmatrix}^t$$

Es pot observar que totes les files tendeixen a ser iguals (tot i que no del tot, especialment les dues primeres), amb una diferència respecte les cadenes ergòdiques: existeixen estats la probabilitat estable dels quals tendeix a ser zero, el que significa que no apareixeran en el comportament a llarg termini. Tot i així, segueix sent cert que totes les files tendeixen als mateixos valors, per tant es tracta igualment d'una cadena regular.

Les matrius regulars (i també d'altres que es veuran tot seguit) amb algunes de les columnes de la matriu de probabilitats estacionàries igual a zero s'anomenen semiergòdiques. Les cadenes ergòdiques poden ser considerades com un cas particular de les cadenes semiergòdiques, en el que no existeixen probabilitats d'estat iguals a zero.

4.7.7. Cadenes no ergòdiques

La cadena següent, *C3*, de quatre estats, té la següent matriu de transició:

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}^t$$

Si, com abans, es calcula la setzena potència, es pot veure com que tot i que és cert que algunes files tenen el comportament que hem vist en els casos anteriors, altres tendeixen a valors diferents. Això significa que, contràriament al que passa en el cas regular, les probabilitats d'estat estable sí depenen de quin ha sigut l'estat inicial de la cadena. Es tracta d'una cadena semiregular.

$$P_3^{16} = \begin{pmatrix} 0,000 & 0,800 & 0,086 & 0,114 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,429 & 0,571 \\ 0 & 0 & 0,429 & 0,571 \end{pmatrix}^t$$

4.7.8. Cadenes cícliques

La cadena *C4* següent, amb la matriu de transició que es presenta a continuació, després d'un nombre elevat de transicions presenta un comportament diferent al de les cadenes anteriors.

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$$

Al anar obtenint matrius de transició, s'observa que aquestes no convergeixen en un valor concret, sinó que presenten un comportament cíclic. En aquest cas, les transicions senars tendeixen a un valor i les parells a un altre.

$$P_4^{2k} = \begin{pmatrix} 0 & 0,08 & 0,60 & 0,32 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}^t$$

$$P_4^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,4 & 0,48 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$$

Aquest tipus de cadenes són cadenes cícliques. En aquest cas particular, ens trobem davant d'una cadena amb període *p*=2.

La primera columna sempre és zero, per tant l'estat *1* no apareixerà en les probabilitats a llarg termini. Això vol dir que aquesta cadena en concret no és ergòdica, tot i que es poden existir perfectament cadenes cícliques ergòdiques.

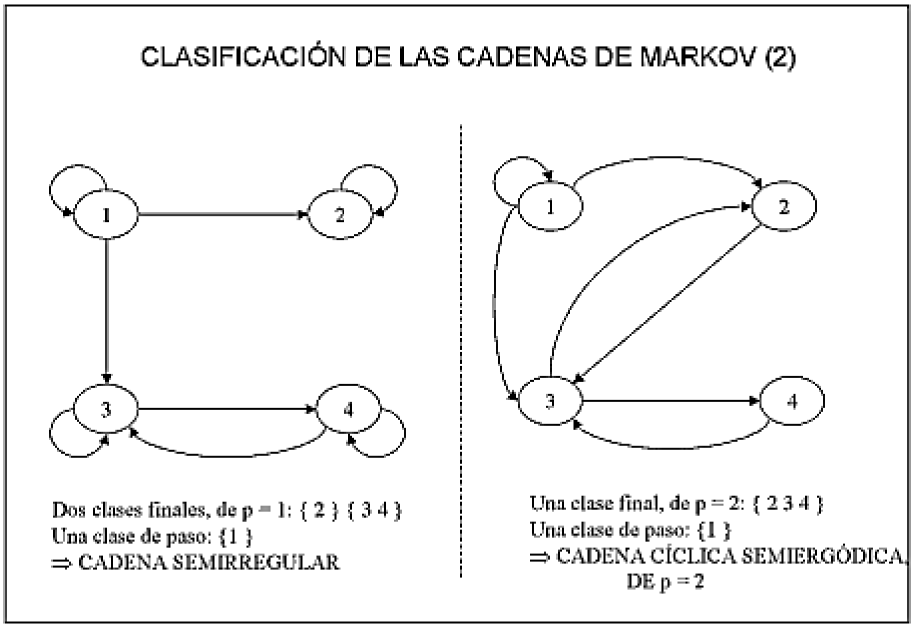

Fig.6. Exemple de cadena cíclica (dreta). [2]

5. Disseny i validació del model

5.1. Introducció

A continuació es presenta el model amb el qual s'ha treballat. Per a predir l'evolució dels preus de la borsa que, tal i com s'ha vist anteriorment, és un mercat financer, s'ha considerat convenient estudiar l'evolució de 4 quatre empreses, entenent que els resultats obtinguts amb aquestes quatre empreses poden ser generalitzat a qualsevol empresa de la borsa.

Les empreses escollides són:

- Telefónica.
- Banco Santander.
- Endesa.
- Ferrovial.

Quatre empreses de quatre sectors empresarials diferents. Les dades recollides procedeixen de la base de dades del diari econòmic Expansión, el diari líder a Espanya de la premsa econòmica [4].

De forma arbitrària, s'ha treballat amb els valors del preu al tancament diari de l'IBEX 35 en l'interval del l'1 d'abril del 2014 a 15 de maig de 2015, és a dir, 285 valors per a cada empresa, sumant un total de 1140 dades.

5.2. Metodologia

5.2.1. Definició i assignació d'estats

Un cop recollides les dades i ordenades en ordre cronològic, és necessari definir una sèrie d'estats per a poder estudiar-les des del punt de vista de les cadenes de Markov. Així doncs, es defineixen petits intervals de preus, que esdevindran els estats. Resulta més clar vist a través d'un exemple molt simple:

5.2.1.1. Exemple de definició d'estats

Donats els valors següents, preus de les accions d'una empresa de l'IBEX 35: 1, 3, 9, 4. Es defineixen els següents dos estats:

- Estat 1 (E1): Definit per l'interval de preus (0, 5].
- Estat 2 (E2): Definit per l'interval de preus (5, 10].

Així doncs, es classificarien els valors de la forma següent:

Preu	Estat
1	E1
3	E1
9	E2
4	E1

Taula 2. Classificació de dades en estats

En aquest treball s'han definit els estats de manera anàloga a l'exemple anterior.

Per a cada empresa, s'han trobat el valor mínim i màxim d'entre els 285 preus, definint el rang de valors possibles de les dades. Posteriorment, s'ha dividit aquest rang entre 10, obtenint així 10 estats, on cadascun d'ells comprèn una desena part dels possibles valors que pot prendre el preu.

5.2.2. Elaboració de la matriu de transició

El següent pas és estudiar l'evolució dels estats de la cadena de Markov. En altres paraules, observar i anotar les successives transicions entre els estats seguint l'ordre cronològic de les dades, per així poder determinar les probabilitats de transició de cada estat a un estat o a un altre.

Aquest procés, tot i comptar amb l'ajuda del programa Microsoft Excel, resulta força tediós. Per a analitzar aquestes transicions entre estats, s'ha utilitzat una taula 288x28.

Havent trobat les probabilitats de transició entre els estats, s'ha procedit a elaborar la matriu, seguint l'equació (6) de l'apartat 4.4. Seguint l'equació i treballant amb 10 estats, s'obté una matriu com la següent:

$$T = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,10} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{10,1} & \cdots & p_{10,10} \end{pmatrix}$$

On els valors $p_{1,1}, \dots, p_{i,j}, \dots, p_{10,10}$ són les probabilitats de transició entre els estats, trobades amb el Microsoft Excel.

5.2.3. Comprovació de la propietat de Markov

Abans de poder continuar amb l'estudi, resulta necessari comprovar que el procés d'evolució de la cotització de les accions bursàtils és realment una cadena de Markov. Per fer-ho, s'ha de validar la propietat de Markov amb les dades que es treballen.

Recordem la propietat que s'ha de complir, que és l'equació (1) de l'apartat 4.2.1.:

$$P(X_k = i_k \,|X_0 = \, i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}) = P(X_k = i_k \mid X_{k-1} = \, i_{k-1})$$

En altres paraules, siguin dos estats comunicats *i, j* s'ha de complir que les probabilitats de que succeeixi *i→j* siguin independents de l'estat que ha precedit a *i*.

La validació d'aquesta propietat també s'ha realitzat mitjançant Microsoft Excel, en un procés més tediós que l'anterior, ja que en aquest cas hi ha més transicions a analitzar. Per l'anàlisi s'ha utilitzat una matriu de dimensió 296x80.

5.2.4. Vector de distribució límit. Valors i vectors propis.

Finalment, per tal de poder fer una predicció com a tal i intentar predir cap a on tendeix la cotització de les accions de cada empresa, s'ha buscat la distribució límit de la matriu de transició, o el que és el mateix, el vector d'equilibri.

Aquest vector, com es podrà veure més endavant, coincideix amb el vector propi corresponent al valor propi $\lambda = 1$. Per a realitzar aquest càlculs, que fets a mà serien força llargs tractant-se de matrius 10x10, s'ha elaborat un petit script en Matlab.

Així doncs, un cop trobat el vector d'equilibri es podrà realitzar la predicció.

5.3. Estudi de les empreses

5.3.1. Telefónica

A continuació es troben les dades recollides per a l'empresa Telefónica, així com la definició dels seus estats, el resum de la verificació de la propietat de Markov i finalment el càlcul de la seva distribució d'equilibri.

5.3.1.1. Dades i definició d'estats

Els gràfics següent mostren les dades recollides de l'empresa Telefónica, que es troben a l'Annex també amb l'estat associat corresponent:

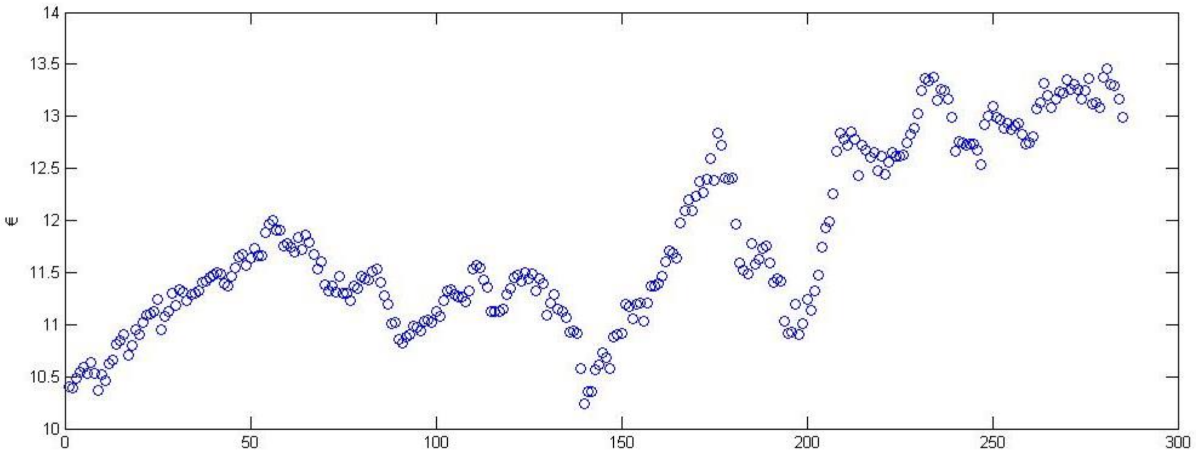

Fig. 5. Dades recollides de Telefónica

I en la figura següent trobem les mateixes dades però expressades de forma contínua:

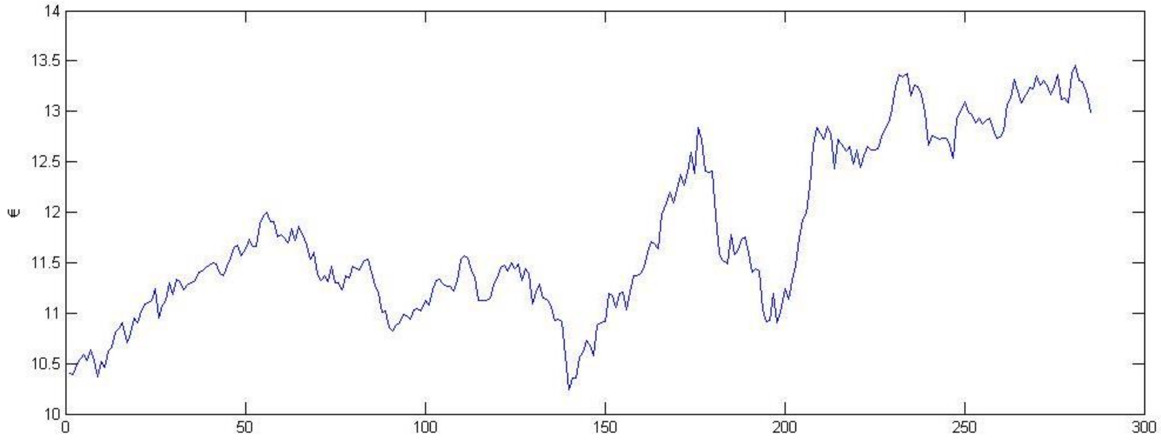

Fig. 6. Evolució contínua del preu per acció de Telefónica

A partir de les dades, tenim uns valors màxim i mínim que ens permeten trobar l'interval de preus que definirà a cada estat. Recordem que com s'ha explicat anteriorment, cada estat comprèn una desena part del rang total de preus (la diferència entre el valor màxim i el mínim). Aquesta informació es troba resumida en la taula següent:

MAX	13.455
MIN	10.239
RANG	10.239:13.455
INTERVAL	0.3216

Taula 3. Resum dades de Telefónica

Tot seguit podem definir l'interval de preus que comprendrà cada estat:

ESTAT	Lím. Inf.	Lím. Sup.
E1	10.239	10.561
E2	10.5607	10.882
E3	10.8824	11.204
E4	11.2041	11.526
E5	11.5258	11.848
E6	11.8475	12.169
E7	12.1692	12.491
E8	12.4909	12.813
E9	12.8126	13.134
E10	13.1343	13.456

Taula 4. Definició d'estats per Telefónica

Amb els estats definits, es pot procedir a estudiar les transicions entre els estats i a elaborar la matriu de transició.

5.3.1.2. Anàlisi de transicions. Matriu de transició

Mitjançant taules i amb l'ajuda de l'Excel, s'ha determinat en quantes ocasions es passa de cada estat a un altre. I dividint el nombre d'ocasions que es dóna una transició entre dos estats determinats entre el nombre total de transicions de l'estat d'origen obtenim la fracció o probabilitat de que l'estat origen passi a l'estat destí en qüestió.

A la taula següent es pot observar la síntesi de la informació obtinguda:

Origen	Destí	Ocasions	Fracció
E1	E1	8	0.6667
	E2	4	0.3333
E2	E1	3	0.1765
	E2	10	0.5882
	E3	4	0.2353
E3	E2	3	0.0612
	E3	36	0.7347
	E4	10	0.2041
E4	E3	9	0.1286
	E4	55	0.7857
	E5	6	0.0857
E5	E4	5	0.1471
	E5	25	0.7353
	E6	4	0.1176
E6	E5	3	0.2500
	E6	6	0.5000
	E7	3	0.2500
E7	E6	2	0.1667
	E7	5	0.4167
	E8	5	0.4167
E8	E7	5	0.1786
	E8	18	0.6429
	E9	5	0.1786
E9	E8	5	0.2083
	E9	15	0.6250
	E10	4	0.1667
E10	E9	4	0.1600
	E10	21	0.84

Taula 5. Resum de l'anàlisi de transicions

Així queden determinades les probabilitats de transició de cada estat, de manera que es pot elaborar la matriu de transició, que és la següent:

$$T = \begin{pmatrix} 0.6667 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1765 & 0.5882 & 0.2353 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0612 & 0.7347 & 0.2041 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1286 & 0.7857 & 0.0857 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1471 & 0.7353 & 0.1176 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2500 & 0.5000 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1667 & 0.4167 & 0.4167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1786 & 0.6429 & 0.1786 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2083 & 0.6250 & 0.1667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1600 & 0.8400 \end{pmatrix}^t$$

Aquesta és la matriu de transició per a l'empresa Telefónica. Abans de prosseguir, però, es comprovarà que aquest procés es una cadena de Markov.

5.3.1.3. Validació de la propietat de Markov

Per a comprovar si es compleix la propietat de Markov, que recordem que es pot trobar a l'equació (1) de l'apartat 4.2.1, però que limitarem la propietat a dos estats anteriors, enlloc de considerar-los tots. Per a fer-ho, s'ha utilitzat una fulla d'Excel..

Per tal de validar la propietat, s'han estudiat les transicions de l'apartat anterior però ara també considerant l'estat que precedeix a l'estat que abans era l'origen. Si es complís, la fracció obtinguda hauria de coincidir amb les fraccions obtingudes a l'apartat anterior.

A la taula de la pàgina següent es pot trobar la informació resumida:

E1-E1-E1	E2-E1-E1	E1-E1-E2	E2-E1-E2	E1-E2-E1	E2-E2-E1	E3-E2-E1	E1-E2-E2	E2-E2-E2	E3-E2-E2	E1-E2-E3	E2-E2-E3	E3-E2-E3	E2-E3-E2	E3-E3-E2	E4-E3-E2	E2-E3-E3	E3-E3-E3	E4-E3-E3	E2-E3-E4	E3-E3-E4	E4-E3-E4	E3-E4-E3	E4-E4-E3	E5-E4-E3
SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																								
5	2	3	1	2	0	1	2	6	2	0	4	0	1	2	0	3	28	5	0	6	4	4	5	0
OCASIONS X1 -> X2																								
8		4		3			10			4			3			36			10			9		
Percentatge Xo -> X1 -> X2																								
0.625	0.25	0.75	0.25	0.666667	0	0.333333	0.2	0.6	0.2	0	1	0	0.333333	0.666667	0	0.083333	0.777778	0.138889	0	0.6	0.4	0.444444	0.555556	0
Percentatge X1 -> X2																								
0.666667	0.666667	0.333333	0.333333	0.176471	0.176471	0.176471	0.588235	0.588235	0.588235	0.235294	0.235294	0.235294	0.061224	0.061224	0.061224	0.734694	0.734694	0.734694	0.204082	0.204082	0.204082	0.128571	0.128571	0.128571

E3-E4-E4	E4-E4-E4	E5-E4-E4	E3-E4-E5	E4-E4-E5	E5-E4-E5	E4-E5-E4	E5-E5-E4	E6-E5-E4	E4-E5-E5	E5-E5-E5	E6-E5-E5	E4-E5-E6	E5-E5-E6	E6-E5-E6	E5-E6-E5	E6-E6-E5	E7-E6-E5	E5-E6-E6	E6-E6-E6	E7-E6-E6	E5-E6-E7	E6-E6-E7	E7-E6-E7	E6-E7-E6	E7-E7-E6	E8-E7-E6	E6-E7-E7	E7-E7-E7	E8-E7-E7
SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																													
6	44	5	0	6	0	1	3	1	4	19	2	1	3	0	1	1	1	3	3	0	0	2	1	1	1	0	1	3	1
OCASIONS X1 -> X2																													
55			6			5			25			4			3			6			3			2			5		
Percentatge Xo -> X1 -> X2																													
0.109091	0.8	0.090909	0	1	0	0.2	0.6	0.2	0.16	0.76	0.08	0.25	0.75	0	0.333333	0.333333	0.333333	0.5	0.5	0	0	0.666667	0.333333	0.5	0.5	0	0.2	0.6	0.2
Percentatge X1 -> X2																													
0.785714	0.785714	0.785714	0.085714	0.085714	0.085714	0.147059	0.147059	0.147059	0.735294	0.735294	0.735294	0.117647	0.117647	0.117647	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	0.166667	0.166667	0.166667	0.416667	0.416667	0.416667

E6-E7-E8	E7-E7-E8	E8-E7-E8	E7-E8-E7	E8-E8-E7	E9-E8-E7	E7-E8-E8	E8-E8-E8	E9-E8-E8	E7-E8-E9	E8-E8-E9	E9-E8-E9	E8-E9-E8	E9-E9-E8	E10-E9-E8	E8-E9-E9	E9-E9-E9	E10-E9-E9	E8-E9-E10	E9-E9-E10	E10-E9-E1	E9-E10-E9	E10-E10-E9	E9-E10-E10	E10-E10-E1
SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																								
1	1	3	2	1	2	2	13	3	1	4	0	2	1	1	3	11	1	0	3	1	0	4	4	17
OCASIONS X1 -> X2																								
5			5			18			5			5			15			4			4		21	
Percentatge Xo -> X1 -> X2																								
0.2	0.2	0.6	0.4	0.2	0.4	0.111111	0.722222	0.166667	0.2	0.8	0	0.4	0.2	0.2	0.2	0.733333	0.066667	0	0.75	0.25	0	1	0.19047619	0.809524
Percentatge X1 -> X2																								
0.416667	0.416667	0.416667	0.178571	0.178571	0.178571	0.642857	0.642857	0.642857	0.178571	0.178571	0.178571	0.208333	0.208333	0.208333	0.625	0.625	0.625	0.166667	0.166667	0.166667	0.16	0.16	0.84	0.84

Full de càlcul 1. Telefónica

On:

- SUMA TOTAL X0->X1->X2 és el total d'ocasions que es dóna la seqüència dels tres estats indicats en la primera fila de la taula.
- OCASIONS X1-X2 és el nombre d'ocasions que s'ha tingut en compte a l'apartat 5.3.1.2. En altres paraules, és la transició sense tenir en compte l'estat predecessor.
- Percentatge X0->X1->X2 és la fracció que representa el valor de SUMA TOTAL X0->X1->X2 sobre el nombre d'OCASIONS X1->X2.
- Per últim, Percentatge X1->X2 és el valor de les probabilitats de transició trobades en l'apartat 5.3.1.2. És a dir, és la probabilitat de transició entre estats sense tenir en compte l'estat predecessor.

Recordem que si es tractés d'un model ideal, el valor del Percentatge X0->X1->X2 hauria de coincidir sempre amb el valor del Percentatge X1->X2.

A les gràfiques següents es comparen els valors del Percentatge X0->X1-X2 amb els del Percentatge X1->X2:

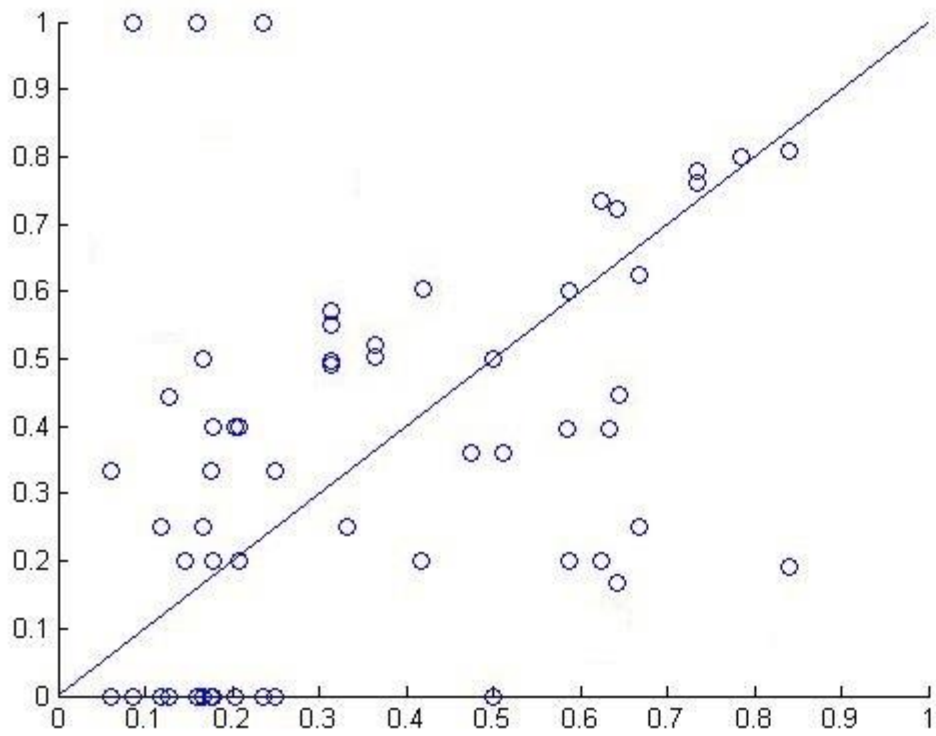

Fig. 7. Comparació de percentatges per a la validació de la propietat de Markov

Si el valors fossin iguals, caurien a la bisectriu. Veiem que no queda gaire clar que es compleixi la propietat de Markov. És probable que sigui degut a que hi hagi múltiples valors en un mateix punt que no es poden apreciar. A continuació es dibuixa un histograma per estudiar com és la relació entre els dos percentatges:

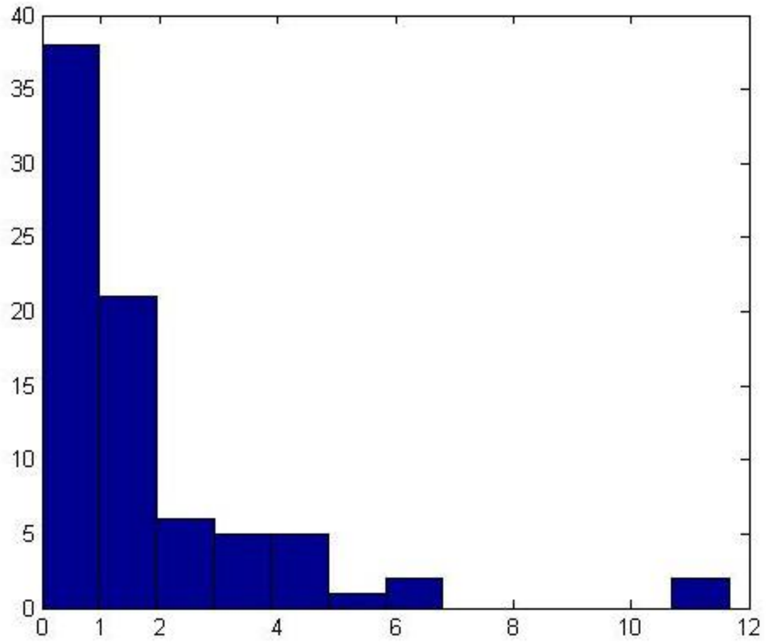

Fig. 8. Histograma de la relació entre els percentatges considerant o no l'estat anterior a la transició

A l'histograma es pot veure amb més claredat que la relació entre els dos percentatges tendeix a 1, per tant, per a poder seguir amb l'estudi, donem per vàlida la propietat de Markov.

5.3.1.4. Distribució d'equilibri. Valors i vectors.

Considerant les equacions (8) de l'apartat 4.4 i l' (11) de l'apartat 4.6.1, es dedueix que per tal de saber cap a on tendeix la cotització de les accions de Telefónica cal trobar el valor de $\lim_{k\to\infty} T^k$. Aleshores, sabent que:

$$T = S \cdot D \cdot S^{-1}. \qquad (22)$$

On D és la matriu diagonal de valors propis i S la matriu de canvi de base de vectors propis. Observem que:

$$T^k = (S \cdot D \cdot S^{-1})^k = S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot \ldots = S \cdot D^k \cdot S^{-1} \qquad (23)$$

El càlcul de valors i vectors propis s'ha realitzat mitjançant un petit script de Matlab. Cal remarcar que la comanda més important és *[VEP, VAP]=eig(T)*, que donada la matriu *T* retorna els seus vectors i valors propis en forma de matrius. Els resultats obtinguts són els següents:

La matriu de valors propis obtinguda és:

$$D = \begin{pmatrix} 0.1215 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3539 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4039 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5389 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6061 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7793 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9839 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8534 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8942 \end{pmatrix}$$

De la mateixa manera, obtenim la matriu de vectors propis següent:

$$S = \begin{pmatrix} 0.0004 & 0.3892 & 0.0271 & -0.0487 & 0.1050 & 0.1197 & 0.0416 & 0.0628 & 0.1449 & 0.2417 \\ -0.0013 & -0.6897 & -0.0403 & 0.0353 & -0.0360 & 0.0764 & 0.0786 & 0.1129 & 0.1533 & 0.3115 \\ 0.0075 & 0.5204 & -0.0260 & 0.2370 & -0.5819 & -0.4130 & 0.3021 & 0.3879 & -0.1250 & 0.2409 \\ -0.0332 & -0.2790 & 0.1406 & -0.4255 & 0.6477 & -0.2832 & 0.4795 & 0.5454 & -0.3959 & -0.2714 \\ 0.1398 & 0.0969 & -0.3291 & 0.3853 & 0.0167 & 0.5855 & 0.2795 & 0.1968 & -0.0086 & -0.5344 \\ -0.3317 & -0.0521 & 0.3881 & -0.1568 & -0.2307 & 0.2003 & 0.1315 & 0.0087 & 0.1316 & -0.2465 \\ 0.6547 & -0.0227 & 0.0084 & -0.3086 & -0.1587 & -0.0776 & 0.1973 & -0.1136 & 0.2852 & -0.2058 \\ -0.6178 & 0.0810 & -0.5439 & 0.0084 & 0.1546 & -0.4380 & 0.4603 & -0.3731 & 0.5132 & -0.2052 \\ 0.2365 & -0.0669 & 0.6071 & 0.6130 & 0.2901 & -0.1317 & 0.3946 & -0.3836 & -0.0519 & 0.1641 \\ -0.0549 & 0.0229 & -0.2320 & -0.3393 & -0.2067 & 0.3618 & 0.4110 & -0.4442 & -0.6468 & 0.5051 \end{pmatrix}$$

Observem que hi ha un únic valor propi $\lambda = 1$, i els altres són en mòdul més petits que 1, per tant, el límit:

$$\lim_{k\to\infty} D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En altres paraules, com que tots els valors propis sónpositius i inferiors a 1 excepte un que és igual a 1, el límit $\lim_{k\to\infty} D^k$ sempre serà una matriu plena de zeros excepte el valor propi

$\lambda = 1$, que es manté. I considerant aquest últim resultat i l'equació (22), s'observa finalment que el resultat del límit $\lim_{k\to\infty} T^k$, que és el valor que interessa, sempre serà el vector propi del valor propi $\lambda = 1$.

Així doncs, cal buscar el vector propi corresponent al valor propi $\lambda = 1$. Observant la matriu *S*, determinem que aquest vector propi és:

$$VEP = \begin{pmatrix} 0.0416 \\ 0.0786 \\ 0.3021 \\ 0.4795 \\ 0.2795 \\ 0.1315 \\ 0.1973 \\ 0.4603 \\ 0.3946 \\ 0.4110 \end{pmatrix}$$

Al ser un vector de probabilitats convé normalitzar-lo. Normalitzant el vector trobat, s'obté:

$$v = \begin{pmatrix} 0.0150 \\ 0.0283 \\ 0.1088 \\ 0.1727 \\ 0.1007 \\ 0.0474 \\ 0.0711 \\ 0.1658 \\ 0.1421 \\ 0.1481 \end{pmatrix}$$

I aquest és el vector d'equilibri per a la cadena de Markov de Telefónica.

Observant el vector *v*, determinem que la cotització de les accions de Telefónica tendeixen a llarg termini cap a l'estat 4, és a dir, a un preu entre els valors 11.2041 € i 11.526€.

5.3.2. Banco Santander

L'estudi per a la resta d'empreses s'ha dut de manera anàloga al de Telefónica. A continuació es troben les dades recollides, la definició dels seus estats, el resum de la verificació de la propietat de Markov i finalment el càlcul de la seva distribució d'equilibri.

5.3.2.1. Dades i definició d'estats

Els gràfics següents són la representació de les dades recollides per a Banco Santander. Es poden consultar totes les dades a l'Annex 1

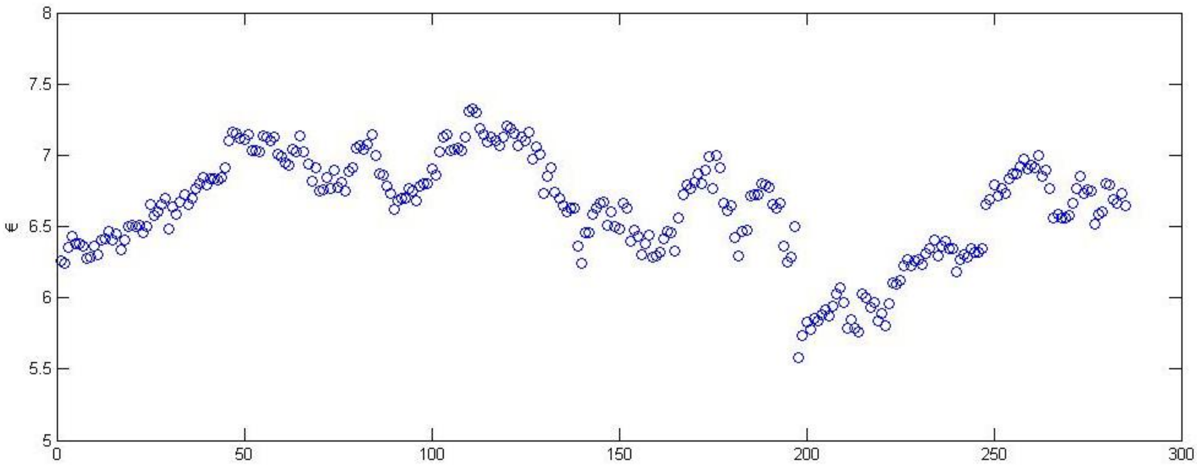

Fig. 9. Recull de dades de l'empresa Banco Santander

Dibuixades de forma contínua:

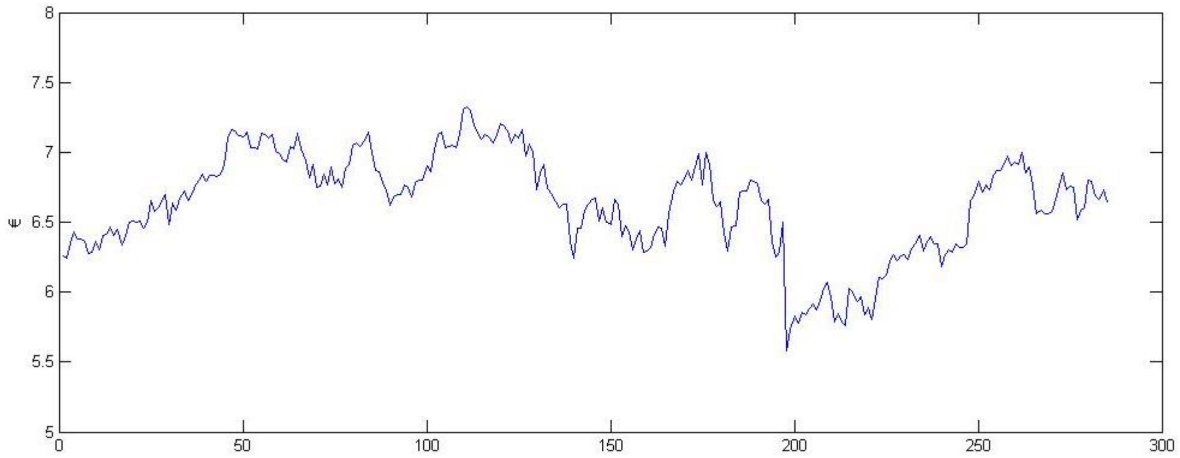

Fig. 10. Dades de Banco Santander expressades de manera contínua

Com en el cas de Telefónica, determinem els valors màxim i mínim per a trobar el rang de valors total. D'aquesta manera podrem definir els estats, que recordem que cadascun comprèn una desena part del rang de valors possibles. A la taula següent s'hi troba resumida aquesta informació:

MAX	7.324
MIN	5.583
RANG	5.583:7.324
INTERVAL	0.1741

Taula 6. Resum dades de Banco Santander

Així ja és possible definir l'interval de preus que comprendrà cada estat:

ESTAT	Lím. Inf.	Lím. Sup.
E1	5.583	5.7572
E2	5.7572	5.9314
E3	5.9314	6.1056
E4	6.1056	6.2798
E5	6.2798	6.454
E6	6.454	6.6282
E7	6.6282	6.8024
E8	6.8024	6.9766
E9	6.9766	7.1508
E10	7.1508	7.325

Taula 7. Definició d'estats per Santander

Un cop definits els estats, procedim a estudiar les transicions entre els estats per elaborar la matriu de transició.

5.3.2.2. Anàlisi de transicions. Matriu de transició

L'estudi s'ha realitzat de la mateixa manera que en l'apartat 5.3.1.2 per al cas de Telefónica. A la taula següent es troba la informació sobre els percentatges de cada transició entre estats:

Origen	Destí	Ocasions	Fracció
E1	E1	1	0.5000
	E2	1	0.5000
E2	E1	0	0.0000
	E2	11	0.7857
	E3	3	0.2143
E3	E2	2	0.2000
	E3	6	0.6000
	E4	2	0.2000
E4	E3	1	0.0714
	E4	8	0.5714
	E5	5	0.3571
E5	E4	4	0.0952
	E5	31	0.7381
	E6	7	0.1667
E6	E5	4	0.1081
	E6	20	0.5405
	E7	13	0.3514
E7	E6	10	0.1563
	E7	41	0.6406
	E8	13	0.2031
E8	E7	12	0.3077
	E8	20	0.5128
	E9	7	0.1795
E9	E8	5	0.1136
	E9	35	0.7955
	E10	4	0.0909
E10	E9	3	0.3750
	E10	5	0.625

Taula 8. Resum d'anàlisi de transicions entre estats de Santander

Amb els valors dels percentatges de transicions entre estats, construim la matriu de transició:

$$T = \begin{pmatrix} 0.5000 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0.7857 & 0.2143 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0.6000 & 0.2000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0714 & 0.5714 & 0.3571 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0952 & 0.7381 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1081 & 0.5405 & 0.3514 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1563 & 0.6406 & 0.2031 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3077 & 0.5128 & 0.1795 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1136 & 0.7955 & 0.0909 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3750 & 0.6250 \end{pmatrix}^{t}$$

Aquesta és la matriu de transició d'estats per a l'empresa Banco Santander. Tot seguit es comprovarà que el procés per a aquesta empresa també compleix la propietat de Markov.

5.3.2.3. Validació de la propietat de Markov

Recordem que per tal de saber si realment estem davant d'una cadena de Markov, cal que les transicions entre estats compleixin l'equació (1) de l'apartat 4.2.1. Però, recordem també, que per simplificar els càlculs ens limitarem a comprovar que es compleix només per als dos estats anteriors.

A la pàgina següent es mostra la taula-resum d'aquesta validació, on s'hauria de complir que els valors Percentatge X0->X1->X2 i Percentatge X1-X2 haurien de coincidir. A l'apartat 5.3.1.3 s'explica què és cada fila de la taula.

SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																											
0	0	1	0	0	0	0	1	8	2	0	3	0	0	2	0	2	4	0	1	0	1	1	0	0	1	5	1
OCASIONS X1 -> X2																											
1		1		0			11			3			2			6			2			1			8		
Percentatge Xo -> X1 -> X2																											
0	0	1	0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0.090909	0.727273	0.181818	0	1	0	0	1	0	0.333333	0.666667	0	0.5	0	0.5	1	0	0	0.125	0.625	0.125
Percentatge X1 -> X2																											
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0.785714	0.785714	0.785714	0.214286	0.214286	0.214286	0.2	0.2	0.2	0.6	0.6	0.6	0.2	0.2	0.2	0.071429	0.071429	0.071429	0.571429	0.571429	0.571429

SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																										
0	3	2	0	2	0	4	24	2	1	4	2	2	1	1	3	12	4	1	7	5	3	5	2	9	26	5
OCASIONS X1 -> X2																										
5			4			31			7			4			20			13			10			41		
Percentatge Xo -> X1 -> X2																										
0	0.6	0.4	0	0.5	0	0.129032	0.774194	0.064516	0.142857	0.571429	0.285714	0.5	0.25	0.25	0.15	0.6	0.2	0.076923	0.538462	0.384615	0.3	0.5	0.2	0.219512	0.634146	0.121951
Percentatge X1 -> X2																										
0.357143	0.357143	0.357143	0.095238	0.095238	0.095238	0.738095	0.738095	0.738095	0.166667	0.166667	0.166667	0.108108	0.108108	0.108108	0.540541	0.540541	0.540541	0.351351	0.351351	0.351351	0.15625	0.15625	0.15625	0.640625	0.640625	0.640625

SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																								
0	7	5	6	5	1	6	10	4	1	5	0	1	3	0	4	28	3	1	3	0	1	2	2	3
OCASIONS X1 -> X2																								
13			12			20			7			5			35			4			3		5	
Percentatge Xo -> X1 -> X2																								
0	0.538462	0.384615	0.5	0.416667	0.083333	0.3	0.5	0.2	0.142857	0.714286	0	0.2	0.6	0	0.114286	0.8	0.085714	0.25	0.75	0	0.333333	0.666667	0.4	0.6
Percentatge X1 -> X2																								
0.203125	0.203125	0.203125	0.307692	0.307692	0.307692	0.512821	0.512821	0.512821	0.179487	0.179487	0.179487	0.113636	0.113636	0.113636	0.795455	0.795455	0.795455	0.090909	0.090909	0.090909	0.375	0.375	0.625	0.625

Full de càlcul 2. Santander

Per a comprovar ràpidament si els valors Percentatge X0->X1->X2 i Percentatge X1-X2 coincideixen, cal observar el gràfic dels dels dos valors contrastats, on els punts haurien d'apropar-se tant com sigui possible a la bisectriu.

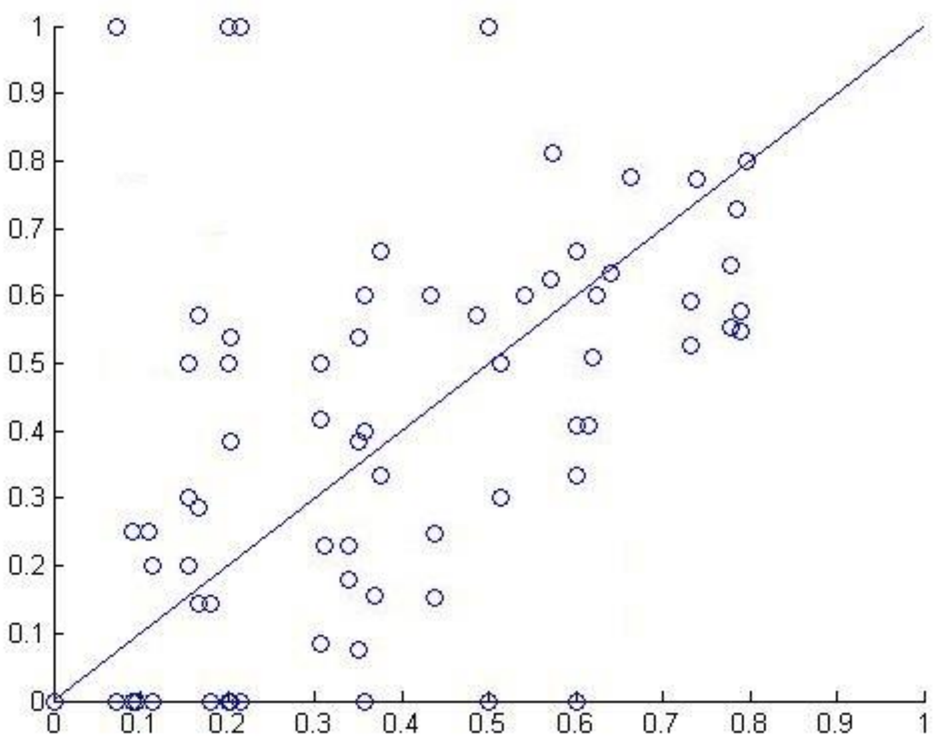

Fig. 11.Comparació de percentatges per a la validació de la propietat de Markov. Santander

Veiem que es mostra certa tendència a que els punts segueixin la bisectriu, per tant donarem per vàlida la propietat de Markov. Tot i així, s'ha construit un histograma per veure la relació entre els dos percentatges gràficament. L'histograma és el següent:

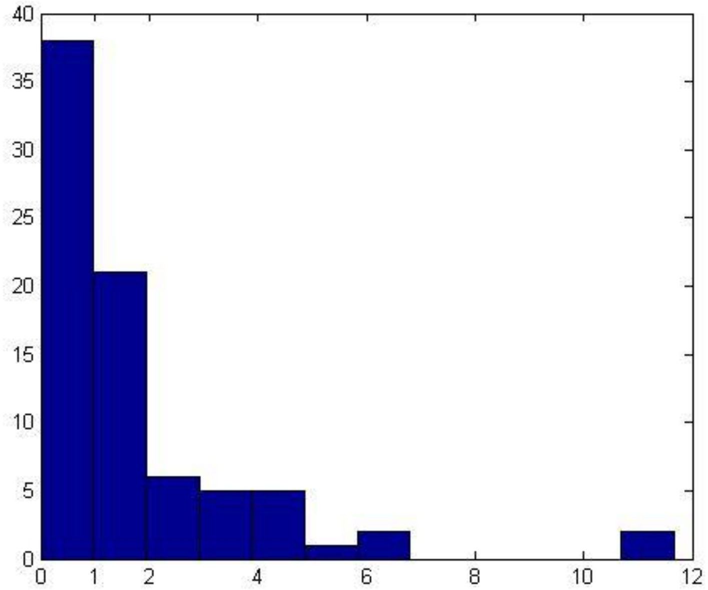

Fig. 12. Histograma de la relació entre els percentatges considerant o no l'estat anterior a la transició. Santander.

Veiem que els dos percentatges són com a mínim propers. Amb aquest histograma i el gràfic de la figura *Fig. 11* donem per validada la propietat de Markov i, per tant, podem concloure que l'evolució de la cotització de les accions de Banco Santander és una cadena de Markov.

5.3.2.4. Distribució d'equilibri. Valors i vectors propis.

Havent comprovat que realment es tracta d'una cadena de Markov i tenint la matriu de transició, poder procedir a calcular la distribució límit d'aquesta cadena.

Gràcies als càlculs realitzats a l'apartat 5.3.1.3, sabem que si la matriu de transició té un sol valor propi $\lambda = 1$, i la resta són positius i menors que 1, el vector d'equilibri serà el vector propi que correspon a aquest valor propi.

Amb l'ajuda del Matlab, trobem els valors i vectors propis:

$$D = \begin{pmatrix} 0.2106 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3609 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4465 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5264 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5775 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8312 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9479 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9087 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5000 \end{pmatrix}$$

On *D* és la matriu de valors propis. Veiem que efectivament la matriu de transició de Banco Santander té un únic valor propi $\lambda = 1$ i la resta són positius i menors que 1.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0428 \\ -0.0024 & -0.1082 & -0.0556 & -0.0887 & -0.0930 & 0.0151 & -0.0667 & 0.2093 & -0.1156 & -0.1061 \\ 0.0068 & 0.2298 & 0.0943 & 0.1149 & 0.0968 & 0.0162 & -0.0152 & 0.1697 & -0.0711 & 0.0445 \\ -0.0299 & -0.4448 & -0.0359 & 0.1475 & 0.2484 & 0.0454 & 0.1510 & 0.1985 & 0.0396 & 0.2559 \\ 0.0991 & 0.5007 & -0.1511 & -0.3111 & -0.1873 & 0.1701 & 0.4438 & 0.4285 & 0.2896 & -0.2854 \\ -0.3848 & -0.2776 & 0.5259 & 0.1219 & -0.5425 & 0.2623 & -0.1164 & 0.1755 & 0.3261 & -0.2169 \\ 0.7070 & -0.2148 & -0.1554 & 0.3209 & 0.0713 & 0.5897 & -0.6901 & 0.0005 & 0.4595 & 0.3607 \\ -0.5487 & 0.5123 & -0.5025 & -0.2583 & 0.6049 & 0.3893 & -0.2945 & -0.1999 & 0.0279 & 0.0828 \\ 0.1959 & -0.3010 & 0.5710 & -0.6044 & 0.2170 & 0.6149 & 0.4082 & -0.7662 & -0.7240 & -0.6540 \\ -0.0430 & 0.1036 & -0.2908 & 0.5573 & -0.4157 & 0.1491 & 0.1799 & -0.2157 & -0.2320 & 0.4757 \end{pmatrix}$$

I *S* és la matriu de vector propis.

Coneixent la conclusió a la qual s'ha arribat en l'apartat 5.3.1.3 i havent observat que la matriu de transició de Banco Santander té un únic valor propi $\lambda = 1$, i la resta són positius i menors que 1, podem concloure que el vector d'equilibri serà el vector propi d'aquest valor propi.

Aleshores, el vector propi en qüestió és:

$$VEP = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0151 \\ 0.0162 \\ 0.0454 \\ 0.1701 \\ 0.2623 \\ 0.5897 \\ 0.3893 \\ 0.6149 \\ 0.1491 \end{pmatrix}$$

Com ja s'ha dit anteriorment, per trobar el vector de probabilitats cal normalitzar-lo. Normalitzant el vector trobat, s'obté:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0067 \\ 0.0072 \\ 0.0201 \\ 0.0755 \\ 0.1165 \\ 0.2619 \\ 0.1729 \\ 0.2730 \\ 0.0662 \end{pmatrix}$$

El vector *v* és el vector d'equilibri de la cadena de Markov de Santander. Veiem que, a llarg termini, la cotització de les accions tendeix a l'estat 9, és a dir, el preu tendirà a estar entre 6,9766 € i 7.1508€.

5.3.3. Endesa

De la mateixa manera que en els casos anteriors, era es centrarà l'estudi en l'empresa Endesa. A continuació es presenten les dades del preu de les accions d'Endesa, la definició dels seus estats, la validació de la propietat de Markov i el càlcul del vector d'equilibri.

5.3.3.1. Dades i definició d'estats

Els gràfics següents representen els valors recollits del preu de les accions d'Endesa, tant de forma discreta com de forma contínua:

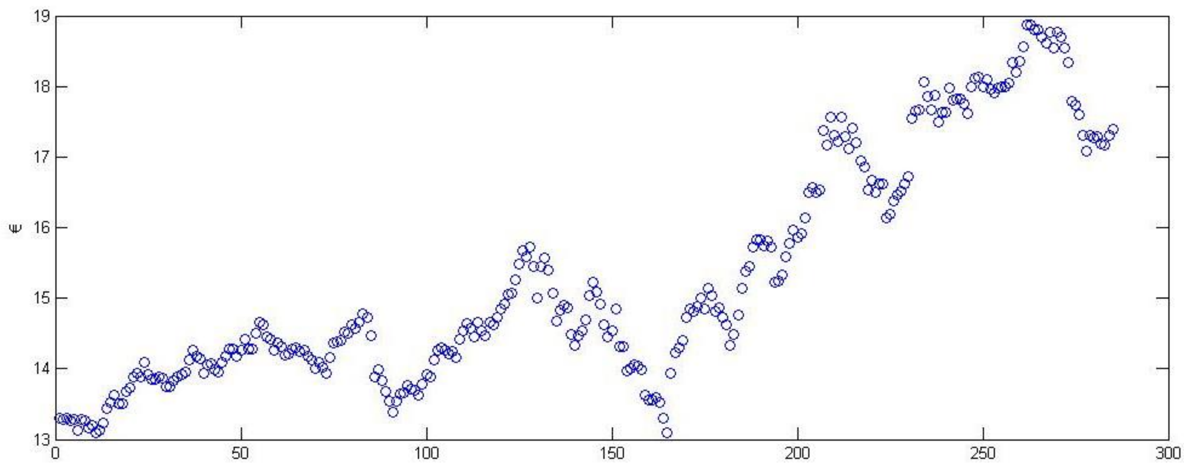

Fig. 13. Representació de dades recollides d'Endesa

I a continuació es troba el gràfic de manera contínua:

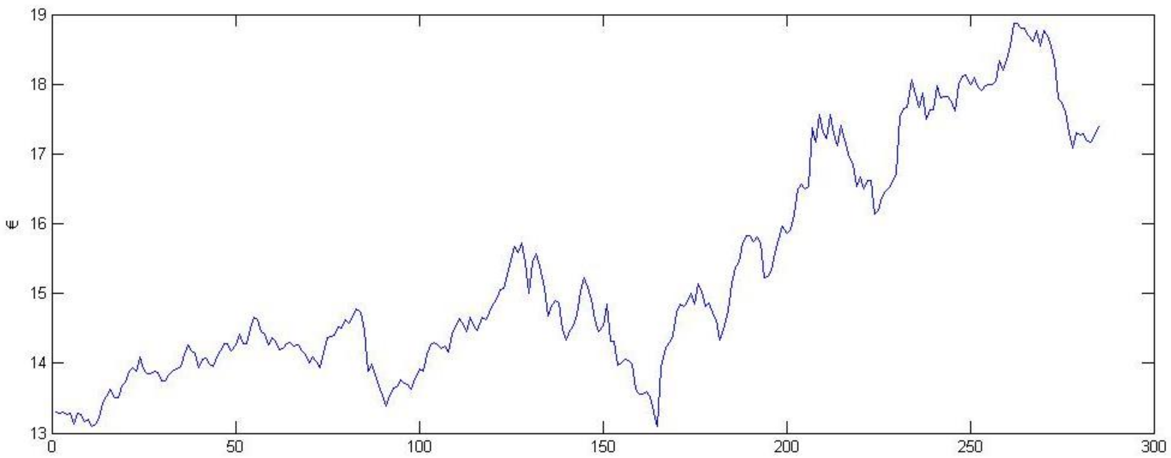

Fig. 14. Evolució contínua de les dades recollides d'Endesa

Analitzem les dades buscant el valor màxim i mínim i l'interval que aquests dos valors formen, per a poder així definir els estats:

MAX	18.875
MIN	13.088
RANG	13.088:18.875
INTERVAL	0.5787

Taula 9. Resum de dades d'Endesa

I tot seguit s'han definit els estats, basats en l'interval definit en la taula anterior:

ESTAT	Lím. Inf.	Lím. Sup.
E1	13.088	13.667
E2	13.667	14.246
E3	14.246	14.825
E4	14.825	15.404
E5	15.404	15.983
E6	15.983	16.562
E7	16.562	17.141
E8	17.141	17.72
E9	17.72	18.299
E10	18.299	18.878

Taula 10. Definició dels estats corresponents a l'empresa Endesa

Amb els estats definits podem procedir a analitzar les transicions entre els estats i així construir la matriu de transició.

5.3.3.2. Anàlisi de transicions. Matriu de transició

Seguint la metodologia utilitzada en les empreses anteriors, en la taula següent es troben els percentatges de transicions entre estats:

Origen	Destí	Ocasions	Fracció
E1	E1	27	0.8710
	E2	4	0.1290
E2	E1	3	0.0517
	E2	45	0.7759
	E3	10	0.1724
E3	E2	9	0.1385
	E3	48	0.7385
	E4	8	0.1231
E4	E3	7	0.2500
	E4	17	0.6071
	E5	4	0.1429
E5	E4	3	0.1579
	E5	15	0.7895
	E6	1	0.0526
E6	E5	0	0.0000
	E6	6	0.6000
	E7	4	0.4000
E7	E6	4	0.4000
	E7	3	0.3000
	E8	3	0.3000
E8	E7	3	0.1200
	E8	18	0.7200
	E9	4	0.1600
E9	E8	4	0.1818
	E9	16	0.7273
	E10	2	0.0909
E10	E9	2	0.1333
	E10	13	0.866667

Taula 11. Anàlisi de transicions entre estats de l'empresa Endesa.

Conegudes les fraccions que representen cada transició, procedim a construir la matriu de transició:

$$T = \begin{pmatrix} 0.8710 & 0.1290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0517 & 0.7759 & 0.1724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1385 & 0.7385 & 0.1231 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0.6071 & 0.1429 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1579 & 0.7895 & 0.0526 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0.6000 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4000 & 0.3000 & 0.3000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1200 & 0.7200 & 0.1600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1818 & 0.7273 & 0.0909 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1333 & 0.8667 \end{pmatrix}^t$$

Aquesta és la matriu de transició d’estats de l’empresa Endesa. Tot seguit es comprovarà si l’empresa Endesa compleix la propietat de Markov i per tant pot ser estudiada com a cadena de Markov.

5.3.3.3. Validació de la propietat de Markov

Recordem que per a comprovar si es compleix la propietat de Markov, s’utilitzarà l’equació (1) de l’apartat 4.2.1, però limitada a dos estats anteriors, és a dir:

$$P(X_k = i_k \,|X_{k-2} = i_{k-2}, X_{k-1} = i_{k-1}) = P(X_k = i_k \mid X_{k-1} = i_{k-1}) = p_{i_{k-1},i_k} \qquad (24)$$

S’han determinat, com en les empreses anteriors, els dos termes de la igualtat mitjançant una fulla d’Excel. Els resultats d’aquest anàlisi es troben a la pàgina següent:

E1-E1-E1	E2-E1-E1	E1-E1-E2	E2-E1-E2	E1-E2-E1	E2-E2-E1	E3-E2-E1	E1-E2-E2	E2-E2-E2	E3-E2-E2	E1-E2-E3	E2-E2-E3	E3-E2-E3	E2-E3-E2	E3-E3-E2	E4-E3-E2	E2-E3-E3	E3-E3-E3	E4-E3-E3	E2-E3-E4	E3-E3-E4	E4-E3-E4	E3-E4-E3	E4-E4-E3	E5-E4-E3	E3-E4-E4	E4-E4-E4	E5-E4-E4
SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																											
24	2	3	1	0	3	0	4	36	5	0	6	4	3	6	0	7	37	4	0	5	3	3	4	0	5	10	2
OCASIONS X1 -> X2																											
27		4		3			45			10			9			48			8			7			17		
Percentatge Xo -> X1 -> X2																											
0.888888889	0.074074074	0.75	0.25	0	1	0	0.088888889	0.8	0.111111111	0	0.6	0.4	0.333333333	0.666666667	0	0.145833333	0.770833333	0.083333333	0	0.625	0.375	0.428571429	0.571428571	0	0.294117647	0.588235294	0.117647059
Percentatge X1 -> X2																											
0.870967742	0.870967742	0.129032258	0.129032258	0.051724138	0.051724138	0.051724138	0.775862069	0.775862069	0.775862069	0.172413793	0.172413793	0.172413793	0.138461538	0.138461538	0.138461538	0.738461538	0.738461538	0.738461538	0.123076923	0.123076923	0.123076923	0.25	0.25	0.25	0.607142857	0.607142857	0.607142857

E3-E4-E5	E4-E4-E5	E5-E4-E5	E4-E5-E4	E5-E5-E4	E6-E5-E4	E4-E5-E5	E5-E5-E5	E6-E5-E5	E4-E5-E6	E5-E5-E6	E6-E5-E6	E5-E6-E5	E6-E6-E5	E7-E6-E5	E5-E6-E6	E6-E6-E6	E7-E6-E6	E5-E6-E7	E6-E6-E7	E7-E6-E7	E6-E7-E6	E7-E7-E6	E8-E7-E6	E6-E7-E7	E7-E7-E7	E8-E7-E7
SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																										
0	3	1	0	3	0	4	11	0	0	1	0	0	0	0	1	3	2	0	2	2	2	2	0	2	0	1
OCASIONS X1 -> X2																										
4			3			15			1			0			6			4			4			3		
Percentatge Xo -> X1 -> X2																										
0	0.75	0.25	0	1	0	0.266666667	0.733333333	0	0	0	0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0.166666667	0.5	0.333333333	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.666666667	0	0.333333333
Percentatge X1 -> X2																										
0.142857143	0.142857143	0.142857143	0.157894737	0.157894737	0.157894737	0.789473684	0.789473684	0.789473684	0.052631579	0.052631579	0.052631579	0	0	0	0.6	0.6	0.6	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.3	0.3	0.3

E6-E7-E8	E7-E7-E8	E8-E7-E8	E7-E8-E7	E8-E8-E7	E9-E8-E7	E7-E8-E8	E8-E8-E8	E9-E8-E8	E7-E8-E9	E8-E8-E9	E9-E8-E9	E8-E9-E8	E9-E9-E8	E10-E9-E8	E8-E9-E9	E9-E9-E9	E10-E9-E9	E8-E9-E10	E9-E9-E10	E10-E9-E10	E9-E10-E9	E10-E10-E9	E9-E10-E10	E10-E10-E10
SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																								
0	1	2	0	3	0	3	12	2	0	2	2	1	3	0	3	12	1	0	1	1	1	1	1	12
OCASIONS X1 -> X2																								
3			3			18			4			4			16			2			2		13	
Percentatge Xo -> X1 -> X2																								
0	0.333333333	0.666666667	0	1	0	0.166666667	0.666666667	0.111111111	0	0.5	0.5	0.25	0.75	0	0.1875	0.75	0.0625	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.076923077	0.923076923
Percentatge X1 -> X2																								
0.3	0.3	0.3	0.12	0.12	0.12	0.72	0.72	0.72	0.16	0.16	0.16	0.181818182	0.181818182	0.181818182	0.727272727	0.727272727	0.727272727	0.090909091	0.090909091	0.090909091	0.133333333	0.133333333	0.866666667	0.866666667

Full de càlcul 3. Endesa

Tot seguit es compararan els valors de Percentatge X0->X1->X2 amb els de Percentatge X1->X2, que són respectivament els termes de cada banda de la igualtat de l’equació (24):

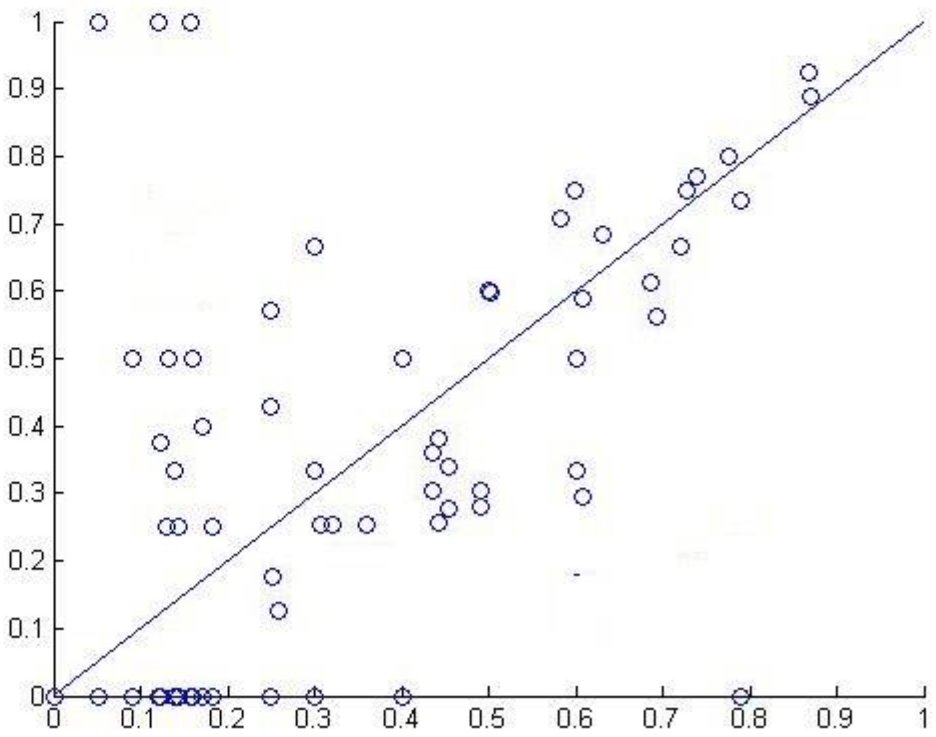

Fig. 15. Comparació dels percentatges de transició tenint en compte o no l’estat anterior.

Sabem que si es complís la propietat a la perfecció, els punts estarien tots sobre la bisectriu. Tot i que hi ha alguns valors relativament allunyats de la bisectriu, es veu de manera força clara que la relació entre els dos percentatges és propera a 1 en molts dels casos, per tant podem donar per vàlida la propietat de Markov.

Com en les altres empreses, s’ha construit un histograma per obtenir més informació:

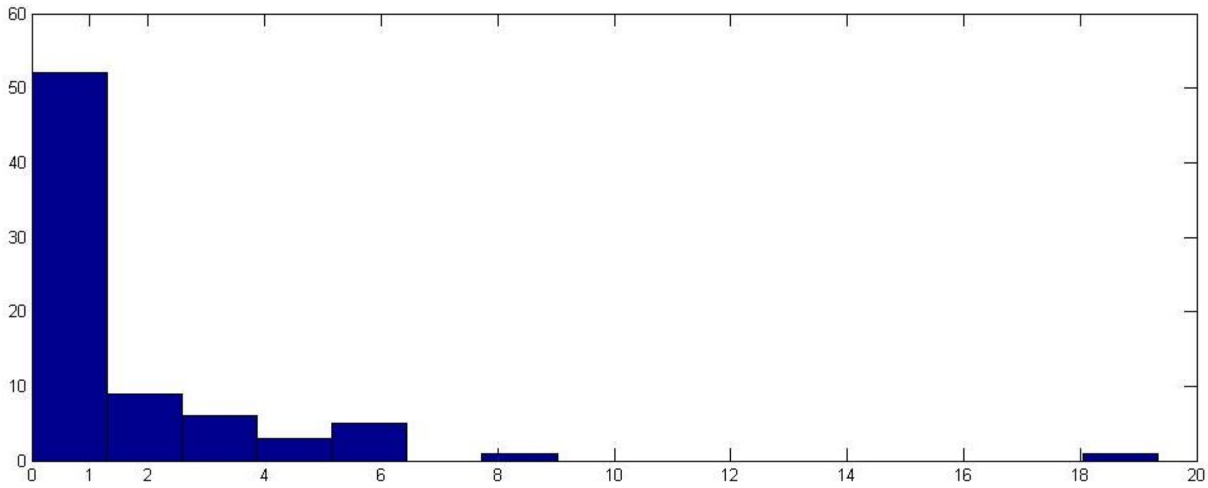

Fig. 16. Histograma de la relació entre probabilitats de transició tenint en compte o no l'estat anterior.

En aquest cas resulta rellevant la diferència entre la quantitat de valors que s'obtenen per sota d'1 i els que s'obtenen entre 1 i 2, probablement degut a la presència de percentatges amb valor 0. Tot i això, i amb la interpretació feta del gràfic de la Fig. 15, es dóna la propietat de Markov com a vàlida en aquest procés, per tant pot ser tractat com a una cadena de Markov.

Havent fet aquesta comprovació, procedim a calcular el vector d'equilibri de la cadena.

5.3.3.4. Distribució d'equilibri. Valors i vectors propis.

Amb la matriu de transició calculada i havent validat la propietat de Markov, podem finalment calcular la distribució d'equilibri per determinar quin és el comportament a llarg termini d'aquesta cadena.

Hem vist anteriorment, a l'apartat 5.3.1.3, que si la matriu de transició té un sol valor propi $\lambda = 1$, i la resta són positius i inferiors a 1, el vector d'equilibri serà el vector propi que correspon a aquest valor propi.

Mitjançant Matlab, obtenim la matriu següent de valors propis:

$$D = \begin{pmatrix} -0.0130 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4213 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5395 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6481 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7807 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8194 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9945 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8987 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9067 \end{pmatrix}$$

On podem veure que existeix un sol valor propi tal que $\lambda = 1$, i tota la resta són positius i més petits, per tant podem afirmar que el vector d'equilibri és el vector propi associat a aquest vector propi.

Obtenim la matriu de vectors propis:

$$S = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0309 & 0.0000 & 0.1659 & 0.0000 & 0.3663 & -0.0000 & 0.1721 & 0.2595 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.2689 & -0.0000 & -0.7151 & -0.0000 & -0.3649 & -0.0000 & 0.4109 & 0.1389 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6597 & 0.0000 & 0.5054 & -0.0000 & -0.4562 & -0.0000 & 0.4884 & -0.1186 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.6516 & 0.0000 & 0.3104 & 0.0000 & 0.1039 & -0.0000 & 0.2168 & -0.1718 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.2528 & -0.0000 & -0.3135 & 0.0000 & 0.4953 & -0.0000 & 0.1511 & -0.2248 & -0.0000 \\ -0.5123 & -0.0190 & 0.1817 & 0.0361 & -0.3819 & 0.0835 & 0.2553 & -0.1379 & 0.3854 & -0.4492 \\ 0.7851 & -0.0248 & -0.0275 & 0.0456 & -0.1725 & -0.0194 & 0.2553 & -0.1559 & 0.3173 & -0.3445 \\ -0.3399 & 0.0382 & -0.6607 & 0.0119 & 0.5819 & -0.3622 & 0.6383 & -0.4425 & 0.2985 & -0.2443 \\ 0.0749 & -0.0220 & 0.7013 & -0.0799 & 0.4789 & -0.1661 & 0.5617 & -0.4107 & -0.2303 & 0.3175 \\ -0.0077 & 0.0045 & -0.1949 & 0.0332 & -0.5064 & 0.3198 & 0.3830 & -0.2922 & -0.6542 & 0.7205 \end{pmatrix}$$

On es pot observar que el vector propi associat al valor propi $\lambda = 1$ és:

$$VEP = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2553 \\ 0.2553 \\ 0.6383 \\ 0.5617 \\ 0.3830 \end{pmatrix}$$

Per obtenir un vector de probabilitat convé normalitzar-lo. Normalitzant el vector *VEP* trobat, s'obté:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1220 \\ 0.1220 \\ 0.3049 \\ 0.2683 \\ 0.1829 \end{pmatrix}$$

El vector *v* és el vector d'equilibri de la cadena de Markov d'Endesa. Observant-lo, es pot observar que, a llarg termini, el preu de les accions de l'empresa tendirà a estar a l'estat 8, és a dir, a un preu d'entre 17.141 € i 17.72 €.

5.3.4. Ferrovial

L'última empresa que s'ha estudiat és Ferrovial. A continuació es troben el resum de les dades recollides, la definició dels seus estats, l'anàlisi de la propietat de Markov i la distribució límit de la cadena.

5.3.4.1. Dades i definició d'estats

A les figures següents es mostren gràficament les dades obtingudes per a l'empresa Ferrovial:

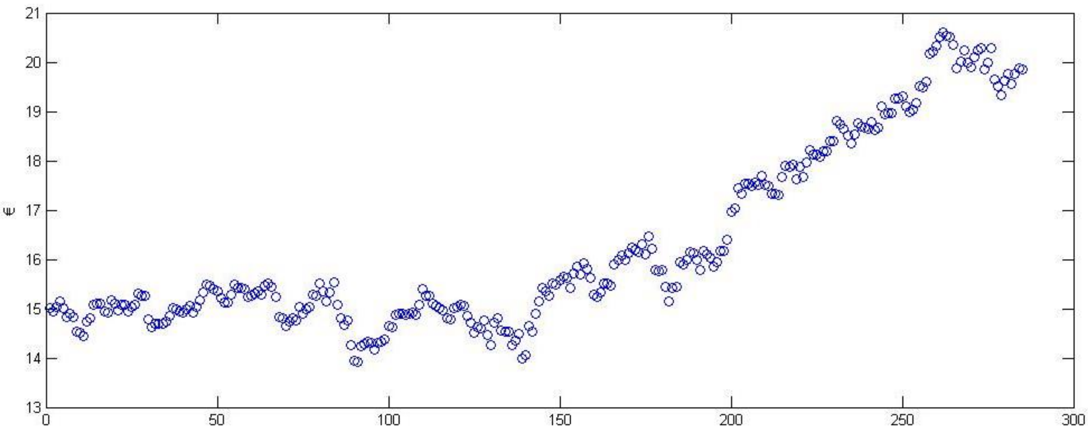

Fig. 17. Dades obtingudes per a l'empresa Ferrovial

I en la figura següent, de forma contínua:

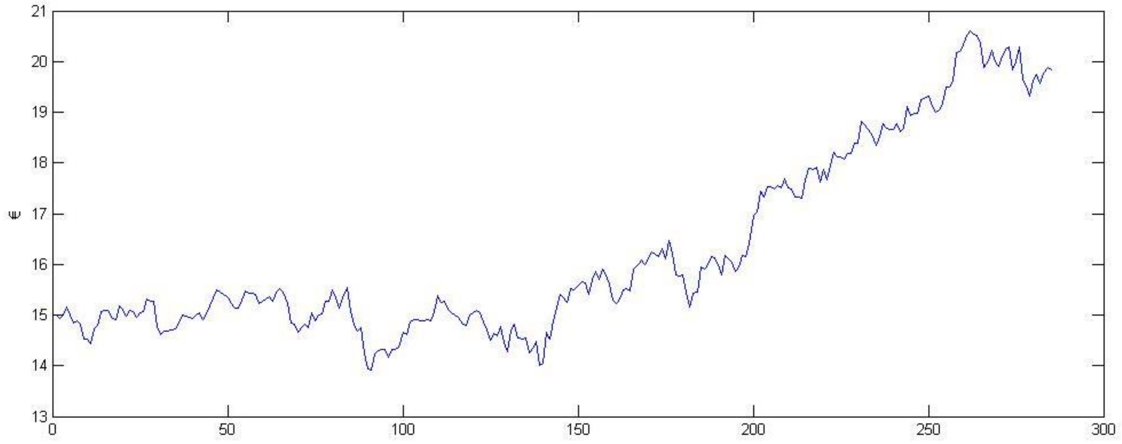

Fig. 18. Dades de Ferrovial de forma contínua

A continuació es mostra la taula resum de les dades, per tal de conèixer el rang de valors total i poder així definir els estats:

MAX	**20.6**
MIN	**13.91**
RANG	**13.91:20.60**
INTERVAL	**0.669**

Taula 12. Resum de les dades de Ferrovial

Amb l'interval determinat, es procedeix a definir l'interval de preus que comprendrà cada estat:

ESTAT	Lím. Inf.	Lím. Sup.
E1	13.91	14.579
E2	14.579	15.248
E3	15.248	15.917
E4	15.917	16.586
E5	16.586	17.255
E6	17.255	17.924
E7	17.924	18.593
E8	18.593	19.262
E9	19.262	19.931
E10	19.931	20.601

Taula 13. Definició d'estats per a Ferrovial

Amb els estats definits, podem determinar a quin estat correspon cada valor les dades i analitzar les transicions entre elles.

5.3.4.2. Anàlisi de transicions. Matriu de transició

Seguint la metodologia que s'ha aplicat a l'apartat 5.3.1.2 per al cas amb Telefónica, a la taula següent es troba la informació de les transicions entre estats de Ferrovial:

Origen	Destí	Ocasions	Fracció
E1	E1	20	0.7692
	E2	6	0.2308
E2	E1	6	0.0659
	E2	75	0.8242
	E3	10	0.1099
E3	E2	9	0.1525
	E3	45	0.7627
	E4	5	0.0847
E4	E3	4	0.1739
	E4	18	0.7826
	E5	1	0.0435
E5	E4	0	0.0000
	E5	1	0.5000
	E6	1	0.5000
E6	E5	0	0.0000
	E6	19	0.9500
	E7	1	0.0500
E7	E6	0	0.0000
	E7	10	0.8333
	E8	2	0.1667
E8	E7	1	0.0526
	E8	16	0.8421
	E9	2	0.1053
E9	E8	1	0.0625
	E9	11	0.6875
	E10	4	0.2500
E10	E9	4	0.2500
	E10	12	0.75

Taula 14. Resum de l'anàlisi de les transicions entre estats de Ferrovial

Conegudes les probabilitats de transició, es construeix la matriu de transició següent:

$$T = \begin{pmatrix} 0.7692 & 0.2308 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0659 & 0.8242 & 0.1099 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1525 & 0.7627 & 0.0847 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1739 & 0.7826 & 0.0435 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0.5000 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0.9500 & 0.0500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0.8333 & 0.1667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0526 & 0.8421 & 0.1053 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0.6875 & 0.2500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2500 & 0.7500 \end{pmatrix}^t$$

Aquesta, la matriu *T*, és la matriu de transició d'estats per a l'empresa Ferrovial.

Com ja s'ha vist anteriorment, abans de determinar la distribució límit cal comprovar que es compleix la propietat de Markov.

5.3.4.3. Validació de la propietat de Markov

Recordem que la propietat a validar és la que defineix l'equació (24) de l'apartat 5.3.3.3. Per a comprovar si es compleix, s'ha utilitzat la mateixa metodologia que en la resta d'empreses.

A la pàgina següent, es pot observar una taula resum amb els resultats:

E1-E1-E1	E2-E1-E1	E1-E1-E2	E2-E1-E2	E1-E2-E1	E2-E2-E1	E3-E2-E1	E1-E2-E2	E2-E2-E2	E3-E2-E2	E1-E2-E3	E2-E2-E3	E3-E2-E3	E2-E3-E2	E3-E3-E2	E4-E3-E2	E2-E3-E3	E3-E3-E3	E4-E3-E3	E2-E3-E4	E3-E3-E4	E4-E3-E4	E3-E4-E3	E4-E4-E3	E5-E4-E3	E3-E4-E4	E4-E4-E4	E5-E4-E4
SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																											
16	4	4	2	1	5	0	5	64	5	0	6	4	0	9	0	10	34	1	0	2	3	1	3	0	4	14	0
OCASIONS X1 -> X2																											
20		6		6			75			10			9			45			5			4			18		
Percentatge Xo -> X1 -> X2																											
0.8	0.2	0.666667	0.333333	0.166667	0.833333	0	0.066667	0.853333	0.066667	0	0.6	0.4	0	1	0	0.222222	0.755556	0.022222	0	0.4	0.6	0.25	0.75	0	0.222222	0.777778	0
Percentatge X1 -> X2																											
0.769231	0.769231	0.230769	0.230769	0.065934	0.065934	0.065934	0.824176	0.824176	0.824176	0.10989	0.10989	0.10989	0.152542	0.152542	0.152542	0.762712	0.762712	0.762712	0.084746	0.084746	0.084746	0.173913	0.173913	0.173913	0.782609	0.782609	0.782609

E3-E4-E5	E4-E4-E5	E5-E4-E5	E4-E5-E4	E5-E5-E4	E6-E5-E4	E4-E5-E5	E5-E5-E5	E6-E5-E5	E4-E5-E6	E5-E5-E6	E6-E5-E6	E5-E6-E5	E6-E6-E5	E7-E6-E5	E5-E6-E6	E6-E6-E6	E7-E6-E6	E5-E6-E7	E6-E6-E7	E7-E6-E7	E6-E7-E6	E7-E7-E6	E8-E7-E6	E6-E7-E7	E7-E7-E7	E8-E7-E7
SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																										
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	18	0	0	1	0	0	0	0	1	8	1
OCASIONS X1 -> X2																										
1			0			1			1			0			19			1			0			10		
Percentatge Xo -> X1 -> X2																										
0	1	0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	1	0	0	0	1	0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0.052632	0.947368	0	0	1	0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0.1	0.8	0.1
Percentatge X1 -> X2																										
0.043478	0.043478	0.043478	0	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0.95	0.95	0.95	0.05	0.05	0.05	0	0	0	0.833333	0.833333	0.833333

E6-E7-E8	E7-E7-E8	E8-E7-E8	E7-E8-E7	E8-E8-E7	E9-E8-E7	E7-E8-E8	E8-E8-E8	E9-E8-E8	E7-E8-E9	E8-E8-E9	E9-E8-E9	E8-E9-E8	E9-E9-E8	E10-E9-E8	E8-E9-E9	E9-E9-E9	E10-E9-E9	E8-E9-E10	E9-E9-E10	E10-E9-E1(	E9-E10-E9	E10-E10-E9	E9-E10-E10	E10-E10-E1
SUMA TOTAL Xo -> X1 -> X2																								
0	2	0	0	1	0	2	13	1	0	2	0	0	1	0	2	8	1	0	1	3	0	4	4	8
OCASIONS X1 -> X2																								
2			1			16			2			1			11			4			4		12	
Percentatge Xo -> X1 -> X2																								
0	1	0	0	1	0	0.125	0.8125	0.0625	0	1	0	0	1	0	0.181818	0.727273	0.090909	0	0.25	0.75	0	1	0.333333333	0.666667
Percentatge X1 -> X2																								
0.166667	0.166667	0.166667	0.052632	0.052632	0.052632	0.842105	0.842105	0.842105	0.105263	0.105263	0.105263	0.0625	0.0625	0.0625	0.6875	0.6875	0.6875	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.75	0.75

Full de càlcul 4. Ferrovial

L’objectiu, com ja s’ha esmentat anteriorment, és que els valors Percentatge X0->X1->X2 i Percentatge X1->X2 siguin molt similars, tal i com indica l’equació (24).

Per a estudiar els resultats, s’ha realitzat la gràfica següent:

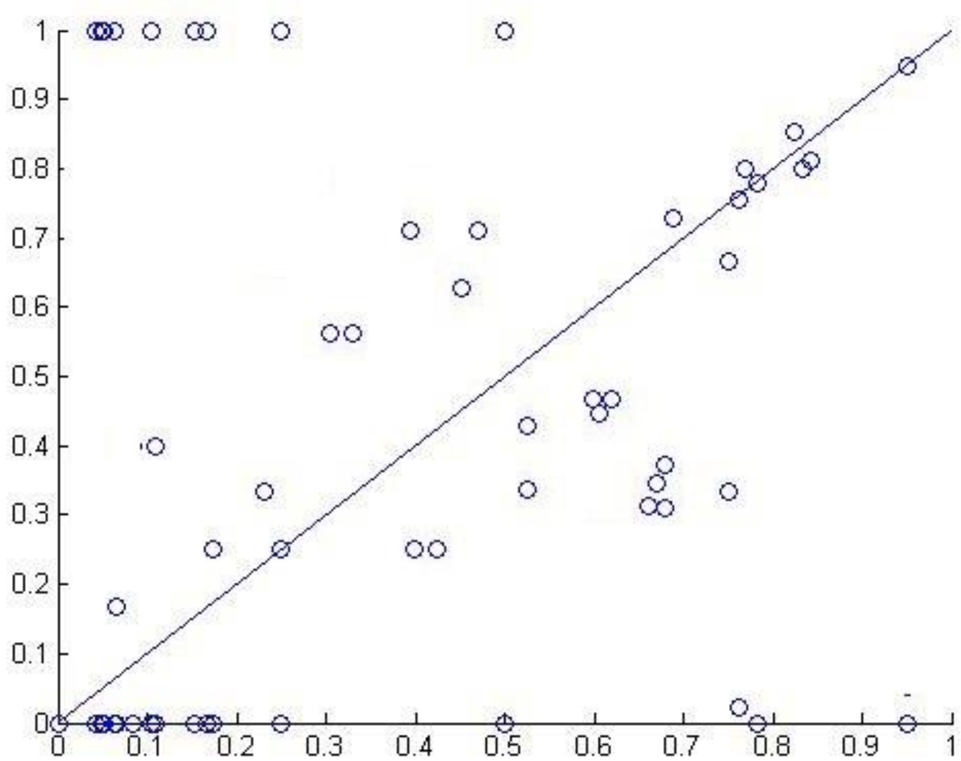

Fig. 19. Comparació de les probabilitats de transició obingudes per a comprovar la propietat de Markov

Veiem que en aquest cas hi ha força valors que cauen en zero. Tot i això, es pot seguir apreciant la tendència dels punts a seguir la bisectriu.

Per tenir un altre punt de vista, s’ha construit l’histograma següent:

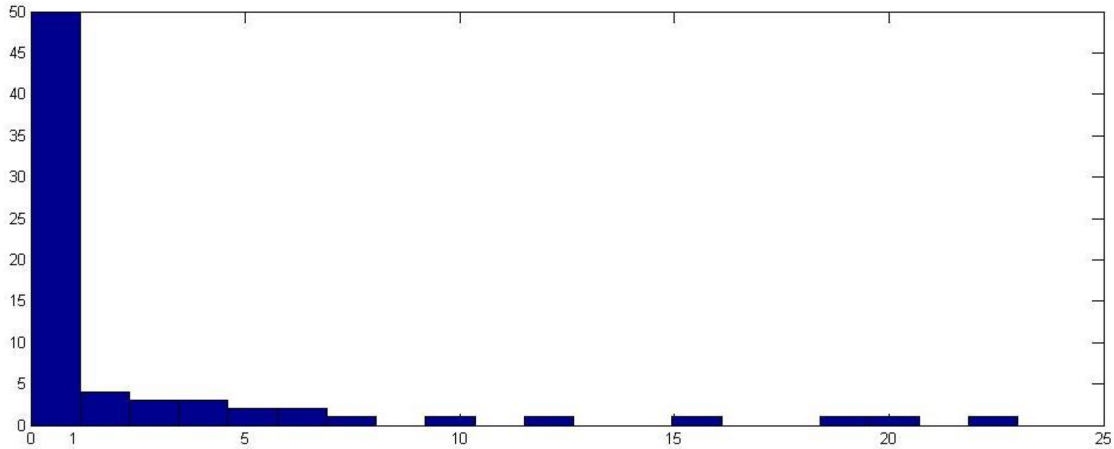

Fig. 20. Histograma de la relació entre les probabilitats de transició considerant o no l'estat anterior

S'observa clarament que els valors s'agrupen prop de l'1, tot i que cal tenir en compte que hi contribueixen una quantitat significativa de zeros.

Observant la posició dels punts en el gràfic de la Fig. 19, on els que estan situats a zero tendeixen a estar a prop de la bisectriu, donem per vàlida la propietat de Markov.

Així doncs, un cop hem validat que realment estem davant una cadena de Markov podem procedir a calcular-ne la distribució límit.

5.3.4.4. Distribució d'equilibri. Valors i vectors propis

Com hem vist en els casos de les altres empreses estudiades, necessitem saber si existeix un únic valor propi $\lambda = 1$ i la resta són positius i més petits per poder afirmar que el vector propi d'aquest valor propi és el vector de distribució límit.

Aleshores, amb l'ajuda del Matlab, obtenim la matriu *D* de valors propis de *T* següent:

$$D = \begin{pmatrix} 0.4564 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7061 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7442 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8545 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9123 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9948 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9500 \end{pmatrix}$$

Observem que només existeix un valor propi de *D* tal que $\lambda = 1$ i elss altres són positius i inferiors, per tant, tal i com s'ha vist a l'apartat 5.3.1.4, podem afirmar que el vector propi associat al valor propi $\lambda = 1$ és el vector de distribució límit.

Obtenim la matriu *S* de vectors propis següent:

$$S = \begin{pmatrix} 0.0000 & -0.0000 & -0.2213 & -0.5248 & 0.0000 & 0.3388 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1487 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.6238 & 0.5022 & -0.0000 & 0.4382 & -0.0000 & 0.0000 & -0.5085 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.6502 & 0.4053 & -0.0000 & -0.4254 & -0.0000 & 0.0000 & -0.3437 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.2765 & -0.4492 & 0.0000 & -0.5014 & -0.0000 & 0.0000 & -0.1373 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.6601 & 0.1443 & -0.0947 & 0.0000 & -0.0615 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0121 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.7334 & -0.1967 & 0.1942 & 0.0000 & 0.3220 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1348 & -0.5180 \\ 0.0182 & 0.1169 & 0.0449 & -0.1499 & 0.4785 & -0.0544 & -0.3918 & -0.1213 & 0.0380 & -0.3236 \\ -0.1302 & -0.0435 & -0.0264 & 0.1778 & -0.8099 & -0.3278 & -0.5875 & -0.3843 & 0.2445 & -0.2252 \\ 0.7547 & -0.0733 & -0.0103 & 0.0130 & -0.0078 & 0.0800 & 0.3854 & -0.6472 & 0.4960 & 0.4742 \\ -0.6427 & 0.0733 & 0.0154 & -0.0739 & 0.3392 & 0.1915 & 0.5939 & -0.6472 & 0.5066 & 0.5927 \end{pmatrix}$$

On el vector propi associat al valor propi $\lambda = 1$ és:

$$VEP = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1213 \\ 0.3843 \\ 0.6472 \\ 0.6472 \end{pmatrix}$$

Per obtenir un vector de probabilitat convé normalitzar-lo. Normalitzant el vector *VEP* trobat, s'obté:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0674 \\ 0.2135 \\ 0.3595 \\ 0.3595 \end{pmatrix}$$

El vector *v*, llavors, és el vector d'equilibri de la cadena de Markov de Ferrovial. En aquest cas, veiem que trobem dos components del vector iguals. Per tant, l'únic que es pot dir, és que a llarg termini el valor de la cotització de Ferrovial tendirà a estar entre el límit inferior de l'estat 9 i el límit superior de l'estat 10, o el que és el mateix, entre 19.262 € i 20.601 €.

6. Cost del treball realitzat

El cost del treball és el cost del software i material que ha estat necessari per a la realització del mateix, i es pot veure desglossat a la taula inferior:

Concepte	Cost
Ordinador portàtil MSI GE-60 2PE	999 €
Windows 10 Home	135 €
Matlab Student License	35 €
Office 365 Hogar	99 €
Serveis de copisteria	20 €
CD + caràtula	5 €
COST TOTAL	**1293.00 €**

7. Impacte medi ambiental

Degut a que aquest és un treball de caire matemàtic, on durant la redacció del treball hi ha hagut cap contacte amb el medi ambient, ni n'hi hauria en una hipotètica implementació, es considera que l'impacte ambiental del treball és nul.

Indirectament, per exemple, es podria considerar que els fulls que s'han imprès contribueixen a la desforestació, però al no tractar-se d'un treball d'una extensió exagerada ni tampoc d'un treball amb un cost energètic d'implementació elevat, es considera negligible qualsevol impacte ambiental indirecte que el treball pugui ocasionar.

Conclusions

Un cop finalitzat el treball, pot considerar-se que els seus objectius han estat complerts. S'ha aconseguit fer una breu introducció del que són els mercats financers abans d'entrar a dissenyar un model per a predir-los, així com també s'han explicat què són les cadenes de Markov abans d'utilitzar-les per a intentar predir un mercat financer.

Posteriorment, mitjançant l'estudi de quatre empreses determinades, ha resultat clar que, genèricament, l'evolució del preu de les accions d'empreses que cotitzen a la Borsa, un mercat financer, compleix la propietat de Markov i per tant pot ser tractada com a una cadena de Markov.

Aquesta última conclusió resulta molt interessant, ja que obre la porta a altres possibles treballs en un futur relacionats amb aquesta temàtica, com per exemple la creació d'un model que gestioni una certa cartera de valors amb diverses empreses, enlloc de fer-ho individualment com s'ha tractat en aquest treball, o estudiar quines diferències es troben si enlloc de recollir dades d'un període d'un any se n'agafen durant una setmana.

Agraïments

A la professora M. Isabel Garcia Planas, directora del treball, no només per haver-me fet de guia en aquest projecte, sinó també per la paciència i comprensió que ha hagut de tenir en algunes ocasions.

ETSEIB

Bibliografia

Referències bibliogràfiques

[1] WIKIPEDIA-FINANCIAL MARKET*. [https://en.wikipedia.org/wiki/Financial_market, 16 d'agost de 2015]*.

[2] JÁUREGUI RENAULT, MANUEL, DR. *Cadenas de Màrkov*, 2012.

[3] GARCÍA PLANAS, M. ISABEL; DOMÍNGUEZ GARCÍA, JOSÉ LUIS *Introducción a la teoría de matrices positivas. Aplicaciones*. Universitat Politècnica de Catalunya, 2013.

[4] DIARI EXPANSIÓN. *[http://www.expansion.com/especiales/20aniversario/introduccion/historia.html, 20 d'agost de 2015].]*

[5] Lagunilla López, Palma, El origen de la Bolsa de Valores. [http://www.muyhistoria.es/gyj/sitemap, 2 de setembre de 2015]

[6] KEITH PILBEAM. *Finance and financial markets.*Palgrave, 2013.

[7] WIKIPEDIA-FINANCIAL MODELING, *[https://en.wikipedia.org/wiki/Financial_modeling, 16 d'agost de 2015*].

[8] RICHARD A. BREALEY; STEWART C. MYERS; BRATTLE GROUP. *Capital Investment and valuation.* McGraw-Hill Professional, 2003.

ANNEX

Dades utilitzades

Telefónica

01/04/2014	10.403	E1	02/06/2014	11.490	E4
02/04/2014	10.389	E1	03/06/2014	11.397	E4
03/04/2014	10.489	E1	04/06/2014	11.369	E4
04/04/2014	10.543	E1	05/06/2014	11.467	E4
07/04/2014	10.588	E2	06/06/2014	11.547	E5
08/04/2014	10.534	E1	09/06/2014	11.654	E5
09/04/2014	10.633	E2	10/06/2014	11.673	E5
10/04/2014	10.525	E1	11/06/2014	11.570	E5
11/04/2014	10.371	E1	12/06/2014	11.640	E5
14/04/2014	10.516	E1	13/06/2014	11.729	E5
15/04/2014	10.462	E1	16/06/2014	11.659	E5
16/04/2014	10.620	E2	17/06/2014	11.659	E5
17/04/2014	10.660	E2	18/06/2014	11.878	E6
22/04/2014	10.809	E2	19/06/2014	11.962	E6
23/04/2014	10.841	E2	20/06/2014	11.999	E6
24/04/2014	10.909	E3	23/06/2014	11.911	E6
25/04/2014	10.701	E2	24/06/2014	11.911	E6
28/04/2014	10.796	E2	25/06/2014	11.752	E5
29/04/2014	10.949	E3	26/06/2014	11.780	E5
30/04/2014	10.904	E3	27/06/2014	11.743	E5
02/05/2014	11.022	E3	30/06/2014	11.691	E5
05/05/2014	11.085	E3	01/07/2014	11.831	E5
06/05/2014	11.103	E3	02/07/2014	11.724	E5
07/05/2014	11.131	E3	03/07/2014	11.864	E6
08/05/2014	11.243	E4	04/07/2014	11.789	E5
09/05/2014	10.954	E3	07/07/2014	11.673	E5
12/05/2014	11.080	E3	08/07/2014	11.528	E5
13/05/2014	11.131	E3	09/07/2014	11.602	E5
14/05/2014	11.299	E4	10/07/2014	11.383	E4
15/05/2014	11.187	E3	11/07/2014	11.322	E4
16/05/2014	11.332	E4	14/07/2014	11.365	E4
19/05/2014	11.313	E4	15/07/2014	11.308	E4
20/05/2014	11.229	E4	16/07/2014	11.467	E4
21/05/2014	11.290	E4	17/07/2014	11.299	E4
22/05/2014	11.299	E4	18/07/2014	11.299	E4
23/05/2014	11.318	E4	21/07/2014	11.229	E4
26/05/2014	11.402	E4	22/07/2014	11.369	E4
27/05/2014	11.416	E4	23/07/2014	11.350	E4
28/05/2014	11.448	E4	24/07/2014	11.462	E4
29/05/2014	11.472	E4	25/07/2014	11.439	E4
30/05/2014	11.495	E4			

28/07/2014	11.430	E4
29/07/2014	11.505	E4
30/07/2014	11.537	E5
31/07/2014	11.402	E4
01/08/2014	11.276	E4
04/08/2014	11.196	E3
05/08/2014	11.005	E3
06/08/2014	11.019	E3
07/08/2014	10.860	E2
08/08/2014	10.823	E2
11/08/2014	10.879	E2
12/08/2014	10.898	E3
13/08/2014	10.981	E3
14/08/2014	10.977	E3
15/08/2014	10.944	E3
18/08/2014	11.033	E3
19/08/2014	11.042	E3
20/08/2014	11.019	E3
21/08/2014	11.122	E3
22/08/2014	11.084	E3
25/08/2014	11.234	E4
26/08/2014	11.327	E4
27/08/2014	11.332	E4
28/08/2014	11.290	E4
29/08/2014	11.271	E4
01/09/2014	11.262	E4
02/09/2014	11.224	E4
03/09/2014	11.318	E4
04/09/2014	11.528	E5
05/09/2014	11.570	E5
08/09/2014	11.551	E5
09/09/2014	11.434	E4
10/09/2014	11.355	E4
11/09/2014	11.131	E3
12/09/2014	11.131	E3
15/09/2014	11.122	E3
16/09/2014	11.150	E3
17/09/2014	11.285	E4
18/09/2014	11.350	E4
19/09/2014	11.453	E4
22/09/2014	11.477	E4
23/09/2014	11.416	E4
24/09/2014	11.500	E4
25/09/2014	11.439	E4
26/09/2014	11.486	E4
29/09/2014	11.318	E4
30/09/2014	11.444	E4
01/10/2014	11.392	E4
02/10/2014	11.094	E3
03/10/2014	11.206	E4
06/10/2014	11.290	E4
07/10/2014	11.154	E3
08/10/2014	11.131	E3
09/10/2014	11.070	E3
10/10/2014	10.926	E3
13/10/2014	10.935	E3
14/10/2014	10.916	E3
15/10/2014	10.575	E2
16/10/2014	10.239	E1
17/10/2014	10.361	E1

20/10/2014	10.351	E1
21/10/2014	10.561	E2
22/10/2014	10.617	E2
23/10/2014	10.729	E2
24/10/2014	10.687	E2
27/10/2014	10.580	E2
28/10/2014	10.884	E3
29/10/2014	10.902	E3
30/10/2014	10.916	E3
31/10/2014	11.201	E3
03/11/2014	11.168	E3
04/11/2014	11.052	E3
05/11/2014	11.201	E3
06/11/2014	11.206	E4
07/11/2014	11.028	E3
10/11/2014	11.206	E4
11/11/2014	11.374	E4
12/11/2014	11.365	E4
13/11/2014	11.392	E4
14/11/2014	11.467	E4
17/11/2014	11.598	E5
18/11/2014	11.705	E5
19/11/2014	11.686	E5
20/11/2014	11.633	E5
21/11/2014	11.974	E6
24/11/2014	12.099	E6
25/11/2014	12.200	E7
26/11/2014	12.094	E6
27/11/2014	12.233	E7
28/11/2014	12.368	E7
01/12/2014	12.272	E7
02/12/2014	12.397	E7
03/12/2014	12.589	E8
04/12/2014	12.387	E7
05/12/2014	12.838	E9
08/12/2014	12.718	E8
09/12/2014	12.406	E7
10/12/2014	12.401	E7
11/12/2014	12.406	E7
12/12/2014	11.965	E6
15/12/2014	11.595	E5
16/12/2014	11.518	E4
17/12/2014	11.489	E4
18/12/2014	11.773	E5
19/12/2014	11.585	E5
22/12/2014	11.628	E5
23/12/2014	11.734	E5
24/12/2014	11.753	E5
29/12/2014	11.590	E5
30/12/2014	11.403	E4
31/12/2014	11.446	E4
02/01/2015	11.413	E4
05/01/2015	11.028	E3
06/01/2015	10.918	E3
07/01/2015	10.923	E3
08/01/2015	11.192	E3
09/01/2015	10.904	E3
12/01/2015	11.014	E3
13/01/2015	11.240	E4
14/01/2015	11.139	E3

15/01/2015	11.321	E4
16/01/2015	11.470	E4
19/01/2015	11.739	E5
20/01/2015	11.926	E6
21/01/2015	11.984	E6
22/01/2015	12.253	E7
23/01/2015	12.666	E8
26/01/2015	12.838	E9
27/01/2015	12.786	E8
28/01/2015	12.723	E8
29/01/2015	12.848	E9
30/01/2015	12.776	E8
02/02/2015	12.435	E7
03/02/2015	12.718	E8
04/02/2015	12.680	E8
05/02/2015	12.603	E8
06/02/2015	12.656	E8
09/02/2015	12.483	E7
10/02/2015	12.622	E8
11/02/2015	12.445	E7
12/02/2015	12.565	E8
13/02/2015	12.656	E8
16/02/2015	12.622	E8
17/02/2015	12.613	E8
18/02/2015	12.627	E8
19/02/2015	12.742	E8
20/02/2015	12.829	E9
23/02/2015	12.891	E9
24/02/2015	13.031	E9
25/02/2015	13.251	E10
26/02/2015	13.367	E10
27/02/2015	13.343	E10
02/03/2015	13.371	E10
03/03/2015	13.160	E10
04/03/2015	13.256	E10
05/03/2015	13.251	E10
06/03/2015	13.170	E10
09/03/2015	12.992	E9
10/03/2015	12.661	E8
11/03/2015	12.762	E8
12/03/2015	12.752	E8
13/03/2015	12.718	E8
16/03/2015	12.733	E8
17/03/2015	12.738	E8
18/03/2015	12.675	E8
19/03/2015	12.541	E8
20/03/2015	12.920	E9
23/03/2015	13.002	E9
24/03/2015	13.098	E9
25/03/2015	12.987	E9
26/03/2015	12.973	E9
27/03/2015	12.891	E9
30/03/2015	12.935	E9
31/03/2015	12.877	E9
01/04/2015	12.906	E9
02/04/2015	12.935	E9
07/04/2015	12.823	E9
08/04/2015	12.731	E8
09/04/2015	12.741	E8
10/04/2015	12.804	E8
13/04/2015	13.076	E9
14/04/2015	13.134	E9
15/04/2015	13.323	E10
16/04/2015	13.197	E10
17/04/2015	13.086	E9
20/04/2015	13.168	E10
21/04/2015	13.236	E10
22/04/2015	13.226	E10
23/04/2015	13.353	E10
24/04/2015	13.260	E10
27/04/2015	13.304	E10
28/04/2015	13.260	E10
29/04/2015	13.168	E10
30/04/2015	13.246	E10
04/05/2015	13.367	E10
05/05/2015	13.124	E9
06/05/2015	13.129	E9
07/05/2015	13.081	E9
08/05/2015	13.377	E10
11/05/2015	13.455	E10
12/05/2015	13.305	E10
13/05/2015	13.300	E10
14/05/2015	13.165	E10
15/05/2015	12.995	E9

Banco Santander

01/04/2014	6.262	E4
02/04/2014	6.239	E4
03/04/2014	6.358	E5
04/04/2014	6.43	E5
07/04/2014	6.382	E5
08/04/2014	6.381	E5
09/04/2014	6.362	E5
10/04/2014	6.278	E4
11/04/2014	6.284	E5
14/04/2014	6.365	E5
15/04/2014	6.298	E5
16/04/2014	6.406	E5
17/04/2014	6.418	E5
22/04/2014	6.469	E6
23/04/2014	6.404	E5
24/04/2014	6.451	E5
25/04/2014	6.339	E5
28/04/2014	6.402	E5
29/04/2014	6.5	E6
30/04/2014	6.512	E6
02/05/2014	6.498	E6
05/05/2014	6.506	E6
06/05/2014	6.459	E6
07/05/2014	6.503	E6
08/05/2014	6.656	E7
09/05/2014	6.574	E6
12/05/2014	6.599	E6
13/05/2014	6.656	E7
14/05/2014	6.695	E7
15/05/2014	6.487	E6
16/05/2014	6.637	E7
19/05/2014	6.588	E6
20/05/2014	6.671	E7
21/05/2014	6.726	E7
22/05/2014	6.653	E7
23/05/2014	6.696	E7
26/05/2014	6.77	E7
27/05/2014	6.8	E7
28/05/2014	6.84	E8
29/05/2014	6.792	E7
30/05/2014	6.836	E8
02/06/2014	6.837	E8
03/06/2014	6.83	E8
04/06/2014	6.844	E8
05/06/2014	6.909	E8
06/06/2014	7.105	E9
09/06/2014	7.164	E10
10/06/2014	7.15	E9
11/06/2014	7.123	E9
12/06/2014	7.111	E9

13/06/2014	7.141	E9
16/06/2014	7.031	E9
17/06/2014	7.031	E9
18/06/2014	7.028	E9
19/06/2014	7.14	E9
20/06/2014	7.125	E9
23/06/2014	7.101	E9
24/06/2014	7.128	E9
25/06/2014	7.009	E9
26/06/2014	6.99	E9
27/06/2014	6.949	E8
30/06/2014	6.933	E8
01/07/2014	7.042	E9
02/07/2014	7.024	E9
03/07/2014	7.133	E9
04/07/2014	7.024	E9
07/07/2014	6.935	E8
08/07/2014	6.815	E8
09/07/2014	6.914	E8
10/07/2014	6.751	E7
11/07/2014	6.76	E7
14/07/2014	6.84	E8
15/07/2014	6.765	E7
16/07/2014	6.899	E8
17/07/2014	6.779	E7
18/07/2014	6.807	E8
21/07/2014	6.751	E7
22/07/2014	6.89	E8
23/07/2014	6.909	E8
24/07/2014	7.046	E9
25/07/2014	7.068	E9
28/07/2014	7.042	E9
29/07/2014	7.076	E9
30/07/2014	7.141	E9
31/07/2014	6.999	E9
01/08/2014	6.873	E8
04/08/2014	6.865	E8
05/08/2014	6.78	E7
06/08/2014	6.735	E7
07/08/2014	6.617	E6
08/08/2014	6.679	E7
11/08/2014	6.698	E7
12/08/2014	6.699	E7
13/08/2014	6.769	E7
14/08/2014	6.752	E7
15/08/2014	6.677	E7
18/08/2014	6.783	E7
19/08/2014	6.798	E7
20/08/2014	6.798	E7
21/08/2014	6.9	E8
22/08/2014	6.857	E8

25/08/2014	7.027	E9
26/08/2014	7.128	E9
27/08/2014	7.141	E9
28/08/2014	7.033	E9
29/08/2014	7.038	E9
01/09/2014	7.048	E9
02/09/2014	7.03	E9
03/09/2014	7.125	E9
04/09/2014	7.312	E10
05/09/2014	7.324	E10
08/09/2014	7.298	E10
09/09/2014	7.187	E10
10/09/2014	7.141	E9
11/09/2014	7.095	E9
12/09/2014	7.127	E9
15/09/2014	7.098	E9
16/09/2014	7.07	E9
17/09/2014	7.128	E9
18/09/2014	7.205	E10
19/09/2014	7.187	E10
22/09/2014	7.155	E10
23/09/2014	7.071	E9
24/09/2014	7.128	E9
25/09/2014	7.106	E9
26/09/2014	7.159	E10
29/09/2014	6.975	E8
30/09/2014	7.058	E9
01/10/2014	7.006	E9
02/10/2014	6.732	E7
03/10/2014	6.855	E8
06/10/2014	6.911	E8
07/10/2014	6.743	E7
08/10/2014	6.695	E7
09/10/2014	6.645	E7
10/10/2014	6.599	E6
13/10/2014	6.63	E7
14/10/2014	6.63	E7
15/10/2014	6.363	E5
16/10/2014	6.244	E4
17/10/2014	6.46	E6
20/10/2014	6.459	E6
21/10/2014	6.587	E6
22/10/2014	6.628	E6
23/10/2014	6.664	E7
24/10/2014	6.674	E7
27/10/2014	6.508	E6
28/10/2014	6.602	E6
29/10/2014	6.503	E6
30/10/2014	6.483	E6
31/10/2014	6.662	E7
03/11/2014	6.626	E6
04/11/2014	6.398	E5
05/11/2014	6.478	E6
06/11/2014	6.427	E5
07/11/2014	6.302	E5
10/11/2014	6.38	E5
11/11/2014	6.437	E5
12/11/2014	6.287	E5
13/11/2014	6.29	E5
14/11/2014	6.322	E5

17/11/2014	6.412	E5
18/11/2014	6.463	E6
19/11/2014	6.455	E6
20/11/2014	6.327	E5
21/11/2014	6.558	E6
24/11/2014	6.721	E7
25/11/2014	6.788	E7
26/11/2014	6.769	E7
27/11/2014	6.809	E8
28/11/2014	6.871	E8
01/12/2014	6.802	E7
02/12/2014	6.892	E8
03/12/2014	6.991	E9
04/12/2014	6.768	E7
05/12/2014	6.996	E9
08/12/2014	6.912	E8
09/12/2014	6.666	E7
10/12/2014	6.616	E6
11/12/2014	6.646	E7
12/12/2014	6.425	E5
15/12/2014	6.29	E5
16/12/2014	6.465	E6
17/12/2014	6.477	E6
18/12/2014	6.711	E7
19/12/2014	6.723	E7
22/12/2014	6.721	E7
23/12/2014	6.805	E8
24/12/2014	6.795	E7
29/12/2014	6.771	E7
30/12/2014	6.655	E7
31/12/2014	6.631	E7
02/01/2015	6.665	E7
05/01/2015	6.36	E5
06/01/2015	6.25	E4
07/01/2015	6.289	E5
08/01/2015	6.499	E6
09/01/2015	5.583	E1
12/01/2015	5.735	E1
13/01/2015	5.83	E2
14/01/2015	5.776	E2
15/01/2015	5.854	E2
16/01/2015	5.835	E2
19/01/2015	5.88	E2
20/01/2015	5.917	E2
21/01/2015	5.872	E2
22/01/2015	5.945	E3
23/01/2015	6.031	E3
26/01/2015	6.067	E3
27/01/2015	5.966	E3
28/01/2015	5.787	E2
29/01/2015	5.85	E2
30/01/2015	5.787	E2
02/02/2015	5.763	E2
03/02/2015	6.028	E3
04/02/2015	6.001	E3
05/02/2015	5.932	E3
06/02/2015	5.963	E3
09/02/2015	5.834	E2
10/02/2015	5.891	E2
11/02/2015	5.806	E2

12/02/2015	5.959	**E3**
13/02/2015	6.107	**E4**
16/02/2015	6.099	**E3**
17/02/2015	6.124	**E4**
18/02/2015	6.225	**E4**
19/02/2015	6.266	**E4**
20/02/2015	6.222	**E4**
23/02/2015	6.263	**E4**
24/02/2015	6.272	**E4**
25/02/2015	6.234	**E4**
26/02/2015	6.311	**E5**
27/02/2015	6.343	**E5**
02/03/2015	6.403	**E5**
03/03/2015	6.293	**E5**
04/03/2015	6.359	**E5**
05/03/2015	6.396	**E5**
06/03/2015	6.342	**E5**
09/03/2015	6.343	**E5**
10/03/2015	6.179	**E4**
11/03/2015	6.272	**E4**
12/03/2015	6.303	**E5**
13/03/2015	6.289	**E5**
16/03/2015	6.348	**E5**
17/03/2015	6.323	**E5**
18/03/2015	6.318	**E5**
19/03/2015	6.349	**E5**
20/03/2015	6.655	**E7**
23/03/2015	6.689	**E7**
24/03/2015	6.791	**E7**
25/03/2015	6.716	**E7**
26/03/2015	6.768	**E7**

27/03/2015	6.736	**E7**
30/03/2015	6.834	**E8**
31/03/2015	6.868	**E8**
01/04/2015	6.871	**E8**
02/04/2015	6.924	**E8**
07/04/2015	6.972	**E8**
08/04/2015	6.905	**E8**
09/04/2015	6.929	**E8**
10/04/2015	6.91	**E8**
13/04/2015	7	**E9**
14/04/2015	6.851	**E8**
15/04/2015	6.894	**E8**
16/04/2015	6.765	**E7**
17/04/2015	6.557	**E6**
20/04/2015	6.583	**E6**
21/04/2015	6.557	**E6**
22/04/2015	6.557	**E6**
23/04/2015	6.578	**E6**
24/04/2015	6.661	**E7**
27/04/2015	6.77	**E7**
28/04/2015	6.85	**E8**
29/04/2015	6.734	**E7**
30/04/2015	6.756	**E7**
04/05/2015	6.749	**E7**
05/05/2015	6.52	**E6**
06/05/2015	6.59	**E6**
07/05/2015	6.604	**E6**
08/05/2015	6.8	**E7**
11/05/2015	6.791	**E7**
12/05/2015	6.691	**E7**
13/05/2015	6.667	**E7**
14/05/2015	6.73	**E7**
15/05/2015	6.643	**E7**

Endesa

01/04/2014	13.302	E1
02/04/2014	13.279	E1
03/04/2014	13.309	E1
04/04/2014	13.259	E1
07/04/2014	13.279	E1
08/04/2014	13.133	E1
09/04/2014	13.284	E1
10/04/2014	13.267	E1
11/04/2014	13.171	E1
14/04/2014	13.204	E1
15/04/2014	13.088	E1
16/04/2014	13.131	E1
17/04/2014	13.234	E1
22/04/2014	13.44	E1
23/04/2014	13.531	E1
24/04/2014	13.636	E1
25/04/2014	13.51	E1
28/04/2014	13.51	E1
29/04/2014	13.674	E2
30/04/2014	13.724	E2
02/05/2014	13.89	E2
05/05/2014	13.945	E2
06/05/2014	13.892	E2
07/05/2014	14.091	E2
08/05/2014	13.92	E2
09/05/2014	13.847	E2
12/05/2014	13.859	E2
13/05/2014	13.882	E2
14/05/2014	13.867	E2
15/05/2014	13.756	E2
16/05/2014	13.756	E2
19/05/2014	13.837	E2
20/05/2014	13.877	E2
21/05/2014	13.927	E2
22/05/2014	13.955	E2
23/05/2014	14.126	E2
26/05/2014	14.269	E3
27/05/2014	14.186	E2
28/05/2014	14.148	E2
29/05/2014	13.945	E2
30/05/2014	14.061	E2
02/06/2014	14.075	E2
03/06/2014	13.993	E2
04/06/2014	13.952	E2
05/06/2014	14.088	E2
06/06/2014	14.184	E2
09/06/2014	14.274	E3
10/06/2014	14.289	E3
11/06/2014	14.179	E2
12/06/2014	14.262	E3
13/06/2014	14.417	E3
16/06/2014	14.276	E3
17/06/2014	14.281	E3
18/06/2014	14.498	E3
19/06/2014	14.666	E3
20/06/2014	14.626	E3
23/06/2014	14.457	E3
24/06/2014	14.417	E3
25/06/2014	14.259	E3
26/06/2014	14.365	E3
27/06/2014	14.312	E3
30/06/2014	14.194	E2
01/07/2014	14.216	E2
02/07/2014	14.279	E3
03/07/2014	14.294	E3
04/07/2014	14.239	E2
07/07/2014	14.264	E3
08/07/2014	14.174	E2
09/07/2014	14.118	E2
10/07/2014	14.005	E2
11/07/2014	14.088	E2
14/07/2014	14.025	E2
15/07/2014	13.942	E2
16/07/2014	14.163	E2
17/07/2014	14.365	E3
18/07/2014	14.387	E3
21/07/2014	14.407	E3
22/07/2014	14.523	E3
23/07/2014	14.51	E3
24/07/2014	14.621	E3
25/07/2014	14.578	E3
28/07/2014	14.653	E3
29/07/2014	14.784	E3
30/07/2014	14.729	E3
31/07/2014	14.472	E3
01/08/2014	13.892	E2
04/08/2014	13.99	E2
05/08/2014	13.834	E2
06/08/2014	13.674	E2
07/08/2014	13.533	E1
08/08/2014	13.392	E1
11/08/2014	13.543	E1
12/08/2014	13.646	E1
13/08/2014	13.666	E1
14/08/2014	13.767	E2
15/08/2014	13.719	E2
18/08/2014	13.691	E2
19/08/2014	13.626	E1
20/08/2014	13.787	E2
21/08/2014	13.925	E2
22/08/2014	13.884	E2
25/08/2014	14.121	E2

26/08/2014	14.269	E3
27/08/2014	14.302	E3
28/08/2014	14.264	E3
29/08/2014	14.204	E2
01/09/2014	14.251	E3
02/09/2014	14.163	E2
03/09/2014	14.417	E3
04/09/2014	14.54	E3
05/09/2014	14.636	E3
08/09/2014	14.565	E3
09/09/2014	14.46	E3
10/09/2014	14.651	E3
11/09/2014	14.533	E3
12/09/2014	14.462	E3
15/09/2014	14.651	E3
16/09/2014	14.618	E3
17/09/2014	14.721	E3
18/09/2014	14.844	E4
19/09/2014	14.915	E4
22/09/2014	15.05	E4
23/09/2014	15.073	E4
24/09/2014	15.264	E4
25/09/2014	15.477	E5
26/09/2014	15.666	E5
29/09/2014	15.588	E5
30/09/2014	15.719	E5
01/10/2014	15.452	E5
02/10/2014	15.005	E4
03/10/2014	15.452	E5
06/10/2014	15.573	E5
07/10/2014	15.399	E4
08/10/2014	15.068	E4
09/10/2014	14.671	E3
10/10/2014	14.839	E4
13/10/2014	14.897	E4
14/10/2014	14.864	E4
15/10/2014	14.495	E3
16/10/2014	14.337	E3
17/10/2014	14.47	E3
20/10/2014	14.54	E3
21/10/2014	14.696	E3
22/10/2014	15.04	E4
23/10/2014	15.224	E4
24/10/2014	15.095	E4
27/10/2014	14.922	E4
28/10/2014	14.622	E3
29/10/2014	14.455	E3
30/10/2014	14.541	E3
31/10/2014	14.842	E4
03/11/2014	14.311	E3

04/11/2014	14.316	E3
05/11/2014	13.967	E2
06/11/2014	14.001	E2
07/11/2014	14.063	E2
10/11/2014	14.034	E2
11/11/2014	13.996	E2
12/11/2014	13.623	E1
13/11/2014	13.566	E1
14/11/2014	13.566	E1
17/11/2014	13.595	E1
18/11/2014	13.528	E1
19/11/2014	13.308	E1
20/11/2014	13.098	E1
21/11/2014	13.944	E2
24/11/2014	14.225	E2
25/11/2014	14.297	E3
26/11/2014	14.407	E3
27/11/2014	14.722	E3
28/11/2014	14.851	E4
01/12/2014	14.808	E3
02/12/2014	14.885	E4
03/12/2014	14.995	E4
04/12/2014	14.856	E4
05/12/2014	15.143	E4
08/12/2014	15.038	E4
09/12/2014	14.813	E3
10/12/2014	14.861	E4
11/12/2014	14.727	E3
12/12/2014	14.617	E3
15/12/2014	14.33	E3
16/12/2014	14.483	E3
17/12/2014	14.765	E3
18/12/2014	15.143	E4
19/12/2014	15.381	E4
22/12/2014	15.448	E5
23/12/2014	15.73	E5
24/12/2014	15.826	E5
29/12/2014	15.83	E5
30/12/2014	15.749	E5
31/12/2014	15.811	E5
02/01/2015	15.719	E5
05/01/2015	15.22	E4
06/01/2015	15.25	E4
07/01/2015	15.323	E4
08/01/2015	15.592	E5
09/01/2015	15.783	E5
12/01/2015	15.959	E5
13/01/2015	15.861	E5
14/01/2015	15.915	E5
15/01/2015	16.135	E6

16/01/2015	16.497	E6
19/01/2015	16.575	E7
20/01/2015	16.506	E6
21/01/2015	16.536	E6
22/01/2015	17.382	E8
23/01/2015	17.161	E8
26/01/2015	17.558	E8
27/01/2015	17.298	E8
28/01/2015	17.22	E8
29/01/2015	17.567	E8
30/01/2015	17.294	E8
02/02/2015	17.117	E7
03/02/2015	17.416	E8
04/02/2015	17.201	E8
05/02/2015	16.946	E7
06/02/2015	16.858	E7
09/02/2015	16.526	E6
10/02/2015	16.677	E7
11/02/2015	16.497	E6
12/02/2015	16.624	E7
13/02/2015	16.624	E7
16/02/2015	16.145	E6
17/02/2015	16.188	E6
18/02/2015	16.379	E6
19/02/2015	16.462	E6
20/02/2015	16.511	E6
23/02/2015	16.624	E7
24/02/2015	16.721	E7
25/02/2015	17.553	E8
26/02/2015	17.646	E8
27/02/2015	17.67	E8
02/03/2015	18.07	E9
03/03/2015	17.85	E9
04/03/2015	17.675	E8
05/03/2015	17.875	E9
06/03/2015	17.49	E8
09/03/2015	17.635	E8
10/03/2015	17.63	E8
11/03/2015	17.985	E9
12/03/2015	17.8	E9
13/03/2015	17.825	E9

16/03/2015	17.82	E9
17/03/2015	17.76	E9
18/03/2015	17.62	E8
19/03/2015	18	E9
20/03/2015	18.11	E9
23/03/2015	18.125	E9
24/03/2015	17.995	E9
25/03/2015	18.1	E9
26/03/2015	17.955	E9
27/03/2015	17.915	E9
30/03/2015	17.975	E9
31/03/2015	18	E9
01/04/2015	17.995	E9
02/04/2015	18.04	E9
07/04/2015	18.345	E10
08/04/2015	18.205	E9
09/04/2015	18.36	E10
10/04/2015	18.56	E10
13/04/2015	18.875	E10
14/04/2015	18.87	E10
15/04/2015	18.8	E10
16/04/2015	18.81	E10
17/04/2015	18.695	E10
20/04/2015	18.605	E10
21/04/2015	18.77	E10
22/04/2015	18.545	E10
23/04/2015	18.76	E10
24/04/2015	18.705	E10
27/04/2015	18.545	E10
28/04/2015	18.335	E10
29/04/2015	17.795	E9
30/04/2015	17.735	E9
04/05/2015	17.605	E8
05/05/2015	17.305	E8
06/05/2015	17.085	E7
07/05/2015	17.3	E8
08/05/2015	17.275	E8
11/05/2015	17.285	E8
12/05/2015	17.18	E8
13/05/2015	17.175	E8
14/05/2015	17.31	E8
15/05/2015	17.395	E8

Ferrovial

01/04/2014	15.001	E2
02/04/2014	14.94	E2
03/04/2014	15.025	E2
04/04/2014	15.157	E2
07/04/2014	15.011	E2
08/04/2014	14.831	E2
09/04/2014	14.893	E2
10/04/2014	14.827	E2
11/04/2014	14.529	E1
14/04/2014	14.515	E1
15/04/2014	14.444	E1
16/04/2014	14.737	E2
17/04/2014	14.803	E2
22/04/2014	15.072	E2
23/04/2014	15.101	E2
24/04/2014	15.091	E2
25/04/2014	14.935	E2
28/04/2014	14.912	E2
29/04/2014	15.176	E2
30/04/2014	15.11	E2
02/05/2014	14.973	E2
05/05/2014	15.086	E2
06/05/2014	15.072	E2
07/05/2014	14.945	E2
08/05/2014	15.035	E2
09/05/2014	15.072	E2
12/05/2014	15.313	E3
13/05/2014	15.271	E3
14/05/2014	15.261	E3
15/05/2014	14.779	E2
16/05/2014	14.624	E2
19/05/2014	14.694	E2
20/05/2014	14.685	E2
21/05/2014	14.704	E2
22/05/2014	14.737	E2
23/05/2014	14.845	E2
26/05/2014	15.006	E2
27/05/2014	14.982	E2
28/05/2014	14.95	E2
29/05/2014	14.921	E2
30/05/2014	14.997	E2
02/06/2014	15.049	E2
03/06/2014	14.912	E2
04/06/2014	15.044	E2
05/06/2014	15.176	E2
06/06/2014	15.332	E3
09/06/2014	15.497	E3
10/06/2014	15.455	E3
11/06/2014	15.398	E3
12/06/2014	15.346	E3
13/06/2014	15.223	E2
16/06/2014	15.129	E2
17/06/2014	15.129	E2
18/06/2014	15.294	E3
19/06/2014	15.483	E3
20/06/2014	15.426	E3
23/06/2014	15.422	E3
24/06/2014	15.403	E3
25/06/2014	15.233	E2
26/06/2014	15.266	E3
27/06/2014	15.308	E3
30/06/2014	15.36	E3
01/07/2014	15.28	E3
02/07/2014	15.458	E3
03/07/2014	15.511	E3
04/07/2014	15.444	E3
07/07/2014	15.232	E2
08/07/2014	14.838	E2
09/07/2014	14.809	E2
10/07/2014	14.655	E2
11/07/2014	14.742	E2
14/07/2014	14.814	E2
15/07/2014	14.761	E2
16/07/2014	15.045	E2
17/07/2014	14.891	E2
18/07/2014	14.996	E2
21/07/2014	15.03	E2
22/07/2014	15.275	E3
23/07/2014	15.27	E3
24/07/2014	15.506	E3
25/07/2014	15.343	E3
28/07/2014	15.145	E2
29/07/2014	15.333	E3
30/07/2014	15.54	E3
31/07/2014	15.078	E2
01/08/2014	14.809	E2
04/08/2014	14.679	E2
05/08/2014	14.761	E2
06/08/2014	14.251	E1
07/08/2014	13.948	E1
08/08/2014	13.91	E1
11/08/2014	14.232	E1
12/08/2014	14.294	E1
13/08/2014	14.323	E1
14/08/2014	14.314	E1
15/08/2014	14.169	E1
18/08/2014	14.314	E1
19/08/2014	14.333	E1
20/08/2014	14.371	E1
21/08/2014	14.655	E2

22/08/2014	14.626	E2
25/08/2014	14.871	E2
26/08/2014	14.9	E2
27/08/2014	14.9	E2
28/08/2014	14.876	E2
29/08/2014	14.896	E2
01/09/2014	14.91	E2
02/09/2014	14.886	E2
03/09/2014	15.073	E2
04/09/2014	15.391	E3
05/09/2014	15.251	E3
08/09/2014	15.266	E3
09/09/2014	15.107	E2
10/09/2014	15.054	E2
11/09/2014	15.006	E2
12/09/2014	14.963	E2
15/09/2014	14.814	E2
16/09/2014	14.79	E2
17/09/2014	15.011	E2
18/09/2014	15.045	E2
19/09/2014	15.083	E2
22/09/2014	15.054	E2
23/09/2014	14.857	E2
24/09/2014	14.708	E2
25/09/2014	14.506	E1
26/09/2014	14.631	E2
29/09/2014	14.593	E2
30/09/2014	14.766	E2
01/10/2014	14.463	E1
02/10/2014	14.266	E1
03/10/2014	14.713	E2
06/10/2014	14.809	E2
07/10/2014	14.554	E1
08/10/2014	14.53	E1
09/10/2014	14.54	E1
10/10/2014	14.256	E1
13/10/2014	14.342	E1
14/10/2014	14.491	E1
15/10/2014	13.996	E1
16/10/2014	14.049	E1
17/10/2014	14.655	E2
20/10/2014	14.525	E1
21/10/2014	14.891	E2
22/10/2014	15.155	E2
23/10/2014	15.41	E3
24/10/2014	15.347	E3
27/10/2014	15.256	E3
28/10/2014	15.511	E3
29/10/2014	15.492	E3
30/10/2014	15.588	E3

31/10/2014	15.655	E3
03/11/2014	15.622	E3
04/11/2014	15.415	E3
05/11/2014	15.71	E3
06/11/2014	15.853	E3
07/11/2014	15.69	E3
10/11/2014	15.912	E3
11/11/2014	15.799	E3
12/11/2014	15.616	E3
13/11/2014	15.292	E3
14/11/2014	15.232	E2
17/11/2014	15.321	E3
18/11/2014	15.503	E3
19/11/2014	15.513	E3
20/11/2014	15.474	E3
21/11/2014	15.897	E3
24/11/2014	15.986	E4
25/11/2014	16.074	E4
26/11/2014	15.986	E4
27/11/2014	16.119	E4
28/11/2014	16.232	E4
01/12/2014	16.203	E4
02/12/2014	16.148	E4
03/12/2014	16.311	E4
04/12/2014	16.104	E4
05/12/2014	16.469	E4
08/12/2014	16.222	E4
09/12/2014	15.784	E3
10/12/2014	15.769	E3
11/12/2014	15.794	E3
12/12/2014	15.454	E3
15/12/2014	15.149	E2
16/12/2014	15.42	E3
17/12/2014	15.444	E3
18/12/2014	15.946	E4
19/12/2014	15.902	E3
22/12/2014	15.996	E4
23/12/2014	16.143	E4
24/12/2014	16.134	E4
29/12/2014	15.991	E4
30/12/2014	15.794	E3
31/12/2014	16.178	E4
02/01/2015	16.109	E4
05/01/2015	16.03	E4
06/01/2015	15.853	E3
07/01/2015	15.951	E4
08/01/2015	16.178	E4
09/01/2015	16.163	E4
12/01/2015	16.395	E4
13/01/2015	16.956	E5

14/01/2015	17.045	E5
15/01/2015	17.434	E6
16/01/2015	17.335	E6
19/01/2015	17.542	E6
20/01/2015	17.527	E6
21/01/2015	17.493	E6
22/01/2015	17.547	E6
23/01/2015	17.517	E6
26/01/2015	17.685	E6
27/01/2015	17.503	E6
28/01/2015	17.483	E6
29/01/2015	17.335	E6
30/01/2015	17.32	E6
02/02/2015	17.311	E6
03/02/2015	17.67	E6
04/02/2015	17.897	E6
05/02/2015	17.877	E6
06/02/2015	17.921	E6
09/02/2015	17.626	E6
10/02/2015	17.867	E6
11/02/2015	17.665	E6
12/02/2015	17.966	E7
13/02/2015	18.207	E7
16/02/2015	18.123	E7
17/02/2015	18.118	E7
18/02/2015	18.079	E7
19/02/2015	18.197	E7
20/02/2015	18.192	E7
23/02/2015	18.394	E7
24/02/2015	18.394	E7
25/02/2015	18.813	E8
26/02/2015	18.749	E8
27/02/2015	18.655	E8
02/03/2015	18.517	E7
03/03/2015	18.35	E7
04/03/2015	18.532	E7
05/03/2015	18.764	E8
06/03/2015	18.685	E8
09/03/2015	18.665	E8
10/03/2015	18.655	E8
11/03/2015	18.783	E8

12/03/2015	18.621	E8
13/03/2015	18.68	E8
16/03/2015	19.108	E8
17/03/2015	18.941	E8
18/03/2015	18.97	E8
19/03/2015	18.975	E8
20/03/2015	19.256	E8
23/03/2015	19.271	E9
24/03/2015	19.315	E9
25/03/2015	19.108	E8
26/03/2015	18.99	E8
27/03/2015	19.044	E8
30/03/2015	19.177	E8
31/03/2015	19.502	E9
01/04/2015	19.497	E9
02/04/2015	19.611	E9
07/04/2015	20.167	E10
08/04/2015	20.206	E10
09/04/2015	20.339	E10
10/04/2015	20.507	E10
13/04/2015	20.6	E10
14/04/2015	20.527	E10
15/04/2015	20.517	E10
16/04/2015	20.349	E10
17/04/2015	19.876	E9
20/04/2015	20.019	E10
21/04/2015	20.231	E10
22/04/2015	19.99	E10
23/04/2015	19.896	E9
24/04/2015	20.108	E10
27/04/2015	20.246	E10
28/04/2015	20.295	E10
29/04/2015	19.842	E9
30/04/2015	19.995	E10
04/05/2015	20.285	E10
05/05/2015	19.65	E9
06/05/2015	19.51	E9
07/05/2015	19.325	E9
08/05/2015	19.625	E9
11/05/2015	19.755	E9
12/05/2015	19.56	E9
13/05/2015	19.77	E9
14/05/2015	19.885	E9
15/05/2015	19.845	E9