AULA POLITÈCNICA **TECNOLOGIA ELÈCTRICA I ELECTRÒNICA**

Circuits elèctrics

Oriol Boix Aragonès, Joan Rull Duran

Circuits elèctrics

Oriol Boix Aragonès, Joan Rull Duran

Edicions UPC
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Primera edició (Quaderns d'Aula): juny de 1993
Segona edició (Quaderns d'Aula): setembre de 1994
Tercera edició (Quadems d'Aula): setembre de 1996
Primera edició (Aula Politecnica): setembre de 2001
Reimpresió (Aula Politecnica): gener de 2013

Aquest llibre s'ha publicat amb la col·laboració
del Comissionat per a Universitats i Recerca
i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya.
En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC.

Disseny de la coberta: Ernest Castelltort

Edicions de la Universitat Politécnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
Ael: info.idp@upc.edu

Dipòsit legal: B-14.890-2001
ISBN: 84-9880-046-3

Índex

Presentació

Presentem un text de teoria de circuits pensat com a eina d'estudi per a estudiants universitaris de titulacions no elèctriques.

S'inicia el desenvolupament amb una revisió de conceptes elementals amb les finalitats d'homogeneïtzar els coneixements dels lectors i establir una nomenclatura comuna.

El contingut abarca des de circuits en corrent continu fins a sistemes trifàsics en règim permanent. En tractar els sistemes trifàsics es fa un especial èmfasi en els sistemes equilibrats amb consums simètrics atès que aquesta és la situació més freqüent.

Amb aquesta publicació pretenem tant agilitzar l'assimilació de conceptes en les sessions docents, alliberant l'estudiant de tasques monòtones, com incentivar l'autoaprenentatge mitjançant problemes resolts. Malgrat tot no és la nostra intenció substituir l'assistència a classe on es poden transmetre conceptualitzacions i metodologies difícils de plasmar en un text i que, alhora, el complementen. Lluny queda del nostre objectiu desviar l'atenció de l'ampliació de coneixements aportada per la recerca bibliogràfica.

Tanmateix l'experiència demostra que per assentar suficientment els coneixements adquirits, no n'hi ha prou amb la lectura del text sinó que és imprescindible una forta dosi de treball personal, especialment la realització de problemes.

Malgrat els esforços per evitar i corregir errors o imprecisions, som conscients que alguns no han estat detectats, per la qual cosa demanem avançadament disculpes i agraïm l'advertiment dels mateixos.

No volem acabar aquesta presentació sense agrair tant el suport dels companys de la Secció de Barcelona del Departament d'Enginyeria Elèctrica com la inestimable col.laboració d'en Francesc Suelves, na Maria Boix i na Pepi Bertolo.

Els autors

Barcelona, març 1993

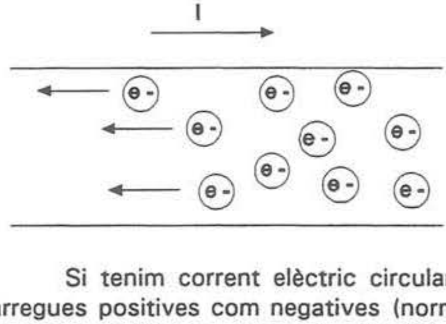
Circuits de corrent continu

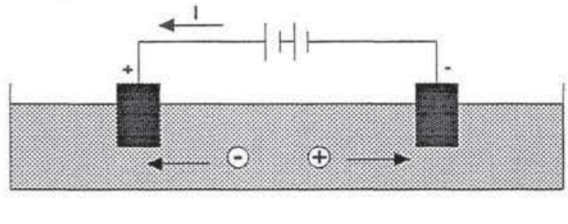
1- Corrent elèctric

La matèria es composa d'àtoms. Els àtoms estan formats per petites partícules subatòmiques; d'aquestes, algunes presenten propietats elèctriques, són els protons del nucli (càrregues positives) i els electrons de la perifèria (càrregues negatives).

Si disposem de dos cossos carregats elèctricament (tenen excés o defecte d'algun tipus de càrrega) i els unim mitjançant un conductor elèctric (p.e. un fil metàl.lic), s'estableix moviment de càrregues elèctriques tendint a igualar la càrrega. Aquest moviment s'anomena corrent elèctric.

La circulació de corrent elèctric en els metalls és a causa del moviment d'electrons en el seu si i es defineix com a sentit del corrent el sentit contrari al de circulació dels electrons.





Si tenim corrent elèctric circulant per un líquid, pot ser causat tant pel moviment de càrregues positives com negatives (normalment ions). El sentit del corrent és el que tenen les càrregues positives o, el que és el mateix, el contrari al de les negatives.

La intensitat de corrent elèctric es defineix com la quantitat de càrrega elèctrica que travessa una superfície per unitat de temps, es mesura en Ampere (A). Quan per un conductor diem que circula 1 A volem dir que per ell passen 6.242 10^{18} electrons per segon.

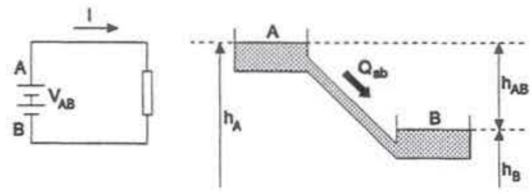
Si recordem el Coulomb, unitat de càrrega elèctrica podem dir que:

$$1\,A = \frac{1\,C}{1\,s}$$

2- Diferència de potencial

El corrent elèctric és una circulació de càrregues. Podem intentar comparar aquesta circulació amb el moviment d'un líquid en una canonada; on la intensitat es pot comparar amb el cabal.

En forma natural, un líquid que baixa per una canonada d'un dipòsit a un altre ho fa amb més o menys cabal en funció de la diferència d'alçades entre els dos dipòsits. La magnitud elèctrica que fa que el corrent que circuli per un mateix conductor entre dos punts tingui un valor o un altre s'anomena diferència de potencial entre els dos punts o tensió d'un dels punts respecte a l'altre.



La diferència de potencial (o tensió) representa la disponibilitat energètica del sistema ja que és la quantitat d'energia involucrada en el pas de la unitat de càrrega entre els dos punts de partida i arribada, es mesura en volt (V).

Com tots els potencials té l'origen arbitrari. Per conveni sol agafar-se com a potencial nul el de la terra. Només és d'interès, però, la diferència de potencial entre dos punts. Anàlegament, com tot potencial, el treball realitzat només depèn dels estats de sortida i d'arribada i no del camí seguit.

Com en l'analogia hidràulica, el potencial són les alçades i la diferència de potencial la diferència entre elles.

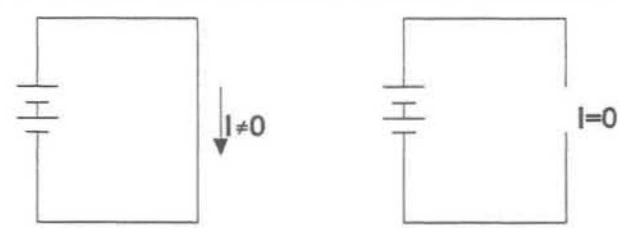
$$V_{AB} = V_{A\,ref} - V_{B\,ref} \qquad\qquad h_{AB} = h_{A\,ref} - h_{B\,ref}$$

Es verifica que, per un mateix conductor, el corrent que circula és directament proporcional a la diferència de potencial aplicada entre els seus punts extrems.

$$\frac{V_{AB}}{I} = \text{constant}$$

Sovint la tensió és anomenada també força electromotriu. Aquest nom vol dir que és la causa que provoca el moviment dels electrons però no té res a veure amb les forces mecàniques.

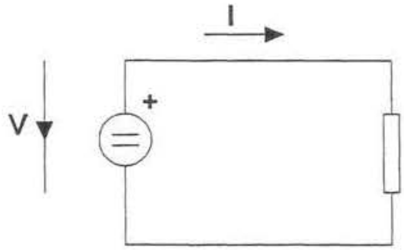
El corrent elèctric és una circulació de càrregues; per tant, el circuit per on circulen ha d'ésser tancat; si no fos així es vulneraria el principi de conservació de la massa; ja que la massa de qualsevol element del circuit s'ha de mantenir constant.



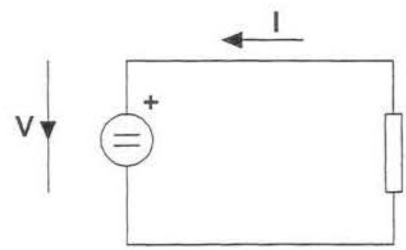
3- Convenis de signes

En molts casos ens trobarem que el corrent i la tensió varien amb el temps. En altres casos ens trobarem que no coneixem a priori el sentit d'un corrent o la polaritat d'una tensió.

Habitualment es suposa un sentit arbitrari de referència (fletxes de valoració), tant per a tensions com per a corrents; si la magnitud real té el mateix sentit, el seu valor és positiu i si no és negatiu.



I > 0



I < 0

4- Resistència d'un conductor: Llei d'Ohm

La resistència d'un conductor és la capacitat d'oposar-se al pas del corrent que té. Com més gran és la seva resistència, menys corrent passarà.

En estudiar la diferència de potencial, havíem dit que la relació entre la tensió en borns d'un conductor i el corrent que per ell passa era constant. Aquesta constant és la resistència del conductor. Aquesta equació es coneix com **Llei d'Ohm**.

$$\frac{V}{I} = R$$

on V i I es valoren del born més positiu al menys positiu (figura anterior a l'esquerra) o ambdues del menys positiu al més positiu.

Com a regla pnemotècnica per aplicar la llei d'Ohm podem emprar:

1) Si coincideixen les fletxes de valoració de tensió i corrent (figura anterior a l'esquerra):

$$V = R\,I$$

2) Si no coincideixen (figura anterior a la dreta):

$$V = -R\,I$$

La resistència es mesura en Ohm (Ω)

$$1\ \Omega = \frac{1\ V}{1\ A}$$

El valor de la resistència depèn de tres factors: el material de què és feta, de la forma o geometria com és feta i de la temperatura a què es troba.

4-1- Variació de la resistència d'un conductor en funció de les seves dimensions i del material de què és feta

La resistència d'un conductor serà més gran com més llarg sigui i, de la mateixa manera, com menys secció de pas tingui. Podem escriure

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

On ρ és la resistència d'un conductor d'1 m de llarg i 1 m^2 de secció. Aquest valor ρ s'anomena resistivitat del conductor.

4-2- Variació de la resistència amb la temperatura

La resistència d'un conductor varia amb la temperatura. Habitualment es considera que segueix l'equació

$$R(T_1) = R(T_0)\left[1 + \alpha\,(T_1 - T_0)\right]$$

on α és el coeficient de variació de la resistivitat amb la temperatura. En casos en què cal molta precisió s'empra

$$R(T_1) = R(T_0)\left[1 + \alpha\,(T_1 - T_0) + \beta\,(T_1 - T_0)^2 + ...\right]$$

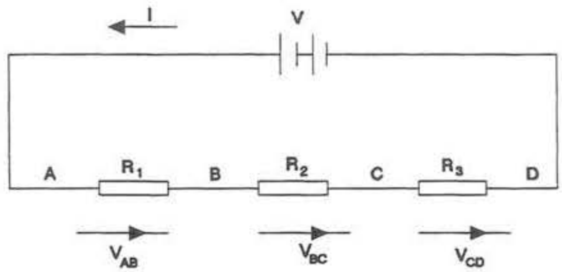
El valor α és positiu per a tots els materials emprats en electrotècnia de potència; per tant la resistència augmenta amb la temperatura.

De la mateixa manera podem dir que la resistivitat es pot expressar com:

$$\rho(T_1) = \rho(T_0)\left[1 + \alpha\,(T_1 - T_0)\right]$$

4-3- Resistències en sèrie

En el circuit de la figura les resistències R_1, R_2 i R_3 estan connectades en sèrie; això vol dir que el corrent passa per totes elles una darrera l'altra.



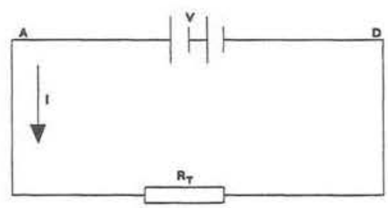
Sabem que

$$V = V_{AD} = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD}$$

i també que cadascuna de les resistències verifica la Llei d'Ohm.

$$\left.\begin{aligned} V_{AB} &= R_1\, I \\ V_{BC} &= R_2\, I \\ V_{CD} &= R_3\, I \end{aligned}\right\} \quad V = R_1\, I + R_2\, I + R_3\, I = (R_1 + R_2 + R_3)\, I$$

El corrent que subministra la bateria és el mateix que donaria en la segona figura; per tant R_T és la resistència equivalent al circuit de la primera figura.



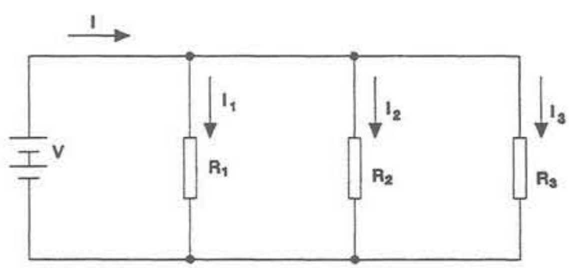
$$\left.\begin{aligned} V &= R_T\, I \\ V &= (R_1 + R_2 + R_3)\, I \end{aligned}\right\} \quad R_T = R_1 + R_2 + R_3$$

La resistència equivalent a un conjunt de resistències en sèrie és igual a la suma dels valors de totes elles.

4-4- Resistències en paral.lel

En el circuit de la figura, les resistències R_1, R_2 i R_3 estan connectades en paral.lel; és a dir, totes elles tenen la mateixa tensió entre els seus borns. El corrent que surt de la bateria es reparteix entre les tres branques, per tant,

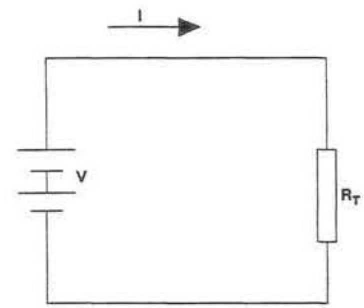
$$I = I_1 + I_2 + I_3$$



En cada resistència es verifica la llei d'Ohm.

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = \dfrac{V}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{V}{R_2} \\ I_3 = \dfrac{V}{R_3} \end{array}\right\} \quad I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

El corrent que subministra la bateria és el mateix que en la segona figura, per tant, R_T és la resistència equivalent del conjunt.



$$I = \frac{V}{R_T} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

L'invers de la resistència equivalent d'un conjunt de resistències en paral.lel és igual a la suma dels inversos de cadascuna d'elles; per tant la resistència equivalent d'un conjunt de resistències en paral.lel és menor que la més petita de totes elles.

En el cas particular de dues resistències, tenim:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad R_T = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{R_1\ R_2}{R_1 + R_2}$$

5- Potència i energia

Atès que la diferència de potencial entre dos punts és el treball que es realitza per a desplaçar una unitat de càrrega i el corrent és el nombre de càrregues que circulen per unitat de temps; la potència (energia per unitat de temps) que es consumeix en un circuit elèctric és igual al producte de la tensió d'alimentació pel corrent que s'absorbeix. Es mesura en Watt (W)

$$P = V\,I \qquad\qquad 1\ W = 1\ V\ 1\ A$$

Coneixent la llei d'Ohm, podem escriure:

$$P = \frac{V^2}{R} \qquad P = R\,I^2$$

Si integrem la potència al llarg del temps, obtenim l'energia elèctrica consumida. Si la potència consumida és constant al llarg del temps, l'energia és el producte de la potència que es consumeix pel temps durant el qual es consumeix. Es mesura en Joule (J).

$$E = P\,t = V\,I\,t = R\,I^2\,t = \frac{V^2}{R}\,t \qquad 1\ J = 1\ W\ 1\ s$$

Els comptadors la mesuren en kilowatts-hora.

$$1\ kWh = 1000\ W\ 3600\ s = 3.6\ MJ$$

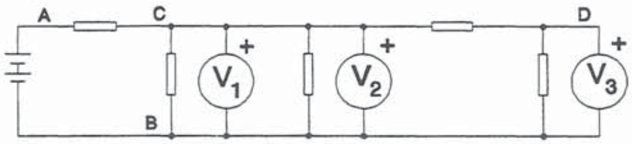
Però sovint l'energia calorífica s'expressa en calories (cal).

$$1\ cal = 4.18\ J \qquad 1\ J = 0.24\ cal.$$

6- Aparells de mesura

6-1- Voltímetres

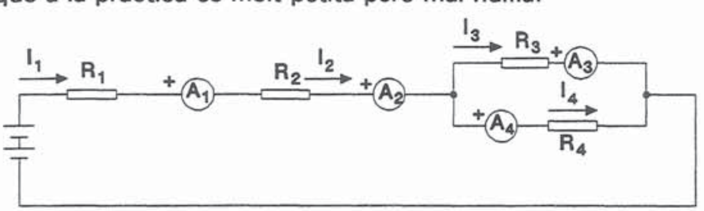
El voltímetre és un aparell que mesura la diferència de potencial entre els dos punts on es connecta. Per un voltímetre no ha de passar corrent (ha de tenir resistència infinita) per tal de no distorsionar la distribució original de corrents en connectar els aparells de mesura. Els voltímetres reals deixen passar un cert corrent, per tant, tenen una resistència interna finita, però sensiblement més gran que els valors de les resistències del circuit.



$$V_1 = V_2 \neq V_3$$
$$V_1 = V_2 = V_{CB}$$
$$V_3 = V_{DB}$$

6-2- Amperímetres

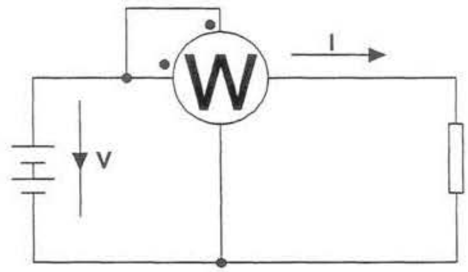
Un amperímetre és un aparell que mesura el corrent que passa a través seu. La seva resistència ha d'ésser nul.la per tal de no distorsionar la distribució de corrents en el circuit encara que a la pràctica és molt petita però mai nul.la.



$$A_1 = I_1 \qquad A_2 = I_2$$
$$A_3 = I_3 \qquad A_4 = I_4$$
$$I_1 = I_2 \qquad I_1 = I_3 + I_4$$

6-3- Wattímetres

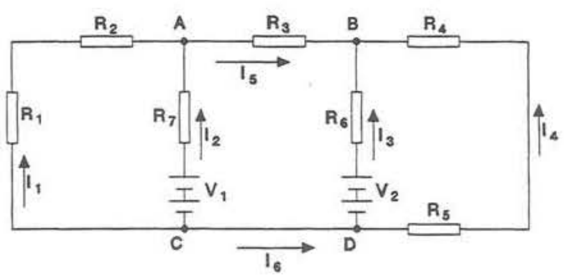
Un wattímetre és un aparell pensat per mesurar el flux de potència. Té una entrada de tensió (resistència interna elevada) i una de corrent (resistència interna molt petita) i marca el producte d'ambdues magnituds. Els punts indiquen la polaritat de les bobines, si es connecten ambdues en la polaritat indicada, marca positiva l'energia transformada de la font al consum, si es connecten ambdues en la polaritat contrària també; mentre que si només una de les polaritats de les bobines no coincideix amb la polaritat real, llavors marca com a negativa la potència que la font entrega a la càrrega.



7- Lleis de Kirchhoff

Primera llei:

En qualsevol nus (punt d'unió de dos o més conductors) es verifica que la suma de corrents entrants és igual a la suma de corrents que surten.



A) $I_1 + I_2 = I_5$

B) $I_3 + I_4 + I_5 = 0$

C) $I_1 + I_2 + I_6 = 0$

D) $I_3 + I_4 = I_6$

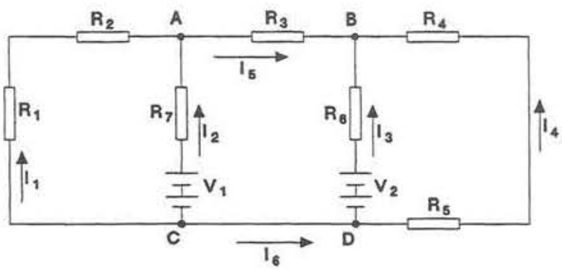
Si s'agafen les equacions a tots els nusos, sempre n'hi ha una que es pot obtenir a partir de les altres.

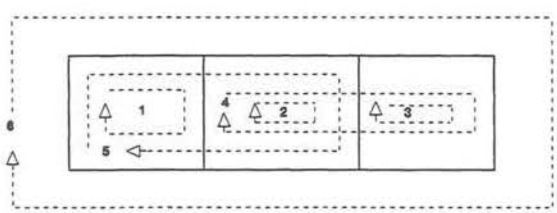
$$\left.\begin{array}{l} A)\ I_1 + I_2 = I_5 \\ B)\ I_3 + I_4 + I_5 = 0 \\ D)\ I_3 + I_4 = I_6 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} I_6 + I_5 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_6 = 0 \end{array}\right.$$

Per tant, per evitar informació redundant, aplicarem la primera llei de Kirchhoff tants cops com nusos hi hagi menys un.

Segona llei:

En qualsevol malla (recorregut tancat del circuit) es verifica que la suma de totes les tensions és igual a zero.





1) $R_1 I_1 + R_2 I_1 - R_7 I_2 + V_1 = 0$

2) $R_7 I_2 + R_3 I_5 - R_6 I_3 + V_2 - V_1 = 0$

3) $R_6 I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_4 - V_2 = 0$

4) $R_7 I_2 + R_3 I_5 - R_4 I_4 - R_5 I_4 - V_1 = 0$

5) $R_1 I_1 + R_2 I_1 + R_3 I_5 - R_6 I_3 + V_2 = 0$

6) $R_1 I_1 + R_2 I_1 + R_3 I_5 - R_4 I_4 - R_5 I_4 = 0$

Entre la primera i la segona lleis podem escriure tantes equacions independents com corrents; per tant caldrà aplicar la segona llei tants cops com sigui necessari per a determinar el sistema. Habitualment la primera llei s'aplica implícitament.

Magnetisme

1- Camps magnètics

Tot corrent elèctric, i, genera un camp magnètic. Es defineix la magnitud H, anomenada intensitat del camp magnètic com

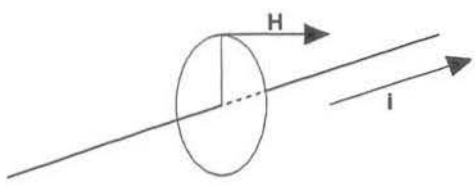
$$\oint H \, dl = i$$

Si hi ha més d'un corrent serà

$$\oint H \, dl = \sum i$$

on el símbol $\oint$ representa una integral al voltant d'un camí tancat de llargada l i Σi els corrents tancats dins el recorregut de la integral. La intensitat del camp magnètic es mesura en Ampere per metre (A/m).

La direcció d'H en un punt és perpendicular al pla format pel punt i el conductor i el seu sentit ve donat per la regla del cargol.

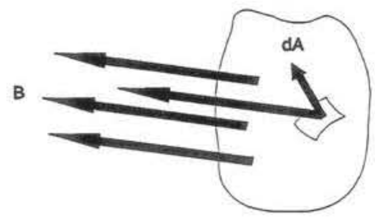


S'anomena inducció, B, al vector $\vec{B} = \mu \vec{H}$ on μ és la permeabilitat magnètica del material. La inducció magnètica es mesura en Tesla (T).

Normalment s'expressa la permeabilitat del material relativa a la del buit. Així $\mu = \mu_o \mu_r$ on μ_0 és la permeabilitat del buit i μ_r la permeabilitat relativa. La permeabilitat del buit és $\mu_o = 4 \pi 10^{-7}$ (SI).

El flux d'inducció magnètica a través d'una superficie A val

$$\phi = \int_A \vec{B}\, d\vec{A}$$



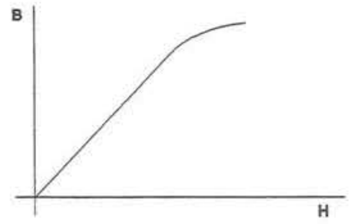
El flux es mesura en Weber (Wb).

Els materials es classifiquen en tres tipus:

- Dimagnètics: S'imanten en sentit contrari al camp magnètic aplicat i, per tant, són repel.lits per aquest. En ells es verifica $\mu < \mu_o$ ($\mu_r < 1$).
- Paramagnètics: S'imanten en el sentit del camp magnètic aplicat i, per tant, són atrets per aquest. En ells es verifica que $\mu > \mu_o$ ($\mu_r > 1$).
- Ferromagnètics: Materials semblants als paramagnètics però amb una intensitat d'imantació molt forta (habitualment entre 1.000 i 10.000 cops). En ells $\mu \gg \mu_o$ i tenen una μ_r molt més gran que els altres materials ($\mu_r \gg 1$).

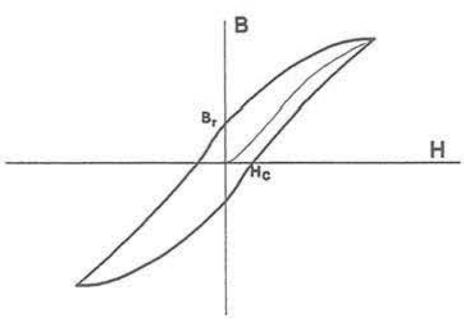
Anomenem corba de magnetització d'un material a la representació B-H, on es distingeixen dues zones:

- Zona lineal on μ_r és constant.
- Zona de saturació on μ_r deixa de ser constant.



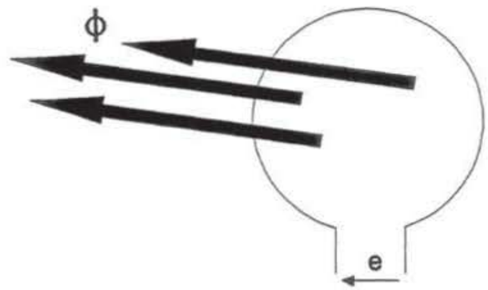
Si, un cop arribats a la saturació, disminuïm H veurem que no seguim la mateixa corba que quan l'hem augmentat. Si seguim disminuint fins a zero i continuem augmentant H en sentit contrari, i, un cop assolida la nova saturació, retornem al punt de partida, haurem traçat la corba B-H completa.

Aquesta corba s'anomena cicle d'histèresi i l'àrea per ella tancada és proporcional a l'energia tèrmica dissipada en recórrer el cicle.



2- Forces electromotrius induïdes

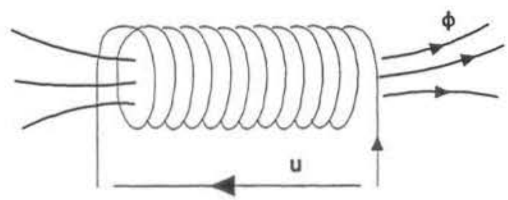
Una espira que concateni un flux magnètic variable amb el temps presentarà en els seus extrems una diferència de potencial (força electromotriu).



$$e(t) = \frac{d\,\phi}{d\,t}$$

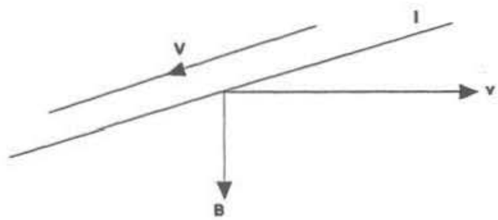
La variació del flux concatenat tant pot ser a causa de la variació de la inducció magnètica amb el temps com al moviment de l'espira.

Si en comptes d'una espira n'hi ha N tindrem una diferència de potencial N cops més elevada, ja que la tensió induïda per cadascuna és additiva (estan en sèrie).

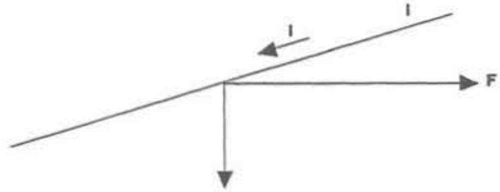


$$u(t) = N\,\frac{d\,\phi}{d\,t}$$

Si un conductor de llargada l es mou a una velocitat v dins un camp magnètic B uniforme apareixerà una tensió V entre els seus extrems de valor V = v B l.



Si tenim un conductor pel qual circula un corrent, i, que està dins un camp magnètic, B, el conductor es veu sotmés a una força, F, que ve donada per l'equació:



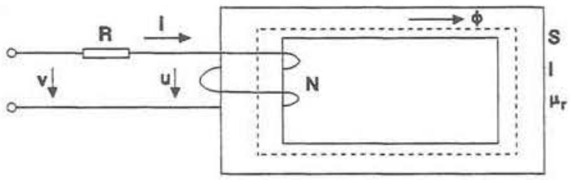
$$d\vec{F} = i\; d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

on el símbol $\wedge$ indica un producte vectorial.

3- Circuits magnètics

3-1- Circuits magnètics sense entreferro

Suposem que tenim un nucli de material ferromagnètic de secció constant S, amb una permeabilitat μ i amb una llargada mitja l. Li enrotllem un conductor (debanat) d'N voltes que té una resistència R i és recorregut per un corrent i.



Si suposem que el material ferromagnètic no entra en saturació, que la densitat de camp és uniforme en totes les seccions, i que tot el flux magnètic queda confinat dins el material ferromagnètic, l'equació $\oint H\, dl = \sum i$ s'escriu $H\, l = N\, i$ d'on $H = \frac{N\, i}{l}$ i així

$$B = \mu\, H = \mu_o\, \mu_r\, H = \mu_o\, \mu_r\, \frac{N\, i}{l} \qquad \phi = B\, S = \mu_o\, \mu_r\, N\, i\, \frac{S}{l}$$

El producte del nombre d'espires pel corrent és qui provoca l'existència del flux magnètic; per això -en analogia amb el que es fa amb els circuits elèctrics- se l'anomena força magnetomotriu (fmm, $\mathcal{F}$). Per tant $\mathcal{F}$ = N i. De la mateixa forma s'anomena reluctància al quocient

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_o\, \mu_r\, S}$$

així el flux tindrà l'expressió $\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathfrak{R}}$ que és formalment semblant a la llei d'Ohm.

Si recuperem l'equació de la tensió induïda podrem escriure

$$u = N\, \frac{d\, \phi}{d\, t} = \frac{N}{\mathfrak{R}}\, \frac{d\, \mathcal{F}}{d\, t} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}\, \frac{d\, i}{d\, t}$$

Anomenem coeficient d'autoinducció al quocient $L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$ i així $u = L\, \frac{d\, i}{d\, t}$ que és l'equació de la tensió induïda en una bobina.

Aplicant la 2ª llei de Kirchhoff

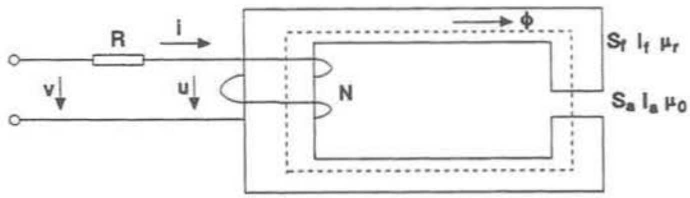
$$v = R\, i + u = R\, i + L\, \frac{d\, i}{d\, t}$$

quan el valor de R és prou baix es considera la inductància ideal, en què $v = L\, \frac{d\, i}{d\, t}$

3-2- Circuits magnètics amb entreferro

En un circuit magnètic format per un nucli ferromagnètic de secció S_f i llargada l_f i un entreferro (aire) de secció S_a i llargada l_a, l'equació

$$\oint H\, dl = \sum i$$



es pot escriure $H_a\, l_a + H_f\, l_f = N\, i$ on H_a i H_f són les intensitats de camp magnètic en l'aire i en el ferro.

$$B_f = \mu_f\, H_f \qquad \mu_f = \mu_0\, \mu_r \qquad B_a = \mu_0\, H_a$$

$$B_a \frac{l_a}{\mu_0} + B_f \frac{l_f}{\mu_0\, \mu_r} = Ni$$

El flux s'ha de mantenir en qualsevol secció del circuit magnètic, per tant $\phi = B_f\, S_f = B_a\, S_a$ i llavors

$$\frac{\phi\, l_a}{\mu_0\, S_a} + \frac{\phi\, l_f}{\mu_0\, \mu_r\, S_f} = Ni \qquad \Re_a = \frac{l_a}{S_a\, \mu_0} \qquad \Re_f = \frac{l_f}{S_f\, \mu_0\, \mu_r} \qquad \phi = \frac{N\, i}{\Re_a + \Re_f}$$

on $\Re_a$ i $\Re_f$ són les reluctàncies de l'aire i del ferro. Es pot veure que les reluctàncies "en sèrie" es sumen.

Habitualment, la reluctància del ferro serà molt més petita que la de l'aire i, per tant, escriurem

$$u = N \frac{d\,\phi}{d\,t} \simeq \frac{N}{\Re_a} \frac{d\,\mathcal{F}}{d\,t} \simeq \frac{N^2}{\Re_a} \frac{d\,i}{d\,t}$$

i, com en el cas anterior

$$L \simeq \frac{N^2}{\Re_a} \qquad v = R\, i + u = R\, i + L \frac{d\,i}{d\,t}$$

i si R és prou petita

$$v = L \frac{d\,i}{d\,t}$$

Elements emmagatzemadors d'energia

1- Condensador

És un sistema de dos conductors (armadures) separats per un aïllant o dielèctric. Es diu que un condensador està carregat quan la càrrega d'una armadura té el mateix mòdul que la de l'altre i els seus signes són contraris (per tal de mantenir el balanç global de càrregues nul).

Es defineix la capacitat d'un condensador com el quocient entre la càrrega d'una de les armadures i la tensió entre ambdues. Es mesura en Farads.

$$C = \frac{q}{u} \qquad\qquad 1\ F = \frac{1\ C}{1\ V}$$

En un condensador es verifica que

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C u = C \frac{du}{dt} \qquad\qquad \boxed{i = C \frac{du}{dt}}$$

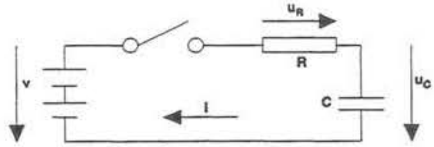
1-1- Tipus de condensadors

- De plaques
  - no tenen polaritat.
  - tenen capacitats molt variades segons el tipus de dielèctric (ceràmic, poliester, styroflex, paper, etc.).
- Electrolítics
  - no són dues plaques metàl.liques separades per un dielèctric sinó que es basen en fenòmens electroquímics.
  - tenen polaritat, si es connecten amb polaritat invertida poden destruir-se
  - la seva capacitat és molt més elevada que en els de plaques però amb menys precisió.

1-2- Càrrega i descàrrega d'un condensador

1-2-1- Càrrega

Si tenim un condensador descarregat i el connectem com en el circuit de la figura; en l'instant $t = 0$ es tanca l'interruptor, podem escriure



$$V = u_R + u_C$$

$$u_R = R\,i \qquad i = C\,\frac{d\,u_C}{d\,t}$$

$$u_C = V - u_R = V - R\,i = V - R\,C\,\frac{d\,u_C}{d\,t}$$

$$V - u_C = R\,C\,\frac{d\,u_C}{d\,t} \qquad d\,t = \frac{R\,C\,d\,u_C}{V - u_C}$$

Si anomenem $\tau = R\,C$ i $\beta = V - u_C$ o sigui $d\beta = -\,d\,u_C$ tenim:

$$d\,t = -\,\tau\,\frac{d\,\beta}{\beta} \qquad t = -\,\tau\int\frac{d\,\beta}{\beta} = -\,\tau\,\ln\beta + K \qquad t = -\,\tau\,\ln\left(V - u_C\right) + K$$

Per trobar K, sabem que $u_C(0) = 0$

$$0 = -\,\tau\,\ln V + K \qquad K = \tau\,\ln V$$

que substituïm

$$t = -\,\tau\,\ln\left(V - u_C\right) + \tau\,\ln V = \tau\,\ln\frac{V}{V - u_C} \qquad \frac{t}{\tau} = \ln\frac{V}{V - u_C}$$

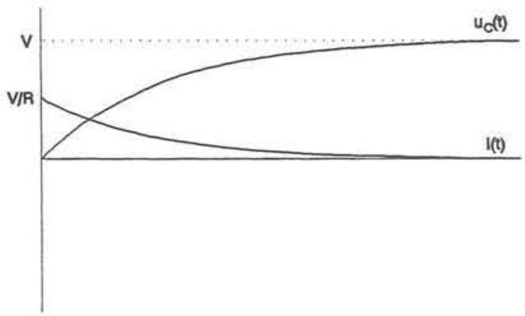
exponenciant

$$e^{t/\tau} = \frac{V}{V - u_C} \qquad V - u_C = \frac{V}{e^{t/\tau}} = V\,e^{-t/\tau} \qquad u_C = V - V\,e^{-t/\tau} = V\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

i el corrent val

$$i(t) = C \frac{d\,u_C}{d\,t} = C \frac{-V}{-\tau}\, e^{-t/\tau}$$

$$i(t) = \frac{V}{R}\, e^{-t/\tau}$$



Al valor τ = R C se l'anomena constant de temps i es defineix com el temps que triga un condensador de capacitat C descarregat a carregar-se a través d'una resistència R fins al 63.2% de la tensió d'alimentació.

$$u_C(\tau) = V\,(1 - e^{\tau/\tau}) = V\,(1 - e^{-1}) = 0.632V$$

El temps que triga el condensador a carregar-se completament és infinit

$$V = V\,(1 - e^{-t/\tau}) \qquad 1 = 1 - e^{-t/\tau} \qquad e^{-t/\tau} = 0 \qquad t = \infty$$

però a 4 τ ha arribat al 98%.

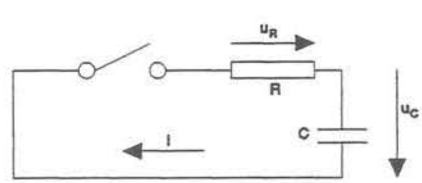
$$u_C\,(4\,\tau) = V\,(1 - e^{-4}) = 0.982 \cdot V$$

1-2-2- Descàrrega

Si un condensador carregat a una tensió U es connecta com a la figura; en l'instant t = 0 es tanca l'interruptor, podem escriure

$$u_R + u_C = 0$$

$$u_R = i\,R \qquad i = C \frac{d\,u_C}{d\,t}$$



$$u_C = -\,u_R = -\,R\,I = -\,R\,C \frac{d\,u_C}{d\,t}$$

que és la mateixa equació d'abans fent V = 0, per tant la solució serà

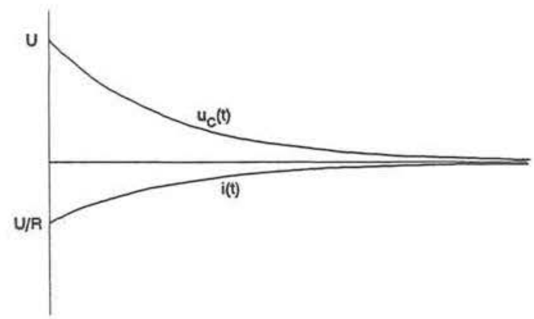
$$t = -\tau \ln(-u_C) + K$$

Per determinar K, sabem que $u_C(0) = U$

$$0 = -\tau \ln(-U) + K \qquad\qquad K = \tau \ln(-U)$$

$$t = \tau \ln(-U) - \tau \ln(-u_C) = \tau \ln \frac{U}{u_C}$$

$$\frac{t}{\tau} = \ln \frac{U}{u_C} \qquad\qquad e^{t/\tau} = \frac{U}{u_C}$$



$$u_C = \frac{U}{e^{t/\tau}} = U\, e^{-t/\tau}$$

i el corrent

$$i(t) = C\,\frac{d\,u_C}{d\,t} = -\frac{U}{R}\, e^{-t/\tau}$$

2- Inductància

Sabem que un circuit elèctric recorregut per un corrent I crea un flux magnètic ϕ. Si el circuit és de forma fixa i no està saturat, podem dir que ϕ és proporcional a I. Anomenem coeficient d'autoinducció al quocient entre ϕ i I. Es mesura en Henry (H).

$$L = \frac{\Phi}{I} \qquad\qquad 1\ H = \frac{1\ Wb}{1\ A}$$

En una inductància la tensió induïda val

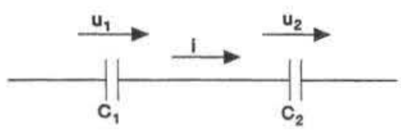
$$u = N\,\frac{d\,\Phi}{d\,t} = -N\,\frac{d\,\Phi}{d\,I}\,\frac{d\,I}{d\,t} = L\,\frac{d\,I}{d\,t} \qquad\qquad \boxed{u = L\,\frac{d\,I}{d\,t}}$$

3- Continuïtat de tensions i corrents

En una inductància el corrent no pot tenir discontinuïtats, ja que la tensió en borns seria infinitament gran. En un condensador, en canvi, serà la tensió la que no pot tenir discontinuïtats ja que si les tingués el corrent circulant seria infinitament gran. L'aparició de tensions o corrents infinitament grans estan prohibides per les lleis físiques perquè representen una aportació instantània d'energia infinita.

4- Associació de condensadors

4-1- Associació en sèrie



$$u = u_1 + u_2$$

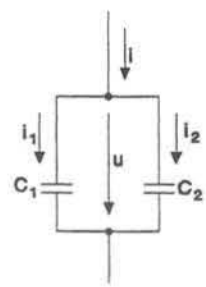
$$\frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt}$$

$$i = C_1 \frac{du_1}{dt} = C_2 \frac{du_2}{dt} = C_{eq} \frac{du}{dt}$$

$$\frac{i}{C_{eq}} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

4-2- Associació en paral.lel



$$i = i_1 + i_2 \qquad i = C_{eq} \frac{du}{dt}$$

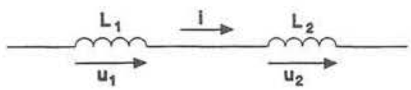
$$i_1 = C_1 \frac{du}{dt} \qquad i_2 = C_2 \frac{du}{dt}$$

$$C_{eq} \frac{du}{dt} = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

5- Associació d'inductàncies

5-1- Associació en sèrie



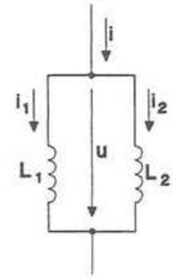
$$u = u_1 + u_2 \qquad u = L_{eq}\,\frac{d\,i}{d\,t}$$

$$u_1 = L_1\,\frac{d\,i}{d\,t} \qquad u_2 = L_2\,\frac{d\,i}{d\,t}$$

$$L_{eq}\,\frac{d\,i}{d\,t} = L_1\,\frac{d\,i}{d\,t} + L_2\,\frac{d\,i}{d\,t}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

5-2- Associació en paral.lel



$$i = i_1 + i_2 \qquad \frac{d\,i}{d\,t} = \frac{d\,i_1}{d\,t} + \frac{d\,i_2}{d\,t}$$

$$u = L_1\frac{d\,i_1}{d\,t} = L_2\frac{d\,i_2}{d\,t} = L_{eq}\frac{d\,i}{d\,t}$$

$$\frac{u}{L_{eq}} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} \qquad \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

6- Energia emmagatzemada

6-1- Energia emmagatzemada en un condensador en un instant donat

$$E = \int_0^t p\,dt = \int_0^t u\,i\,dt = \int_0^t uC\,\frac{d\,u}{d\,t}\,d\,t = C\int_0^t d\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\,C\,u^2}$$

6-2- Energia emmagatzemada en una inductància en un instant donat

$$E = \int_0^t p\,d\,t = \int_0^t u\,i\,d\,t = \int_0^t i\,L\,\frac{d\,i}{d\,t}\,d\,t = L\int_0^t d\left(\frac{i^2}{2}\right)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\,L\,i^2}$$

Complexos i fasors

1- Nombres complexos

1-1- Definició i propietats

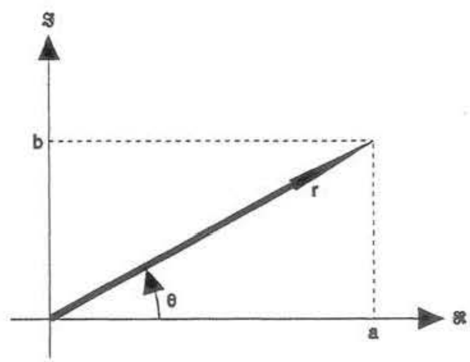
Una parella de nombres reals (a, b) s'anomena nombre complex si verifica una sèrie de propietats. És usual escriure els nombres complexos en la forma cartesiana; o sigui a + j b on j és la unitat imaginària que verifica

$$j^2 = -1 \qquad\qquad j = \sqrt{-1}$$

A la forma (a, b) se l'anomena forma binòmica. Si dibuixem aquest nombre en el pla complex, veiem que un nombre complex equival a un vector en el pla complex i que es pot escriure en la forma polar; que és

$$r_{\angle\theta}$$

on r s'anomena mòdul (longitud del vector) i θ argument (angle que forma amb l'eix real mesurat en el sentit anti-horari).



Pel teorema de Pitàgores i altres teoremes de triangulació

$$\theta = \operatorname{artg}\frac{b}{a} \qquad\qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = r \operatorname{Cos}\theta \qquad\qquad b = r \operatorname{Sin}\theta$$

i tindrem

$$a + j\,b = r\,(\mathrm{Cos}\ \theta + j\ \mathrm{Sin}\ \theta)$$

Si recordem

$$\mathrm{Sin}\ \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2\,j} \qquad \mathrm{Cos}\ \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

podrem escriure

$$a + j\,b = r\left(\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} + j\,\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2\,j}\right) = r\,e^{j\theta}$$

que és la forma exponencial d'un nombre complex.

1-2- Conjugat d'un nombre complex

El conjugat d'un complex denotat pel mateix nombre amb asterisc és un altre complex amb la mateixa part real i la part imaginària canviada de signe. És el mateix que dir que té el mateix mòdul i l'argument canviat de signe.

$$(a + j\,b)^* = (a - j\,b) \qquad (r_{\underline{|\theta}})^* = r_{\underline{|-\theta}}$$

1-3- Operacions amb nombres complexos en forma cartesiana

Suma:

$$(a + j\,b) + (c + j\,d) = (a + c) + j\,(b + d)$$

Resta:

$$(a + j\,b) - (c + j\,d) = (a - c) + j\,(b - d)$$

Producte:

$$(a + j\,b)\,(c + j\,d) = (a\,c - b\,d) + j\,(a\,d + b\,c)$$

Producte pel conjugat:

$$(a + j\,b)\,(a + j\,b)^* = (a + j\,b)\,(a - j\,b) = (a^2 + b^2) + j\,0$$

Quocient:

$$\frac{a + j\,b}{c + j\,d} = \frac{a + j\,b}{c + j\,d}\,\frac{(c + j\,d)^*}{(c + j\,d)^*} = \frac{(a + j\,b)\,(c - j\,d)}{c^2 + d^2} = \left(\frac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2}\right) + j\left(\frac{b\,c - a\,d}{c^2 + d^2}\right)$$

1-4- Operacions amb nombres complexos en forma polar

Producte:

$$(r_{\lfloor\theta})(r'_{\lfloor\theta'}) = r\, r'_{\lfloor\theta + \theta'}$$

Producte pel conjugat:

$$(r_{\lfloor\theta})(r_{\lfloor\theta})^* = (r_{\lfloor\theta})(r_{\lfloor-\theta}) = r^2_{\lfloor 0} = r^2$$

Quocient:

$$\frac{r_{\lfloor\theta}}{r'_{\lfloor\theta'}} = \frac{r}{r'}{}_{\lfloor(\theta - \theta')}$$

El producte i el quocient són molt més senzills en forma polar mentre que la suma i la resta no són directament possibles en aquesta forma.

2- Descomposició d'una funció sinusoidal en les seves components

Sigui una funció sinusoidal $u(t) = \hat{U}\, Cos(\omega t + \alpha)$ on $\hat{U}$ és el valor màxim, ω és la pulsació, t la variable dependent i α l'angle de fase inicial que verifica $u(0) = \hat{U}\, Cos\alpha$.

Si agafem una funció sinusoidal qualsevol la podem descomposar en suma de dues funcions sinusoidals sense fase inicial aplicant les propietats de la trigonometria

$$u = \hat{U}\, Cos\, (\omega t + \alpha) = \hat{U}\, Cos\, \alpha\, Cos\, \omega t - \hat{U}\, Sin\, \alpha\, Sin\, \omega t = \hat{U}_r\, Cos\, \omega t - \hat{U}_i\, Sin\, \omega t$$

anomenem $\hat{U}_r$ i $\hat{U}_i$ als termes en cosinus i sinus respectivament.

2-1- Suma de magnituds sinusoidals de la mateixa pulsació

Si tenim dues funcions sinusoidals de la mateixa pulsació

$$u_1 = \hat{U}_1\, Cos\, (\omega t + \alpha_1) \qquad u_2 = \hat{U}_2\, Cos\, (\omega t + \alpha_2)$$

la seva suma és una funció sinusoidal de la mateixa pulsació

$$u = u_1 + u_2 \qquad u = \hat{U}\, Cos\, (\omega t + \alpha)$$

Si descomposem cada funció en les seves components

$$u_1 = \hat{U}_{1r}\, Cos\, \omega t - \hat{U}_{1i}\, Sin\, \omega t \qquad u_2 = \hat{U}_{2r}\, Cos\, \omega t - \hat{U}_{2i}\, Sin\, \omega t$$

$$u = \hat{U}_r\, Cos\, \omega t - \hat{U}_i\, Sin\, \omega t$$

veiem que la seva suma és

$$u = \left(\hat{U}_{1r} + \hat{U}_{2r}\right) Cos\ \omega t - \left(\hat{U}_{1i} + \hat{U}_{2i}\right) Sin\ \omega t$$

d'on deduïm

$$\hat{U}_r = \hat{U}_{1r} + \hat{U}_{2r} \qquad\qquad \hat{U}_i = \hat{U}_{1i} + \hat{U}_{2i}$$

Així doncs la suma de dues funcions sinusoidals de la mateixa freqüència és una funció sinusoidal de la mateixa freqüència; on la seva component en cosinus és la suma de les components en cosinus i la component en sinus és la suma de les components en sinus.

2-2- Referència d'un conjunt de magnituds sinusoidals

Tenim un conjunt tancat de magnituds sinusoidals

$$u_1 = \hat{U}_1\ Cos\left(\omega t + \alpha_1\right) \qquad\qquad u_2 = \hat{U}_2\ Cos\left(\omega t + \alpha_2\right)$$

$$u_3 = \hat{U}_3\ Cos\left(\omega t + \alpha_3\right) \qquad\qquad u_4 = \hat{U}_4\ Cos\left(\omega t + \alpha_4\right)$$

L'angle de fase inicial és aquell que ens dóna el valor de cada magnitud en l'instant $t = 0$. Si el conjunt és tancat (no tenim més magnituds) podem definir l'instant $t = 0$ en qualsevol moment (el zero de l'eix temporal és arbitrari) i, per tant, l'angle de fase inicial és, de fet, un valor que relaciona les magnituds entre elles en l'eix temporal.

Podem triar qualsevol moment com a instant inicial però és més còmode agafar-ne un tal que una de les funcions tingui fase inicial nul.la. La magnitud a la qual es fixa la fase se l'anomena magnitud de referència.

En el nostre cas, si per exemple prenem u_3 com a referència tindrem

$$\alpha'_1 = \alpha_1 - \alpha_3 \qquad \alpha'_2 = \alpha_2 - \alpha_3 \qquad \alpha'_4 = \alpha_4 - \alpha_3$$

i llavors

$$u_1 = \hat{U}_1\ Cos\left(\omega t + \alpha'_1\right) \qquad\qquad u_2 = \hat{U}_2\ Cos\left(\omega t + \alpha'_2\right)$$

$$u_3 = \hat{U}_3\ Cos\ \omega t \qquad\qquad u_4 = \hat{U}_4\ Cos\left(\omega t + \alpha'_4\right)$$

Si, en canvi, prenem u_1 com a referència serà

$$\alpha''_2 = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad \alpha''_3 = \alpha_3 - \alpha_1 \qquad \alpha''_4 = \alpha_4 - \alpha_1$$

d'on

$$u_1 = \hat{U}_1 \, Cos\, \omega t \qquad u_2 = \hat{U}_2 \, Cos\left(\omega t + \alpha''_2\right)$$

$$u_3 = \hat{U}_3 \, Cos\left(\omega t + \alpha''_3\right) \qquad u_4 = \hat{U}_4 \, Cos\left(\omega t + \alpha''_4\right)$$

3- Complex associat a una funció sinusoidal

Hem vist que una funció sinusoidal es pot descomposar en dues components de fase inicial nul.la.

$$u = \hat{U}\, Cos\,(\omega t + \alpha) = \hat{U}\, Cos\,\alpha\; Cos\,\omega t - \hat{U}\, Sin\,\alpha\; Sin\,\omega t = \hat{U}_r\, Cos\,\omega t - \hat{U}_i\, Sin\,\omega t$$

Si totes les nostres funcions tenen la mateixa pulsació, ens queda la funció perfectament descrita amb el binomi $u = \left(\hat{U}_r, \hat{U}_i\right)$ que és un pseudo-vector que no indica mòdul i direcció sinó mòdul i fase i que, per tant, l'anomenarem fasor. El seu mòdul i el seu argument (fase) són

$$U = \sqrt{\hat{U}_r^2 + \hat{U}_i^2} \qquad \alpha = Artg\,\frac{\hat{U}_i}{\hat{U}_r}$$

Aquest fasor es pot escriure també en forma de nombre complex. Li posarem una ratlleta sota per indicar que es tracta d'un fasor; o sigui $\underline{\hat{U}} = \hat{U}_r + j\,\hat{U}_i$ o bé $\underline{\hat{U}} = \hat{U}_{|\alpha}$.

I, tal com hem vist, les sumes es faran

$$\left(\hat{U}_r, \hat{U}_i\right) = \left(\hat{U}_{1r}, \hat{U}_{1i}\right) + \left(\hat{U}_{2r}, \hat{U}_{2i}\right) = \left(\hat{U}_{1r} + \hat{U}_{2r}, \hat{U}_{1i} + \hat{U}_{2i}\right)$$

$$\hat{U}_r = \hat{U}_{1r} + \hat{U}_{2r} \qquad \hat{U}_i = \hat{U}_{1i} + \hat{U}_{2i}$$

$$\underline{\hat{U}} = \underline{\hat{U}}_1 + \underline{\hat{U}}_2 = \left(\hat{U}_{1r} + \hat{U}_{2r}\right) + j\left(\hat{U}_{1i} + \hat{U}_{2i}\right)$$

Circuits en corrent altern

S'anomena corrent altern a aquella forma de transmissió de l'energia elèctrica en què la tensió canvia de signe de forma periòdica. La forma més usual és el corrent altern és la sinusoidal en què tensió i corrent segueixen equacions del tipus

$$v(t) = \hat{V}\, Cos\, (\omega\, t + \alpha) \qquad\qquad i(t) = \hat{I}\, Cos\, (\omega\, t + \beta)$$

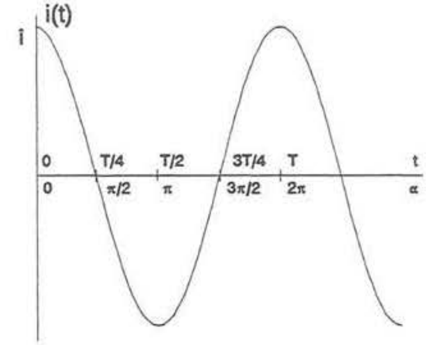
Per definir una magnitud alterna fan falta dues magnituds: amplitud i freqüència. La freqüència és el nombre de cops que l'ona (en aquest cas una sinusoide) es repeteix en un segon. Es mesura en Hertz (Hz) o sigui cicles per segon. A Europa el corrent altern es distribueix a una freqüència de 50 Hz. El valor ω s'anomena pulsació, es mesura en radians/segon i val la freqüència multiplicada per 2π, $\omega = 2\,\pi\,f$. El període (T) és l'invers de la freqüència. Si $f = 50$ Hz tindrem $T = 20$ ms.

L'amplitud és el valor màxim que té la senoide $\hat{V}$ o $\hat{I}$ respectivament per tensions i corrents.

1- Magnituds en corrent altern

Atès que el seu valor varia amb el temps, s'adopten diversos valors per a la mesura de tensions i corrents. Els exemples que segueixen estan donats en corrent, però també valen per a tensió (substitució de I per V).

1-1- Valor màxim, valor de pic i valor pic a pic



El valor màxim o valor de pic correspon al pic de la sinusoide respecte al seu eix.

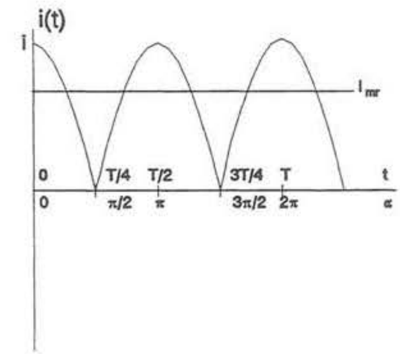
$$I_{pic} = \hat{I}$$

El valor de pic a pic és el doble del valor de pic.

$$I_{pap} = 2\,\hat{I}$$

1-2- Valor mig i valor mig rectificat

S'anomena valor mig d'una ona al promig de tots els valors que pren aquesta al llarg d'un període.



En cas de corrent sinusoidal el valor mig serà sempre nul ja que l'ona és simètrica respecte l'eix temporal. En aquests casos s'acostuma a donar el valor mig rectificat que és el valor mig del valor absolut de la funció.

En el cas d'una funció sinusoidal el valor absolut és una funció que repeteix la part positiva de la sinusoide dos cops per període. El valor mig rectificat serà per tant l'àrea tancada sota el mig període dividida pel valor de mig període.

$$I_{mr} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{I}\; Cos(\omega\, t)\; d(\omega\, t)}{\pi} = \frac{\hat{I}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} Cos(\omega\, t)\; d(\omega\, t)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\,\hat{I} \approx 0.64\,\hat{I}$$

El valor mig es pot definir també com aquell valor constant que, durant un període, tanca sota seu (formant un rectangle) la mateixa àrea que la funció sinusoidal. Així, a la figura, l'àrea tancada per la sinusoide en mig període és igual a l'àrea sota el rectangle que té per alçada el valor mig rectificat i per amplada mig període.

1-3- Valor eficaç

Es defineix el valor eficaç d'un corrent altern com aquell valor de corrent continu que, en un període, dissipa sobre una resistència la mateixa energia que el corrent altern. Se l'anomena RMS (Root Mean Square) ja que s'obté fent la mitja quadràtica.

Per al cas d'un corrent sinusoidal serà:

$$P = R\, I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} R\,(i(t))^2\, d(\omega t) = \frac{R}{2\pi}\int_o^{2\pi}(i(t))^2\, d(\omega t)$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}(\hat{I}\, Cos(\omega t))^2\, d(\omega t) = \frac{\hat{I}^2}{2\pi}\int_o^{2\pi}(Cos(\omega t))^2\, d(\omega t) = \frac{\hat{I}^2}{2}$$

$$I = I_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{I} \approx 0.707\,\hat{I}$$

A la pràctica, si no s'esmenta res més, es parla de valors eficaços . Així si s'escriu V o I s'està parlant de tensió i corrent eficaç. Això fa que

$$i(t) = \hat{I}\, Cos(\omega t + \beta) = \sqrt{2}\, I\, Cos(\omega\, t + \beta)$$

2- Comportament d'inductàncies i condensadors

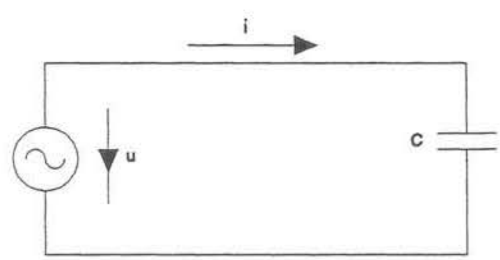
2-1- Condensadors

Si, en la figura, la tensió és

$$u(t) = \sqrt{2}\; U\; Cos\;(\omega\; t + \alpha)$$

tindrem

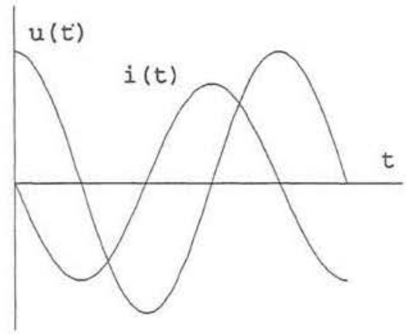
$$i(t) = C\,\frac{d\,u(t)}{d\,t}$$



$$i(t) = \sqrt{2}\; C\; U\,(-\,\omega\; Sin\;(\omega\; t + \alpha)) = \sqrt{2}\; U\;\omega\; C\; Cos\left(\omega\; t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Si anomenem reactància capacitiva a $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

i definim el nou corrent com $I = \dfrac{U}{X_C}$ tindrem

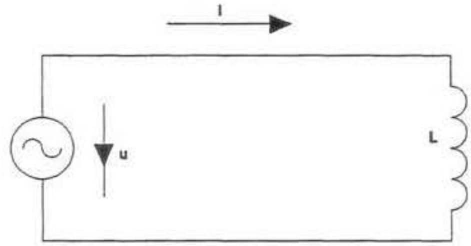


$$i(t) = \sqrt{2}\, I \, Cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

D'on veiem que el corrent avança 90° a la tensió.

2-2- Inductàncies

Si, en la figura, el corrent és



$$i(t) = \sqrt{2}\, I \, Cos\,(\omega\, t + \beta)$$

tindrem:

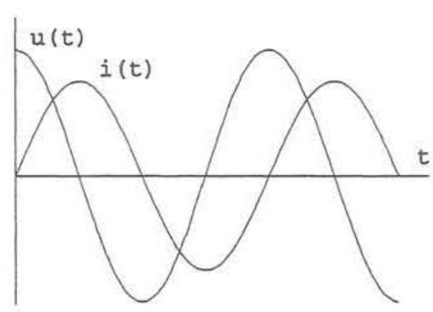
$$u(t) = L\,\frac{d\, i\,(t)}{d\, t}$$

$$u(t) = \sqrt{2}\, L\, I\, (-\,\omega\, Sin\,(\omega\, t + \beta)) = \sqrt{2}\, I\, \omega\, L\, Cos\left(\omega\, t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Si anomenem reactància inductiva a $X_L = \omega L$ i definim la nova tensió com $U = X_L I$ tindrem:

$$u(t) = \sqrt{2}\, U\, Cos\left(\omega\, t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Con normalment coneixem la tensió, fem $\alpha = \beta + \dfrac{\pi}{2}$ d'on



$$u(t) = \sqrt{2}\, U\, Cos\,(\omega\, t + \alpha)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, I\, Cos\left(\omega\, t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

El corrent endarrereix 90° la tensió.

3- Representació de tensions i corrents sinusoidals amb complexos

En un circuit alimentat amb una font de tensió sinusoidal de pulsació ω totes les tensions i corrents, segons les propietats vistes fins ara, com estem emprant només elements lineals, seran també sinusoidals de pulsació ω.

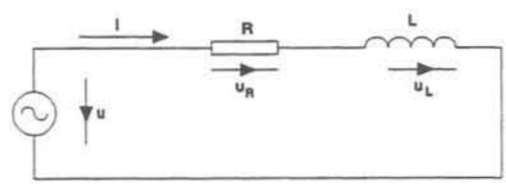
Totes aquestes funcions sinusoidals es podran representan mitjançant complexos. Vist que es treballa més còmodament si les tensions i corrents es mesuren en valor eficaç, els complexos que les representaran seran referits al valor eficaç.

$$u(t) = \sqrt{2}\, U \, Cos\,(\omega\, t + \alpha) = \sqrt{2}\, U_r\, Cos\,\omega t - \sqrt{2}\, U_i\, Sin\,\omega t \qquad \underline{U} = U_r + j\, U_i = U_{\angle\alpha}$$

També es podrà definir arbitràriament una d'elles com a referència, la qual, per tant, tindrà fase O.

4- Relacions entre tensions i corrents

Per al circuit de la figura, en forma temporal, podem escriure



$$u = \sqrt{2}\, U\, Cos\,(\omega t + \alpha)$$

$$i = \sqrt{2}\, I\, Cos\,(\omega t + \beta)$$

$$u_L = \sqrt{2}\, U_L\, Cos\,(\omega t + \alpha_L) \qquad u_R = \sqrt{2}\, U_R\, Cos\,(\omega t + \alpha_R)$$

on, segons les relacions conegudes,

$$u_R = R\, i = \sqrt{2}\, R\, I\, Cos\,(\omega t + \beta) = \sqrt{2}\, U_R\, Cos\,(\omega t + \alpha_R)$$

$$u_L = L\,\frac{di}{dt} = \sqrt{2}\, X_L\, I\, Cos\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\, U_L\, Cos\,(\omega t + \alpha_L)$$

D'on treiem

$$U_R = R\, I \qquad \alpha_R = \beta \qquad U_L = X_L\, I \qquad \alpha_L = \beta + \frac{\pi}{2}$$

A més

$$u = u_R + u_L = \sqrt{2}\, X_L\, I\, Cos\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}\, R\, I\, Cos\,(\omega t + \beta)$$

Si descomposem les funcions en les seves components i sumem

$$u = \sqrt{2}\, I\left[(-X_L Sin\beta + R Cos\beta)\, Cos\ \omega t - (X_L Cos\beta + R Sin\beta)\, Sin\,\omega t\right]$$

Anomenant $(U_r, U_i) = U_{\lfloor\alpha}$ $\qquad (I_r, I_i) = I_{\lfloor\beta} = (I\, Cos\,\beta\,,\, I\, Sin\,\beta)$

$$U_r = R\, I_r - X_L\, I_i \qquad U_i = R\, I_i + X_L\, I_r$$

Reescrivim amb fasors

$$\underline{U} = U_{\lfloor\alpha} = U_r + j\, U_i \qquad \underline{I} = I_{\lfloor\beta} = I_r + j\, I_i$$

$$\underline{U}_L = U_{L\lfloor\alpha_L} = U_{Lr} + j\, U_{Li} \qquad \underline{U}_R = U_{R\lfloor\alpha_R} = U_{Rr} + j\, U_{Ri}$$

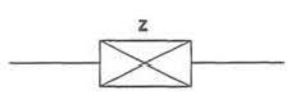
I fixem-nos que

$$(U_r + jU_i) = (R + jX_L)\,(I_r + jI_i) \qquad \underline{U} = (R + j\, X_L)\, \underline{I} = \underline{Z}\, \underline{I} \qquad \underline{Z} = R + j\, X_L$$

Anomenem **impedància** ($\underline{Z}$) d'un circuit sèrie al complex que té com a part real la resistència i com a part imaginària la reactància comptada positiva si és inductiva i negativa si és capacitiva.

Les lleis d'Ohm i Kirchhoff que es fan servir en corrent continu es mantenen vàlides en corrent altern emprant la notació fasorial.

El símbol d'una impedància en general és el de la figura adjunta.

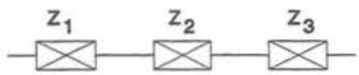


Convé fer una observació important. En corrent altern el mòdul de la suma NO és la suma de mòduls, cal fer-la en forma fasorial (nombres complexos).

La impedància és doncs el quocient entre tensions i corrents en forma complexa. El seu mòdul és el quocient de mòduls i el seu argument és els graus elèctrics que la tensió avança al corrent.

5- Associació d'impedàncies

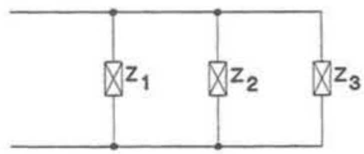
5-1- Impedàncies en sèrie



Anàlogament al corrent continu les impedàncies en sèrie (recorregudes pel mateix corrent) es sumen.

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$$

5-2- Impedàncies en paral.lel



Anàlogament al corrent continu les impedàncies en paral.lel (connectades a la mateixa tensió) verifiquen

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}$$

La demostració és similar a la del cas de les resistències però amb fasors.

La tensió en borns del conjunt i el corrent absorbit pel conjunt verifiquen

$$u(t) = \sqrt{2}\, U \, Cos(\omega\, t + \alpha) \qquad\qquad i(t) = \sqrt{2}\, I \, Cos(\omega\, t + \beta)$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{U}_{tot}}{\underline{I}_{tot}} = Z_{\angle\varphi}$$

amb $\varphi = \alpha - \beta$; és a dir que el decalatge entre U i I és l'argument de Z.

5-3- Admitància, conductància i susceptància

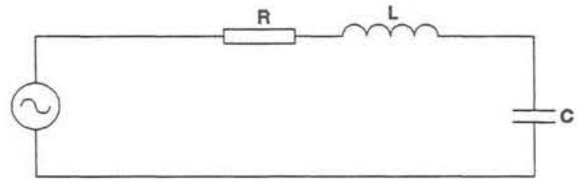
Anomenem admitància ($\underline{Y}$) a l'invers de la impedància. A les components de l'admitància se les anomena conductància (G) i susceptància (B).

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \qquad\qquad \underline{Y} = G + j\,B$$

6- Ressonància

6-1- Ressonància sèrie

S'anomena ressonància en un circuit sèrie a aquell estat en què la impedància és només resistiva (part imaginària nul.la).



$$R + j\,\omega\,L + \frac{1}{j\,\omega\,C} = R'$$

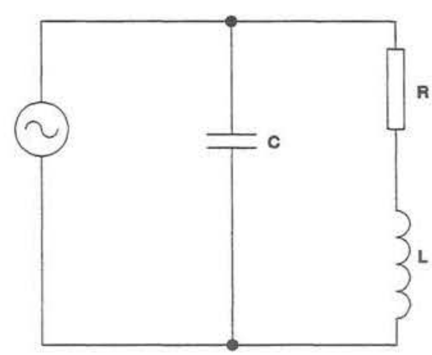
La freqüència a la qual passa aquest fenomen, que anomenarem f_r (pulsació $\omega_r = 2\,\pi\,f_r$), vindrà donada per

$$R' = R \qquad \omega_r\,L = \frac{1}{\omega_r\,C} \qquad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \qquad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,C}}$$

Es verifica que, en la ressonància sèrie, la impedància és mínima.

6-2- Ressonància paral.lel

S'anomena ressonància en un circuit com el de la figura quan l'admitància és resistiva (part imaginària nul.la). Aquest fenomen es dóna quan la pulsació és la de ressonància ω_r.



$$\frac{1}{R + j\,\omega_r\,L} + j\,\omega_r\,C = \frac{1}{R'}$$

$$\frac{R - j\,\omega_r\,L}{R^2 + \omega_r^2\,L^2} + j\,\omega_r\,C = \frac{1}{R'}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{R}{R^2 + \omega_r^2\,L^2} \qquad \omega_r\,C = \frac{\omega_r\,L}{R^2 + \omega_r^2\,L^2}$$

$$R^2 + \omega_r^2\,L^2 = \frac{L}{C} \qquad \omega_r^2 = \frac{\frac{L}{C} - R^2}{L^2} = \frac{L - C\,R^2}{C\,L^2} = \frac{1}{L\,C}\left(1 - \frac{R^2\,C}{L}\right)$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}\sqrt{1 - \frac{R^2\,C}{L}} \qquad\qquad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,C}}\sqrt{1 - \frac{R^2\,C}{L}}$$

$$R' = \frac{R^2 + \omega_r^2\,L^2}{R} = R + \frac{\omega_r^2\,L^2}{R} = R + \frac{L - C\,R^2}{C\,R} = \frac{L}{R\,C}$$

En aquest cas la freqüència de ressonància no es correspon amb la d'admitància mínima.

7- Lleis de Kirchhoff

Primera: La suma fasorial dels corrents considerats entrants a un nus és igual a la dels sortints.

Segona: La suma fasorial de totes les tensions d'una malla és nul.la.

8- Potència

La potència instantània és una funció que correspon al producte d'una funció tensió per una funció corrent.

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Com el producte de dues magnituds sinusoidals és també periòdica, la potència és una magnitud variable en el temps, com la variació és molt ràpida (doble freqüència que la de la xarxa d'alimentació) no tindrà massa interés el seu valor instantani i treballarem sempre amb el valor promig.

$$P = \overline{p(t)} = \overline{u(t) \cdot i(t)}$$

S'anomena potència activa perquè és la que dóna treball (Energia = potència · temps). En cas de funcions sinusoidals

$$u(t) = \sqrt{2}\;U\;Cos\;\omega\,t \qquad\qquad i(t) = \sqrt{2}\;I\;Cos\;(\omega\,t - \varphi)$$

$$p(t) = u(t)\;i(t) = 2\;U\;I\;Cos\;\omega\,t\;Cos\;(\omega\,t - \varphi)$$

$$p(t) = 2\;U\;I\;Cos\;\omega\,t\;(Cos\;\omega\,t\;Cos\;\varphi + Sin\;\omega\,t\;Sin\;\varphi)$$

$$p(t) = 2\,U\,I\,(Cos^2\,\omega t\;Cos\,\varphi + Cos\,\omega t\;Sin\,\omega t\;Sin\,\varphi)$$

$$p(t) = 2\,U\,I\left(Cos^2\,\omega t\;Cos\,\varphi + \frac{1}{2}\,Sin\,(2\,\omega t)\;Sin\,\varphi\right)$$

$$p(t) = U\,I\,(Cos\,\varphi + Cos\,2\,\omega t\;Cos\,\varphi + Sin\,2\,\omega t\;Sin\,\varphi)$$

$$p(t) = U\,I\,(Cos\,\varphi + Cos\,(2\,\omega t - \varphi))$$

Treiem el valor mig

$$P = \frac{U\,I}{2\,\pi}\int_o^{2\pi}[Cos\,\varphi + Cos\,(2\,\omega t - \varphi)]\;d\omega t$$

$$P = \frac{U\,I}{2\,\pi}\int_o^{2\pi} Cos\,\varphi\;d\omega t + \frac{U\,I}{2\,\pi}\int_o^{2\pi} Cos\,(2\,\omega t - \varphi)\;d\omega t$$

$$P = \frac{U\,I}{2\,\pi}\,2\pi\;Cos\,\varphi + \frac{U\,I}{2\,\pi}\left[\frac{1}{2}\,Sin\,(4\pi - \varphi) - \frac{1}{2}\,Sin\,(-\,\varphi)\right]$$

$$P = U\,I\;Cos\,\varphi + \frac{U\,I}{2\,\pi}\left[\frac{1}{2}\,Sin\,(-\,\varphi) - \frac{1}{2}\,Sin\,(-\,\varphi)\right]$$

$$\boxed{P = U\,I\;Cos\,\varphi}$$

L'energia per unitat de temps que es consumeix (convertint-se en altres energies) ja no depèn com en el cas de corrent continu dels valors U i I sinó que intervé el decalatge entre corrents i tensions en forma de cosinus d'aquest decalatge.

Al producte de valors eficaços se l'anomena potència aparent (S) i al valor Cos φ se l'anomena factor de potència.

$$S = U\,I \qquad\qquad Cos\,\varphi = \frac{P}{S}$$

La potència aparent dóna la idea del tamany elèctric d'una instal.lació mentre que l'activa dóna idea del consum.

Definim la potència complexa com $\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*$ d'on[1]

$$P = \Re\{\underline{S}\} = \Re\left\{\underline{U}\,\underline{I}^*\right\} = U\,I\,Cos\,\varphi$$

S'anomena potència reactiva a

$$Q = \Im\{\underline{S}\} = \Im\left\{\underline{U}\,\underline{I}^*\right\} = U\,I\,Sin\,\varphi$$

D'on clarament

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Si la càrrega és inductiva $Q > 0$ i si és capacitiva $Q < 0$.

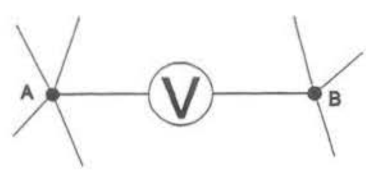
La potència reactiva és l'energia per unitat de temps que circula per la instal.lació sense consumir-se.

9- Aparells de mesura

9-1- Voltímetres

Un voltímetre és un aparell que mesura diferències de potencial entre dos punts; és a dir, mesura tensions.

Atès que mesuren diferències de potencial entre punts, s'ha de connectar en els punts entre els que es desitja saber la tensió.



$V = V_{AB}$

És important que la seva impedància interna sigui altíssima (idealment infinita) ja que altrament el corrent que per ell circularia podria alterar les condicions del circuit.

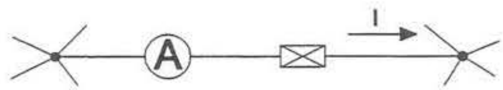
Existeixen diferents formes de mesurar les tensions en corrent altern sinusoidal, tots els aparells tenen en comú que si la senyal és realment sinusoidal l'aparell ens indica el valor eficaç.

---

1 $\Re\{\ \}$ denota la part real d'un número complex i $\Im\{\ \}$ denota la part imaginària.

9-2- Amperímetres

Un amperímetre és un aparell que mesura el corrent que circula per un conductor. És necessari que el corrent a mesurar circuli per dintre seu.



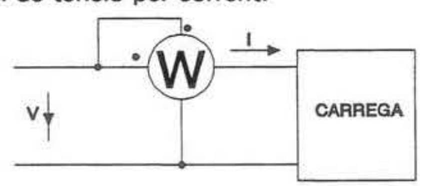
La seva resistència interna ha de ser baixíssima (idealment nul.la) ja que altrament modificaria les condicions del circuit.

Anàlogament al cas dels voltímetres, si el corrent és sinusoidal, tot amperímetre d'alterna ens dóna com a indicació el valor eficaç del corrent.

9-3- Wattímetres

Són aparells pensats per mesurar potència. Tenen dos jocs de terminals, un joc per a tensió i un altre per a corrent. El primer es connecta entre els punts en què cal prendre la tensió (circuit de tensió o voltimètric) i el segon de forma que el corrent circuli per dintre seu (circuit de corrent o amperimètric). Mesuren el valor mig del producte instantani de tensió per corrent.

En la figura s'ha connectat un wattímetre per mesurar la potència consumida per la càrrega. Els punts marcats indiquen com s'han de connectar els terminals per tal que la lectura sigui positiva.



Els de corrent altern monofàsics indiquen (si les dues magnituds són de la mateixa freqüència) $W = \Re\{\underline{V}\,\underline{I}^*\}$.

Dit de manera diferent, mesuren el producte de la tensió pel corrent i pel cosinus de l'angle de desfàs entre ambdues magnituds. El fet que mesurin o no potència activa dependrà de com els connecti l'usuari. Mesuren potència activa consumida per una càrrega si la tensió aplicada és la de la càrrega i el corrent també és el de la càrrega.

9-4- Vàrmetres i fasímetres

Hi ha altres aparells relacionats amb la mesura de potències entre els quals destaquem els vàrmetres i els fasímetres. Els primers mesuren potència reactiva i els segons el factor de potència (Cos φ) o l'angle φ.

9-5- Freqüencímetres

Serveixen per indicar la freqüència d'una tensió alterna i, per tant, es connecten com un voltímetre. Poden ser aparells d'agulla (una agulla es desplaça sobre una escala graduada) però els més corrents són els de làmines. Els de freqüències elevades normalment són electrònics.

Un freqüencímetre de làmines consta d'un nombre determinat de tires de material ferromagnètic les quals, per construcció, tenen cada una freqüències de ressonància mecànica diferents. En ser excitades amb una bobina per la qual circula un corrent de la freqüència a mesurar, oscil.len lleugerament excepte aquella que té la freqüència corresponent que oscil.la amb amplitud molt més gran. Les làmines normalment van esgraonades de 0.5 en 0.5 Hz per un marge relativament petit. Per exemple, de 45 a 55 Hz o de 40 a 60 Hz.

9-6- Comptadors

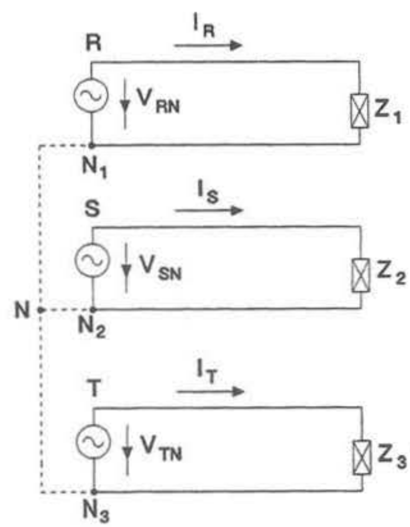
Els comptadors són aparells integradors. La seva missió és indicar la integral d'una funció al llarg del temps des de l'instant de posta en marxa.

Els més coneguts són els d'aplicació domèstica que mesuren energia (kilowatts-hora); és a dir, integren la potència al llarg del temps. Internament són elèctricament semblants a un wattímetre però les connexions externes consten de dos fils d'entrada i dos de sortida simplificant-se força el connexionat. A nivell industrial són corrents també els d'energia reactiva.

L'efecte integrador s'aconsegueix mitjançant un simple comptador numèric accionat per un disc giratori de velocitat proporcional a la potència consumida.

Sistemes trifàsics

1- Creació d'un sistema trifàsic en estrella



Imaginem-nos un circuit com el de la figura. Podem referir totes les tensions a un punt comú unint N_1, N_2 i N_3 en un únic punt N anomenat neutre. Per a cada un dels subcircuits tindrem

$$\underline{V}_{RN} = \underline{I}_R\, \underline{Z}_1 \qquad\qquad \underline{V}_{SN} = \underline{I}_S\, \underline{Z}_2$$

$$\underline{V}_{TN} = \underline{I}_T\, \underline{Z}_3$$

Si fem $V_{RN} = V_{SN} = V_{TN}$ o sigui, igualtat de mòduls de les tensions i donem simetria al sistema fent que les tres tensions estiguin desfasades un angle de $\frac{360°}{3} = 120°$ tindrem

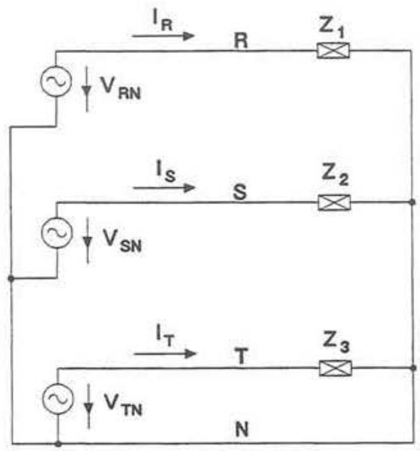
$$v_{RN} = \sqrt{2}\; V\; Cos\; \omega\; t \qquad\qquad \underline{V}_{RN} = V\,(1 + j\,0)$$

$$v_{SN} = \sqrt{2}\; V\; Cos\; (\omega\; t - 120°) \qquad\qquad \underline{V}_{SN} = V\left(\frac{-1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$v_{TN} = \sqrt{2}\; V\; Cos\; (\omega\; t - 240°) \qquad\qquad \underline{V}_{TN} = V\left(\frac{-1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Les connexions N_1, N_2 i N_3 es fan amb un únic cable anomenat cable neutre mentre que els cables R, S i T s'anomenen fases.

A la pràctica, les tres fonts de tensió V_{RN}, V_{SN} i V_{TN} s'aconsegueixen amb un únic generador trifàsic, el sistema de la figura és un sistema en què el generador està connectat en estrella (Y) i el consum (Z_1, Z_2 i Z_3) també. El neutre dels generadors i secundaris de transformadors sol anar posat a terra (connectats elèctricament a terra), és a dir, a potencial nul.



A més de les tres tensions V_{RN}, V_{SN} i V_{TN} n'hi apareixen tres més

$$\underline{V}_{RS}=\underline{V}_{RN}-\underline{V}_{SN}=\sqrt{3}\ V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\,\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\ V_{|30^\circ}$$

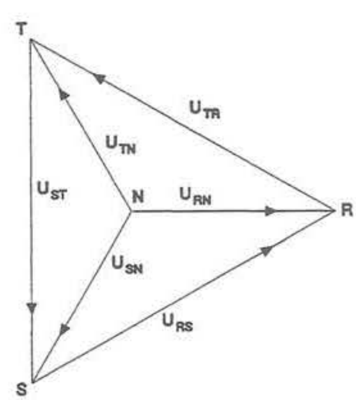
$$\underline{V}_{ST}=\underline{V}_{SN}-\underline{V}_{TN}=\sqrt{3}\ V\,(0-j1)=\sqrt{3}\ V_{|-90^\circ}$$

$$\underline{V}_{TR}=\underline{V}_{TN}-\underline{V}_{RN}=\sqrt{3}\ V\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\,\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\ V_{|150^\circ}$$

Les tensions $V_{RN}=V_{SN}=V_{TN}=V_S$ s'anomenen tensions senzilles. Les tensions $V_{RS}=V_{ST}=V_{TR}=V_C$ s'anomenen tensions compostes. Les tensions senzilles són $\sqrt{3}$ vegades menors que les compostes.

Aquest sistema és un sistema trifàsic simètric (les tensions compostes són iguals) i equilibrat (les tensions senzilles són iguals) de seqüència directa RST o ABC; permutant els decalatges de dues tensions senzilles (i arreglant convenientment les compostes) obtindrem un sistema de seqüència inversa (RTS o ACB).

La tensió que es pren com a nominal d'un sistema trifàsic (aquella que el defineix) és la tensió composta. Per tant, prenent $\underline{U}_{RN}$ com a fasor de referència, tenim



$$\underline{U}_{RN}=\frac{U}{\sqrt{3}}\,(1+j\,0) \qquad \underline{U}_{RS}=U\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{U}_{SN}=\frac{U}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}-j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \underline{U}_{ST}=U\,(0-j\,1)$$

$$\underline{U}_{TN} = \frac{U}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \underline{U}_{TR} = U\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)$$

Convé recordar que l'origen dels fasors és arbitrari.

$$\underline{U}_{RN} = \underline{I}_R\,\underline{Z}_1 \qquad \underline{U}_{SN} = \underline{I}_S\,\underline{Z}_2 \qquad \underline{U}_{TN} = \underline{I}_T\,\underline{Z}_3$$

La primera llei de Kirchhoff ens dóna el corrent de neutre

$$\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T$$

En el cas particular (força corrent) en què les tres càrregues són iguals tenim

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} \qquad \underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}} \qquad \underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{SN}}{\underline{Z}} \qquad \underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{TN}}{\underline{Z}}$$

$$I_R = I_S = I_T = I \qquad \underline{I}_R = I_{\underline{|\alpha}} \qquad \underline{I}_S = I_{\underline{|\alpha - 120°}} \qquad \underline{I}_T = I_{\underline{|\alpha - 240°}}$$

$$i_R = \sqrt{2}\,I\,Cos(\omega t + \alpha) \qquad i_S = \sqrt{2}\,I\,Cos(\omega t + \alpha - 120°) \qquad i_T = \sqrt{2}\,I\,Cos(\omega t + \alpha - 240°)$$

Els tres corrents tenen el mateix mòdul i estan desfasats entre ells 120°. Podem calcular el corrent que tornarà pel neutre aplicat a la primera Llei de Kirchhoff.

$$i_N = i_R + i_S + i_T = 0 \qquad \underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0$$

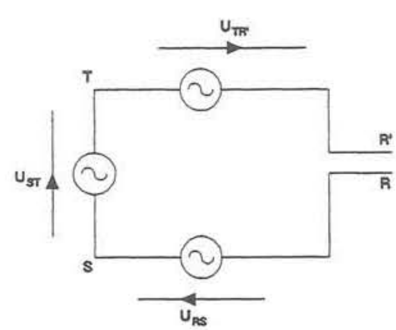
En un sistema de tensions simètric i equilibrat, si la càrrega és simètrica, el corrent pel neutre és nul.

2- Connexió dels generadors en triangle

Veiem què succeeix si connectem els tres generadors en sèrie

$$\underline{U}_{RR'} = \underline{U}_{RS} + \underline{U}_{ST} + \underline{U}_{TR'}$$

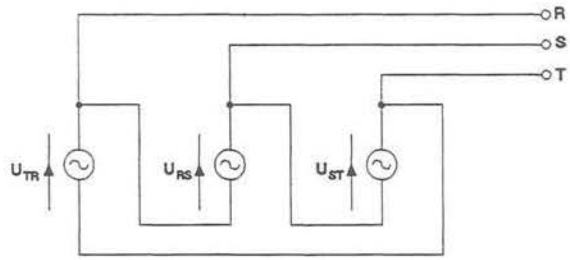
$$\underline{U}_{RR'} = U\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) + U(0 - j1) + U\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = 0$$



Per tant, podem tancar el triangle sense que circulin corrents pel seu interior.

Aquest sistema s'anomena sistema en triangle o en delta (D). Els sistemes en triangle només tenen tensions compostes (no tenen tensions senzilles) i no tenen neutre; això no impedeix que poguem calcular les tensions senzilles com si el neutre fos present.

$$U_{RS} = U_{ST} = U_{TR}$$



3- Càrregues en estrella i en triangle

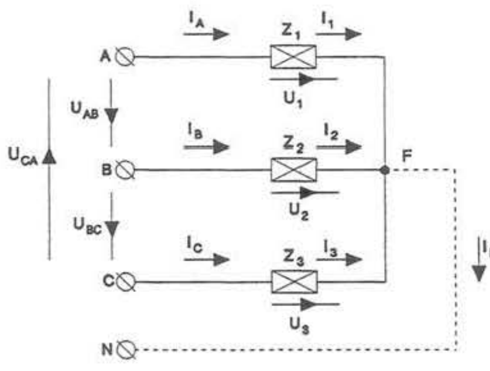
La connexió estrella o triangle del receptor és independent de quina sigui la del generador.

3-1- Càrrega en estrella

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1\,\underline{Z}_1 = \underline{U}_{AF}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2\,\underline{Z}_2 = \underline{U}_{BF}$$

$$\underline{U}_3 = \underline{I}_3\,\underline{Z}_3 = \underline{U}_{CF}$$



$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \qquad \underline{I}_A = \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 \qquad \underline{I}_B = \underline{I}_2 \qquad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1 \qquad \underline{I}_C = \underline{I}_3$$

Si s'alimenta amb un sistema de tensions simètric i equilibrat

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U \qquad U_{AN} = U_{BN} = U_{CN} = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

En cas que existeixi el cable de neutre i es connecti a F (centre d'estrella) el corrent per aquest valdrà (aplicant la primera llei de Kirchhoff)

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

Si no hi ha neutre o no es connecta al punt F, aquest punt pot estar a un potencial diferent de N

$$\underline{U}_{FN} \neq 0$$

Si la càrrega és simètrica

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 \qquad I_1 = I_2 = I_3 = I_L \qquad U_1 = U_2 = U_3 = U_L$$

$$I_A = I_B = I_C = I \qquad I_L = I \qquad U_L = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

$\underline{U}_{FN} = 0$ $\underline{I}_N = 0$ independentment del fet que hi hagi o no cable de neutre.

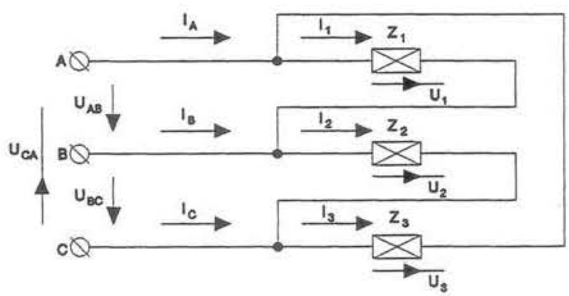
Amb una càrrega simètrica connectada en estrella els tres corrents de línia I_A, I_B i I_C són iguals en mòdul entre ells i coincideixen amb els corrents de cada branca de la càrrega. Les càrregues suporten la tensió simple (o senzilla del sistema).

3-2- Càrrega en triangle

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_1 = \underline{Z}_1\,\underline{I}_1$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_2 = \underline{Z}_2\,\underline{I}_2$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_3 = \underline{Z}_3\,\underline{I}_3$$



$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 - \underline{I}_3 \qquad \underline{I}_B = \underline{I}_2 - \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_3 - \underline{I}_2 \qquad U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U$$

Si la càrrega és simètrica

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 \qquad I_1 = I_2 = I_3 = I_B \qquad U_1 = U_2 = U_3 = U_L$$

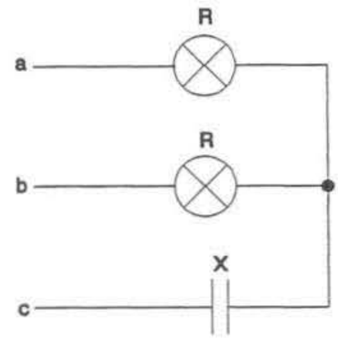
$$I_A = I_B = I_C = I \qquad U_L = U \qquad I_B = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

En una càrrega simètrica connectada en triangle els corrents per la línia I_A, I_B i I_C són $\sqrt{3}$ vegades majors que els de cada branca de la càrrega (I_1, I_2 i I_3), la tensió que suporta cada branca és la composta del sistema. De forma anàloga al cas estrella els tres corrents (bé de línia, bé de cada impedància) difereixen entre ells només pel desfasament de 120° que hi ha entre ells quan la càrrega és simètrica i el sistema trifàsic que l'alimenta és simètric i equilibrat.

4- Seqüència de fases

En connectar un consum, l'ordre de les fases és important. Són indiferents A-B-C, B-C-A i C-A-B ja que tenen el mateix ordre però no és el mateix A-C-B. A un sistema en què els màxims de les tensions segueixen l'ordre en el temps A-B-C se l'anomena sistema de seqüència directa i a un en què segueixen l'ordre C-B-A sistema de seqüència inversa. La seqüència de fases és especialment important al connectar màquines elèctriques rotatives.

4-1- Determinació de la seqüència de fases



Una forma molt corrent de determinar la seqüència de fases d'un sistema trifàsic simètric és l'esquema de la figura.

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0 \qquad \underline{U}_{af} = R\underline{I}_a$$

$$\underline{U}_{bf} = R\underline{I}_b \qquad \underline{U}_{cf} = -jX\underline{I}_c$$

Referint totes les tensions a una referència r tindrem

$$\underline{U}_{ar} - \underline{U}_{fr} = R\underline{I}_a \qquad \underline{U}_{br} - \underline{U}_{fr} = R\underline{I}_b \qquad \underline{U}_{cr} - \underline{U}_{fr} = -jX\underline{I}_c$$

d'on treiem

$$\frac{\underline{U}_{ar}}{R} - \frac{\underline{U}_{fr}}{R} = \underline{I}_a \qquad \frac{\underline{U}_{br}}{R} - \frac{\underline{U}_{fr}}{R} = \underline{I}_b \qquad j\frac{\underline{U}_{cr}}{X} - j\frac{\underline{U}_{fr}}{X} = \underline{I}_c$$

substituïm i ordenem

$$\frac{\underline{U}_{ar}}{R} + \frac{\underline{U}_{br}}{R} + j\frac{\underline{U}_{cr}}{X} = \underline{U}_{fr}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + j\frac{1}{X}\right)$$

ens interessa el valor de $\underline{U}_{fr}$ així que reordenant l'equació, ens queda finalment l'expressió[1]

$$\underline{U}_{fr} = \frac{\underline{U}_{ar}\frac{1}{R} + \underline{U}_{br}\frac{1}{R} + j\underline{U}_{cr}\frac{1}{X}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + j\frac{1}{X}}$$

[1] La generalització d'aquesta expressió és coneguda com a teorema de Millmann

Prenent com a referència la fase a obtenim

$$\underline{U}_{fa} = \frac{\underline{U}_{ba}\frac{1}{R} + j\underline{U}_{ca}\frac{1}{X}}{\frac{2}{R} + j\frac{1}{X}}$$

Anomenant U a la tensió de línia, considerant la tensió senzilla de la fase a (real o fictícia) com a referència d'angles i fent els canvis de variable

$$m = \frac{X}{R} \qquad \underline{r} = \frac{\underline{U}_{ba}}{\underline{U}_{ca}} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

obtenim

$$\underline{U}_{fa} = \frac{\underline{r}\,m + j}{2\,m + j}\,\underline{U}_{ca} \qquad U_{fa} = \left|\frac{\underline{r}\,m + j}{2\,m + j}\right| U = U\sqrt{\frac{m^2 + 1 + m\sqrt{3}}{4\,m^2 + 1}}$$

Prenent com a referència la fase b obtenim

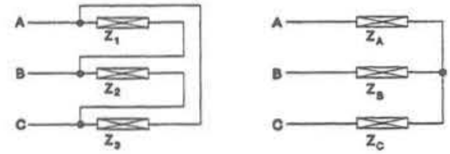
$$\underline{r} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{U}_{cb}} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad U_{fb} = U\sqrt{\frac{m^2 + 1 - m\sqrt{3}}{4\,m^2 + 1}}$$

D'on clarament es veu que $u_{fa} > u_{fb}$. D'aquí es dedueix que si anomenem c a la fase on hi ha el condensador, la fase a és la de la bombeta que fa més llum. Observem que cal agafar bombetes de tensió nominal més gran que la tensió senzilla del sistema; per exemple la composta.

Convé recordar que la resistència de les bombetes varia amb la temperatura i que, per tant, la bombeta que fa més llum tindrà una resistència més elevada.

5- Conversions triangle-estrella i estrella-triangle

En molts casos es pot simplificar un circuit si un conjunt d'impedàncies connectades en triangle es converteixen en un conjunt equivalent d'impedàncies en estrella. En la figura s'ha representat un conjunt d'impedàncies en triangle i un altre en estrella. Volem trobar les relacions que han de complir per tal que ambdós circuits siguin equivalents.



Les impedàncies vistes des de dos terminals de l'estrella són les impedàncies de les branques corresponents en sèrie mentre que en el triangle és la compresa entre els terminals en paral.lel amb l'associació en sèrie de les altres dues.

Les igualem i obtenim

$$\underline{Z}_A+\underline{Z}_B=\frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \qquad \underline{Z}_B+\underline{Z}_C=\frac{\underline{Z}_2(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \qquad \underline{Z}_A+\underline{Z}_C=\frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}$$

5-1- Pas de triangle a estrella

Sumem la primera i la tercera i restem la segona

$$\underline{Z}_A+\underline{Z}_B+\underline{Z}_A+\underline{Z}_C-\underline{Z}_B-\underline{Z}_C=2\underline{Z}_A=\frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)+\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)-\underline{Z}_2(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}=\frac{2\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}$$

Sumem la primera i la segona i restem la tercera

$$\underline{Z}_A+\underline{Z}_B+\underline{Z}_B+\underline{Z}_C-\underline{Z}_A-\underline{Z}_C=2\underline{Z}_B=\frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)+\underline{Z}_2(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3)-\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}=\frac{2\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}$$

Sumem la segona i la tercera i restem la primera

$$\underline{Z}_B+\underline{Z}_C+\underline{Z}_A+\underline{Z}_C-\underline{Z}_A-\underline{Z}_B=2\underline{Z}_C=\frac{\underline{Z}_2(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3)+\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)-\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}=\frac{2\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}$$

i així

$$\boxed{\underline{Z}_A=\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}} \qquad \boxed{\underline{Z}_B=\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}} \qquad \boxed{\underline{Z}_C=\frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}}$$

5-2- Pas d'estrella a triangle

Anomenem $\underline{Z}$ al valor

$$\underline{Z}=\underline{Z}_A\underline{Z}_B+\underline{Z}_B\underline{Z}_C+\underline{Z}_A\underline{Z}_C=\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_1\underline{Z}_3\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\underline{Z}_3\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)}$$

Aquest valor $\underline{Z}$ es pot descomposar segons

$$\underline{Z}=\frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}\,\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_1+\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}=\underline{Z}_C\underline{Z}_1 \qquad \boxed{\underline{Z}_1=\frac{\underline{Z}_A\underline{Z}_B+\underline{Z}_B\underline{Z}_C+\underline{Z}_A\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C}}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}\,\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = \underline{Z}_A\underline{Z}_2 \qquad \boxed{\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_A\underline{Z}_B+\underline{Z}_B\underline{Z}_C+\underline{Z}_A\underline{Z}_C}{\underline{Z}_A}}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}\,\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = \underline{Z}_B\underline{Z}_3 \qquad \boxed{\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_A\underline{Z}_B+\underline{Z}_B\underline{Z}_C+\underline{Z}_A\underline{Z}_C}{\underline{Z}_B}}$$

Si el consum és simètric

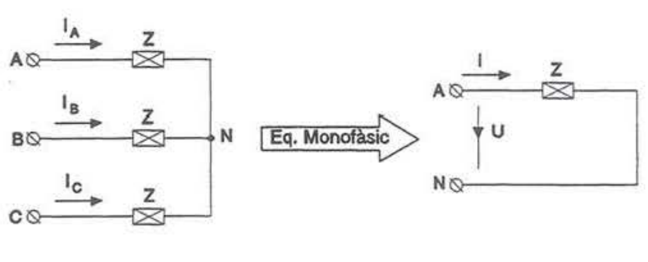
$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_Y \qquad \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}_D \qquad \underline{Z}_D = 3\,\underline{Z}_Y$$

6- Consums simètrics

Com s'ha vist en apartats anteriors, qualsevol càrrega simètrica consumeix corrents de línia iguals en mòdul però decalats 120° elèctrics entre ells. Per tant, coneixent un dels corrents, podem reconstruir els altres dos mitjançant girs de 120° en positiu i negatiu. El mateix es pot aplicar a les tensions, caigudes de tensió, etc.

Per tot el que hem dit anteriorment, si tenim un consum simètric, podem treballar amb un esquema equivalent fase-neutre. Aquest neutre tant pot ser fictici (serà el cas d'una càrrega en triangle o una estrella amb el neutre no connectat) com real (sistema amb neutre, càrrega en estrella i neutre connectat).

En cas de tenir una estrella



$$\underline{V}_{AB} = V\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{V}_{BC} = V\,(0 - j\,1)$$

$$\underline{V}_{CA} = V\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}\right)$$

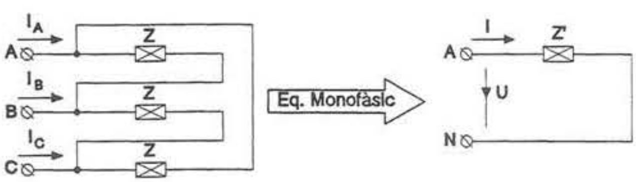
$$\underline{V}_{AN} = \frac{V}{\sqrt{3}}\,(1 + j\,0) \qquad \underline{V}_{BN} = \frac{V}{\sqrt{3}}\left(\frac{-1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \underline{V}_{CN} = \frac{V}{\sqrt{3}}\left(\frac{-1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

L'esquema fase-neutre serà segons la figura.

$$\underline{U} = \frac{V}{\sqrt{3}} \qquad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{V}{\sqrt{3}\,\underline{Z}}$$

$$\underline{I}_A = \frac{V}{\sqrt{3}\,\underline{Z}} \qquad \underline{I}_B = \frac{V}{\sqrt{3}\,\underline{Z}}\left(-\frac{1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \underline{I}_C = \frac{V}{\sqrt{3}\,\underline{Z}}\left(-\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

En cas de tenir un triangle



$$\underline{V}_{AB} = V\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{V}_{BC} = V\,(0 - j\,1)$$

$$\underline{V}_{CA} = V\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{V}_{AN} = \frac{V}{\sqrt{3}}\,(1 + j\,0) \qquad \underline{V}_{BN} = \frac{V}{\sqrt{3}}\left(\frac{-1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \underline{V}_{CN} = \frac{V}{\sqrt{3}}\left(\frac{-1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

L'esquema fase-neutre serà segons la figura.

$$\underline{U} = \frac{V}{\sqrt{3}} \qquad \underline{Z}' = \frac{\underline{Z}}{3} \qquad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}'} = \frac{V}{\sqrt{3}}\,\frac{3}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{3}\,V}{\underline{Z}}$$

$$\underline{I}_A = \frac{\sqrt{3}\,V}{\underline{Z}} \qquad \underline{I}_B = \frac{\sqrt{3}\,V}{\underline{Z}}\left(-\frac{1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \underline{I}_C = \frac{\sqrt{3}\,V}{\underline{Z}}\left(-\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Qualsevol circuit amb alimentació simètrica i consum simètric serà representable mitjançant un circuit monofàsic fase/neutre (encara que el neutre sigui fictici) de manera que les dues fases restants són idèntiques decalades 120° i 240° respectivament.

7- Potència

En un sistema de n fils la potència complexa val

$$\underline{S} = \underline{U}_{1r}\,\underline{I}_1^* + \underline{U}_{2r}\,\underline{I}_2^* + \ldots\ldots + \underline{U}_{nr}\,\underline{I}_n^*$$

on r és una referència qualsevol.

Si en un sistema trifàsic fem que r coincideixi amb el neutre (real o fictici) tindrem

$$\underline{S} = \underline{U}_{1n}\,\underline{I}_1^* + \underline{U}_{2n}\,\underline{I}_2^* + \underline{U}_{3n}\,\underline{I}_3^*$$

on la potència activa és la part real de $\underline{S}$

$$P = \Re\,\{\underline{S}\} = \Re\,\{\underline{U}_{1n}\,\underline{I}_1^*\} + \Re\,\{\underline{U}_{2n}\,\underline{I}_2^*\} + \Re\,\{\underline{U}_{3n}\,\underline{I}_3^*\}$$

i la potència reactiva és la part imaginària de $\underline{S}$.

$$Q = \Im\,\{\underline{S}\} = \Im\,\{\underline{U}_{1n}\,\underline{I}_1^*\} + \Im\,\{\underline{U}_{2n}\,\underline{I}_2^*\} + \Im\,\{\underline{U}_{3n}\,\underline{I}_3^*\}$$

Si el consum és simètric

$$P = 3\left(\frac{U}{\sqrt{3}}\;I\;Cos\;\varphi\right) = \sqrt{3}\;U\;I\;Cos\;\varphi \qquad\qquad Q = \sqrt{3}\;U\;I\;Sin\;\varphi$$

7-1- Mesura de la potència

Recordem que en un sistema de n fils, la potència aparent val

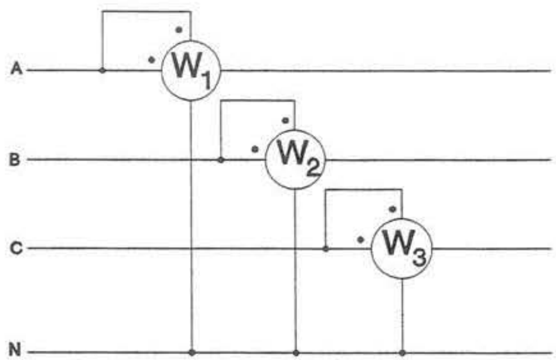
$$\underline{S} = \underline{U}_{1r}\,\underline{I}_1^* + \underline{U}_{2r}\,\underline{I}_2^* + \underline{U}_{3r}\,\underline{I}_3^* + \ldots\ldots + \underline{U}_{nr}\,\underline{I}_n^*$$

on r és una referència qualsevol. Si el sistema és trifàsic amb neutre (n = 4) prendrem el neutre com a referència (r = N).

$$\underline{S} = \underline{U}_{AN}\,\underline{I}_A^* + \underline{U}_{BN}\,\underline{I}_B^* + \underline{U}_{CN}\,\underline{I}_C^* + \underline{U}_{NN}\,\underline{I}_N^* = \underline{U}_{AN}\,\underline{I}_A^* + \underline{U}_{BN}\,\underline{I}_B^* + \underline{U}_{CN}\,\underline{I}_C^*$$

$$Q = \Im\{\underline{U}_{AN}\underline{I}_A^*\} + \Im\{\underline{U}_{BN}\underline{I}_B^*\} + \Im\{\underline{U}_{CN}\underline{I}_C^*\} = VAr_1 + VAr_2 + VAr_3$$

$$P = \Re\{\underline{U}_{AN}\,\underline{I}_A^*\} + \Re\{\underline{U}_{BN}\,\underline{I}_B^*\} + \Re\{\underline{U}_{CN}\,\underline{I}_C^*\} = W_1 + W_2 + W_3$$

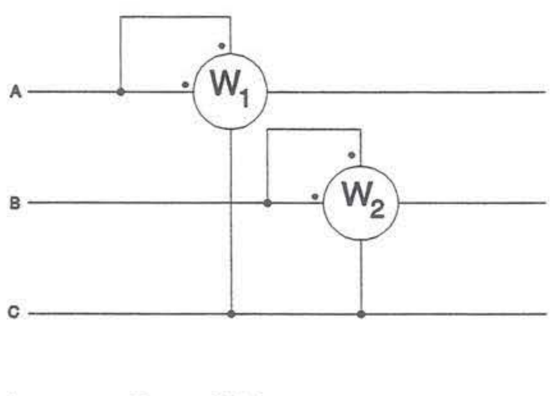


Si el sistema no té neutre (n = 3) prendrem la fase C com a referència (r = C).

$$\underline{S} = \underline{U}_{AC}\,\underline{I}_A^* + \underline{U}_{BC}\,\underline{I}_B^* + \underline{U}_{CC}\,\underline{I}_C^* = \underline{U}_{AC}\,\underline{I}_A^* + \underline{U}_{BC}\,\underline{I}_B^*$$

$$Q = \Im\{\underline{U}_{AC}\,\underline{I}_A^*\} + \Im\{\underline{U}_{BC}\,\underline{I}_B^*\} = VAr_1 + VAr_2$$

$$P = \Re\{\underline{U}_{AC}\,\underline{I}_A^*\} + \Re\{\underline{U}_{BC}\,\underline{I}_B^*\} = W_1 + W_2$$



Aquesta darrera s'anomena Connexió Aron.

7-2- Mesura de la potència reactiva amb wattímetres

Molts cops no es disposa de varímetres i llavors cal mesurar la reactíva amb wattímetres. Recordem

$$\underline{S} = \underline{U}_{Ar}\, \underline{I}^*_A + \underline{U}_{Br}\, \underline{I}^*_B + \underline{U}_{Cr}\, \underline{I}^*_C + \underline{U}_{Nr}\, \underline{I}^*_N$$

Si el sistema té neutre el prendrem com a referència (r = N) i llavors $\underline{U}_{Nr} = 0$. Si el sistema no té neutre tindrem $\underline{I}_N = 0$. En qualsevol dels dos casos serà $\underline{U}_{Nr}\, \underline{I}^*_N = 0$.

Prenem com a referència el neutre, real o fictici

$$\underline{S} = \underline{U}_{AN}\, \underline{I}^*_A + \underline{U}_{BN}\, \underline{I}^*_B + \underline{U}_{CN}\, \underline{I}^*_C \qquad Q = \Im\,\{\underline{U}_{AN}\, \underline{I}^*_A\} + \Im\,\{\underline{U}_{BN}\, \underline{I}^*_B\} + \Im\{\underline{U}_{CN}\, \underline{I}^*_C\}$$

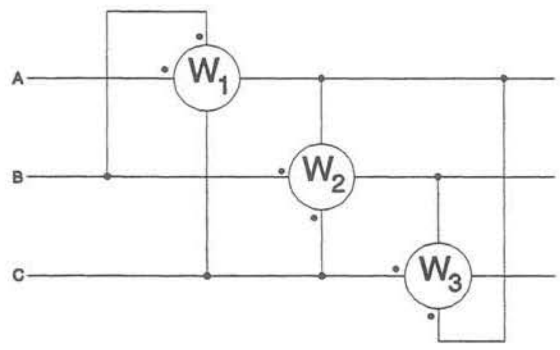
Aquesta equació treballa amb parts imaginàries; però tenim wattímetres i, per tant, només podem mesurar parts reals. Sabem, però, que $\Im\,\{\underline{U}\, \underline{I}^*\} = \Re\,\{-\,j\,\underline{U}\, \underline{I}^*\}$ per tant l'equació es converteix en

$$Q = \Re\,\{-\,j\,\underline{U}_{AN}\, \underline{I}^*_A\} + \Re\,\{-\,j\,\underline{U}_{BN}\, \underline{I}^*_B\} + \Re\,\{-\,j\,\underline{U}_{CN}\, \underline{I}^*_C\}$$

En un sistema simètric i equilibrat, en multiplicar una tensió senzilla per -j obtenim un fasor en la direcció de la tensió composta corresponent a les altres dues fases.

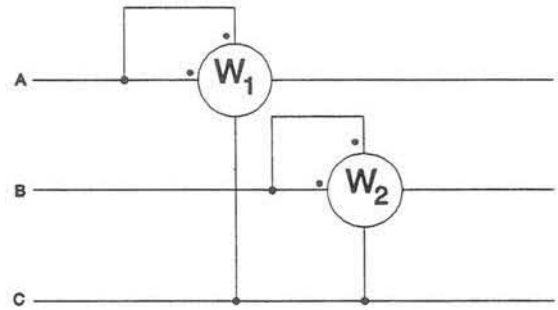
$$Q = \Re\left\{\frac{\underline{U}_{BC}}{\sqrt{3}}\, \underline{I}^*_A\right\} + \Re\left\{\frac{\underline{U}_{CA}}{\sqrt{3}}\, \underline{I}^*_B\right\} + \Re\left\{\frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}}\, \underline{I}^*_C\right\} \qquad Q = \frac{1}{\sqrt{3}}\, \Re\,\{\underline{U}_{BC}\, \underline{I}^*_A + \underline{U}_{CA}\, \underline{I}^*_B + \underline{U}_{AB}\, \underline{I}^*_C\}$$

Si el sistema de tensions no és simètric, la mesura no és vàlida.



$$Q = W_1 + W_2 + W_3$$

Si el sistema de tensions és simètric i la càrrega és simètrica podem mesurar la potència reactiva segons l'esquema de la figura amb $Q = \sqrt{3}\,(W_1 - W_2)$, sempre que no hi hagi connexió o existència de neutre.



Segons passem a demostrar:

$$Q = \sqrt{3}\ \Re\left\{\underline{U}_{AC}\,\underline{I}^*_A - \underline{U}_{BC}\,\underline{I}^*_B\right\}$$

$$\underline{U}_{AC}\,\underline{I}^*_A = U\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\,\frac{1}{2}\right) I\,(Cos\varphi + j\ Sin\ \varphi)$$

$$\underline{U}_{AC}\,\underline{I}^*_A = U\,I\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ Cos\ \varphi + \frac{1}{2}\ Sin\ \varphi\right) + j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ Sin\ \varphi - \frac{1}{2}\ Cos\ \varphi\right)\right]$$

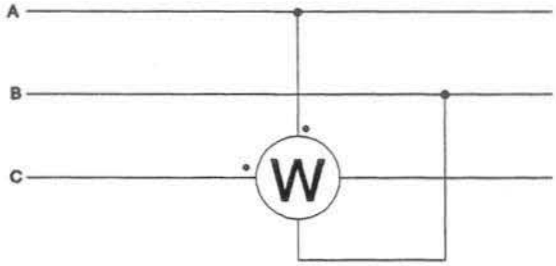
$$\underline{U}_{BC}\,\underline{I}^*_B = U\,(0 - j\,1)\ I\left(\frac{-1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(Cos\ \varphi + Sin\ \varphi)$$

$$\underline{U}_{BC}\,\underline{I}^*_B = U\,I\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ Cos\ \varphi\ \frac{-1}{2}\ Sin\ \varphi\right) + j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ Sin\ \varphi + \frac{1}{2}\ Cos\ \varphi\right)\right]$$

$$Q = \sqrt{3}\ U\,I\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ Cos\ \varphi + \frac{1}{2}\ Sin\ \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\ Cos\ \varphi + \frac{1}{2}\ Sin\ \varphi\right) = \sqrt{3}\ U\ I\ Sin\ \varphi$$

Aquest és el Mètode Aron per a la mesura de reactiva. Cal recordar que és necessari que, tant el sistema de tensions com la càrrega han d'ésser simètrics i que els wattímetres es connecten segons l'esquema amb seqüència de fases directa.

Si el sistema de tensions és simètric i la càrrega és simètrica podem mesurar la potència reactiva amb un sol wattímetre tal com es veu a la figura amb $Q = \sqrt{3}\ W$, sempre que no hi hagi connexió o existència de neutre.



$$Q = \sqrt{3}\ \Re \left\{ \underline{U}_{AB}\ \underline{I}^*_C \right\}$$

ja que

$$\underline{U}_{AB}\ \underline{I}^*_C = U \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2} \right) I \left(\frac{-1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (Cos\ \varphi + j\ Sin\ \varphi)$$

$$\underline{U}_{AB}\ \underline{I}^*_C = U\ I\ (Sin\ \varphi - j\ Cos\ \varphi)$$

$$Q = \sqrt{3}\ \Re\ \{U\ I\ (Sin\ \varphi - j\ Cos\ \varphi)\} = \sqrt{3}\ U\ I\ Sin\ \varphi$$

Problemes de circuits de corrent continu

Problema CC1

Per un conductor circula un corrent constant de 20 A. Quants electrons passen per una secció fixa del conductor en tres minuts?

$$3 \text{ min } 20\,A\,\frac{1\,C/s}{1\,A}\,\frac{1\,e^-}{1.602\;10^{-19}\,C}\,\frac{60\,s}{1 \text{ min}} = 2.25\;10^{22}\,e^-$$

Problema CC2

Sabent que $V_{AB} = 10$ V, $V_{BC} = 7$ V, $V_{AD} = -4$ V, $V_{EC} = 8$ V, $V_{FB} = -10$ V i $V_{AG} = 3$ V, trobeu el valor de les tensions de tots els punts respecte al punt G.

$$V_{BG} = V_{BA} + V_{AG} = V_{AG} - V_{AB} = 3 - 10 = -7 \text{ V}$$

$$V_{CG} = V_{CA} + V_{AG} = V_{CB} + V_{BA} + V_{AG} = V_{AG} - V_{BC} - V_{AB} = 3 - 7 - 10 = -14 \text{ V}$$

$$V_{DG} = V_{DA} + V_{AG} = V_{AG} - V_{AD} = 3 - (-4) = 7 \text{ V}$$

$$V_{EG} = V_{EC} + V_{CG} = 8 - 14 = -6 \text{ V}$$

$$V_{FG} = V_{FB} + V_{BG} = -10 - 7 = -17 \text{ V}$$

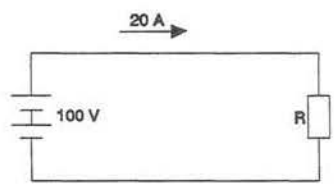
Problema CC3

La diferència de potencial entre dos punts A i B és de 12 V. Quin corrent circularà si els unim amb una resistència de 3Ω?

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{3} = 4\ A$$

Problema CC4

Calculeu el valor de la resistència del circuit de la figura



$$R = \frac{V}{I} = \frac{100}{20} = 5\ \Omega$$

Problema CC5

Quina tensió apareixerà en borns d'una resistència de 100 Ω si per ella circulen 17 A ?

$$V = I\ R = 17\ 100 = 1700\ V$$

Problema CC6

Sabent que la resistivitat de la manganina a la temperatura de treball és $0.43\ \Omega\ \frac{mm^2}{m}$, trobeu la resistència de 20 m de fil de manganina d'1.5 mm² de secció.

$$R = \rho\ \frac{l}{s} = 0.43\ \Omega\ \frac{mm^2}{m}\ \frac{20\ m}{1.5\ mm^2} = 5.73\ \Omega$$

Problema CC7

Una resistència està constituïda per 1000 voltes de fil de constantan sobre un carret ceràmic. El diàmetre del fil és de 0.25 mm i el del carret 1.5 cm. Calculeu el valor de la resistència i el corrent que hi passarà si es connecta en borns d'una bateria de 240 V, sabent que la resistivitat del constantan és, a la temperatura a què està treballant,

$$\rho = 0.5\ \Omega\ \frac{mm^2}{m}$$

$$s = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{0.25}{2}\right)^2 = 0.049\ mm^2$$

$$l = N\,\pi\,D = 1000\ \pi\ 1.5\ 10^{-2} = 47.12\ m$$

$$R = \rho\ \frac{l}{s} = 0.5\ \frac{47.12}{0.049} = 480\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{240}{480} = 0.5\ A$$

Problema CC8

Un fil de plom fa 40 cm de llarg i té una secció i d'1 mm^2. Quant val la seva resistència a 60°C si sabem que

$$\rho_{20} = 0.204\ \Omega\ \frac{mm^2}{m} \qquad \alpha = 3.7\ 10^{-3}\ {}^\circ C^{-1}$$

$$R_{20} = \rho_{20}\ \frac{l}{s} = 0.204\ \frac{40\ 10^{-2}}{1} = 0.082\ \Omega = 82\ m\Omega$$

$$R_{60} = R_{20}\ (1 + \alpha\ (60 - 20)) = 82\ (1 + 3.7\ 10^{-3}\ (60 - 20)) = 93.67\ m\Omega$$

Problema CC9

Una bombeta de 127 V 100 W consumeix 0.7874 A. Hem mesurat la seva resistència a 20°C obtenint un valor de 12.75 Ω. A quina temperatura treballa el filament sabent que és de tungstè?. Quin corrent es consumeix en l'instant d'encendre?

Dades: $\rho = 0.054\ \Omega\ \frac{mm^2}{m} \qquad \alpha = 0.004\ {}^\circ C^{-1}$

$$R_T = \frac{127\ V}{0.7874\ A} = 161.29\ \Omega$$

$$R_T = R_{20}\ (1 + \alpha\ (T - 20)) = 12.75\ (1 + 0.004\ (T - 20)) = 161.29$$

d'on treiem T = 2933 °C

$$I_{20} = \frac{V}{R_{20}} = \frac{127}{12.75} = 9.961\ A$$

Problema CC10

Una garlanda nadalenca està formada per 10 bombetes de 44 Ω en sèrie. Trobeu:
a) Resistència del conjunt.
b) Corrent que circula si es connecten a 220 V.
c) Tensió en borns de cada bombeta si es connecten a 220 V.

a)

$$R_T = 10\ 44\ \Omega = 440\ \Omega$$

b)

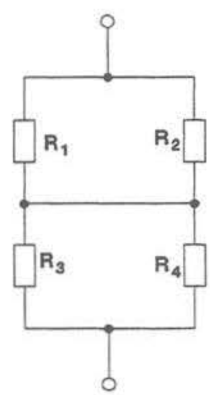
$$I = \frac{220}{440} = 0.5\ A$$

c)

$$V_I = 0.5\ A\ \ 44\ \Omega = 22\ V$$

Problema CC11

Trobeu la resistència equivalent al circuit de la figura si $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $R_3 = 8\ \Omega$ i $R_4 = 17\ \Omega$.



$$\frac{1}{R_{super}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{10}{24} \qquad R_{super} = \frac{24}{10} = 2.4\ \Omega$$

$$\frac{1}{R_{infer}} = \frac{1}{17} + \frac{1}{8} = \frac{25}{136} \qquad R_{infer} = \frac{136}{25} = 5.44\ \Omega$$

$$R_{eq} = R_{super} + R_{infer} = 2.4 + 5.44 = 7.84\ \Omega$$

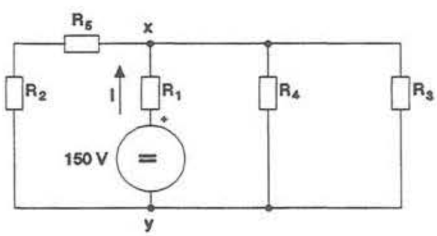
Problema CC12

Trobeu el corrent que subministra el generador de la figura

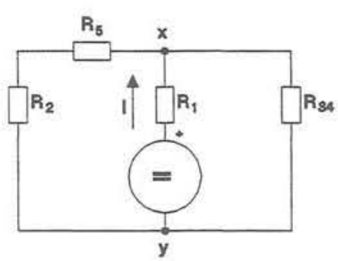
$R_1 = 10\ \Omega \qquad R_2 = 6\ \Omega$

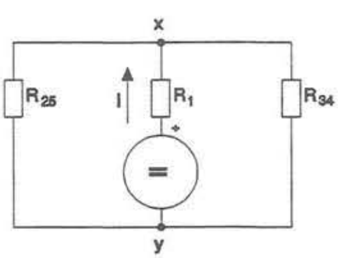
$R_3 = 5\ \Omega \qquad R_4 = 4\ \Omega$

$R_5 = 7\ \Omega$



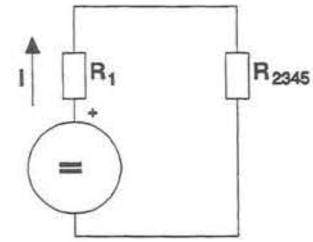
$$R_{34} = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}} = 2.22\ \Omega$$





$$R_{25} = 6\ \Omega + 7\ \Omega = 13\ \Omega$$

$$R_{2345} = \frac{1}{\frac{1}{13} + \frac{1}{2.22}} = 1.9\ \Omega$$



$$R_{eq} = 10 + 1.9 = 11.9\ \Omega \qquad I = \frac{150}{11.9} = 12.61\ A$$

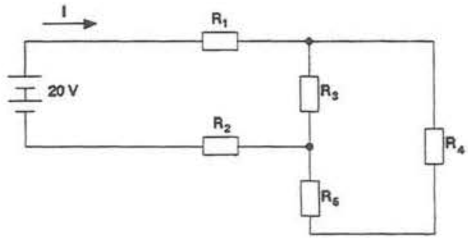
Problema CC13

Determineu la resistència equivalent del circuit de la figura i el valor del corrent I.

$R_1 = 10\ \Omega$ $\quad R_2 = 8\ \Omega$

$R_3 = 5\ \Omega$ $\quad R_4 = 3\ \Omega$

$R_5 = 2\ \Omega$



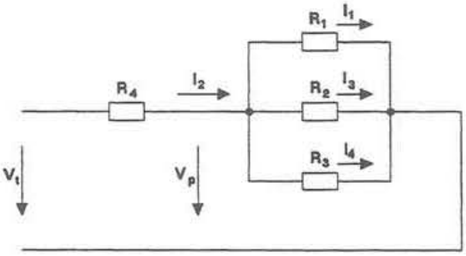
$$R_{eq} = 10 + 8 + \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{3+2}} = 20.5\ \Omega \qquad I = \frac{V}{R_{eq}} = 0.98\ A$$

Problema CC14

En el circuit de la figura determineu la resistència equivalent. Si I_4 = 14 A, quant val V_T ?

$R_1 = 10\ \Omega$ $\quad R_2 = 10\ \Omega$

$R_3 = 5\ \Omega$ $\quad R_4 = 2\ \Omega$



$$R_{eq} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}} = 4.5\ \Omega \qquad V_P = R_3\, I_4 = 5 \;\; 14 = 70\ V$$

$$I_1 = I_3 = \frac{V_P}{10} = \frac{70}{10} = 7\ A \qquad I_2 = I_1 + I_4 + I_3 = 7 + 14 + 7 = 28\ A$$

$$V_T = V_P + R_4\, I_2 = 70 + 2 \;\; 28 = 126\ V$$

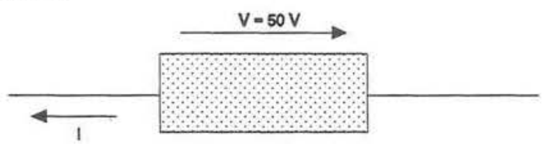
també $V_T = I_2\, R_{eq} = 28 \;\; 4.5 = 126\ V$

Problema CC15

En el circuit de la figura, quina potència es consumeix ?

a) Si I = 10 V

b) Si I = -10 V



P = - V I   ja que el corrent surt del pol positiu

a) P = - 50 10 = - 500 W

b) P = - 50 (-10) = 500 W

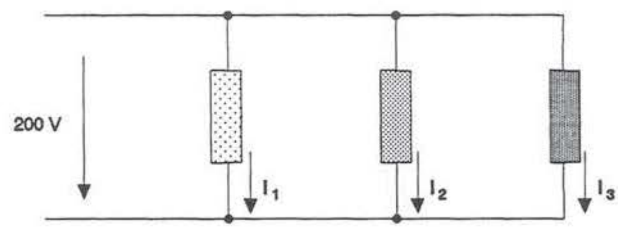
Problema CC16

Pel circuit de la figura, calculeu els corrents si les potències absorbides són:

$$P_1 = 250\ W$$

$$P_2 = 100\ W$$

$$P_3 = -\ 150\ W$$



$$I_1 = \frac{P_1}{V_1} = \frac{250}{200} = 1.25\,A \qquad I_2 = \frac{P_2}{V_2} = \frac{100}{200} = 0.5\,A$$

$$I_3 = \frac{P_3}{V_3} = \frac{-\ 150}{200} = -\ 0.75\,A$$

Problema CC17

Un escalfador d'aigua elèctric ha d'escalfar 50 l d'aigua des de 10°C fins a 75°C en 4 h. Sabent que s'alimenta a 220 V, calculeu la potència que consumirà, el corrent que absorbirà, el valor de la seva resistència i l'energia necessària. S'accepta la hipòtesi que la potència consumida és constant.

Dades:

$$c = 1\frac{cal}{gr\,°C} = 4.18\ \frac{kJ}{kg\,°C} \qquad d = 1\frac{kg}{dm^3}$$

$$Q = 1\ \frac{cal}{gr°C}\ 50\ l\ \frac{1\ dm^3}{1\ l}\ \frac{1\ kg}{1\ dm^3}\ \frac{1000gr}{1kg}\ (75 - 10)°C = 3.25\ \ 10^6\ cal$$

$$E = 3.25\ 10^6\ cal\ \frac{4.18\ J}{1\ cal} = 13.59\ 10^6\ J \qquad P = \frac{E}{t} = \frac{13.59\ 10^6\ J}{4\ 3600\ s} = 943.4\ W$$

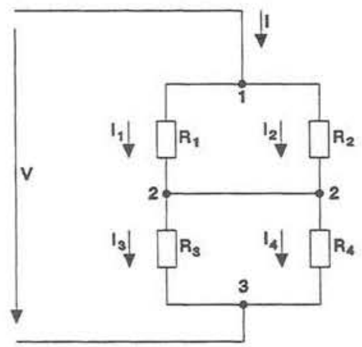
$$I = \frac{P}{V} = \frac{943.8}{220} = 4.29\ A \qquad R = \frac{V}{I} = \frac{220}{4.29} = 51.3\ \Omega$$

Problema CC18

Si el circuit de la figura es connecta a una tensió V que fa circular un corrent I, quina resistència consumeix més potència?

$R_1 = 4\ \Omega \qquad R_2 = 6\ \Omega$

$R_3 = 8\ \Omega \qquad R_4 = 17\ \Omega$



$$V_{12} = 4\ I_1 = 6\ I_2 \qquad I_1 = 1.5\ I_2 \qquad I = I_1 + I_2 = 2.5\ I_2 \qquad I_2 = 0.4\ I \qquad I_1 = 0.6\ I$$

$$V_{23} = 8\ I_3 = 17\ I_4 \qquad I_3 = \frac{17}{8} I_4 \qquad I = I_3 + I_4 = \frac{25}{8}\ I_4 \qquad I_4 = 0.32\ I \qquad I_3 = 0.68\ I$$

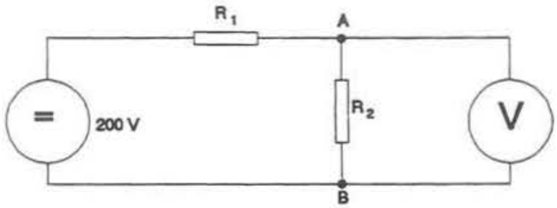
$$P_1 = 4\ I_1^2 = 4\ (0.6 I)^2 = 1.44\ I^2 \qquad P_2 = 6\ I_2^2 = 6\ (0.4\ I)^2 = 0.96\ I^2$$

$$P_3 = 8\ I_3^2 = 8\ (0.68\ I)^2 = 3.7\ I^2 \qquad P_4 = 17\ I_4^2 = 17\ (0.32\ I)^2 = 1.74\ I^2$$

La resistència R_3 és la que dissiparà més potència.

Problema CC19

En el circuit de la figura volem mesurar la tensió entre A i B amb el voltímetre.



$$R_1 = 500\ \Omega \qquad R_2 = 1500\ \Omega$$

a) Quant val la tensió V_{AB} (abans de connectar el voltímetre)?

b) Quant marcarà el voltímetre si la seva resistència interna és de 2000 Ω?

---

a)

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{200}{500 + 1500} = \frac{200}{2000} = 0.1\ A \qquad V_{AB} = I\ R_2 = 1500\ 0.1 = 150\ V$$

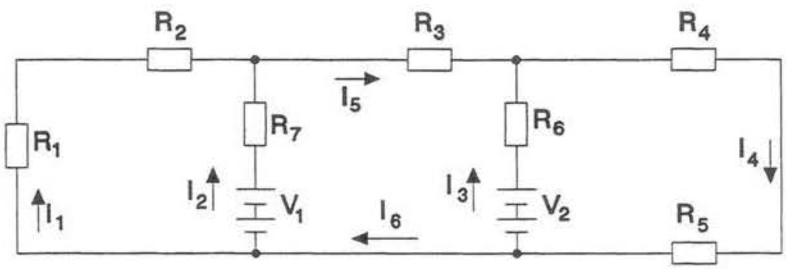
b)

$$R'_2 = \frac{1}{\frac{1}{1500} + \frac{1}{2000}} = 857.14\ \Omega \qquad I' = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{200}{500 + 857.14} = 0.147\ A$$

$$V'_{AB} = I'\ R'_2 = 0.147\ 857.14 = 126.32\ V$$

Problema CC20

En el circuit de la figura sabem que $V_1 = 10$ V, $V_2 = 5$ V, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, $R_4 = 8\ \Omega$, $R_5 = 3\ \Omega$, $R_6 = 1\ \Omega$, i $R_7 = 2\ \Omega$.



a) Calculeu tots els corrents aplicant la primera llei de Kirchhoff explícitament.

b) Calculeu tots els corrents aplicant la primera llei implícitament.

a)

$$I_1 + I_2 - I_5 = 0 \qquad - V_2 + R_6\, I_3 + R_4\, I_4 + R_5\, I_4 = 0$$

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0 \qquad V_1 + R_1\, I_1 + R_2\, I_1 - R_7\, I_2 = 0$$

$$I_3 - I_4 + I_6 = 0 \qquad - V_1 + R_7\, I_2 + R_3\, I_5 - R_6\, I_3 + V_2 = 0$$

Substituint i treient les tensions a un costat

$$I_1 + I_2 - I_5 = 0 \qquad 5 = 1\, I_3 + 8\, I_4 + 3\, I_4$$

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0 \qquad - 10 = 4\, I_1 + 6\, I_1 - 2\, I_2$$

$$I_3 - I_4 + I_6 = 0 \qquad 10 - 5 = 2\, I_2 + 5\, I_5 - 1 I_3$$

Tenim un sistema de sis equacions amb sis incògnites que, en forma matricial, s'escriu

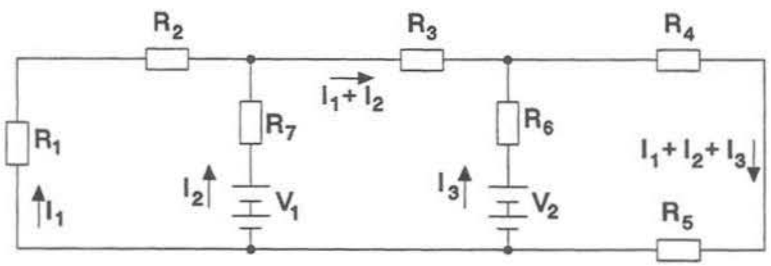
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

resolem i obtenim

$$I_1 = -\,0.751\ A \qquad I_2 = 1.245\ A \qquad I_3 = -\,0.037\ A$$

$$I_4 = 0.458\ A \qquad I_5 = 0.495\ A \qquad I_6 = 0.495\ A$$

b)



escrivim directament les equacions numèriques treient fora les tensions

$$-\,10 = (4 + 6)\ I_1 - 2\ I_2 \qquad (10 - 5) = 2\ I_2 + 5\ (I_1 + I_2) - I_3$$

$$5 = I_3 + 8\ (I_1 + I_2 + I_3) + 3\ (I_1 + I_2 + I_3)$$

Tenim un sistema de tres equacions amb 3 incògnites que, matricialment, s'escriu

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & -1 \\ 11 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

resolem i obtenim

$$I_1 = -0.751\ A \qquad I_2 = 1.245\ A \qquad I_3 = -0.037\ A$$

$$I_1 + I_2 = 0.495A \qquad I_1 + I_2 + I_3 = 0.458A$$

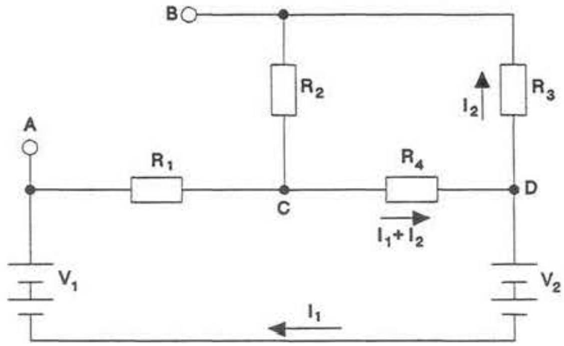
Problema CC21

En el circuit de la figura on

$R_1 = 5\ \Omega$ $\quad R_2 = 10\ \Omega$

$R_3 = 7\ \Omega$ $\quad R_4 = 3\ \Omega$

$V_1 = 10\ V$ $\quad V_2 = 12\ V$



a) Quin corrent passa per cada resistència?. Apliqueu les lleis de Kirchhoff.

b) Quina potència dissipa cada resistència?

c) Quina tensió mesuraria un voltímetre ideal connectat entre els punts A i B?

d) Repetiu les preguntes a) i c) sense emprar les lleis de Kirchhoff.

e) Repetiu la pregunta c) pel mètode d'igualació.

a)

$$5\ I_1 + 3\ (I_1 + I_2) + 12 - 10 = 0 \qquad 10\ I_2 + 7\ I_2 + 3\ (I_1 + I_2) = 0$$

$$8\ I_1 + 3\ I_2 = -2 \qquad 3\ I_1 + 20\ I_2 = 0$$

Tenim un sistema de dues equacions amb dues incògnites que, matricialment, s'escriu

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resolem i obtenim

$$I_1 = -\ 0.265 A \qquad I_2 = 0.04\ A$$

b)

$$P_1 = 5\ I_1^2 = 0.351\ W \qquad P_2 = 10\ I_2^2 = 0.016\ W$$

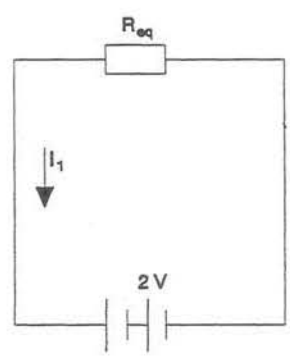
$$P_3 = 7\ I_2^2 = 0.011\ W \qquad P_4 = 3\ (I_1 + I_2)^2 = 0.152\ W$$

c)

$$V_{AC} = I_1\ R_1 = -\ 1.325 V \qquad V_{BC} = R_2\ I_2 = 0.397 V \qquad V_{AB} = V_{AC} - V_{BC} = -1.722 V$$

d)

$$R_{eq} = 5 + \frac{1}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{10 + 7}} = 7.55\,\Omega$$



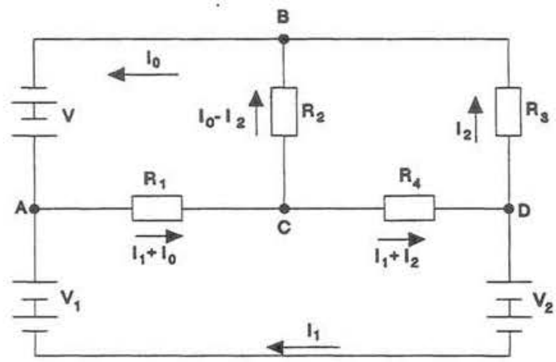
$$I_1 = -\ \frac{2}{7.55} = -\ 0.265 A$$

$$V_{AC} = R_1\ I_1 = -\ 1.325 V \qquad V_{CD} = 10 - 12 + 1.325 = -0.675 V$$

$$I_2 = \frac{-V_{CD}}{10 + 7} = 0.04 A \qquad V_{CB} = -\ R_2\ I_2 = -\ 0.4\ V \qquad V_{AB} = -\ 1.325\ -\ 0.4 = -\ 1.722 V$$

e)

Posem un generador fictici entre A i B.



$$-10\,(I_0 - I_2) - 5\,(I_1 + I_0) + V = 0$$

$$10\,(I_0 - I_2) - 7\,I_2 - 3\,(I_1 + I_2) = 0$$

$$5\,(I_1 + I_0) + 3\,(I_1 + I_2) + 12 - 10 = 0$$

Si el generador és fictici $I_0 = 0$ i agrupant

$$V = -10\,I_2 + 5\,I_1$$

$$10\,I_2 + 7\,I_2 + 3\,I_1 + 3\,I_2 = 0 \qquad\qquad -2 = 5\,I_1 + 3\,I_1 + 3\,I_2$$

Tenim un sistema de tres equacions amb tres incògnites que, simplificant, s'escriu

$$V = -10\,I_2 + 5\,I_1 \qquad 20\,I_2 + 3\,I_1 = 0 \qquad 8\,I_1 + 3\,I_2 = -2$$

Les dues darreres equacions formen un sistema compatible determinat que, matricialment, s'escriu

$$\begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

d'on obtenim

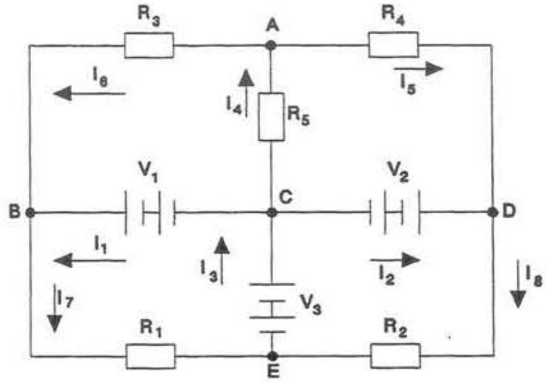
$$I_2 = 0.04A \qquad I_1 = -0.265A$$

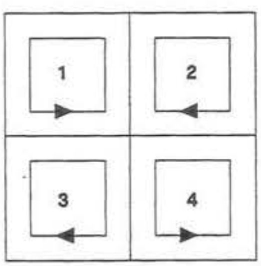
i substituint en l'equació restant

$$V = -10\,I_2 + 5\,I_1 = -1.725\ V$$

Problema CC22

En el circuit de la figura sabem que $V_1 = 10$ V, $V_2 = 5$ V, $V_3 = 15$ V, $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$, $R_4 = 8\ \Omega$ i $R_5 = 9\ \Omega$.
Calculeu tots els corrents.





$A)\ I_4 = I_5 + I_6$

$B)\ I_7 = I_1 + I_6$

$D)\ I_8 = I_2 + I_5$

$E)\ I_3 = I_7 + I_8$

$1)\ V_1 + R_3 I_6 + R_5 I_4 = 0$

$2)\ V_2 + R_5 I_4 + R_4 I_5 = 0$

$3)\ V_1 + V_3 - R_1 I_7 = 0$

$4)\ V_2 + V_3 - R_2 I_8 = 0$

Substituint

$$10 + 4 I_6 + 9 I_4 = 0 \qquad 4 I_6 + 9 I_4 = -10$$
$$5 + 9 I_4 + 8 I_5 = 0 \qquad 9 I_4 + 8 I_5 = -5$$
$$10 + 15 - 6 I_7 = 0 \qquad 6 I_7 = 25$$
$$5 + 15 - 3 I_8 = 0 \qquad 3 I_8 = 20$$

Tenim un sistema de vuit equacions amb vuit incògnites que resolem i obtenim

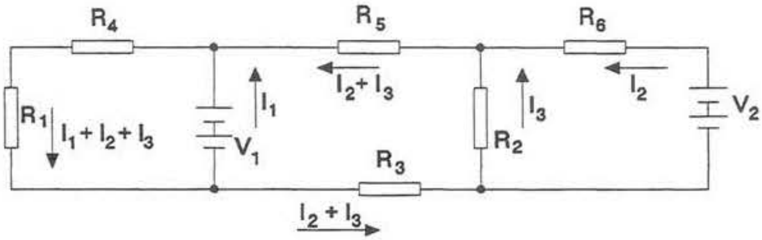
$I_1 = 5.06A \qquad I_2 = 6.488A \qquad I_3 = 10.833A$

$I_4 = -0.714A \qquad I_5 = 0.179A \qquad I_6 = -0.893A$

$I_7 = 4.167A \qquad I_8 = 6.667A$

Problema CC23

En el circuit de la figura $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $R_4 = 10\ \Omega$, $R_5 = 3\ \Omega$ i $R_6 = 5\ \Omega$. Sabent que $I_1 = 2.705$ A, $I_2 = 0.343$ A i $I_3 = -1.714$ A, trobeu V_1, V_2 i R_3.



$$V_1 - R_1 (I_1 + I_2 + I_3) - R_4 (I_1 + I_2 + I_3) = 0 \qquad V_1 + R_5 (I_2 + I_3) + R_2 I_3 + R_3 (I_2 + I_3) = 0$$

$$V_2 + R_2 I_3 - R_6 I_2 = 0$$

Substituint:

$$V_1 = 8\ (2.705 + 0.343 - 1.714) + 10\ (2.705 + 0.343 - 1.714) = 24\,V$$

$$V_1 = 24\,V = -3\ (0.343 - 1.714) - 6\ (-1.714) - R_3\ (0.343 - 1.714) = 14.4 + 1.37\ R_3$$

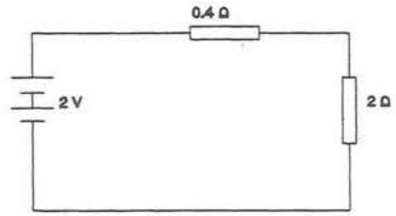
$$R_3 = 7\ \Omega \qquad V_2 = 5\ I_2 - 6\ I_3 = -6\ (-1.714) + 5\ 0.343 = 12\,V$$

Problema CC24

Es vol alimentar una resistència de $R = 2\ \Omega$. Quin corrent circula i quina potència es dissipa en R?

a) S'alimenta amb una pila Bunsen ($E_1 = 2$ V $R_1 = 0.4\ \Omega$)
b) S'alimenta amb una pila Daniell ($E_2 = 1.04$ V $R_2 = 2.6\ \Omega$)
c) Les dues piles en sèrie
d) Les dues piles en paral.lel

a)



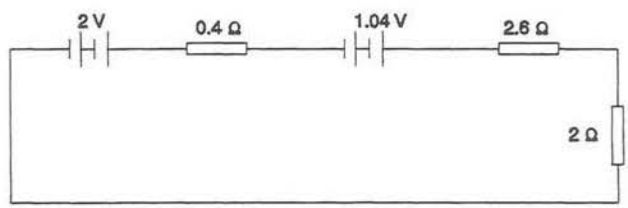
$$I = \frac{2\ V}{2\ \Omega\ +\ 0.4\ \Omega} = 0.833\ A$$

$$P = 2\ 0.833^2 = 1.39\ W$$

b)

$$I = \frac{1.04}{2 + 2.6} = 0.226\ A \qquad P = 2\ 0.226^2 = 0.102\ W$$

c)

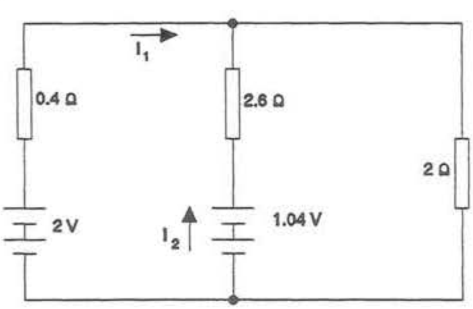


$$2 + 1.04 = I\ (0.4 + 2.6 + 2)$$

$$I = 0.608\ A$$

$$P = 2\ 0.608^2 = 0.739\ W$$

d)



$$2 = 0.4\ I_1 + 2\ (I_1 + I_2)$$

$$1.04 = 2.6\ I_2 + 2\ (I_1 + I_2)$$

Sistema de dues equacions amb dues incògnites del qual obtenim

$$I_1 = 1.011A \qquad I_2 = -\ 0.214A$$

$$I_1 + I_2 = 0.798\ A$$

$$P = 2\ 0.798^2 = 1.273\ W$$

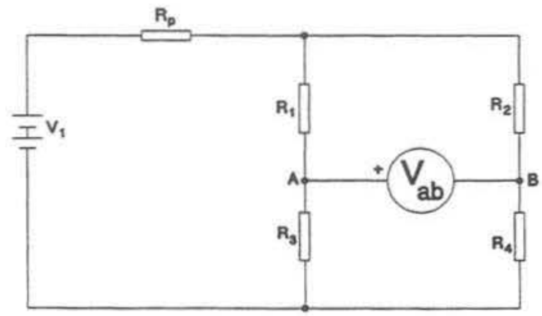
Problema CC25

En el circuit de la figura $V_1 = 12$ V, $R_p = 120\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$

a) Sabent que $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ i $R_4 = 50\ \Omega$. Quant marca V?

b) Sabent que $V = 0$, $R_1 = 10\ \Omega$ i $R_2 = 50\ \Omega$. Quant val R_4?

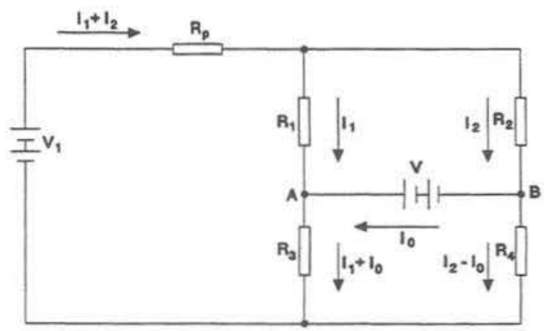
c) Quina condició es requereix sempre perquè $V = 0$?



$$R_p(I_1+I_2)+R_1 I_1+R_3(I_1+I_0)-V_1=0$$

$$V+R_1 I_1-R_2 I_2=0$$

$$R_4(I_2-I_0)-R_3(I_1+I_0)+V=0$$



a)

$$12=120(I_1+I_2)+100\,I_1+20(I_1+I_0)$$

$$V=-100\,I_1+10\,I_2$$

$$-V=50(I_2-I_0)-20(I_1+I_0)$$

Com es tracta d'un voltímetre, $I_0 = 0$

$$12 = 240\ I_1 + 120\ I_2 \qquad V = -100\ I_1 + 10\ I_2 \qquad V = 20\ I_1 - 50\ I_2$$

Sistema de tres equacions amb tres incògnites que resolem i obtenim

$$V = -2\ V \qquad I_1 = 0.025\ A \qquad I_2 = 0.05\ A$$

b)

$$12 = 120\ (I_1 + I_2) + 10\ I_1 + 20\ (I_1 + I_0) \qquad 0 = -10\ I_1 + 50\ I_2$$

$$0 = R_4\ (I_2 - I_0) - 20\ (I_1 + I_0)$$

Com es tracta d'un voltímetre, $I_0 = 0$

$$12 = 120\,(I_1 + I_2) + 10\,I_1 + 20\,I_1 \qquad 0 = -\,10 I_1 + 50\,I_2 \qquad 0 = R_4\,I_2 - 20\,I_1$$

resolent

$$I_1 = 0.069\ A \qquad I_2 = 0.014\ A \qquad R_4 = 100\ \Omega$$

c)

$$V_1 = R_p\,(I_1 + I_2) + R_1\,I_1 + R_3\,(I_1 + I_0)$$

$$0 = R_2\,I_2 - R_1\,I_1 \qquad 0 = R_4\,(I_2 - I_0) - R_3\,(I_1 + I_0)$$

Com es tracta d'un voltímetre, $I_0 = 0$

$$R_p\,(I_1 + I_2) + R_1\,I_1 + R_3\,I_1 - V_1 = 0$$

$$R_2\,I_2 - R_1\,I_1 = 0 \qquad R_4\,I_2 - R_3\,I_1 = 0$$

$$R_4\,I_2 = R_3\,I_1 \qquad R_2\,I_2 = R_1\,I_1 \qquad I_2 = \frac{R_3\,I_1}{R_4} \qquad I_2 = \frac{R_1\,I_1}{R_2}$$

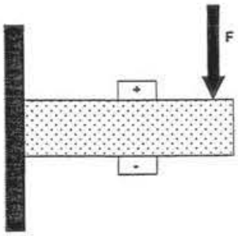
$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2} \qquad R_1\,R_4 = R_2\,R_3$$

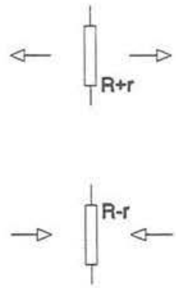
Problema CC26

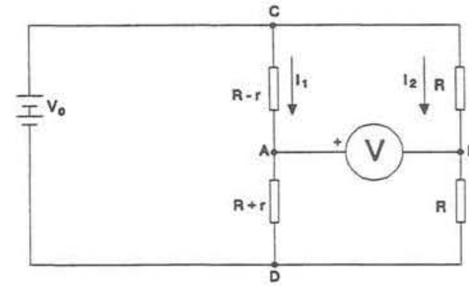
Un pont de galgues extensiomètriques està format per quatre galgues de $R = 12\ \Omega$ de les quals dues són actives (una a tracció i una a compressió). Per a cada galga es verifica que

$$\frac{l}{L} = \frac{r}{2\,R}$$

on L és la llargada de la galga (10 mm) i la resistència varia $\pm r$ quan la llargada varia l. Trobeu el valor de la deformació en funció de la lectura del voltímetre sabent que s'alimenta a 10 V.







$$I_1 = \frac{V_0}{R - r + R + r} = \frac{V_0}{2\ R} \qquad I_2 = \frac{V_0}{R + R} = \frac{V_0}{2\ R}$$

$$V_{AD} = I_1\ (R + r) = \frac{V_0}{2\ R}\ (R + r) \qquad V_{BD} = I_2\ R = \frac{V_0}{2\ R}\ R$$

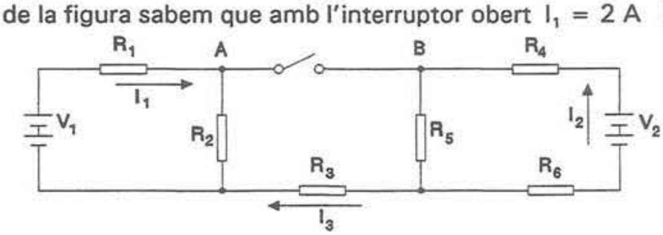
$$V = V_{AB} = V_{AD} - V_{BD} = \frac{V_0}{2\ R}\ (R + r) - \frac{V_0}{2\ R}\ R = \frac{V_0}{2}\ \frac{r}{R}$$

$$\frac{r}{R} = 2\ \frac{l}{L} \qquad V = \frac{V_0}{2}\ 2\ \frac{l}{L} = V_0\ \frac{l}{L}$$

$$l = \frac{L}{V_0}\ V = \frac{10\ 10^{-3}\ m}{10\ V}\ V = \frac{V}{1000}\ (m)$$

Problema CC27

En el circuit de la figura sabem que amb l'interruptor obert $I_1 = 2$ A $I_2 = 1$ A $V_{AB} = 3$ V.



$$V_1 = 10\ V, \quad V_2 = 5\ V, \quad R_3 = 5\ \Omega, \quad R_4 = 3\ \Omega, \quad R_6 = 1\ \Omega$$

a) Calculeu el corrent I_3 quan l'interruptor és obert.

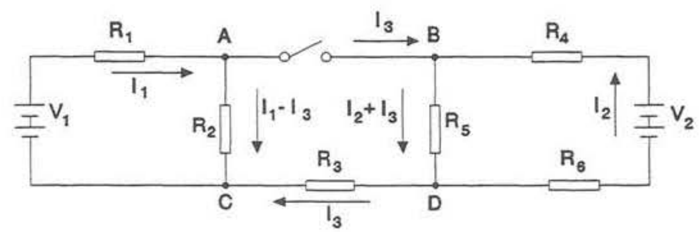
b) Calculeu els valors de R_1, R_2 i R_5.

c) Calculeu el valor dels tres corrents indicats quan l'interruptor és tancat.

d) Quan l'interruptor és tancat, calculeu les potències dissipades a totes les resistències i les entregades pels generadors.

---

a)



$I_3 = 0$ ja que per l'interruptor obert no passa corrent

b)

$$V_2 = I_2 (R_4 + R_5 + R_6) \qquad 5 = 1 (3 + R_5 + 1) \qquad R_5 = 1 \ \Omega$$

$$V_{BD} = R_5 I_2 = 1 \ 1 = 1 V \qquad V_{AC} = R_2 I_1 = 2 R_2 \qquad V_{CD} = R_3 I_3 = 0$$

$$V_{AB} = 3 = V_{AC} + V_{CD} - V_{BD} = 2 R_2 + 0 - 1 \qquad R_2 = 2 \ \Omega$$

$$V_1 = I_1 (R_1 + R_2) \qquad 10 = 2 (R_1 + 2) \qquad R_1 = 3 \ \Omega$$

c)

$$3 I_1 + 2 (I_1 - I_3) - 10 = 0 \qquad - 2 (I_1 - I_3) + 1 (I_2 + I_3) + 5 I_3 = 0$$

$$3 I_2 + 1 (I_2 + I_3) + 1 I_2 - 5 = 0$$

$$5 I_1 - 2 I_3 = 10 \qquad - 2 I_1 + I_2 + 8 I_3 = 0 \qquad 5 I_2 + I_3 = 5$$

Tenim un sistema de tres equacions amb tres incògnites que matricialment s'escriu:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

i té per solucions

$$I_1 = 2.171\ A \qquad I_2 = 0.914\ A \qquad I_3 = 0.429\ A$$

d)

$$P_1 = R_1\, I_1^2 = 14.15\ W \qquad P_2 = R_2\, (I_1 - I_3)^2 = 6.075\ W$$

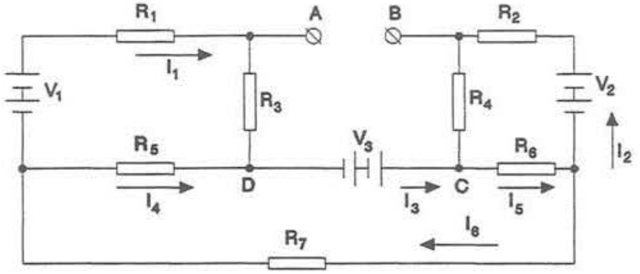
$$P_3 = R_3\, I_3^2 = 0.918\ W \qquad P_4 = R_4\, I_2^2 = 2.508\ W$$

$$P_5 = R_5\, (I_2 + I_3)^2 = 1.803\ W \qquad P_6 = R_6\, I_2^2 = 0.836\ W$$

$$P_{V1} = V_1\, I_1 = 21.714\ W \qquad P_{V2} = V_2\, I_2 = 4.571\ W$$

Problema CC28

En el circuit de la figura, calculeu



$R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$,
$R_3 = 4\ \Omega$, $R_4 = 2\ \Omega$,
$R_5 = 8\ \Omega$, $R_6 = 1\ \Omega$,
$R_7 = 6\ \Omega$, $V_1 = 12\ V$,
$V_2 = 5\ V$, $V_3 = 10\ V$

a) Corrent a totes les branques.
b) Potència a totes les resistències i als generadors.
c) Tensió V_{AB}

a)

$$I_1 + I_4 = I_3 \qquad I_3 + I_2 = I_5 \qquad I_2 + I_6 = I_5$$

$$I_4 = I_3 - I_1 \qquad I_5 = I_3 + I_2 \qquad I_6 = I_5 - I_2 = I_3$$

$$12 = 3\ I_1 + 4\ I_1 - 8\ (I_3 - I_1) = 15\ I_1 - 8\ I_3$$

$$-\ 5 = -\ 5\ I_2 - 2\ I_2 - 1\ (I_3 + I_2) = -\ 8\ I_2 - I_3$$

$$10 = 1\ (I_3 + I_2) + 6\ I_3 + 8\ (I_3 - I_1) = -\ 8\ I_1 + I_2 + 15\ I_3$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 1 \\ -8 & 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = 1.59\ A \qquad I_2 = 0.44\ A \qquad I_3 = 1.49\ A$$

$$I_4 = -\ 0.1\ A \qquad I_5 = 1.93\ A \qquad I_6 = 1.49\ A$$

b)

$$P_1 = 3\ 1.59^2 = 7.61\ W \qquad P_2 = 5\ 0.44^2 = 0.96\ W$$

$$P_3 = 4\ 1.59^2 = 10.15\ W \qquad P_4 = 2\ 0.44^2 = 0.39\ W$$

$$P_5 = 8\ (-\ 0.1)^2 = 0.09\ W \qquad P_6 = 1\ (1.93)^2 = 3.71\ W$$

$$P_7 = 6\ 1.49^2 = 13.29\ W \qquad P_1' = 12\ 1.59 = 19.12\ W$$

$$P_2' = 5\ 0.44 = 2.2\ W \qquad P_3' = 10\ 1.49 = 14.87\ W$$

c)

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0 \qquad V_{AB} + R_4\, I_2 + V_3 - R_3\, I_1 = 0$$

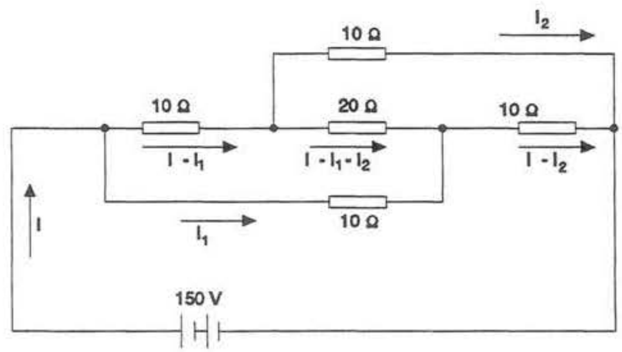
$$V_{AB} = 4\ 1.59 - 10 - 2\ 0.44 = -\ 4.51\ V$$

Problema CC29

En el circuit de la figura

a) Calculeu el corrent I i la resistència equivalent.

b) Quin és el corrent a la resistència de 20 Ω?



a)

$$10\,(I - I_1) + 20\,(I - I_1 - I_2) - 10\,I_1 = 0$$

$$10\,I_2 - 10\,(I - I_2) - 20\,(I - I_1 - I_2) = 0$$

$$10\,I_1 + 10\,(I - I_2) = 150$$

$$30\,I - 40\,I_1 - 20\,I_2 = 0 \qquad -30\,I + 20\,I_1 + 40\,I_2 = 0 \qquad 10\,I + 10\,I_1 - 10\,I_2 = 150$$

$$\begin{bmatrix} 30 & -40 & -20 \\ -30 & 20 & 40 \\ 10 & 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$I = 15\ A \qquad I_1 = 7.5\ A \qquad I_2 = 7.5\ A \qquad R_{eq} = \frac{150}{I} = 10\ \Omega$$

b)

$$I_{20\Omega} = I - I_1 - I_2 = 0$$

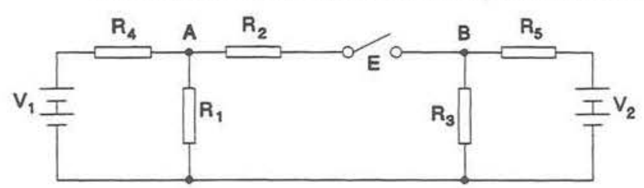
Problema CC30

Un conductor té una resistència de 30 Ω a 20°C, si s'escalfa fins a 100°C, quant val la seva resistència si el coeficient de temperatura és de 0.005°C^{-1}, per al material de què és fet?

$$R = R_{20}\,(1 + \alpha\ \Delta T) \qquad R = 30\,(1 + 0.005\,(100 - 20)) = 42\ \Omega$$

Problema CC31

En el circuit de la figura, sabent que els elements tenen els següents valors:



$V_1 = 20\ V$ $\quad V_2 = 10\ V$

$R_1 = 25\ \Omega$ $\quad R_2 = 40\ \Omega$

$R_3 = 35\ \Omega$ $\quad R_4 = 30\ \Omega$

$R_5 = 6\ \Omega$

Amb l'interruptor E tancat:

a) Calculeu els corrents per cada resistència i els subministrats pels generadors (fonts de tensió).

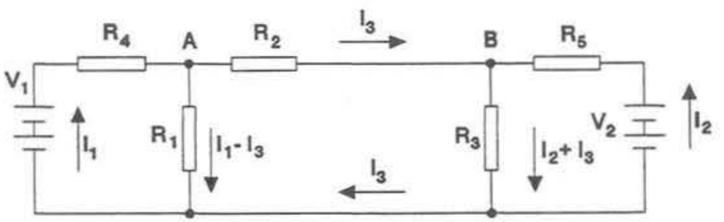
b) Calculeu les potències dissipades a cada una de les resistències i les entregades per cadascuna de les fonts.

c) Quant ha de valer R_1 per tal que $V_{AB} = 5$ V. Calculeu els corrents a totes les resistències.

Amb l'interruptor E obert:

d) Calculeu les tensions en borns de cada una de les resistències.

a)



$$30\,I_1 + 25\,(I_1 - I_3) - 20 = 0 \qquad 40\,I_3 + 35\,(I_2 + I_3) - 25\,(I_1 - I_3) = 0$$

$$-\,6\,I_2 - 35\,(I_2 + I_3) + 10 = 0$$

$$20 = 55\,I_1 - 25\,I_3 \qquad 0 = -\,25\,I_1 + 35\,I_2 + 100\,I_3 \qquad 10 = 41\,I_2 + 35\,I_3$$

$$\begin{bmatrix} 55 & 0 & -25 \\ -25 & 35 & 100 \\ 0 & 41 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = 0.368A \qquad I_2 = 0.236A \qquad I_3 = 9.43\,mA \qquad I_1 - I_3 = 0.358A \qquad I_2 + I_3 = 0.245A$$

b)

$$P_i = R_i\,I_i^2 \qquad P_1 = 3.21\ W \qquad P_2 = 3.56\ 10^{-3}\ W$$

$$P_3 = 2.11\ W \qquad P_4 = 4.06\ W \qquad P_5 = 0.334\ W \qquad P_1' = 7.36\ W \qquad P_2' = 2.36\ W$$

c)

$$20 = 30\,I_1 + R_1\,(I_1 - I_3)$$

$$0 = -\,R_1\,(I_1 - I_3) + 40\,I_3 + 35\,(I_2 + I_3)$$

$$10 = 6\,I_2 + 35\,(I_2 + I_3)$$

$$V_{AB} = R_2\, I_3 \qquad 5 = 40\, I_3 \qquad I_3 = \frac{5}{40} = 0.125\ A$$

$$10 = 41\, I_2 + 35\, I_3 \qquad I_2 = \frac{10 - 35\, I_3}{41} = 0.137\ A$$

$$20 = 30\, I_1 + R_1\, I_1 - 0.125\, R_1 \qquad 0 = 0.125\, R_1 - R_1\, I_1 + 5 + 4.802 + 4.375$$

$$20 = 30\, I_1 - 0.125\, R_1 + R_1\, I_1 \qquad 14.18 = R_1\, I_1 - 0.125\, R_1$$

$$R_1\, I_1 = 14.18 + 0.125\, R_1 \qquad 20 = 30\, I_1 - 0.125\, R_1 + 14.18 + 0.125\, R_1$$

$$I_1 = \frac{20 - 14.18}{30} = 0.194\ A \qquad 0.194\, R_1 = 14.18 + 0.125\, R_1 \qquad R_1 = 205.15\ \Omega$$

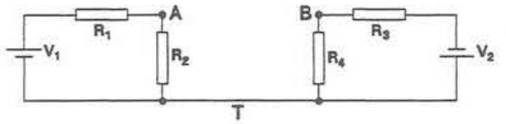
d)

$$V_{R1} = V_1\, \frac{R_1}{R_4 + R_1} = 9.091\ V \qquad V_{R2} = 0 \qquad V_{R4} = V_1\, \frac{R_4}{R_4 + R_1} = 10.909\ V$$

$$V_{R3} = \frac{R_3}{R_3 + R_5}\, V_2 = 8.537\ V \qquad V_{R5} = \frac{R_5}{R_3 + R_5}\, V_2 = 1.463\ V$$

Problema CC32

En el circuit de la figura, quant val la tensió V_{AB}?



$R_1 = 20\ \Omega$ $R_2 = 80\ \Omega$

$R_3 = 80\ \Omega$ $R_4 = 20\ \Omega$

$V_1 = 10\ V$ $V_2 = 10\ V$

El conjunt V_1-R_1-R_2 forma un divisor de tensió; per tant

$$V_{AT} = V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10 \frac{80}{20 + 80} = 8 \ V$$

i el mateix succeeix amb el conjunt V_2-R_3-R_4

$$V_{BT} = - V_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} = - 10 \frac{20}{20 + 80} = - 2 \ V$$

$$V_{AB} = V_{AT} - V_{BT} = 8 + 2 = 10 \ V$$

Problema CC33

D'una bombeta es coneixen les següents dades:

- A 220 V consumeix 40 W
- Desconnectada i a 30°C la resistència del filament és de 700 Ω
- El coeficient tèrmic del filament és de $0.0006°C^{-1}$

Calculeu a quina temperatura arriba el filament quan es connecta a 220 V.

A temperatura nominal

$$R_N = \frac{V_N^2}{P_N} = \frac{220^2}{40} = 1210 \ \Omega$$

A 30°C

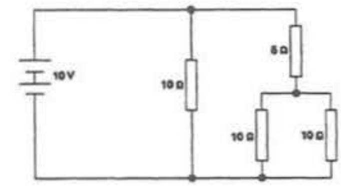
$$R_0 = 700 \ \Omega$$

$$R_N = R_0 \left(1 + \alpha \left(T_N - T_0\right)\right) \qquad 1210 = 700 \left(1 + 0.0006 \left(T_N - 30\right)\right)$$

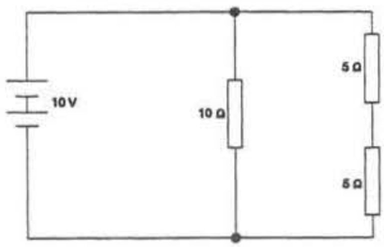
$$T_N = 1244.3°c$$

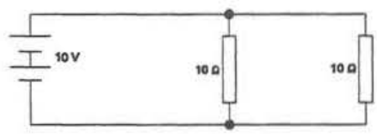
Problema CC34

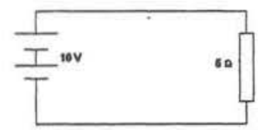
Quant val la potència dissipada pel conjunt de totes les resistències?



Anem reduïnt el circuit



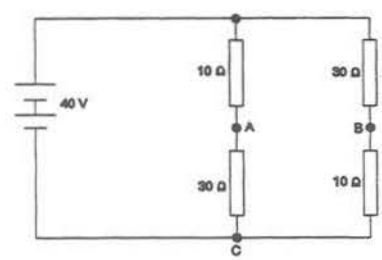




$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{10^2}{5} = 20\ W$$

Problema CC35

En el circuit de la figura, determineu quant val la tensió V_{AB}



Tenim dos divisors de tensió

$$V_{AC} = 40\ \frac{30}{30 + 10} = 30\ V \qquad V_{BC} = 40\ \frac{10}{30 + 10} = 10\ V$$

$$V_{AB} = V_{AC} + V_{CB} = V_{AC} - V_{BC} = 30 - 10 = 20\ V$$

Problemes d'elements emmagatzemadors d'energia

Problema BC1

En l'intèrval $0 \le t \le \frac{\pi}{50}$ una inductància de 30 mH té un corrent de i = 10 Sin (50 t) (A). En qualsevol altre moment el corrent és zero. Trobar tensió, potència i energia.

$$v = L \frac{d\,i}{d\,t} = 30\ 10^{-3} \frac{d}{d\,t} \{10\ (Sin\ 50\ t)\} = 15\ Cos\ 50\ t\ (V)$$

$$P = v_L\ i_L = (10\ Sin\ 50\ t)\ (15\ Cos\ 50\ t) = 75\ Sin\ 100\ t\ (W)$$

$$E = \int_0^t 75\ (Sin\,100t)\ dt = 75\ \frac{-1}{100}\ Cos\,100t\Big]_0^t = -\ 0.75\ Cos\,100t]_0^t = 0.75\ (1\ -\ Cos\,100t)\ (J)$$

Problema BC2

En l'intèrval $0 \leq t \leq 5\,\pi\ ms$, un condensador de 20 μF té una tensió v = 50 Sin 200 t (V). Trobeu càrrega, corrent, potència i energia.

$$q = C\,v = 20\ 10^{-6}\ 50\ Sin\ 200\ t = 10^{-3}\ Sin\ 200\ t\ (C)$$

$$i = C\,\frac{d\,v}{d\,t} = 20\ 10^{-6}\,\frac{d}{d\,t}\,\{50\ Sin\ 200\ t\} = 0.2\ Cos\ 200\ t\ (A)$$

$$p = v\,i = (50\ Sin\ 200\ t)\ (0.2\ Cos\ 200\ t) = 5\ Sin\ 400\ t\ (W)$$

$$E = \int_0^t p\,dt = \int_0^t 5\ Sin 400 t\,dt = \frac{-5}{400}\,Cos 400 t\Big]_0^t = -12.5\ 10^{-3}\,Cos 400 t\Big]_0^t = 12.5\ 10^{-3}\,(1 - Cos 400 t)\,(J)$$

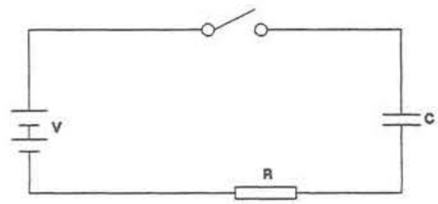
Problema BC3

En el circuit de la figura

$C = 100\ \mu F$

$R = 1000\ \Omega$

$V = 100 V$



a) Quant val la tensió del condensador i el corrent de càrrega després de 10 ms d'haver tancat l'interruptor?

b) Al cap de 100 ms d'haver tancat l'interruptor, el condensador es desconnecta d'aquest circuit i es connecta sobre una resistència de 100 Ω. Quant temps triga la seva tensió a arribar a 24 V des de l'instant de la segona connexió?

c) Quina energia té emmagatzemada quan u_c = 24 V?

a)

$$\tau = R\,C = 1000\ 100\ 10^{-6} = 0.1\ s \qquad u_C\,(t) = 100\,\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$i_C\,(t) = C\,\frac{d\,u_C}{d\,t} = \frac{100\ C}{\tau}\,e^{-t/\tau} = \frac{100\ 100\ 10^{-6}}{0.1} = 0.1\ e^{-t/\tau}$$

$u_C\,(10\ ms) = 9.52\ V$ $\quad u_C\,(100\ ms) = 63.21\ V$ $\quad i_C\,(100\ ms) = 0.09\ A$

b)

$$\tau' = 100\ 100\ 10^{-6} = 0.01\ s \qquad u_C\,(t') = 63.21\ e^{-t'/\tau'}$$

$$24 = 63.21\ e^{-t'/\tau'} \qquad t' = -\,\tau\,\ln\frac{24}{63.21} = 9.68\ ms$$

c)

$$E = \frac{1}{2}\,C\,u_C^2 = \frac{1}{2}\,100\ 10^{-6}\ 24^2 = 28.8\ mJ$$

Problema BC4

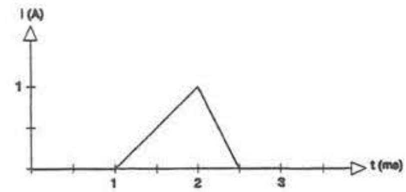
Un condensador es carrega amb una bateria de 12 V a través d'una resistència de 10 kΩ. Si després de 0.3 s la seva tensió és de 10 V, quina és la seva capacitat?

$$V = V_0\,\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad 10 = 12\,\left(1 - e^{-0.3/\tau}\right) \qquad \frac{-\,0.3}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{10}{12}\right)$$

$$\tau = \frac{-\,0.3}{\ln\left(1 - \frac{10}{12}\right)} = 0.167\ s \qquad C = \frac{\tau}{R} = \frac{0.167}{10\ 10^3} = 16.74\ 10^{-6}\ F \rightarrow 16.74\ \mu F$$

Problema BC5

Sabent que una inductància de 0.1 H és recorreguda per un corrent com el de la figura, dibuixeu la gràfica tensió en borns de la inductància-temps indicant els valors dels principals punts.

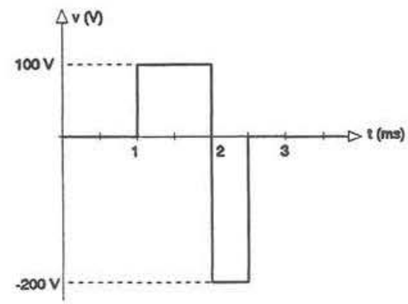


$$0 < t < 1ms \qquad u = L\frac{di}{dt} = 0$$

$$1 < t < 2ms \qquad u = L\frac{di}{dt} = 0.1\,\frac{1}{1\,10^{-3}} = 100\,V$$

$$2 < t < 2.5ms \qquad u = L\frac{di}{dt} = 0.1\,\frac{-1}{0.5\,10^{-3}} = -200\,V$$

$$2.5ms < t < \infty \qquad u = L\frac{di}{dt} = 0$$



Problemes de complexos i fasors

Problema CF1

Passar a polar $(3 - j2)$, $(5 + j7)$, $(-3 + j12)$, $(0 - j1)$

$(3 - j2) = 3.6_{\lfloor -33.69^\circ}$ $(5 + j7) = 8.6_{\lfloor 54.46^\circ}$

$(-3 + j12) = 12.37_{\lfloor 104.04^\circ}$ $(0 - j1) = 1_{\lfloor -90^\circ}$

Problema CF2

Passar a cartesiana $10_{\lfloor 45^\circ}$, $7_{\lfloor 120^\circ}$, $3_{\lfloor -30^\circ}$, $2_{\lfloor 180^\circ}$

$10_{\lfloor 45^\circ} = 7.07 + j\,7.07$ $7_{\lfloor 120^\circ} = -3.5 + j\,6.06$

$3_{\lfloor -30^\circ} = 2.60 - j\,1.5$ $2_{\lfloor 180^\circ} = -2 + j\,0$

Problema CF3

Operar $(2 - j\,3) + (3 + j\,4)$, $(1 + j\,3) - (2 + j\,5)$, $(2 - j\,3) \cdot (4 + j\,5)$,

$$\frac{(2 + j\,8)}{(3 - j\,7)}, \qquad 10_{\angle 45^\circ}\ 8_{\angle 30^\circ}, \qquad \frac{10_{\angle 90^\circ}}{5_{\angle 30^\circ}}$$

$$(2 - j\,3) + (3 + j\,4) = 5 + j\,1$$

$$(1 + j\,3) - (2 + j\,5) = -1 - j\,2$$

$$(2 - j\,3) \cdot (4 + j\,5) = 23 - j\,2$$

$$\frac{(2 + j\,8)}{(3 - j\,7)} = -0.862 + j\,0.655$$

$$10_{\angle 45^\circ}\ 8_{\angle 30^\circ} = 80_{\angle 75^\circ}$$

$$\frac{10_{\angle 90^\circ}}{5_{\angle 30^\circ}} = 2_{\angle 60^\circ}$$

Problemes de circuits de corrent altern

Problema CA1

Una càrrega formada per una resistència i una reactància (condensador o inductància) en sèrie, s'alimenta amb una tensió $\underline{U} = 220_{|0}\ V$ i absorbeix un corrent $\underline{I} = 50_{|+\pi/3}\ A$ a 50 Hz.

a) Determineu el tipus i el valor de les seves dues components
b) Trobeu les tensions en cada component

$$\underline{U} = 220\ (1 + j\ 0) = 220 + j\ 0 \qquad U = 220\ V$$

$$\underline{I} = 50\ (0.5 + j\ 0.866) = 25 + j\ 43.3 \qquad I = 50\ A$$

a)

$$\underline{U} = \underline{Z}\ \underline{I} \qquad \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{220 + j\ 0}{25 + j\ 43.3} = 2.2 - j\ 3.81\ \Omega = 4.4_{|-\pi/3}$$

Una de les components és una resistència atès que la impedància té part real i com la part imaginària de la impedància és negativa, l'altra es tractarà d'un condensador.

$$R = 2.2\ \Omega \qquad X_C = 3.81\ \Omega \qquad C = \frac{1}{2\ \pi\ 50\ X_L} = 835.5\ 10^{-6}\ F$$

b)

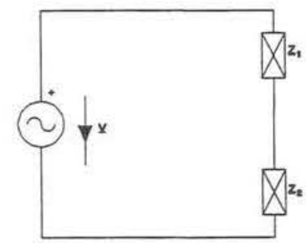
$$\underline{U}_R = (R + j\ 0)\ \underline{I} = 2.2\ (25 + j\ 43.3) = 55 + j\ 95.26\ V \qquad U_R = 110\ V$$

$$\underline{U}_C = (0 - j\,X_C)\,\underline{I} = -j\,3.81\,(25 + j\,43.3) = 164.97 - j\,95.25\ V \qquad U_C = 190.5\ V$$

$$\underline{U}_R + \underline{U}_C = 220 + j\,0 = \underline{U} \qquad U^2 = U_R^2 + U_C^2$$

Problema CA2

Per al circuit de la figura, trobeu la impedància equivalent i el corrent, sabent que



$$\underline{V} = 110_{|0°}\ V,\quad \underline{Z}_1 = 10_{|30°}\ \Omega \quad i \quad \underline{Z}_2 = 5_{|60°}\ \Omega.$$

$$\underline{V} = 110_{|0°} = 110 + j\,0 \qquad \underline{Z}_1 = 10_{|30°} = 8.66 + j\,5 \qquad \underline{Z}_2 = 5_{|60°} = 2.5 + j\,4.33$$

$$\underline{Z}_{eq} = (8.66 + j\,5) + (2.5 + j\,4.33) = 11.16 + j\,9.33 = 14.55_{|39.9°}\ \Omega$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{110 + j\,0}{11.16 + j\,9.33} = 5.8 - j\,4.85 = 7.56_{|-39.9°}\ A$$

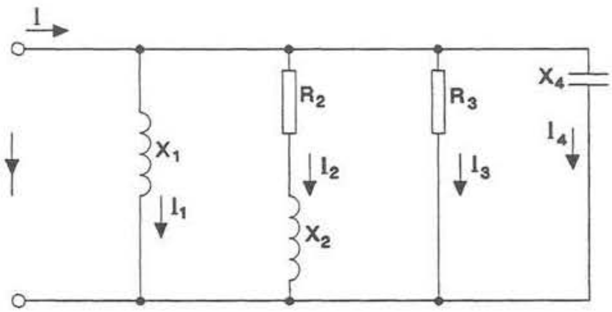
Problema CA3

Per al circuit de la figura

$X_1 = 15\ \Omega$ $R_2 = 25\ \Omega$

$X_2 = 10$ $R_3 = 5\ \Omega$

$X_4 = 20\ \Omega$



a) Trobeu la impedància equivalent

b) Sabent que I = 20 A trobeu $\underline{V}$ i els corrents

---

a)

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{j15} + \frac{1}{25+j10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{-j20}$$

$$\underline{Z} = 4.19 + j0.55 = 4.23_{|7.4^\circ}\ \Omega$$

b)

Prenem el corrent com a fasor de referència $\underline{I} = 20 + j\,0$

$$\underline{V} = \underline{Z}\,\underline{I} = (4.19 + j0.55)\,20 = 83.88 + j10.9 = 84.58_{|7.4^\circ}\ \Omega$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}}{jX_1} = 0.73 - j\,5.59\ A$$

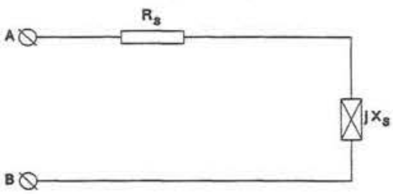
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}}{R_2 + jX_2} = 3.04 - j\,0.78\ A$$

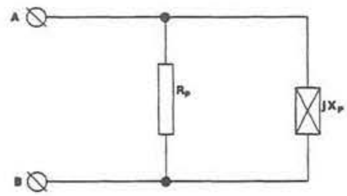
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{V}}{R_3} = 16.78 + j\,2.18\ A$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{V}}{-jX_4} = -0.55 + j\,4.19\ A$$

Problema CA4

Es desitja que la impedància equivalent d'ambdós circuits de la figura sigui la mateixa. Trobar els valors de R_S i X_S en funció de R_P i X_P i a l'inrevés.





$$R_S + j X_S = \frac{j R_P X_P}{R_P + j X_P} = j R_P X_P \frac{R_P - j X_P}{R_P^2 + X_P^2} \qquad R_S = \frac{R_P X_P^2}{R_P^2 + X_P^2} \qquad X_S = \frac{R_P^2 X_P}{R_P^2 + X_P^2}$$

$$\frac{1}{R_P} + \frac{1}{j X_P} = \frac{1}{R_P} - j \frac{1}{X_P} = \frac{1}{R_S + j X_S} = \frac{R_S - j X_S}{R_S^2 + X_S^2} \qquad \frac{1}{R_P} = \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2}$$

$$\frac{1}{X_P} = \frac{X_S}{R_S^2 + X_S^2} \qquad R_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{R_S} \qquad X_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{X_S}$$

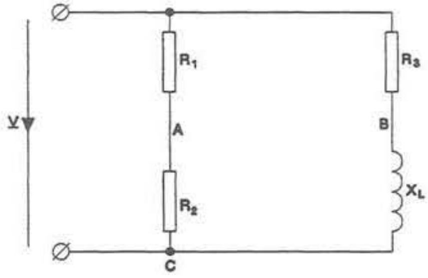
Problema CA5

En el circuit de la figura. Trobar el valor de V_{AB} si

$R_1 = 20\ \Omega$ $\qquad R_2 = 30\ \Omega$

$X_L = 10\ \Omega$ $\qquad \underline{V} = 200 + j\,0\ V$

a) $R_3 = 5\ \Omega$
b) $R_3 = 15\ \Omega$
c) $R_3 = 0\ \Omega$



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}}{R_1 + R_2} = \frac{200 + j\,0}{20 + 30} = 4 + j\,0 \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}}{R_3 + j\,X_L} = \frac{200 + j\,0}{R_3 + j\,10}$$

$$\underline{V}_{AC} = R_2\,\underline{I}_1 = 30\,\underline{I}_1 = 120 + j\,0 \qquad \underline{V}_{BC} = j\,X_L\,\underline{I}_2 = \frac{j\,2000}{R_3 + j\,10}$$

a)

$$\underline{V}_{BC} = \frac{j\,2000}{5 + j\,10} = 160 + j\,80\ V$$

$$\underline{V}_{AB} = \underline{V}_{AC} - \underline{V}_{BC} = (120 + j\,0) - (160 + j\,80) = -\,40 - j\,80\ V \qquad V_{AB} = 89.4\ V$$

b)

$$\underline{V}_{BC} = \frac{j\,2000}{15 + j\,10} = 61.54 + j\,92.31\ V$$

$$\underline{V}_{AB} = \underline{V}_{AC} - \underline{V}_{BC} = (120 + j\,0) - (61.54 + j\,92.31) = 58.46 - j\,92.31\ V \qquad V_{AB} = 109.3\ V$$

c)

$$\underline{V}_{BC} = \frac{j\,2000}{j\,10} = 200 + j\,0\ V$$

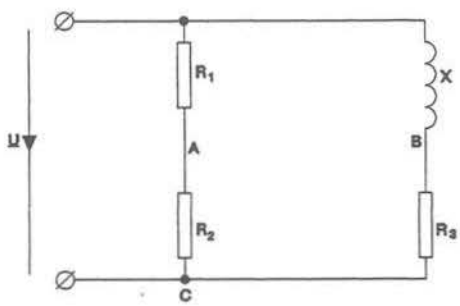
$$\underline{V}_{AB} = \underline{V}_{AC} - \underline{V}_{BC} = 120 - 200 = -\,80 + j\,0\ V \qquad V_{AB} = 80\ V$$

Problema CA6

En el circuit de la figura $\underline{V}_{AB} = 120_{|45°}\ V$. Trobar $\underline{U}$.

$R_1 = 20\ \Omega \qquad R_2 = 15\ \Omega$

$R_3 = 30\ \Omega \qquad X = 25\ \Omega$



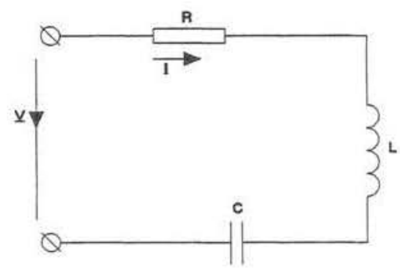
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{R_1 + R_2} = \frac{\underline{U}}{20 + 15} = \frac{\underline{U}}{35} \qquad \underline{V}_{AC} = R_2\,\underline{I}_1 = \underline{U}\frac{15}{35}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R_3 + j\,X} = \frac{\underline{U}}{30 + j\,25} \qquad \underline{V}_{BC} = R_3\,\underline{I}_2 = \frac{30\,\underline{U}}{30 + j\,25}$$

$$\underline{V}_{AB} = \underline{V}_{AC} - \underline{V}_{BC} = \frac{15\underline{U}}{35} - \frac{30\,\underline{U}}{30+j25} = \underline{U}\left(\frac{15}{35} - \frac{30}{30+j25}\right) = 84.85 + j84.85 \qquad \underline{U} = 104.6 - j206.9\ V$$

Problema CA7

En el circuit de la figura R = 47 Ω, L = 0.2 H, C = 20 μF, V = 220 V i f = 50 Hz ; trobar el corrent i les tensions a cada element.



Prenem $\underline{V} = 220 + j\,0$ com a fasor de referència

$$X_L = 2\,\pi\,50\;0.2 = 62.83\ \Omega \qquad X_C = \frac{1}{2\pi\;50\;20\;10^{-6}} = 159.16\ \Omega$$

$$\underline{Z} = 47 + j\,62.83 - j\,159.16 = 47 - j\,96.32\ \Omega \qquad \underline{I} = \frac{220 + j\,0}{47 - j\,96.32} = 0.9 + j\,1.85\ A$$

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I} = 42.31 + j\,86.7\ V \qquad U_R = 96.48\ V$$

$$\underline{U}_L = j\,X_L\,\underline{I} = -\,115.91 + j\,56.557 \qquad U_L = 128.97\ V$$

$$\underline{U}_C = -\,j\,X_C\,\underline{I} = 293.6 - j\,143.26 \qquad U_C = 327\ V$$

Problema CA8

En el problema anterior, trobeu la freqüència a què $\underline{Z}$ no té part imaginària. Trobeu el corrent i les tensions en aquest cas.

$$R = 47\ \Omega \qquad X_L = 2\,\pi\, f\, 0.2 = 1.257\, f$$

$$X_C = \frac{1}{2\,\pi\, f\, 20\ 10^{-6}} = \frac{7957.75}{f} \qquad Z = 47 + j\left(1.257\, f - \frac{7957.75}{f}\right)$$

Si $\underline{Z}$ no té part imaginària, es verificarà

$$1.257\, f = \frac{7957.75}{f} \qquad f^2 = \frac{7957.75}{1.257} \qquad f = 79.58\ Hz$$

$$X_L = 100\ \Omega \qquad X_C = 100\ \Omega \qquad Z = 47 + j\,0$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{220 + j\,0}{47 + j\,0} = 4.68 + j\,0 \qquad I = 4.68\ A$$

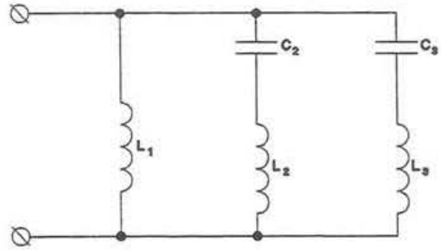
$$\underline{U}_R = R\,\underline{I} = 220 + j\,0 \qquad U_R = 220\ V$$

$$\underline{U}_L = j\,100\,\underline{I} = 0 + j\,468 \qquad U_L = 468\ V$$

$$\underline{U}_C = -\,j\,100\,\underline{I} = 0 - j\,468 \qquad U_C = 468\ V$$

Problema CA9

Del circuit representat a la figura sabem que, a 50 Hz, $X_{C2} = X_{C3} = 2925\ \Omega$. Calcular els valors de L_1, L_2 i L_3 per tal que la impedància equivalent del conjunt sigui nul.la a 150 Hz i 250 Hz i infinita a 50 Hz.



$$\frac{1}{2\ \pi\ 50\ C_2} = \frac{1}{2\ \pi\ 50\ C_3} = 2925\,\Omega \qquad C_2 = C_3 = 1.088\ \mu F$$

L'admitància equivalent serà

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2 - j\dfrac{1}{\omega C_2}} + \frac{1}{j\omega L_3 - j\dfrac{1}{\omega C_3}} = -j\frac{1}{\omega L_1} - j\frac{\omega C_2}{\omega^2 L_2 C_2 - 1} - j\frac{\omega C_3}{\omega^2 L_3 C_3 - 1}$$

A 150 Hz ($\omega = 2\ \pi\ 150 = 942.5$ rad/s) tindrem $\underline{Z} = 0$ o sigui $\underline{Y} = \infty$ per la qual cosa només cal que sigui infinit un dels termes, per exemple el segon

$$\frac{\omega\ C_2}{\omega^2\ L_2\ C_2 - 1} = \infty \qquad \omega^2\ L_2\ C_2 = 1 \qquad L_2 = \frac{1}{\omega^2\ C_2} = 1.035\ H$$

A 250 Hz ($\omega = 2\ \pi\ 250 = 1570.8$ rad/s) fem que sigui infinit el tercer terme

$$\frac{\omega\ C_3}{\omega^2\ L_3\ C_3 - 1} = \infty \qquad \omega^2\ L_3\ C_3 = 1 \qquad L_3 = \frac{1}{\omega^2\ C_3} = 0.372\ H$$

A 50 Hz ($\omega = 2\ \pi\ 50 = 314.2$ rad/s) hem de tenir $\underline{Z} = \infty$ per tant $\underline{Y} = 0$

$$0 = \frac{1}{\omega\ L_1} + \frac{\omega\ C_2}{\omega^2\ L_2\ C_2 - 1} + \frac{\omega\ C_3}{\omega^2\ L_3\ C_3 - 1} \qquad L_1 = 4.297\ H$$

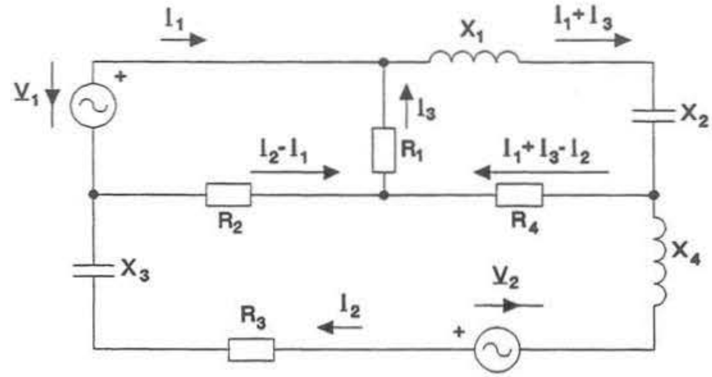
Problema CA10

En el circuit de la figura, calculeu tots els corrents

$\underline{V}_1 = 60 + j\,80\ V$

$\underline{V}_2 = 200 + j\,0$

$R_1 = 5\,\Omega$	$R_2 = 10\,\Omega$
$R_3 = 3\,\Omega$	$R_4 = 3\,\Omega$
$X_1 = 3\,\Omega$	$X_2 = 5\,\Omega$
$X_3 = 10\,\Omega$	$X_4 = 7\,\Omega$



1) $60 + j\,80 + 5\,\underline{I}_3 + 10\,(\underline{I}_2 - \underline{I}_1) = 0$

2) $5\,\underline{I}_3 + j\,3\,(\underline{I}_1 + \underline{I}_3) - j\,5\,(\underline{I}_1 + \underline{I}_3) + 3\,(\underline{I}_1 + \underline{I}_3 - \underline{I}_2) = 0$

3) $200 + j\,0 - 3\,\underline{I}_2 + j\,10\,\underline{I}_2 - 10\,(\underline{I}_2 - \underline{I}_1) + 3\,(\underline{I}_1 + \underline{I}_3 - \underline{I}_2) - j\,7\,\underline{I}_2 = 0$

Ordenant-ho

$$60 + j\,80 = 10\,\underline{I}_1 - 10\,\underline{I}_2 - 5\,\underline{I}_3$$

$$0 = (3 - j\,2)\,\underline{I}_1 - 3\,\underline{I}_2 + (8 - j\,2)\,\underline{I}_3$$

$$200 = -\,13\,\underline{I}_1 + (16 - j\,3)\,\underline{I}_2 - 3\,\underline{I}_3$$

Tenim un sistema de tres equacions complexes amb tres incògnites que resolem i obtenim

$\underline{I}_1 = 13.86 + j\,48.77$	$I_1 = 50.71\ A$
$\underline{I}_2 = 13.72 + j\,41.81$	$I_2 = 44.0\ A$
$\underline{I}_3 = -\,11.73 - j\,2.08$	$I_3 = 11.91\ A$

Problema CA11

A una càrrega de 300 kW amb un Cos φ = 0.65 (i) es millora el seu Cos φ fins a 0.9 (i) amb condensadors en paral.lel. Quants kVAr donen aquests condensadors i quina és la disminució percentual de potència aparent?

$$P = 300\ 10^3\ W \qquad Cos\ \varphi = 0.65$$

$$S = \frac{P}{Cos\ \varphi} = \frac{300\ 10^3}{0.65} = 461.5\ kVA \qquad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 350.7\ kVAr$$

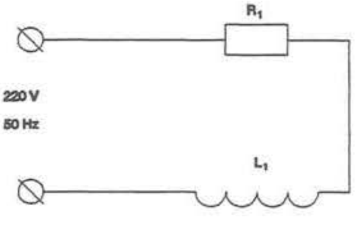
$$P' = 300\ 10^3\ W \qquad Cos\ \varphi' = 0.9$$

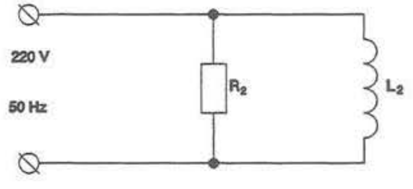
$$S' = \frac{P'}{Cos\ \varphi'} = \frac{300\ 10^3}{0.9} = 333.3\ kVA \qquad Q' = \sqrt{S'^2 - P'^2} = 145.3\ kVAr$$

$$Q_C = 350.7 - 145.3 = 205.4\ kVAr \qquad \Delta S = \frac{461.5 - 333.3}{461.5}\ 100 = 27.8\%$$

Problema CA12

En els circuits de la figura, on R_1 = 100 Ω, R_2 = 150 Ω, L_1 = 0.2 H, L_2 = 0.5 H, trobeu totes les potències i la capacitat dels condensadors a connectar en paral.lel per aconseguir Cos φ = 1.





a)

$$X_{L1} = 2\ \pi\ 50\ 0.2 = 62.83\ \Omega \qquad \underline{Z}_1 = 100 + j\ 62.83\,\Omega$$

$$\underline{S}_1 = \frac{U_1^2}{\underline{Z}_1^*} = 347 + j\ 218$$

$$S_1 = 409.8\ VA \qquad P_1 = 347\ W \qquad Q_1 = 218\ VAr$$

Per a arribar a $\mathrm{Cos}\ \varphi = 1$ cal que

$$Q_{C1} = 218\ VAr \qquad Q_{C1} = \frac{U_1^2}{X_{C1}} = \frac{U_1^2}{\dfrac{1}{\omega\ C_1}} \qquad C_1 = \frac{Q_{C1}}{\omega\ U_1^2} = 14.34\ \mu F$$

b)

$$X_{L2} = 2\,\pi\ 50\ 0.5 = 157\,\Omega \qquad \underline{Z}_2 = \frac{150\ j\ 157}{150 + j\ 157} = 78.46 + j\ 74.92\ \Omega$$

$$\underline{S}_2 = \frac{U_2^2}{\underline{Z}_2^*} = 322.7 + j\ 308.1$$

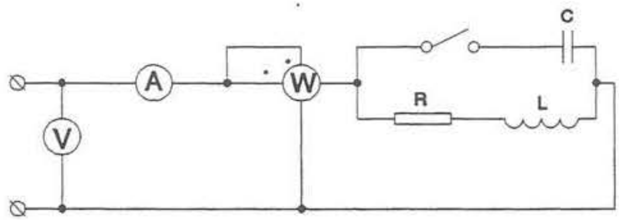
$$S_2 = 446.2\ VA \qquad P_2 = 322.7\ W \qquad Q_2 = 308.1\ VAr$$

Per a arribar a $\mathrm{Cos}\ \varphi = 1$ cal que

$$Q_{C2} = 308.1\,VAr \qquad Q_{C2} = \frac{U_2^2}{X_{C2}} = \frac{U_2^2}{\dfrac{1}{\omega\ C_2}} \qquad C_2 = \frac{Q_C}{\omega\ U_2^2} = 20.26\ \mu F$$

Problema CA13

En el circuit de la figura, amb l'interruptor obert, podem llegir V = 110 V, I = 1.95 A, W = 116 W i f = 50 Hz.



a) Calcular potència reactiva i aparent i els valors de R i L.
b) Es tanca l'interruptor i el corrent passa a ser 1.8 A. Quant marquen els altres aparells i quin és el valor del condensador?

---

a)

$$P = 116\ W \qquad P = R\, I^2 \qquad R = \frac{P}{I^2} = \frac{116}{1.95^2} = 30.5\ \Omega$$

$$S = 110\ 1.95 = 214.5\ VA \qquad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 180.4\ VAr \qquad Q = X_L I^2$$

$$X_L = \frac{Q}{I^2} = \frac{180.4}{1.95^2} = 47.5\ \Omega \qquad L = \frac{47.5}{2\ \pi\ 50} = 0.15\ H$$

b)

Els aparells marquen el mateix atès que la tensió d'alimentació no ha canviat i no s'ha afegit cap element dissipatiu.

$$P = 116 W \qquad V = 110 V \qquad I = 1.8 A \qquad S' = V I = 198\ VA$$

$$Q' = \sqrt{S'^2 - P^2} = \pm\ 160.46\ VAr$$

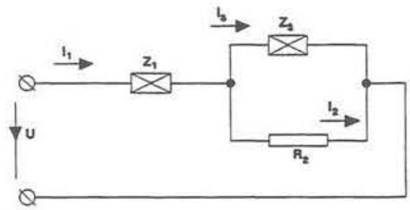
$$Q_C = Q' - Q = \pm\ 160.46 - 180.4 = \begin{cases} -\ 19.97\ VAr \\ -\ 340.89\ VAr \end{cases}$$

$$X_C = \frac{-V^2}{Q_C} = \begin{cases} 606.03\ \Omega \\ 35.5\ \Omega \end{cases} \qquad C = \frac{1}{\omega\ X_C} = \begin{cases} 5.25\ \mu F \\ 89.7\ \mu F \end{cases}$$

Segons si el circuit final és inductiu o capacitiu.

Problema CA14

En el circuit de la figura es desitja que $\underline{U}$ i $\underline{I}_3$ estiguin desfasades 90°C. Trobeu l'expressió d'R_2 en funció dels altres components. En quins casos és possible?



Aplicar-ho al cas $\underline{Z}_1 = 42.1 + j\ 175.88$ $\underline{Z}_3 = 25 + j\ 69.64$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\ X_1 \qquad \underline{Z}_3 = R_3 + j\ X_3 \qquad \underline{U} = \underline{Z}_1\ \underline{I}_1 + R_2\ \underline{I}_2$$

$$R_2\ \underline{I}_2 = \underline{Z}_3\ \underline{I}_3 \qquad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_3}{R_2}\ \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_1 = \left(\frac{\underline{Z}_3}{R_2} + 1\right)\underline{I}_3 \qquad \underline{U} = \left(\frac{\underline{Z}_1\ \underline{Z}_3}{R_2} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3\right)\underline{I}_3 \qquad \frac{\underline{U}}{\underline{I}_3} = \frac{1}{R_2}\left(\underline{Z}_1\ \underline{Z}_3 + R_2\ \underline{Z}_1 + R_2\ \underline{Z}_3\right)$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_3} = \frac{1}{R_2}\left[(R_1 + j\ X_1)\ (R_3 + j\ X_3) + R_2\ (R_1 + j\ X_1) + R_2\ (R_3 + j\ X_3)\right]$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_3} = \frac{1}{R_2}\left[(R_1\ R_3 - X_1\ X_3 + R_2\ R_1 + R_2\ R_3) + j\ (R_3\ X_1 + R_1\ X_3 + R_2\ X_1 + R_2\ X_3)\right]$$

Si estan a 90°, la part real serà nul.la.

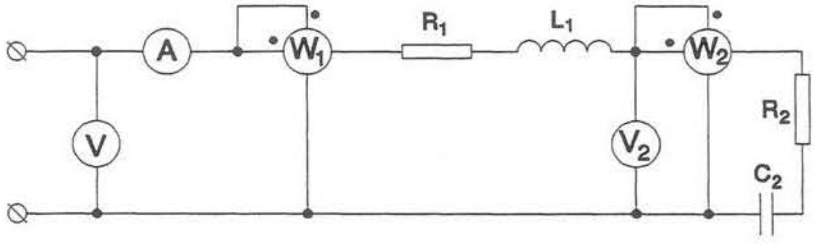
$$R_1\ R_3 + R_2\ R_1 + R_2\ R_3 - X_1\ X_3 = 0 \qquad R_2 = \frac{X_1\ X_3 - R_1\ R_3}{R_1 + R_3}$$

Evidentment R_2 ha de ser positiva. Per això cal que es compleixin les relacions $X_1\ X_3 > 0$ i $X_1\ X_3 > R_1\ R_3$. La primera relació indica que els dos elements han de ser del mateix tipus (inductius o capacitius).

$$R_2 = \frac{175.88\ 69.64 - 42.1\ 25}{42.1 + 25} = 166.85\ \Omega$$

Problema CA15

En el circuit de la figura hem mesurat V = 220 V, I = 5 A, P_2 = 100 W, P_1 = 210 W i V_2 = 90 V. Calculeu R_1, L_1, R_2 i C_2 sabent que el conjunt és inductiu.



$$P_2 = R_2\, I^2 \qquad R_2 = \frac{P_2}{I^2} = 4\ \Omega \qquad P_1 = (R_1 + R_2)\, I^2$$

$$R_1 = \frac{P_1}{I^2} - R_2 = 4.4\ \Omega \qquad S_2 = V_2\, I = 450\ VA \qquad Q_2 = \sqrt{S_2^2 - P_2^2} = -\ 438.75\ VAr$$

Fixem com a referència $\underline{I}_2 = 5 + j\,0$

$$\underline{S}_2 = 100 - j\ 438.75\ VA \qquad \underline{V}_2 = \frac{\underline{S}_2}{\underline{I}_2^*} = 20 - j\ 87.7 \qquad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_2} = 4 - j\ 17.55\ \Omega$$

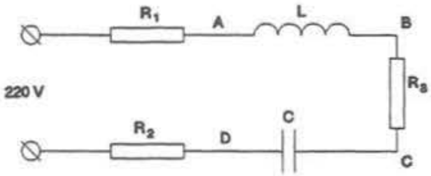
$$X_{C2} = 17.55\ \Omega \qquad C_2 = \frac{1}{\omega\, X_{C2}} = 181.4\ \mu F \qquad S_1 = V\, I = 1100\ VA$$

$$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = 1079.77\ VAr \qquad \underline{S}_1 = 210 + j\ 1079.77\, VA \qquad \underline{V} = \frac{\underline{S}_1}{\underline{I}^*} = 42 + j\ 216\, V$$

$$\underline{Z}_T = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = 8.4 + j\ 43.19\,\Omega \qquad \underline{Z}_1 = \underline{Z}_T - \underline{Z}_2 = 4.4 + j\ 60.74\,\Omega$$

$$X_{L1} = 60.74\ \Omega \qquad L_1 = \frac{X_{L1}}{\omega} = 0.19\ H$$

Problema CA16



En el circuit de la figura

$R_1 = 100\ \Omega \qquad R_2 = 68\ \Omega \qquad L = 0.1\ H$

$C = 20\ \mu F \qquad R_3 = 47\ \Omega$

Trobar les tensions V_{AB}, V_{BC} i V_{CD} en els casos:

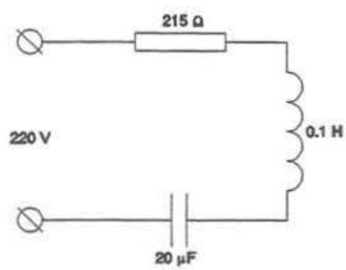
a) f = 50 Hz
b) f = 112.54 Hz.

En ambdós casos calcular el corrent i les potències activa, reactiva i aparent consumides.

---

a)

Simplifiquem:



$$I = \frac{220}{215 + j\,2\,\pi\,50\ 0.1 + \dfrac{1}{j\,2\,\pi\,50\ 20\ 10^{-6}}} = 0.76 + j\,0.45$$

$I = 0.88\ A \qquad \underline{S} = (220 + j\ 0)\ (0.76 + j\ 0.45)^* = 167.2 - j\ 99$

$S = 194.3\ VA \qquad P = 166.4\ W \qquad Q = -99\ VAr \qquad U_{AB} = 2\ \pi\ 50\ 0.1\ 0.88 = 27.64\ V$

$$U_{BC} = 47\ 0.88 = 41.35\ V \qquad U_{CD} = \frac{0.88}{20\ 10^{-6}\ 2\ \pi\ 50} = 140\ V$$

b)

$$I = \frac{220}{215 + j\ 2\ \pi\ 112.54\ 0.1 + \dfrac{1}{j\ 2\ \pi\ 112.54\ 20\ 10^{-6}}} = 1.02 + j\ 0$$

$I = 1.02\ A \qquad S = 220\ 1.02 = 225.12\ VA \qquad P = 225.12\ W \qquad Q = 0$

$$U_{AB} = 2\ \pi\ 112.54\ 0.1\ 1.02 = 72.36\ V \qquad U_{BC} = 47\ 1.02 = 48.09\ V$$

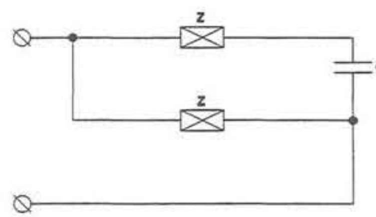
$$U_{CD} = \frac{1.02}{2\ \pi\ 112.54\ 20\ 10^{-6}} = 72.36\ V$$

Problema CA17

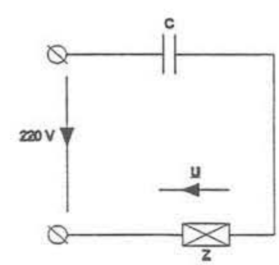
Una càrrega $\underline{Z}$ consumeix, quan es connecta a 220 V i 50 Hz, una potència de 65 W amb $\cos\varphi = 0.4$ (i).

a) Calcular el valor del condensador X_C a connectar en sèrie per tal que es consumeixi la mateixa potència activa amb factor de potència capacitiu.

b) Quin serà el consum del circuit de la figura?



a)



$$S = \frac{P}{Cos\,\varphi} = \frac{65}{0.4} = 162.5\ VA \qquad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 148.93\ VAr$$

$$\underline{Z} = R + j\,X_L \qquad \underline{S} = \underline{Z}\,I^2 \qquad P = R\,I^2 \qquad I = \frac{220}{Z}$$

$$\underline{Z}' = R + j\,X_L - j\,X_C \qquad \underline{S}' = \underline{Z}'\,I'^2 \qquad P' = R\,I'^2 \qquad I' = \frac{220}{Z'}$$

$$P = P' \qquad R\,I^2 = R\,I'^2 \qquad I^2 = I'^2 \qquad \frac{220^2}{Z^2} = \frac{220^2}{Z'^2}$$

$$Z^2 = Z'^2 \qquad |R + j\,X_L|^2 = |R + j\,(X_L - X_C)|^2$$

$$R^2 + X_L^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2 \qquad X_L^2 = X_L^2 + X_C^2 - 2\,X_L\,X_C$$

$$X_C^2 = 2\,X_L\,X_C \qquad X_C = 2\,X_L \qquad \underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{U}\left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}\right)^* = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$$

$$\underline{Z} = \frac{U^2}{\underline{S}^*} = \frac{220^2}{65 - j\,148.93} = 119.14 + j\,272.98$$

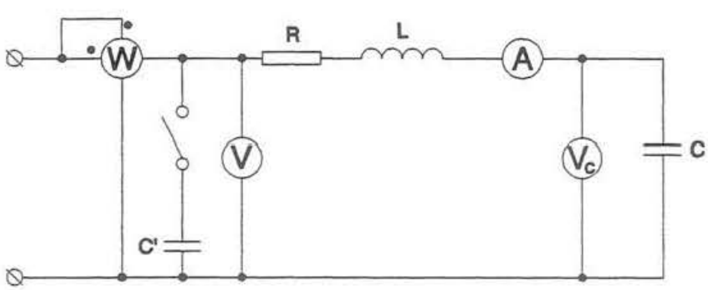
$$X_C = 2\;272.98 = 545.96$$

b)

Calculem la impedància equivalent del conjunt

$$\underline{Z} = \frac{(119.14 + j272.98)(119.14 + j272.98 - j545.96)}{(119.14 + j272.98) + (119.14 + j272.98 - j545.96)} = 372.2 + j0\ \Omega \qquad \underline{S} = \frac{U^2}{\underline{Z}^*} = \frac{220^2}{372.3} = 130\,W$$

Problema CA18



En el circuit de la figura

$$I = 1A \qquad V_c = 100\,V$$
$$V = 220\,V \qquad P = 50\,W$$
$$f = 50\,Hz$$

a) Amb l'interruptor obert determineu els valors de R, L i C (sabent que el circuit és inductiu).
b) Quant ha de valer C' per tal que el generador no subministri reactiva?

a)

$$X_C = \frac{V_C}{I} = \frac{100\ V}{1\ A} = 100\ \Omega \qquad X_C = \frac{1}{\omega\ C} \qquad C = \frac{1}{2\ \pi\ f\ X_C} = 31.83\ \mu F$$

$$P = R\,I^2 \qquad R = \frac{P}{I^2} = \frac{50}{1^2} = 50\ \Omega \qquad S = V\,I = 220\ 1 = 220\ VA$$

$$Cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{50}{220} = 0.23 \qquad \underline{I} = 1\ (0.23\ -\ 0.97) \qquad 220 + j\,0 = \left(50 + j\,X_L - j\,100\right)\underline{I}$$

$$50 + j\,X_L - j\,100 = \frac{220 + j\,0}{0.23 - j\,0.97} = 50 + j\,214 \qquad X_L = 100 + 214 = 314\,\Omega \qquad L = \frac{X_L}{2\,\pi f} = 1\,H$$

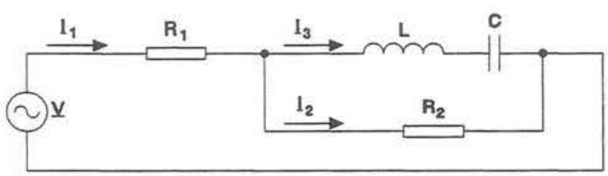
b)

$$S = 220\ VA \qquad P = 50\ W \qquad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 214.24\ VAr$$

$$Q_C' = 214.24\ VAr = \frac{V^2}{X_{C'}} = \frac{220^2}{X_{C'}} \qquad X_{C'} = 225.91\ \Omega \qquad C' = \frac{1}{\omega\ X_{C'}} = 14.09\ \mu F$$

Problema CA19

En el circuit de la figura, sabent que $R_1 = 44\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $L = 100.32$ mH, $C = 101\ \mu F$, $f = 50$ Hz i $V = 220$ V. Calcular els corrents I_1, I_2 i I_3.



$$X_L = \omega\ L = 2\ \pi\ 50\ 100.32\ 10^{-3} = 31.516\ \Omega \qquad X_C = \frac{1}{\omega\ C} = \frac{1}{2\ \pi\ 50\ 101\ 10^{-6}} = 31.516\ \Omega$$

La branca L-C és ressonant, i així:

$$\underline{I}_2 = 0 \qquad \underline{I}_1 = \underline{I}_3 = \frac{\underline{V}}{R_1} = \frac{220 + j\,0}{44} = 5\ A$$

Problema CA20

D'una càrrega es coneix la potència aparent que consumeix, 20 kVA i el seu factor de potència és 0.6 (i). Quant valen les potències activa i reactiva consumides?. I si el factor de potència fos de 0.6 (c)?.

---

a)

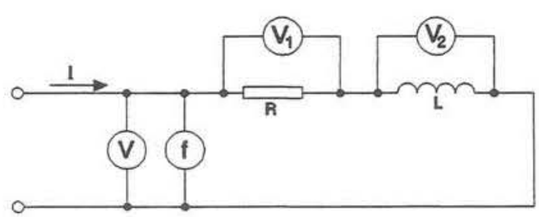
$$Sin\varphi = \sqrt{1 - Cos^2\varphi} = 0.8 \qquad P = S\,Cos\varphi = 20\ 0.6 = 12kW \qquad Q = S\,Sin\varphi = 20\ 0.8 = 16kVAr$$

b)

$$Sin\ \varphi = -\ 0.8 \qquad P = 12\ kW \qquad Q = -\ 16\ kVAr$$

Problema CA21

En el circuit de la figura les lectures són $V_1 = 50$ V, $V_2 = 60$ V i f = 50 Hz. Si R = 68 Ω, calculeu la lectura de V, el corrent I i el valor de L.



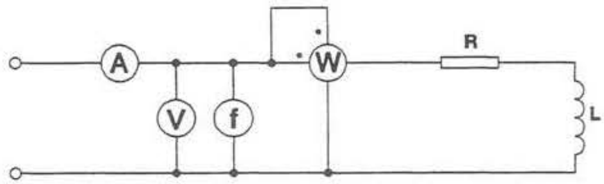
$$I = \frac{V_1}{R} = \frac{50}{68} = 0.735A \qquad X = \frac{V_2}{I} = \frac{65}{0.735} = 81.6\Omega \qquad L = \frac{X}{\omega} = \frac{81.6}{2\,\pi\,50} = 0.26H$$

$$\underline{V} = (R + j\,X)\,I = (68 + j\,81.6)\,0.735 = 50 + j\,60 \qquad V = 78.1\ V$$

Problema CA22

El aparells de mesura de la figura donen les següents lectures: I = 2 A, P = 100 W, V = 110 V i f = 50 Hz.

Calcula els valors de R i L.



$$P = R\,I^2 \qquad R = \frac{P}{I^2} = \frac{100}{2^2} = 25\ \Omega \qquad Z = \frac{V}{I} = 55\ \Omega$$

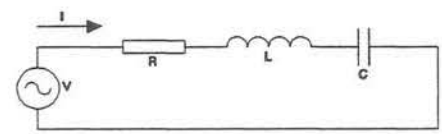
$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = 49\ \Omega \qquad L = \frac{X}{\omega} = \frac{49}{2\ \pi\ 50} = 0.16\ H$$

Problema CA23

A quina freqüència f_r el circuit de la figura està en ressonància? Quant val el corrent I que circula en aquest cas?

$$V = 100\ V \qquad R = 10\ \Omega$$

$$L = 0.2\ H \qquad C = 0.6\ \mu F$$



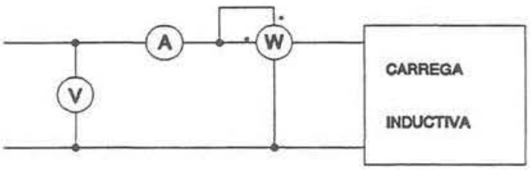
En ressonància $X_L = X_C$, o sigui

$$\omega_r\,L = \frac{1}{\omega_r\,C} \qquad \omega_r = \sqrt{\frac{1}{L\,C}} = 2886.75\ rad/s \qquad \omega_r = 2\ \pi\ f_r$$

$$f_r = \frac{2886.75}{2\ \pi} = 459.4\ Hz \qquad Z = R + j\,X_L - j\,X_C = 10\ \Omega \qquad I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{10} = 10\ A$$

Problema CA24

En el muntatge de la figura, sabent que les lectures dels aparells són I = 10 A, V = 200 V i W = 1400 W calculeu el valor de la potència reactiva consumida i el factor de potència de la càrrega.



$$S = V\,I = 2000\ VA \qquad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 1428\ VAr \qquad Cos\ \varphi = \frac{P}{S} = 0.7$$

Problema CA25

Una càrrega monofàsica consumeix 10 kW amb un factor de potència de 0.6 inductiu connectada a 220 V 50 Hz. Calculeu la capacitat del condensador necessari a connectar en paral.lel amb la càrrega per tal que el factor de potència del conjunt sigui 0.96 inductiu.

$$S = \frac{P}{Cos\ \varphi} \qquad Q = S\,\sqrt{1 - Cos^2\ \varphi} \qquad Q = 10000\ \frac{\sqrt{1 - 0.6^2}}{0.6} = 13333.3\ VAr$$

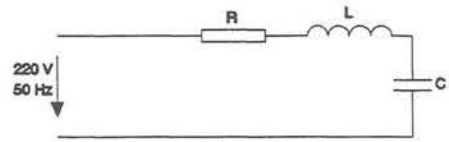
$$Q' = 10000\ \frac{\sqrt{1 - 0.96^2}}{0.96} = 2916.7\ VAr$$

$$Q_C = Q - Q' = 13333.3 - 2916.7 = 10416.7\ VAr$$

$$X_C = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{220^2}{10416.7} = 4.646\ \Omega \qquad C = \frac{1}{2\ \pi\ f\ X_C} = 685\ \mu F$$

Problema CA26

En el circuit de la figura, quin és el valor del condensador C per tal que el corrent absorbit de la xarxa sigui 1 A?



$$R = 220\ \Omega \qquad L = 0.3\ H$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{220}{1} = 220\ \Omega \qquad Z = R + j\,\omega\,L - j\,\frac{1}{\omega\,C}$$

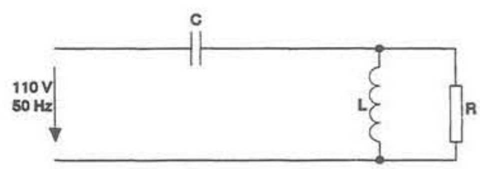
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)^2} \qquad 220 = \sqrt{220^2 + \left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)^2} \qquad \omega\,L - \frac{1}{\omega\,C} = 0$$

és a dir, està en ressonància

$$\omega\,L = \frac{1}{\omega\,C} \qquad C = \frac{1}{\omega^2\,L} \qquad C = \frac{1}{(2\,\pi\,50)^2\,0.3} = 33.77\ \mu F$$

Problema CA27

En el circuit de la figura, quant val la tensió que suporta la resistència?



$$C = 100\ \mu F \qquad R = 100\ \Omega$$

$$L = 100\ mH$$

$$X_C = \frac{1}{\omega\,C} = \frac{1}{2\,\pi\,50\,100\,10^{-6}} = 31.831\ \Omega \qquad X_L = \omega\,L = 2\,\pi\,50\,0.1 = 31.416\ \Omega$$

$$\underline{Z}_{RL} = \frac{R\,j\,X_L}{R + j\,X_L} = \frac{100\,j\,31.416}{100 + j\,31.416} = 8.983 + 28.594\ \Omega$$

$$\underline{Z}_{RLC} = \underline{Z}_{RL} - j\,X_C = 8.983 - j\,3.237\ \Omega \qquad Z_{RLC} = 9.548\ \Omega$$

$$I_C = \frac{V}{Z_{RLC}} = \frac{110}{9.548} = 11.52\ A \qquad V_R = Z_{RL}\,I_C = 29.972\ 11.52 = 345.27\ V$$

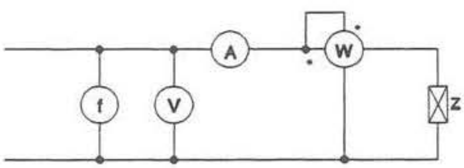
Problema CA28

Una càrrega $\underline{Z}$ és desconeguda, per tal de determinar-la en el laboratori, es munta el següent circuit

Les lectures dels aparells són

$f = 50\ Hz$ $\qquad V = 220\ V$

$A = 1\ A$ $\qquad W = 0\ W$



De quins tipus pot ser la càrrega i quina impedància presenta?

W = 0 ⇒ Z no té part real, sinó dissiparia potència activa

$$Z = 0 + j\,X \qquad Z = \frac{V}{I} = X = \frac{220}{1} = 220\ \Omega \qquad Z = 0 \pm j\,220\ \Omega$$

Amb l'esquema de l'enunciat no es pot determinar si és capacitiu o inductiu

Si fos inductiu, la inductància equivalent seria

$$L = \frac{Z}{\omega} \qquad L = \frac{220}{2\ \pi\ 50} = 0.7\ H$$

Si fos capacitiu, la capacitat equivalent seria

$$C = \frac{1}{\omega\,Z} \qquad C = \frac{1}{2\ \pi\ 50\ 200} = 15.92\ \mu F$$

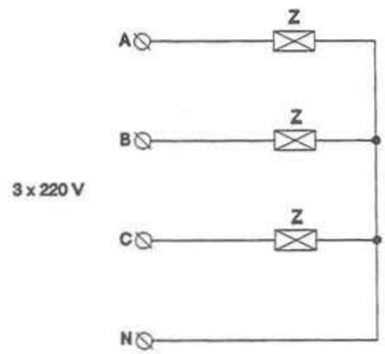
Problemes de sistemes trifàsics

Problema TR1

En un sistema trifàsic simètric amb tensió de línia de 220 V es connecten tres impedàncies idèntiques

$$\underline{Z} = 54.4 + j\,40.8$$

en estrella. Calculeu els corrents absorbits.



$$\underline{U}_{AB} = 220\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}\right) \qquad \underline{U}_{BC} = 220\,(0 - j\,1) \qquad \underline{U}_{CA} = 220\left(-\,\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{U}_{AN} = 127\,(1 + j\,0) \qquad \underline{U}_{BN} = 127\left(-\,\frac{1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \underline{U}_{CN} = 127\left(\frac{-1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\underline{I}_A = \frac{127\,(1 + j\,0)}{54.4 + j\,40.8} = 1.49 - j\,1.12 = 1.87\,(0.8 - j\,0.6)$$

$$\underline{I}_B = \frac{127\left(\dfrac{-1}{2} - j\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{54.4 + j\,40.8} = -\,1.72 - j\,0.73 = 1.87\,(-\,0.92 - j\,0.39)$$

$$\underline{I}_C = \frac{127\left(\frac{-1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{54.4 + j\,40.8} = 0.22 + j\,1.85 = 1.87\,(0.12 + j\,0.99)$$

$$\underline{I}_N = \left(\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C\right) = 0$$

Problema TR2

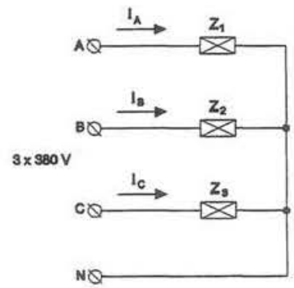
En el circuit de la figura, la tensió d'alimentació és de 380 V. Sabent que les càrregues són

$\underline{Z}_1$ = 62.28 - j 19.04

$\underline{Z}_2$ = j 47 Ω

$\underline{Z}_3$ = 80 + j 60 Ω.

Trobeu els corrents.



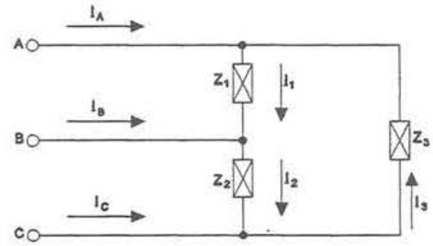
$$\underline{U}_{AN} = 220\,(1 + j\,0) \qquad \underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{AN}}{\underline{Z}_1} = 3.23 + j\,0.99 \qquad I_A = 3.38\ A$$

$$\underline{U}_{BN} = 220\left(-\frac{1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{BN}}{\underline{Z}_2} = -\,4.05 + j\,2.34 \qquad I_B = 4.68\ A$$

$$\underline{U}_{CN} = 220\left(-\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CN}}{\underline{Z}_3} = 0.26 + j\,2.18 \qquad I_C = 2.2\ A$$

$$\underline{I}_N = \left(\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C\right) = -\,0.56 + j\,5.51 \qquad I_N = 5.54\ A$$

Problema TR3



En el circuit de la figura, la tensió d'alimentació és de 220 V. Sabent que les càrregues són

$\underline{Z}_1$ = 62.28 - j 19.04 Ω
$\underline{Z}_2$ = j 47 Ω
$\underline{Z}_3$ = 80 + j 60 Ω

Trobeu els corrents.

$$\underline{U}_{AB} = 220\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}\right) \qquad \underline{U}_{BC} = 220\,(0 - j\,1) \qquad \underline{U}_{CA} = 220\left(-\,\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}\right)$$

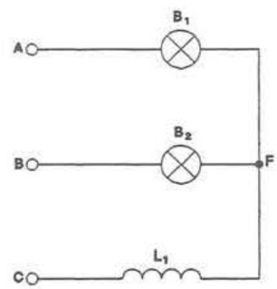
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_1} = 2.3 + j\,2.47 \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_2} = -\,4.68 + j\,0 \qquad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_3} = -\,0.86 + j\,2.02$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 - \underline{I}_3 = 3.17 + j\,0.45 \qquad \underline{I}_B = \underline{I}_2 - \underline{I}_1 = -\,6.99 - j\,2.47 \qquad \underline{I}_C = \underline{I}_3 - \underline{I}_2 = 3.82 + j\,2.02$$

$$I_1 = 3.378\ A \qquad I_2 = 4.68\ V \qquad I_3 = 2.2\ A$$

$$I_A = 3.2\ A \qquad I_B = 7.409\ A \qquad I_C = 4.32\ A$$

Problema TR4



Quina de les dues bombetes fa més llum si el conjunt s'alimenta a 220 V 50 Hz?

$B_1 = B_2 = \{220\ V\ \ 60\ W\}$

L_1 = 0.5 H

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \frac{220^2}{60} = 807 + j\,0\ \Omega \qquad \underline{Z}_C = 0 + j\,2\,\pi\,50\ 0.5 = j\,157\ \Omega$$

Prenem com a fasor de referència la tensió $\underline{U}_{AG}$ i convertim en triangle

$$\underline{U}_{AB} = 220\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) \qquad \underline{U}_{BC} = 220\,(0 - j\,1) \qquad \underline{U}_{CA} = 220\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)$$

$$Z = \underline{Z}_A\underline{Z}_B + \underline{Z}_B\underline{Z}_C + \underline{Z}_C\underline{Z}_A = 650711 + j\,253422$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{Z}{\underline{Z}_C} = 1613 - j\,4142.6 \qquad \underline{Z}_2 = \frac{Z}{\underline{Z}_A} = 807 + j\,314 \qquad \underline{Z}_3 = \frac{Z}{\underline{Z}_B} = 807 + j\,314$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_1} = -0.008 + j0.049 \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_2} = -0.092 - j0.237 \qquad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_3} = -0.159 + j0.198$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 - \underline{I}_3 = 0.151 - j0.149 \qquad \underline{I}_B = \underline{I}_2 - \underline{I}_1 = -0.085 - j0.286 \qquad \underline{I}_C = \underline{I}_3 - \underline{I}_2 = -0.067 + j0.435$$

$$I_A = 0.213\ A \qquad I_B = 0.298\ A \qquad I_C = 0.440\ A$$

$$U_{AF} = Z_A\,I_A = 171.6\ V \qquad U_{BF} = Z_B\,I_B = 240.4\ V \qquad U_{CF} = Z_C\,I_C = 69\ V$$

Fa més llum la bombeta B_2 o sigui la de la fase anterior a la inductància.

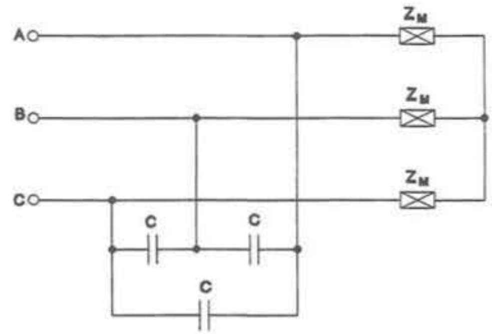
Problema TR5

Un motor trifàsic connectat en estrella consumeix, si es connecta a 380 V, un corrent de 6 A a un Cos φ = 0.8. Calculeu la capacitat dels condensadors en triangle que cal posar en paral.lel perquè el factor de potència del conjunt sigui de 0.96 (i).

$$\underline{U}_{AG} = \frac{380}{\sqrt{3}}\,(1 + j\,0) \qquad \underline{S}_M = 3\ U_{AG}\ I_A^*$$

$$\underline{S}_M = 3\ \frac{380}{\sqrt{3}}\ 6\ (0.8 + j\,0.6)$$

$$\underline{S}_M = 3168 + j\,2376\ VA$$



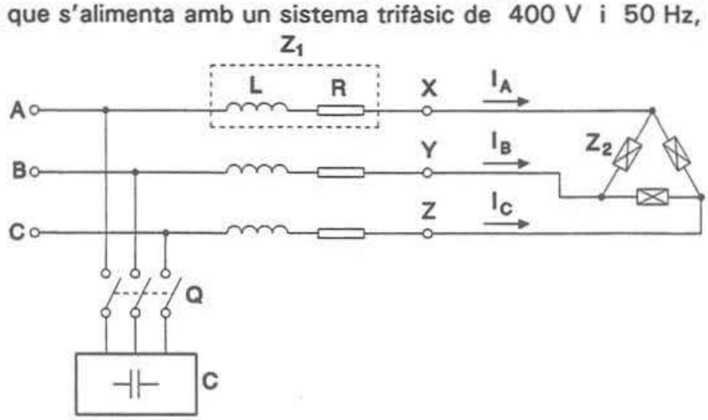
$$Q_C = 3\ \frac{380^2}{X_C} \qquad P' = 3168\,W$$

$$S' = \frac{P'}{0.96} = 3300\,VA \qquad Q' = \sqrt{S'^2 - P'^2} = 924\,VAr \qquad Q_C = Q - Q' = 1452\,VAr$$

$$X_C = \frac{3\ 380^2}{1452} = 298.3\ \Omega \qquad 298.3 = \frac{1}{2\ \pi\ 50\ C} \qquad C = 10.67\ \mu F$$

Problema TR6

El circuit de la figura representa una càrrega trifàsica simètrica d'impedància $\underline{Z}_2 = 4.2426_{|45^\circ}\ \Omega$, la línia de distribució té una impedància $\underline{Z}_1$ (L = 0.92 mH, R = 84 mΩ) per cada fase. Sabent que s'alimenta amb un sistema trifàsic de 400 V i 50 Hz, es demana



Amb l'interruptor Q obert:

a) Els corrents de línia $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$ i $\underline{I}_C$.

b) Les tensions $\underline{V}_{XY}$, $\underline{V}_{YZ}$ i $\underline{V}_{ZX}$.

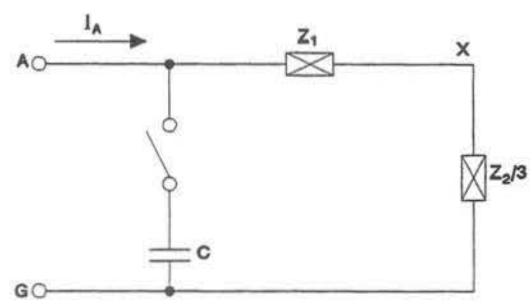
c) Potència activa i reactiva absorbides de la xarxa.

Amb l'interruptor Q tancat:

d) Indiqueu el valor de cada una de les tres capacitats que s'han d'instal.lar en la bateria de condensadors C, si es connecten en estrella, per tal que el factor de potència del conjunt sigui de 0.95 (i). I si es connecten en triangle?

$$\underline{Z}_1 = (84 + j2\,\pi\,50\,0.92)\,10^{-3} = (84 + j\,289)\,10^{-3}$$

$$\underline{Z}_2 = 3 + j\,3 \qquad \frac{\underline{Z}_2}{3} = 1 + j\,1$$



a)

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{V}_{AN}}{\underline{Z}_1 + \dfrac{\underline{Z}_2}{3}} = \frac{\dfrac{400}{\sqrt{3}} + j\,0}{(84 + j\,289)\,10^{-3} + (1 + j\,1)} = 88.25 - j\,104.95 \qquad I_A = I_B = I_C = 137.12A$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_A \left(\frac{-1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -135 - j\,23.96 \qquad \underline{I}_C = \underline{I}_A \left(\frac{-1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 46.76 + j\,128.9$$

b)

$$\underline{V}_{XN} = \frac{\underline{Z}_2}{3}\,\underline{I}_A = 193.2 - j\,16.69 \qquad \underline{V}_{YN} = \underline{V}_{XN}\left(\frac{-1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -111.05 - j\,158.97$$

$$\underline{V}_{ZN} = \underline{V}_{XN}\left(\frac{-1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -82.14 + j\,175.66$$

$$\underline{V}_{XY} = 304.25 + j\ 142.27 \qquad \underline{V}_{YZ} = -\ 28.9 - j\ 334.62$$

$$\underline{V}_{ZX} = -\ 275.34 + j\ 192.35 \qquad V_{XY} = V_{YZ} = V_{ZX} = 335.87\ V$$

c)

$$\underline{S} = 3\ \underline{V}_{AN}\ \underline{I}_A^* = (61.14 + j\ 72.70)\ kVA$$

$$P = 61.14\ kW \qquad Q = 72.70\ kVAr$$

d)

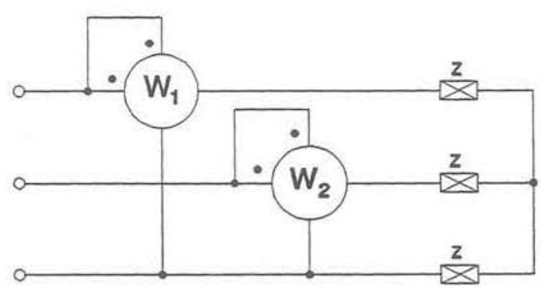
$$P' = 61.14\ kW \qquad Cos\ \varphi' = 0.95 \qquad P' = S'\ Cos\ \varphi' \qquad S' = 64.36\ kVA$$

$$Q' = \sqrt{S'^2 - P'^2} = 20.1\ kVAr \qquad Q + Q_C = Q' \qquad Q_C = -\ 52.6\ kVAr$$

$$Q_C = \frac{3\ V_C^2}{X_C} = 3\ \omega\ C\ V^2 \qquad C = \frac{Q_C}{3\ \omega\ V_C^2}$$

Problema TR7

En el circuit de la figura, que s'alimenta a 380 V , s'han mesurat W_1 = 1000 W i W_2 = 500 W. Calculeu $\underline{Z}$ i el corrent.



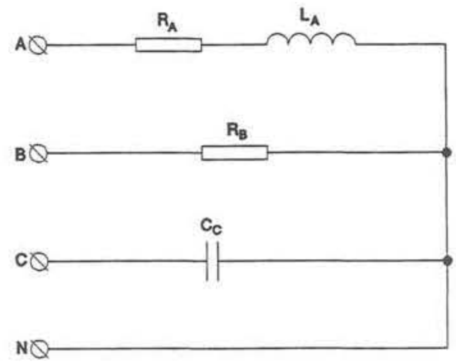
$$P = 1000 + 500 = 1500\,W \qquad Q = \sqrt{3}\,(1000 - 500) = 866\,VAr \qquad S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1732\ VA$$

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}\ U} = 2.63\ A \qquad Z = \frac{U}{\sqrt{3}\ I} = 83.4\ \Omega \qquad Sin\ \varphi = \frac{Q}{S} = 0.5$$

$$Cos\ \varphi = \frac{P}{S} = 0.866 \qquad \underline{Z} = 83.4\ (0.866 + j\ 0.5) = 72.2 + j\ 41.7\ \Omega$$

Problema TR8

Calculeu, si s'alimenta a 380 V 50 Hz, les potències i els corrents si R_A = 47 Ω, L_A = 0.2 H, R_B = 100 Ω i C_2 = 20 μF.



$$\underline{Z}_A = 47 + j\ 62.8\ \Omega \qquad \underline{Z}_B = 100\ \Omega \qquad \underline{Z}_C = -\,j\ 159.2\ \Omega$$

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{AN}}{\underline{Z}_A} = \frac{\dfrac{380}{\sqrt{3}}\ (1 + j\ 0)}{47 + j\ 62.8} = 1.68 - j\ 2.24 \qquad I_A = 2.8\ A$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{BN}}{\underline{Z}_B} = \frac{\dfrac{380}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{-1}{2} - j\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{100} = -\ 1.10 - j\ 1.90 \qquad I_B = 2.19\ A$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CN}}{\underline{Z}_C} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\left(\frac{-1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-j\,159.2} = -1.19 - j\,0.69 \qquad I_C = 1.38\ A$$

$$\underline{S} = \underline{U}_{AN}\,\underline{I}^*_A + \underline{U}_{BN}\,\underline{I}^*_B + \underline{U}_{CN}\,\underline{I}^*_C = 848.77 + j\,188.78$$

$$S = 869.51 \qquad P = 848.77 \qquad Q = 188.78$$

Problema TR9

Un aparell trifàsic consumeix, a 380 V, les següents potències P = 2500 W i Q = 1500 VAr.

a) Calculeu els corrents que s'absorbeixen del generador.
b) Calculeu el valor dels condensadors que cal connectar per aconseguir que el generador no subministri reactiva (casos estrella i triangle). Quins corrents s'absorbeixen del generador?.

a)

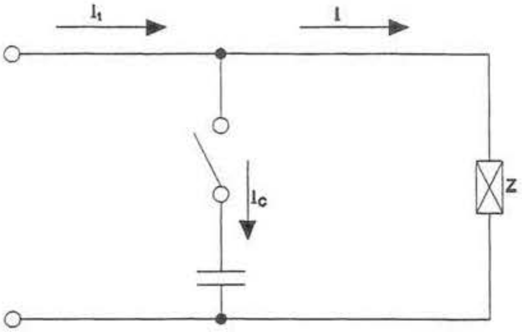
$$P = \sqrt{3}\ U\ I\ Cos\ \varphi \qquad I\ Cos\ \varphi = \frac{25000}{\sqrt{3}\ 380} = 3.798$$

$$Q = \sqrt{3}\ U\ I\ Sin\ \varphi \qquad I\ Sin\ \varphi = \frac{15000}{\sqrt{3}\ 380} = 2.279$$

$$I = \sqrt{3.798^2 + 2.279^2} = 4.430 \qquad Cos\ \varphi = 0.857 \qquad Sin\ \varphi = 0.514$$

b)

$$Q_C = 1500\ VAr \qquad Q_i = \frac{Q_C}{3} = 500\ VAr \qquad X_{CY} = \frac{220^2}{Q_i} = \frac{220^2}{500} = 96.8\ \Omega$$



$$C_Y = \frac{1}{\omega\ X_{CY}} = 32.88\ \mu F$$

$$X_{CD} = \frac{380^2}{Q_i} = \frac{380^2}{500} = 288.8\ \Omega$$

$$C_D = \frac{1}{\omega\ X_{CD}} = 11\ \mu F$$

$$Q_C = \sqrt{3}\ U\ I_C\ Sin\ \varphi_C \qquad Sin\ \varphi_C = 1 \qquad I_C = \frac{15000}{\sqrt{3}\ 380} = 2.279\ A$$

$$\underline{I}_T = I\ (Cos\ \varphi - j\ Sin\ \varphi) + j\ I_C\ Sin\ \varphi_C = I_T\ (Cos\varphi_T - j\ Sin\ \varphi_T)$$

$$Cos\ \varphi_T = 1 \qquad \underline{I}_T = 3.798 + j\ 0 \qquad I_T = 3.798\ A$$

Problema TR10

En una instal.lació hi ha connectat un consum trifàsic simètric (380 V 8000 W 6000 VAr), i dos consums monofàsics (380 V 1500 W 500 VAr) i (220 V 1000 W 200 VAr).

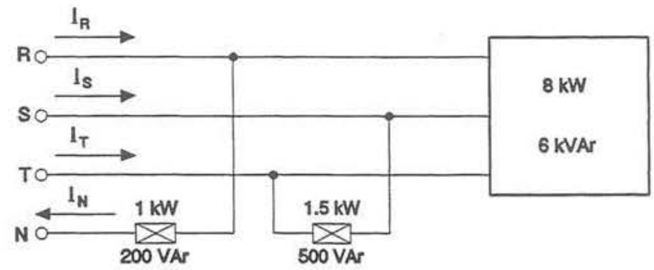
a) Sabent que els consums monofàsics afecten a fases diferents, calculeu els corrents que s'absorbeixen de cada fase del generador.

b) Es vol compensar el factor de potència del conjunt fins a Cos φ = 1 mitjançant una bateria de condensadors en triangle. Quina potència subministra la bateria?

a)

$$\underline{S}_1 = 8000 + j\ 6000 \qquad S_1 = 10000\ VA$$

$$I_1 = \frac{S_1}{\sqrt{3}\ 380} = 15.2\ A \qquad \underline{I}_1 = 15.2 \left(\frac{8000 + j\ 6000}{10000}\right)^* = 12.16 - j\ 9.12$$



$$\underline{S}_2 = 1500 + j\ 500 \qquad S_2 = 1581\ VA$$

$$Z_2 = \frac{380^2}{1581} = 91.33\,\Omega \qquad \underline{Z}_2 = 91.33\ \frac{1500 + j500}{1581} = 86.64 + j28.88$$

$$\underline{S}_3 = 1000 + j\ 200 \qquad S_3 = 1020\ VA$$

$$Z_3 = \frac{220^2}{1020} = 47.46\,\Omega \qquad \underline{Z}_3 = 47.46\ \frac{1000 + j200}{1020} = 46.54 + j9.31$$

Prenem la tensió senzilla de la fase R com a referència d'angles

$$\underline{I}_{1R} = 12.16 - j\ 9.12 \qquad \underline{I}_{1S} = (12.16 - j\ 9.12)\left(\frac{-1}{2} - j\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\ 13.97 - j\ 5.97$$

$$\underline{I}_{1T} = (12.16 - j\ 9.12)\left(\frac{-1}{2} + j\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1.82 + j\ 15.08$$

$$\underline{I}_{1N} = \underline{I}_{1R} + \underline{I}_{1S} + \underline{I}_{1T} = 0 \qquad \underline{I}_{2S} = \frac{\underline{U}_{ST}}{\underline{Z}_2} = \frac{380\ (0 - j\ 1)}{86.65 + j\ 28.88} = -\ 1.32 - j\ 3.95$$

$$\underline{I}_{2T} = -\ \underline{I}_{2S} = 1.32 + j\ 3.95 \qquad \underline{I}_{3R} = \frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_3} = \frac{220\ (1 + j\ 0)}{46.52 + j\ 9.31} = 4.55 - j\ 0.91$$

$$\underline{I}_{3N} = \underline{I}_{3R} = 4.55 - j\ 0.91 \qquad \underline{I}_R = (12.16 - j\ 9.12) + (4.55 - j\ 0.91) = 16.71 - j\ 10.03$$

$$\underline{I}_S = (-\ 13.97\ -j\ 5.97) + (-\ 1.32\ -j\ 3.95) = -\ 15.29\ -j\ 9.92$$

$$\underline{I}_T = (1.82\ +j\ 15.08) + (1.32\ +j\ 3.95) = 3.14\ +j\ 19.03$$

$$\underline{I}_N = (0\ +j\ 0) + (4.55\ -j\ 0.91) = 4.55\ -j\ 0.91$$

$$I_R = 19.48\ A \qquad I_S = 18.23\ A \qquad I_T = 19.29\ A \qquad I_N = 4.64\ A$$

b)

$$P_T = 8000 + 1500 + 1000 = 10500\ W$$

$$Q_T = 6000 + 500 + 200 = 6700\ VAr \qquad\qquad Q_C = -\ 6700\ VAr$$

Problema TR11

Cal alimentar una instal.lació formada per 300 bombetes de 220 V i 100 W cada una. Sabent que per cada cable poden passar 7 A/mm²; calculeu les seccions de cable necessàries i la suma de seccions.

a) Si és monofàsic.
b) Si es fa en trifàsic en estrella (amb neutre)
c) Si es fa en trifàsic en triangle

---

a)

$$P = 300\ 100 = 30000\ W \qquad I = \frac{30000}{220} = 136.36\ A$$

En monofàsic calen dos fils

$$A = \frac{136.36}{7} = 19.48\ mm^2 \qquad\qquad \sum A = 2\ 19.48 = 38.96\ mm^2$$

b)

$$P = 30000\ W = \sqrt{3}\ U\ I \qquad I = \frac{30000}{\sqrt{3}\ 380} = 45.58\ A$$

Calen tres fases i neutre

$$A = \frac{45.58}{7} = 6.51\ mm^2 \qquad \sum A = 4\ 6.51 = 26.05\ mm^2$$

c)

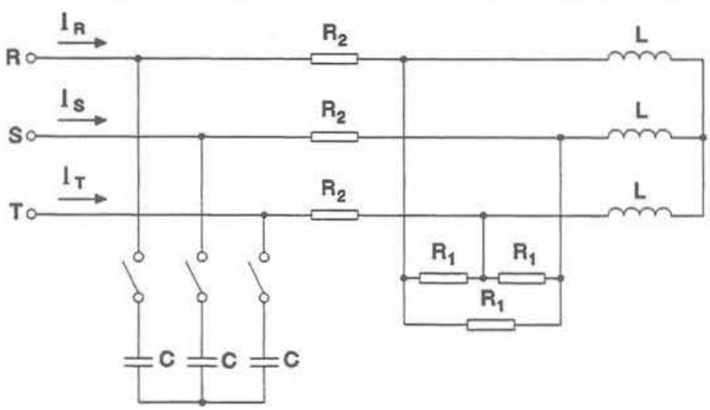
$$P = 30000\ W \qquad I = \frac{30000}{\sqrt{3}\ 220} = 78.73\ A$$

Calen només tres fases

$$A = \frac{78.73}{7} = 11.25\ mm^2 \qquad \sum A = 3\ 11.25 = 33.74\ mm^2$$

Problema TR12

En el circuit de la figura L = 0.2 H, R_1 = 68 Ω, R_2 = 1 Ω, V = 220 V i f = 50 Hz.

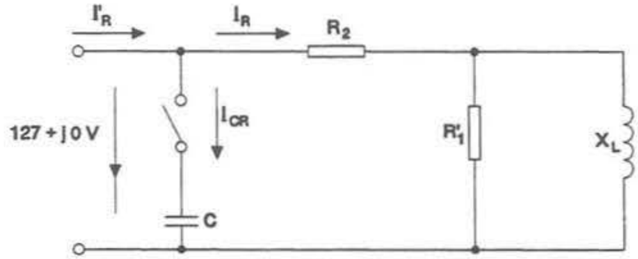


a) Calcular $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ i $\underline{I}_T$
b) Calcular C per tal que Cos φ = 1

a)

$$X_L = 2\ \pi\ 50\ \ 0.2 = 62.83\ \Omega$$

$$R'_1 = \frac{68}{3} = 22.66\ \Omega$$



$$\underline{Z}_{eq} = 1 + \frac{j\ 62.83\ 22.66}{22.66 + j\ 62.83} = 21.06 + j\ 7.24$$

$$\underline{I}_R = \frac{220}{\sqrt{3}\ \underline{Z}_{eq}} = \frac{127 + j\ 0}{21.06 + j\ 7.24} = 5.40 - j\ 1.85$$

$$I_R = 5.71\ A = I_S = I_T$$

$$\underline{I}_S = \underline{I}_R \left(\frac{-1}{2} - j\ \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -4.30 - j\ 3.75 \qquad \underline{I}_T = \underline{I}_R \left(\frac{-1}{2} + j\ \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1.09 + j\ 5.60$$

b)

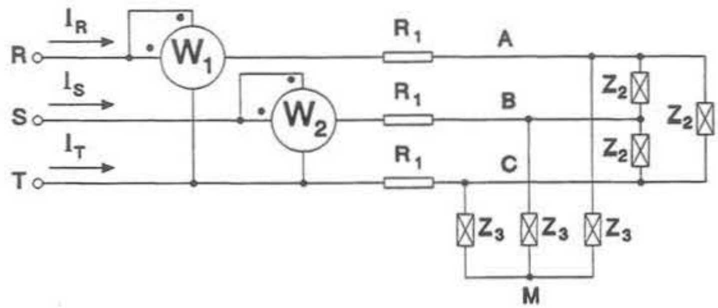
$$\underline{I}_R = 5.40 - j\ 1.85 \qquad \underline{I}'_R = 5.40 \qquad \underline{I}_{CR} = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}}}{-j\ X_C} = j\ 1.85$$

$$X_C = 68.51\ \Omega \qquad X_C = \frac{1}{\omega\ C} \qquad C = \frac{1}{2\ \pi\ 50\ \ 68.51} = 46.46\ \mu F$$

Problema TR13

En el circuit de la figura

$U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = 220\ V$



$R_1 = 2\ \Omega$

$\underline{\underline{Z}}_2 = 36_{|30°}\ \Omega$

$\underline{\underline{Z}}_3 = 30 + j\,20\ \Omega$

Calcular

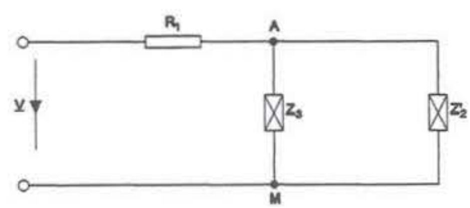
a) $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$
b) $\underline{V}_{AB}$, $\underline{V}_{BC}$, $\underline{V}_{CA}$
c) Valor de les potències activa i reactiva consumides.
d) Lectures de W_1 i W_2.

---

a)

Treiem l'esquema fase-neutre

$$\underline{V} = \frac{220}{\sqrt{3}} + j\,0 \qquad R_1 = 2\ \Omega$$



$$\underline{\underline{Z}}'_2 = \frac{36}{3}{}_{|30°} = 10.39 + j\,6$$

$$\underline{\underline{Z}}_3 = 30 + j\,20 \qquad \underline{\underline{Z}}_p = \frac{(30 + j\,20)\,(10.39 + j\,6)}{(30 + j\,20) + (10.39 + j\,6)} = 7.73 + j\,4.63$$

$$\underline{I}_R = \frac{127 + j\,0}{2 + 7.73 + j\,4.63} = 10.65 - j\,5.07 = 11.79_{|-25.45°}$$

$$\underline{I}_S = 11.79_{|-120-25.45°} = -9.71 - j\,6.69 \qquad \underline{I}_T = 11.79_{|+120-25.45°} = -0.94 + j\,11.75$$

b)

$$\underline{V}_{AM} = \underline{Z}_p \, \underline{I}_R = 105.7 + j\,10.13 = 106.19_{|15.48°}$$

$$\underline{V}_{BM} = 106.19_{|15.48\,-\,120} = -\,44.08 \;\; j\,96.61 \qquad \underline{V}_{CM} = -\,61.63 + j\,86.48$$

$$\underline{V}_{AB} = \underline{V}_{AM} - \underline{V}_{BM} = 149.79 + j\,106.7 \qquad V_{AB} = 184\,V = V_{BC} = V_{CA}$$

$$\underline{V}_{BC} = 17.55 - j\,183.1 \qquad \underline{V}_{CA} = -\,167.34 + j\,76.35$$

c)

$$\underline{S} = 3\,\underline{V}_{RM}\,\underline{I}^*_R = 3\,(127 + j\,0)\,(10.65 - j\,5.07)^* = 4056.75 + j\,1930.32$$

$$P = 4056.75 \; W \qquad Q = 1930.32 \; VAr$$

$$P = W_1 + W_2 = 4056.75 \qquad Q = \sqrt{3}\,(W_1 - W_2) = 1930.32$$

d)

$$W_1 - W_2 = 1114.47 \qquad W_1 = 2585.61 \; W \qquad W_2 = 1471.1 \; W$$

Problema TR14

Una càrrega simètrica s'alimenta d'una xarxa a 380 V 50 Hz consumint 12 kW i 16 kVAr. Si la càrrega està connectada en estrella, calculeu:

a) Corrent de la línia
b) Valor de les impedàncies que formen la càrrega
c) Potència de la bateria de condensadors a connectar en triangle per aconseguir Cos φ = 0.96 (i).
d) Valor de cada condensador.

a)

$$\underline{S} = 12000 + j\,16000 \qquad S = 20000\,VA \qquad Cos\ \varphi = \frac{12000}{20000} = 0.6$$

$$20000 = \sqrt{3}\ 380\ I \qquad I = 30.4\ A$$

b)

$$\underline{I} = 30.4\ (0.6 - j\,0.8)$$

$$\underline{Z} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{\underline{I}} = 7.22\ (0.6 + j\,0.8) = 4.33 + j\,5.78$$

c)

$$P = 12000\ W \qquad Q = 16000\ VAr \qquad S = 20000\ VA$$

$$P' = 12000\ W \qquad S' = \frac{12000}{0.96} = 12500\ VA \qquad Q' = \sqrt{S'^2 - P'^2} = 3500\ VAr$$

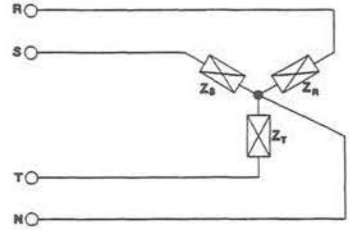
$$Q_C = 16000 - 3500 = 12500\ VAr$$

d)

$$X_C = \frac{380^2}{\frac{12500}{3}} = 34.66\ \Omega \qquad C = \frac{1}{\omega\ X_C} = 91.85\ \mu F$$

Problema TR15

El circuit de la figura s'alimenta amb un sistema trifàsic simètric i equilibrat de tensions. Quant val el corrent pel neutre?



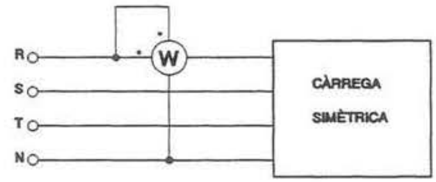
$$\underline{Z}_R = 10 + j\,7\ \Omega \qquad \underline{Z}_S = 10 + j\,7\ \Omega$$

$$\underline{Z}_T = 10 + j\,7\ \Omega$$

Com el sistema i la càrrega són simètrics, el corrent pel neutre serà zero.

Problema TR16

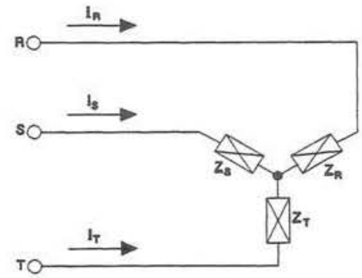
Una càrrega simètrica s'alimenta d'una xarxa de 3 x 380 V, es connecta un wattímetre tal com indica la figura. Sabent que la potència activa consumida és de 30 kW, quina potència indica el wattímetre?



$$P = 30000\ W \qquad W = \frac{P}{3} = \frac{30000}{3} = 10000\ W$$

Problema TR17

Quina potència activa i reactiva consumeix una càrrega com la de la figura si el corrent de línia absorbit és de 10 A?.



$$\underline{Z}_R = \underline{Z}_S = \underline{Z}_T = 4_{\lfloor -45°}\ \Omega \qquad I_R = I_S = I_T = 10\ A$$

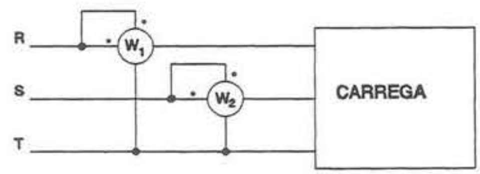
$$Z = 4_{\lfloor -45°} = 2.828 - j\,2.828 \qquad \underline{S} = 3\ Z\ I^2 = 3\ (2.828 - j\,2.828)\ 10^2 = 848.5 - j\,848.5$$

Problema TR18

En el sistema trifàsic de la figura es llegeixen les següents lectures dels wattímetres

$W_1 = 1000\ W \qquad W_2 = 1400\ W$

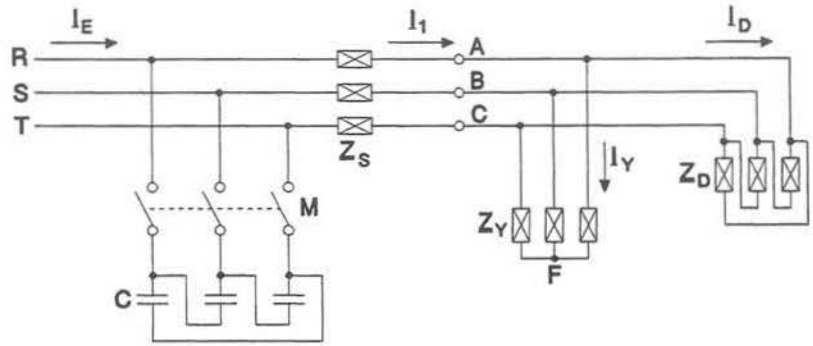
Quant val la potència activa consumida?



$$P = W_1 + W_2 = 2400\ W$$

Problema TR19

En el circuit de la figura la tensió d'alimentació és de 380 V a una freqüència de 50 Hz



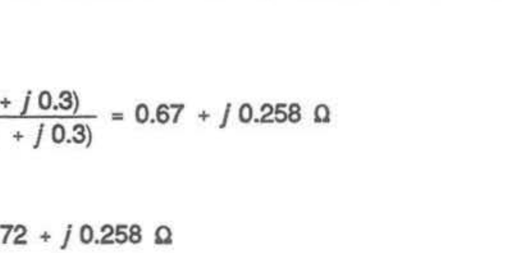
$$\underline{Z}_S = 0.05 + j\,0\ \Omega \qquad \underline{Z}_Y = 2 + j\,1\ \Omega \qquad \underline{Z}_D = 3 + j\,1\ \Omega$$

Calculeu

a) Amb l'interruptor M obert, I_E, I_1, I_Y i I_D
b) Amb l'interruptor M obert, quant valen les tensions V_{AB}, V_{BC} i V_{CA}?
c) Amb l'interruptor M tancat, el valor de C per tal que el conjunt de la instal.lació tingui un factor de potència de 0.98 inductiu
d) Amb l'interruptor M tancat, I_E, I_1, I_Y i I_D
e) Corrent que circularia pel neutre si aquest es connectés a F amb M tancat
f) Corrent que circularia pel neutre si aquest es connectés a F amb M obert

$$\underline{V}_{RG} = \frac{380}{\sqrt{3}} + j\,0\ V$$

$$\underline{Z}'_D = \frac{\underline{Z}_D}{3} = 1 + j\,0.3\ \Omega$$



$$\underline{Z}_P = \frac{\underline{Z}_Y \underline{Z}'_D}{\underline{Z}_Y + \underline{Z}'_D} = \frac{(2 + j\,1)\,(1 + j\,0.3)}{(2 + j\,1) + (1 + j\,0.3)} = 0.67 + j\,0.258\ \Omega$$

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_P + \underline{Z}_S = 0.72 + j\,0.258\ \Omega$$

a)

$$\underline{I}_E = \underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_{RG}}{\underline{Z}_T} = 270 - j\,96.7 \qquad I_E = I_1 = 287\ A$$

$$\underline{V}_{AG} = \underline{I}_1\,\underline{Z}_P = 205.9 + j\,4.83 \qquad V_{AG} = 205.9\ V$$

$$\underline{I}_Y = \frac{\underline{V}_{AG}}{\underline{Z}_Y} = 83.3 - j\,39.24 \qquad I_Y = 92\ A$$

$$\underline{I}_D = \frac{\underline{V}_{AG}}{\underline{Z}'_D} = 187.8 - j\,57.4 \qquad I_D = 195.4\ A$$

b)

$$V_{AB} = V_{BC} = V_{CA} = \sqrt{3}\ V_{AG} = 356.7\ V$$

c)

La $\underline{I}_1$ no varia. La $\underline{I}_E$ ha de valer

$$\underline{I}_E = I_E\,(0.98 - j\,0.20) \qquad \underline{I}_1 = 270 - j\,96.7 \qquad \underline{I}_C = I_C\,(0 + j\,1)$$

$$\underline{I}_E = \underline{I}_1 + \underline{I}_C \qquad 0.98\ I_E = 270 \qquad I_E = 275.6\ A$$

$$0.20\ I_E = 96.7 - I_C \qquad I_C = 41.8\ A$$

$$X'_C = \frac{V_{RG}}{I_C} = 5.3\ \Omega \qquad X_C = 3\ X'_C = 15.7\ \Omega \qquad C = \frac{1}{2\,\pi\,f\,X_C} = 202\ \mu F$$

d)

$$\underline{I}_E = 275.6\ (0.98 - j\,0.20) = 270 - j\,54.8 \qquad I_E = 275.6 A$$

$$\underline{I}_1 = 270 - j\,96.7 \qquad I_1 = 287\ A$$

$$\underline{I}_Y = 83.3 - j\,39.24 \qquad I_Y = 92\ A$$

$$\underline{I}_D = 187.8 - j\,57.4 \qquad I_D = 195.4\ A$$

e)

$$I_{FM} = 0$$

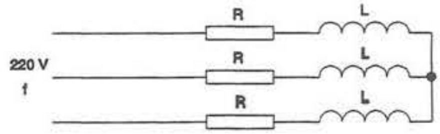
f)

$$I_{FM} = 0$$

Problema TR20

Una càrrega trifàsica com la de la figura s'alimenta amb un sistema equilibrat de tensions a tensió composta constant de 220 V i freqüència variable.

$$R = 100\ \Omega \qquad L = 0.2\ H$$

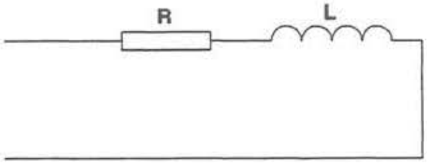


Determineu l'expressió que dóna la potència dissipada en funció de la freqüència de la xarxa, P(f).

Quant val, per als casos f = 50 Hz i f = 400 Hz.

$$X_L = \omega\, L = 2\,\pi\, f\, L = 2\,\pi\, 0.2\, f = 0.4\,\pi\, f$$

Esquema equivalent fase-neutre



$$I = \frac{\dfrac{220}{\sqrt{3}}}{\sqrt{100^2 + (0.4\,\pi\, f)^2}}$$

Potència dissipada per branca

$$P_1 = R\, I^2$$

Potència dissipada total

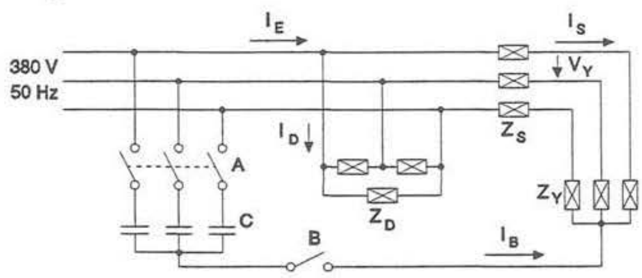
$$P_{tot} = 3\ R\ I^2 = 3\ 100 = \frac{\left(\frac{220}{\sqrt{3}}\right)^2}{100^2 + (0.4\ \pi\ f)^2} = \frac{484\ 10^4}{10000 + 0.16\ \pi^2\ f^2}$$

$$f = 50\ Hz \qquad P(50) = 347\ W$$

$$f = 400\ Hz \qquad P(400) = 18.43\ W$$

Problema TR21

Del circuit de la figura es demana



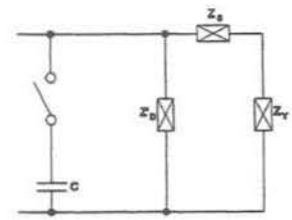
Amb A i B oberts

a) Els corrents I_E, I_D, I_S
b) La tensió V_Y
c) Potències activa i reactiva totals consumides i factor de potència del conjunt.

Es tanquen els interruptors A i B

d) Corrent I_B
e) Valor dels condensadors C per tal que el factor de potència del conjunt sigui de 0.96 inductiu

Interruptors A i B oberts, esquema equivalent fase-neutre



$$\underline{Z}'_D = \frac{Z_D}{3} = \frac{3 + j\,1}{3} = 1 + j\,0.333\ \Omega$$

Fasor de referència

$$\underline{V} = \frac{380}{\sqrt{3}}\,\underline{|0°}\ V$$

a)

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_S + \underline{Z}_Y} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{1.4 + j\,1} = 103.77 - j74.12A = 127.52_{\underline{|-35.54°}}\,A \qquad I_S = 127.52\ A$$

$$\underline{I}_D = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}'_D} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{1 + j\,0.333} = 197.45 - j\,65.82\ A = 208.13_{\underline{|-18.43°}}\,A \qquad I_D = 208.13\ A$$

$$\underline{I}_E = \underline{I}_S + \underline{I}_D = 301.22 - j\,139.94\ A = 332.14_{\underline{|-24.92°}}\,A \qquad I_E = 332.14A$$

b)

$$V_Y = \sqrt{3}\ Z_Y\,I_S = \sqrt{3}\ \sqrt{1.2^2 + 0.9^2}\ 127.52 = 331.3\ V$$

c)

$$P = \sqrt{3}\ V\,I_E\ Cos\ \varphi_E = \sqrt{3}\ 380\ 332.14\ Cos\ (24.92°) = 198.3\ kW$$

$$Q = \sqrt{3}\ V\,I_E\ Sin\ \varphi_E = \sqrt{3}\ 380\ 332.14\ Sin\ (24.92°) = 92.1\ kVAr$$

$$S = \sqrt{3}\ V\,I_E = \sqrt{3}\ 380\ 332.14 = 218.6\ kVA$$

$$\text{f.d.p.} = Cos\ \varphi_E = \frac{P}{S} = \frac{198.3}{218.6} = 0.91$$

d)

En ésser les càrregues ($\underline{Z}_Y$ i els condensadors) simètriques i alimentar-se amb un sistema de tensions simètric, els centres d'estrella d'ambdues estan al mateix potencial i, per tant, $I_B = 0$

e)

$$Cos\ \varphi' = 0.96 \Rightarrow S' = \frac{P}{0.96} = 206.5\ kVA$$

$$Q' = \sqrt{S'^2 - P^2} = 57.83\ kVAr$$

$$Q_C = Q - Q' = 92.1 - 57.83 = 34.28\ kVAr$$

Cada condensador aporta $\frac{34.28}{3} = 11.43\ kVAr$ i suporta una tensió $\frac{380}{\sqrt{3}}$ per tant

$$11430 = \frac{V^2}{X_C} \Rightarrow X_C = \frac{\left(\frac{380}{\sqrt{3}}\right)^2}{11430} = 4.21\ \Omega$$

$$C = \frac{1}{\omega\ X_C} = \frac{1}{2\ \pi\ 50\ 4.21} = 755.6\ \mu F$$