

POLITEXT

Salvador Cardona Foix
Daniel Clos Costa

Teoría de máquinas

EDICIONS UPC

Teoría de máquinas

POLITEXT

Salvador Cardona Foix
Daniel Clos Costa

Teoría de máquinas

EDICIONS UPC

Primera edición: febrero de 2001
Segunda edición: septiembre de 2008
Reimpresión: abril de 2011

Diseño de la cubierta: Manuel Andreu

- © Los autores, 2001
- © De la traducción: Guillermo Reyes, 2000
- © Edicions UPC, 2001
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31,
Edifici Torre Girona, D-203, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Depósito legal: B-32238-2008
ISBN: * () !) % *)) ! ! \$) ! !)

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley. Si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de la misma, dirijase al Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO, <<http://www.cedro.org>>).

Presentación

Este texto, escrito inicialmente para ser utilizado en la asignatura *Teoría de máquinas* de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona (ETSEIB) de la Universidad Politécnica de Cataluña, hace de puente entre la mecánica vectorial y el cálculo y diseño de máquinas. Este espacio no lo cubren los textos clásicos, que parten de unos conocimientos de mecánica muy elementales y no introducen las herramientas analíticas adecuadas para el estudio de los sistemas multisólido. Otros textos, dirigidos a la simulación de sistemas mecánicos, no son adecuados como libros de texto para asignaturas introductorias a la teoría de máquinas y mecanismos.

En el desarrollo que se ha hecho de los diferentes temas se presuponen conocimientos previos de la cinemática del sólido rígido y de los teoremas vectoriales y de la energía aplicados al sólido rígido. Los temas se tratan de manera que el texto pueda ser utilizado como libro de consulta más allá del ámbito de una asignatura de teoría de máquinas. Si se seleccionan los ejemplos de trabajo y se aligera el contenido conceptual de algunos puntos, sobre todo de los que se presentan en los anexos, este libro puede ser utilizado también en una escuela de ingeniería técnica.

El contenido del texto se inicia con un capítulo, *Máquina y mecanismo*, en el cual se introducen los elementos y conceptos propios de la teoría de máquinas y mecanismos. En los capítulos 2, *Movilidad*, y 3, *Cinemática de mecanismos*, se presenta el estudio general de la cinemática de sistemas mecánicos y se hace énfasis en el movimiento plano. Este estudio se presenta tanto desde un enfoque vectorial, destinado principalmente al estudio del movimiento plano, como desde un punto de vista analítico, a partir de las coordenadas generalizadas que describen la configuración del sistema. El capítulo 4, *Mecanismos leva-palpador*, se destina al análisis de los pares superiores. También se estudia el diseño de funciones de desplazamiento mediante curvas de Bézier no paramétricas para obtener perfiles de levas. La cinemática de los *engranajes* se trata de manera monográfica en el capítulo 5.

Los cuatro capítulos siguientes se centran en el estudio de la dinámica desde diferentes puntos de vista. En el capítulo 6, *Análisis dinámico*, se introduce la utilización de los teoremas vectoriales en el estudio dinámico de los sistemas mecánicos multisólido y se hace una introducción al equilibrado de mecanismos. La importancia que tienen las resistencias pasivas en el funcionamiento de las máquinas hace que se dedique el capítulo 7, *Resistencias pasivas y mecanismos basados en el rozamiento*, a su estudio. Este capítulo incluye una introducción a los principales mecanismos que basan su funcionamiento en el rozamiento. El capítulo 8 se destina al *método de las potencias virtuales*, teniendo en cuenta su utilidad para la obtención selectiva de fuerzas y ecuaciones del movimiento en los sistemas mecánicos. La energía, que aparece en todos los ámbitos de la física, es objeto de estudio

en el capítulo 9, *Trabajo y potencia en máquinas*, para analizar la transformación de energía en las máquinas y el intercambio con su entorno.

En la elaboración de este texto se ha utilizado material preparado con la colaboración de profesorado con experiencia docente e investigadora en los temas que se tratan. Esta experiencia es el resultado de la impartición de las asignaturas de mecánica y teoría de máquinas, la dirección de proyectos de fin de carrera y el desarrollo de actividades de tercer ciclo, como son las asignaturas de simulación de sistemas mecánicos y de introducción al diseño geométrico asistido por ordenador.

La primera versión de unos apuntes para la asignatura de teoría de máquinas fue escrita para el curso 1996-1997 y coordinada por Salvador Cardona. Intervinieron, aparte de los autores, los profesores Jordi Martínez, en los capítulos 6 y 8, Javier Sánchez-Reyes, en los capítulos 4 y 5, y la profesora M^a. Antonia de los Santos, en los capítulos 1, 3 y 7.

Al inicio del curso 1997-1998, se realizó una segunda versión de los apuntes ampliada y revisada por los autores, que incorporaron cambios que, sin afectar los contenidos básicos, los pulieran. Así, en el cuerpo se introdujeron algunas modificaciones y algunos ejemplos nuevos y, en lo referente a los ejercicios propuestos, se introdujeron enunciados nuevos y la mayoría de las soluciones.

Durante los cursos 1997-1998 y 1998-1999 se ha utilizado esta nueva versión, al mismo tiempo que se ha hecho un análisis crítico del contenido y de la ordenación de los temas y se han resuelto todos los ejemplos propuestos. En esta tarea han colaborado los profesores Joan Puig y Eduard Fernández-Díaz.

Tomando como material de base esta versión de los apuntes y toda la información recogida, a principio del curso 1999-2000 se inicia la estructuración del libro que ahora presentamos. En esta última etapa, colabora la profesora Lluïsa Jordi, que revisa el formato final.

Queremos manifestar nuestro agradecimiento a todos aquellos, familiares y compañeros, que de una manera u otra nos han ayudado durante la realización de este libro, en particular, a todas las personas mencionadas.

Segunda edición. Desde el año 2000 este libro ha pasado por manos de muchos profesores y alumnos, entre todos lo hemos analizado a fondo y estamos convencidos de su vigencia. El hecho de utilizarse como herramienta diaria durante tanto tiempo ha permitido detectar y corregir pequeños detalles.

En el marco de la nueva ordenación de estudios en el territorio español continua siendo un libro válido; ya sea aligerando su contenido conceptual para estudios de grado cercanos a la Ingeniería Mecánica, profundizando en los detalles en un máster o tal cual para grados de Ingeniería Mecánica o Industrial.

Barcelona, mayo de 2008

Salvador Cardona

Daniel Clos

Índice

1 Máquina y mecanismo

1.1	Máquinas y mecanismos. Definiciones	13
1.2	Clasificación de pares cinemáticos	15
1.3	Clasificación de miembros	18
1.4	Esquematación. Modelización	18
1.5	Mecanismos de barras	21
1.6	Mecanismos de levas	22
1.7	Engranajes y trenes de engranajes	24
1.8	Prestaciones de un mecanismo	24
Anexo 1.I	Representación simbólica de elementos	26
Problemas	30

2 Movilidad

2.1	Coordenadas y velocidades generalizadas. Grados de libertad de un mecanismo	33
2.2	Ecuaciones de enlace. Holonomía	35
2.3	Determinación del número de coordenadas independientes	38
2.4	Determinación del número de grados de libertad	39
2.5	Redundancia total. Redundancia tangente	41
2.6	Espacio de configuraciones. Subespacio de configuraciones accesibles	43
2.7	Resolución de las ecuaciones de enlace geométricas. Método de Newton-Raphson	44
2.8	Configuraciones singulares	45
Anexo 2.I	Geometría de triángulos y cuadriláteros	47
Anexo 2.II	Orientación y velocidad angular de un sólido rígido	50
Problemas	54

3 Cinemática de mecanismos

3.1	Estudio cinemático de los mecanismos a partir de las ecuaciones de enlace geométricas	61
3.2	Redundancia y configuraciones singulares	65
3.3	Estudio cinemático de los mecanismos a partir de las ecuaciones de enlace cinemáticas	66

3.4	Movimiento plano	69
Anexo 3.I	Utilización de los números complejos para representar los vectores en cinemática plana	75
Anexo 3.II	Síntesis de mecanismos	76
Anexo 3.III	Determinación de mecanismos cognados	78
Anexo 3.IV	Cinemática gráfica	80
Problemas	82

4 Mecanismos leva-palpador

4.1	Análisis del mecanismo leva-palpador	89
4.2	Ejemplos de análisis de levas con palpador de translación, conocida la ley de desplazamiento	96
4.3	Especificación de una ley de desplazamiento	97
4.4	Obtención del perfil de la leva, conocidos la curva de desplazamiento y el palpador	99
4.5	Características geométricas del perfil de la leva	104
Anexo 4.I	Curvas de Bézier no paramétricas	107
Problemas	115

5 Engranajes

5.1	Transmisión de la rotación entre ejes	121
5.2	Perfiles conjugados	124
5.3	Dentado de los engranajes	125
5.4	Perfil de evolvente	128
5.5	Trenes de engranajes	130
Problemas	136

6 Análisis dinámico

6.1	Teoremas vectoriales	139
6.2	Aplicación de los teoremas vectoriales al planteamiento de la dinámica de mecanismos ...	142
6.3	Torsor de las fuerzas de inercia de d'Alembert	145
6.4	Equilibrado de mecanismos	145
Anexo 6.I	Planteamiento global del análisis dinámico mediante los teoremas vectoriales	148
Anexo 6.II	Aspectos a considerar en el caso de mecanismos con movimiento plano	150
Anexo 6.III	Torsor de las fuerzas de inercia de d'Alembert	151
Anexo 6.IV	Métodos de equilibrado	152
Problemas	159

7 Resistencias pasivas. Mecanismos basados en el rozamiento

7.1	Resistencia al deslizamiento	166
-----	------------------------------------	-----

7.2	Resistencia al pivotamiento y a la rodadura	169
7.3	Acuñamiento. Cono de rozamiento	170
7.4	Contacto multipuntual	172
7.5	Mecanismos basados en el rozamiento	177
Anexo 7.I	Rozamiento en los pares helicoidales	182
Problemas	185

8 Método de las potencias virtuales

8.1	Fundamentos del método	193
8.2	Tipos de movimientos virtuales	195
8.3	Potencia asociada a un torsor de fuerzas sobre un sólido rígido	198
8.4	Cálculo de la potencia virtual en casos concretos	200
8.5	Ejemplo de aplicación	201
8.6	Fuerzas generalizadas	204
Anexo 8.I	Planteamiento global del método de las potencias virtuales	206
Problemas	208

9 Trabajo y potencia en máquinas

9.1	Teorema de la energía	213
9.2	Principio de conservación de la energía	215
9.3	Versión diferencial del teorema de la energía	217
9.4	Rendimiento	218
9.5	Inercia y fuerza reducidas a una coordenada	220
9.6	Régimen de funcionamiento de las máquinas. Grado de irregularidad	223
9.7	Volantes	224
9.8	Curvas características velocidad-fuerza de las máquinas	226
Problemas	228

Resultados de los problemas	235
------------------------------------	-------	-----

Bibliografía	247
---------------------	-------	-----

Índice alfabético	249
--------------------------	-------	-----

1 Máquina y mecanismo

La teoría de máquinas y mecanismos (TMM) es una ciencia aplicada que trata de las relaciones entre la geometría y el movimiento de los elementos de una máquina o un mecanismo, de las fuerzas que intervienen en estos movimientos y de la energía asociada a su funcionamiento.

Los conocimientos de mecánica constituyen la base para el estudio de los mecanismos y las máquinas.

En el ámbito de la teoría de máquinas y mecanismos se diferencian el análisis y la síntesis de mecanismos. El análisis consiste en estudiar la cinemática y la dinámica de un mecanismo según las características de los elementos que lo constituyen. Por tanto, el análisis de un mecanismo permitirá, por ejemplo, determinar la trayectoria de un punto de una barra o una relación de velocidades entre dos miembros. Inversamente, la síntesis consiste en escoger y dimensionar un mecanismo que cumpla o que tienda a cumplir, con un cierto grado de aproximación, unas exigencias de diseño dadas. Así, por ejemplo, en un diseño se habrá de emprender la determinación de un mecanismo –síntesis– que permita guiar un sólido para pasar de una configuración a otra.

Este curso estará dedicado fundamentalmente al análisis de mecanismos.

1.1 Máquinas y mecanismos. Definiciones

En este apartado se presentan algunas definiciones de conceptos que aparecen en la TMM.

Máquina. Sistema concebido para realizar una tarea determinada que comporta la presencia de fuerzas y movimientos y, en principio, la realización de trabajo.

Mecanismo. Conjunto de elementos mecánicos que hacen una función determinada en una máquina. El conjunto de las funciones de los mecanismos de una máquina ha de ser el necesario para que ésta realice la tarea encomendada. Así, por ejemplo, en una máquina lavadora hay, entre otros, los mecanismos encargados de abrir las válvulas de admisión del agua y el mecanismo que hace girar el tambor. Cada uno de ellos tiene una función concreta y el conjunto de las funciones de todos los mecanismos de la lavadora permite que la máquina realice la tarea de lavar ropa.

Grupo o unidad. Conjunto diferenciado de elementos de una máquina. Así, el conjunto de elementos implicados en la tracción de un automóvil es el grupo tractor. A veces, *grupo* se utiliza como sinónimo de máquina; por ejemplo, un grupo electrógeno es una máquina de hacer electricidad.

Elemento. Toda entidad constitutiva de una máquina o mecanismo que se considera una unidad. Son ejemplos de elementos un pistón, una biela, un rodamiento, una rótula, un muelle, el aceite de un circuito hidráulico, etc.

Miembro. Elemento material de una máquina o mecanismo que puede ser sólido rígido, sólido flexible o fluido. En la contabilización de los miembros de un mecanismo no se debe olvidar, si existe, el miembro fijo a la referencia de estudio, que recibe diferentes nombres según el contexto: base, soporte, bancada, bastidor, etc.

Cadena cinemática (Fig. 1.1). Conjunto o subconjunto de miembros de un mecanismo enlazados entre sí. Por ejemplo, la cadena de transmisión de un vehículo, el mecanismo pistón-biela-manivela, etc. Los miembros de una cadena cinemática se denominan *eslabones*.

- *Cadena cerrada o anillo.* Cadena cinemática tal que cada uno sus miembros está enlazado nada más con dos miembros de la misma cadena.
- *Cadena abierta.* Cadena cinemática que no tiene ningún anillo.

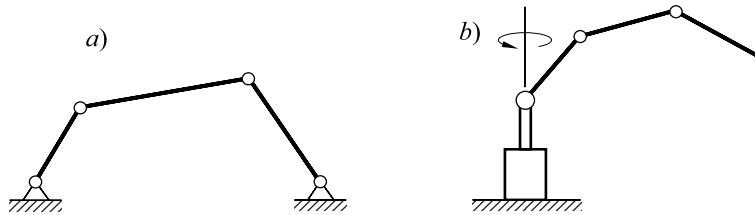


Fig. 1.1 Cadena cinemática cerrada a) y abierta b)

Inversión de una cadena cinemática (Fig. 1.2). Transformación de un mecanismo en otro por medio de la elección de diferentes miembros de la cadena como elemento fijo a la referencia. En todos los mecanismos obtenidos por inversión de una misma cadena cinemática los movimientos relativos son evidentemente los mismos, hecho que facilita el estudio.

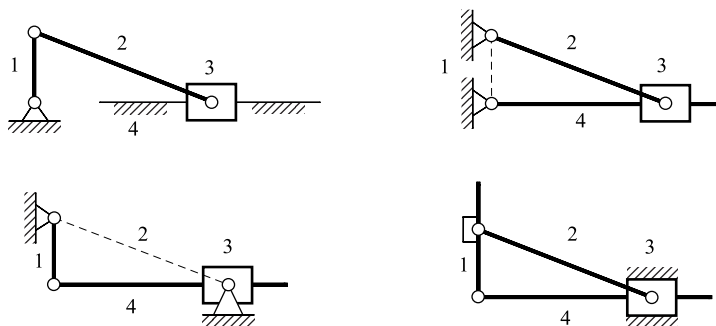


Fig. 1.2 Las cuatro inversiones del mecanismo pistón-biela-manivela

Restricción o enlace. Condición impuesta a la configuración –condición de enlace geométrica– o al movimiento del mecanismo –condición de enlace cinemática. En estas condiciones puede aparecer el tiempo explícitamente o no.

Par cinemático. Enlace entre dos miembros de un mecanismo causado por el contacto directo entre ellos y que puede ser puntual, según una recta o según una superficie. En la materialización del enlace pueden participar sólidos auxiliares de enlace (SAE); por ejemplo, las bolas en una articulación con rodamiento.

Junta. Ligadura entre dos miembros de un mecanismo que se realiza mediante elementos intermedios, como puede ser una junta elástica, una junta universal, etc.

Carga. Conjunto de fuerzas conocidas, función del estado mecánico y/o explícitamente del tiempo, que actúan sobre los miembros del mecanismo. Las cargas pueden ser muy diversas: el peso, la sustentación de un ala de avión, la fuerza de corte de una máquina herramienta, etc.

1.2 Clasificación de pares cinemáticos

Los pares cinemáticos se clasifican por el tipo de contacto entre miembros: puntual, lineal o superficial. Tradicionalmente los pares cinemáticos con contacto superficial se denominan *pares inferiores* y los otros *pares superiores*.

Pares superficiales o pares inferiores. La materialización de estos pares implica el deslizamiento entre las superficies de ambos miembros. Si no hay deslizamiento, mantener tres puntos o más no alineados en contacto equivale a una unión rígida.

Par cilíndrico (C). Las superficies en contacto son cilíndricas de revolución, de manera que permitan dos movimientos independientes entre los miembros, uno de translación a lo largo de un eje común a ambos miembros y uno de rotación alrededor del mismo eje. Por lo tanto, permite dos grados de libertad de un miembro respecto del otro. Si predomina el movimiento de rotación, el elemento interior del par se denomina *pivote* y el exterior *cojinete*. En caso de que el movimiento predominante sea la translación, el elemento más largo se denomina *guía* y el más corto *corredera*.

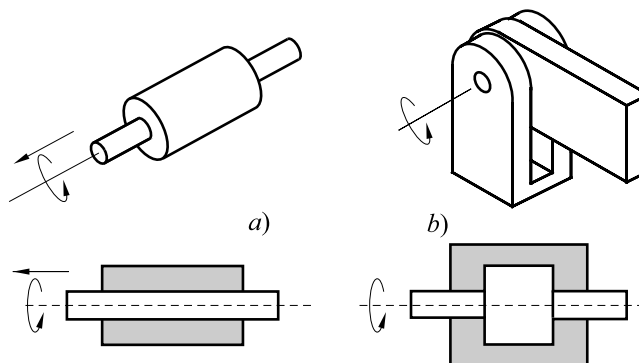


Fig. 1.3 Par cilíndrico a) y par de revolución b)

Par de revolución o articulación (R). Las superficies de contacto son de revolución excluyendo las totalmente cilíndricas, de manera que permiten únicamente la rotación de un miembro respecto al otro

alrededor de un eje común. Por tanto, deja un grado de libertad relativo entre los miembros. Usualmente el elemento interior del par se denomina *pivote*, *muñón* o *espiga* y el exterior *cojinete*.

Par prismático (P). Las superficies en contacto son prismáticas, de manera que permiten sólo una translación relativa entre los miembros a lo largo de un eje común. Por tanto, permite un grado de libertad relativo entre los miembros. Usualmente el miembro más largo del par se denomina *guía* y el más corto *corredera*.

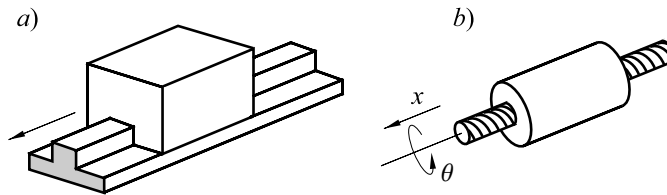


Fig. 1.4 Par prismático a) y par helicoidal b)

Par helicoidal (H). Las superficies de contacto son helicoidales, de manera que permiten entre los dos miembros un movimiento de translación y uno de rotación relacionados linealmente. Deja sólo un grado de libertad relativo entre los miembros. La relación lineal se puede establecer como $x = p \theta / 2 \pi$, donde p es el paso de rosca, x es el desplazamiento y θ el ángulo girado. El miembro que tiene la superficie de contacto exterior –rosca exterior– se denomina *tornillo* o *barra roscada* y el que tiene la superficie de contacto interior –rosca interior– *tuerca*.

Par esférico (S). Las superficies de contacto son esféricas, de manera que permiten una rotación arbitraria de un miembro respecto del otro manteniendo un punto común, el centro de las superficies en contacto. Se denomina también *rótula esférica*. Deja tres grados de libertad relativos entre los miembros.

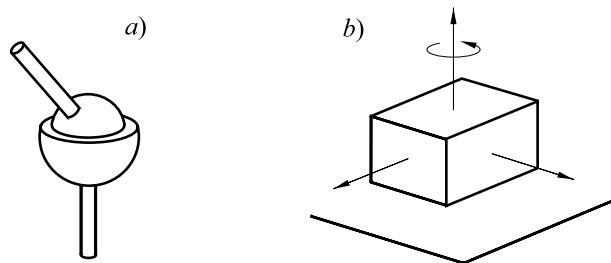


Fig. 1.5 Par esférico a) y par plano b)

Par plano (P_I). Las superficies de contacto son planas, de manera que permiten dos translaciones y una rotación alrededor de una dirección perpendicular al plano de contacto de un miembro respecto al otro, las tres independientes entre ellas. Por lo tanto, deja tres grados de libertad relativos entre los miembros.

Pares puntuales y lineales o pares superiores. En estos pares, el contacto se establece a través de un único punto o de una generatriz recta en superficies regladas. Estos contactos pueden ser con deslizamiento y sin él.

El contacto puntual se puede establecer entre:

- *Un mismo punto de un miembro y un mismo punto del otro miembro.* Este enlace tiene poco interés práctico (sólo para ejes muy ligeros acabados en punta apoyada en un soporte cónico) y es equivalente a una rótula para al movimiento en el espacio y a una articulación para el movimiento plano.
- *Un mismo punto de un miembro y un punto de una curva fija al otro miembro.* En este caso, el punto se puede materializar con un pasador o botón y la curva con una ranura, y se obtiene el par pasador-guía o botón-guía.
- *Un mismo punto de un miembro y un punto de una superficie fija al otro miembro.*
- *Puntos variables de cada uno de los sólidos.* En este caso, y también cuando el contacto se establece entre generatrices variables, el movimiento relativo se denomina *rodadura*. Son ejemplos de rodadura el de una rueda respecto al suelo o el de una bola de cojinete respecto a la pista.

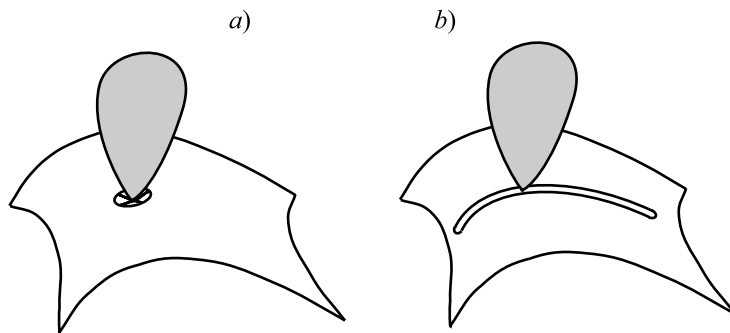


Fig. 1.6 Contacto punto-punto a) y contacto punto-curva b)

En un planteamiento bidimensional de la cinemática, los pares que se pueden presentar son solamente el de revolución o articulación, el prismático, el contacto a lo largo de una generatriz, que a efectos cinemáticos equivale al contacto puntual entre curvas planas, y los contactos punto-punto y punto-curva.

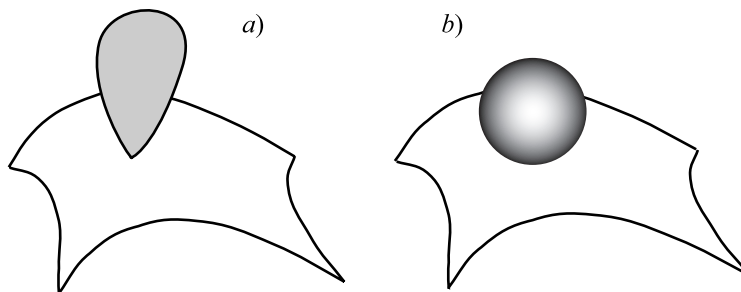


Fig. 1.7 Contacto punto-superficie a) y contacto entre puntos variables de cada uno de los sólidos –rodadura– b)

1.3 Clasificación de miembros

Los miembros se clasifican según diversos criterios. Atendiendo al comportamiento del material, pueden ser rígidos, elásticos o fluidos. Si se presta atención a sus características inerciales, pueden ser de inercia negligible o no.

Otra clasificación de los miembros se puede realizar según el número de pares a los cuales se encuentran ligados. Así se dice que un miembro es binario, terciario, etc., cuando está ligado con dos pares, tres pares, etc.

Los miembros también se pueden clasificar según el tipo de movimiento. Así, un miembro con un punto articulado fijo se denomina *manivela* si puede dar vueltas enteras y *balancín* si solamente puede oscilar. Si el miembro no tiene ningún punto articulado fijo, recibe el nombre de *biela* o *acoplador*.

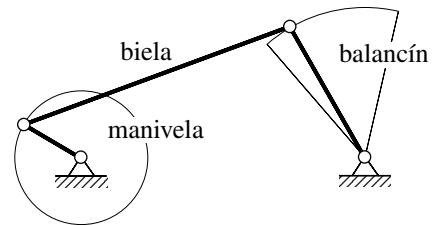


Fig. 1.8 Cuadrilátero articulado con la nomenclatura de sus miembros

1.4 Esquemización. Modelización

A la hora de hacer el estudio de un mecanismo, conviene primero hacer una representación que incluya las características suficientes para realizar el estudio que se quiere hacer y obviar el resto. Esta representación se denomina *esquema* o *representación esquemática*.

En función de la información que se quiera obtener o del estudio concreto que se quiera realizar, se hará un esquema u otro:

- Si la información que se quiere representar es únicamente la de las relaciones o conexiones que hay entre los diferentes grupos o unidades que forman una máquina, se puede hacer un diagrama de bloques.
- Para estudiar las posibilidades de movimiento de un mecanismo, hace falta hacer un esquema de símbolos que ha de incluir una representación de cada miembro y una de cada par cinemático. En el anexo 1.I se presenta una colección de los símbolos normalizados de diferentes elementos y pares cinemáticos que se pueden emplear en la esquematización de mecanismos.
- Si el estudio que se quiere realizar es geométrico o cinemático, es necesario añadir al esquema de símbolos la localización de los pares respecto a cada miembro: distancia entre puntos –por ejemplo, entre centros de articulaciones– y ángulos entre direcciones –por ejemplo, entre la dirección definida por dos articulaciones y la de una guía de un par prismático.
- Si el estudio es dinámico, se han de incluir, además, las características inerciales de los elementos, así como también las cargas que actúan.

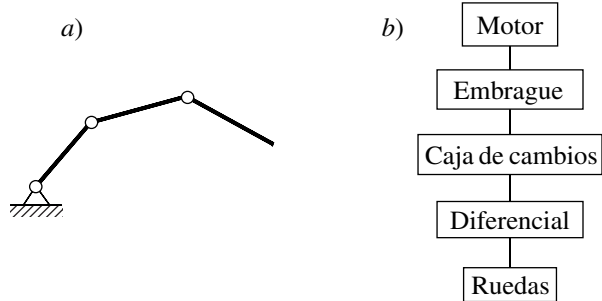


Fig. 1.9 Ejemplos de esquematizaciones: a) esquema de símbolos de un robot y b) esquema de bloques de la cadena de transmisión de un vehículo

Para hacer el esquema de símbolos de un mecanismo se puede proceder de la manera siguiente:

- Identificar los miembros y pares cinemáticos sobre el mecanismo real, la maqueta, la fotografía o el dibujo de que se disponga.
- Situar los símbolos de los pares en un dibujo, de manera que su disposición espacial se aproxime a la real, y unir mediante segmentos –barras– o superficies poligonales los que pertenecen a un mismo miembro (Fig. 1.10). Algunas veces, si la complicación del mecanismo lo requiere, se pueden esquematizar primero cada uno de los miembros por separado –con los pares cinemáticos que contienen– y juntarlos posteriormente en otro dibujo. En todo caso, hace falta obtener un dibujo comprensible y puede ser necesario a veces partir el esquema y utilizar la misma identificación para los miembros y enlaces compartidos (Fig. 1.11).

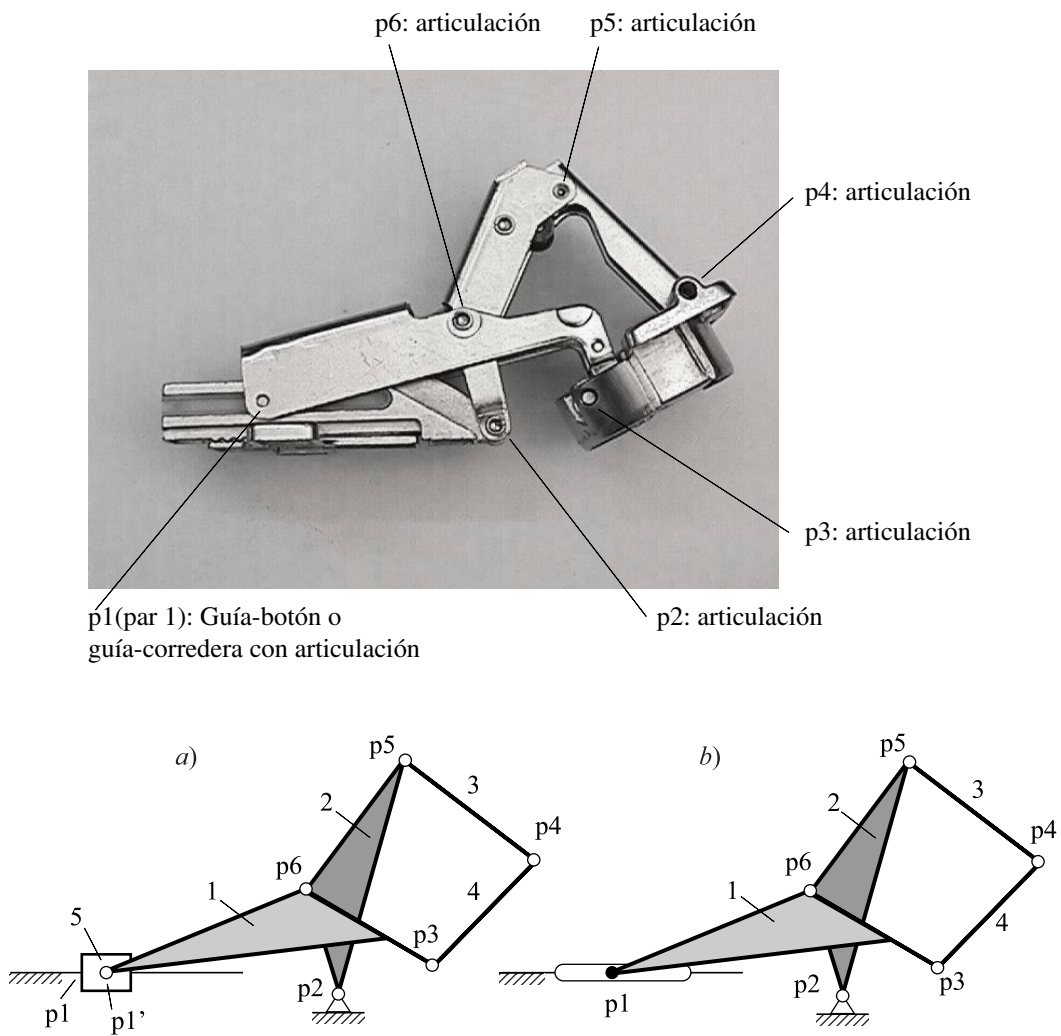


Fig. 1.10 Bisagra y esquemas de símbolos. a) Utilizando una corredera con articulación y b) utilizando un par pasador-guía

En los mecanismos con movimiento plano, es necesario hacer coincidir el plano del dibujo con el del movimiento, y dibujar todos los miembros en un mismo plano, aunque realmente estén en planos paralelos (Fig. 1.11). De otra manera, la representación se complica innecesariamente. Se ha de tener presente, sin embargo, que esta representación plana de los mecanismos no es adecuada para hacer su estudio dinámico completo, tal como se explica en el anexo 6.II.

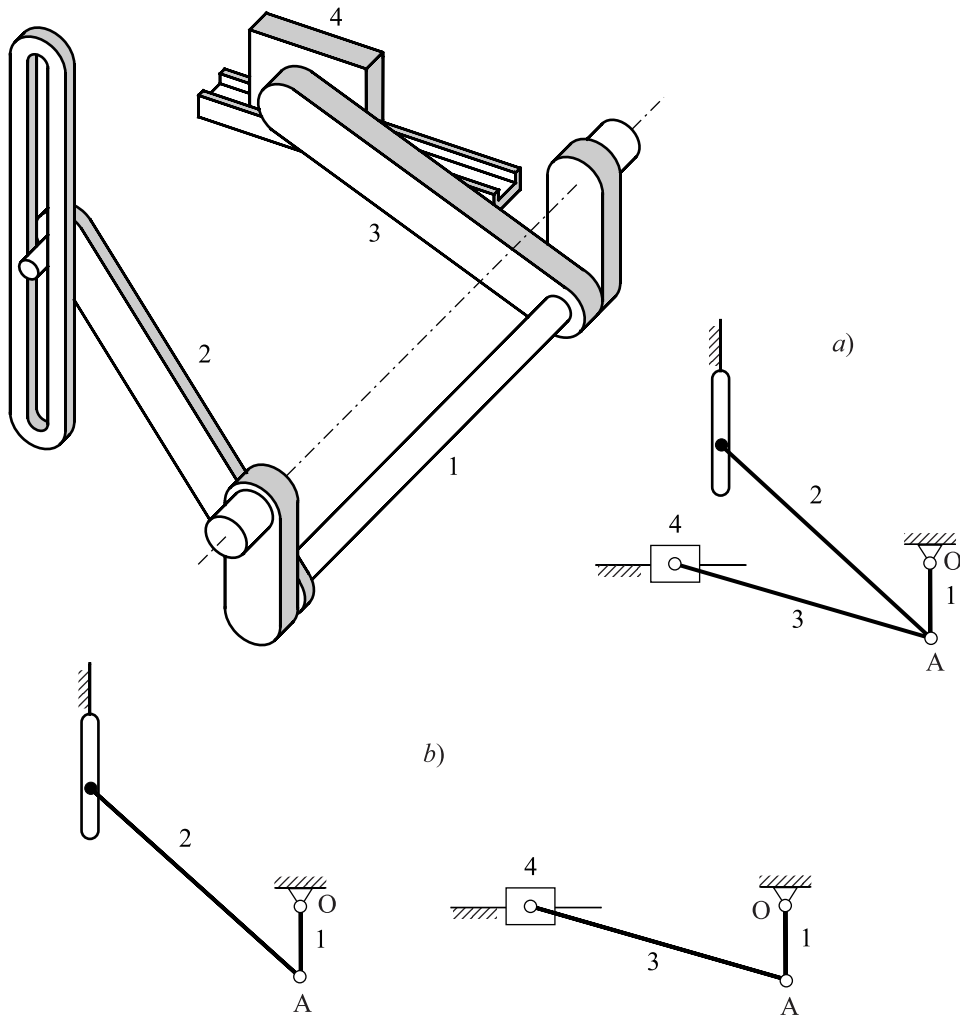


Fig. 1.11 Mecanismo de barras y su esquema de símbolos, completo a) y partido en dos b)

Así mismo, para hacer el estudio de un mecanismo hace falta establecer el modelo global que ha de describir el comportamiento físico y que tiene en cuenta la representación –matemática– de las diversas realidades físicas que intervienen –rozamiento seco de Coulomb, sólido rígido, etc.–, de manera que la *modelización* se puede definir como aquel proceso en el cual se establece una representación matemática del comportamiento físico del mecanismo a fin de obtener una descripción cuantificable.

1.5 Mecanismos de barras

Los mecanismos más simples son los que se pueden esquematizar mediante barras con pares inferiores. Estos mecanismos se utilizan tanto para generar trayectorias de puntos concretos de las bielas o acopladores –que reciben el nombre de *curvas de acoplador*– como para guiar y relacionar el movimiento de diversos miembros. Dos mecanismos de barras se denominan cognados si pueden generar una misma curva de acoplador. Su estudio tiene interés en la síntesis de mecanismos, ya que permite dar más de una solución a un requisito establecido.

El mecanismo formado por cuatro barras y cuatro articulaciones se denomina *cuadrilátero articulado* y, con una barra fija a la referencia, se presenta como uno de los más empleados a la hora de resolver muchos problemas de generación de movimientos en mecanismos de un grado de libertad.

Si el mecanismo ha de ser impulsado por un motor rotativo –que es lo frecuente–, hay que garantizar que la barra accionada pueda dar vueltas enteras. Para los mecanismos de cuatro barras, la ley de Grashof permite averiguar de manera sencilla si se cumple esta condición. La ley de Grashof afirma que la barra más corta de un mecanismo de cuatro barras da vueltas enteras respecto a todas las otras si se cumple que la suma de la longitud de la barra más larga l y la de la más corta s es más pequeña o igual que la suma de las longitudes de las otras dos p y q : $s+l \leq p+q$.

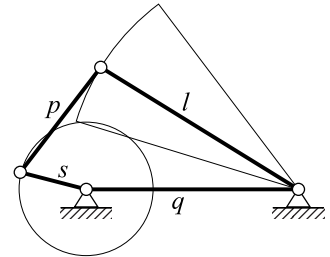


Fig. 1.12 Cuadrilátero articulado con sus dimensiones para ilustrar la ley de Grashof

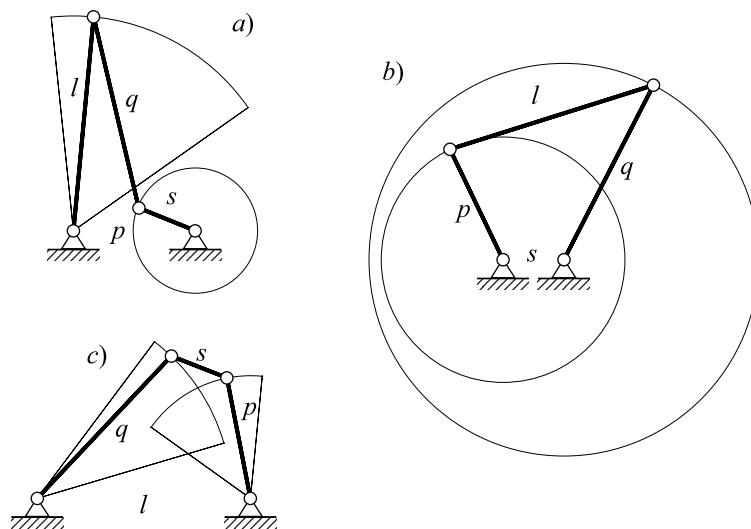


Fig. 1.13 Tres inversiones de un cuadrilátero de Grashof

En el enunciado de la ley no interviene el orden en que se conectan las barras ni cuál es la barra fija. Si un cuadrilátero articulado cumple la ley de Grashof –cuadrilátero de Grashof–, la cumple para sus cuatro inversiones, de manera que:

- Si uno de los dos miembros contiguos al más corto se fija a tierra, se obtiene un mecanismo *manivela-balancín*. De los dos miembros articulados a tierra, el más corto será la manivela, y el otro el balancín (Fig. 1.13.a).
- Si el miembro que se fija es el más corto, se obtiene un mecanismo de *doble manivela*. Tanto los dos miembros articulados a tierra como la biela darán vueltas enteras (Fig. 1.13.b).
- Fijando el miembro opuesto al más corto se obtiene un mecanismo de *doble balancín*. Los dos miembros articulados a tierra oscilan y la biela –el miembro más corto– da vueltas enteras (Fig. 1.13.c).

Aparte del cuadrilátero articulado, el otro mecanismo empleado con más frecuencia es el triángulo articulado con un lado de longitud variable. Es un ejemplo el mecanismo *pistón-biela-manivela*.

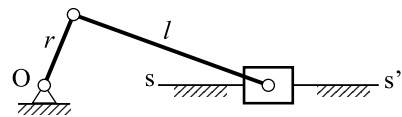


Fig. 1.14 Pistón-biela-manivela

Este mecanismo (Fig. 1.14) –donde el eje ss' contiene la articulación fija O – se utiliza, por ejemplo, en motores y compresores alternativos para convertir el movimiento rotativo de la manivela en movimiento de translación alternativo del pistón, o viceversa. Para que la manivela pueda dar vueltas enteras, debe cumplir la condición evidente $l \geq r$.

1.6 Mecanismos de levas

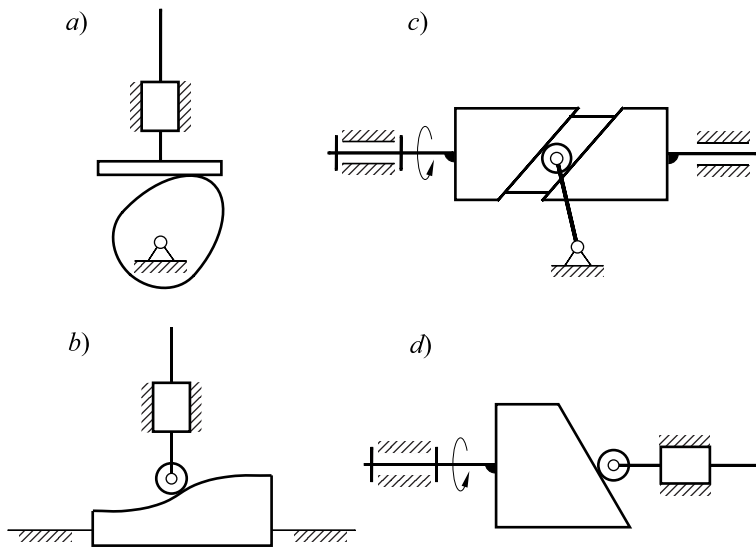


Fig. 1.15 Tipos de levas: de placa a), de cuña b), cilíndrica c) y frontal d)

Se denomina *mecanismo de leva* el conjunto de dos miembros –leva y palpador o seguidor–, ambos en principio con un grado de libertad, que quedan relacionados mediante un par superior. La leva impulsa

el palpador a través del contacto establecido por el par superior, a fin de que desarrolle un movimiento específico. Los mecanismos de leva se pueden clasificar según la forma y el movimiento de la leva y según la forma y el movimiento del seguidor, entre otros criterios.

La leva puede tener movimiento de translación –leva de cuña– o movimiento de rotación. En este caso la forma de la leva puede ser de placa –también denominada de disco o radial–, cilíndrica o de tambor frontal–o de cara– (Fig. 1.15). La más común es la de placa y la menos usual de todas ellas es la de cuña, a causa del movimiento alternativo necesario para accionarla.

El movimiento del palpador puede ser de translación o de rotación. La forma del palpador da lugar a diferentes tipos: puntual, plano –de platillo–, de rodillo, de extremo curvo. (Fig. 1.16)

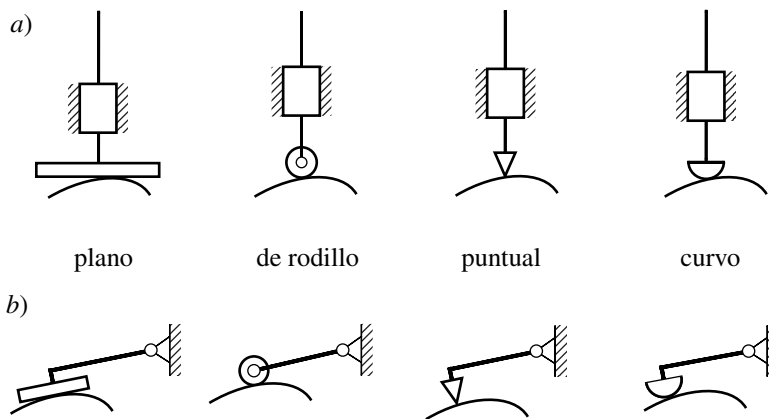


Fig. 1.16 Tipos de palpadores: de translación a) y de rotación b)

El enlace entre una leva y un palpador es, en principio, un enlace unilateral. Para garantizar que siempre haya contacto se puede proceder de dos maneras: cierre por fuerza y cierre por forma. En el cierre por fuerza se garantiza el contacto con una fuerza que actúa sobre el palpador y tiende a unir los dos elementos, ya sea por medio de un muelle o, si el palpador actúa en el plano vertical, por el propio peso. En el cierre por forma, la leva y el palpador mantienen siempre dos puntos opuestos en contacto. En este caso se denominen *levas desmodrómicas* (Fig 1.17).

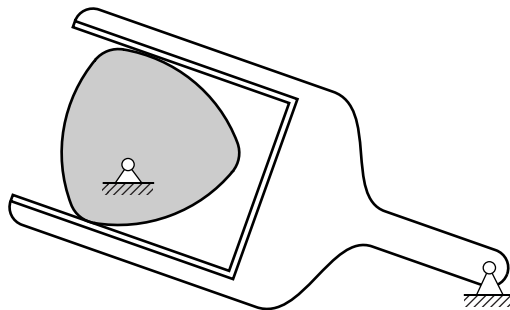


Fig. 1.17 Leva desmodrómica

1.7 Engranajes y trenes de engranajes

Un engranaje es un conjunto de dos ruedas dentadas que engranan entre ellas a fin de transmitir un movimiento de rotación entre sus ejes. En el engranado, una rueda transmite el movimiento a la otra por el hecho de haber contacto entre un diente de cada rueda como mínimo.

En un engranaje, es usual denominar *piñón* a la rueda más pequeña y simplemente *rueda dentada* a la grande. Si el diámetro de ésta es infinito, se obtiene una barra dentada que se denomina *cremallera*.

El perfil de los dientes que se utiliza, con muy pocas excepciones, es el perfil de evolvente de círculo con medidas normalizadas. La evolvente de círculo es, por ejemplo, la curva relativa a un rodillo que describe un punto del hilo que se enrolla o se desenrolla.

Los dos ejes de un engranaje pueden ser paralelos, cortarse o cruzarse. En el primer caso, se utilizan engranajes rectos o helicoidales, y cuando los ejes no son paralelos se utilizan engranajes que, en general, son helicoidales cruzados, de tornillo sinfín, cónicos o hipoidales. Si los ejes son paralelos o se cortan, se puede conseguir que el deslizamiento en los puntos de contacto sea pequeño y, por tanto, el rendimiento alto. Si los ejes son cruzados no se puede evitar un deslizamiento alto y, por tanto, el rendimiento será más bajo.

Un conjunto de engranajes se denomina *tren de engranajes*. Si los ejes de algunas ruedas dentadas no son fijos, el conjunto de engranajes constituye un tren epicicloidal o planetario.

1.8 Prestaciones de un mecanismo

Tanto en el análisis como en la síntesis de mecanismos, es importante poder definir índices de calidad para evaluar numéricamente las prestaciones –calidades que caracterizan cuantitativamente las posibilidades de una máquina o mecanismo. Estos índices pueden hacer referencia a diversos aspectos como, por ejemplo, el volumen accesible, la precisión de posicionamiento en un entorno, etc.

Son muchos los mecanismos en que se puede considerar que hay un miembro de entrada y un miembro de salida. En estos mecanismos, un índice para evaluar su prestación puede ser el *factor de transmisión*, definido como la relación entre el movimiento, una fuerza o un par en el miembro de salida, y el movimiento, una fuerza o un par en el miembro de entrada.

En los mecanismos de barras, se utiliza como índice de buen funcionamiento el ángulo de transmisión o ángulo relativo entre barras. En los mecanismos de leva se utiliza el ángulo de presión, definido como el ángulo entre la normal a las superficies en el punto geométrico de contacto y la dirección de la velocidad del punto de

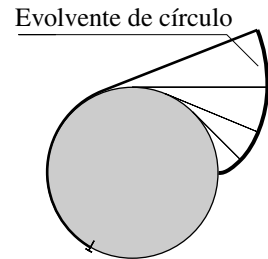


Fig. 1.18 Generación de un perfil de evolvente

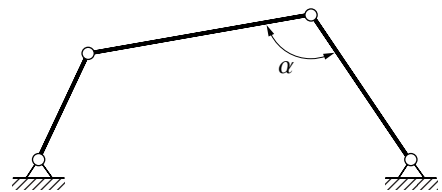


Fig. 1.19 Ángulo de transmisión en un cuadrilátero articulado

contacto del seguidor. Si el palpador es de rodillo, hay que considerar la dirección de la velocidad de su centro.

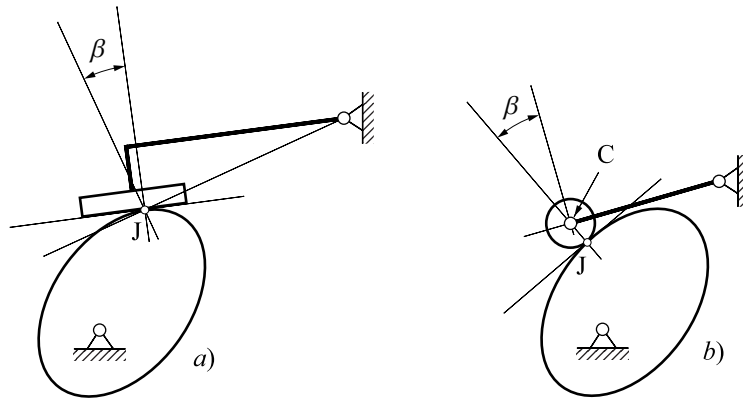
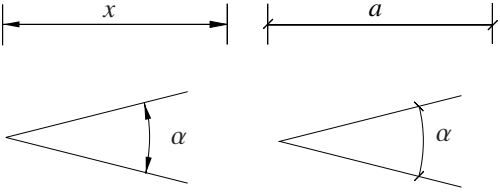
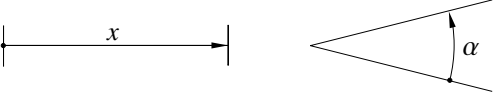
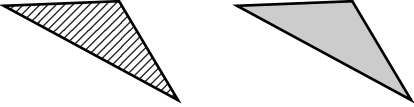
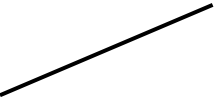

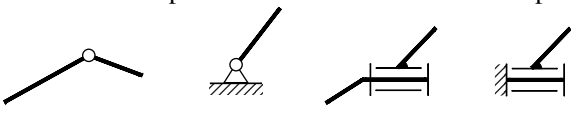
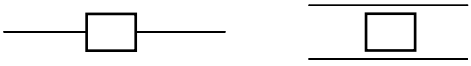
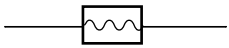

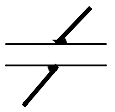
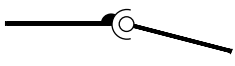

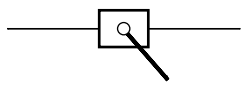
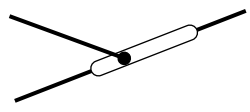

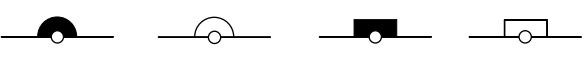


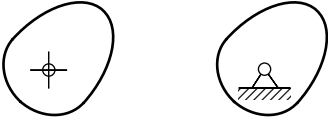
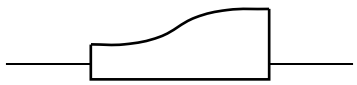
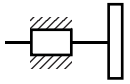

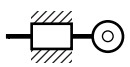
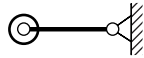
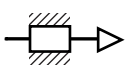
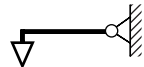
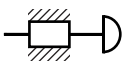
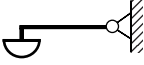
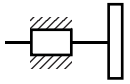

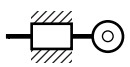
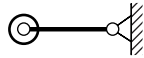
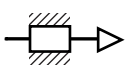
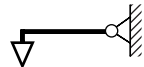
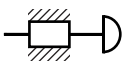
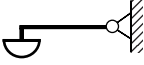
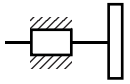

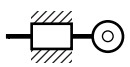
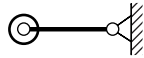
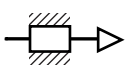
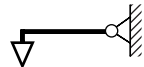
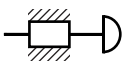
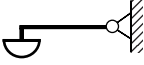

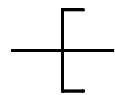
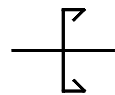
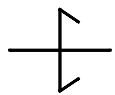

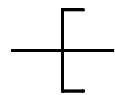
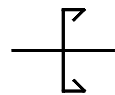
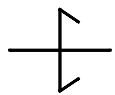

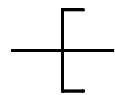
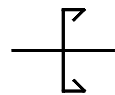
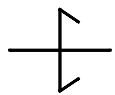
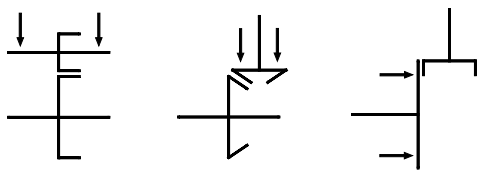
Fig. 1.20 Ángulo de presión para una leva de placa con palpador plano a) y palpador de rodillo b)

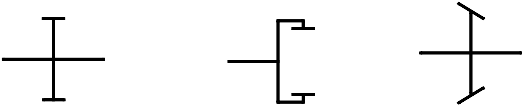
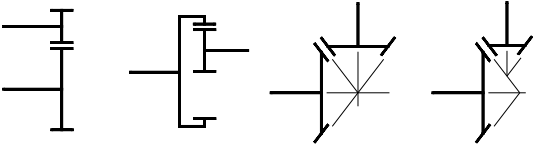
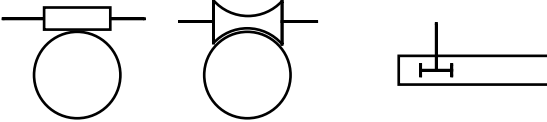

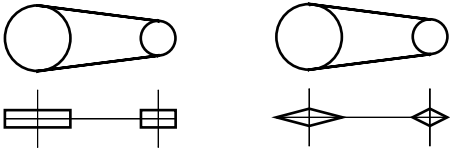
Anexo 1.I Representación simbólica de elementos

Colección de símbolos para la representación de elementos y pares cinemáticos que hay que emplear en la esquematización, según la norma UNE-EN ISO 3952.

variables y parámetros	
coordenadas de posición y de orientación	
miembros en general	
elemento barra	
elemento fijo	

<p>par de revolución o articulación</p>	<p>movimiento plano movimiento en el espacio</p>  <p>entre barras con el suelo</p>
<p>par prismático o guía-corredera</p>	
<p>par helicoidal</p>	
<p>par cilíndrico</p>	
<p>par plano</p>	
<p>par esférico o rótula esférica</p>	
<p>junta universal</p>	
<p>corredera con articulación</p>	
<p>par guía-botón</p>	
<p>unión rígida entre miembros</p>	
<p>articulaciones enmedio de barras</p>	

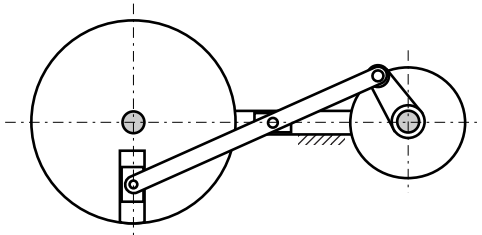
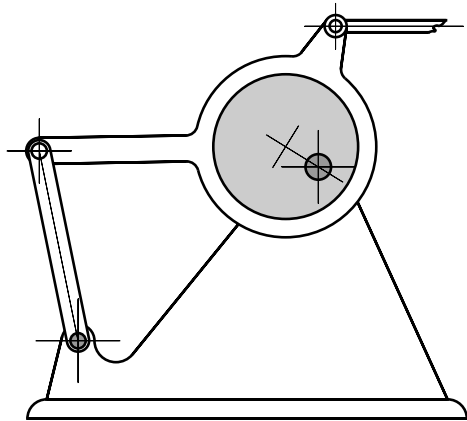
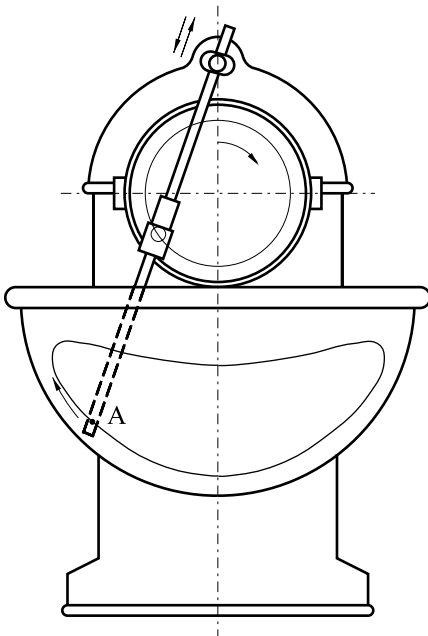
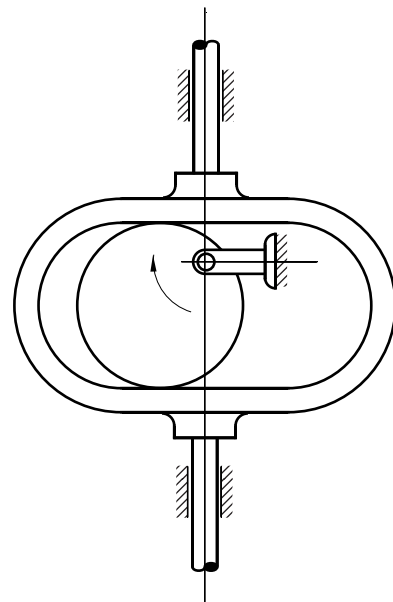
leva plana de rotación	 <p>con articulación fija</p>															
leva plana de traslación																
palpadores	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>de traslación</td> <td>de rotación</td> </tr> <tr> <td>plano</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>de rodillo</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>puntual</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>curvo</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		de traslación	de rotación	plano			de rodillo			puntual			curvo		
	de traslación	de rotación														
plano																
de rodillo																
puntual																
curvo																
ruedas de fricción	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>plana</td> <td>cilíndrica</td> <td>cónica interior</td> <td>cónica exterior</td> </tr> </table>					plana	cilíndrica	cónica interior	cónica exterior							
																
plana	cilíndrica	cónica interior	cónica exterior													
transmisión por ruedas de fricción																

<p>ruedas dentadas</p>	 <p>cilíndrica exterior cilíndrica interior cónica</p>
<p>transmisión por ruedas dentadas (engranajes)</p>	 <p>cilíndrico cónico hipoide</p>  <p>tornillo sin fin cilíndrico tornillo sin fin glóbico piñón-cremallera</p>
<p>embragues y frenos</p>	 <p>embrague freno</p>
<p>transmisiones por correa y cadena</p>	 <p>correa cadena</p>

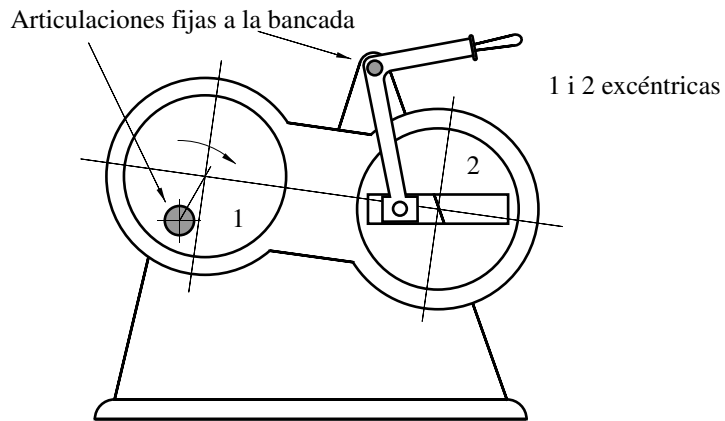
Problemas

En los mecanismos representados en las figuras adjuntas:

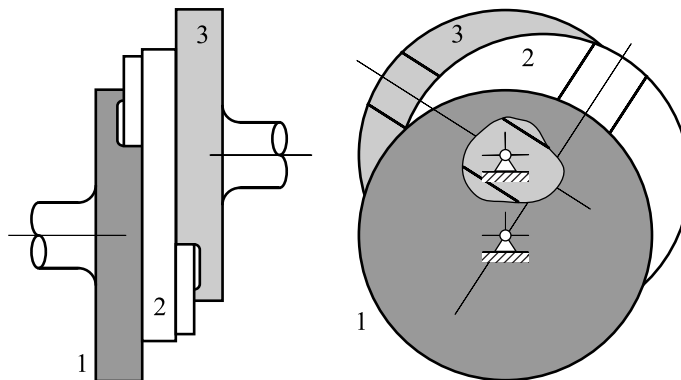
- Identificar los elementos: miembros y pares cinemáticos.
- Hacer un esquema de símbolos acompañado de los parámetros necesarios para el estudio cinemático.
- Sugerir variables adecuadas para estudiar el movimiento del mecanismo.

P 1-1**P 1-2****P 1-3****P 1-4**

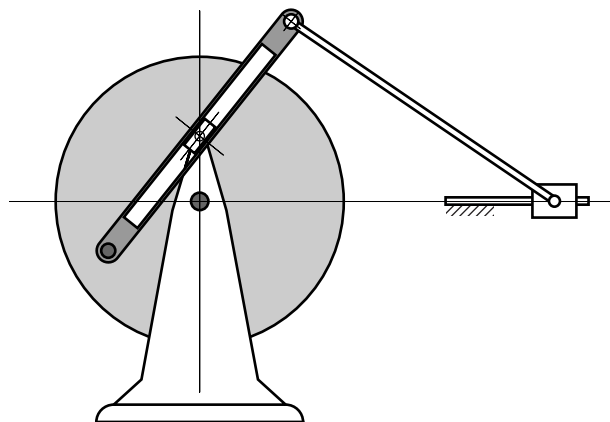
P 1-5

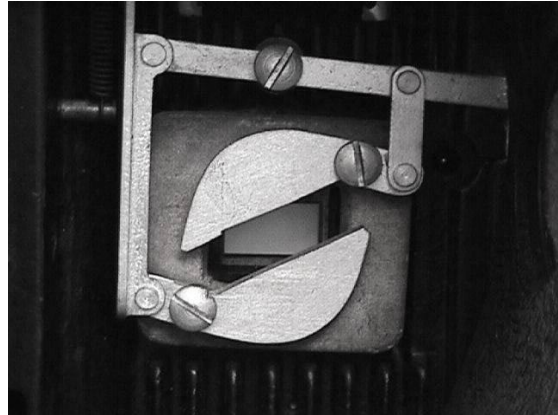
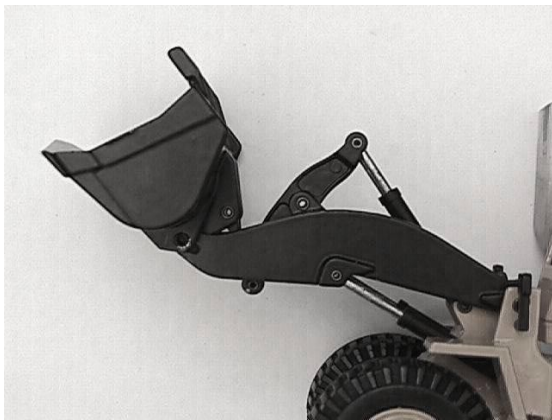
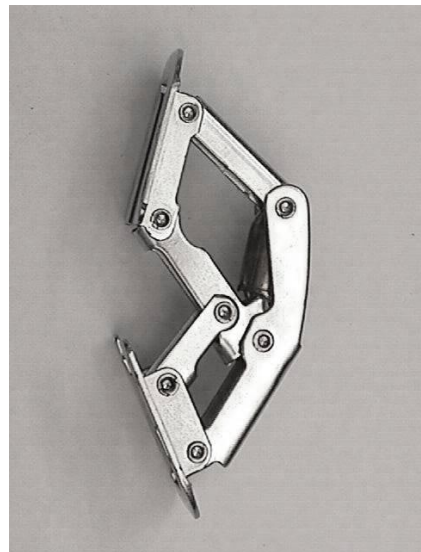


P 1-6 Junta de OldHam



P 1-7



P 1-8 Mordaza de presión**P 1-9** Obturador de un proyector cinematográfico**P 1-10** Pala excavadora**P 1-11** Bisagra

2 Movilidad

La descripción de las posibles configuraciones que puede adoptar un mecanismo y el estudio de la distribución de velocidades y aceleraciones se puede hacer a partir de un conjunto de variables: las *coordenadas generalizadas* y las *velocidades generalizadas*. En este capítulo se plantea cuántas variables hay que emplear como mínimo para describir la configuración de un mecanismo –*coordenadas independientes*– y cuántas para describir su distribución de velocidades –*grados de libertad*. Se presentan también las relaciones que hay que establecer entre las variables cuando se utiliza un conjunto no mínimo –*ecuaciones de enlace*– y cómo hay que proceder en este caso para el estudio de configuraciones y velocidades.

2.1 Coordenadas y velocidades generalizadas. Grados de libertad de un mecanismo

Coordenadas generalizadas. Se denominan coordenadas generalizadas (cg) las variables geométricas q_i de posición y orientación empleadas para describir la configuración de un sistema mecánico. El conjunto de coordenadas generalizadas $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ se puede expresar como el vector:

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T$$

donde n es el número de coordenadas generalizadas empleadas. Este conjunto de variables ha de ser suficiente para describir cualquier configuración del mecanismo.

Las coordenadas generalizadas suelen ser distancias y ángulos, absolutos o relativos, y se intenta, siempre que sea posible, que estén asociadas a distancias y ángulos fácilmente identificables en el mecanismo: posición de un punto característico (rótula, centro de inercia de un miembro, etc.), ángulo relativo entre dos miembros articulados, distancia entre dos puntos de dos miembros enlazados por una guía prismática, etc.

Tipos de coordenadas generalizadas. Una primera clasificación de las coordenadas se establece en función de si se definen a partir de una referencia solidaria al miembro fijo –*coordenadas absolutas*– o a partir de una referencia solidaria a un miembro móvil –*coordenadas relativas*. Así, por ejemplo, en el mecanismo de la figura 2.1, θ_1 y θ_2 son coordenadas generalizadas absolutas y φ es una coordenada generalizada relativa.

Otra clasificación de las coordenadas generalizadas se hace atendiendo a aquello que se posiciona o se orienta. Así, las coordenadas referenciales sitúan un triedro de referencia –un punto origen y tres

direcciones ortogonales– solidarios a cada miembro. Las coordenadas naturales se asocian a puntos y direcciones fijas a un miembro. En cualquier caso, sin embargo, estos dos tipos de coordenadas pueden ser tanto absolutas como relativas.

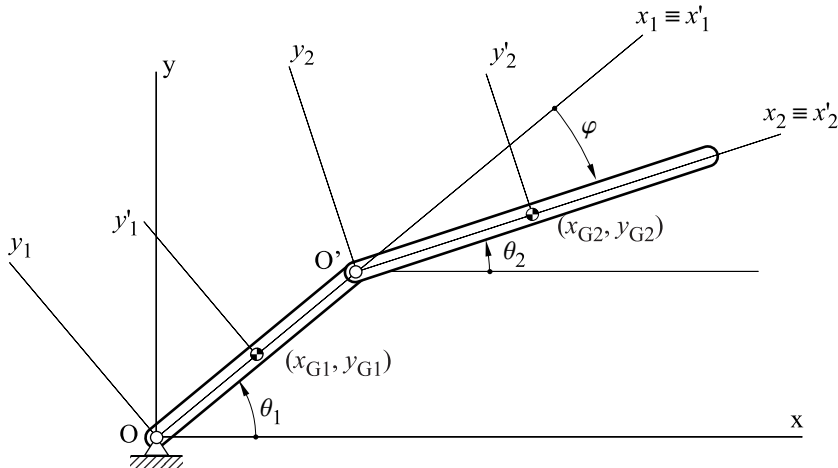


Fig. 2.1 Ejemplo de coordenadas generalizadas en un mecanismo

En los estudios dinámicos, cuando se emplean coordenadas referenciales, el origen del triedro de referencia solidaria a un miembro se acostumbra a tomar en su centro de inercia. Las coordenadas a que da lugar esta elección se denominan *coordenadas inerciales*.

En el ejemplo de la figura 2.1, las coordenadas θ_1 y θ_2 pueden ser pensadas como referenciales si se consideran los triedros x_1, y_1 y x_2, y_2 fijos a las dos barras y de origen O y O', respectivamente. Las coordenadas $(x_{G1}, y_{G1}, \theta_1)$ y $(x_{G2}, y_{G2}, \theta_2)$ serían las coordenadas inerciales y las coordenadas cartesianas de los puntos G₁, O' y G₂ podrían ser consideradas como coordenadas naturales.

Velocidades generalizadas. Para establecer la distribución de velocidades de un mecanismo en una configuración determinada, se utiliza un conjunto de variables cinemáticas que se denominan *velocidades generalizadas* (vg). Este conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ se puede expresar como el vector:

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$$

donde n es el número de velocidades generalizadas. Este conjunto de variables cinemáticas ha de ser suficiente para describir la velocidad de cualquier punto en cualquier configuración.

En general, las velocidades generalizadas que se utilizan son las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas, $u_i = \dot{q}_i$, si bien también se pueden emplear combinaciones lineales $u_i = \sum b_j \dot{q}_j$. Si una velocidad generalizada no es la derivada de ninguna coordenada generalizada se dice que está asociada a una pseudocoordenada. Un ejemplo claro de velocidad generalizada asociada a una pseudocoordenada es la velocidad longitudinal de un vehículo convencional, la cual no se corresponde a la derivada de ninguna coordenada generalizada. En la cinemática de sólidos en el espacio, si se toman como velocidades generalizadas las componentes del vector velocidad angular

del sólido en una cierta base, éstas a menudo están asociadas a pseudocoordenadas, ya que no son las derivadas de ninguna coordenada (ver el anexo 2.II). En el movimiento plano, en cambio, la velocidad angular es la derivada temporal del ángulo girado.

Coordenadas independientes. Grados de libertad. Un conjunto mínimo –necesario y suficiente– de coordenadas generalizadas para describir la configuración de un sistema mecánico se denomina *conjunto de coordenadas independientes* (ci). Si bien para un cierto sistema se pueden definir diversos conjuntos de coordenadas independientes, la dimensión de estos conjuntos es una característica del sistema y se denomina *número de coordenadas independientes*.

Cualquier conjunto mínimo –necesario y suficiente– de velocidades generalizadas que describan la distribución de velocidades del sistema se denomina *conjunto de grados de libertad* (gl). La dimensión de estos conjuntos es también una característica del sistema y se denomina *número de grados de libertad*.

Desde un punto de vista intuitivo, se asocian los grados de libertad a los movimientos independientes a corto término que puede realizar el sistema, y las coordenadas independientes a los movimientos a largo término.

El número de grados de libertad y el número de coordenadas independientes de un sistema no tienen por qué coincidir, si bien en la mayoría de los mecanismos coinciden. Es por eso que a menudo en el ámbito de la teoría de máquinas y mecanismos se obvia la diferencia y se habla de “número de grados de libertad de un mecanismo” o bien de “movilidad de un mecanismo”, para referirse tanto a velocidades como a coordenadas independientes.

2.2 Ecuaciones de enlace. Holonomía

Ecuaciones de enlace geométricas. Si se describe la configuración de un sistema mediante un conjunto $\{\mathbf{q}\} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ no mínimo de coordenadas generalizadas, entre ellas existen m_g relaciones de dependencia denominadas *ecuaciones de enlace geométricas* $\phi_i(\mathbf{q}) = 0 \quad i=1, \dots, m_g$, que usualmente se expresan de forma compacta como $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) = 0$. $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q})$ se denomina *vector de ecuaciones de enlace*. Estas ecuaciones de enlace son de dos tipos: las que describen analíticamente las restricciones impuestas por los enlaces entre los diferentes miembros del mecanismo y las que describen la invariabilidad de la distancia entre puntos de un sólido –ecuaciones de enlace geométricas constitutivas. En principio, nro. ci = nro. cg - m_g

Si en el mecanismo de la figura 2.2 se ha decidido trabajar con un conjunto de 5 coordenadas $\mathbf{q} = \{x_1, x_2, y_1, y_2, \varphi\}$, se pueden escribir entre ellas las 4 relaciones siguientes:

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) = \left\{ \begin{array}{c} x_1 - l_1 \cos \varphi \\ y_1 - l_1 \sin \varphi \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l_2^2 \\ y_2 - d \end{array} \right\} = 0$$

La tercera componente del vector de ecuaciones de enlace es una ecuación de enlace constitutiva que describe la invariabilidad de la distancia entre P y Q.

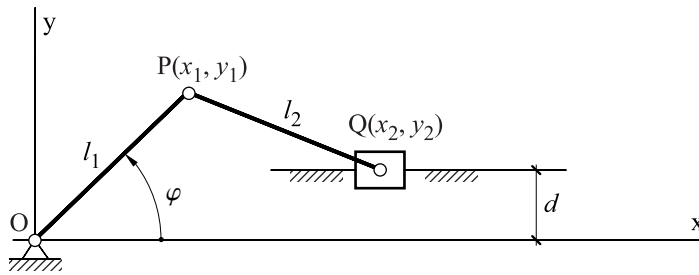


Fig. 2.2 Mecanismo pistón-biela-manivela

De las 5 coordenadas generalizadas empleadas, sólo hay una independiente (se han establecido 4 relaciones entre ellas). El mecanismo tiene, por tanto, una coordenada independiente. Hay que hacer notar, que si bien con una sola coordenada se puede describir la configuración del mecanismo, no sirve cualquiera de ellas. Este es el caso evidente de la coordenada y_2 .

La decisión de cuáles y cuántas coordenadas generalizadas se ha de utilizar en cada caso no es simple y depende de muchos factores: resultados que se quieren conseguir, herramientas de cálculo de que se dispone, complicación o simplicidad del mecanismo, etc. En general, sin embargo, la utilización de muchas coordenadas generalizadas dará lugar a muchas ecuaciones de enlace de formulación simple, y la utilización de pocas coordenadas generalizadas dará lugar a pocas ecuaciones, pero de formulación más compleja.

Ecuaciones de enlace cinemáticas. Al describir la cinemática de un sistema, el planteamiento es similar al caso anterior. Si se utiliza un conjunto de velocidades generalizadas no mínimo, entre ellas existen m_c relaciones de dependencia –ecuaciones de enlace cinemáticas– que describirán analíticamente las restricciones impuestas por los enlaces entre los diferentes miembros, como también las restricciones impuestas por la invariabilidad de distancia entre puntos de un sólido. En principio, $n_{ro} = n_{ro} - m_c$

Si la descripción de todas las restricciones impuestas por todos los enlaces de un sistema se puede hacer a nivel geométrico y se toman como velocidades generalizadas las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas, entonces el conjunto de ecuaciones de enlace cinemáticas se puede obtener derivando temporalmente las ecuaciones de enlace geométricas.

Así, si en el ejemplo anterior de la figura 2.2 se utilizan las velocidades generalizadas

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}} = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{\varphi}\}^T$$

las ecuaciones de enlace cinemáticas se podrían obtener por derivación:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y}_1 = l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \\ (x_1 - x_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (y_1 - y_2)(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = 0 \\ \dot{y}_2 = 0 \end{cases}$$

De las 5 velocidades generalizadas empleadas, tan sólo hay una independiente. El mecanismo tiene, por tanto, un grado de libertad. De la misma manera que sucede con la geometría, la cinemática de este mecanismo quedaría descrita con una sola velocidad generalizada, pero no por cualquiera de ellas. Así, evidentemente, \dot{y}_2 no serviría para establecer la cinemática del mecanismo en cualquier configuración.

Las ecuaciones de enlace cinemáticas no siempre se obtienen por derivación de las ecuaciones de enlace geométricas, sino que se pueden obtener directamente a partir de las relaciones impuestas por los enlaces a las velocidades. Este procedimiento es ineludible en caso de trabajar con pseudocoordenadas o cuando alguna condición de enlace sólo es establecida por las velocidades, como por ejemplo en el no-deslizamiento.

Ecuaciones de enlace rehónomas o de gobierno. En algunos sistemas mecánicos, y a causa de elementos de control exteriores al propio sistema, se pueden establecer ecuaciones de enlace, tanto geométricas como cinemáticas, en que el tiempo aparece explícitamente, $\phi(\mathbf{q}, t)$. Son las denominadas *ecuaciones de enlace rehónomas* o *ecuaciones de gobierno*. Estas ecuaciones están normalmente asociadas a actuadores o a obstáculos móviles –elementos capaces de imponer la evolución temporal de alguna coordenada. Las ecuaciones de enlace en que el tiempo no aparece explícitamente se denominan *ecuaciones de enlace esclerónomas*.

A menudo, en el estudio de máquinas y mecanismos, los grados de libertad se cuentan considerando sólo las ecuaciones de enlace esclerónomas (provenientes en las máquinas y mecanismos usuales de los pares cinemáticos) y, a partir de estas, los grados de libertad eliminados por las ecuaciones de enlace rehónomas o de gobierno se denominan *grados de libertad forzados*. Así, por ejemplo, un carro portaherramientas que se mueve sobre una guía prismática tiene un grado de libertad que pasa a ser forzado cuando se considera el actuador que controla la posición del carro.

Determinación de las ecuaciones de enlace. La determinación de las ecuaciones de enlace no es fácilmente sistematizable, excepto en el caso de que se utilicen coordenadas referenciales para cada miembro (6 en el espacio y 3 en el plano). En el caso que el planteamiento del estudio del mecanismo se haga a mano o se emplee un conjunto reducido de coordenadas, la determinación de las ecuaciones de enlace dependerá de cada sistema y de las coordenadas que se utilicen. En cualquier caso, hay que plantear un conjunto suficiente de ecuaciones y prestar atención a que todas sean independientes.

En los mecanismos con anillos, es usual establecer ecuaciones de enlace geométricas mediante la *condición de cierre del anillo*. Para el mecanismo de la figura 2.3 la ecuación de cierre del anillo

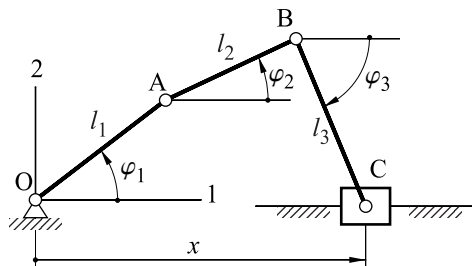


Fig. 2.3 Mecanismo con un anillo

OABCO es $\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CO} = 0$, que, haciendo uso de las coordenadas generalizadas indicadas y expresándola en la base 1,2, da lugar a las ecuaciones de enlace:

$$\begin{Bmatrix} l_1 \cos \varphi_1 \\ l_1 \sin \varphi_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} l_2 \cos \varphi_2 \\ l_2 \sin \varphi_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} l_3 \cos \varphi_3 \\ -l_3 \sin \varphi_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -x \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\phi(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 - x \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 \end{Bmatrix} = 0$$

A partir de la condición de cierre también se pueden obtener ecuaciones de enlace cinemáticas. Se parte de la velocidad de un punto –por ejemplo O– y se calcula la velocidad de los puntos A, B y C haciendo uso de la formulación de la cinemática del sólido rígido (ver el capítulo 3) aplicada a cada uno de los miembros. Finalmente se vuelve a calcular la velocidad de O para igualarla a la de partida. Proyectando esta igualdad en una base, se obtienen las ecuaciones de enlace cinemáticas.

$$v(O) \rightarrow v(A) \rightarrow v(B) \rightarrow v(C) \rightarrow v(O)$$

En los mecanismos con movimiento plano, si se usan las coordenadas generalizadas de orientación de los miembros y de desplazamiento relativo en los pares que lo permitan, las ecuaciones de enlace obtenidas a partir de las condiciones de cierre son suficientes.

Holonomia. Se dice que un sistema es holónomo cuando el número de grados de libertad coincide con el de coordenadas independientes. Por el contrario, un sistema es no holónomo si tiene más coordenadas independientes que grados de libertad. Se puede pensar en los sistemas no holónomos como aquellos que no pueden llegar directamente, sin maniobrar, a todas las configuraciones accesibles. Un vehículo convencional, por ejemplo, no se puede desplazar transversalmente, pero puede llegar a una configuración que corresponda a una translación transversal si hace maniobras.

Si la descripción de todas las restricciones impuestas para todos los enlaces de un sistema se puede hacer desde el punto de vista geométrico, entonces se podrán derivar las ecuaciones de enlace cinemáticas y se obtendrá el mismo número que de geométricas. En este caso, el sistema será seguramente holónomo.

Si las condiciones de enlace –todas o algunas– se establecen a nivel cinemático, como en el caso de la rodadura sin deslizamiento entre sólidos, en que la restricción impuesta para el no-deslizamiento tangencial se ha de establecer a nivel de velocidades, hará falta integrar en principio las ecuaciones de enlace cinemáticas para obtener las geométricas. Si esta integración no es posible, el sistema tendrá más coordenadas independientes que grados de libertad y será no holónomo.

Un sistema de un grado de libertad es siempre holónomo, ya que su evolución se puede conocer a priori por el hecho de que depende únicamente de una velocidad generalizada. Es a partir de dos grados de libertad que se puede presentar la no-holonomía, ya que en este caso la evolución de las configuraciones del sistema puede depender de las evoluciones relativas que se hagan entre las diferentes velocidades generalizadas independientes.

2.3 Determinación del número de coordenadas independientes

Teniendo en cuenta la complejidad del sistema de ecuaciones geométricas de enlace (en general, no lineales con las coordenadas generalizadas), la determinación del número de coordenadas independientes hay que hacerla por inspección directa.

Si se puede garantizar que el sistema es holónomo, por ejemplo porque todos los enlaces provienen de pares cinemáticos, excepto de la rodadura sin deslizamiento, o porque se puede llegar a todas las configuraciones accesibles directamente, sin maniobrar, entonces el número de coordenadas independientes coincide con el número de grados de libertad.

En caso contrario, si se puede garantizar que el sistema es no holónomo, por ejemplo porque se pone de manifiesto la necesidad de maniobrar para llegar a algunas configuraciones accesibles, entonces el número de $gl + 1$ es una cota inferior del número de coordenadas independientes.

2.4 Determinación del número de grados de libertad

En mecanismos con estructura de árbol –sin ningún anillo–, la determinación del número de grados de libertad se puede hacer de manera sistemática y sencilla por inspección directa. En mecanismos con algún anillo, la inspección directa no es ni sistemática ni simple y los métodos sistematizados basados únicamente en la superposición –transformación a estructura de árbol o criterio de Grübler-Kutzbach– dan, en sistemas mecánicos con enlaces redundantes, un número inferior al de grados de libertad.

Mecanismos con estructura de árbol. En los mecanismos sin ningún anillo cerrado, la determinación del número de grados de libertad es muy simple. Nada más hay que sumar el número de grados de libertad relativos de cada miembro respecto al precedente atendiendo al tipo de par existente entre ellos.

Mecanismos con anillos. En los mecanismos con anillos, la determinación del número de grados de libertad se ha de hacer, en principio, por inspección directa. Hay que ver cuántos posibles movimientos puede tener o, lo que es lo mismo, cuántos movimientos hay que detener para que el mecanismo quede en reposo. Se ha de entender que detener un movimiento es anular una velocidad generalizada y no detener un miembro –que puede implicar detener más de una velocidad generalizada. En definitiva, un sistema mecánico tiene tantos grados de libertad como velocidades generalizadas haya que anularle para que todos sus puntos tengan velocidad nula.

Un procedimiento sistemático para contabilizar, en principio, los grados de libertad de un mecanismo con anillos es el siguiente:

- Eliminar un conjunto suficiente de enlaces para suprimir todos los anillos.
- Contar los grados de libertad de la estructura de árbol resultante.
- Restar las restricciones cinemáticas impuestas por los enlaces individuales eliminados anteriormente.

Otro procedimiento similar al anterior es el criterio de Grübler-Kutzbach:

- Eliminar todos los enlaces del mecanismo.
- Contar los grados de libertad de todos los miembros sin enlaces (6 por sólido o 3 por sólido, si se considera el estudio en el plano).
- Restar las restricciones cinemáticas impuestas individualmente para cada uno de los enlaces.

Se puede considerar que deriva de este último método el procedimiento que consiste en ir eliminando del mecanismo *grupos de Assur*. Los grupos de Assur son conjuntos de enlaces y miembros tal que los grados de libertad restringidos por estos enlaces es igual a los grados de libertad de los miembros sin enlaces –6 o 3 por sólido. Dos barras articuladas entre ellas y unidas al mecanismo mediante dos articulaciones constituyen, por ejemplo, un grupo de Assur.

Estos tres métodos tienen el inconveniente de que, si algún enlace de los considerados es redundante, dan un número inferior al de los grados de libertad del mecanismo y que puede llegar a ser negativo.

Ejemplo 2.1 Determinación del número de grados de libertad de un mecanismo.

- Por inspección directa del mecanismo de la figura 2.4, vemos que no tiene ningún grado de libertad. Si intentamos encontrar el centro instantáneo de rotación (CIR) de la barra 2 observamos que, por una parte, estaría sobre la intersección de la prolongación de las barras 1 y 3, pero por la otra estaría sobre la intersección de la prolongación de las barras 3 y 4. Por tanto, la barra ha de tener forzosamente velocidad nula.

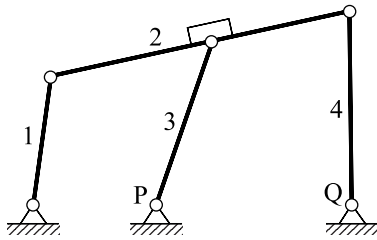


Fig. 2.4 Estructura de 5 barras

- Para la transformación a mecanismo con estructura de árbol, hay que romper los enlaces suficientes para que el mecanismo no tenga ningún anillo, por ejemplo, los enlaces a P y a Q. A continuación hay que contabilizar los grados de libertad del mecanismo resultante, que serán 4 (barra1/tierra, barra2/barra1, barra3/barra2, barra4/barra2). Teniendo en cuenta que los enlaces a P y a Q son articulaciones y que restringen dos grados de libertad cada uno el número de grados de libertad será $4 - 4 = 0$.

- Criterio de Grübler-Kutzbach. El mecanismo tiene 4 barras y 6 enlaces que son articulaciones. Por tanto, $nro. gl = 4 \times 3 - 6 \times 2 = 0$.
- Grupos de Assur. Este mecanismo no contiene ningún grupo de Assur.

Ejemplo 2.2 Determinación del número de grados de libertad de un mecanismo.

- Por inspección directa se observa que este mecanismo tiene 2 grados de libertad. El CIR de la barra 2 no queda definido; por tanto, tiene más de un grado de libertad. Si detenemos la rotación de la barra 1 respecto a tierra, el sistema aún tiene un grado de libertad –se puede definir un CIR por cada sólido–; por tanto, en total el sistema tiene dos.

- Por transformación a mecanismo con estructura de árbol, si se rompen los enlaces a P y a Q se contabilizan cinco grados de libertad (barra1/tierra, barra2/barra1, barra3/barra2(2 gl), barra4/barra2). El enlace a P restringe dos grados de libertad y el enlace a Q uno. Por tanto, $nro. gl = 5 - 2 - 1 = 2$.

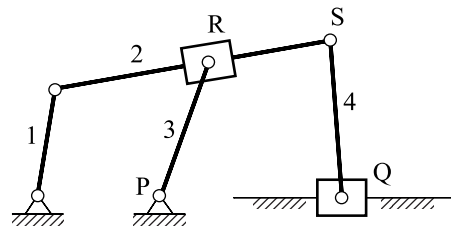


Fig. 2.5 Mecanismo de 5 barras

- Criterio de Grübler-Kutzbach. El mecanismo tiene 4 barras, 4 articulaciones que restringen dos grados de libertad cada uno y 2 enlaces de guía-corredera articulada que restringen uno. Por tanto, $nro. gl = 4 \times 3 - 4 \times 2 - 2 \times 1 = 2$.
- Grupos de Assur. Se pueden eliminar los grupos:
 - a) Barra 3, articulación P y corredera R ($3(\text{barra}) - 2(\text{articulación}) - 1(\text{corredera}) = 0$)
 - b) Barra 4, articulación S y corredera Q ($3(\text{barra}) - 2(\text{articulación}) - 1(\text{corredera}) = 0$)
 Por tanto, el mecanismo queda reducido a las barras 1 y 2 y, evidentemente, tiene 2 grados de libertad.

2.5 Redundancia total. Redundancia tangente

Un enlace es redundante cuando impone alguna restricción en el movimiento del sistema –*redundancia tangente*– o en las configuraciones y el movimiento del sistema –*redundancia total*– que ya ha estado impuesta por otros enlaces. La redundancia en los mecanismos es, en principio, indeseable porque implica fuerzas en los enlaces y tensiones internas desconocidas en los sólidos –con la hipótesis de sólido rígido– y que pueden ser muy grandes.

Redundancia total. Si en un sistema con un conjunto de enlaces no redundantes se introduce un nuevo enlace y el sistema puede adoptar las mismas configuraciones que antes, al menos en un entorno de la configuración estudiada, entonces se dice que este enlace es totalmente redundante respecto al conjunto inicial.

La redundancia total en los mecanismos implica fuerzas en los enlaces desconocidas y que pueden asumir valores grandes. Estas fuerzas se incrementan de manera finita a causa de la aplicación de fuerzas finitas exteriores al sistema. La consideración de la flexibilidad de los sólidos y de los enlaces y de la existencia de tolerancias en los enlaces hace que, en la práctica, muchas veces la redundancia total sea tolerable. La limitación de carga que pueden soportar los miembros de un mecanismo hace que aquella a menudo sea necesaria.

Un ejemplo claro de este hecho son las puertas con tres bisagras: si consideramos una bisagra como una junta de revolución, entonces las otras dos son claramente redundantes –el movimiento de la puerta es exactamente el mismo con una que con tres bisagras. La construcción de puertas con una sola bisagra, sin embargo, sería en general un mal diseño, ya que ésta debería de ser muy robusta para aguantar todas las cargas aplicadas. Por otra parte, la tolerancia de cada bisagra, la flexibilidad de la puerta y el procedimiento de montaje hacen que las posibles desalineaciones no provoquen fuerzas internas demasiado grandes.

A medida que la rigidez aumenta, se han de disminuir las tolerancias de fabricación ya que, si no, las redundancias dan lugar a fuerzas elevadas y a dificultades de montaje y funcionamiento que conducen a soluciones inviables. Este podría ser el caso de la puerta de una caja fuerte.

Una manera de observar si un mecanismo presenta enlaces redundantes es modificar ligeramente algún parámetro –longitud de una barra, posición de una articulación, etc. Si el sistema presentaba alguna redundancia, el sistema modificado cambiará su funcionamiento: no se podrá montar, presentará una redundancia tangente o bien perderá algún grado de libertad.

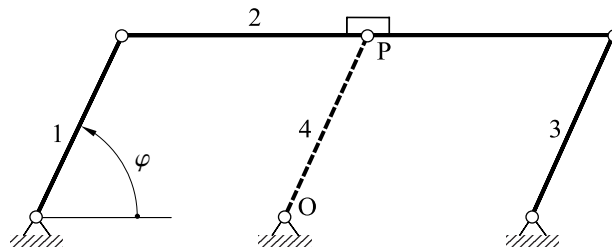


Fig. 2.6 Paralelogramo articulado redundante

El mecanismo de la figura 2.6, formado por las barras 1, 2 y 3, es un paralelogramo articulado de un grado de libertad –basta con parar la velocidad generalizada $\dot{\varphi}$ asociada a la variación del ángulo entre la barra 1 y la tierra para inmovilizar el mecanismo. En su movimiento, el punto P describe un círculo alrededor de O. Si se une la barra OP con articulaciones a los extremos –que obliga a mantener la distancia constante entre dos puntos–, el mecanismo puede conseguir exactamente las mismas configuraciones. Sería, por tanto, un mecanismo con una redundancia total.

Redundancia tangente. Si en un sistema, con un conjunto de enlaces no redundantes, se introduce un nuevo enlace que, sin restringir en principio las velocidades, restringe las configuraciones accesibles, se dice que este enlace es redundante tangente respecto al conjunto inicial.

No es fácil encontrar ejemplos reales de sistemas con redundancia tangente, ya que nunca funcionan correctamente y su presencia es indicativa de un mal diseño.

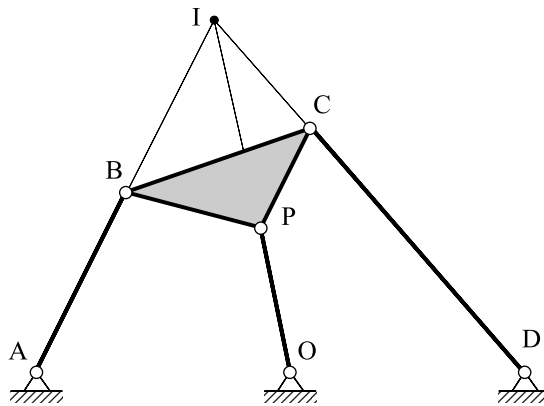


Fig. 2.7 Cuadrilátero articulado con redundancia tangente

El cuadrilátero articulado ABCD de la figura 2.7 tiene un grado de libertad y en esta configuración el centro instantáneo de rotación de la biela es el punto I. Si, para inmovilizarlo, se une la barra articulada PO, las configuraciones accesibles quedan reducidas a una –la dibujada– pero no se restringe, en principio, la velocidad angular de la biela alrededor del punto I. Será, entonces, un mecanismo con redundancia tangente.

La presencia de redundancia tangente en un mecanismo es siempre indeseable, ya que fuerzas exteriores finitas conducen, en general, a la aparición de fuerzas interiores teóricamente infinitas. En el sistema anterior (Fig. 2.7) las fuerzas de enlace que actúan sobre la biela BCP provenientes de las barras AB, OP y CD dan una resultante nula y un momento resultante nulo, ya que se cortan en el punto I. Si se aplica un par exterior sobre la biela, harán falta fuerzas infinitas en las barras para que con una rotación infinitesimal de la biela puedan dar un momento resultante finito.

La presencia de redundancia tangente en un sistema puede confundir en la determinación del número de grados de libertad por inspección directa, ya que en este procedimiento se tiende a asociar las velocidades a desplazamientos más o menos pequeños. Eso hace que una velocidad generalizada analíticamente independiente se puede dejar de considerar como tal.

Grado de redundancia. El grado de redundancia de un mecanismo sin redundancias tangentes se define como el número de condiciones de enlace cinemáticas que se pueden eliminar sin modificar la distribución de velocidades del mecanismo. El grado de redundancia se obtiene como la diferencia entre el número de grados de libertad y el número n' que se obtiene aplicando los procedimientos de superposición –el criterio de Grübler-Kutzbach o el criterio de abrir anillos.

$$\text{nro. grados de libertad} = 3n \text{ (o bien } 6n) - \text{nro. eq. independientes}$$

$$n' = 3n \text{ (o bien } 6n) - \text{nro. eq.}$$

$$\text{nro. eq. dependientes} = \text{grado de redundancia} = \text{nro. eq.} - \text{nro. eq. independientes} = \text{nro. gl} - n'$$

Si se analiza el paralelogramo de la figura 2.6, formado por las barras 1, 2, 3 y 4, se observa que tiene un grado de libertad. El criterio de Grübler-Kutzbach, en cambio, daría:

$$4 \text{ sólidos} \times 3 \text{ gl/sólido} - 6 \text{ articulaciones} \times 2 \text{ restricciones/sólido} = 0$$

Por tanto, el mecanismo tiene un grado de redundancia igual a 1.

2.6 Espacio de configuraciones. Subespacio de configuraciones accesibles

Espacio de configuraciones. Se denomina *espacio de configuraciones de un sistema* un espacio puntual de dimensión n –número de coordenadas generalizadas– en que los puntos tienen como coordenadas las coordenadas generalizadas que se han considerado en la descripción de la configuración del sistema.

Subespacio de configuraciones accesibles. Aquellos puntos del espacio de configuraciones que cumplen las ecuaciones de enlace geométricas forman el subespacio de configuraciones accesibles. Es, por tanto, el conjunto de configuraciones que el mecanismo puede conseguir sin romper los enlaces. Este subespacio tendrá como dimensión el número de coordenadas independientes. Así, si un sistema de una coordenada independiente se define mediante 3 coordenadas generalizadas, el espacio de configuraciones será de dimensión 3 y el subespacio de configuraciones accesibles tendrá dimensión 1; será una curva –conexa o no– dentro de este espacio.

Si para el mecanismo de yugo escocés de la figura 2.8 se toman como coordenadas generalizadas el ángulo φ de rotación de la manivela y el desplazamiento x del pistón, el espacio de las configuraciones es el plano x, φ y el subespacio de configuraciones accesibles es la curva dibujada.

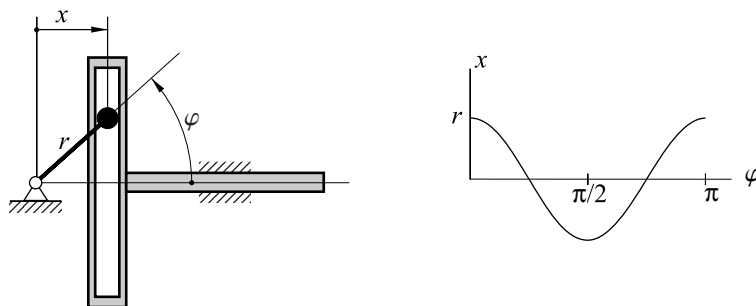


Fig. 2.8 Subespacio de configuraciones accesibles de un yugo escocés

2.7 Resolución de las ecuaciones de enlace geométricas. Método de Newton-Raphson

El análisis de un sistema mecánico definido con un conjunto no mínimo de coordenadas generalizadas requiere la determinación de cuál es el subespacio de configuraciones accesibles o, lo que es lo mismo, encontrar soluciones de las ecuaciones de enlace geométricas para un instante determinado si son función explícita del tiempo. La resolución de este sistema muy pocas veces se puede hacer analíticamente y hay que recurrir, en general, a métodos numéricos de diferentes tipos –minimización de funciones escalares, aproximaciones sucesivas, etc.–, el más conocido de los cuales es el método de Newton–Raphson.

Método de Newton–Raphson. Este método resuelve el sistema de ecuaciones de enlace $\phi(\mathbf{q})=0$ por aproximaciones sucesivas a partir de una configuración inicial aproximada y linealizándolo en el entorno de la configuración obtenida en el paso anterior. La linealización de una ecuación de enlace $\phi_i(\mathbf{q})=0$ alrededor de una configuración \mathbf{q}^0 da lugar a la expresión:

$$\phi_i(\mathbf{q}) = 0 \approx \phi_i(\mathbf{q}^0) + \frac{\partial \phi_i}{\partial q_1} (q_1 - q_1^0) + \dots + \frac{\partial \phi_i}{\partial q_n} (q_n - q_n^0)$$

Si se linealizan todas las ecuaciones de enlace $\phi(\mathbf{q})=0$, se obtiene en forma matricial:

$$\phi(\mathbf{q}) = 0 \approx \phi(\mathbf{q}^0) + \phi_q(\mathbf{q}^0)\Delta\mathbf{q} \quad (2.1)$$

$$\text{con } \phi_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

donde ϕ_q es la matriz jacobiana o la matriz de derivadas parciales del sistema de las ecuaciones de enlace geométricas respecto de las coordenadas generalizadas.

El método de Newton–Raphson itera la ecuación 2.1 hasta que $\phi(\mathbf{q})$ es inferior a una tolerancia ϵ .

$$\begin{array}{l} \phi(\mathbf{q}) + \phi_q(\mathbf{q})\Delta\mathbf{q} = 0 \\ \downarrow \\ \Delta\mathbf{q} = -\phi_q^{-1}(\mathbf{q})\phi(\mathbf{q}) \\ \downarrow \\ \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} \\ \downarrow \\ \text{Si } \phi(\mathbf{q}) > \epsilon \end{array} \quad \left\langle \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right.$$

El método de Newton-Raphson converge rápidamente hacia la solución si la aproximación es suficientemente buena pero puede, también divergir. Existen modificaciones del algoritmo de Newton-Raphson que aseguran más la convergencia en detrimento de la velocidad.

La base de otros métodos es la minimización de una función escalar que cuantifica el error cuadrático en el cumplimiento de las ecuaciones de enlace: $\text{error}(\mathbf{q}) = \phi^T(\mathbf{q}) \phi(\mathbf{q})$

2.8 Configuraciones singulares

Se denominan *configuraciones singulares* de un mecanismo aquellas en que el mecanismo presenta un funcionamiento diferenciado respecto al de las otras configuraciones accesibles, y se pueden distinguir, en principio, dos tipos: los puntos muertos y las bifurcaciones.

Puntos muertos. Se dice que una configuración accesible de un mecanismo es un punto muerto para la coordenada q_i cuando esta coordenada toma un valor extremo, ya sea un máximo o un mínimo.

En un mecanismo pistón-biela-manivela como el de la figura 2.9, por ejemplo, hay 2 puntos muertos para la coordenada generalizada x que mide el recorrido del pistón dentro del cilindro: la configuración en que $x = l + r$ –conocida como punto muerto superior– y aquella en que $x = l - r$ –conocida como punto muerto inferior. En cambio, la coordenada φ , que mide el ángulo girado por la manivela, no presenta puntos muertos, ya que nunca puede llegar a un extremo –el ángulo φ puede crecer indefinidamente.

En un punto muerto, la velocidad generalizada correspondiente seguro que tiene siempre un valor nulo independientemente de como se esté moviendo el resto del mecanismo. Esto hace que esta velocidad generalizada no sirva para describir la cinemática del mecanismo y no describa ningún grado de libertad en esta configuración. En el mecanismo de la figura 2.9, por ejemplo, la velocidad generalizada \dot{x} puede utilizarse como grado de libertad en todo el subespacio de configuraciones accesibles, pero no en los puntos muertos de la coordenada x . Por el contrario, $\dot{\varphi}$ puede ser velocidad generalizada independiente sin ningún tipo de problema.

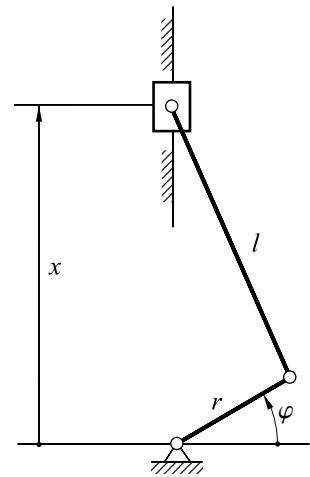


Fig. 2.9 Mecanismo pistón-biela-manivela

La determinación de los puntos muertos de un mecanismo no es simple, ya que es un problema geométrico, y en principio no lineal, y normalmente se hace por inspección visual del mecanismo. Más adelante se verá una condición necesaria para la determinación de puntos muertos en mecanismos de un grado de libertad.

Bifurcaciones. Una configuración accesible de un mecanismo es una bifurcación cuando el mecanismo puede evolucionar, a partir de ella, por más caminos de los que podría hacerlo en otras configuraciones. En una configuración que no presente ninguna singularidad, un mecanismo de un grado de libertad puede evolucionar tan solo por un camino. En una bifurcación, la evolución podrá ser por más de un camino.

En la figura 2.10 se representa un paralelogramo articulado en una configuración accesible cualquiera y su evolución posible.

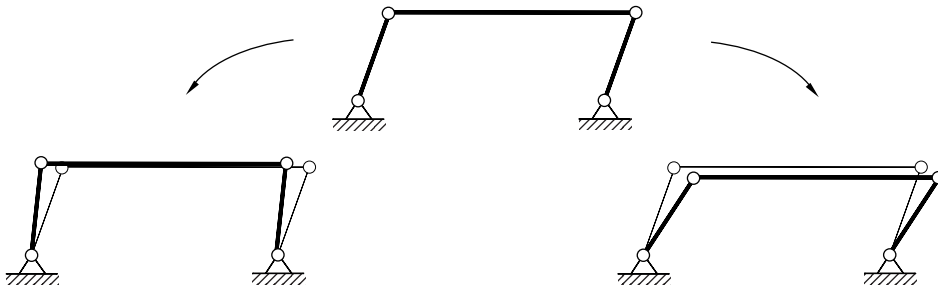


Fig. 2.10 Paralelogramo articulado en una configuración accesible cualquiera

En la figura 2.11 se ve el mismo paralelogramo cuando las tres barras son colineales –configuración singular y bifurcación– y las evoluciones que puede tener a partir de esta configuración.

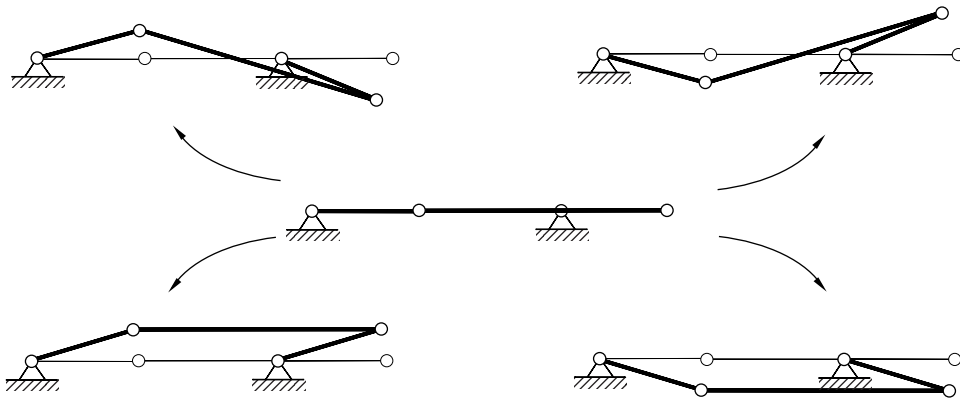


Fig. 2.11 Paralelogramo articulado en una bifurcación

Anexo 2.I Geometría de triángulos y cuadriláteros

En el estudio de mecanismos de barras planos, es frecuente que se haya de resolver la geometría de triángulos y cuadriláteros. Los triángulos aparecen sobre todo en las inversiones del mecanismo pistón-biela-manivela y los cuadriláteros lo hacen evidentemente al estudiar el cuadrilátero articulado.

Geometría de triángulos

En el estudio de un triángulo (Fig. 2.12) se pueden presentar 4 situaciones diferentes, según se conozcan:

- Los tres lados a , b , c . Los ángulos se pueden determinar directamente a partir del teorema del coseno:

$$\cos(\alpha) = (b^2 + c^2 - a^2) / 2 b c$$
 (Fig. 2.13).
- Dos lados y el ángulo que forman, a , b , γ . El tercer lado se determina también a partir del teorema del coseno: $c = (a^2 + b^2 - 2 a b \cos(\gamma))^{1/2}$. Un segundo ángulo se obtiene, por ejemplo, del teorema del seno: $\sin(\alpha) = (a/c) \sin(\gamma)$ (Fig. 2.15).
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, a , b , α . El tercer lado viene dado por la expresión $c = b \cos(\alpha) + (a^2 - b^2 \sin^2(\alpha))^{1/2}$. Un segundo ángulo se puede obtener como en el caso anterior (Fig. 2.14).
- Un lado y dos ángulos. Los lados se obtienen a partir del teorema del seno y teniendo en cuenta que $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\gamma)$ (Fig. 2.16). Así, si se conoce:
 - a , β , γ ; $b = a \sin(\beta) / \sin(\gamma + \beta)$; $c = a \sin(\gamma) / \sin(\gamma + \beta)$
 - a , α , γ ; $b = a \sin(\alpha + \gamma) / \sin(\alpha)$; $c = a \sin(\beta) / \sin(\alpha)$

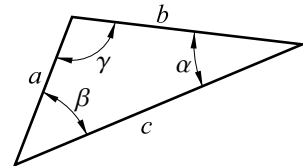


Fig. 2.12 Triángulo

Estas situaciones se presentan en los ejemplos siguientes:

- Determinación de la inclinación φ de la barra OP en función del largo ρ del cilindro.

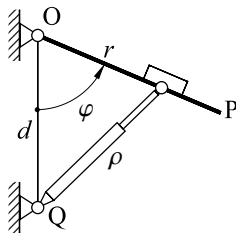


Fig. 2.13

- Determinación del largo l del cilindro PQ en función del ángulo girado por la manivela OP.

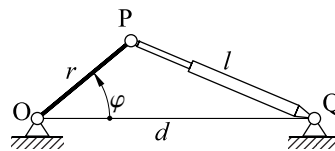


Fig. 2.15

- Determinación de la posición d del pistón Q en función del ángulo girado por la manivela OP.

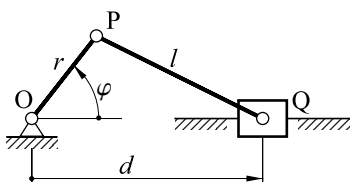


Fig. 2.14

- Determinación de la posición d del pistón Q en función del ángulo girado por el balancín OP.

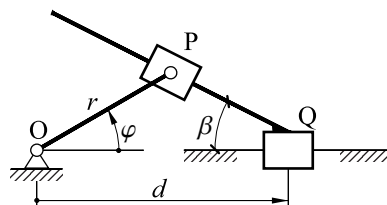


Fig. 2.16

Geometría de cuadriláteros

El análisis del cuadrilátero (Fig. 2.17) se realiza a partir de las ecuaciones obtenidas de la condición de cierre:

$$\begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 - l_4 &= 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 &= 0 \end{aligned}$$

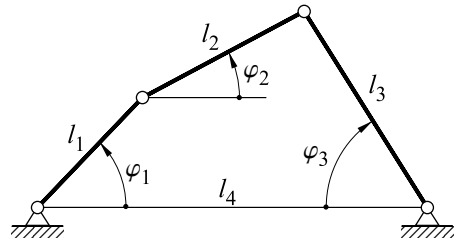


Fig. 2.17 Cuadrilátero articulado

En este anexo se presenta la determinación de los dos ángulos, φ_2 y φ_3 , en función del ángulo φ_1 y de las longitudes de los lados l_1 , l_2 , l_3 y l_4 .

De las ecuaciones anteriores se puede eliminar el ángulo φ_2 de la biela y se obtiene la ecuación de Freudenstein:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - c_3 \cos \varphi_1 - c_1 \cos \varphi_3 + c_4 &= 0 \quad \text{con} \quad c_1 = l_4 / l_1 \\ c_3 &= l_4 / l_3 \\ c_4 &= (l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2) / 2 l_1 l_3 \end{aligned}$$

A partir de las expresiones del seno y del coseno de un ángulo en función de la tangente del ángulo mitad¹ para el ángulo φ_3 , se obtiene la ecuación siguiente de segundo grado:

$$\begin{aligned} (c_1 + c_4 + \cos \varphi_1 (-1 - c_3)) t_3^2 + (-2 \sin \varphi_1) t_3 + (-c_1 + c_4 + \cos \varphi_1 (1 - c_3)) &= 0 \\ \text{donde } t_3 &= \tan \frac{\varphi_3}{2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

De manera similar, con la eliminación de φ_2 se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c_2 \cos \varphi_1 - c_1 \cos \varphi_2 + c_5 &= 0 \quad \text{con} \quad c_2 = l_4 / l_2 \\ c_5 &= (l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2) / 2 l_1 l_2 \\ (c_1 + c_5 - \cos \varphi_1 (1 + c_2)) t_2^2 + (2 \sin \varphi_1) t_2 + (-c_1 + c_5 + \cos \varphi_1 (1 - c_2)) &= 0, \quad \text{on} \quad t_2 = \tan \frac{\varphi_2}{2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

La posible doble solución real de las ecuaciones 2.2 y 2.3 corresponde a la posibilidad de que, dado φ_1 , existan dos configuraciones posibles del cuadrilátero (Fig. 2.18).

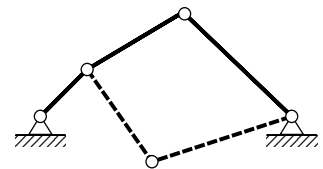


Fig. 2.18 Doble solución del cuadrilátero

¹ $\sin \alpha = \frac{2 \tan \alpha / 2}{1 + \tan^2(\alpha / 2)}$; $\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2(\alpha / 2)}{1 + \tan^2(\alpha / 2)}$.

Hay que observar que este cambio de manera general pasa de expresiones trigonométricas a polinomios racionales.

De manera similar se pueden resolver los cuadriláteros con correderas como, por ejemplo, el de la figura 2.19.

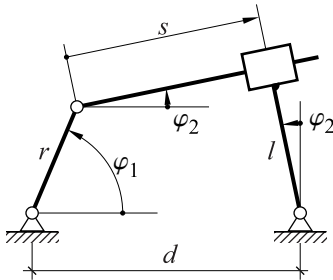


Fig. 2.19 Cuadrilátero con corredera

$$r \cos \varphi_1 + s \cos \varphi_2 + l \sin \varphi_2 - d = 0$$

$$r \sin \varphi_1 + s \sin \varphi_2 - l \cos \varphi_2 = 0$$

Eliminando la variable s

$$r \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - l + d \sin \varphi_2 = 0 \quad \text{y utilizando } t_2 = \tan \frac{\varphi_2}{2}$$

$$(r \sin \varphi_1 + l)t_2^2 + 2(r \cos \varphi_1 - d)t_2 + (l - r \sin \varphi_1) = 0$$

Anexo 2.II Orientación y velocidad angular de un sólido rígido

En el análisis de mecanismos, un punto especialmente complejo es el estudio de la orientación y la velocidad angular de los sólidos en el espacio.

Si un sólido tiene movimiento plano, su orientación queda definida por un ángulo contenido en el plano del movimiento y su velocidad angular es la derivada temporal de este ángulo, que si hay que tratarla como vector es perpendicular al plano del movimiento.

Orientación de sólidos en el espacio

Para estudiar la orientación de los sólidos en el espacio se parte de bases vectoriales, una base fija B en la referencia respecto a la cual se estudia el movimiento, y una fija al sólido B'. La matriz de cambio de base [S] se asocia a la orientación del sólido respecto a la referencia

$$\{u\}_B = [S]\{u\}_{B'} \text{ con } [S] \text{ ortonormal.}$$

El teorema de Euler afirma que todo cambio de orientación se puede considerar como una rotación simple φ en el entorno de una dirección de versor \mathbf{v} . Esta dirección corresponde a la del vector propio asociado al valor propio unitario de la matriz de cambio [S] y se puede encontrar, por tanto, mediante la expresión

$$[S - \mathbf{I}]\mathbf{v} = 0$$

El ángulo girado φ en el plano perpendicular a \mathbf{v} es tal que

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \{\mathbf{v}^\perp\}^T [S] \{\mathbf{v}^\perp\} \\ \sin \varphi &= \{\mathbf{v} \times \mathbf{v}^\perp\}^T [S] \{\mathbf{v}^\perp\}, \text{ donde } \mathbf{v}^\perp \text{ es un versor normal a } \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Si lo que se conoce es el versor \mathbf{v} y el ángulo girado φ , la matriz de cambio de base es

$$[S] = [\mathbf{I}] \cos \varphi + \mathbf{v} \mathbf{v}^T (1 - \cos \varphi) + [\mathbf{v}] \sin \varphi$$

definiendo $[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$

Analíticamente, es interesante definir los parámetros de Euler como

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{v} \sin \frac{\varphi}{2} \quad \{\mathbf{e}\} = \{e_1, e_2, e_3\}^T \\ \text{se observa que } &e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \end{aligned}$$

En función de los parámetros de Euler, la matriz de cambio se expresa

$$[\mathbf{S}] = (2e_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T + 2[\mathbf{e}]e_0 \quad \text{definiendo } [\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}$$

y si se conoce esta matriz, los parámetros de Euler se obtienen a partir de

$$\cos \varphi = (S_{11} + S_{22} + S_{33} - 1) / 2$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2 \sin \varphi} \begin{Bmatrix} S_{32} - S_{23} \\ S_{13} - S_{31} \\ S_{21} - S_{12} \end{Bmatrix}$$

El interés analítico de los parámetros de Euler no es paralelo a la facilidad de su interpretación física y cuando ésta es necesaria para la definición del problema o la interpretación de resultados, la orientación se define a partir de los ángulos de Euler.

Los ángulos de Euler son 3 rotaciones simples ψ , θ y φ sucesivas alrededor de 3 ejes, cada uno de los cuales es orientado por las rotaciones anteriores. Al ser rotaciones simples, en las máquinas a menudo quedan materializadas por pares cinemáticos cilíndricos o de revolución. En la figura 2.20 se muestran los dos juegos de ángulos de Euler: *a*) ángulos de Euler empleados tradicionalmente en la orientación de rotores rápidos, por ejemplo los giroscopios, y *b*) ángulos de Euler de tres ejes empleados normalmente en la orientación de vehículos.

A partir de las matrices de cambio elementales asociadas a cada una de las rotaciones introducidas por los ángulos de Euler $[\psi]$, $[\theta]$ y $[\varphi]$ la matriz de cambio total es $[\mathbf{S}] = [\psi] [\theta] [\varphi]$.

Cuando se presta más atención a la orientación inicial y final que a su evolución se pueden utilizar también rotaciones α , β y γ alrededor de ejes fijos, introducidas por orden. Igual que en el caso anterior, la matriz de cambio global a partir de las asociadas a cada una de las rotaciones es $[\mathbf{S}] = [\alpha] [\beta] [\gamma]$.

Vector velocidad angular

La velocidad angular ω es una magnitud vectorial asociada al cambio de orientación que no aparece directamente como derivada temporal de ninguna coordenada.

En el estudio de la distribución de velocidades en un sólido rígido se obtiene fácilmente que

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(O) + [\mathbf{S}]^{-1}[\dot{\mathbf{S}}]\overline{\mathbf{OP}}$$

$[\mathbf{S}]^{-1}[\dot{\mathbf{S}}] = [\omega]$ es una matriz antisimétrica a la cual se puede asociar el operador lineal producto vectorial de manera que

$$[\mathbf{S}]^{-1}[\dot{\mathbf{S}}]\overline{\mathbf{OP}} = [\omega]\overline{\mathbf{OP}} = \omega \times \overline{\mathbf{OP}}$$

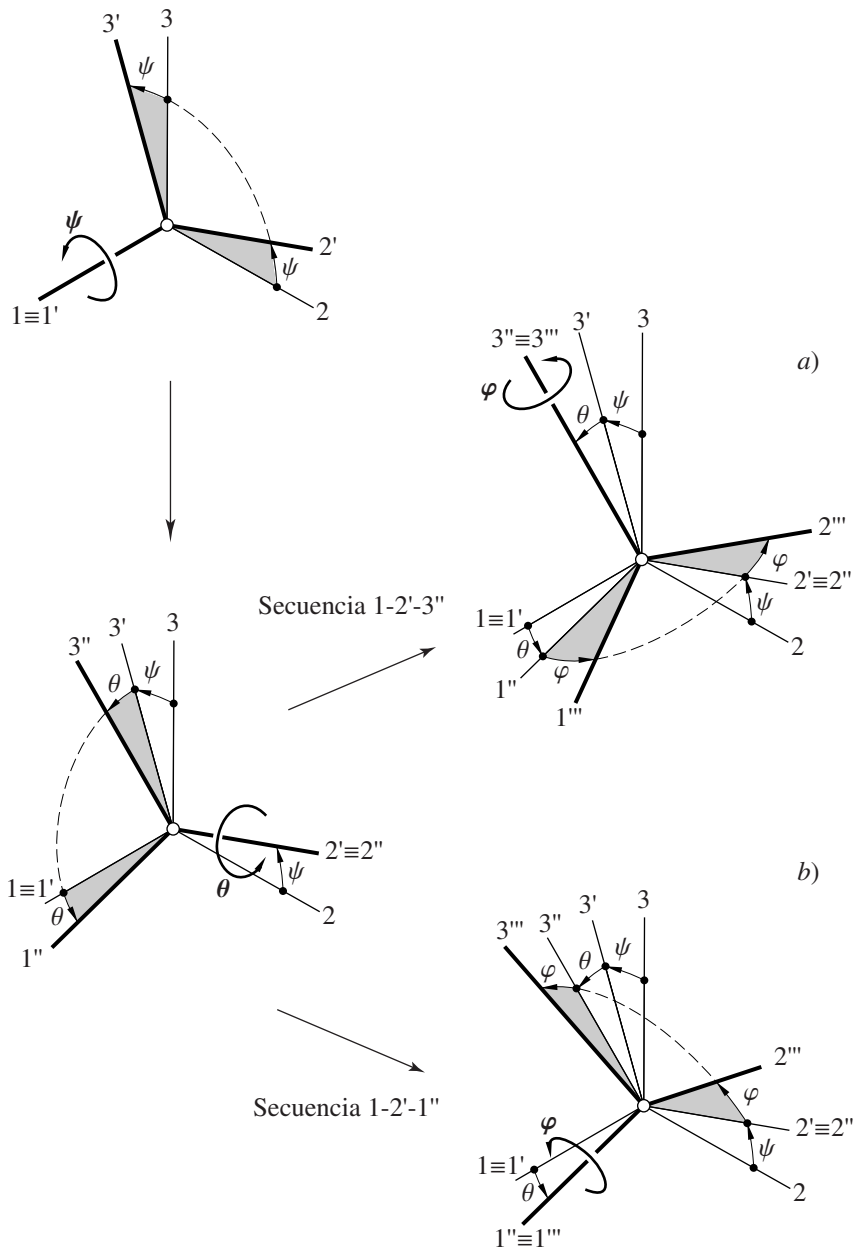


Fig. 2.20 Ángulos de Euler a) de dos ejes y b) de tres ejes

Si la orientación se define por medio de los ángulos de Euler, el vector ω resulta particularmente intuitivo. A cada rotación simple le es asignado un vector $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$ –de módulo la derivada temporal del ángulo girado, de dirección la del eje de rotación y de sentido el dado por el avance de un tornillo con rosca a derechas que gira según la rotación– y la velocidad angular es la suma de los tres vectores.

$$\omega = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\varphi}$$

La relación entre los parámetros de Euler y la velocidad angular viene dada por las expresiones siguientes:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{E}\dot{\mathbf{p}}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\mathbf{E}^T\boldsymbol{\omega}, \text{ donde } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix}$$

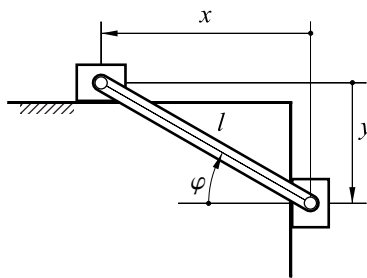
Problemas

P 2-1 En el mecanismo de la figura:

a) Definir conjuntos suficientes de coordenadas generalizadas y velocidades generalizadas.

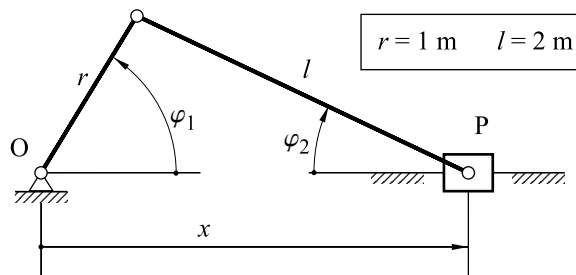
Determinar:

- b) El número de grados de libertad, conjuntos de coordenadas y velocidades generalizadas independientes.
 c) Ecuaciones de enlace geométricas y cinemáticas, si se toma el conjunto $\{x, y\}$ de coordenadas generalizadas.



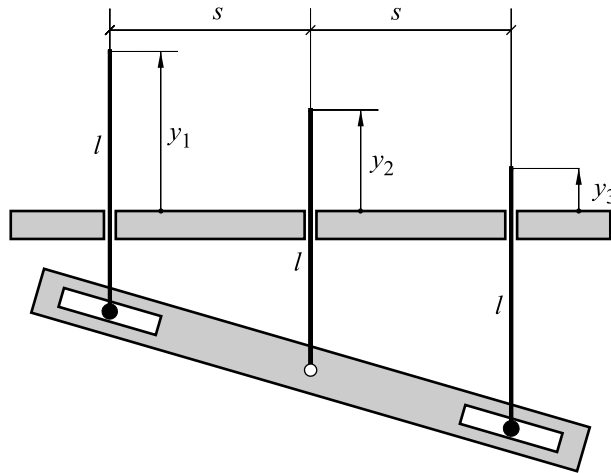
P 2-2 Estudiar la movilidad del mecanismo pistón-biela-manivela.

- a) Definición de un conjunto suficiente de coordenadas y velocidades generalizadas.
 b) Planteamiento de las ecuaciones de enlace si se utiliza el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, x\}$ como coordenadas generalizadas.
 c) Obtención de los gráficos $\varphi_2(\varphi_1)$ y $x(\varphi_1)$.
 d) Determinación de los puntos muertos para las coordenadas φ_1, φ_2, x .
 e) ¿Qué enlaces se pueden establecer entre los diferentes miembros para no tener redundancia en la materialización de este mecanismo?



P 2-3 Para el mecanismo diferencial de la figura, determinar:

- El número de grados de libertad.
- Las ecuaciones de enlace geométricas y cinemáticas cuando se toma el conjunto de coordenadas generalizadas $\{y_1, y_2, y_3\}$.

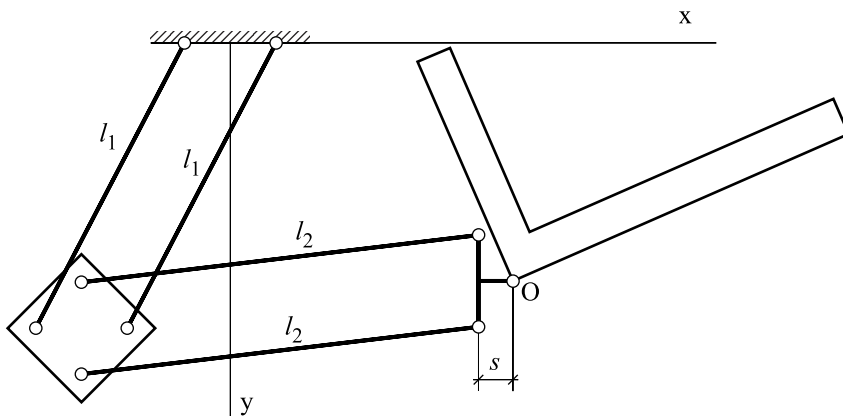


P 2-4 En el tecnógrafo representado en la figura:

- Definir un conjunto de coordenadas generalizadas suficiente que incluya las rotaciones en los pares cinemáticos de revolución y las coordenadas cartesianas del punto O.

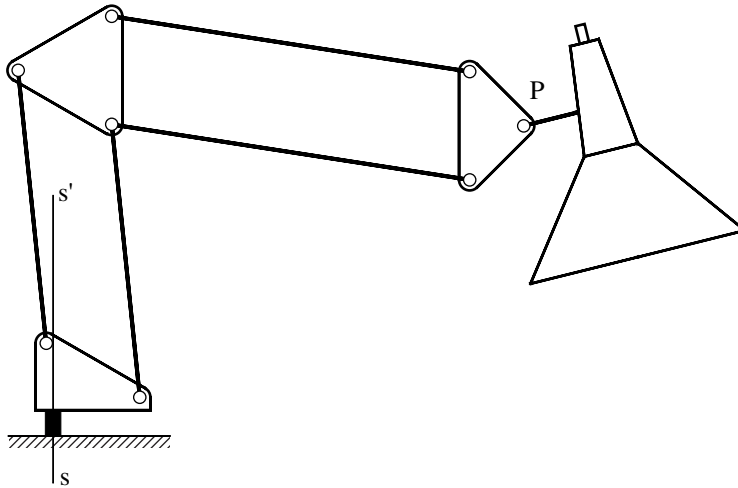
Determinar:

- El número de grados de libertad.
- Las ecuaciones de enlace geométricas.
- Los puntos muertos para las coordenadas empleadas.

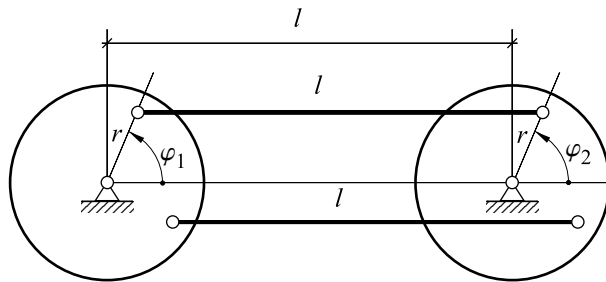


P 2-5 La lámpara de la figura puede girar alrededor del eje vertical $s-s'$ y el plano de la pantalla coincide con el plano de las barras articuladas.

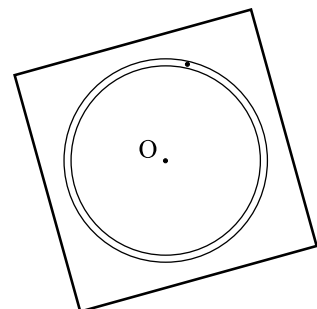
- Determinar el número de grados de libertad.
- Definir tres rotaciones que permitan situar el punto P.
- Estudiar la orientación de la pantalla y el grado de redundancia del mecanismo en su materialización (especificar que tipo de pares considera).



P 2-6 Para el sistema de la figura, se pide estudiar la redundancia y las configuraciones singulares en los casos de una biela y de dos.

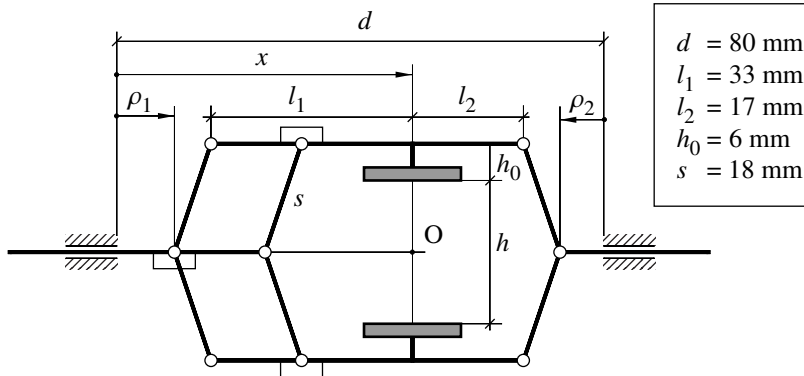


P 2-7 La corona circular de la figura puede moverse sobre una superficie plana. Para guiarla de manera que gire alrededor de O, se colocan pasadores que pueden deslizar dentro de una ranura circular de la superficie plana. Estudiar el número y la colocación adecuada de los pasadores.



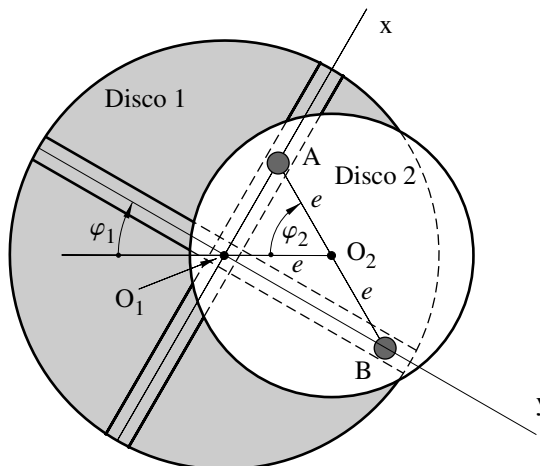
P 2-8 La figura representa un mecanismo de pinza móvil que se acciona a partir del desplazamiento de las dos barras extremas.

- a) Determinar el número de grados de libertad de la pinza.
- b) Relacionar la posición x del centro O y la apertura h de la pinza con el desplazamiento de las dos barras extremas, mediante el establecimiento de las ecuaciones de enlace geométricas.

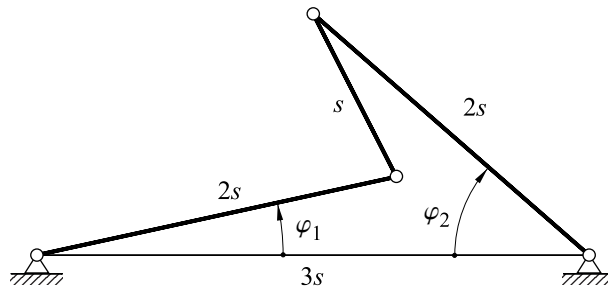


P 2-9 Los dos discos de la figura pueden girar en el entorno de sus ejes O_1 y O_2 . El disco 1 tiene dos ranuras a 90° por donde pueden correr los botones A y B fijos al disco 2.

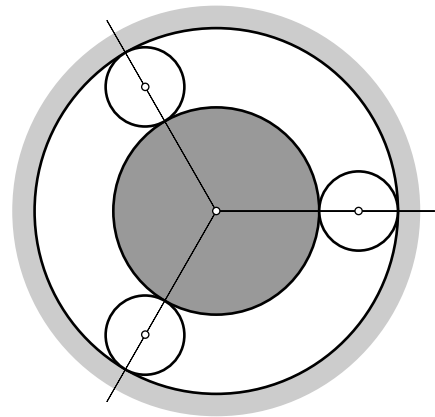
- a) Determinar el número de grados de libertad y hacer un estudio de las redundancias.
- b) Establecer la relación entre los ángulos girados por los dos discos.



- P 2-10** Determinar la relación entre los ángulos φ_1 y φ_2 del cuadrilátero articulado de la figura y establecer las configuraciones singulares.



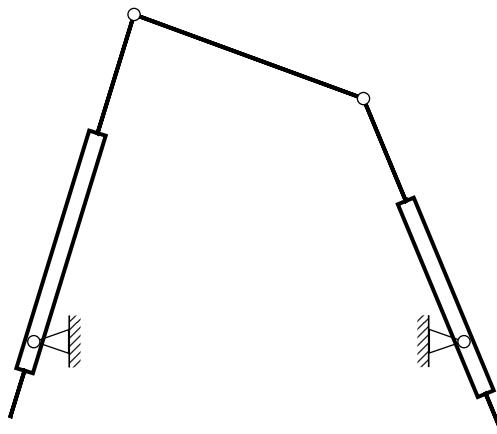
- P 2-11** En el tren epicycloidal de ruedas de fricción de la figura, la rueda más grande es fija. Todas las ruedas en contacto tienen movimiento relativo de rodadura sin deslizamiento y las ruedas intermedias no tienen ningún otro enlace que los puntos de contacto.



Determinar:

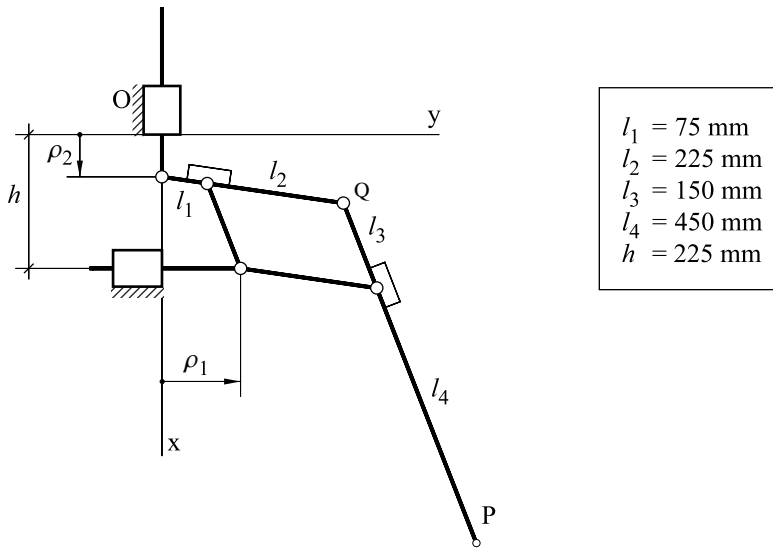
- El número de grados de libertad.
- Las posibles redundancias.

- P 2-12** Determinar el número de grados de libertad del mecanismo de la figura. Establecer un conjunto de a) 5 y b) 4 coordenadas generalizadas y las ecuaciones de enlace entre ellas.



P 2-13 En el mecanismo de pantógrafo de la figura:

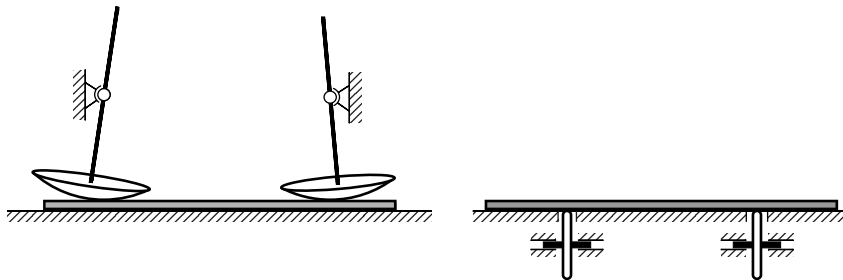
- Determinar el número de grados de libertad.
- Relacionar las coordenadas de P con el desplazamiento ρ_1 de la barra horizontal y ρ_2 de la barra vertical.



P 2-14 Para manipular una placa que puede deslizar sobre una mesa plana, se dispone:

- De dos palpadores en forma de casquillo esférico que no deslizan respecto a la placa. Los casquillos están articulados a la mesa mediante dos rótulas esféricas.
- De dos ruedas de fricción que mantienen contacto sin deslizar con la placa.

Definir un conjunto suficiente de coordenadas y velocidades generalizadas y determinar el número de coordenadas independientes y de grados de libertad.



3 Cinemática de mecanismos

En este capítulo se estudia la cinemática de los mecanismos a partir de las ecuaciones de enlace cinemáticas que se pueden encontrar, o bien derivando las ecuaciones de enlace geométricas, o bien a partir del estudio cinemático de los enlaces.

El estudio del caso particular del movimiento plano tiene un interés especial porque se presenta en muchos mecanismos y da lugar a procedimientos de análisis simplificados que tienen una interpretación gráfica sencilla.

3.1 Estudio cinemático de los mecanismos a partir de las ecuaciones de enlace geométricas

Para un mecanismo del cual se conoce: la configuración descrita mediante un conjunto de n coordenadas generalizadas, los enlaces descritos mediante un conjunto de ecuaciones de enlace, y otras restricciones entre coordenadas generalizadas o velocidades generalizadas, se pueden plantear el análisis de configuraciones o de montaje, el análisis de velocidades y el análisis de aceleraciones.

El análisis de configuraciones consiste en determinar el conjunto de valores de las coordenadas generalizadas que satisface todas las ecuaciones de enlace geométricas, dados los valores de las coordenadas generalizadas independientes y el tiempo, si aparece explícitamente, tal como se ha visto en el capítulo anterior.

El análisis de velocidades consiste en determinar el valor de las velocidades generalizadas de un mecanismo en una configuración, dados los valores de las velocidades generalizadas independientes y el tiempo, si aparece explícitamente en la formulación de las ecuaciones de enlace. Posteriormente se puede encontrar la distribución de velocidades de todos los miembros del mecanismo.

El análisis de aceleraciones consiste en determinar el valor de las derivadas de las velocidades generalizadas de un mecanismo en una configuración, dados los valores de las velocidades generalizadas independientes y los valores de las derivadas de las velocidades generalizadas independientes, así como también del tiempo, si éste aparece explícitamente en la formulación de las ecuaciones de enlace. Posteriormente se puede encontrar, a partir de las velocidades generalizadas y sus derivadas, la distribución de aceleraciones de todos los miembros del mecanismo.

Análisis de velocidades. Para hacer el análisis de velocidades se deriva el sistema de ecuaciones de enlace geométricas $\phi(\mathbf{q}, t)$ respecto al tiempo y se obtiene un sistema de ecuaciones cinemáticas lineales para las velocidades generalizadas:

$$\frac{d}{dt} \phi(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \phi_{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \phi_t = 0 \quad (3.1)$$

donde ϕ_t es el vector de derivadas parciales de $\phi(\mathbf{q}, t)$ respecto del tiempo y $\phi_{\mathbf{q}}$ es la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones. Si el vector de ecuaciones de enlace es

$$\phi(\mathbf{q}, t) = \begin{Bmatrix} \phi_1(\mathbf{q}, t) \\ \vdots \\ \phi_{m_c}(\mathbf{q}, t) \end{Bmatrix} \quad \text{la matriz jacobiana } \phi_{\mathbf{q}} \text{ y el vector } \phi_t \text{ son}$$

$$\phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1(\mathbf{q}, t)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1(\mathbf{q}, t)}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{m_c}(\mathbf{q}, t)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{m_c}(\mathbf{q}, t)}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad \phi_t = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_1(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_{m_c}(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \end{Bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones de enlace cinemáticas obtenido así sólo tiene en cuenta las restricciones geométricas. Por lo tanto, si el sistema es no holónomo, se han de añadir las ecuaciones de enlace cinemáticas no establecidas a partir de la derivada de las ecuaciones de enlace geométricas.

Para determinar todas las velocidades generalizadas en una cierta configuración accesible del mecanismo y en un cierto instante, se ha de resolver este sistema de ecuaciones lineales (Eq. 3.1), que tiene tantas variables como velocidades generalizadas n y tantas ecuaciones como ecuaciones de enlace cinemáticas m_c . Para resolverlo se puede proceder de dos maneras:

a) hacer una partición del conjunto de velocidades generalizadas en velocidades generalizadas independientes $\dot{\mathbf{q}}^i$, tantas como grados de libertad, y velocidades generalizadas dependientes $\dot{\mathbf{q}}^d$

$$\left[\phi_{\mathbf{q}}^d \mid \phi_{\mathbf{q}}^i \right] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^d \\ \dot{\mathbf{q}}^i \end{Bmatrix} = -\phi_t \quad \phi_{\mathbf{q}}^d \cdot \dot{\mathbf{q}}^d + \phi_{\mathbf{q}}^i \cdot \dot{\mathbf{q}}^i = -\phi_t \quad \dot{\mathbf{q}}^d = -\left[\phi_{\mathbf{q}}^d \right]^{-1} \left[\phi_t + \phi_{\mathbf{q}}^i \cdot \dot{\mathbf{q}}^i \right] \quad (3.2)$$

donde la matriz $\phi_{\mathbf{q}}^d$ es una matriz cuadrada de dimensión m_c .

b) ampliar el sistema de ecuaciones introduciendo tantas ecuaciones de gobierno cinemáticas como grados de libertad tenga el mecanismo $n - m_c$. El sistema ampliado tendrá una matriz jacobiana cuadrada de dimensión n :

$$\dot{\mathbf{q}} = -\left[\phi'_q \right]^{-1} \cdot \phi'_t \quad (3.3)$$

donde ϕ'_q y ϕ'_t son, respectivamente, la matriz jacobiana y el vector de derivadas parciales temporales del conjunto de ecuaciones de enlace y de gobierno.

Análisis de aceleraciones. Para hacer el análisis de aceleraciones de un mecanismo, una vez se ha hecho el análisis de velocidades se ha de encontrar la derivada temporal de las velocidades generalizadas. Por eso, se vuelve a derivar respecto del tiempo la expresión 3.1, empleada para hacer el análisis de velocidades, con lo que se obtiene

$$\dot{\phi}_q \cdot \dot{q} + \phi_q \cdot \ddot{q} + \dot{\phi}_t = 0 \quad \phi_q \cdot \ddot{q} = -(\dot{\phi}_q \cdot \dot{q} + \dot{\phi}_t) \quad (3.4)$$

Esta expresión se puede escribir empleando tan sólo derivadas parciales del vector de ecuaciones de enlace, lo que facilita el tratamiento sistemático, ya que, tanto en el análisis de velocidades como en el de aceleraciones, todas las derivadas que se han de calcular son parciales:

$$\begin{aligned} \phi_q \cdot \ddot{q} + [\phi_q \cdot \dot{q}]_q \cdot \dot{q} + 2\phi_{qt} \cdot \dot{q} + \phi_{tt} &= 0 \\ \phi_q \cdot \ddot{q} &= -\left[[\phi_q \cdot \dot{q}]_q \cdot \dot{q} + 2\phi_{qt} \cdot \dot{q} + \phi_{tt} \right] \end{aligned}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones lineales para las derivadas de las velocidades generalizadas, se puede proceder de manera análoga a como se ha hecho con las velocidades. Si en la expresión 3.4 se hace la partición en velocidades generalizadas dependientes e independientes se obtiene

$$\ddot{q}^d = -[\phi_q^d]^{-1} \cdot [\phi_q^i \cdot \ddot{q}^i + \dot{\phi}_q \cdot \dot{q} + \dot{\phi}_t] \quad (3.5)$$

y si se añade al sistema de ecuaciones de enlace un conjunto de ecuaciones de gobierno, entonces

$$\ddot{q} = -[\phi'_q]^{-1} \cdot (\dot{\phi}'_q \cdot \dot{q} + \dot{\phi}'_t)$$

Ejemplo 3.1 Análisis de velocidades y aceleraciones del mecanismo de la figura 3.1.

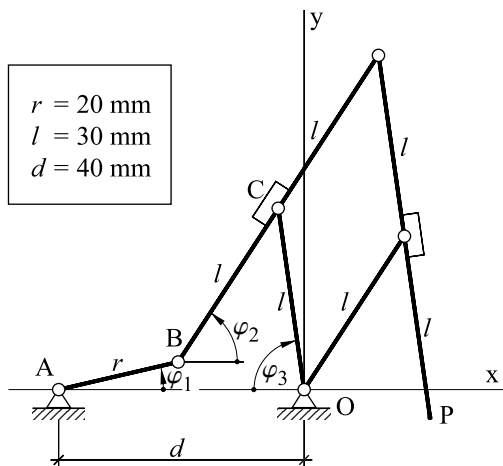


Fig. 3.1 Mecanismo articulado

De la condición de cierre del anillo ABCO se obtienen las dos ecuaciones de enlace

$$\begin{cases} r \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2 + l \cos \varphi_3 - d = 0 \\ r \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2 - l \sin \varphi_3 = 0 \end{cases}$$

que, escritas en forma vectorial, son

$$\phi(q) = \begin{cases} r \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2 + l \cos \varphi_3 - d \\ r \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2 - l \sin \varphi_3 \end{cases} = 0$$

y su matriz jacobiana es

$$\phi_q = \begin{bmatrix} -r \sin \varphi_1 & -l \sin \varphi_2 & -l \sin \varphi_3 \\ r \cos \varphi_1 & l \cos \varphi_2 & -l \cos \varphi_3 \end{bmatrix}$$

Si se considera el ángulo φ_1 como coordenada independiente, la expresión 3.2 del análisis de velocidades lleva a:

$$\begin{aligned}\phi_q &= \underbrace{\begin{bmatrix} -r \sin \varphi_1 \\ r \cos \varphi_1 \end{bmatrix}}_{\phi_q^i} \underbrace{\begin{bmatrix} -l \sin \varphi_2 & -l \sin \varphi_3 \\ l \cos \varphi_2 & -l \cos \varphi_3 \end{bmatrix}}_{\phi_q^d} \\ \dot{q}^d &= -[\phi_q^d]^{-1} \cdot [\dot{\phi}_t + \phi_q^i \cdot \dot{q}^i] = -\begin{bmatrix} -l \sin \varphi_2 & -l \sin \varphi_3 \\ l \cos \varphi_2 & -l \cos \varphi_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} -r \sin \varphi_1 \\ -r \cos \varphi_1 \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \\ &= -\frac{r}{l \sin(\varphi_2 + \varphi_3)} \begin{Bmatrix} \sin(\varphi_1 + \varphi_3) \\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

El análisis de aceleraciones a partir de la expresión 3.5 da lugar a la expresión

$$\begin{aligned}\ddot{q}^d &= \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} = -[\phi_q^d]^{-1} \cdot [\phi_q^i \cdot \ddot{q}^i + \dot{\phi}_q \cdot \dot{q} + \dot{\phi}_t] = -\begin{bmatrix} -l \sin \varphi_2 & -l \sin \varphi_3 \\ l \cos \varphi_2 & -l \cos \varphi_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \\ &= \left(\begin{Bmatrix} -r \sin \varphi_1 \\ -r \cos \varphi_1 \end{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 + \begin{bmatrix} -r \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 & -l \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 & -l \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 \\ r \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 & -l \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 & l \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} \right) = \\ &= -\frac{1}{l \sin(\varphi_2 + \varphi_3)} \left\{ l \dot{\varphi}_3^2 + r \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + l \dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + r \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \right\} \\ &= -\frac{1}{l \sin(\varphi_2 + \varphi_3)} \left\{ l \dot{\varphi}_3^2 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + r \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + l \dot{\varphi}_2^2 + r \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right\}\end{aligned}$$

Tanto el análisis de velocidades como el de aceleraciones se pueden hacer introduciendo una ecuación de gobierno que describa, por ejemplo, la evolución de $\varphi_1(t) = f(t)$ impuesta por un motor de accionamiento. En este caso, el sistema de ecuaciones de enlace, su matriz jacobiana y las expresiones de las velocidades y las aceleraciones son:

$$\begin{aligned}\phi'(q) &= \begin{Bmatrix} r \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2 + l \cos \varphi_3 - d \\ r \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2 - l \sin \varphi_3 \\ \varphi_1 - f(t) \end{Bmatrix} = 0 \\ \phi'_q &= \begin{bmatrix} -r \sin \varphi_1 & -l \sin \varphi_2 & -l \sin \varphi_3 \\ r \cos \varphi_1 & l \cos \varphi_2 & -l \cos \varphi_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \phi'_t &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_t(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{f}(t) \end{Bmatrix} \\ \dot{q} &= \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} -r \sin \varphi_1 & -l \sin \varphi_2 & -l \sin \varphi_3 \\ r \cos \varphi_1 & l \cos \varphi_2 & -l \cos \varphi_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{f}(t) \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -r \sin \varphi_1 & -l \sin \varphi_2 & -l \sin \varphi_3 \\ r \cos \varphi_1 & l \cos \varphi_2 & -l \cos \varphi_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} -r\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 & -l\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 & -l\dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 \\ r\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 & -l\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 & l\dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{f}(t) \end{Bmatrix} \right)$$

3.2 Redundancia y configuraciones singulares

Las redundancias, ya sean totales o tangentes, y las bifurcaciones descritas en el capítulo 2 se ponen de manifiesto en la matriz jacobiana de las ecuaciones de enlace en forma de una deficiencia en el rango –rango por filas menor que el número de ecuaciones. En este caso, no se podrá resolver el sistema de ecuaciones de las velocidades (Eq. 3.1) ni el sistema de ecuaciones de las aceleraciones (Eq. 3.4). El estudio de la causa de la deficiencia en rango requiere el análisis de las ecuaciones geométricas en el espacio de las configuraciones.

Puntos muertos en mecanismos de un grado de libertad sin ecuaciones de gobierno. Tal como se ha visto al capítulo 2, cuando un sistema está en un punto muerto para una determinada coordenada generalizada, su derivada no se puede tomar como independiente ya que forzosamente tiene un valor nulo. Si se hace uso de la ecuación 3.2 en la configuración de punto muerto, tomando la coordenada que está en punto muerto como independiente, el término $\phi_q^1 \dot{q}^1$ es nulo. Para que el sistema de ecuaciones resultante $\phi_q^a \dot{q}^a = 0$ tenga solución diferente de la trivial –las otras velocidades generalizadas no son necesariamente nulas–, el determinante de la matriz ϕ_q^a ha de ser nulo.

Para determinar las posibles configuraciones que son puntos muertos para una coordenada generalizada, se puede considerar ésta como independiente y resolver el sistema siguiente de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} \phi(q) = 0 \\ \det \phi_q^d = 0 \end{cases}$$

Las configuraciones encontradas así serán puntos muertos siempre que no hagan que la matriz jacobiana ϕ_q sea deficiente en rango; en este caso, la configuración correspondería a una redundancia o a una bifurcación.

Ejemplo 3.2 Determinación del punto muerto del mecanismo del ejemplo 3.1 (Fig. 3.1) correspondiente al máximo de la coordenada φ_3 .

Por inspección visual se comprueba, por ejemplo, que a partir de la configuración del dibujo, φ_3 puede ir aumentando hasta que las barras AB y BC queden alineadas, configuración que corresponde, por tanto, al punto muerto buscado. Si las medidas del mecanismo son las dadas en la figura, este punto muerto corresponde a $\varphi_3=90^\circ$.

Si se considera la coordenada φ_3 como independiente

$$\phi_q = \begin{bmatrix} -r \sin \varphi_1 & -l \sin \varphi_2 \\ r \cos \varphi_1 & l \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

y la condición necesaria para la existencia del punto muerto para φ_3

$$\text{Det } \phi_q = rl(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = rl \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

comporta que las barras AB y BC han de estar alineadas $\varphi_1 = \varphi_2$, como ya se ha establecido por inspección visual.

3.3 Estudio cinemático de los mecanismos a partir de las ecuaciones de enlace cinemáticas

A veces, el estudio cinemático de un mecanismo se hace para una configuración conocida. En estos casos, es posible plantear el análisis de velocidades y de aceleraciones a partir de las ecuaciones de enlace cinemáticas obtenidas directamente de las relaciones cinemáticas.

Distribución de velocidades y aceleraciones en un sólido rígido. En el estudio cinemático de un sólido rígido, la expresión vectorial que permite encontrar la distribución de velocidades a partir de la velocidad de un punto \mathbf{O} — $\mathbf{v}(\mathbf{O})$ — y de la velocidad angular $-\boldsymbol{\omega}$ — del sólido da lugar a un conjunto de ecuaciones escalares lineales para las velocidades y para las velocidades angulares.

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}) + \boldsymbol{\omega} \times \overline{\mathbf{OP}}$$

Expresando los vectores en una base vectorial, esta igualdad se puede escribir en forma matricial como

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}) + \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}, \text{ o bien } \mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}) + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \overline{\mathbf{OP}}$$

$$\text{con } \overline{\mathbf{OP}} = \{x, y, z\}^T \text{ i } \boldsymbol{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}^T.$$

Así mismo, para las aceleraciones también se obtiene un conjunto de ecuaciones escalares lineales respecto de las aceleraciones y las aceleraciones angulares ($\boldsymbol{\alpha}$):

$$\mathbf{a}(\mathbf{P}) = \mathbf{a}(\mathbf{O}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overline{\mathbf{OP}}) + \boldsymbol{\alpha} \times \overline{\mathbf{OP}}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{P}) = \mathbf{a}(\mathbf{O}) + \begin{bmatrix} -(\omega_2^2 + \omega_3^2) & \omega_1 \omega_2 - \alpha_3 & \omega_1 \omega_3 + \alpha_2 \\ \omega_1 \omega_2 + \alpha_3 & -(\omega_1^2 + \omega_3^2) & \omega_2 \omega_3 - \alpha_1 \\ \omega_1 \omega_3 - \alpha_2 & \omega_2 \omega_3 + \alpha_1 & -(\omega_1^2 + \omega_2^2) \end{bmatrix} \cdot \overline{\mathbf{OP}}$$

$$\text{donde } \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}^T.$$

Relaciones cinemáticas establecidas por los enlaces. Las relaciones cinemáticas que se establecen entre miembros rígidos de un mecanismo son lineales respecto de las velocidades angulares de los miembros y las velocidades de puntos de los miembros. Estas relaciones se establecen a partir de las condiciones cinemáticas que imponen los enlaces, en particular el contacto con o sin deslizamiento entre sólidos rígidos, como por ejemplo la igualdad de velocidades de puntos y de velocidades angulares en determinadas direcciones. Para los enlaces generados por contacto entre miembros de un mecanismo, estas relaciones son:

Articulación entre los miembros s_1 y s_2 en el punto A (Fig. 3.2):

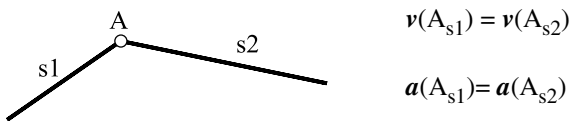


Fig. 3.2 Articulación

Guía-corredera entre los miembros s_1 y s_2 (Fig. 3.3):

$$\begin{cases} v(A_{\text{corredera}}) = v(A_{\text{guía}}) + v_{\text{deslizamiento}} \\ \omega_{\text{corredera}} = \omega_{\text{guía}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(A_{\text{corredera}}) = a(A_{\text{guía}}) + a_{\text{deslizamiento}} + 2\omega_{\text{guía}} \times v_{\text{deslizamiento}} \\ \alpha_{\text{corredera}} = \alpha_{\text{guía}} \end{cases}$$

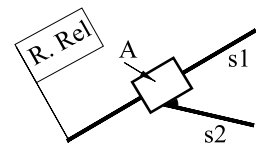


Fig. 3.3 Guía-corredera

La primera expresión y la tercera corresponden a una composición de movimientos si se toma la guía como referencia relativa y la referencia de estudio como referencia absoluta. La velocidad y la aceleración de deslizamiento corresponden a la velocidad y la aceleración relativas.

Guía-botón o guía corredera articulada entre los miembros s_1 y s_2 . El punto A corresponde al botón o a la articulación de la corredera (Fig. 3.4):

$$v(A_{\text{botón}}) = v(A_{\text{guía}}) + v_{\text{deslizamiento}}$$

$$a(A_{\text{botón}}) = a(A_{\text{guía}}) + a_{\text{deslizamiento}} + 2\omega_{\text{guía}} \times v_{\text{deslizamiento}}$$

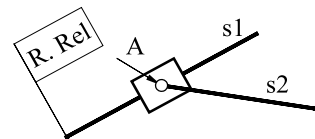


Fig. 3.4 Guía-botón

Como en el caso anterior, estas expresiones corresponden a una composición de movimientos si se toma la guía como referencia relativa y la referencia de estudio como referencia absoluta. La velocidad de deslizamiento $v_{\text{deslizamiento}}$ es la velocidad del centro del botón respecto a la guía y tiene la dirección tangente a la guía en el punto A. La aceleración de deslizamiento $a_{\text{deslizamiento}}$ es la aceleración del centro del botón respecto a la guía –aceleración relativa– y tiene una componente en la dirección tangente a la guía en el punto A y, si la guía no es recta, una componente normal que depende de la velocidad de deslizamiento y del radio de curvatura ρ de la guía en el punto A: $|a_n| = v_{\text{deslizamiento}}^2 / \rho$.

Rodadura entre los miembros s_1 y s_2 en el punto J de contacto. J_G es el punto geométrico de contacto (Fig. 3.5):

$$\text{con deslizamiento } \left\{ \mathbf{v}(J_{s1}) \right\}_n = \mathbf{v}(J_{s2}) \Big|_n$$

$$\text{sin deslizamiento } \begin{cases} \mathbf{v}(J_{s1}) = \mathbf{v}(J_{s2}) \\ \mathbf{v}_{s1}(J_G) = \mathbf{v}_{s2}(J_G) \\ \mathbf{a}_{s2}(J_{s1}) = -\mathbf{a}_{s1}(J_{s2}) = -\omega_{s1/s2} \times \mathbf{v}_{s2}(J_G) \end{cases}$$

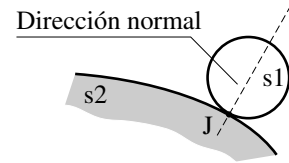


Fig. 3.5 Rodadura

Contacto puntual entre los miembros s_1 y s_2 en el punto J fijo a uno de los miembros (Fig. 3.6):

$$\mathbf{v}(J_{s1}) = \mathbf{v}(J_{s2}) + \mathbf{v}_{\text{deslizamiento}}$$

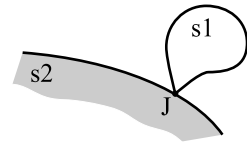


Fig. 3.6 Contacto puntual

La velocidad de deslizamiento $\mathbf{v}_{\text{deslizamiento}}$ es la velocidad del punto J_{s1} relativa al miembro s_2 y su dirección está comprendida en el plano tangente en el punto de contacto.

Determinación analítica de la distribución de velocidades y de aceleraciones. Si para el estudio de la distribución de velocidades de un mecanismo se toma un conjunto de velocidades generalizadas y entre ellas se imponen las relaciones introducidas por los enlaces y las ecuaciones constitutivas, se obtiene, igual que en el apartado 3.1, un sistema de ecuaciones lineales entre estas velocidades generalizadas. Los términos de la matriz Ψ son, en principio, función de la configuración y \mathbf{g} agrupa los términos independientes, constantes o función del tiempo, de las velocidades generalizadas.

$$[\Psi]\mathbf{u} + \mathbf{g} = 0$$

Las velocidades generalizadas \mathbf{u} se pueden dividir en velocidades generalizadas independientes \mathbf{u}^i , de las cuales se conoce su valor, y velocidades generalizadas dependientes \mathbf{u}^d , de las cuales se quiere determinar su valor, que se obtiene a partir de la partición de la matriz Ψ

$$\Psi^d \mathbf{u}^d + \Psi^i \mathbf{u}^i + \mathbf{g} = 0$$

$$\mathbf{u}^d = -[\Psi^d]^{-1} \Psi^i \mathbf{u}^i - \mathbf{g}$$

Estas últimas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones 3.2.

Para el estudio de la distribución de aceleraciones no es usual partir de la expresión anterior y derivar, ya que para hacerlo se necesitaría un planteamiento general en lo tocante a las configuraciones y, en este caso, sería preferible emplear el procedimiento descrito en el apartado 3.1.

Para una configuración dada, en ocasiones es viable determinar el sistema de ecuaciones entre las derivadas de las coordenadas generalizadas directamente a partir de las relaciones impuestas a las aceleraciones por los enlaces.

3.4 Movimiento plano

El procedimiento analítico para resolver la cinemática de los mecanismos visto en el apartado 3.3 se puede aplicar de manera muy simple en los mecanismos con movimiento plano. Por otra parte, el concepto de centro *instantáneo de rotación* (CIR o bien I) facilita la interpretación del movimiento de los mecanismos con movimiento plano y ayuda su estudio cinemático.

Resolución matricial de la cinemática de un mecanismo con movimiento plano. Para a un sólido rígido con movimiento plano, la expresión de la distribución de velocidades se puede reescribir como

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(O) + \omega \overline{OP}^\perp = \mathbf{v}(O) + \omega \mathbf{R} \cdot \overline{OP}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ matriz de rotación}$$

donde

- ω es la velocidad angular asumida positiva en el sentido positivo del eje perpendicular al plano del movimiento.
- $\overline{OP}^\perp := \overline{OP}$ girado 90° en el sentido positivo del eje perpendicular al plano del movimiento.
- \mathbf{R} es la matriz de rotación que gira un vector 90° en el sentido positivo del eje perpendicular al plano del movimiento.

De la misma manera, para las aceleraciones:

$$\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(O) - \omega^2 \overline{OP} + \alpha \overline{OP}^\perp = \mathbf{a}(O) + \mathbf{Q} \cdot \overline{OP}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\omega^2 & -\alpha \\ \alpha & -\omega^2 \end{bmatrix}$$

donde α es la aceleración angular asumida positiva en el sentido positivo del eje perpendicular al plano del movimiento.

En el estudio de mecanismos con movimiento plano, es usual:

1. tomar como velocidades generalizadas las velocidades angulares de los miembros y las velocidades de deslizamiento a las guías con corredera o botón,
2. establecer las ecuaciones de enlace a partir de la condición de cierre de anillos. A partir de las velocidades generalizadas se puede obtener, si se quiere, la velocidad de cualquier punto del mecanismo.

Ejemplo 3.3 Estudio de la cinemática de un mecanismo con movimiento plano a partir de las ecuaciones de enlace cinemáticas.

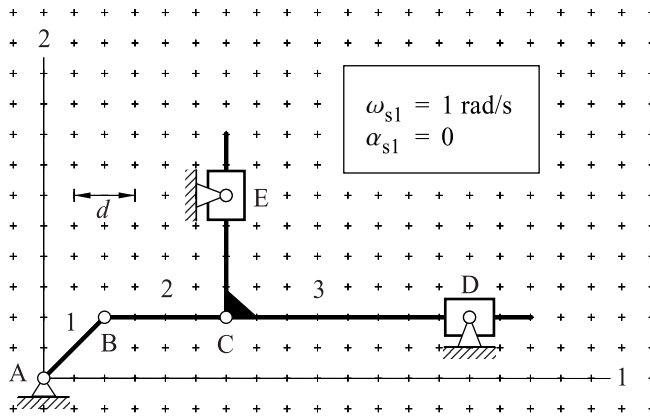


Fig. 3.7 Ejemplo. Mecanismo de barras

Para el mecanismo de la figura 3.7, haciendo uso de las condiciones de los anillos ABCEA ($v(A) \rightarrow v(B) \rightarrow v(C) \rightarrow v(E) \rightarrow v(A)$) y ABCDA ($v(A) \rightarrow v(B) \rightarrow v(C) \rightarrow v(D) \rightarrow v(A)$), las expresiones de la cinemática del sólido rígido y las velocidades generalizadas mencionadas, se obtienen las ecuaciones de enlace cinemáticas siguientes:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{v(E_0)=v(A)=0} \\
 & \overbrace{v(E_3)} \\
 & \overbrace{v(C)} \\
 & \overbrace{v(B)} \\
 & \left\{ \begin{aligned} \omega_{s1} \overline{AB}^\perp + \omega_{s2} \overline{BC}^\perp + \omega_{s3} \overline{CE}^\perp + v_{\text{deslizamiento}}(E) &= 0 \\ \omega_{s1} \overline{AB}^\perp + \omega_{s2} \overline{BC}^\perp + \omega_{s3} \overline{CD}^\perp + v_{\text{deslizamiento}}(D) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Si se toma como velocidad independiente ω_{s1} , se pueden reescribir como

$$\begin{cases} \omega_{s2} \overline{BC}^\perp + \omega_{s3} \overline{CD}^\perp + v_{\text{deslizamiento}}(D) = -\omega_{s1} \overline{AB}^\perp \\ \omega_{s2} \overline{BC}^\perp + \omega_{s3} \overline{CE}^\perp + v_{\text{deslizamiento}}(E) = -\omega_{s1} \overline{AB}^\perp \end{cases}$$

Estas ecuaciones vectoriales se pueden expresar en la base indicada o en forma matricial:

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} -BC_2 \\ BC_1 \\ -BC_2 \\ BC_1 \end{Bmatrix} \omega_{s2} + \begin{Bmatrix} -CD_2 \\ CD_1 \\ -CE_2 \\ CE_1 \end{Bmatrix} \omega_{s3} + \begin{Bmatrix} v_D \\ 0 \\ 0 \\ v_E \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -AB_2 \\ AB_1 \\ -AB_2 \\ AB_1 \end{Bmatrix} \omega_{s1} \\
 & \begin{Bmatrix} -BC_2 & -CD_2 & 1 & 0 \\ BC_1 & CD_1 & 0 & 0 \\ -BC_2 & -CE_2 & 0 & 0 \\ BC_1 & CE_1 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{s2} \\ \omega_{s3} \\ v_D \\ v_E \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -AB_2 \\ AB_1 \\ -AB_2 \\ AB_1 \end{Bmatrix} \omega_{s1}
 \end{aligned}$$

Substituyendo los términos geométricos y tomando $d = 10$ mm (Fig. 3.7), se obtiene

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{s2} \\ \omega_{s3} \\ v_D \\ v_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ -10 \\ 10 \\ -10 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \omega_{s2} \\ \omega_{s3} \\ v_D \\ v_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5 \text{ rad/s} \\ -0,5 \text{ rad/s} \\ 10 \text{ mm/s} \\ -20 \text{ mm/s} \end{Bmatrix}$$

Para el análisis de aceleraciones, las relaciones entre las aceleraciones en las guías son

$$\begin{cases} \mathbf{a}(E_{\text{corredera}}) = 0 = \mathbf{a}(E_3) + \mathbf{a}_{\text{deslizamiento}}(E) + 2\omega_{s3} v_{\text{desl.}}^{\perp}(E) \\ \mathbf{a}(D_{\text{corredera}}) = 0 = \mathbf{a}(D_3) + \mathbf{a}_{\text{deslizamiento}}(D) + 2\omega_{s3} v_{\text{desl.}}^{\perp}(D) \end{cases}$$

Las condiciones de cierre de los anillos ABCEA y ABCDA dan lugar a las expresiones de aceleraciones:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\overbrace{\overbrace{\overbrace{\mathbf{a}(E) = \mathbf{a}(A) = 0}^{\mathbf{a}(E_3)}}^{\mathbf{a}(C)}}^{\mathbf{a}(B)}}^{\mathbf{a}(B)}} \\ & \begin{cases} -\omega_{s1}^2 \overline{AB} + \alpha_{s2} \overline{BC}^{\perp} - \omega_{s2}^2 \overline{BC} + \alpha_{s3} \overline{CE}^{\perp} - \omega_{s3}^2 \overline{CE} + 2\omega_{s3} v_{\text{desl.}}^{\perp}(E) + \mathbf{a}_{\text{desl.}}(E) = 0 \\ -\omega_{s1}^2 \overline{AB} + \alpha_{s2} \overline{BC}^{\perp} - \omega_{s2}^2 \overline{BC} + \alpha_{s3} \overline{CD}^{\perp} - \omega_{s3}^2 \overline{CD} + 2\omega_{s3} v_{\text{desl.}}^{\perp}(D) + \mathbf{a}_{\text{desl.}}(D) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si se toma α_{s1} (en el ejemplo tiene un valor nulo) como aceleración independiente, se pueden reescribir como

$$\begin{cases} \alpha_{s2} \overline{BC}^{\perp} + \alpha_{s3} \overline{CE}^{\perp} + \mathbf{a}_{\text{desl.}}(E) = \omega_{s1}^2 \overline{AB} + \omega_{s2}^2 \overline{BC} + \omega_{s3}^2 \overline{CE} - 2\omega_{s3} v_{\text{desl.}}^{\perp}(E) \\ \alpha_{s2} \overline{BC}^{\perp} + \alpha_{s3} \overline{CD}^{\perp} + \mathbf{a}_{\text{desl.}}(D) = \omega_{s1}^2 \overline{AB} + \omega_{s2}^2 \overline{BC} + \omega_{s3}^2 \overline{CD} - 2\omega_{s3} v_{\text{desl.}}^{\perp}(D) \end{cases}$$

Si se expresa en forma matricial, se obtiene

$$\begin{bmatrix} -BC_2 & -CD_2 & 1 & 0 \\ BC_1 & CD_1 & 0 & 0 \\ -BC_2 & -CE_2 & 0 & 0 \\ BC_1 & CE_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{s2} \\ \alpha_{s3} \\ a_D \\ a_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} AB_1 \\ AB_2 \\ AB_1 \\ AB_2 \end{Bmatrix} \omega_{s1}^2 + \begin{Bmatrix} BC_1 \\ BC_2 \\ BC_1 \\ BC_2 \end{Bmatrix} \omega_{s2}^2 + \begin{Bmatrix} CE_1 \\ CE_2 \\ CD_1 \\ CD_2 \end{Bmatrix} \omega_{s3}^2 + \begin{Bmatrix} 2\omega_{s3} v_E \\ 0 \\ 0 \\ -2\omega_{s3} v_D \end{Bmatrix}$$

Substituyendo los valores numéricos, el resultado final es

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 25 \\ 20 \\ 35 \\ 15 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_{s2} \\ \alpha_{s3} \\ a_D \\ a_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4,5 \text{ rad/s}^2 \\ -1,75 \text{ rad/s}^2 \\ 25 \text{ mm/s}^2 \\ -75 \text{ mm/s}^2 \end{Bmatrix}$$

Centro instantáneo de rotación. Todo sólido con movimiento plano tiene a cada instante un punto de velocidad nula, el denominado *centro instantáneo de rotación* o *polo de velocidades* (I). Su existencia queda demostrada viendo que, si se conoce la velocidad de un punto O del sólido y su velocidad angular ω , siempre se puede encontrar el vector \overline{OI} que lo posiciona:

$$v(I) = v(O) + \omega R \cdot \overline{OI}, \text{ si } v(I) = 0$$

$$\overline{OI} = -\omega^{-1} R^{-1} v(O) = \omega^{-1} R v(O) \text{ ya que } R^{-1} = R^T = -R$$

Es útil recordar que:

- El CIR se encuentra sobre la recta que pasa por O y es normal $v(O)$. O lo que es lo mismo: la velocidad de un punto es siempre perpendicular a la recta que lo une con el CIR.
- El módulo de la velocidad de un punto es siempre proporcional a su distancia al CIR y el coeficiente de proporcionalidad es la velocidad angular del sólido.

La determinación de I se puede hacer conociendo la dirección de la velocidad de dos puntos, ya que I queda determinado por la intersección de las rectas que pasan por estos puntos y son perpendiculares a las respectivas velocidades (Fig. 3.8).

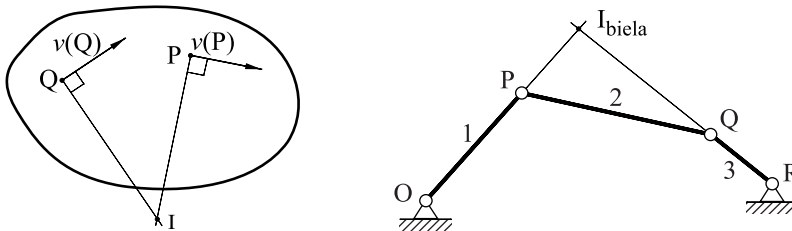


Fig. 3.8 Determinación del CIR a partir de dos velocidades no paralelas

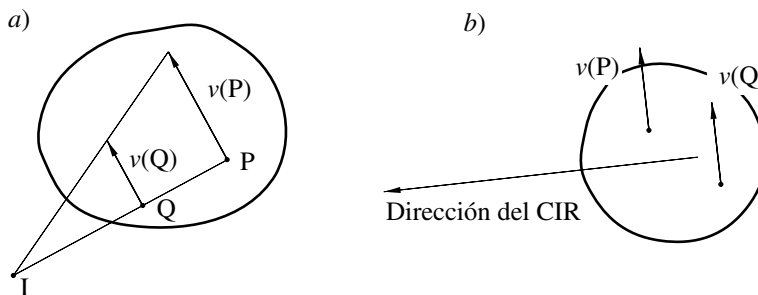


Fig. 3.9 Determinación del CIR a partir de dos velocidades paralelas

Si las velocidades de dos puntos del sólido son paralelas y perpendiculares a la recta que los une, éstos están alineados con I. El polo de velocidades se determina como el punto al cual corresponde velocidad nula en la distribución de velocidades (Fig. 3.9.a). Si las velocidades de los dos puntos son paralelas e iguales, el sólido se traslada y, por tanto, el polo de velocidades está en el infinito en la dirección perpendicular a la de las velocidades (Fig. 3.9.b).

La utilización de los CIR es especialmente interesante en los mecanismos de un grado de libertad, ya que están unívocamente definidos en cada configuración por la geometría del mecanismo independientemente de las velocidades.

Centro instantáneo de rotación absoluto y relativo. Para cada miembro de un mecanismo se pueden definir el centro instantáneo de rotación respecto a la referencia de estudio –CIR absoluto– y los centros instantáneos de rotación respecto a las referencias solidarias a cada uno de los otros miembros –CIR relativos.

Si se dispone de dos miembros –1 y 2–, el CIR relativo I_{21} –punto del miembro 2 que tiene velocidad nula respecto al miembro 1– coincide con el centro instantáneo de rotación relativo I_{12} –punto del miembro 1 que tiene velocidad nula respecto al miembro 2. Este hecho se demuestra a partir de la composición siguiente de velocidades, tomando la referencia solidaria al miembro 2 como absoluta y la referencia solidaria al miembro 1 como relativa:

$$\underbrace{v_{s2}(I_{21})}_{=0} = \underbrace{v_{s1}(I_{21})}_{=0} + \underbrace{v_{s2}(I_{12})}_{=0} + \omega_{s1/s2} \times \overline{I_{12} I_{21}}$$

donde los tres primeros términos son nulos y, por tanto, al tener que serlo el cuarto, I_{12} ha de coincidir con I_{21} . Además, la velocidad de estos puntos en cualquier referencia es la misma, como se puede ver con la nueva composición de movimientos, y es evidente si los miembros 1 y 2 están unidos directamente por una articulación o par prismático.

$$v(I_{21}) = \underbrace{v_{s1}(I_{21})}_{=0} + v(I_{12}) + \underbrace{\omega_{s1} \times \overline{I_{12} I_{21}}}_{=0}$$

El número total de centros instantáneos de un mecanismo es igual a las combinaciones del número de miembros móviles +1 –el miembro fijo a la referencia– tomados de 2 en 2:

$$C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)n}{2!}, \text{ donde } n \text{ es el número de miembros móviles}$$

Los centros instantáneos relativos permiten obtener información de los movimientos relativos entre miembros.

Teorema de los tres centros o de Aronhold-Kennedy.

Dados tres sólidos, s_1 , s_2 y s_3 , con movimiento plano, los tres centros instantáneos de rotación relativos que se pueden definir, I_{12} , I_{13} y I_{23} están alineados (Fig. 3.10). Para demostrar esta afirmación se pueden considerar tres sólidos con movimiento plano, s_1 , s_2 y s_3 , y sus centros instantáneos de rotación relativos, I_{12} , I_{13} y I_{23} . En una referencia fija al sólido s_1 se puede determinar la velocidad de I_{23} como punto del sólido 2 y como punto del sólido 3:

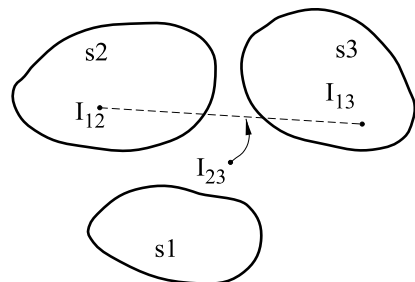


Fig. 3.10 Teorema de los tres centros

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{s1}(\mathbf{I}_{23}) &= \underbrace{\mathbf{v}_{s1}(\mathbf{I}_{12})}_{=0} + \boldsymbol{\omega}_{s2/s1} \times \overline{\mathbf{I}_{12}\mathbf{I}_{23}} = \\ &= \underbrace{\mathbf{v}_{s1}(\mathbf{I}_{13})}_{=0} + \boldsymbol{\omega}_{s3/s1} \times \overline{\mathbf{I}_{13}\mathbf{I}_{23}} \end{aligned}$$

$$\text{d'on } \boldsymbol{\omega}_{s2/s1} \times \overline{\mathbf{I}_{12}\mathbf{I}_{23}} = \boldsymbol{\omega}_{s3/s1} \times \overline{\mathbf{I}_{13}\mathbf{I}_{23}}$$

Para que esta igualdad se cumpla $\overline{\mathbf{I}_{12}\mathbf{I}_{23}}$ y $\overline{\mathbf{I}_{13}\mathbf{I}_{23}}$ han de tener la misma dirección y, por tanto, los centros \mathbf{I}_{12} , \mathbf{I}_{13} , \mathbf{I}_{23} han de estar alineados.

El teorema de los tres centros ayuda a encontrar CIR a partir de los que se obtienen por inspección directa. El CIR de la biela de la figura 3.8, por ejemplo, se puede encontrar como la intersección de dos rectas; la que pasa por los puntos O y P y la que pasa por R y Q.

Polo de aceleraciones. Todo sólido con movimiento plano tiene en cada instante un punto con aceleración nula, el *polo de aceleraciones* (\mathbf{I}_a). Para demostrar su existencia, se puede partir de la expresión de aceleraciones en un sólido rígido:

$$\mathbf{a}(\mathbf{I}_a) = \mathbf{a}(\mathbf{O}) + \mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{O}\mathbf{I}_a} \quad \text{y si } \mathbf{a}(\mathbf{I}_a) = 0$$

$$\overline{\mathbf{O}\mathbf{I}_a} = -\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{O}) = -\frac{1}{\omega^4 + \alpha^2} \begin{bmatrix} -\omega^2 & \alpha \\ -\alpha & -\omega^2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{O})$$

En general, el polo de velocidades y el polo de aceleraciones no coinciden, $\overline{\mathbf{O}\mathbf{I}} \neq \overline{\mathbf{O}\mathbf{I}_a}$. La aceleración del polo de velocidades, que no tiene por qué ser nula, responde a la expresión:

$$\overline{\mathbf{O}\mathbf{I}} = \omega^{-1} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{O})$$

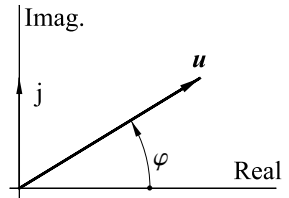
$$\mathbf{a}(\mathbf{I}) = \mathbf{a}(\mathbf{O}) + \mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{O}\mathbf{I}} = \omega^{-1} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{O}) + \mathbf{a}(\mathbf{O})$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{I}) = \mathbf{a}(\mathbf{O}) + \omega^{-1} \begin{bmatrix} -\alpha & \omega^2 \\ -\omega^2 & -\alpha \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{O})$$

Anexo 3.I Utilización de los números complejos para representar los vectores en cinemática plana

Los vectores con dos componentes que aparecen en la cinemática plana se pueden representar con notación compleja tomando una componente como parte real y la otra como parte imaginaria.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_{\text{re}} \\ u_{\text{im}} \end{Bmatrix} = u_{\text{re}} + j u_{\text{im}} = u e^{j\varphi} = u \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}$$



Esta notación permite, en algunas ocasiones, obtener expresiones compactas.

La rotación ψ de un vector \mathbf{u} , que en notación matricial se representa como:

$$[\psi] \cdot \mathbf{u} \quad \text{amb} \quad [\psi] = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

en notación compleja se representa como:

$$\mathbf{u} e^{j\psi} = u e^{j\varphi} e^{j\psi} = u e^{j(\varphi+\psi)}$$

Si se quiere girar un vector y, al mismo tiempo, escalarlo (homotecia), entonces se ha de hacer el producto con un vector de módulo el factor de escala λ y de argumento el ángulo girado ψ , $\mathbf{u} \lambda e^{j\psi}$. En el caso particular de que el ángulo ψ sea de 90° , queda:

$$\mathbf{u} \lambda e^{j\frac{\pi}{2}} = j \lambda \mathbf{u}$$

Las expresiones de la distribución de velocidades y aceleraciones en un sólido rígido con movimiento plano, haciendo uso de la notación compleja, son:

$$\mathbf{v}(\mathbf{B}) = \mathbf{v}(\mathbf{A}) + \omega j \overline{\mathbf{AB}}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{B}) = \mathbf{a}(\mathbf{A}) - \omega^2 \overline{\mathbf{AB}} + \alpha j \overline{\mathbf{AB}}$$

Anexo 3.II Síntesis de mecanismos

En el estudio de mecanismos presentado hasta este capítulo, las medidas y los componentes de los mecanismos son dadas y el problema que se resuelve es el análisis del movimiento. Bien diferente es el caso de comenzar con un movimiento requerido como dado e intentar encontrar el mecanismo que da lugar a este movimiento. Esta situación se conoce como *síntesis de mecanismos*, se enmarca en el contexto del diseño y, como tal, puede presentar muchas alternativas de solución: exacta, aproximada, de compromiso, materializable, etc.

El problema de la síntesis se divide en tres partes:

1. Tipo de mecanismo que se ha de emplear,
2. número de miembros y enlaces necesarios, y
3. medidas de los miembros.

A menudo se hace referencia a esta división hablando de la síntesis de tipo, de nombre y dimensional.

Como ayuda para la síntesis de tipo y de número se ha de contar, en general, con la intuición y la experiencia del diseñador, ya que hay poca teoría. No obstante, para la síntesis dimensional se dispone de un buen cuerpo de doctrina. Por otra parte, la facilidad de plantear y resolver el análisis de mecanismos concretos hace que el diseño muchas veces se base en la selección de un caso de entre un conjunto de los estudiados.

Los problemas en la síntesis se pueden situar en una de las categorías siguientes: generación de funciones, generación de trayectorias y guiado de sólidos.

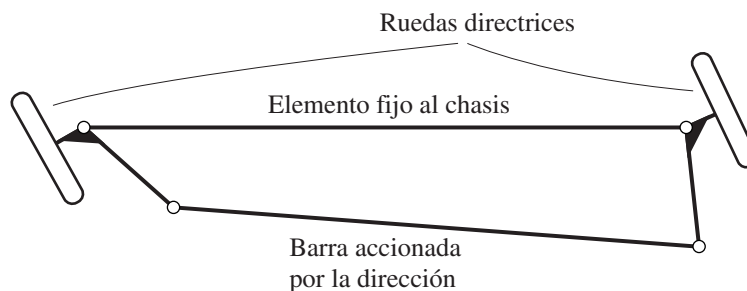


Fig. 3.11 Mecanismo de Ackerman

Dentro de la categoría de generación de funciones, hay todos aquellos problemas de síntesis que pretenden conseguir que una coordenada generalizada del mecanismo evolucione según una función determinada de otra coordenada. Un ejemplo sería conseguir una función sinusoidal a partir de la rotación del eje motor. En este caso, el mecanismo pistón-biela-manivela proporciona una solución aproximada y el mecanismo de yugo escocés, una solución exacta. Un problema más complejo de generación de funciones y que resuelve el mecanismo de Ackerman (Fig. 3.11) es conseguir que las ruedas directrices de un automóvil se orienten adecuadamente para evitar el deslizamiento.

En la categoría de la generación de trayectorias se incluyen los mecanismos que buscan que un punto de un miembro describa una trayectoria concreta. Un problema clásico es la generación de trayectorias rectas sólo con articulaciones, que ha dado lugar a mecanismos con solución exacta –mecanismo de Peaucellier, de Sylvester– y otros con solución aproximada –mecanismo de Watt, de Roberts, de Chebyshev, etc.

En los problemas de guiado de sólidos se pretende que uno de los sólidos del mecanismo pase por un cierto número de configuraciones preestablecidas. Entrarían dentro de esta categoría, por ejemplo, el diseño del mecanismo de recogida y vaciado de contenedores de bolsa o el diseño de bisagras que permiten un movimiento complejo de la puerta respecto del marco (Fig. 3.12).

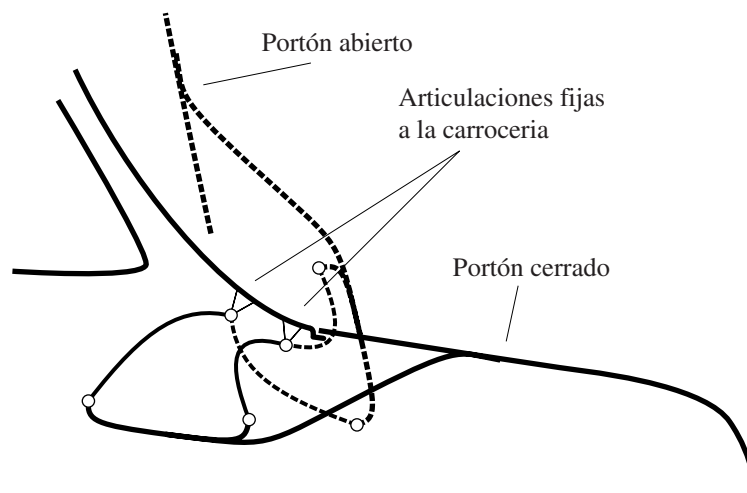


Fig. 3.12 Esquema de un mecanismo de guiado del capó posterior de un vehículo

Anexo 3.III Determinación de mecanismos cognados

Es posible determinar fácilmente mecanismos cognados de un cuadrilátero articulado y de un mecanismo pistón-biela-manivela. La determinación se puede hacer gráficamente o analítica.

Determinación de los cuadriláteros articulados cognados a partir de uno dado

Se parte de un cuadrilátero articulado, $OABQ$, como el de la figura adjunta (Fig. 3.13). Los miembros móviles se pueden representar como vectores u , v , w y el miembro fijo OQ como el vector $u+v+w$. El punto P del acoplador se sitúa desde el punto A mediante el vector ηv con $\eta = \eta_0 e^{i\alpha}$ si se utiliza la notación compleja.

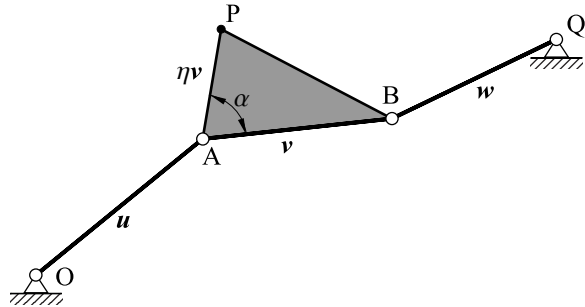


Fig. 3.13 Cuadrilátero $OABQ$

Para encontrar los cuadriláteros cognados, se hace la construcción siguiente (Fig. 3.14):

- Se construyen los paralelogramos OA_1B_1A y QB_2A_2B .
- Sobre el lado A_1B_1 se sitúa el triángulo $A_1B_1P_1$ similar al triángulo ABP . Se procede de manera análoga con el triángulo $A_2B_2P_2$.
- Finalmente se construye el paralelogramo P_1PP_2R .

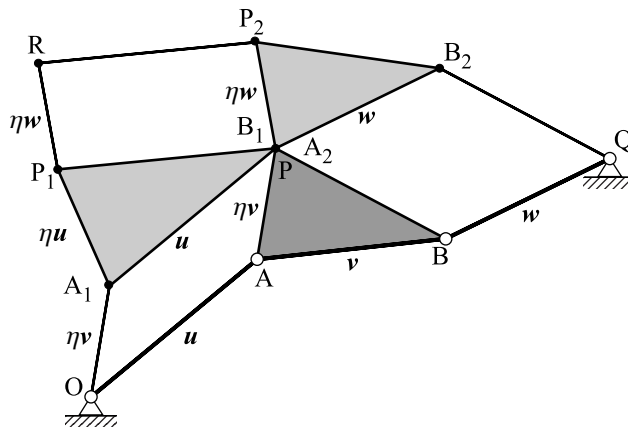


Fig. 3.14 Mecanismos cognados del cuadrilátero articulado $OABQ$. Construcción geométrica

Con esta construcción, el punto R es un punto fijo, ya que:

$$\overline{OR} = \eta v + \eta u + \eta w = \eta(v + u + w) = \eta \overline{OQ} = \text{cte.} \quad \text{al ser } \overline{OQ} \text{ i } \eta \text{ constantes}$$

El cuadrilátero OA_1P_1R con el punto B_1 del acoplador y el cuadrilátero QB_2P_2R con el punto A_2 del acoplador (Fig. 3.15), son cognados del original al ser el punto P común a los tres.

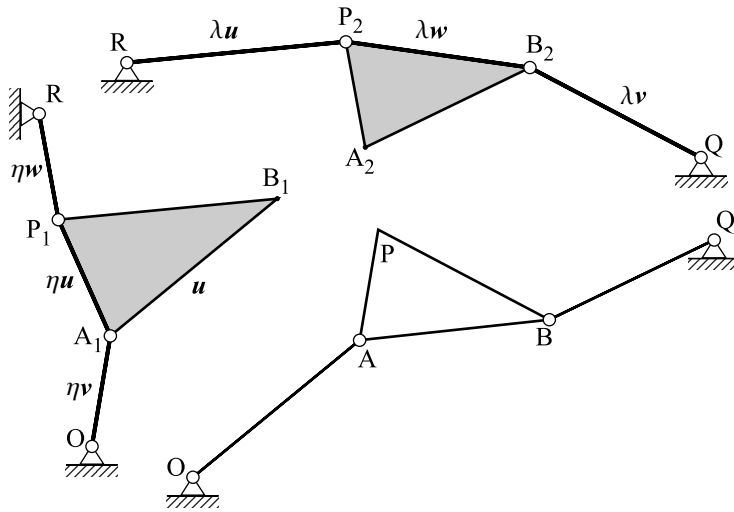


Fig. 3.15 Dos cuadriláteros cognados del cuadrilátero OABQ

Así, por tanto, dos cuadriláteros cognados del cuadrilátero OABQ por el punto P son los definidos por:

$$\begin{array}{ll}
 a) & \overline{OR} = \eta \overline{OQ} \\
 & OA_1 = AP = \eta_0 AB \\
 & A_1P_1 = \eta_0 OA \\
 & P_1R = \eta_0 BQ \\
 & \underline{A_1B_1} = \underline{OA} \\
 b) & \overline{QR} = \lambda \overline{OQ} \\
 & QB_2 = BP = \lambda_0 AB \\
 & B_2P_2 = \lambda_0 BQ \\
 & P_2R = \lambda_0 OA \\
 & \underline{B_2A_2} = \underline{QB}
 \end{array}$$

Determinación del mecanismo pistón-biela-manivela cognado a partir de uno dado

De manera similar al cuadrilátero articulado, se puede determinar el cognado de un mecanismo de pistón-biela-manivela haciendo la construcción de la figura 3.16. El triángulo $A_1P_1B_1$ es similar al triángulo APB y, al ser $\eta = \eta_0 e^{j\alpha} = \text{constante}$, se obtiene que $\overline{OP_1} = \eta(u+v) = \eta l$ es de dirección constante. Este hecho pone de manifiesto que OA_1P_1 es un mecanismo de pistón-biela-manivela, el punto B_1 del cual describe la misma trayectoria que el punto P del mecanismo original.

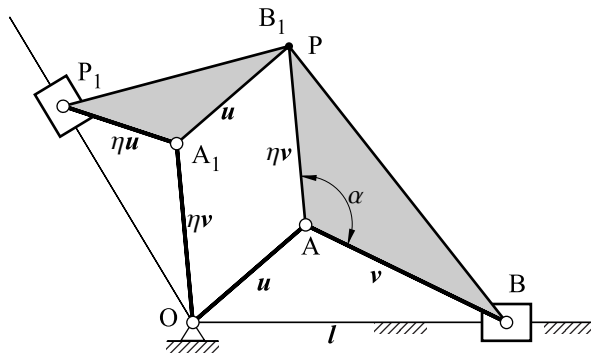


Fig. 3.16 Cognados de un pistón-biela-manivela

Anexo 3.IV Cinemática gráfica

Antiguamente, cuando los medios de cálculo eran escasos y poco elaborados, se desarrolló la *cinemática gráfica de mecanismos de un grado de libertad con movimiento plano* como técnica de cálculo que, por tradición y desconocimiento, ha sobrevivido en algunos ámbitos cuando la justificación de su utilidad ya ha desaparecido.

La cinemática gráfica resuelve los sistemas de ecuaciones lineales en las velocidades (Eq. 3.1) y en las aceleraciones (Eq. 3.4) utilizando una fuerte dosis de inspección visual, de manera gráfica por intersección de rectas relacionadas con las ecuaciones. La formalización del método se basa en los denominados *cinema de velocidades* y *cinema de aceleraciones* del mecanismo, superposición de los cinemas de cada uno de sus miembros.

Cinema de velocidades (Fig. 3.17). El cinema de velocidades de un miembro es la figura formada por los extremos de los vectores velocidad de todos los puntos del miembro si se dibujan a partir de un mismo origen.

La expresión $\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(O) + \omega \mathbf{R} \cdot \overline{OP}$ se puede interpretar como una transformación geométrica lineal del vector \overline{OP} al vector $\mathbf{v}(P)$ y que consiste en la superposición de una translación $\mathbf{v}(O)$, una rotación \mathbf{R} de 90° y un escalado de factor ω de manera que, aplicada al sólido –los vectores que posicionan los puntos del sólido, a partir del punto O–, genera una nueva figura, girada 90° respecto al sólido, escalada según ω y trasladada $\mathbf{v}(O)$.

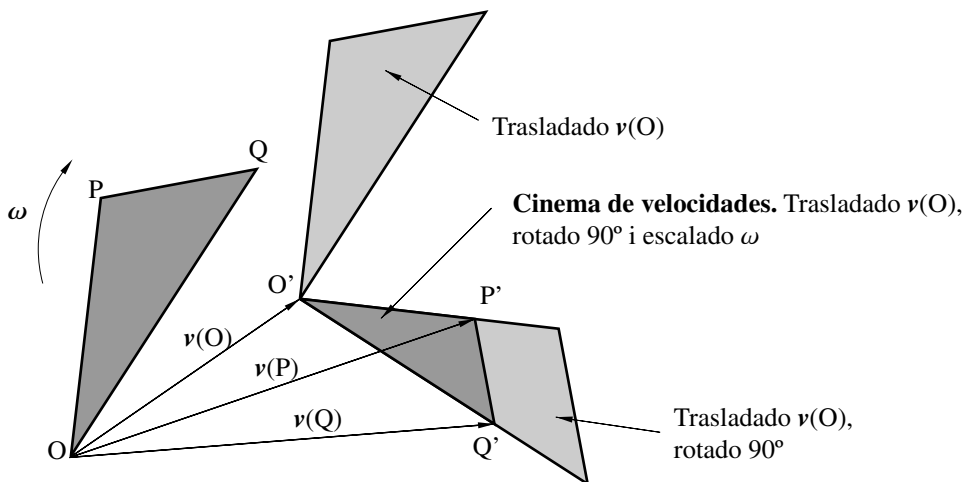


Fig. 3.17 Cinema de velocidades del miembro OPQ

Si en lugar de tomar como punto de referencia un punto arbitrario O se toma el CIR, la expresión de la distribución de velocidades se puede escribir como $\mathbf{v}(P) = \omega \mathbf{R} \cdot \overline{IP}$. En este caso, la transformación de \overline{IP} a $\mathbf{v}(P)$ es la superposición de una rotación de 90° alrededor de I y un escalado ω .

Cinema de aceleraciones. El cinema de aceleraciones de un miembro es la figura formada por los extremos de los vectores aceleración de todos los puntos del miembro si se dibujan a partir de un mismo origen.

La expresión $\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(O) + \mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{OP}}$ se puede interpretar como una transformación geométrica lineal del vector $\overline{\mathbf{OP}}$ al vector $\mathbf{a}(P)$ y que consiste en la superposición de una rotación \mathbf{R}' de ángulo φ , un escalado de factor $(\omega^4 + \alpha^2)^{1/2} = (\text{Det } \mathbf{Q})^{1/2}$ y una translación $\mathbf{a}(O)$.

La matriz \mathbf{Q} se puede escribir como

$$\mathbf{Q} = (\omega^4 + \alpha^2)^{1/2} \mathbf{R}' \quad \text{amb} \quad \mathbf{R}' = \frac{1}{(\omega^4 + \alpha^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} -\omega^2 & -\alpha \\ \alpha & -\omega^2 \end{bmatrix}$$

\mathbf{R}' es una matriz de rotación, ya que la norma de los vectores columna es 1 y los vectores columna son ortogonales. Así, por tanto, el factor de escala es $(\omega^4 + \alpha^2)^{1/2}$ y el ángulo girado alrededor del eje positivo perpendicular al plano es:

$$\varphi = \pi - \arccos\left[\omega^2 / (\text{Det } \mathbf{Q})^{1/2}\right] = \arcsin\left[\alpha / (\text{Det } \mathbf{Q})^{1/2}\right]$$

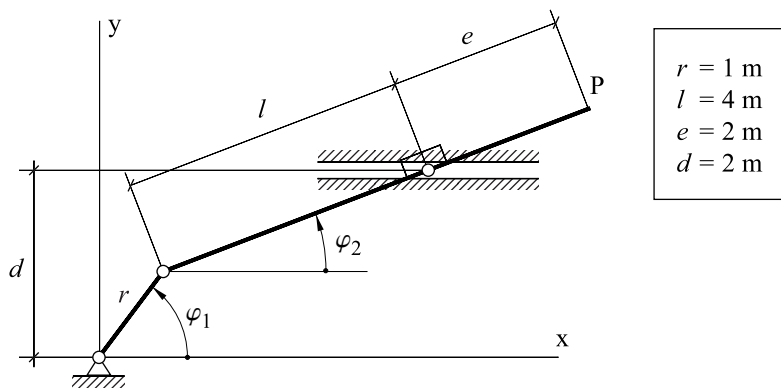
Hay que dar las dos expresiones para evitar la ambigüedad de las funciones trigonométricas.

La cinemática gráfica actualmente sólo tiene interés como herramienta de ayuda en el planteamiento analítico de casos sencillos. Se ha de tener en cuenta, sin embargo, que:

- En el dibujo del cinema de velocidades de los miembros de un mecanismo, éstos se escalan según su ω , de manera que se ha de prestar mucha atención al escalado –figuras demasiado grandes o demasiado pequeñas.
- El problema anterior se agrava en el cinema de aceleraciones, ya que el escalado es según $(\omega^4 + \alpha^2)^{1/2}$.
- Fácilmente se llega a situaciones de dibujo mal condicionado –rectas casi paralelas– y/o de poca resolución y saturación –figuras pequeñas o grandes.

Problemas

- P 3-1** En el mecanismo de la figura, determinar la trayectoria del punto P –hacerlo de manera implícita con un conjunto de ecuaciones con las variables $\varphi_1, \varphi_2, x, y$ (coordenadas de P). Eliminar el ángulo φ_2 del conjunto de ecuaciones y discutir si esto introduce alguna ambigüedad. Para los valores numéricos dados y para el conjunto de coordenadas generalizadas $\{x, y, \varphi_1\}$, dibujar la trayectoria de P y escribir la matriz jacobiana del conjunto de ecuaciones de enlace.



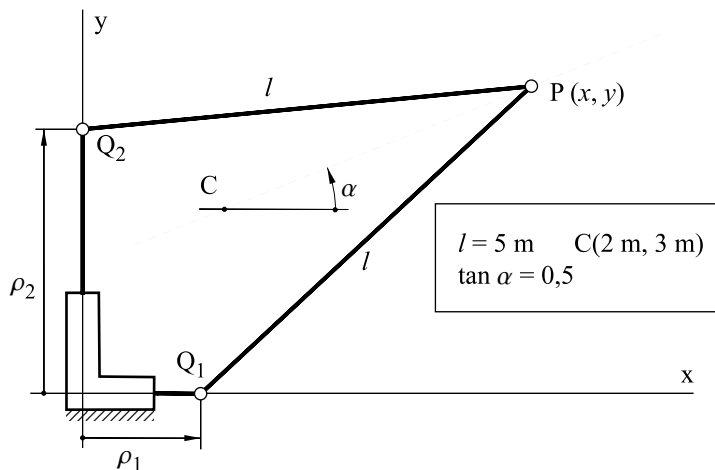
- P 3-2** Dos actuadores lineales gobiernan la posición de los puntos Q_1 y Q_2 del mecanismo de la figura.

a) Establecer el conjunto de ecuaciones de enlace y la matriz jacobiana para el conjunto de coordenadas generalizadas $\{x, y, \rho_1, \rho_2\}$.

Se quiere que el punto P describa la recta que pasa por C y tiene pendiente α .

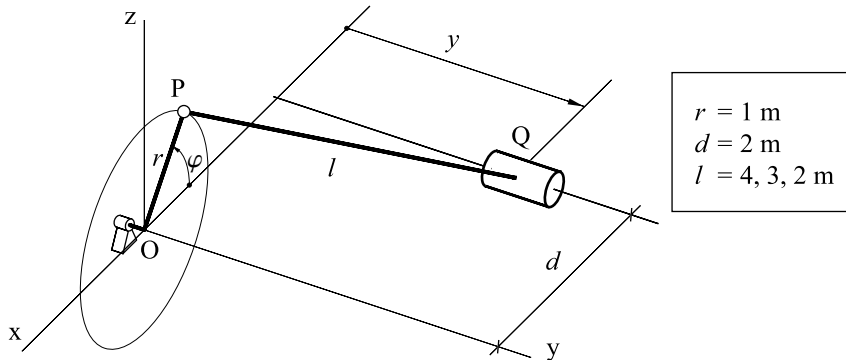
b) ¿Qué relación se ha de establecer entre ρ_1 y ρ_2 ? Dibujarla para los valores numéricos dados.

c) ¿Cuál segmento de la recta anterior se puede describir?



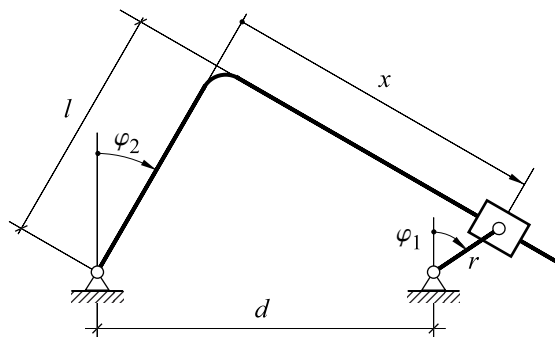
P3-3 Para el cuadrilátero de corredera en el espacio:

- Determinar $y(\varphi)$ (posición de la corredera en función del ángulo girado por la manivela) y $\dot{y}(\{\varphi, y\}, \dot{\varphi})$ (velocidad de la corredera en función de la configuración $\{\varphi, y\}$ y la velocidad angular $\dot{\varphi}$).
- Estudiar las configuraciones accesibles y las configuraciones singulares para los valores numéricos dados.



P3-4 En el mecanismo de la figura se toma el vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, x\}^T$. Determinar:

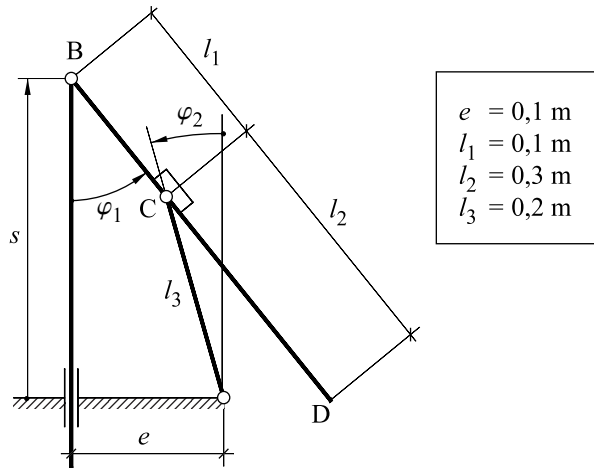
- El sistema de ecuaciones de enlace y su matriz jacobiana.
- La ecuación de las velocidades y la de las aceleraciones si se toma φ_1 como coordenada generalizada independiente.
- Los puntos muertos para la coordenada φ_2 y los valores de x y \dot{x} para éstos.
- Los puntos muertos para la coordenada x y los valores de φ_2 y $\dot{\varphi}_2$ para éstos.



$$l = 40 \text{ mm} \quad d = 60 \text{ mm} \quad r = 15 \text{ mm}$$

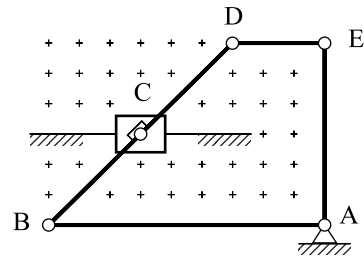
P 3-5 Para la bomba manual esquematizada en la figura:

- Determinar las velocidades $\dot{\varphi}_2$ y \dot{s} cuando la barra BD es horizontal si $\dot{\varphi}_1 = 1 \text{ rad/s}$.
- Si se toma el vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, s\}^T$, determinar el sistema de ecuaciones de enlace y su matriz jacobiana.
- Determinar los puntos muertos para las coordenadas φ_2 y s y las velocidades $\dot{\varphi}_2$ e \dot{s} en estas configuraciones.
- La ecuación de las velocidades y la de las aceleraciones, si se toma φ_1 como coordenada generalizada independiente.



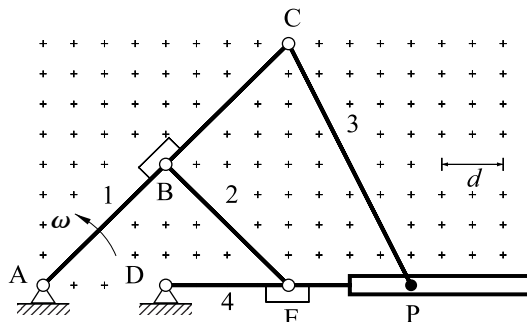
P 3-6 Para el mecanismo de la figura, determinar en la configuración dibujada:

- Los centros instantáneos de rotación de los miembros móviles.
- La dirección del movimiento absoluto de los puntos B y D.



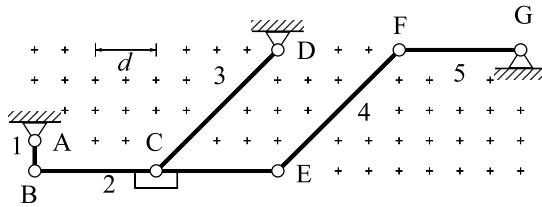
P 3-7 Para el mecanismo de la figura, determinar en la configuración indicada:

- Los centros instantáneos de rotación de los miembros.
- La velocidad y la aceleración de deslizamiento de P tomando $\omega = 1 \text{ rad/s}$ $\alpha = 0 \text{ rad/s}^2$ y $d = 10 \text{ mm}$.

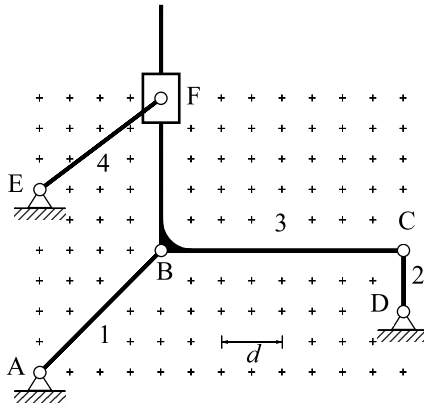


Determinar, en los mecanismos siguientes, la velocidad y la aceleración angular de todos los miembros móviles y la velocidad y aceleración de deslizamiento en las guías. Tomar $\omega_{s1} = 1 \text{ rad/s}$, $\alpha_{s1} = 0$ y $d = 10 \text{ mm}$.

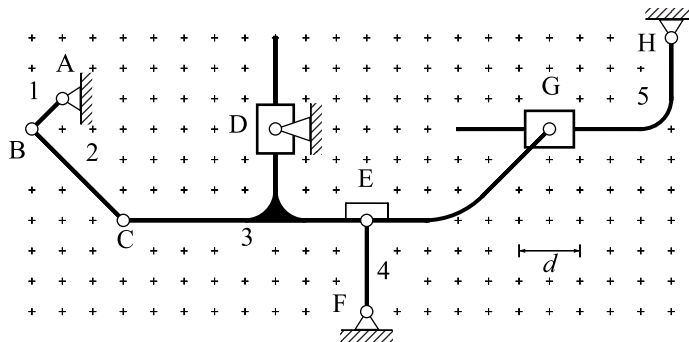
P 3-8



P 3-9



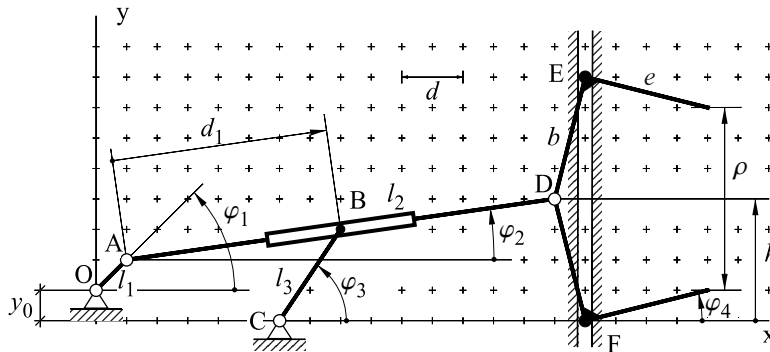
P 3-10



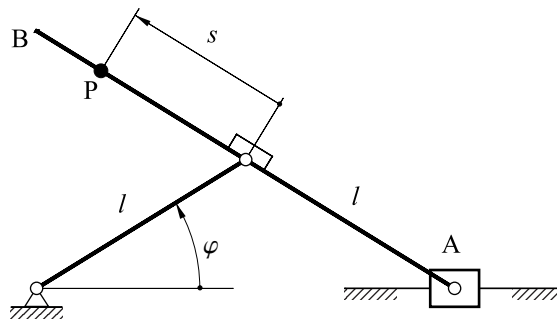
P 3-11 Para el sistema de la figura, tomar el vector de coordenadas generalizadas

$$\mathbf{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, d_1\}^T \text{ y determinar:}$$

- Las ecuaciones de enlace y la matriz jacobiana.
- Las expresiones de ρ y h función de los ángulos empleados.
- Las ecuaciones de las velocidades y la de las aceleraciones, tomando φ_1 y φ_3 como coordenadas independientes.
- Las velocidades y aceleraciones para la configuración dada, si se toma $d = 10$ mm, $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_3 = 1$ rad/s y $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_3 = 0$ rad/s².

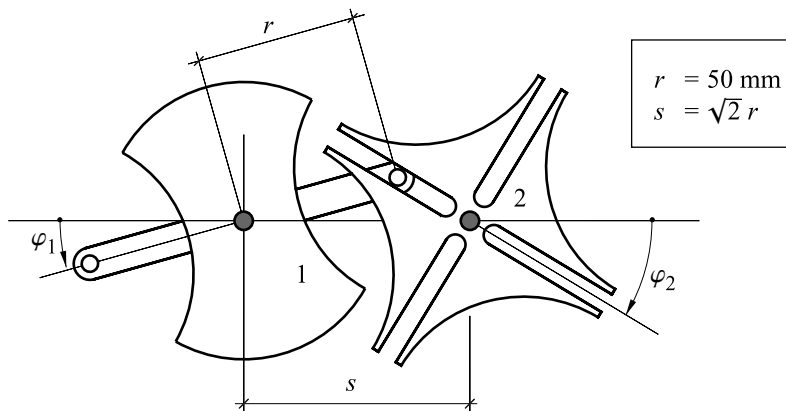


P 3-12 Determinar analíticamente la trayectoria de los diferentes puntos P de la barra AB del mecanismo elevador de la figura.



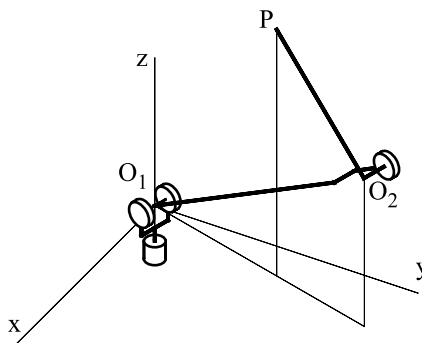
P3-13 El mecanismo de cruz de Malta representado en la figura permite una rotación intermitente del miembro 2 a partir de una rotación uniforme del miembro 1. Determinar:

- La velocidad angular del miembro 2. Hacer la representación gráfica.
- Las velocidades de deslizamiento del centro del pasador respecto a la guía del miembro 2.



P3-14 Para el robot de brazos articulados esquematizado en la figura:

- Definir un conjunto de coordenadas generalizadas que incluya las rotaciones en los pares cinemáticos de revolución y las coordenadas cartesianas del extremo del brazo.
- Determinar el número de grados de libertad.
- Determinar las ecuaciones de enlace geométricas y cinemáticas.
- Comparar la utilización de rotaciones absolutas y relativas en las juntas.



4 Mecanismos leva-palpador

Mecanismo leva-palpador. En muchas máquinas se quiere que una pieza determinada se desplace siguiendo una ley más o menos compleja. Son un ejemplo típico las válvulas de admisión y escape de los motores de combustión interna, que han de abrirse o cerrarse en función del giro del cigüeñal en unas posiciones determinadas, de acuerdo con el ciclo termodinámico del motor. Para conseguir este desplazamiento se podría recurrir a accionamientos de diversos tipos: electromagnético, hidráulico, etc., que, controlados por un microprocesador, permitirían funciones de desplazamiento totalmente arbitrarias. Ahora bien, una solución mucho más sencilla, económica y compacta es el clásico mecanismo leva-palpador.

En este capítulo se estudian en detalle las levas planas de rotación, porque son las más frecuentes y de análisis más sencillo, si bien la mayoría de los conceptos que se exponen son aplicables a cualquier tipo de leva.

Secuencia de diseño. La misión de un mecanismo leva-palpador consiste en impulsar el palpador según la ley de desplazamiento $d(\varphi)$ deseada, en función del ángulo φ girado por la leva –en el caso de levas giratorias. Por tanto, la secuencia de diseño del mecanismo, en lo concerniente a aspectos geométricos y cinemáticos, es la siguiente:

1. Especificación de la ley $d(\varphi)$ de desplazamiento.
2. Obtención del perfil de la leva que impulsa un palpador determinado según la ley de desplazamiento especificada.
3. Comprobación de que el perfil obtenido no presente características que impidan un contacto leva-palpador correcto.

Una ley arbitraria $d(\varphi)$ origina un perfil de leva que no es fácilmente calculable ni mecanizable sin la utilización de ordenadores y máquinas de control numérico; eso hace que antiguamente sólo se pudiese proceder de manera inversa, estudiando primero perfiles de leva típicos, de mecanización fácil, y después se escogiese aquel que producía el desplazamiento más aproximado al que se pretendía.

4.1 Análisis del mecanismo leva-palpador

Objetivo. El análisis del mecanismo leva-palpador consiste en estudiar el movimiento de dos sólidos –la leva y el palpador– de perfiles conocidos, cada uno con un grado de libertad, que se ponen en contacto mediante un par superior. Este estudio permite determinar:

- La ecuación geométrica de enlace –ley de desplazamiento–, que relaciona el desplazamiento o giro del palpador con el de la leva.
- La ecuación cinemática de enlace, que relaciona las velocidades de la leva y del palpador en una configuración dada.
- La velocidad de deslizamiento en el punto de contacto.
- El ángulo de presión, un índice del buen funcionamiento del mecanismo.

Para una leva diseñada según la secuencia descrita en la introducción, la ecuación geométrica de enlace es la ley impuesta a priori por el diseñador, de manera que el análisis se reduce al estudio de los dos últimos puntos.

Un ejemplo sencillo es la denominada *leva de excéntrica* (Fig. 4.1), formada por un disco de radio r que gira alrededor de un punto fijo O situado a una distancia e del centro C de la leva. Para un palpador plano de translación, es inmediato comprobar que la ley de desplazamiento es sinusoidal: $d(\varphi) = r + e \sin \varphi$. Al existir una fórmula explícita para $d(\varphi)$, la velocidad y la aceleración del palpador se obtienen simplemente por derivación.

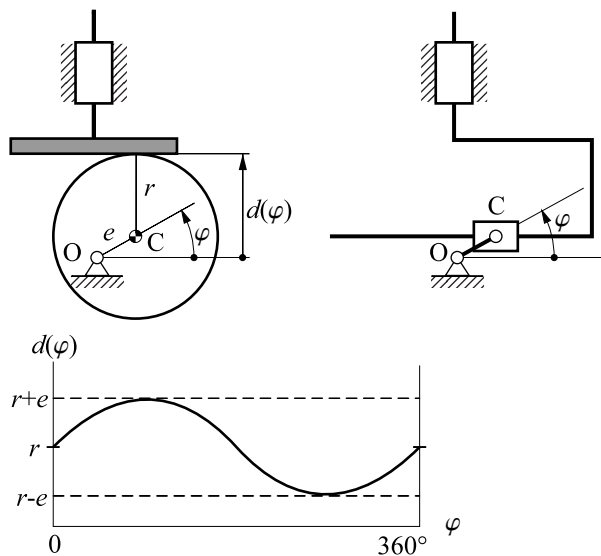


Fig. 4.1 Leva de excéntrica con palpador de translación plano. Mecanismo equivalente y ley $d(\varphi)$ resultante

Si el palpador es un rodillo de radio r_c , la ley de desplazamiento $d(\varphi)$ se puede deducir considerando que el mecanismo equivale cinemáticamente a un mecanismo pistón-biela-manivela, en el cual la manivela tiene la misma longitud que la excentricidad e y la biela tiene longitud $r+r_c$ (Fig. 4.2.a). Para un palpador de rotación con rodillo, el mecanismo equivale a un cuadrilátero articulado, donde la longitud de la biela es $r+r_c$ (Fig. 4.2.b). Un palpador puntual correspondería simplemente al caso particular de un rodillo con $r_c = 0$.

Ecuación de enlace geométrica. Con un palpador y una leva de perfiles arbitrarios, encontrar la ecuación de enlace geométrica no resulta sencillo. Para un palpador de translación, la distancia $d(\varphi)$ se obtiene al ir variando la distancia d a la cual se encuentra hasta conseguir que sea tangente a la leva en

un cierto punto J (Fig. 4.3.a) cuando ésta ha girado un ángulo φ . Este es un problema matemático complejo que, en principio, se ha de resolver numéricamente y que no lleva a una expresión explícita de la función $d(\varphi)$. Además, pueden presentarse problemas de acceso del palpador al punto teórico J de contacto, como se muestra a la figura 4.3.b en los tramos cóncavos de una leva con palpador plano.

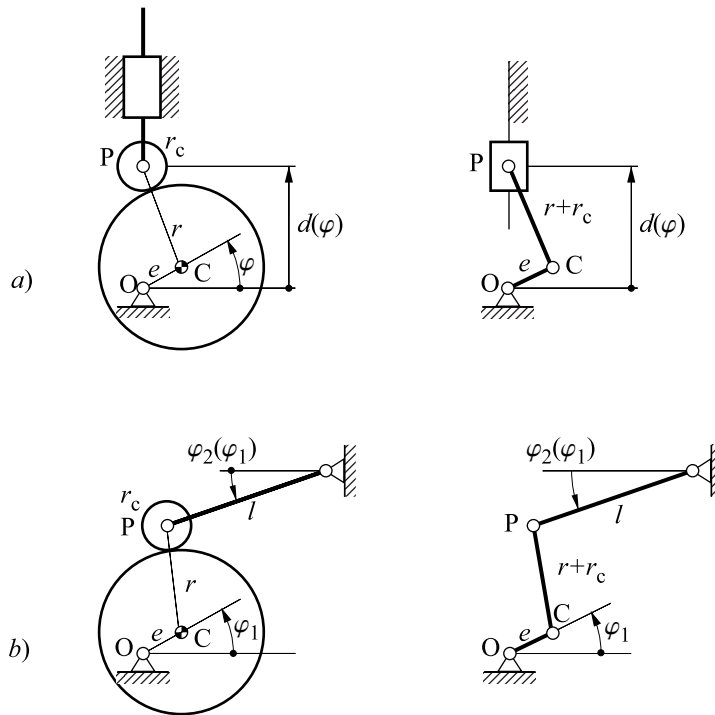


Fig. 4.2 Equivalente cinemático de una leva de excéntrica con palpador de rodillo
a) de translación b) de rotación

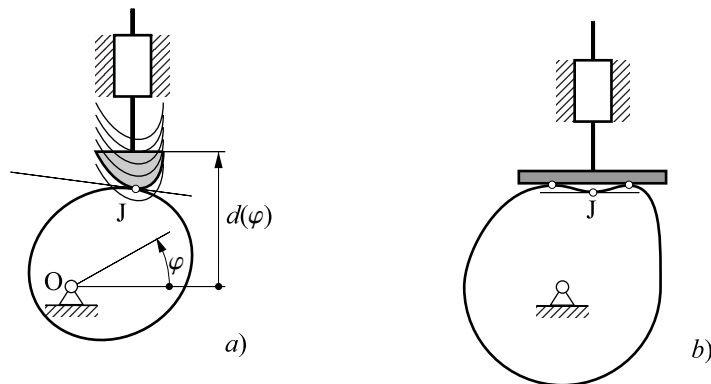


Fig. 4.3 a) Obtención del valor $d(\varphi)$. b) Problemas de acceso del palpador a la leva

No obstante, la ecuación de enlace geométrica puede formularse con facilidad para palpadores de translación con perfiles sencillos que, por otra parte, son los más empleados. Para palpadores de rotación, la formulación es similar:

- Palpador puntual: $d(\varphi)$ es la altura del punto J, intersección del eje de la guía con la leva.
- Palpador plano horizontal: $d(\varphi)$ es la altura del punto J de la leva más elevado.
- Palpador de rodillo de radio r : el centro C del rodillo se encuentra siempre a una distancia r de la leva, es decir, sobre la denominada *curva offset* o *curva de paso*. Si se dispone de la ecuación paramétrica $\overline{OJ}(s)$ de la leva, la expresión de la curva *offset* es $\overline{OC}(s) = \overline{OJ}(s) + r\mathbf{n}(s)$, donde $\mathbf{n}(s)$ es la normal unitaria exterior a la leva. La altura $d(\varphi)$ es la correspondiente a la intersección de la guía con la curva de paso.

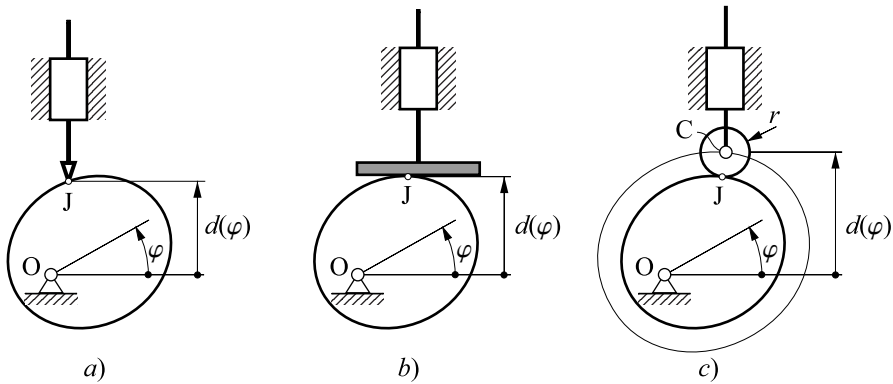


Fig. 4.4 Análisis de leva con palpador de translación a) puntual b) plano c) de rodillo

Análisis de velocidades. Si se dispone de una expresión explícita para $d(\varphi)$, la velocidad del palpador se obtiene simplemente por derivación. Si no se dispone de esta expresión, el análisis de velocidades para una configuración concreta del mecanismo se hace a partir del estudio del par superior formado por la leva y el palpador. La condición de contacto puntual en un punto J implica que la velocidad relativa entre los puntos de contacto J_1 de la leva y J_2 del palpador es tangente a las superficies de contacto. Por lo tanto, según el teorema de los 3 centros, el centro instantáneo I de rotación relativo leva-palpador será el punto de intersección de las rectas siguientes (Fig. 4.5):

- Línea de presión o empuje: línea por J perpendicular a la tangente leva-palpador.
- Línea de centros: línea que une los centros de rotación O_1 de la leva y O_2 del palpador. Para un palpador de translación, O_2 se encuentra en el infinito en la dirección perpendicular a la guía.

Los puntos I_1 de la leva y I_2 del palpador que coinciden con el centro instantáneo relativo I tienen la misma velocidad y, por tanto, $\dot{\varphi}_2 l_2 = \dot{\varphi}_1 l_1$, donde l_1 y l_2 son las distancias desde los centros O_1 y O_2 a I. Se ha asumido el convenio de signo contrario para cada una de las velocidades angulares, para no provocar que aparezca un signo negativo.

Por lo tanto, para un palpador de rotación, su velocidad angular $\dot{\varphi}_2$ en función de la velocidad angular $\dot{\varphi}_1$ de la leva es

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{l_1}{l_2} \dot{\varphi}_1$$

Para un palpador de translación, su velocidad \dot{d} en función de la velocidad angular $\dot{\varphi}$ de la leva es $\dot{d} = l_1 \dot{\varphi}$. Es interesante observar que la distancia l_1 es la derivada $-d'(\varphi)$ de la función $d(\varphi)$ respecto al parámetro φ :

$$\dot{d} = d'(\varphi)\dot{\varphi} = l_1 \dot{\varphi} \tag{4.1}$$

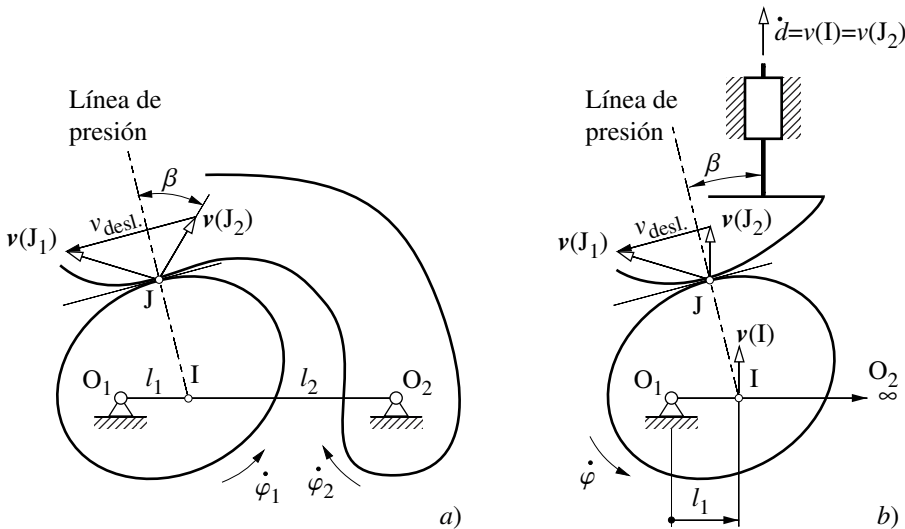


Fig. 4.5 Análisis de velocidades para palpador a) de rotación b) de desplazamiento

Ángulo de presión. El ángulo β que forman la velocidad $v(J_2)$ del punto de contacto del palpador y la línea de presión se denomina *ángulo de presión* o *ángulo de empuje*. En ausencia de rozamiento, la línea de presión indica la dirección de la fuerza F_{12} de contacto leva-palpador, ya que ésta es normal a las superficies. La transmisión óptima se produciría cuando $\beta=0$ ya que en estas condiciones, para un palpador de rotación, el par respecto a O_2 que hace F_{12} es máximo. Para un palpador de translación sólo se hace fuerza en la dirección de la guía, hecho que disminuye las posibilidades de acunamiento.

Velocidad de deslizamiento. Otro valor que interesa conocer para intentar minimizarlo es la velocidad de deslizamiento en el punto de contacto (Fig. 4.5):

$$v_{\text{desl.}} = v(J_1) - v(J_2) \quad (\text{Se podría tomar también } v_{\text{desl.}} = v(J_2) - v(J_1))$$

Esta diferencia de velocidades es la misma en cualquiera referencia. En particular, en la referencia relativa palpador, $v_{\text{desl.}} = v_{\text{rel}}(J_1)$, donde vale el producto de la distancia del punto J al centro instantáneo de rotación relativo I de la leva respecto al palpador por la velocidad angular relativa de la leva:

$$\begin{aligned} \text{Palpador de rotación:} \quad v_{\text{desl.}} &= |\overline{\mathbf{IJ}}| [\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2] \\ \text{Palpador de translación:} \quad v_{\text{desl.}} &= |\overline{\mathbf{IJ}}| \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Así pues esta velocidad es nula sólo si J coincide con I y, por tanto, se encuentra sobre la línea de centros.

Mecanismo de barras equivalente. El análisis de velocidades y de aceleraciones en una configuración concreta se puede realizar sustituyendo el mecanismo leva-palpador por un mecanismo de barras equivalente, es decir, que en esta configuración tenga la misma distribución de velocidades y aceleraciones.

Para eso es suficiente considerar que la distribución de velocidades y aceleraciones sólo depende de las derivadas primeras y segundas de los perfiles en el punto J de contacto. Por tanto, los perfiles de la leva y del palpador se pueden reemplazar por sus círculos osculadores en J (Fig. 4.6). Si estos círculos tienen radios r_1 , r_2 (radios de curvatura) y centros C_1 , C_2 (centros de curvatura), se efectúan las substituciones siguientes:

- Leva → rodillo de radio r_1 y centro C_1 que gira alrededor de O_1
- Palpador → rodillo de radio r_2 y centro C_2 que gira alrededor de O_2

Hay que observar que la equivalencia del perfil por el círculo osculador es válida en toda situación de rodadura, tanto si se trata de un par leva-palpador como si no. En el caso de rodadura en el espacio, la equivalencia se haría con una cuádrlica osculadora.

En este nuevo mecanismo, la distancia C_1C_2 es ahora $r_1+r_2 = \text{constante}$ y, por tanto, el mecanismo equivale –para palpador de rotación– a un cuadrilátero articulado constituido por los miembros siguientes (Fig. 4.6):

- Barra O_1C_1 solidaria a la leva que gira en el entorno de O_1 .
- Barra O_2C_2 solidaria al palpador que gira en el entorno de O_2 .
- Biela C_1C_2 de longitud r_1+r_2 .

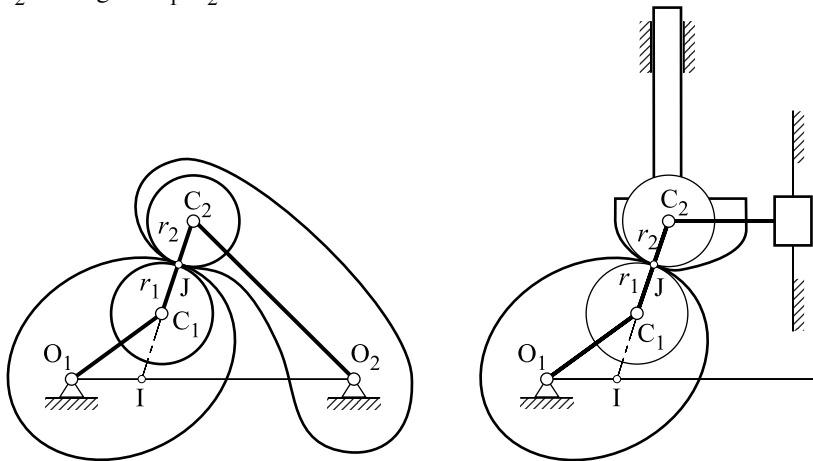


Fig. 4.6 Mecanismo de barras equivalente para un palpador de rotación y uno de traslación

Para un palpador de traslación O_2 se encuentra en el infinito, de manera que la barra O_2C_2 pasa a ser una corredera que puede trasladarse en la dirección de la guía del palpador (Fig. 4.6).

El mecanismo de barras es equivalente sólo en la posición considerada y hasta las aceleraciones. La equivalencia cinemática sería completa y en cualquier posición tan sólo si los dos perfiles tuvieran curvatura constante, es decir, en los casos ya comentados de leva de excéntrica con palpador circular o plano.

Ejemplo 4.1 Determinación de la cinemática de un mecanismo leva-palpador a partir del mecanismo de barras equivalente.

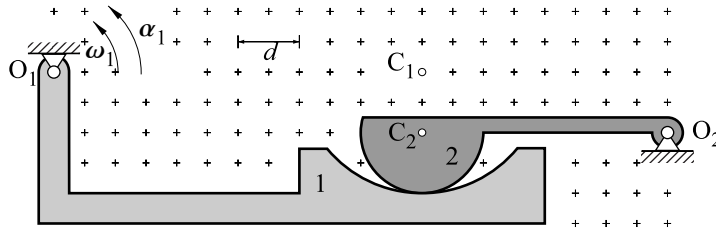


Fig. 4.7 Ejemplo de par superior

En el ejemplo de la figura 4.7 los puntos C_1 y C_2 son los centros de curvatura de los balancines 1 y 2, respectivamente. La determinación de la velocidad y la aceleración angular del balancín 2 se puede hacer a partir del análisis del mecanismo de barras equivalente (Fig. 4.8).

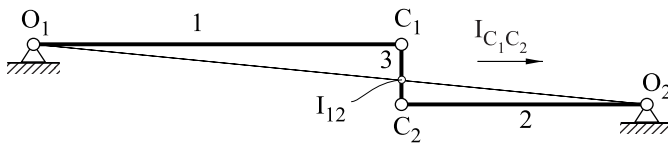


Fig. 4.8 Mecanismo equivalente del ejemplo de la figura 4.7

La barra que une los centros de curvatura tiene un movimiento de translación y, por tanto, la velocidad de los dos puntos $-C_1$ y C_2- es la misma. La velocidad angular del balancín 2 se puede encontrar, entonces, como

$$\omega_2 = -\frac{\overline{O_1 C_1}}{\overline{O_2 C_2}} \omega_1 \text{ tomando } \omega_1 = 1 \text{ rad/s, } \alpha_1 = 1 \text{ rad/s}^2 \text{ y } d = 10 \text{ mm se obtiene } \omega_2 = -1,5 \text{ rad/s}$$

La condición de cierre del anillo $O_1 C_1 C_2 O_2$ da lugar a la expresión siguiente que permite determinar las aceleraciones angulares del balancín 2 y de la biela.

$$-\omega_{s1}^2 \overline{O_1 C_1} + \alpha_{s1} \overline{O_1 C_1}^\perp - \omega_{s3}^2 \overline{C_1 C_2} + \alpha_{s3} \overline{C_1 C_2}^\perp - \omega_{s2}^2 \overline{C_2 O_2} + \alpha_{s2} \overline{C_2 O_2}^\perp = 0$$

$$\begin{cases} -60 \omega_{s1}^2 + 10 \alpha_{s3} - 40 \omega_{s2}^2 = 0 \\ 60 \alpha_{s1} + 40 \alpha_{s2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 40 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{s2} \\ \alpha_{s3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 \omega_{s1}^2 + 40 \omega_{s2}^2 \\ -60 \alpha_{s1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 150 \\ -60 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{s2} = -1,5 \text{ rad/s}^2 \\ \alpha_{s3} = 15 \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

4.2 Ejemplos de análisis de levas con palpador de translación, conocida la ley de desplazamiento

Palpador plano horizontal. Con un palpador plano horizontal de translación (Fig. 4.9.a), el análisis de velocidades resulta particularmente sencillo. El ángulo de presión es nulo ($\beta = 0$) y el punto J de contacto siempre se encuentra sobre la vertical de I. La expresión de la velocidad de deslizamiento queda, en este caso:

$$v_{\text{desl.}} = |\overline{\mathbf{IJ}}| \dot{\varphi} = d(\varphi) \dot{\varphi} \quad (4.3)$$

Ya se ha visto (Eq. 4.1) que la distancia de J a la vertical de O es $l_1 = d'(\varphi)$. Por tanto, para asegurar que J siempre se encuentre sobre la superficie física del palpador, las dimensiones a y b de éste han de verificar las siguientes desigualdades:

$$a > \epsilon - d'_{\text{mín.}}(\varphi)$$

$$b > d'_{\text{máx.}}(\varphi) - \epsilon$$

donde ϵ indica la excentricidad (distancia del centro O de giro de la leva al eje de la guía del palpador).

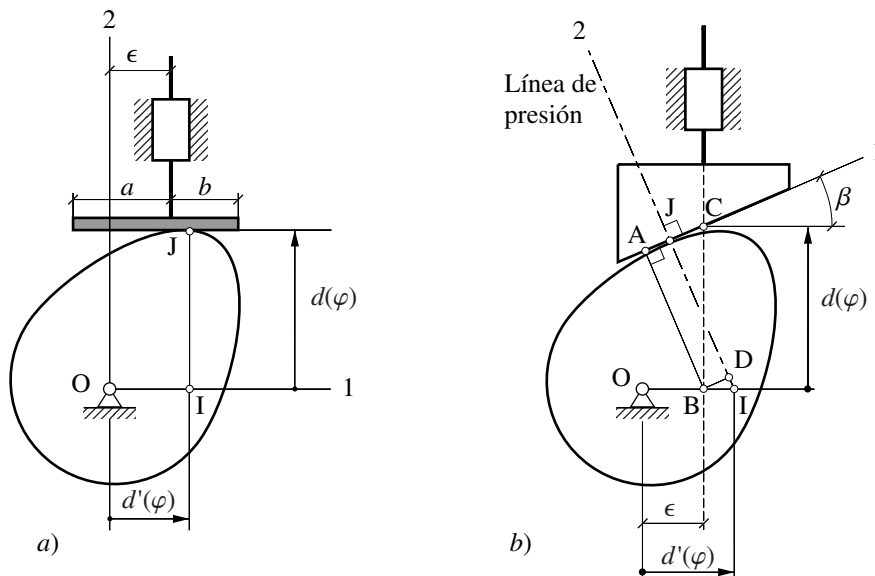


Fig. 4.9 Análisis de levas con palpador plano de translación a) $\beta = 0$, b) $\beta \neq 0$

Palpador plano de inclinación arbitraria. En el caso de un palpador plano con inclinación arbitraria β , el ángulo de presión coincide con esta inclinación y, por tanto, es constante. Como punto fijo al palpador para medir la altura $d(\varphi)$ se toma el punto C en la intersección del eje de la guía con la superficie del palpador. La distancia $|\overline{\mathbf{IJ}}|$, que permite calcular la velocidad de deslizamiento, se

obtiene descomponiéndola como $|\overline{\mathbf{I}\mathbf{J}}| = |\overline{\mathbf{I}\mathbf{D}}| + |\overline{\mathbf{B}\mathbf{A}}|$ y analizando los triángulos rectángulos ABC y DBI indicados a la figura 4.9.b:

$$v_{\text{desl.}} = |\overline{\mathbf{I}\mathbf{J}}|\dot{\varphi}, \quad |\overline{\mathbf{I}\mathbf{J}}| = (d'(\varphi) - \epsilon) \sin \beta + d(\varphi) \cos \beta \quad (4.4)$$

Palpador circular. Para un palpador circular de translación, el ángulo de presión β se obtiene a partir del análisis del triángulo rectángulo de la figura 4.10:

$$\tan \beta = \frac{d'(\varphi) - \epsilon}{d(\varphi)}$$

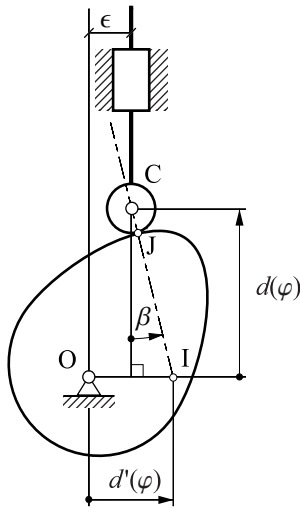


Fig. 4.10 Análisis para un palpador circular de translación

donde el desplazamiento $d(\varphi)$ indica la altura del centro C del palpador respecto a la horizontal que pasa por O. Al aumentar la excentricidad ϵ se consigue disminuir el valor absoluto del ángulo β en la subida ($d'(\varphi) > 0$), pero en cambio aumenta en la bajada ($d'(\varphi) < 0$).

Si r denota el radio del palpador, el valor de la velocidad de deslizamiento es

$$v_{\text{desl.}} = |\overline{\mathbf{I}\mathbf{J}}|\dot{\varphi}, \quad |\overline{\mathbf{I}\mathbf{J}}| = \sqrt{d^2(\varphi) + (d'(\varphi) - \epsilon)^2} - r$$

Este estudio se puede aplicar al caso de palpador puntual simplemente imponiendo $r = 0$.

Si se materializa el perfil con un rodillo que pueda girar en el entorno de C, el rodillo girará con velocidad angular $\omega = v_{\text{llisc.}}/r$ y se evitará el deslizamiento en el punto de contacto. Esta construcción añade complejidad al mecanismo, si bien mejora el comportamiento.

4.3 Especificación de una ley de desplazamiento

Definición por tramos. Normalmente la función $d(\varphi)$ se diseña a partir de un conjunto de especificaciones como son (Fig. 4.11):

- Puntos de paso, es decir, valores concretos del desplazamiento en algunas configuraciones φ .
- Tramos horizontales $d = \text{constante}$ en que el palpador se encuentra en reposo.
- Rampas de pendiente constante, en que el palpador se mueve con velocidad constante.
- etc.

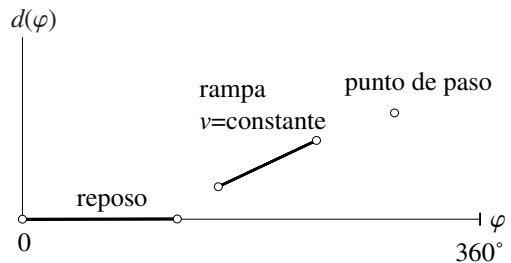


Fig. 4.11 Definición de la ley de desplazamiento

Los puntos de paso o tramos rectilíneos se han de unir de manera adecuada mediante tramos curvilíneos. Ejemplos típicos de leyes de movimiento son los siguientes (Fig. 4.12):

- *Leva con detención simple*: el palpador sale de una posición inferior de reposo, entonces sube hasta un valor máximo e inmediatamente inicia un descenso hasta llegar de nuevo a la posición inferior de reposo.
- *Leva con doble detención*: el palpador parte de una posición de reposo, sube, se detiene durante un intervalo y finalmente baja hasta llegar a la posición inicial de reposo.

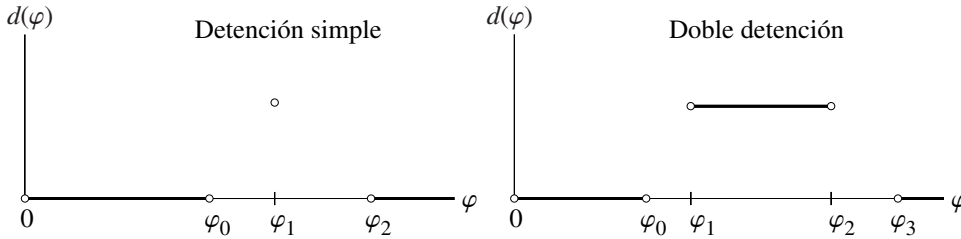


Fig. 4.12 Levas con detención simple y doble

Un ejemplo de leva con detención simple puede ser el que acciona el cabezal de una grapadora. Este cabezal está en reposo hasta que una máquina de alimentación le sitúa un fajo de papeles para grapar debajo. En este momento el cabezal se desplaza, hace contacto con el fajo y le clava la grapa. Inmediatamente después se retira, para dejar que la máquina alimentadora retire el fajo ya grapado.

Un ejemplo de leva con doble detención es la que posicionaría un recipiente vacío que se ha de llenar. Se recibe un recipiente en la posición inicial, se desplaza a la estación de llenado, donde permanece inmóvil durante un tiempo mientras dura la operación, y finalmente vuelve a la posición inicial, donde otro mecanismo lo retira.

Condiciones de continuidad. las leyes de desplazamiento han de verificar ciertas condiciones de continuidad en el tiempo, en particular en las uniones entre tramos:

- Es imprescindible que la velocidad del palpador sea una función continua y, por tanto, $d(t)$ ha de ser al menos C^1 . Discontinuidades en la velocidad originarían aceleraciones teóricamente infinitas y, por tanto, fuerzas muy elevadas que conducirían, excepto en máquinas muy lentas, a la destrucción del mecanismo o a la pérdida de contacto del seguidor.
- Es muy conveniente que la aceleración del palpador sea continua y, por tanto, $d(t)$ debería ser al menos C^2 . Si la aceleración presenta saltos bruscos –sobreaceleraciones teóricas infinitas o variaciones muy grandes–, se producirían variaciones importantes en las fuerzas que actúan en el mecanismo y, a causa de la elasticidad y los juegos, se originarían vibraciones que darían lugar a ruido, fatiga, etc.

Estas condiciones de continuidad en el tiempo se traducen en las mismas condiciones respecto a φ si $\varphi(t)$ es suficientemente continua.

$$\dot{d} = d'(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\ddot{d} = d''(\varphi)\dot{\varphi}^2 + d'(\varphi)\ddot{\varphi}$$

etc.

Para los palpadores más habituales, si se sitúa el palpador en la posición inferior $d = d_0$, el radio de un círculo de centro O que sea tangente al palpador –o que pase por la punta del palpador si este es puntual– se denomina *radio de base* r_0 , y es el radio mínimo de la leva (Fig. 4.13). En el caso de un palpador circular de centro C y radio r , la magnitud $r_1 = r_0 + r$ se denomina *radio primario* e indica la distancia mínima entre C y O.

Inversión cinemática. El perfil de la leva se obtiene conceptualmente de manera muy sencilla, haciendo una inversión cinemática (Fig. 4.14). En la referencia solidaria a la guía, la leva gira un ángulo φ y el palpador se desplaza según la función $d(\varphi)$. Desde la referencia leva, se observa que la guía gira en sentido contrario –un ángulo $-\varphi$ – y el palpador continua desplazándose respecto a la guía según $d(\varphi)$. Para un palpador puntual de vértice J, el perfil de la leva será la curva que va dibujando J en la referencia leva al hacer el movimiento descrito. En la base 1,2 indicada, de orientación fija a la guía:

$$\overline{OJ} = \left\{ \begin{matrix} \epsilon \\ d(\varphi) \end{matrix} \right\}_{1,2}$$

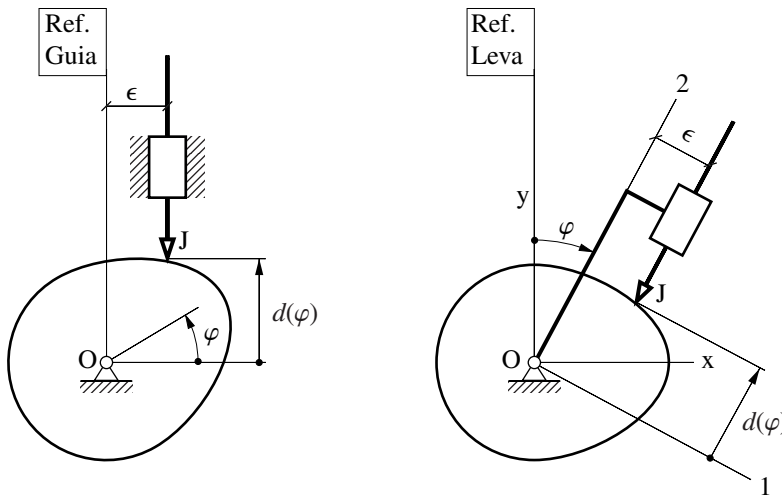


Fig. 4.14 Generación del perfil de la leva para un palpador puntual

Pasando a la base x,y de orientación fija a la leva, se obtiene la ecuación paramétrica del perfil de esta leva:

$$\left\{ \begin{matrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{matrix} \right\} = \{ \overline{OJ}(\varphi) \}_{x,y} = [S_\varphi] \{ \overline{OJ}(\varphi) \}_{1,2} \quad [S_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde $[S_\varphi]$ es la matriz de cambio de base, correspondiente a una rotación de ángulo φ en sentido antihorario.

Haz de curvas. Si el palpador no es puntual, al ir girando la guía y desplazando el palpador, la intersección de dos perfiles muy cercanos del palpador determina un punto de la leva. Si se dispusiese

de una herramienta de corte con la forma del palpador y un movimiento de vaivén perpendicular al perfil por el corte, se iría generando el perfil de la leva.

En términos matemáticos, si el palpador se define mediante una curva implícita $F(x,y) = 0$, los sucesivos perfiles del palpador conforman, en la referencia leva, un cierto haz de curvas:

$$F(x,y,\varphi) = 0 \quad (4.6)$$

Tal como se comenta en el apartado 4.1, el perfil de la leva ha de ser en todo momento una curva tangente al palpador, es decir, tangente a cada una de las curvas del haz. Esta curva se denomina *envolvente del haz*, y avanzando por ella para todos los valores de φ el valor de la función $F(x,y,\varphi)$ se mantiene nulo y, por tanto, se verifica que

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$$

La ecuación del perfil de la leva viene dada por el sistema formado por la ecuación 4.6 –ya que los puntos del perfil son puntos del haz– y por la ecuación anterior

$$\begin{cases} F(x,y,\varphi) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Ecuación paramétrica del perfil. En general, no siempre es posible disponer de una herramienta con la forma del palpador y que pueda ser impulsada con el movimiento de corte apropiado. Para poder definir la trayectoria de otro tipo de herramienta de corte, que corte la leva o su molde a partir de un bloque de material, es necesario reconvertir el sistema anterior (4.7) a la ecuación paramétrica explícita del perfil de la leva:

$$\begin{cases} x = X(\varphi) \\ y = Y(\varphi) \end{cases} \quad (4.8)$$

Para los palpadores habituales y en los tramos en reposo la ecuación paramétrica es muy sencilla, ya que corresponde a la de un arco de circunferencia de centro O.

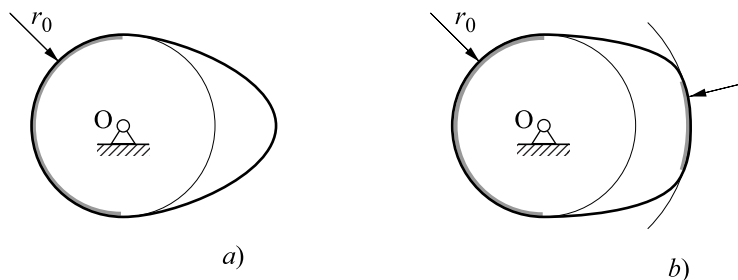


Fig. 4.15 Tramos circulares del perfil de una leva con detención a) simple b) doble

La ecuación paramétrica 4.8 puede obtenerse directamente, sin necesidad de plantear el sistema 4.7, para palpadores sencillos, como es el caso de un palpador plano o de un palpador de cabeza circular o de rodillo. como se puede ver a continuación; basta con aplicar los resultados obtenidos en el análisis de velocidades.

Palpador plano. Para un palpador plano el perfil de la leva es la envolvente de un haz de rectas. Si el palpador es perpendicular a la guía (ángulo de presión $\beta = 0$), en el análisis de velocidades se habían deducido las componentes de vector de posición $\overline{\mathbf{OJ}}(\varphi)$ del punto de contacto J, en la base 1,2 solidaria a la guía:

$$\overline{\mathbf{OJ}}(\varphi) = \begin{Bmatrix} d'(\varphi) \\ d(\varphi) \end{Bmatrix}_{1,2} \quad (4.9)$$

Como en el caso del palpador puntual, pasando a la base (x,y) fija a la leva se obtiene la ecuación paramétrica de su perfil.

$$\begin{Bmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{Bmatrix} = \{\overline{\mathbf{OJ}}(\varphi)\}_{x,y} = [S_\varphi] \{\overline{\mathbf{OJ}}(\varphi)\}_{1,2}$$

Obviamente, en este caso concreto de palpador plano con $\beta=0$, el perfil de la leva no depende de ϵ .

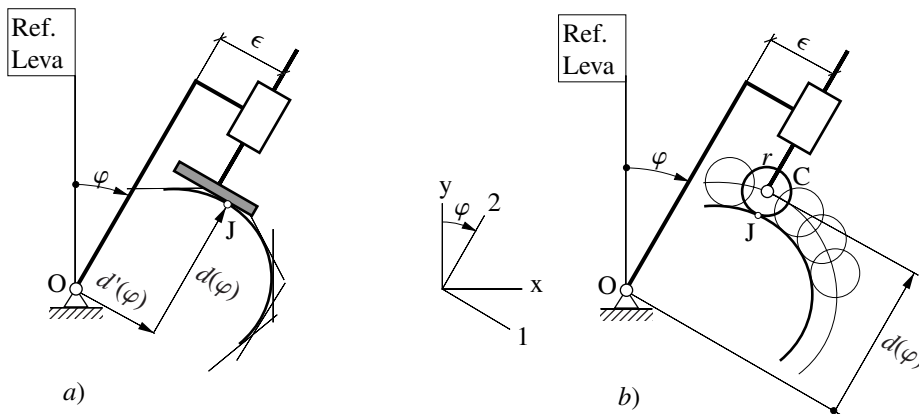


Fig. 4.16 Generación del perfil de leva para palpadores a) plano y b) de rodillo

Para un palpador plano con inclinación arbitraria β , el perfil de la leva se deduce de forma análoga, a partir del vector de posición $\overline{\mathbf{OJ}}(\varphi)$ en la base 1,2 solidaria a la guía (Fig. 4.9). Este vector se puede descomponer como $\overline{\mathbf{OJ}} = \overline{\mathbf{OI}} + \overline{\mathbf{IJ}}$, donde $\overline{\mathbf{IJ}}$ se obtiene a partir de la expresión 4.4.

$$\{\overline{\mathbf{OJ}}(\varphi)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} d'(\varphi) \cos \beta \\ d(\varphi) \cos \beta - \epsilon \sin \beta \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Palpador circular. Con un palpador circular de centro C y radio r , el haz de expresión 4.6 es una familia de círculos en la cual los centros se encuentran sobre la curva de paso (Fig. 4.16):

$$\{\overline{\text{OC}}(\varphi)\}_{1,2} = \left\{ \begin{matrix} \epsilon \\ d(\varphi) \end{matrix} \right\} \quad (4.11)$$

La envolvente del haz, el perfil de la leva $\overline{\text{OJ}}(\varphi)$, equivale al lugar geométrico de puntos situados a una distancia r de la curva de paso en la dirección de su normal $-\mathbf{n}(\varphi)$ interior –hacia el área cerrada por la curva:

$$\overline{\text{OJ}}(\varphi) = \overline{\text{OC}}(\varphi) + r\mathbf{n}(\varphi)$$

Por esto, el perfil de la leva es la curva *offset* a la curva de paso, de la misma manera que, como se ha comentado en el apartado 4.1, la curva *offset* al perfil de la leva es la curva de paso. La distancia entre una y la otra es $r = \text{constante}$.

Si se dispusiese de una fresa cilíndrica de radio r , impulsada con un movimiento de giro alrededor de su eje adecuado para el corte, se podría mecanizar la leva haciendo que el centro C de la herramienta siguiese la trayectoria $\overline{\text{OC}}(\varphi)$.

Palpadores de rotación. Para los palpadores de rotación, la ecuación geométrica de enlace es $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$, donde φ_1 es la rotación de la leva y φ_2 es la rotación del palpador. Para el palpador puntual de rotación, y atendiendo a la figura 4.17, se obtiene:

$$\overline{\text{OJ}}(\varphi_1) = \left\{ \begin{matrix} s_1 - s_2 \cos \varphi_2 \\ s_2 \sin \varphi_2 \end{matrix} \right\}_{1,2}$$

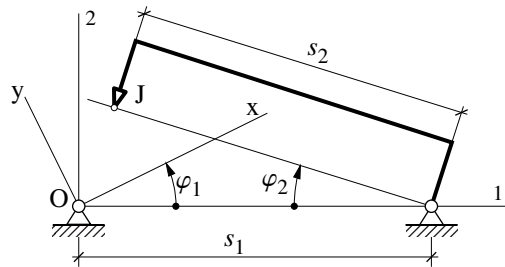


Fig. 4.17 Palpador puntual de rotación

y la ecuación paramétrica del perfil de la leva es $\{\overline{\text{OJ}}(\varphi_1)\}_{x,y} = [S_{\varphi_1}]\{\overline{\text{OJ}}(\varphi_1)\}_{1,2}$

Para el palpador plano de rotación (fig. 4.18) a partir del análisis de velocidades (pág. 92) se obtiene:

$$\left. \begin{matrix} \dot{\varphi}_1 d_1 = \dot{\varphi}_2 d_2 & ; & d_1 = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} d_2 = \varphi_2' d_2 \\ & & d_1 + d_2 = s_1 \end{matrix} \right\} d_2 = s_1 / (1 + \varphi_2') ; s_3 = d_2 \cos \varphi_2 = \frac{s_1 \cos \varphi_2}{1 + \varphi_2'}$$

$$\overline{\text{OJ}}(\varphi_1) = \left\{ \begin{matrix} s_1 + s_2 \sin \varphi_2 - s_3 \cos \varphi_2 \\ s_2 \cos \varphi_2 + s_3 \sin \varphi_2 \end{matrix} \right\}_{1,2}$$

de donde la ecuación paramétrica del perfil de la leva es

$$\{\overline{\text{OJ}}(\varphi_1)\}_{x,y} = [S_{\varphi_1}]\{\overline{\text{OJ}}(\varphi_1)\}_{1,2}$$

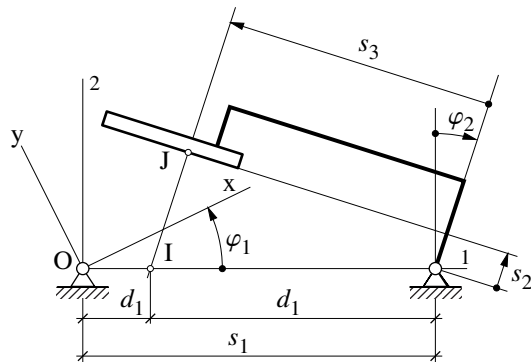


Fig. 4.18 Palpador plano de rotación

4.5 Características geométricas del perfil de la leva

Una vez obtenido el perfil de la leva, se ha de comprobar que éste no presente características geométricas no deseadas que impidan un contacto leva-palpador correcto. Los problemas que se pueden presentar son básicamente de 2 tipos:

- Imposibilidad de acceso del palpador al punto teórico de contacto a causa de que el palpador invada otros tramos de la leva al intentar acceder a este punto.
- Existencia de degeneraciones en el perfil de la leva. A pesar de que la ley de desplazamiento sea continua y suave, es posible que el perfil de la leva presente vértices o autointersecciones.

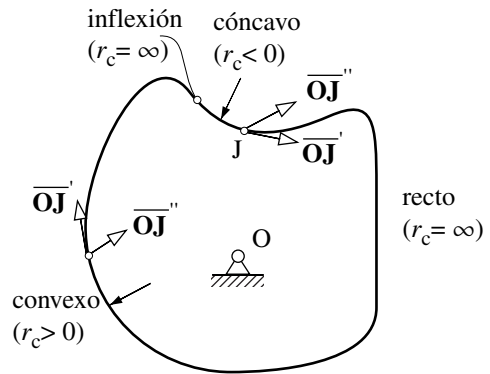


Fig. 4.19 Radio de curvatura

Radio de curvatura. Para detectar estos posibles problemas del perfil de la leva, se ha de determinar su radio de curvatura:

$$r_c = \frac{|\overline{\mathbf{OJ}}|^2}{\overline{\mathbf{OJ}}''_n} \quad (4.12)$$

Este valor también resulta de interés en el dimensionamiento de la leva para calcular la presión de contacto leva-palpador.

Como que el perfil es una curva cerrada, a fin de facilitar el análisis se puede seguir el convenio de considerar $r_c > 0$ para los tramos convexos y $r_c < 0$ para los tramos cóncavos (Fig. 4.19). Los puntos de inflexión son aquellos en que se pasa de $r_c = \infty$ a $r_c = -\infty$. Si se sigue este convenio de signos, el subíndice en el denominador de 4.12 indica la componente normal de $\overline{\mathbf{OJ}}''$ hacia a la zona interior cerrada dentro de la curva.

Las derivadas de 4.12 son evidentemente en la referencia leva y respecto al parámetro utilizado para expresar $\overline{\mathbf{OJ}}$, en este caso φ . Para su cálculo, resulta más cómodo utilizar la base 1,2 solidaria a la guía –donde se conocen los componentes de $\overline{\mathbf{OJ}}$ –, si bien entonces al derivar $\overline{\mathbf{OJ}}(\varphi)$ se ha de añadir a la derivada componente a componente de $\overline{\mathbf{OJ}}(\varphi)$ el término complementario correspondiente a la derivación en base móvil:

$$\begin{aligned} \{\overline{\mathbf{OJ}}\}_{x,y} &= [S_\varphi] \{\overline{\mathbf{OJ}}\}_{1,2} \\ \{\overline{\mathbf{OJ}}'\}_{x,y} &= \{\overline{\mathbf{OJ}}\}'_{x,y} = [S'_\varphi] \{\overline{\mathbf{OJ}}\}_{1,2} + [S_\varphi] \{\overline{\mathbf{OJ}}'\}_{1,2} \end{aligned}$$

y multiplicando por $[S_\varphi]^{-1}$

$$\{\overline{\mathbf{OJ}}'\}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \{\overline{\mathbf{OJ}}\}_{12} + \{\overline{\mathbf{OJ}}'\}_{12}$$

Palpador plano. Para un palpador plano con $\beta = 0$, derivando 4.9 respecto a φ en la base móvil 1,2:

$$\{\overline{\mathbf{OJ}}(\varphi)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} d'(\varphi) \\ d(\varphi) \end{Bmatrix} \xrightarrow{d/d\varphi} \begin{Bmatrix} d + d'' \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{d/d\varphi} \begin{Bmatrix} \dots \\ -(d + d'') \end{Bmatrix}$$

La dirección normal a la curva es la del eje 2 negativo. Sustituyendo en 4.12, el radio de curvatura es:

$$r_c(\varphi) = d(\varphi) + d''(\varphi), \quad d(\varphi) = r_0 + b(\varphi)$$

Para un palpador plano con inclinación arbitraria, procediendo de manera análoga a partir de la expresión 4.10, el radio de curvatura que se obtiene es

$$r_c(\varphi) = (d(\varphi) + d''(\varphi)) \cos \beta - \epsilon \sin \beta$$



Fig. 4.20 Posibles problemas del perfil de una leva con palpador plano

Analizando el signo de la función $r_c(\varphi)$, se deducen las características del perfil de la leva:

- Si siempre $r_c(\varphi) > 0$, la leva es convexa y el palpador podrá acceder al punto teórico de contacto sin problemas.
- Cuando aparece un punto con $r_c(\varphi) = 0$, se tiene un pico –un vértice o una punta (Fig. 4.20)– en el perfil de la leva y, por tanto, presiones muy elevadas en el contacto leva-palpador.
- Un tramo con $r_c(\varphi) < 0$ entre 2 puntos de retroceso $-r_c(\varphi) = 0$ – corresponde a un rebaje que, además de originar un pico, impide seguir la ley de desplazamiento especificada.

El perfil es tal que, al ir avanzando por él con ángulos φ crecientes siguiendo la parametrización, el ángulo que forma la tangente respecto a una dirección fija a la leva es monótonamente decreciente, ya que es igual a $-\varphi$. Así, por lo tanto, es imposible que una leva obtenida por generación presente puntos de inflexión, como en el caso que se muestra a la figura 4.3.

Para eliminar los tramos problemáticos y asegurar que siempre $r_c(\varphi) > 0$, es suficiente con aumentar el radio de base r_0 , ya que $r_c(\varphi)$ es una función creciente de d_0 , y d_0 es creciente en función de r_0 . A pesar de todo, se ha de tener en cuenta que un valor muy elevado de r_0 no es recomendable, ya que con r_0 aumentan el tamaño de la leva y la velocidad de deslizamiento (4.2).

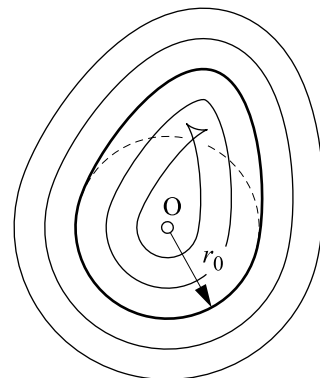


Fig. 4.21 Efecto de variar r_0 en el perfil de la leva (palpador plano)

Al incrementar d_0 no se modifica la línea de presión (Fig. 4.9), ya que ésta sigue siendo la línea que pasa por I y forma un ángulo β con la guía del palpador. Por tanto el nuevo punto de contacto se encuentra según la normal por el punto J original de contacto, a una distancia $\Delta d_0 \cos \beta = \Delta r_0$. En otras palabras, al ir variando d_0 se va obteniendo una familia de curvas *offset* (Fig. 4.21).

Palpador circular. Para una leva con palpador circular, el radio de curvatura del perfil de la leva, r_c , y el de la curva de paso, r_{cp} , difieren en el radio r del rodillo, ya que la primera es la curva *offset* interior a la segunda:

$$r_c(\varphi) = r_{cp}(\varphi) - r$$

Para calcular r_{cp} se deriva la ecuación 4.11 de la curva de paso:

$$\{\overline{OC}(\varphi)\}_{1,2} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon \\ d(\varphi) \end{array} \right\} \xrightarrow{d/d\varphi} \left\{ \begin{array}{c} d \\ d' - \epsilon \end{array} \right\} \xrightarrow{d/d\varphi} \left\{ \begin{array}{c} 2d' - \epsilon \\ d'' - d \end{array} \right\}$$

Esta curva cerrada se ha parametrizado en sentido horario, de manera que la componente normal (hacia el interior) de la derivada se puede expresar como

$$\overline{OC}' \Big|_n = \frac{\overline{OC}'' \times \overline{OC}'}{|\overline{OC}'|} \Big|_{\text{eje 3}}$$

y, por tanto, el radio de curvatura de la curva de paso es $r_{cp}(\varphi) = \frac{(d^2 + (d' - \epsilon)^2)^{3/2}}{(d' - \epsilon)(2d' - \epsilon) - d(d'' - d)}$

Los problemas que se pueden presentar en el contacto leva-palpador son los siguientes:

- Tramos cóncavos ($r_c < 0$) del perfil de leva. Se ha de verificar que $|r_c| > r$. En caso contrario, el rodillo no puede acceder al punto teórico de contacto (Fig. 4.22.a).
- Tramos convexos ($r_c > 0$) de la curva de paso (Fig. 4.22.b). El análisis es similar al caso del palpador plano. Se ha de verificar que $r_{cp} > r$. Si $r_{cp} = r$, se generaría un vértice ($r_c = 0$) en el perfil de la leva. Si $r_{cp} < r$, se produciría un rebaje.

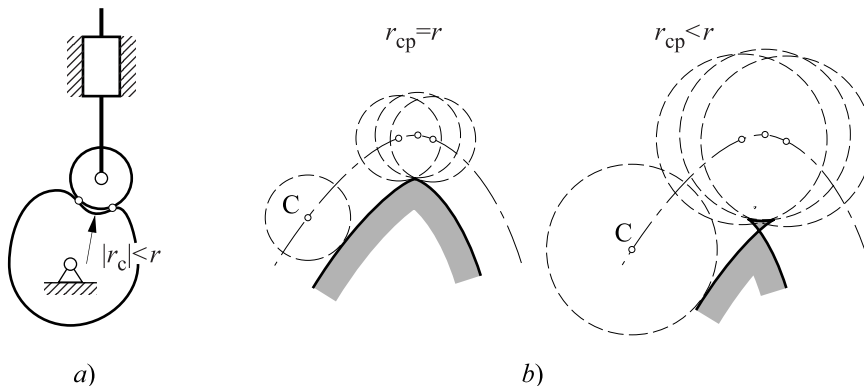


Fig. 4.22 Posibles problemas del perfil de una leva con palpador circular

Anexo 4.I Curvas de Bézier no paramétricas

En este anexo se presentan las curvas de Bézier no paramétricas –funciones polinómicas definidas sobre la base de los polinomios de Bernstein– como una alternativa a la utilización de funciones polinómicas definidas sobre la base monomial.

Independientemente de que este anexo se incluya en el capítulo dedicado a las levas, su utilización no se ha de restringir a la definición de funciones de desplazamiento. La sencillez en la especificación de condiciones de continuidad y su definición intuitiva las hacen muy útiles en el diseño de leyes temporales del movimiento a partir de especificaciones dadas. La utilización de las curvas de Bézier es, por ejemplo, la manera más sencilla de definir la curva de arrancada de un ascensor hasta la velocidad de régimen sin superar una determinada aceleración dada.

Funciones polinómicas monomiales. Un polinomio $b(u)$ de grado n se expresa en la base de monomios o canónica $(1, u, u^2, u^3, \dots)$ como la combinación lineal:

$$b(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i \quad (4.13)$$

donde a_i son los coeficientes del polinomio en la base de monomios.

Esta base no resulta recomendable en la definición de curvas por tramos por los motivos siguientes:

- Problemas de estabilidad numérica, especialmente si n es elevado. Pequeños errores en el cálculo de los coeficientes, inevitables en cálculos numéricos, dan origen a variaciones inaceptables del valor de la función fuera del entorno $u = 0$ y a discontinuidades en las uniones.
- Los coeficientes a_i de la ecuación 4.13 no tienen ningún significado geométrico. Una modificación de un coeficiente no produce ningún efecto intuitivo sobre la forma de la función $b(u)$.
- La imposición de condiciones de continuidad en la unión entre dos curvas no es trivial, ya que involucra todos los coeficientes de una de ellas, incluso en el caso de continuidad C^0 .

Polinomios de Bernstein. Los problemas mencionados de la base monomial se solucionan si se emplean los denominados *polinomios de Bernstein* que constituyen también una base. Sobre un dominio unitario, los polinomios de Bernstein de grado n son

$$B_i^n(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n \quad \text{donde } C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (4.14)$$

En la figura 4.23 se muestran los polinomios de Bernstein de grados 1, 2 y 3 así como también los monomios hasta grado 3.

Es interesante observar que los polinomios de Bernstein disfrutan de tres propiedades especialmente interesantes:

- Comportamiento simétrico respecto a los dos extremos del intervalo de definición.
- En cada extremo sólo hay un polinomio de valor no nulo.
- Presentan un máximo para la abscisa $u = i/n$.

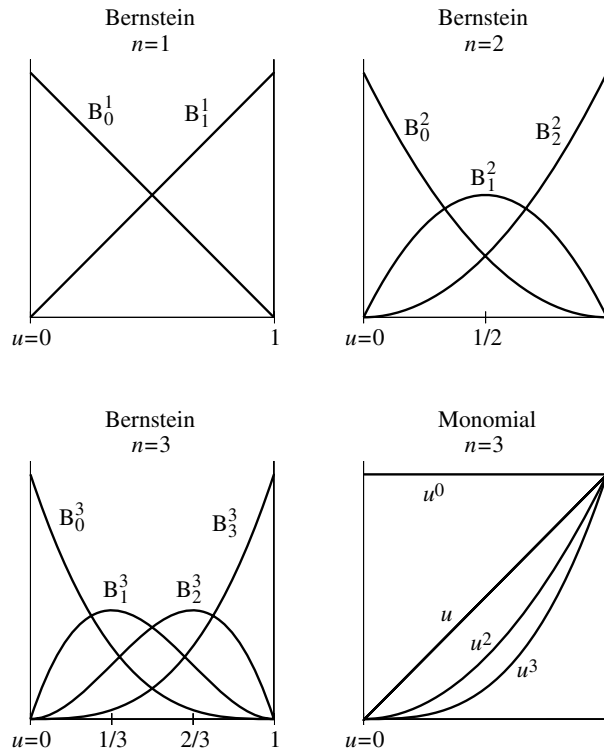


Fig. 4.23 Polinomios de Bernstein de grados $n = 1, 2, 3$ y monomios hasta grado 3

Puntos de control. Una función polinómica $b(u)$ de grado n se expresa en esta base como

$$b(u) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(u) \quad u \in [0,1] \quad (4.15)$$

donde los $n+1$ coeficientes b_i se denominan *ordenadas de Bézier*. El gráfico de la curva $b(u)$ se denomina *curva de Bézier no paramétrica*. Para cada ordenada b_i se define un punto \mathbf{b}_i de coordenadas $(i/n, b_i)$ denominado *punto de control* y el conjunto de los puntos de control definen el denominado *polígono de control* de la curva.

En la expresión 4.15, el polinomio $B_i^n(u)$ se puede interpretar como la influencia de b_i en la curva $b(u)$. Esta influencia es máxima en $u = i/n$, ya que $B_i^n(u)$ presenta un máximo. Eso hace que la representación gráfica de la curva $b(u)$ tienda a ser cercana al polígono de control (Fig. 4.24), y si se desplaza verticalmente un punto de control –se modifica la ordenada b_i correspondiente– la curva presenta la modificación más acusada en el entorno de este punto.

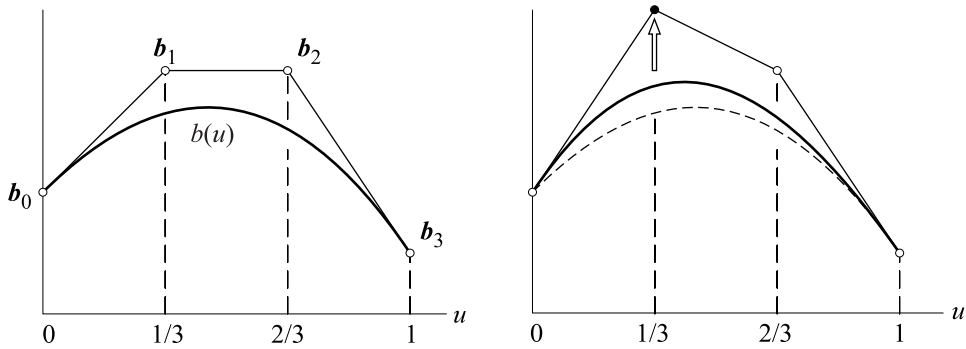


Fig. 4.24 Curva de Bézier no paramétrica de grado $n = 3$. Influencia del punto b_1

Esta propiedad y las siguientes dan un significado geométrico a las ordenadas de Bézier que facilita el diseño y la modificación interactiva de una curva de Bézier:

- La curva pasa por los puntos extremos b_0, b_n y es tangente al polígono de control en estos puntos.
- La curva se encuentra contenida dentro del dominio convexo de los puntos de control (Fig. 4.25). El polígono de control permite establecer una caja contenedora dentro de la cual se puede asegurar que se encuentra la curva.

Además, resulta interesante observar los casos particulares siguientes (Fig. 4.26):

- $n = 1$; segmento rectilíneo de extremos b_0, b_1 .
- $n = 2$; segmento parabólico de extremos b_0 y b_2 , con tangentes en estos puntos que se cortan en b_1 .

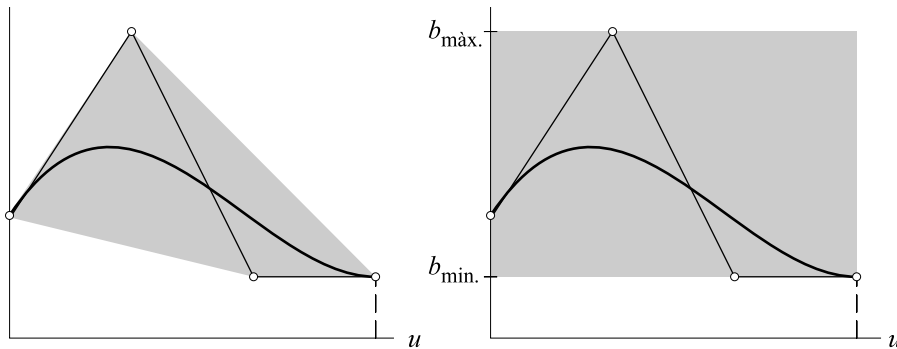


Fig. 4.25 Dominio convexo y caja contenedora de una curva de grado $n = 3$

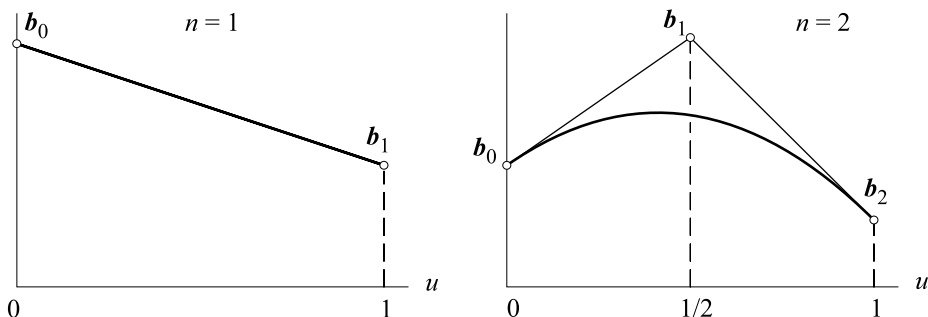


Fig. 4.26 Curvas de Bézier no paramétricas de grados $n = 1, 2$

A causa de las propiedades favorables de las curvas de Bézier, estas curvas son empleadas ampliamente en aplicaciones de CAD (carrocerías de automóvil, fuselajes de aviones, etc.). De hecho, fueron desarrolladas por el ingeniero P. Bézier mientras trabajaba durante la década de los sesenta en el diseño de carrocerías para Renault. Además, las curvas de Bézier son un estándar en paquetes gráficos (OpenGL, PHIGS, lenguaje PostScript) y en programas de ilustración (Adobe Illustrator, FreeHand, etc.). En estas aplicaciones, se utiliza la versión paramétrica de las curvas de Bézier, en la cual los puntos de control se pueden situar libremente en el plano o en el espacio.

Derivadas e integración de una curva de Bézier no paramétrica. La derivada $b'(u)$ de un polinomio $b(u)$ de grado n es un polinomio de grado $n' = n - 1$. En la base de Bernstein, se puede comprobar que los coeficientes b'_i de la derivada se obtienen como

$$b'_i = n(b_{i+1} - b_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (4.16)$$

En la figura 4.27 se presenta como ejemplo la derivada de una curva cúbica ($n = 3$), que es una curva parabólica. Esta última se ha representado con una escala ampliada 3 veces para el eje de ordenadas.

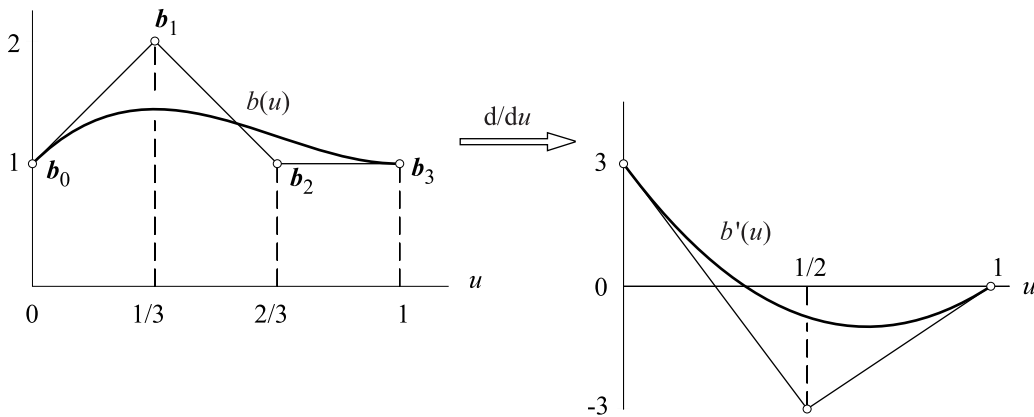


Fig. 4.27 Derivada de una curva de Bézier no paramétrica (grado $n = 3$)

De la expresión 4.16 se deduce que, en el proceso de integración,

$$b_{i+1} = b_i + \frac{b'_i}{n} \quad (4.17)$$

siendo b'_i las ordenadas de Bézier de la función de partida, b_i las ordenadas de la función integrada y n el orden de esta. Para definir la constante de integración se puede tomar un valor concreto para una coordenada; el más sencillo es b_0 .

La utilización de las curvas de Bézier para definir una función $b(s)$ de la variable independiente s entre s_0 y s_1 $s \in [s_0, s_1]$, y el hecho de que las curvas de Bézier $b(u)$ se definen en un dominio unitario $u \in [0,1]$, hace que usualmente se utilice el cambio lineal de variable $u = (s - s_0) / (s_1 - s_0)$.

Con este cambio de variables, la relación entre la derivada $d'(u)$ respecto a u y la derivada $d'(s)$ respecto a s es

$$d'(s) = d'(u)u'(s) = \frac{d'(u)}{s_1 - s_0}$$

Imposición de condiciones de continuidad. La expresión 4.16 pone de manifiesto que las derivadas r -ésimas en los extremos $u = 0, u = 1$ sólo dependen de los $r+1$ puntos de control más cercanos, es decir, en $u = 0$ sólo depende de los coeficientes $b_0 \dots b_r$, y en $u=1$ de los coeficientes $b_{n-r} \dots b_n$.

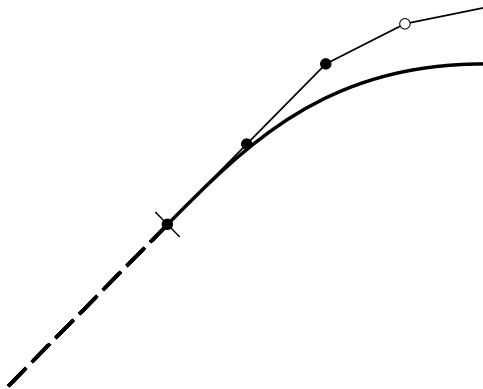


Fig. 4.28 Unión C^2 recta-Bézier

La imposición de condiciones de continuidad r -ésima en la unión entre dos curvas resulta entonces mucho más sencilla en la base de Bernstein que en la base de monomios, ya que sólo se ven involucrados $r+1$ coeficientes de cada curva.

En el caso particular de unión de una curva de Bézier con una recta, para conseguir continuidad C^r respecto al parámetro s es suficiente con que los $r+1$ puntos de control más cercanos a la unión estén sobre la prolongación de la recta (Fig. 4.28).

En el caso más general, se plantea determinar la curva de Bézier que se une con continuidad C^r con otra curva conocida (Fig. 4.29). Si la curva conocida es de Bézier $b(s)$, de orden n_1 e intervalo de definición Δs_1 , las derivadas respecto a s en el punto de unión se pueden encontrar de manera recurrente utilizando la expresión 4.16 y teniendo en cuenta que las curvas de Bézier pasan por los puntos de control extremos. Por ejemplo, si la unión se hace con el último punto de esta curva:

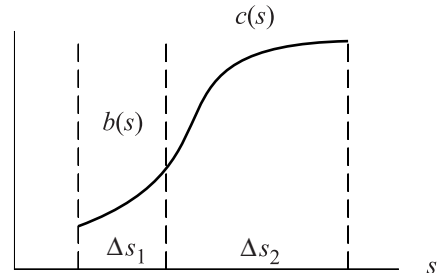


Fig. 4.29 Unión de dos tramos de Bézier

$$\begin{aligned}
 b_n & & b(s_{\text{máx.}}) &= b_n \\
 b'_{n-1} &= (b_n - b_{n-1})n_1 & b'(s) \Big|_{s_{1\text{máx.}}} &= b'(u) \Big|_{u=1} \frac{1}{\Delta s_1} = b'_{n-1} \frac{1}{\Delta s_1} \\
 b''_{n-2} &= (b'_{n-1} - b'_{n-2})(n_1 - 1) & b''(s) \Big|_{s_{1\text{máx.}}} &= b''_{n-2} \frac{1}{(\Delta s_1)^2} \\
 \vdots & & \vdots &
 \end{aligned}$$

Conocidas estas derivadas, las ordenadas de Bézier c_i de la curva de Bézier $c(s)$, orden n_2 e intervalo de definición Δs_2 que empalma con continuidad C^r con la primera se pueden encontrar a partir de la expresión 4.17, y teniendo en cuenta que las curvas de Bézier pasan por los puntos extremos

$$c_0 = b_n, c_1 = c_0 + \frac{c'_0}{n_2}, c_2 = c_1 + \frac{c'_1}{n_2}, \dots$$

$$c'_0 = c'(u)|_{u=0} = c'(s)|_{s_2 \text{ mín.}}, \Delta s_2 = b'(s)|_{s_1 \text{ máx.}}, \Delta s_2 = b'_{n-1} \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1}, c'_1 = c'_0 + \frac{c''_0}{n_2 - 1}, \dots$$

$$c''_0 = b''(s)|_{s_1 \text{ máx.}} (\Delta s_2)^2 = b''_{n-2} \left(\frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} \right)^2, \dots$$

$$\vdots$$

Como casos particulares al unir dos curvas de Bezier:

- Si se quiere continuidad C^1 , sólo se necesita que los dos últimos puntos de control del primer tramo estén alineados con los dos primeros del segundo tramo –las curvas de Bézier en los extremos son tangentes al polígono de control.
- Si las dos curvas de Bézier son del mismo orden y están definidas en el mismo intervalo ($n_1 = n_2$ y $\Delta s_1 = \Delta s_2$), las ordenadas de Bézier respectivas guardan la relación:

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & 6 & -1 & 0 \\ 16 & -32 & 24 & -8 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ b_{n-3} \\ b_{n-4} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Ejemplos de diseño de funciones de desplazamiento mediante curvas de Bézier

Tramo de leva con detención simple. En el caso usual en que se quiere simetría entre la subida y la bajada (Fig. 4.12), el diseño con una única curva de Bézier es trivial. Si se quiere unión C^r con los tramos de reposo, por las propiedades de continuidad en los extremos de las curvas de Bézier, se habrán de situar $r+1$ puntos de control a cada extremo alineados con las rectas de reposo. Además, se necesitará al menos un punto de control intermedio para gobernar la altura máxima $b_{\text{máx}}$. Por esto, se necesitan como mínimo $2r+3$ puntos de control, que corresponden a un grado $n=2r+2$ de la curva de Bézier.

A la figura 4.30 se ha ilustrado el caso habitual $r=2$ ($n=6$). Si el reposo es para la altura de referencia $b(u)=0$, se verifica $b_i=0$ para todos los puntos de control, menos para el central b_3 . Así:

$$b(u) = b_3 B_3^6(u) = b_3 20(1-u)^3 u^3$$

y la altura máxima obtenida es, por simetría, en el punto medio sobre la abscisa $u=1/2$:

$$b_{\text{máx.}} = \frac{5}{16} b_3$$

Les secuencias de ordenadas de Bézier de las sucesivas derivadas, indicadas a la figura 4.30, se obtienen fácilmente a partir de la ecuación 4.16. Para representar cada una de estas derivadas se han

empleado escalas diferentes en el eje de ordenadas. Si se quiere obtener una curva no simétrica, es suficiente emplear un grado $n > 6$, con lo que aparecerán más puntos de control interiores y se dispondrá de un mayor número de grados de libertad para controlar la forma de la curva.

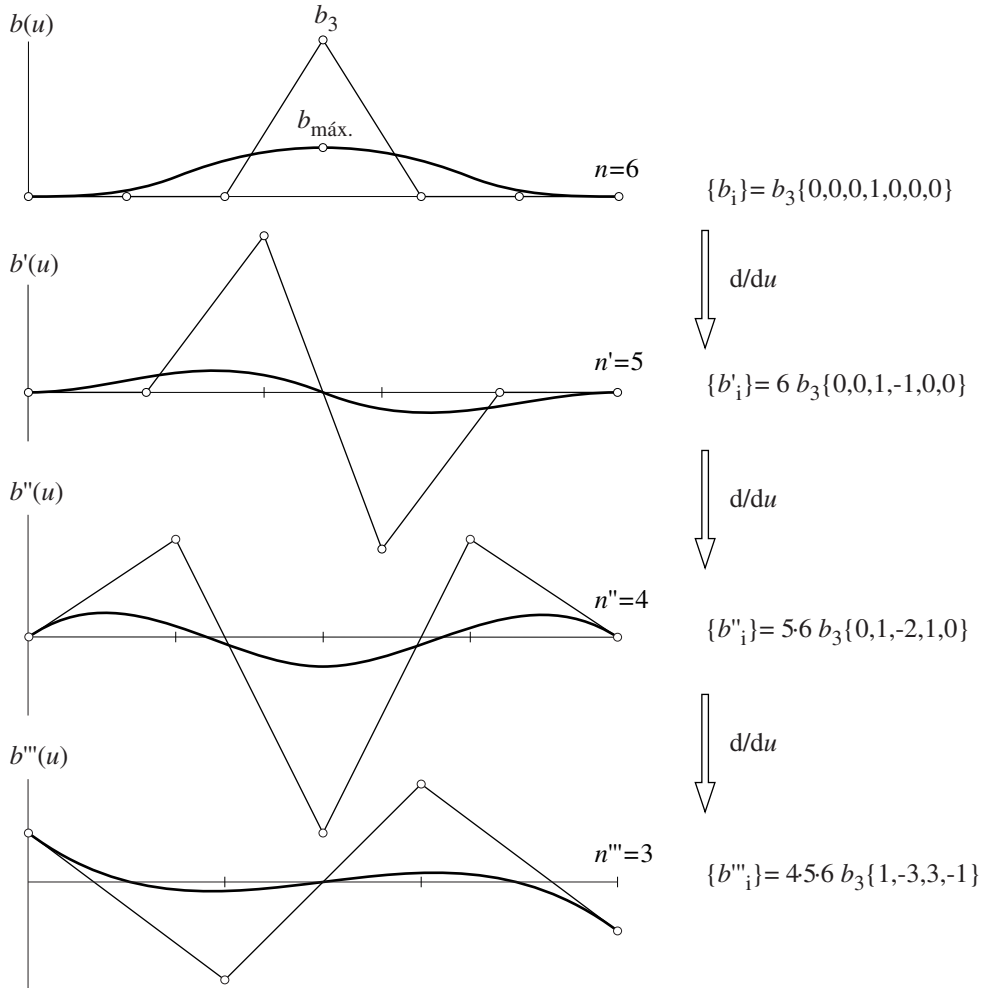


Fig. 4.30 Tramo de subida y bajada para una leva con detención simple y derivadas sucesivas

Tramo de subida de una leva de doble detención. Si se pide, como en el caso anterior, unión con continuidad C^2 , será suficiente situar 3 puntos de control en cada extremo alineados con las rectas de reposo. Por tanto, se necesitarán al menos $3+3=6$ puntos de control (grado $n = 5$).

Si el reposo inicial es para la altura de referencia $b(u)=0$ y el reposo final es a una altura b_3 , en el caso $n = 5$ se verifica $b_i = 0$ para los 3 primeros puntos de control, y $b_i = b_3$ para los 3 últimos. Por tanto:

$$b(u) = b_3[B_3^5(u) + B_4^5(u) + B_5^5(u)] = b_3u^3[10(1-u)^2 + 5(1-u)u + u^2]$$

En la figura 4.31 se ha dibujado este tramo de subida y sus derivadas sucesivas. El tramo de bajada se obtendría de manera análoga. Si para conseguir más control de la forma del tramo se necesitasen más grados de libertad, sería suficiente utilizar un grado más elevado.

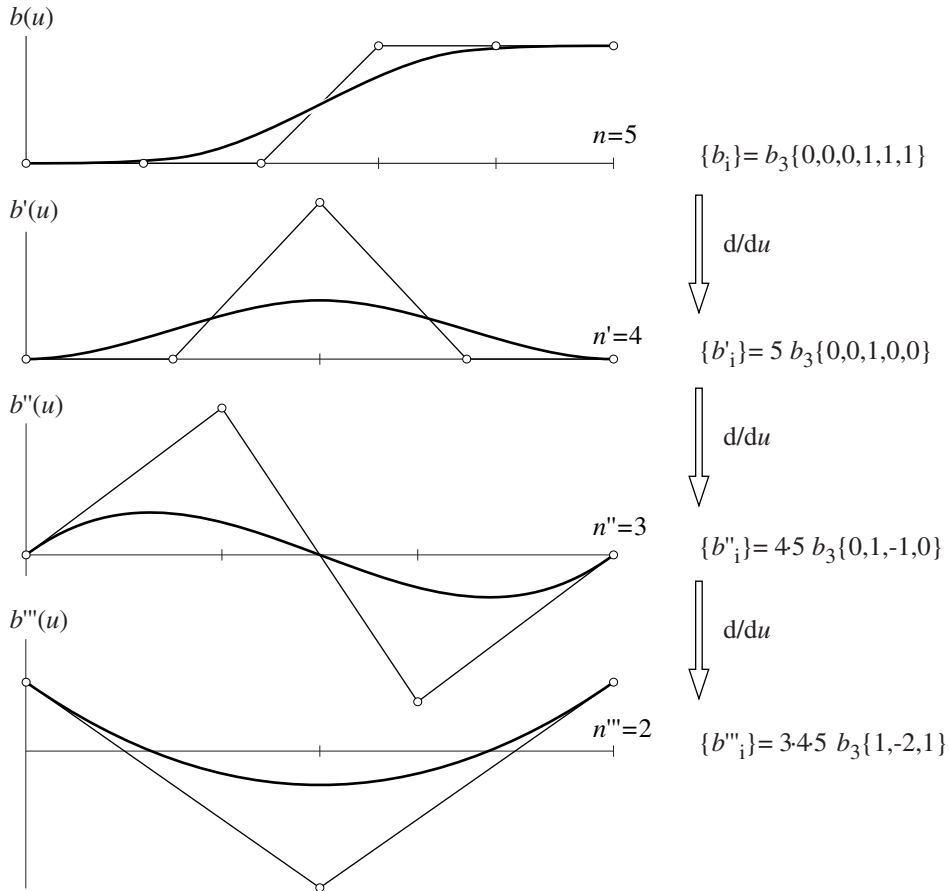


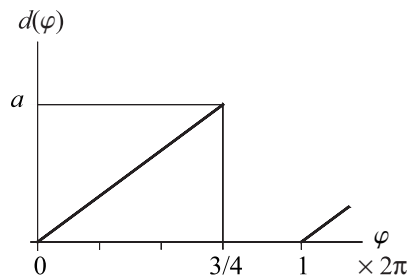
Fig. 4.31 Tramo de subida y derivadas sucesivas para una leva de doble detención

Problemas

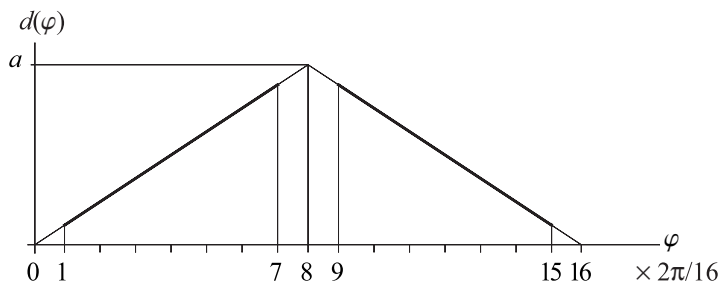
P 4-1 El desplazamiento de una leva de doble detención es de 10 mm en 60° . Definir el tramo de subida utilizando:

- Una curva de Bézier que imponga continuidad C^1 con los tramos de reposo.
- Una curva de Bézier que imponga continuidad C^2 con los tramos de reposo.
- Una función armónica. ¿Qué continuidad tiene con los tramos de reposo en este caso?

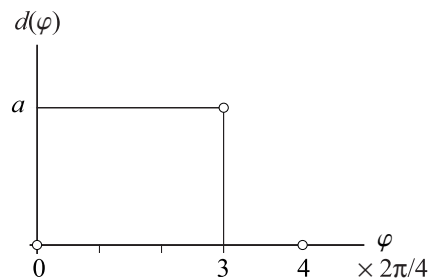
P 4-2 Una leva plana ha de proporcionar la ley de desplazamiento de diente de sierra como se indica en la figura. Determinar las curvas de Bézier que produzcan uniones C^1 y C^2 y estudiar las 3 primeras derivadas del desplazamiento.



P 4-3 La ley de desplazamiento de una leva plana es triangular simétrica, como se muestra en la figura. Determinar las curvas de Bézier que produzcan uniones C^1 y C^2 y estudiar las 3 primeras derivadas del desplazamiento.



P 4-4 La curva de desplazamiento de una leva plana ha de pasar con pendiente horizontal por los puntos indicados. Determinar los tramos de Bézier que generan una curva global C^1 . Estudiar las 3 primeras derivadas.

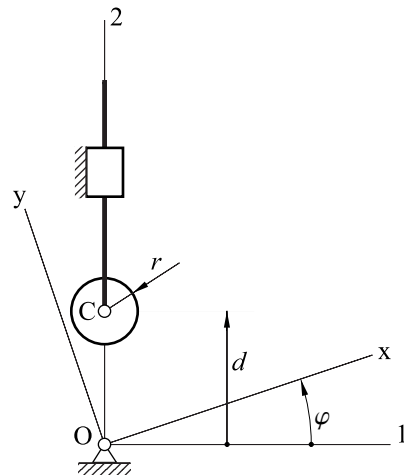


- P 4-5** Una leva plana de rotación con palpador circular de translación genera la curva de desplazamiento siguiente:

$$d(\varphi) = a \sin \varphi + a_0$$

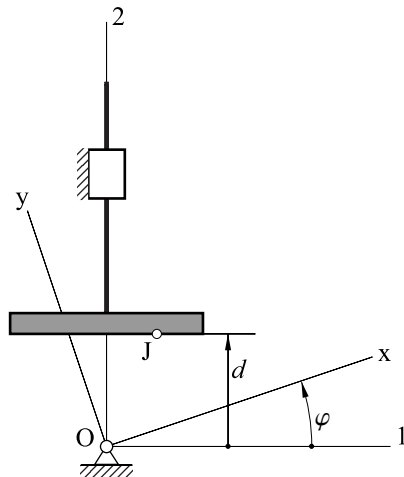
La excentricidad de la guía del palpador es nula. Determinar la curva de paso –descrita por el centro del palpador– y el radio de base r_0 –radio mínimo– de la leva.

($r = 10 \text{ mm}$; $a = 20 \text{ mm}$; $a_0 = 60 \text{ mm}$)



- P 4-6** Una leva plana de rotación con palpador plano horizontal de translación genera la curva de desplazamiento $d(\varphi) = a \sin \varphi + a_0$. Determinar el perfil y el radio de base de la leva.

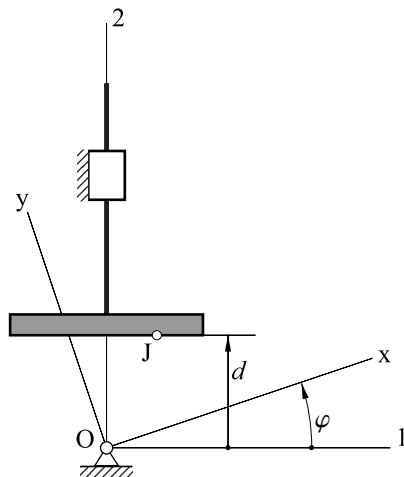
($a = 15 \text{ mm}$; $a_0 = 40 \text{ mm}$)



- P 4-7** La curva de desplazamiento de una leva plana de rotación con palpador plano horizontal de translación es

$$d(\varphi) = a (1-u)^2 u^2 + a_0$$

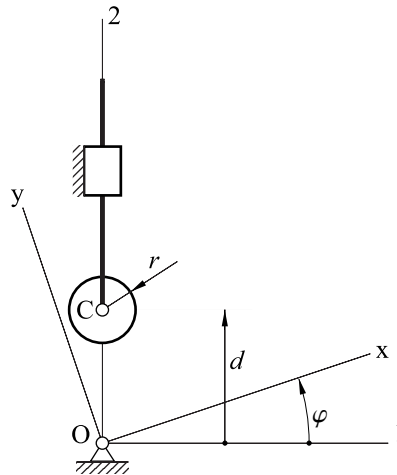
con $u = \varphi/2\pi$, $a = 200 \text{ mm}$ y $a_0 = 25 \text{ mm}$. Determinar el perfil y su radio de curvatura.



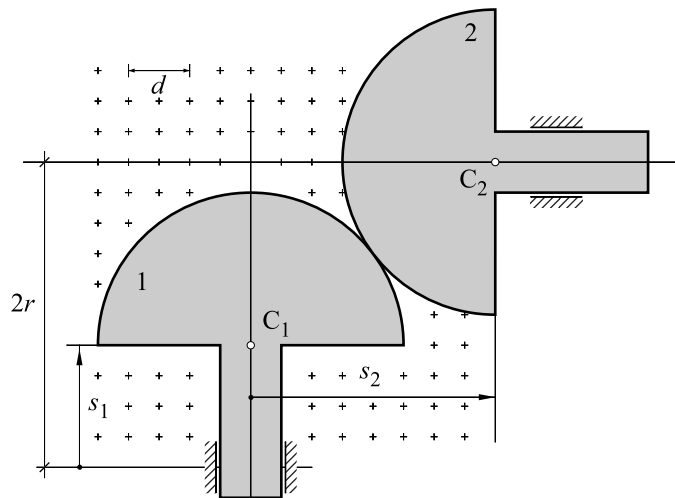
- P 4-8** La curva de desplazamiento de una leva plana de rotación con palpador circular de translación es

$$d(\varphi) = a \sin^2 \varphi + a_0.$$

La excentricidad de la guía del palpador es nula. Determinar la curva de paso descrita por el centro del palpador y el radio de curvatura tanto de esta curva como del perfil de la leva.
($r=10$ mm ; $a = 10$ mm ; $a_0 = 30$ mm)



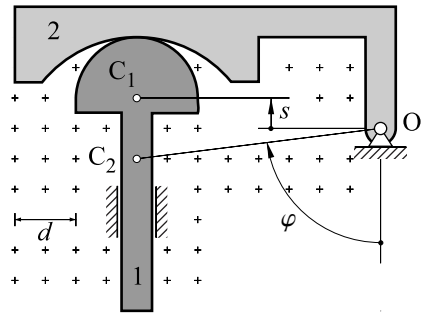
- P 4-9** Las dos correderas, 1 y 2, están unidas mediante un par superior formado por superficies cilíndricas de radio r . Determinar, en la configuración representada:



- La velocidad y la aceleración de la corredera 2 en función de la velocidad y de la aceleración de la corredera 1.
- La velocidad de deslizamiento en la generatriz de contacto.
- La ecuación de enlace entre las coordenadas s_1 y s_2 .

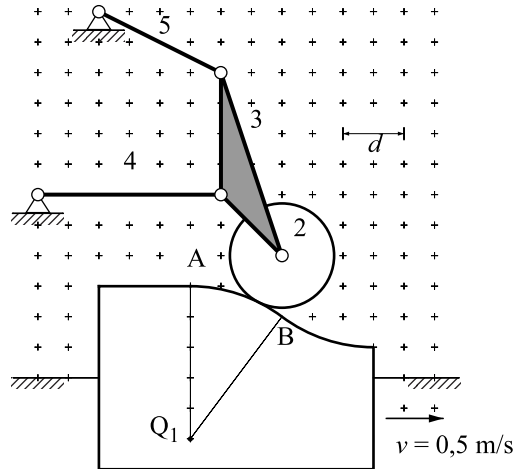
P 4-10 En el par superior de la figura, determinar para la configuración representada y función del movimiento de la corredera 1:

- a) La velocidad y la aceleración angular del balancín 2.
- b) La velocidad de deslizamiento en el punto de contacto.
- c) La ecuación de enlace entre las coordenadas s y φ .



P 4-11 La figura muestra una leva de desplazamiento rectilíneo que avanza con velocidad constante $v=0,5$ m/s, la cual mueve un seguidor montado sobre un cuadrilátero articulado. El punto Q_1 es el centro de curvatura del tramo circular AB de la leva.

- Determinar en la configuración representada:
- a) Los centros instantáneos de rotación absolutos de los miembros del mecanismo.
 - b) La velocidad angular absoluta de los miembros 4 y 5.



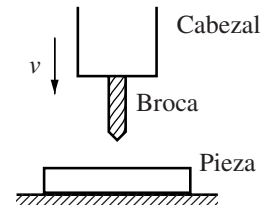
P 4-12 En un tren de conducción automática se desea programar la puesta en marcha de forma que evolucione del reposo a la velocidad de régimen de 15 m/s en 15 segundos y la aceleración sea continua.

Determinar, utilizando curvas de Bézier de grado mínimo, la ley temporal de la velocidad y la aceleración máxima para esta maniobra.

P 4-13 En una máquina de taladrar la velocidad de aproximación de la broca a la pieza es $v_1 = 20$ mm/s y la velocidad de avance durante el taladrado es $v_2 = 5$ mm/s.

Si la transición de velocidad debe hacerse en 0,6 s y manteniendo la aceleración continua (C^0), utilizando curvas de Bézier de grado mínimo:

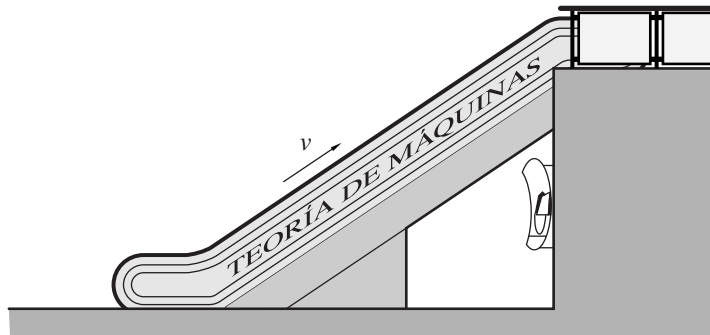
- a) Dibujar la gráfica de la velocidad de la broca en función del tiempo.
- b) Determinar el valor de la desaceleración máxima.
- c) Dibujar la curva de desplazamiento indicando la posición de los puntos de control.



- P4-14** Una escalera mecánica está en reposo hasta que detecta la presencia de una persona, momento en el que inicia la puesta en marcha hasta alcanzar una velocidad constante $v = 0,8 \text{ m/s}$. Para evitar brusquedades en esta maniobra el control de la máquina impone una evolución de la velocidad con continuidad C^1 y una aceleración máxima $a_{\text{máx.}} = 0,6 \text{ m/s}^2$.

Determinar para esta maniobra y utilizando curvas de Bézier de grado mínimo:

- La expresión polinómica de la velocidad, de la aceleración y del desplazamiento.
- La duración de la maniobra en segundos.



5 Engranajes

En muchas máquinas, se hace necesaria la transmisión de movimiento de rotación entre dos ejes, y a menudo se quiere que la relación entre las velocidades angulares de estos ejes sea constante e independiente de la configuración. Para conseguirlo, se utilizan ruedas de fricción, correas, cadenas o engranajes.

En este capítulo, se estudian los engranajes desde el punto de vista cinemático, y las condiciones que se ha de imponer al perfil de los dientes de las ruedas dentadas para que el engranaje sea cinemáticamente correcto.

5.1 Transmisión de la rotación entre ejes

La transmisión de la rotación de un eje a otro es necesaria por motivos tales como:

- La existencia de ejes no coincidentes por razones funcionales. Este es el caso del diferencial de un vehículo con motor longitudinal, necesario para transmitir el movimiento de la salida de la caja de cambios a las ruedas.
- La necesidad de establecer una relación de velocidades precisa entre dos ejes. Por ejemplo, el ciclo termodinámico de un motor de 4 tiempos impone que el árbol de levas gire exactamente a la mitad de velocidad que el cigüeñal, o la aguja horaria de un reloj mecánico ha de girar a una velocidad angular $1/60$ de la correspondiente a la minutera.
- La necesidad de invertir el sentido de giro de un eje. Es el caso del mecanismo que permite a una motonave invertir el sentido de giro de la hélice para maniobrar.
- La adecuación de la velocidad de un motor a las características de la carga. Por ejemplo, la turbina de un avión de turbohélice gira a una velocidad demasiado elevada para poderse conectar directamente con la hélice con un rendimiento aceptable, y se ha de interponer un reductor entre ellas. Otro ejemplo es el de un aerogenerador en que las palas giran demasiado lentamente para accionar el generador eléctrico y se ha de interponer un multiplicador.

Relación de transmisión. En un mecanismo de transmisión, el cociente τ entre la velocidad angular ω_2 del eje conducido o de salida y la velocidad angular ω_1 del eje conductor o de entrada se denomina *relación de transmisión*:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

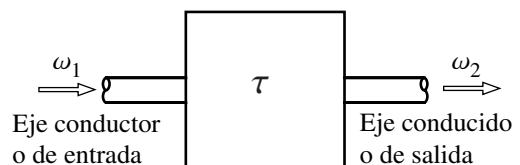


Fig. 5.1 Relación de transmisión τ

El signo de esta relación de transmisión depende del criterio de signos escogido para definir las velocidades angulares. Esta ecuación se puede interpretar como la ecuación cinemática de enlace:

$$\tau \omega_1 - \omega_2 = 0$$

que relaciona las velocidades angulares de dos sólidos –eje de entrada y eje de salida– respecto a una carcasa (Fig. 5.1). En este capítulo, se estudia el caso usual $\tau = \text{constante}$.

En los reductores, mecanismos de transmisión con $\tau < 1$, algunas veces se define la relación de reducción i :

$$i = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{\text{eje conductor}}}{\omega_{\text{eje conducido}}}$$

Mecanismos para la transmisión de la rotación entre ejes. Engranajes. Para ejes paralelos o que se cortan, una solución para la transmisión del movimiento es utilizar una pareja de ruedas de fricción que mantengan contacto sin deslizar. De esta manera surgen las combinaciones siguientes, ilustradas en la figura 5.2:

a) Contacto entre ruedas por sus caras exteriores. Para ejes paralelos, las ruedas son cilíndricas y los ejes giran en sentido inverso. Para ejes que se cortan, las ruedas son troncocónicas.

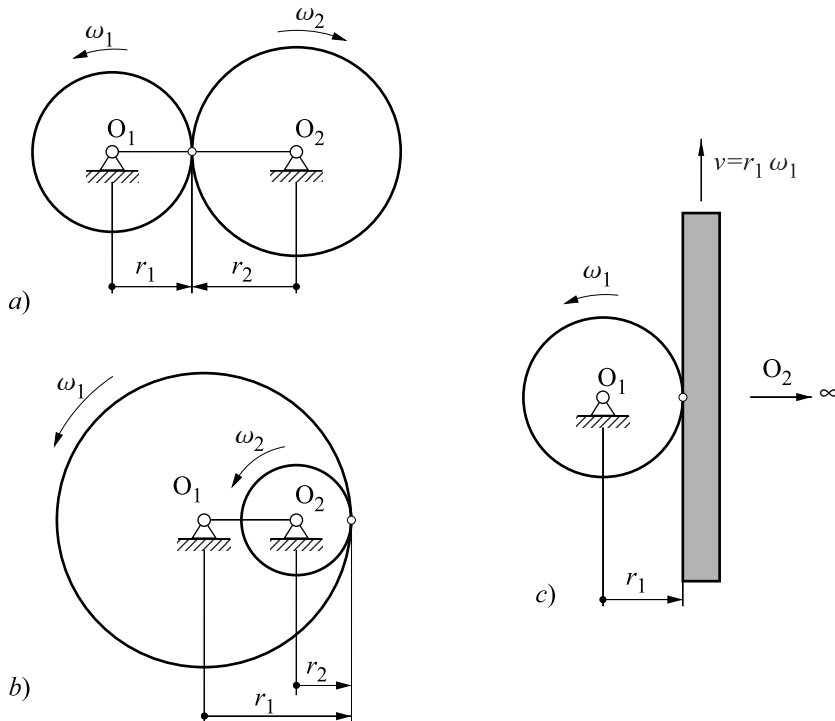


Fig. 5.2 Axoides cilíndricos para la transmisión del movimiento entre dos ejes paralelos

b) Contacto de la superficie exterior de la rueda pequeña con la superficie interior de una más grande. Con ejes paralelos los ejes giran en el mismo sentido.

- c) Caso límite de una rueda de $r = \infty$ que establece contacto con la superficie exterior de la otra rueda. Un segmento finito de la rueda de $r = \infty$ tiene movimiento de translación.

El par que se puede transmitir con esta solución es proporcional a la presión de contacto y al radio de las ruedas. En la mayoría de aplicaciones, para transmitir el par necesario con ruedas de una medida razonable sería necesaria una presión superior a la admisible, de manera que las ruedas de fricción no suelen ser una solución adecuada. Se ha de pasar a transmitir el par por medio de fuerzas normales entre superficies, hecho que conduce a la aparición de dientes en las ruedas.

Otros mecanismos alternativos son las poleas con correas –dentadas o no– o las ruedas con cadenas. La utilización de una solución u otra depende del problema concreto que se ha de resolver. Por ejemplo, en una motocicleta con motor transversal la transmisión a la rueda posterior se suele hacer mediante una cadena, mientras que si el motor es longitudinal resulta más ventajoso un árbol de transmisión y un engranaje cónico.

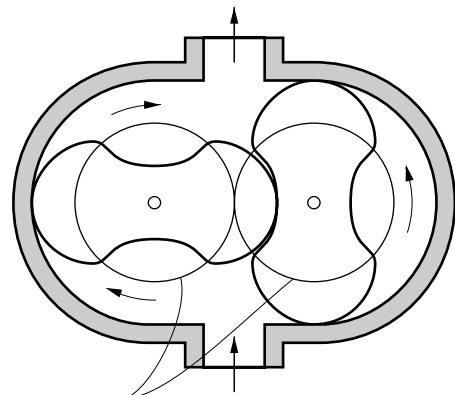
Este capítulo se dedica nada más al estudio de los engranajes, conjunto de dos ruedas dentadas que engranan entre sí. En función de la disposición relativa de los ejes, se utilizan diversos tipos de engranajes:

- Ejes paralelos: engranajes *cilíndricos*, también denominados *paralelos*, con dientes rectos, helicoidales o dobles helicoidales.
- Ejes que se cortan: engranajes *cónicos* con dentado recto o espiral.
- Ejes que se cruzan: engranajes *cilíndricos helicoidales cruzados* o engranajes *hipoidales*.

Para los engranajes cilíndricos y cónicos, las ruedas de fricción equivalentes coinciden con los axoides por el movimiento relativo.¹ Para los ejes que se cruzan los axoides de las ruedas dentadas son hiperboloides de revolución reglados que ruedan y deslizan entre sí. En este caso, el deslizamiento inherente al funcionamiento es una causa del bajo rendimiento de la transmisión.

Otras aplicaciones de los engranajes. Se ha de decir que los engranajes también pueden utilizarse como elementos de bombas o compresores volumétricos. Este es el caso de la bomba de aceite que se puede encontrar en un motor de explosión, o del compresor Roots que se muestra a la figura 5.3. El engranaje se encuentra encerrado en una carcasa y, al girar, las dos ruedas dentadas, denominadas en este caso rotores, van transportando el fluido por la periferia desde la cámara de entrada a la de salida.

El reflujo en la zona central se impide por el contacto entre los rotores, y por eso el perfil de los rotores se escoge de manera que garanticen la estanqueidad en el contacto.



Engranaje auxiliar para la transmisión del movimiento.

Fig. 5.3 Compresor volumétrico Roots

¹ Lugar geométrico definido en cada rueda del eje instantáneo de rotación y deslizamiento relativo (centro instantáneo de rotación en el movimiento plano).

Estos perfiles no acostumbran a ser los más adecuados para transmitir el movimiento de un rotor al otro, y por eso se suele situar un engranaje auxiliar convencional.

Estas bombas o compresores generan un caudal proporcional a la velocidad de giro de los rotores. Por tanto, si se interpone la bomba en una conducción y se dejan girar libremente los rotores, la bomba puede servir como medidor de caudal.

5.2 Perfiles conjugados

La relación de transmisión entre ejes usualmente ha de ser constante no sólo de media –por ejemplo, considerando el cociente entre el número de vueltas de cada eje por unidad de tiempo– sino también en todo instante para evitar esfuerzos y vibraciones innecesarios. Si se confía la transmisión a un par de perfiles en contacto, éstos han de cumplir la condición de engranaje.

Condición de engranaje. Dos perfiles planos 1 y 2 que forman un par superior plano y giran, respectivamente, alrededor de los puntos O_1 y O_2 se denominan *conjugados* y se dice que cumplen la *condición de engranaje* si mantienen constante la relación de transmisión $\tau = \omega_2/\omega_1$. El centro instantáneo de rotación relativo entre ambos sólidos se encuentra (ver el capítulo 4) en la intersección de la línea de centros y la línea de presión o de empuje (Fig. 5.4).

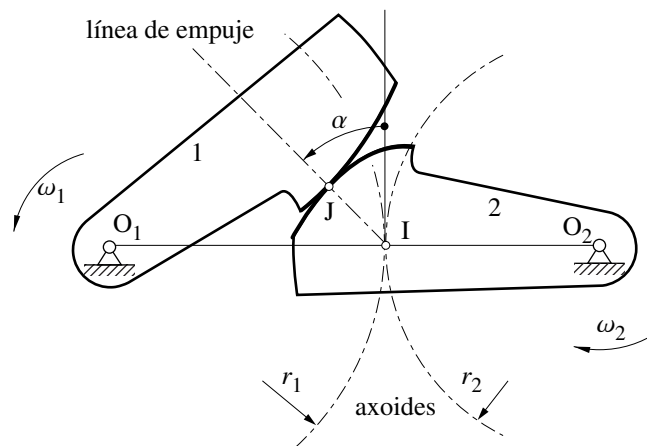


Fig. 5.4 Condición de engranaje

Para conseguir un valor τ constante, I ha de ser un punto fijo sobre la línea de centros. La relación de transmisión tiene el valor:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

donde r_1 y r_2 son las distancias desde los centros O_1 y O_2 a I y son, por tanto, los radios de los dos axoides del movimiento relativo.

El lugar geométrico de los puntos que va ocupando el punto J de contacto a medida que los perfiles van girando se denomina *línea de engranaje*.

En el estudio de engranajes, la orientación de la línea de empuje suele caracterizarse mediante el ángulo α de empuje que forma la línea de presión con la perpendicular a la línea de centros. Se ha de observar que esta definición del ángulo de empuje α es diferente de la del ángulo de presión β , definido en el estudio del mecanismo leva-palpador.

Velocidad de deslizamiento. La velocidad de deslizamiento entre los perfiles en el contacto en J es un parámetro que interesa minimizar. Esta velocidad es proporcional a la distancia entre J y I:

$$v_{\text{desl.}} = |\overline{\mathbf{IJ}}|[\omega_1 + \omega_2]$$

Por tanto, para conseguir el valor $v_{\text{desl.}} = 0$, J tendría que encontrarse constantemente sobre la línea de centros y los perfiles conjugados serían dos circunferencias de centros O_1 y O_2 ; en definitiva, un par de ruedas de fricción. Para limitar la velocidad de deslizamiento interesa una línea de engranaje corta, es decir, que el punto J de contacto no se aleje mucho de I.

Obtención de perfiles conjugados. Dado un perfil arbitrario y una determinada relación de transmisión, encontrar un perfil conjugado es un caso particular del estudio del mecanismo leva-palpador en el cual el palpador es el perfil inicial, la leva el perfil buscado y la ley de desplazamiento es $\varphi_2 = \tau \varphi_1$.

5.3 Dentado de los engranajes

A fin de obtener soluciones viables para la transmisión del movimiento entre ejes mediante perfiles, se confía la transmisión a una pareja de perfiles nada más durante una pequeña fracción de vuelta – ángulo de conducción. Para garantizar la continuidad en la transmisión se dispone de una sucesión de parejas de perfiles uniformemente espaciados y de manera que, antes que el punto de contacto abandone la superficie física de una pareja, se inicie el contacto con la siguiente. El cociente entre el ángulo de conducción y el ángulo entre perfiles sucesivos se denomina *coeficiente de recubrimiento* y evidentemente ha de ser superior a la unidad.

Al ser el par superior un enlace unilateral, una pareja de perfiles nada más puede transmitir fuerzas en un sentido. Para conseguir la transmisión de pares de un eje a otro en ambos sentidos se han de utilizar dos familias complementarias de perfiles conjugados y entonces aparecen los dientes característicos de las ruedas dentadas. Los dientes han de tener una cierta anchura, por razones de resistencia y para que los perfiles de los flancos no lleguen a cortarse. Entre dos dientes consecutivos de una rueda ha de dejarse el espacio suficiente para permitir el acceso de los dientes de la otra rueda.

Cada juego de flancos asegura la transmisión de par en un sentido, como se observa en la figura 5.5, en la cual se han dibujado los pares exteriores ejercidos sobre las ruedas. Es importante observar que la línea de presión cambia de dirección al invertirse el sentido de los pares. Así, si en un automóvil se saca el pie del acelerador y el motor pasa a actuar como freno, en los engranajes de la transmisión deja de utilizarse el juego de perfiles correspondiente a la propulsión del vehículo y se pasa a emplear el

juego inverso. Como esta segunda familia de perfiles suele estar menos pulida por el uso que la primera, al desacelerar normalmente se incrementa el ruido de la transmisión.

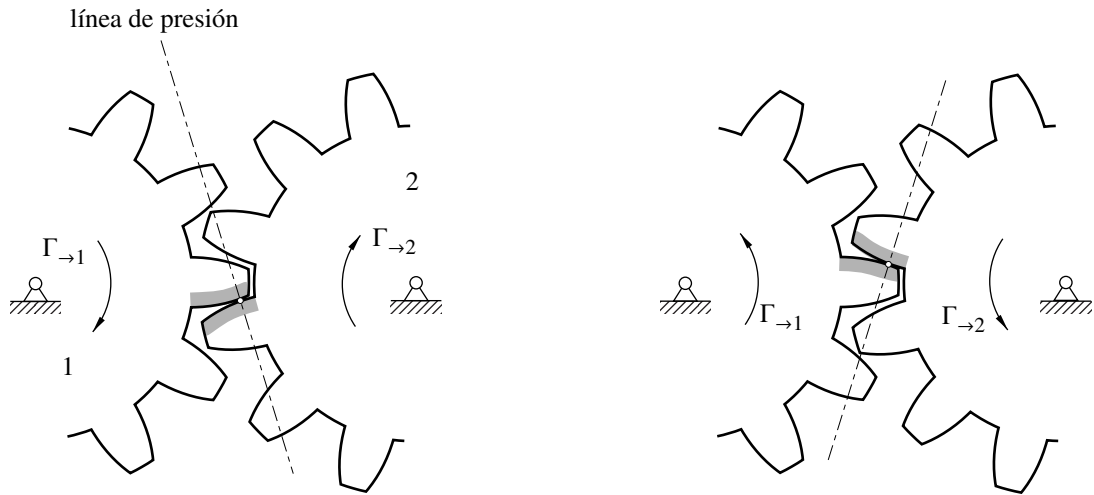


Fig. 5.5 Modos de funcionamiento de un engranaje

Paso, módulo y grosor. En las ruedas cilíndricas, se denomina paso p la distancia entre dos puntos homólogos de dos dientes consecutivos, medida como el arco sobre una circunferencia del axoide. El paso coincide para las dos ruedas del engranaje, ya que los axoides ruedan sin deslizar y, por tanto, los arcos que los puntos de contacto recorren sobre ellos coinciden. En una rueda con z dientes

$$p = \frac{2\pi r}{z}$$

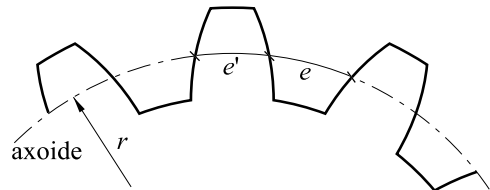


Fig. 5.6 Espacio e y grosor e'

El paso es una medida indicativa de la dimensión de los dientes y el arco de axoide se reparte entre el arco correspondiente en el espacio e vacío entre dientes y el correspondiente al grosor e' del diente (Fig. 5.6).

$$p = e + e' \quad (5.1)$$

Normalmente en lugar del paso se suele utilizar el módulo m , expresado en mm:

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{2r}{z}$$

A fin de obtener ruedas dentadas intercambiables, los módulos están normalizados. Los valores preferentes según la norma ISO 54-1996 son: 1, 1,25, 1,5, 2, 2,5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 25, 32, 40 y 50.

En los engranajes cónicos, el paso, el módulo y el grosor se definen sobre la circunferencia del axoide en el extremo más grande de las ruedas.

Dimensionamiento de los dientes. A parte de criterios de resistencia, las dientes han de dimensionarse (en grosor y altura) teniendo en cuenta los factores siguientes:

- Recubrimiento suficiente en el engranaje: los flancos han de tener longitud suficiente para que antes que una pareja de ellos pierda contacto entre en funcionamiento la pareja siguiente, y así garantizar la transmisión del giro.
- Juego de funcionamiento: para que la inversión del sentido de los pares transmitidos sea suave y sin choques y que el juego entre ejes sea pequeño, interesa que el juego entre el diente de una rueda y el hueco de la otra sea mínimo. Si el diente de la rueda 1 encajase perfectamente en el vacío de la rueda 2 ($e'_1 = e_2$), se tendría juego nulo. Como, además, las ruedas han de tener el mismo paso, de la expresión 5.1 resulta que la condición de engranaje sin juego se puede expresar como

$$e_1 + e_2 = e'_1 + e'_2 = p$$

- Interferencia entre dientes. Si la altura del diente respecto al axoide fuese muy grande, la cabeza del diente de una rueda interferiría con la base del diente de la otra rueda antes que pudiese iniciarse el contacto entre los flancos, y el sistema no se podría montar o quedaría bloqueado.

Tabla 5.1 Posibles configuraciones de engranajes en función de la disposición de los ejes y de la relación de transmisión

Posición relativa de los ejes	Relación de transmisión	Tipos de engranaje
Paralelos	1 a 8 (máximo: 10)	Engranaje simple con cambio en el sentido de rotación – Engranaje exterior Engranaje simple sin cambio en el sentido de rotación – Engranaje interior – Engranaje con rueda intermedia Ejes coaxiales – Tren planetario
	> 8	– Engranajes simples en serie – Trenes planetarios simples en serie – Tren planetario especial
Concurrentes	1 a 6	– Engranaje simple
	6 a 40	– Engranaje cónico y engranaje paralelo en serie
	> 40	– Engranaje cónico o de vi-sinfín y engranajes paralelos en serie
Perpendiculares pero no concurrentes	1 a 20	– Engranaje helicoidal para cargas leves
	20 a 60	– Engranaje de vi-sinfín
	60 a 250	– Engranaje de vi-sinfín y engranaje paralelo en serie
	> 250	– Engranajes de vi-sinfín y engranajes paralelos en serie. se ha de prestar atención al rendimiento global

Fuente: Henriot, 1968

Relación de transmisión en función del número de dientes. La relación de transmisión en un engranaje puede expresarse en función del número de dientes de las ruedas como

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \pm \frac{z_1}{z_2}$$

Por lo tanto, con un par de ruedas dentadas sólo pueden conseguirse relaciones de transmisión racionales, de manera que si se quiere obtener una relación no racional habrá que hacer una aproximación. Además, se ha de tener en cuenta las limitaciones constructivas siguientes:

- El número de dientes está limitado aproximadamente entre un mínimo de 10 y un máximo de 80 para ruedas cilíndricas.
- No es conveniente utilizar un piñón muy pequeño con una rueda muy grande. La relación de transmisión usualmente está comprendida entre 1/8 y 8 para los engranajes cilíndricos y entre 1/6 y 6 para los cónicos.

Si no es posible conseguir la relación τ deseada con estas restricciones, se habrá de proceder a descomponerla como un producto de relaciones racionales y recurrir a un tren de engranajes, como se verá más adelante. En la tabla 5.1 se dan posibles configuraciones para conseguir diferentes relaciones de transmisión, según la disposición de los ejes.

5.4 Perfil de evolvente

Generación. Prácticamente los únicos perfiles conjugados utilizados en los engranajes cilíndricos son los denominados *perfiles de evolvente*. Para entender su generación podemos imaginar que el movimiento de dos ejes, 1 y 2, con una cierta relación de transmisión se podría conseguir con el sistema que se muestra a la figura 5.7. Se disponen dos rodillos y un hilo que, sin deslizar, se va enrollando en un rodillo y desenrollando del otro. Los radios r_{b1} , r_{b2} de las poleas se denominan *radios de base*, y para conseguir la relación de transmisión τ deseada han de verificar:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_{b1}}{r_{b2}} \quad (5.2)$$

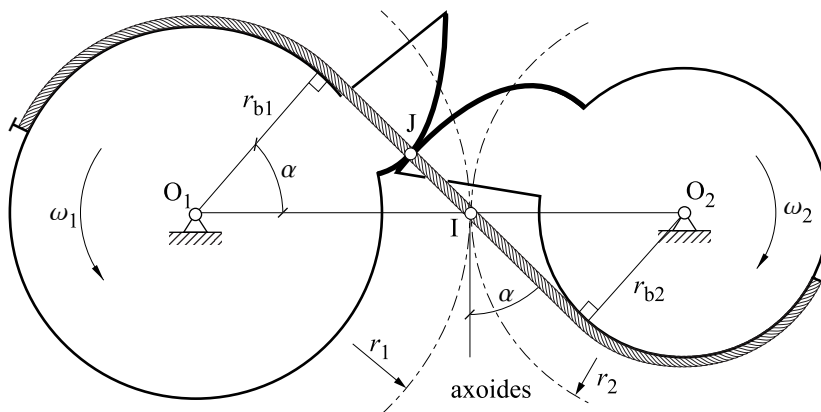


Fig. 5.7 Engranaje de 2 perfiles de evolvente

A continuación se escoge un punto J cualquiera, fijo al hilo, y se observa su trayectoria en las referencias solidarias a cada una de las poleas. Intuitivamente, se engancha a cada rodillo una

cartulina que se extienda más allá de los radios de base y se estudian las curvas que un trazador arrastrado por J iría marcando sobre cada cartulina. Este punto siempre tiene, en las referencias solidarias a las poleas, velocidad perpendicular al hilo y, por tanto, las trayectorias de J respecto a estas referencias son, en todo momento, perpendiculares al hilo y tangentes entre sí en el punto J. El par superior formado por los perfiles definidos a partir de las curvas dibujadas por el trazador genera exactamente el mismo movimiento que el hilo.

Ventajas del perfil de evolvente. El perfil de evolvente tiene propiedades muy ventajosas, todas ellas deducibles de un análisis de la figura 5.7:

- La línea de engranaje es una recta –el tramo libre de la cuerda imaginaria–, por lo que el ángulo de empuje α es constante a lo largo del engrane. Por tanto, la dirección de la fuerza de contacto entre dientes será constante, cosa que evita vibraciones y ruido.

$$\cos \alpha = \frac{r_{b1}}{r_1} = \frac{r_{b2}}{r_2}$$

- Aunque se varíe la distancia entre ejes, dos perfiles cualesquiera de evolvente siempre son conjugados, es decir, siempre engranan correctamente y, además, siempre con la misma relación de transmisión dada por la ecuación 5.2. Al separar los dos rodillos de la figura 5.7, si bien varían los radios de los axoides y el ángulo α , la forma de las evolventes continúa siendo la misma, ya que sólo depende de los radios de base r_{b1} , r_{b2} . esta propiedad permite gran versatilidad en los acoplamientos entre ruedas y en los procedimientos de corte, y los pequeños errores de fabricación en la distancia entre ejes no afectan desmesuradamente la calidad del engranaje.

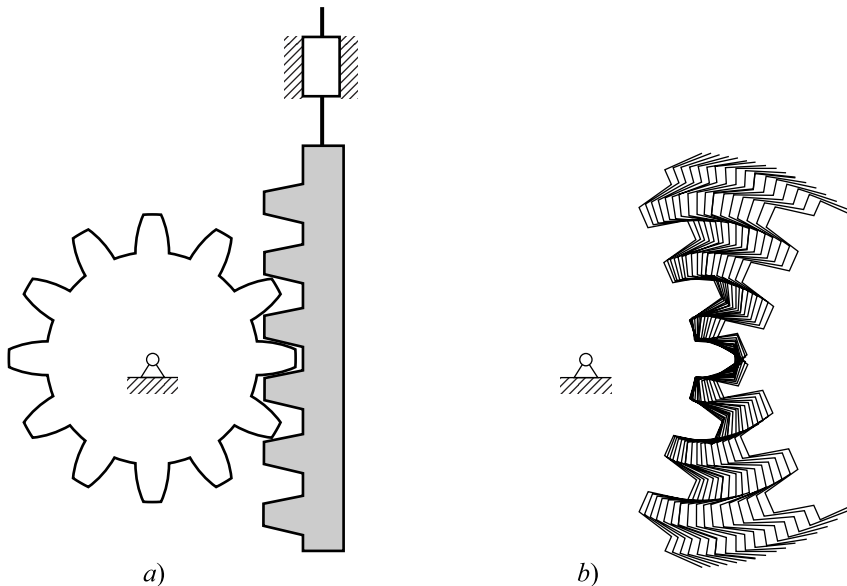


Fig. 5.8 a) Cremallera evolvente b) Utilización como herramienta generadora

- En el caso de un perfil de $r = \infty$ –cremallera– la evolvente es una recta (Fig. 5.8.a). Esta cremallera, al tener flancos rectos, resulta muy fácil de construir, y puede emplearse como herramienta generadora para ruedas con dentado exterior. En la figura 5.8.b se ilustra el proceso de corte de una rueda con una cremallera, observado desde una referencia fija a la rueda generada.

Paso de base. En una rueda dentada con perfil de evolvente, el radio r del axoide no es una característica intrínseca de la rueda sino que, como se ha dicho, varía en función de la distancia entre ejes. Es decir, se trata de una característica de funcionamiento. Eso hace que no se normalice el módulo m medido sobre el axoide, sino el módulo de base m_b medido sobre la circunferencia de base, módulo que sí es una característica intrínseca de una rueda dentada con perfil de evolvente. Esta normalización se consigue normalizando las características de la cremallera generadora, su módulo m_c y la inclinación del flanco α_0 , que coincide con el ángulo de empuje.

El paso de la cremallera $-m_c-$ y de la rueda medida en el axoide $-m-$ han de coincidir, por tanto:

$$\pi m_c = \pi m$$

y a partir de la relación entre el radio de base y el del axoide (Fig. 5.7):

$$r_b = r \cos \alpha_0$$

se obtiene la relación entre el módulo de base y el de la cremallera generadora:

$$\frac{2r_b}{z} = \frac{2r}{z} \cos \alpha_0 ; m_b = m_c \cos \alpha_0$$

El ángulo usual de la cremallera es $\alpha_0 = 20^\circ$.

Condiciones para el engranaje entre ruedas dentadas. Si dos ruedas dentadas tienen el mismo módulo de base, tendrán el mismo módulo sobre el axoide ya que, como se puede ver en la figura 5.7

$$m_b = \frac{2r_b}{z} = \frac{2r \cos \alpha}{z} = m \cos \alpha$$

Por tanto, las ruedas en principio podrán engranar correctamente con independencia de la distancia entre ejes a partir de una distancia mínima que asegure el contacto entre las dientes. A medida que la distancia entre ejes disminuye, aumenta el recubrimiento y disminuye el juego y el ángulo de presión, hasta que se llega a la distancia mínima posible, que corresponde al funcionamiento con juego nulo.

5.5 Trenes de engranajes

Un sistema con más de un par de ruedas dentadas se denomina *tren de engranajes*. La necesidad de utilizar más de un engranaje puede quedar justificada por los motivos siguientes:

- Obtención de una relación de transmisión imposible de conseguir con un solo par de ruedas. Es el caso de un reductor 1/20 de ejes paralelos, relación de transmisión fuera del rango aconsejable con un único engranaje.
- Poder disponer de una gama de relaciones de transmisión. Es el caso de una caja de cambios de un vehículo.
- Limitaciones del espacio disponible. Por ejemplo, si se ha de transmitir el movimiento entre dos ejes paralelos muy alejados, con sólo dos ruedas dentadas, éstas tendrían un tamaño excesivo. Es el caso de un vehículo con motor transversal y tracción total. La transmisión a las ruedas posteriores se efectúa mediante un eje intermedio longitudinal y engranajes cónicos.

- Transmisión del movimiento de un eje a diversos, simultáneamente. Por ejemplo, el motor paso a paso de un reloj mecánico ha de accionar simultáneamente las tres agujas que señalan los segundos, los minutos y las horas.
- Obtención de mecanismos con más de un grado de libertad. Es el caso del diferencial empleado en los automóviles.

Trenes de engranajes de ejes fijos. Dado un par de ruedas dentadas, 1 (conductora) y 2' (conducida), si al eje de la rueda 2' se conecta una rueda 2, que engrana con una rueda 3', y así sucesivamente hasta una rueda final n' , se obtiene un tren de $n-1$ engranajes de ejes fijos (Fig. 5.9).

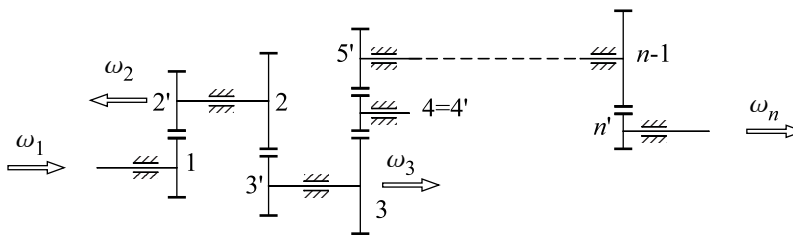


Fig. 5.9 Tren de engranajes de ejes fijos

Este tren de engranajes equivale a un único engranaje con una relación de transmisión:

$$\tau = \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{\omega_{2'}}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \dots \frac{\omega_{n'}}{\omega_{n-1}}$$

En función del número de dientes de las diferentes ruedas, el valor de τ es

$$\tau = \pm z_1 \frac{z_2}{z_{2'}} \frac{z_3}{z_{3'}} \dots \frac{z_{n-1}}{z_{n'-1}} \frac{1}{z_{n'}} = \pm \frac{\prod z_{\text{conductoras}}}{\prod z_{\text{conducidas}}} \quad (5.3)$$

Si se utilizan engranajes con ejes paralelos, se ha de recordar que dos ruedas engranando con contacto exterior giran en sentidos contrarios. En consecuencia, se invertirá el sentido de giro entre el eje 1 de entrada y el eje n de salida si hay un número impar de engranajes exteriores.

Cuando la rueda es, a la vez, conducida y conductora (es el caso de la rueda $4 = 4'$ de la figura 5.9), su número de dientes aparece simultáneamente en el numerador y en el denominador de la ecuación 5.3, de manera que no influye en el valor final de τ . Este tipo de ruedas intermedias puede servir para invertir el sentido de giro o simplemente para llenar un vacío entre dos ejes alejados, y se denominan *ruedas locas*.

Trenes epicicloidales simples. Un tren de engranajes epicicloidal o planetario es aquel en que alguna rueda no gira alrededor de un eje fijo. Un tren epicicloidal se dice que es simple si consta de 2 ruedas y un brazo porta-satélites coaxiales. Los satélites forman un tren de ejes fijos al brazo y transmiten el movimiento entre las dos ruedas coaxiales.

La figura 5.10 muestra el ejemplo más sencillo de tren epicicloidal simple, que está constituido por los elementos siguientes:

- Una rueda central o planeta que gira alrededor del punto central O.
- Un brazo porta-satélites que gira alrededor de O y que en su extremo arrastra una rueda (satélite) que puede girar respecto al brazo.
- Una corona con dentado interior que gira alrededor de O.

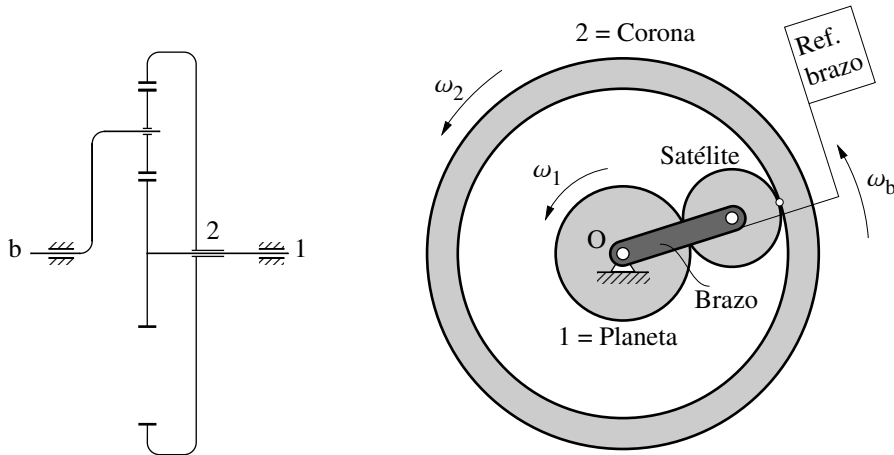


Fig. 5.10 Tren epicicloidal simple

Si se analiza el sistema desde la referencia Rb solidaria al brazo, no es más que un tren fijo con una rueda loca intermedia (el satélite), en el cual el planeta y la corona giran en sentidos opuestos. Tomando el mismo convenio de signos para las velocidades angulares absolutas ω_1 , ω_b y ω_2 de los 3 elementos (planeta, brazo y corona):

$$\tau_b = \frac{\omega_2]_{Rb}}{\omega_1]_{Rb}} = \frac{\omega_2 - \omega_b}{\omega_1 - \omega_b} ; \quad \tau_b = -\frac{z_1}{z_2}$$

Esta ecuación puede interpretarse como una ecuación cinemática de enlace que relaciona las velocidades ω_1 , ω_b y ω_2 de 3 sólidos y que, por tanto, elimina un grado libertad. Los coeficientes de las velocidades de esta ecuación son constantes, lo cual se observa mejor si se reescribe como la denominada *ecuación de Willis*:

$$\tau_b \omega_1 + (1 - \tau_b) \omega_b - \omega_2 = 0 \quad (5.4)$$

Así, el tren epicicloidal simple tiene dos grados de libertad, hecho fácil de observar por inspección visual.

Variantes constructivas de trenes epicicloidales simples. Hay diferentes variantes de la disposición constructiva de la figura 5.10 para construir con engranajes cilíndricos trenes epicicloidales. Todas estas variantes se analizan de manera análoga, a partir de la observación desde la referencia relativa brazo.

La primera posibilidad (Fig. 5.11.a) consiste en emplear dos satélites solidarios (s, s'), con un número de dientes diferente (en lugar de un único satélite), de manera que el valor de τ_b en la ecuación de Willis 5.4 pasa a ser:

$$\tau_b = \frac{\omega_2 - \omega_b}{\omega_1 - \omega_b} = -\frac{z_1 z_{s'}}{z_2 z_s} \tag{5.5}$$

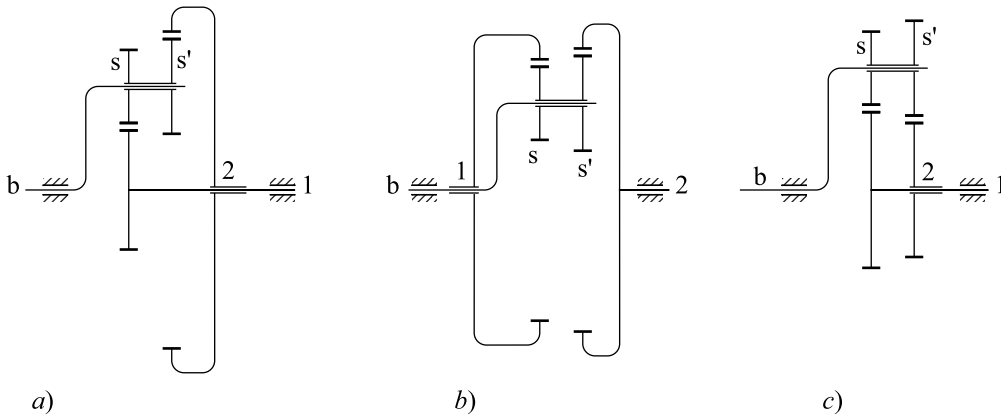


Fig. 5.11 Diferentes variantes constructivas de trenes epicicloidales

También se puede reemplazar el planeta 1 por una corona (Fig. 5.11.b) o bien la corona 2 por un planeta (Fig. 5.11.c). En estos dos casos, el valor de τ_b es el de 5.5, pero con signo positivo.

Se pueden obtener otras variantes de trenes epicicloidales simples haciendo más complejo el tren de ruedas fijas al brazo.

Hay que comentar también que, por razones de equilibrado y mejor distribución de la carga, se suelen disponer diversos satélites equiespaciados angularmente (Fig. 5.12).

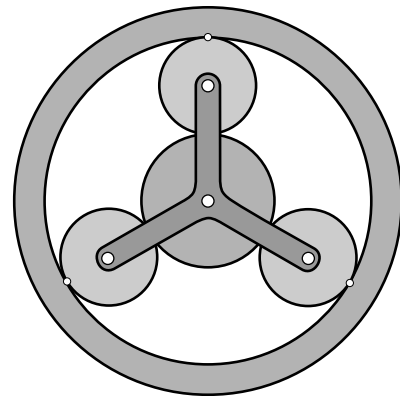


Fig. 5.12 Tren epicicloidal con 3 satélites

Funcionamiento de un tren epicicloidal como sistema de un grado de libertad.

El tren epicicloidal simple que tiene dos grados de libertad puede funcionar como un sistema de un grado de libertad inmovilizando alguno de los tres ejes 1, 2 o 3 coaxiales. A partir de la ecuación 5.4, anulando la velocidad angular correspondiente al eje inmovilizado, las relaciones de transmisión que se obtienen son

$$\tau_1 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_b} \right)_{R1} = 1 - \tau_b \quad \tau_b = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)_{Rb} \quad \tau_2 = \left(\frac{\omega_b}{\omega_1} \right)_{R2} = \frac{\tau_b}{\tau_b - 1}$$

donde los subíndices indican el miembro inmovilizado. Imponiendo que τ_b sea muy próximo a la unidad, al inmovilizar 1 o 2 pueden obtenerse relaciones de transmisión extremas, difíciles de conseguir con un tren fijo de pocas ruedas.

Mecanismo diferencial. Un tren epicycloidal simple en que $\tau_b = -1$ se denomina *diferencial*. En este mecanismo, de acuerdo con la ecuación 5.4, la velocidad angular ω_b del brazo porta-satélites es la semisuma de las velocidades angulares de los elementos 1, 2:

$$\tau_b = -1 \longrightarrow \omega_b = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

El diferencial se emplea en los vehículos automóviles en la etapa final de la transmisión, en la cual las ruedas motrices no pueden ser solidarias, ya que en las curvas la rueda exterior ha de poder girar a una velocidad superior que la interior. El brazo está conectado a la salida de la caja de cambios, y 1 y 2 son los semiejes que transmiten la rotación a las ruedas. Así se consigue imponer la velocidad media de rotación de las ruedas –es decir, la del punto central del eje del vehículo– y, al mismo tiempo, se permite la diferencia de velocidades de las ruedas en las curvas.

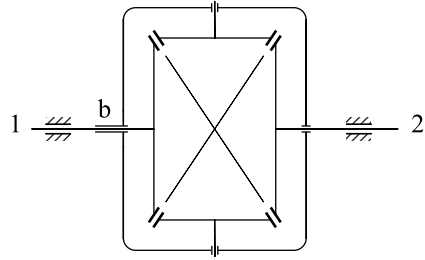


Fig. 5.13 Mecanismo diferencial

Normalmente el diferencial se construye con engranajes cónicos, mejor que con ruedas cilíndricas, con lo que el brazo porta-satélites pasa a ser una caja porta-satélites (Fig. 5.13).

Trenes epicycloidales compuestos. Conectando entre sí diversos trenes epicycloidales simples 1, 2, ..., n , se consigue un tren epicycloidal compuesto.

Por ejemplo, si a un tren epicycloidal simple se añaden otros, de manera que cada tren adicional tenga dos ejes solidarios a ejes de trenes anteriores, el tren compuesto resultante continúa teniendo dos grados de libertad, ya que cada nuevo tren no añadirá nuevos grados de libertad. A pesar de todo, escogiendo un eje de entrada y uno de salida permanente, si ahora se quiere que el tren compuesto funcione como un mecanismo de un grado de libertad, hay n posibles ejes para inmovilizar, y así se pueden obtener n posibles relaciones de transmisión entre el eje de entrada y el de salida.

De esta manera se puede conseguir una caja de cambios de n relaciones. Mientras no se inmovilice ningún miembro, la caja de cambios está en “punto muerto”, es decir, no hay transmisión de par entre los ejes de entrada y de salida. Al inmovilizar el miembro escogido, el mecanismo pasa a tener un solo grado de libertad, es decir, se introduce una relación de transmisión entre los ejes de entrada y de salida. Esta inmovilización se puede efectuar con progresividad mediante un freno, eliminando la necesidad de un embrague. Por este motivo, los cambios automáticos utilizan trenes epicycloidales compuestos, en lugar de los trenes de ejes fijos tradicionales con elementos desplazables.

Ejemplo 5.1 Estudio del tren epicycloidal compuesto de la figura 5.14.

Este tren está formado por dos trenes simples de ejes coaxiales, 1, 2, 3 y 4, 5, 6. Las ecuaciones de Willis para estos trenes son:

$$\tau_2 \omega_1 + (1 - \tau_2) \omega_2 - \omega_3 = 0 \quad \text{con} \quad \tau_2 = -\frac{z_1 z_s'}{z_s z_3}$$

$$\tau_2' \omega_4 + (1 - \tau_2') \omega_5 - \omega_6 = 0 \quad \text{con} \quad \tau_2' = -\frac{z_4 z_s''}{z_s'' z_6}$$

además, $\omega_1 = \omega_4$ y $\omega_3 = \omega_5$.

Entonces, el tren tiene 2 grados de libertad –6 velocidades generalizadas y 4 ecuaciones de enlace cinemáticas. Si se eliminan las dos ecuaciones triviales y se toma $\omega_1 = \omega_4 = \omega_{14}$ y $\omega_3 = \omega_5 = \omega_{35}$, las dos ecuaciones de enlace son

$$\tau_2 \omega_{14} + (1 - \tau_2) \omega_2 - \omega_{35} = 0$$

$$\tau'_2 \omega_{14} + (1 - \tau'_2) \omega_{35} - \omega_6 = 0$$

Si se considera el eje 2 como el de entrada y el eje 6 como el de salida, para encontrar la relación de transmisión $\tau = \omega_6 / \omega_2$, se ha de establecer una nueva condición entre las velocidades angulares y así obtener 3 ecuaciones que permitan obtener ω_{35} , ω_{14} y τ .

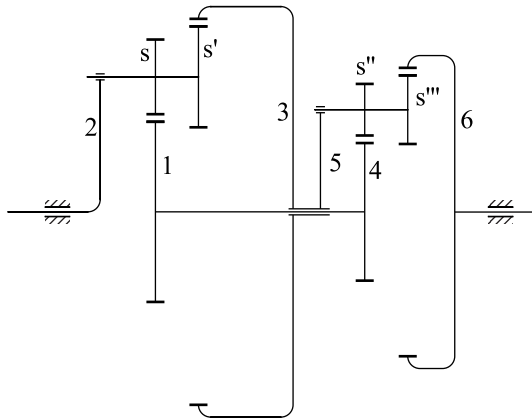


Fig. 5.14 Tren epicycloidal compuesto

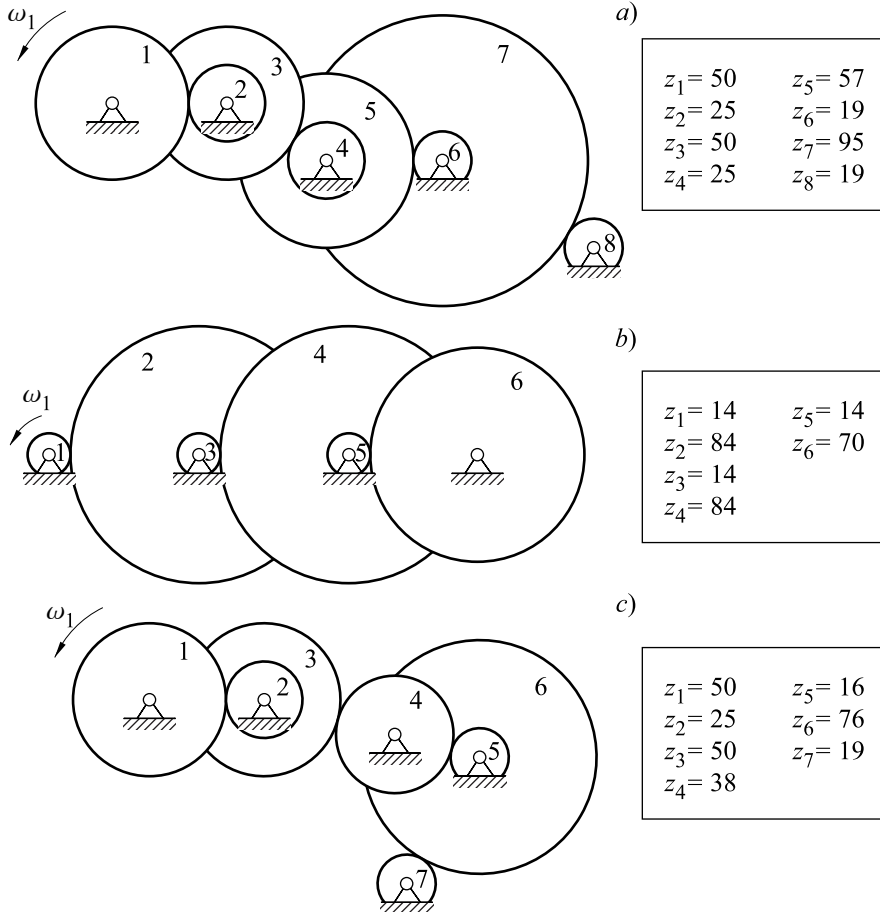
La condición más fácil de establecer corresponde a frenar uno de los ejes intermedios, que da lugar a las relaciones de transmisión siguientes:

$$\omega_{14} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_6}{\omega_2} = (1 - \tau_2)(1 - \tau'_2)$$

$$\omega_{35} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_6}{\omega_2} = -\frac{\tau'_2(1 - \tau_2)}{\tau_2}$$

Problemas

P 5-1 Determinar la velocidad angular de cada uno de los ejes y la relación de transmisión global de los siguientes trenes de ejes fijos.

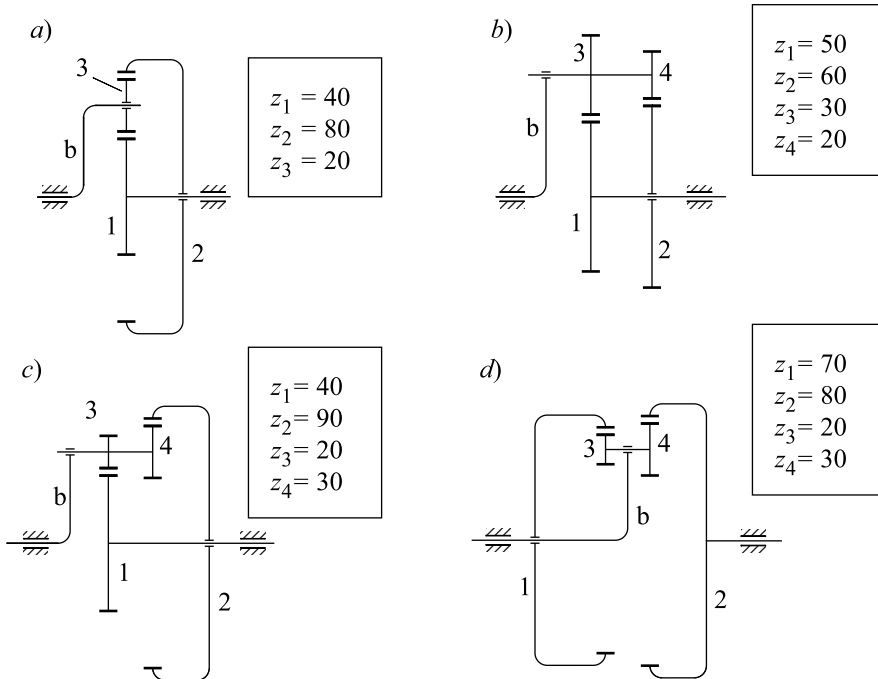


P 5-2 Diseñar trenes compuestos de ejes fijos revertidos –el eje de entrada colineal con el eje de salida– para relaciones de transmisión de a) $\tau = 18$ y b) $\tau = 23$. Estudiar la posibilidad de que todas las ruedas sean del mismo paso.

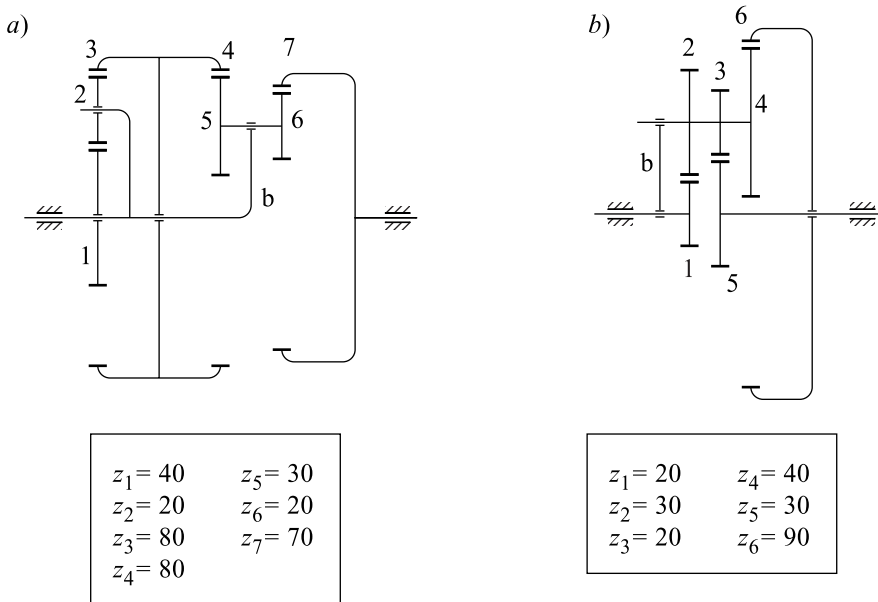
P 5-3 Diseñar trenes compuestos de ejes fijos para obtener las relaciones de transmisión a) $\tau = 1,33$, b) $\tau = 1,961$, c) $\tau = 3,12$ y d) $\tau = 1,63$.

P 5-4 En un cambio de machas de dos ejes paralelos se quieren obtener 5 relaciones de transmisión $\tau = \omega_2/\omega_1$ distribuidas según la fórmula $\tau_{k+1} = 1,5 \tau_k$, con $\tau_1 = 0,4$. Determinar 5 pares de ruedas dentadas con el mismo paso para conseguir unas relaciones de transmisión cercanas a las que se quieren obtener.

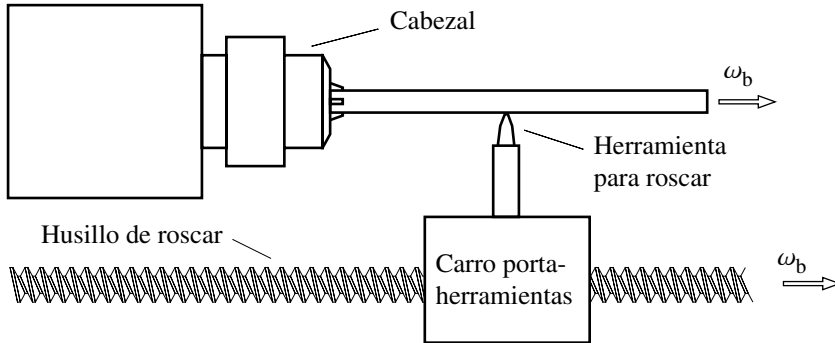
P 5-5 Determinar la ecuación de enlace –ecuación de Willis– entre las velocidades angulares de los tres ejes alineados de los trenes epicicloidales siguientes. ¿Qué relaciones de transmisión se establecen entre cada dos ejes si el tercero es fijo?



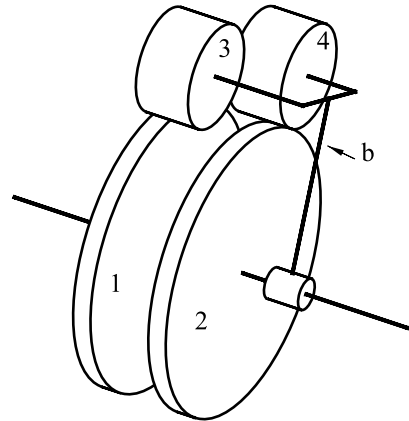
P 5-6 En los trenes epicicloidales compuestos de la figura, determinar las ecuaciones de enlace entre las velocidades angulares de los ejes alineados. ¿Qué relaciones de transmisión se pueden obtener al fijar cada uno de ellos?



- P 5-7** La barra de roscar de un torno –que sincroniza la rotación del cabezal con el avance de la herramienta– tiene un paso de 6 mm. Determinar un tren de ejes fijos entre el cabezal y la barra adecuado para roscar a) M16 × 2,0 ; b) M20 × 2,5 y c) M24 × 3,0. Si la distancia entre ejes es superior a la que se puede conseguir con las ruedas dentadas necesarias y disponibles, ¿qué solución se puede adoptar?



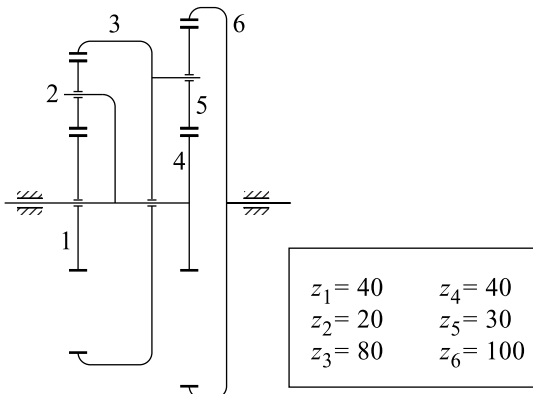
- P 5-8** En el tren planetario de la figura, las ruedas 3 y 4 engranan entre ellas y, respectivamente, con las ruedas 1 y 2. Determinar la ecuación de enlace (ecuación de Willis) entre los tres ejes colineales y expresar la velocidad angular del brazo en función de las otras. ¿Cuál es la velocidad angular de las ruedas 3 y 4?



$$z_1 = z_2 = 45$$

$$z_3 = z_4 = 15$$

- P 5-9** En el tren epicicloidial compuesto de la figura, determinar las ecuaciones de enlace entre las velocidades angulares de los ejes alineados. ¿Qué relaciones de transmisión se pueden obtener al fijar cada uno de ellos?



6 Análisis dinámico

La dinámica aplicada al estudio de mecanismos permite relacionar su movimiento con las fuerzas. Esta relación lleva a establecer las ecuaciones que rigen el movimiento, así como también a determinar las fuerzas y los momentos que aparecen en los enlaces.

Los movimientos de un mecanismo suelen ser controlados por accionamientos, de manera que de forma exacta o en primera aproximación estos movimientos se consideran totalmente conocidos. Por medio de las ecuaciones de la dinámica, se obtienen entonces las fuerzas y los momentos introducidos por los accionamientos para garantizar estos movimientos. Con este planteamiento, los grados de libertad del mecanismo son gobernados –o forzados–, y las ecuaciones de la dinámica que se obtienen son de tipo algébrico. Este planteamiento se llama *análisis dinámico inverso* –o análisis cinetoestático. El *análisis estático* de un mecanismo en reposo o de una estructura no es más que un caso particular de este análisis en el que todas las velocidades y aceleraciones son nulas.

Un planteamiento más realista, e ineludible cuando el mecanismo tiene grados de libertad no forzados, consiste en considerar que no todos los grados de libertad del mecanismo evolucionan de manera conocida y que lo realmente conocido es la formulación de las fuerzas y los momentos introducidos por los accionamientos función del estado mecánico del sistema, del tiempo y de otras variables. En este caso las coordenadas utilizadas para describir estos grados de libertad son incógnitas y se obtienen a partir de la resolución de las *ecuaciones del movimiento* del mecanismo, ecuaciones diferenciales libres de acciones de enlace que, una vez integradas, proporcionan la evolución temporal de las coordenadas. Este planteamiento conduce a lo que se conoce como *análisis dinámico directo*.

Tanto si se considera la presencia de grados de libertad no forzados en un sistema, como si no, los procedimientos a utilizar para la obtención de las ecuaciones de la dinámica son los mismos. En este libro analizaremos dos procedimientos: el procedimiento vectorial, basado en los *teoremas vectoriales*, y el método de las *potencias virtuales*, presentado en el capítulo 8. A continuación se presenta un resumen de los teoremas vectoriales para el caso de sistemas de masa constante, y se plantea el procedimiento vectorial. La referencia de estudio se considera galileana en todos los análisis que se presentan.

6.1 Teoremas vectoriales

Teorema de la cantidad de movimiento. La versión general del teorema de la cantidad de movimiento (TCM) para un sistema mecánico establece:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \text{ donde } \mathbf{p} \text{ es el vector cantidad de movimiento del sistema.}$$

Para sistemas mecánicos formados por diversos miembros, como por ejemplo un mecanismo, el vector cantidad de movimiento se puede calcular según

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}(G) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}(G_i)$$

donde G es el centro de inercia del sistema, m es la masa total del sistema, G_i es el centro de inercia de cada miembro, m_i es la masa correspondiente y N es la cantidad de miembros. La expresión práctica que se deriva del TCM es

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}(G_i) \quad (6.1)$$

Hay que recordar que, como consecuencia del principio de la acción y la reacción, sólo intervienen en el teorema las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema. Esto explica la importancia de establecer claramente cuál es el sistema mecánico para el que se plantea el teorema –delimitación del sistema.

Ejemplo 6.1 Un tren, formado por 3 vagones que se pueden mover libremente en la dirección de la vía horizontal, se pone en movimiento con la fuerza horizontal F_A .

- Tomando como sistema todo el tren, la única fuerza exterior horizontal es F_A –conocida– y la aceleración es, por lo tanto, $a = F_A / 3m$.
- Si se toman como sistema los vagones 2 y 3, la fuerza exterior horizontal –que en este caso es incógnita– es $F_B = 2ma$.
- Considerando como sistema únicamente al vagón 1, las fuerzas exteriores horizontales son F_A y $-F_B$ y se verifica que $F_A + (-F_B) = ma$.

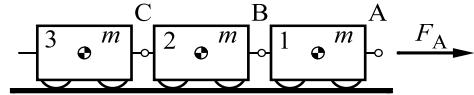


Fig. 6.1 Tren de vagonetas

Teorema del momento cinético. La versión más general del teorema del momento cinético referida a un punto B cualquiera, fijo o móvil (TMC en B), establece

$$\sum \mathbf{M}_{\text{ext}}(B) - \overline{\mathbf{B}G} \times m\mathbf{a}(B) = \frac{d\mathbf{L}(B)}{dt} = \dot{\mathbf{L}}(B) \quad (6.2)$$

El vector momento cinético $\mathbf{L}(B)$ para un sistema multisólido formado por un conjunto de N miembros, enlazados o no, se calcula, teniendo en cuenta la aditividad y la descomposición baricéntrica del vector momento cinético, según la expresión:

$$\mathbf{L}(B) = \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{L}(G_i) + \overline{\mathbf{B}G_i} \times m_i \mathbf{v}_{\text{RTB}}(G_i) \right] \quad (6.3)$$

donde $\mathbf{v}_{\text{RTB}}(G_i)$ es la velocidad del centro de inercia de cada miembro *respecto a la referencia que se traslada con B*, y $\mathbf{L}(G_i)$ es el vector momento cinético de cada miembro respecto a su centro de

inercia. Para un miembro rígido, el vector momento cinético se obtiene haciendo el producto de la matriz de su tensor de inercia en $G_i - I_{G_i}$ para su vector velocidad angular ω^i , $L(G_i) = I_{G_i} \omega_i$.

Como en el TCM, el principio de la acción y la reacción justifica que sólo intervengan los momentos exteriores al sistema.

De esta versión general del teorema se deriva una expresión práctica apta para el estudio de mecanismos y otros sistemas multisólido:

$$\sum M_{\text{ext}}(\text{B}) = \sum_{i=1}^N [\dot{L}(G_i) + \overline{\text{BG}}_i \times m_i \mathbf{a}(G_i)] \quad (6.4)$$

Demostración: Si se deriva la expresión del cálculo de $L(\text{B})$ (Ec. 6.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{L}(\text{B}) &= \sum \dot{L}(G_i) + \sum \frac{d\overline{\text{BG}}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_{\text{RTB}}(G_i) + \sum \overline{\text{BG}}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_{\text{RTB}}(G_i)}{dt} = \\ &= \sum \dot{L}(G_i) + \sum \mathbf{v}_{\text{RTB}}(G_i) \times m_i \mathbf{v}_{\text{RTB}}(G_i) + \sum \overline{\text{BG}}_i \times m_i \mathbf{a}_{\text{RTB}}(G_i) \end{aligned} \quad (6.5)$$

El segundo sumatorio es nulo porque sus términos son productos vectoriales entre vectores paralelos. Por otro lado, $\mathbf{a}_{\text{RTB}}(G_i) = \mathbf{a}(G_i) - \mathbf{a}(\text{B})$ y, al sustituir en el tercer sumatorio, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum \overline{\text{BG}}_i \times m_i \mathbf{a}_{\text{RTB}}(G_i) &= \sum \overline{\text{BG}}_i \times m_i \mathbf{a}(G_i) - \sum \overline{\text{BG}}_i \times m_i \mathbf{a}(\text{B}) = \\ &= \sum \overline{\text{BG}}_i \times m_i \mathbf{a}(G_i) - \left[\sum \overline{\text{BG}}_i m_i \right] \times \mathbf{a}(\text{B}) = \\ &= \sum \overline{\text{BG}}_i \times m_i \mathbf{a}(G_i) - \overline{\text{BG}} m \times \mathbf{a}(\text{B}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Al sustituir la expresión 6.6 en 6.5 y esta en 6.2, el término $\overline{\text{BG}} m \times \mathbf{a}(\text{B})$ se simplifica y se obtiene la expresión 6.4.

Ejemplo 6.2 Los tres rodillos homogéneos de la figura 6.2 son iguales, pueden rodar sin deslizar libremente sobre el plano horizontal y están unidos mediante barras articuladas de inercia despreciable. Se pide la aceleración \mathbf{a} del conjunto si se tira de la primera barra con la fuerza \mathbf{F} horizontal. Considerando todo el mecanismo como un sistema las fuerzas exteriores son además de \mathbf{F} , el peso y la fuerza –vertical y horizontal– en los puntos de contacto de cada rodillo con el suelo. Aplicando la expresión 6.4 con el punto B sobre el suelo, para la dirección perpendicular al plano de la figura (ver el anexo 6.II)

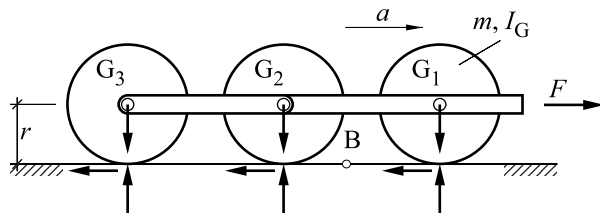


Fig. 6.2 Ejemplo 6.2

- es fácil comprobar que la resultante del momento de las fuerzas exteriores vale $M_{\text{ext}}(\text{B}) = Fr$ y
- la derivada del momento cinético de cada rueda es $I_G(a/r)$, de manera que

$$Fr = 3(I_G \frac{a}{r} + mar) \quad a = \frac{F}{3(m + I_G/r^2)}$$

6.2 Aplicación de los teoremas vectoriales al planteamiento de la dinámica de mecanismos

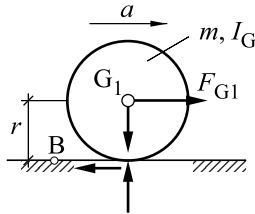


Fig. 6.3 Partición del sistema de la figura 6.2.

Los teoremas vectoriales son de aplicación general para cualquier sistema mecánico, ya sea un solo miembro, un mecanismo entero o una parte.

En el estudio de un problema concreto, la aplicación de los teoremas vectoriales a un sistema u otro depende de la información disponible y de la que se desea obtener. Para tomar una decisión, se ha de hacer una inspección visual más o menos compleja. Así, en el ejemplo 6.2 se ha aplicado el TMC a todo el sistema porque se quería encontrar la aceleración del conjunto. Si lo que interesa es encontrar la fuerza horizontal en la articulación G_1 , se puede aplicar el TMC en B sólo al primer rodillo (Fig. 6.3) y entonces se obtiene $F_{G_1} = (m + I_G/r^2)a = F/3$.

Si lo que se quiere es proceder sistemáticamente y analizar el comportamiento dinámico de todos los miembros de un mecanismo, así como también las fuerzas y los momentos en los enlaces, es necesario recurrir a la aplicación de los teoremas en cada miembro por separado. Este planteamiento se expresa frecuentemente por medio del *diagrama de cuerpo libre* de cada miembro, en el que se representan el miembro y las fuerzas y los momentos exteriores que actúan.

El planteamiento de los teoremas vectoriales en cada miembro de un mecanismo lleva a la obtención de un sistema de ecuaciones algébricodiferencial; algébrico por las fuerzas y diferencial por el movimiento libre. Para cada miembro se pueden plantear seis ecuaciones, y para al mecanismo entero habrá seis por el número de miembros. En el caso de mecanismos con movimiento plano, si se prescinde de la determinación de las fuerzas y los momentos de enlace que garantizan que el movimiento sea plano, se utilizan tres para cada miembro.

Análisis dinámico inverso. En un sistema donde todos los grados de libertad son conocidos, ya sea porque son gobernados o porque se han resuelto las ecuaciones del movimiento, el sistema resultante de ecuaciones dinámicas es lineal por lo que concierne a las fuerzas, tal como se manifiesta, por ejemplo, en las expresiones 6.1 y 6.4. Esto permite aislar las variables de fuerza y momento y obtener un sistema de ecuaciones de la forma

$$[C]\{F\} = \{b\} \quad (6.7)$$

donde el vector F representa las fuerzas y los momentos desconocidos. La matriz C depende de la configuración del mecanismo y el vector de términos independientes b depende de las fuerzas conocidas, del estado mecánico del sistema –posiciones y velocidades– y de las aceleraciones –en último término, depende del tiempo. Este sistema de ecuaciones tiene solución si el sistema mecánico no tiene condiciones de enlace redundantes. Esta formulación es la misma para los valores globales como para los incrementos. De este modo, por ejemplo, el incremento de fuerzas desconocidas ΔF proveniente de un incremento de fuerzas conocidas que provoca un incremento Δb del vector de términos independientes es $C \Delta F = \Delta b$.

Con un planteamiento parcial como el que se ha expuesto al inicio del apartado, lo que se obtiene por inspección visual es una reducción del sistema 6.7 que permite obtener directamente una fuerza o un momento o, en otros casos, un subconjunto de ellos.

Ejemplo 6.3 En el sistema de la figura 6.4 los dos bloques son iguales y están unidos mediante una barra articulada de masa despreciable. Un cilindro hidráulico gobierna la posición del bloque A aplicándole una fuerza F_C . Se desprecian también los roces en las articulaciones y en los enlaces con el soporte. Se trata de plantear el análisis dinámico del mecanismo.

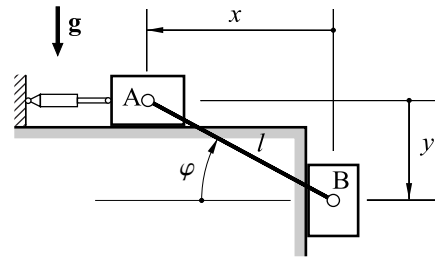


Fig. 6.4 Mecanismo de un grado de libertad gobernado

El movimiento del mecanismo se describe con las tres coordenadas generalizadas $\{x, y, \varphi\}^T$ y tiene un grado de libertad gobernado por el cilindro hidráulico; por tanto, se han de establecer dos ecuaciones de enlace:

$$\begin{cases} x = l \cos \varphi \\ y = l \sin \varphi \end{cases} \text{ o alternativamente } \begin{cases} \tan \varphi = y / x \\ x^2 + y^2 = l^2 \end{cases} \quad (6.8)$$

En la figura 6.5 se muestran los diagramas de cuerpo libre de los dos bloques. En ellos se ha contemplado que la barra, al ser de masa despreciable y sin roce en las articulaciones, sólo transmite fuerza en su dirección.

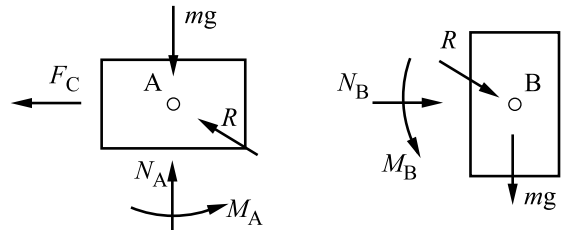


Fig. 6.5 Diagrama de cuerpo libre de los dos bloques del ejemplo 6.3

La aplicación de los teoremas vectoriales a los bloques lleva a la obtención de seis ecuaciones dinámicas, de las que ya se deduce que los momentos de enlace M_A y M_B son nulos.

$$\begin{cases} R \cos \varphi + F_C = m\ddot{x} \\ N_A + R \sin \varphi - mg = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R \sin \varphi + mg = m\ddot{y} \\ N_B + R \cos \varphi = 0 \\ M_B = 0 \end{cases}$$

Si se prescinde de las dos ecuaciones triviales de los momentos de enlace, el sistema de ecuaciones dinámicas se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 & 1 \\ \sin \varphi & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ N_A \\ N_B \\ F_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ mg \\ m\ddot{y} - mg \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Esta expresión es un sistema algebraico de cuatro ecuaciones lineales para las fuerzas de enlace y la fuerza del cilindro. Su resolución implica la resolución previa del problema cinemático. Conocida $x(t)$, controlada por el cilindro, el análisis cinemático proporciona $y(t)$, $\varphi(t)$ y sus derivadas. Utilizando el primer conjunto de ecuaciones de enlace, el análisis de velocidades y de aceleraciones adopta la forma:

$$\begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & l \sin \varphi \\ 1 & -l \cos \varphi \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & l \sin \varphi \\ 1 & -l \cos \varphi \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & l\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & 0 & l\dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \right) \quad (6.10)$$

Análisis dinámico directo. Si el sistema mecánico tiene grados de libertad no forzados, el principio de la determinación garantiza que del sistema de ecuaciones se pueden aislar las ecuaciones del movimiento, tantas como grados de libertad no forzados tenga el mecanismo. Una vez resueltas las ecuaciones del movimiento, se pueden determinar las fuerzas y los momentos en los enlaces, como también las fuerzas y los momentos desconocidos introducidos por los accionamientos, siempre que el sistema no presente redundancias.

Ejemplo 6.4 Si en el mecanismo del ejemplo 6.3 se sustituye el cilindro hidráulico por un muelle, el grado de libertad del mecanismo pasa a ser libre. Suponiendo que el muelle es lineal, de constante k , y que está sin tensión para $x = x_0$, el conjunto de ecuaciones dinámicas pasa a ser

$$\begin{cases} R \cos \varphi + k(x_0 - x) = m\ddot{x} \\ N_A + R \sin \varphi - mg = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R \sin \varphi + mg = m\ddot{y} \\ N_B + R \cos \varphi = 0 \\ M_B = 0 \end{cases}$$

Y en forma matricial, y prescindiendo de las dos ecuaciones triviales de los momentos de enlace,

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R \\ N_A \\ N_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\ddot{x} + k(x - x_0) \\ mg \\ m\ddot{y} - mg \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

De la tercera ecuación se puede aislar R y sustituirla en la primera para obtener la ecuación del movimiento

$$R = m(\ddot{y} - g) / \sin \varphi \quad \rightarrow \quad m(\ddot{y} - g) \cot \varphi = m\ddot{x} + k(x - x_0)$$

que junto con las ecuaciones

$$\ddot{y} = -\frac{\ddot{x}}{\tan \varphi} - \frac{\dot{x}^2}{l \sin \varphi} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \varphi}\right)$$

$$\varphi = \arccos x/l$$

obtenidas, respectivamente, del análisis de velocidades y aceleraciones (Ec. 6.10) y del sistema de ecuaciones de enlace 6.8, constituyen un sistema mixto algébricodiferencial en las variables x , y y φ . Estos sistemas se han de resolver casi siempre numéricamente.

Una vez conocido el movimiento por integración de la ecuación del movimiento, se obtienen las fuerzas de enlace a partir del sistema de ecuaciones dinámicas 6.11. Ahora las cuatro ecuaciones 6.11 no son linealmente independientes, y se han de elegir tres de manera adecuada para que formen un sistema de ecuaciones determinado por lo referente a las fuerzas. En este caso, se pueden tomar, por ejemplo, las tres últimas.

En el anexo 6.I se presenta un planteamiento más global del análisis dinámico, basado en los teoremas vectoriales, de manera que las ecuaciones dinámicas y las del análisis cinemático se agrupan en un único sistema para ser resueltas conjuntamente. En el anexo 6.II se recogen algunas peculiaridades del planteamiento de los teoremas vectoriales en mecanismos con movimiento plano.

6.3 Torsor de las fuerzas de inercia de d'Alembert

Para un sistema mecánico, los teoremas vectoriales, refiriendo el TMC a G, se pueden reescribir como:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext.}} - m\mathbf{a}(\mathbf{G}) = 0 \quad , \quad \sum \mathbf{M}_{\text{ext.}}(\mathbf{G}) - \dot{\mathbf{L}}(\mathbf{G}) = 0 \quad (6.12)$$

Si se definen $\mathcal{F} = -m\mathbf{a}(\mathbf{G})$ y $\mathcal{M}(\mathbf{G}) = -\dot{\mathbf{L}}(\mathbf{G})$ como una fuerza –fuerza de inercia de d'Alembert– y un momento –momento de las fuerzas de inercia de d'Alembert o par de inercia de d'Alembert–, que constituyen el llamado *torsor de las fuerzas de inercia de d'Alembert*, entonces el planteamiento de la dinámica de un sistema multisólido por medio de los teoremas vectoriales se puede expresar enunciando: *la suma de fuerzas y la suma de momentos, incluyendo el torsor de inercia de d'Alembert, es cero.*

Esta manera de plantear los teoremas vectoriales es totalmente general, aplicable a un mecanismo, a grupos de miembros agrupados en subsistemas o a cada miembro por separado. Cuando se utiliza el torsor de las fuerzas de inercia de d'Alembert, es usual incluirlo en los diagramas de cuerpo libre para escribir fácilmente las expresiones 6.12.

Hay que advertir sobre la posible confusión entre los diferentes tipos de fuerzas de inercia que aparecen en la mecánica. Las fuerzas de inercia de arrastre y de Coriolis se han de considerar cuando se plantea la dinámica en referencias no galileanas. Son función de la posición y de la velocidad de cada partícula material relativas a la referencia no galileana, como también del movimiento de esta referencia respecto del conjunto de las referencias galileanas. Las fuerzas de inercia de d'Alembert se introducen cuando se reescribe la segunda ley de Newton para una partícula en la forma $\mathbf{F}(\mathbf{P}) - m\mathbf{a}(\mathbf{P}) = \mathbf{F}(\mathbf{P}) + \mathcal{F}(\mathbf{P})$, donde $\mathcal{F}(\mathbf{P}) = -m\mathbf{a}(\mathbf{P})$ es la fuerza de inercia de d'Alembert de la partícula. En ambos casos, se ha de remarcar que las fuerzas de inercia no describen ninguna interacción física. Esto hace que, por ejemplo, no sea aplicable el principio de la acción y la reacción.

En el anexo 6.III se deduce la expresión del torsor de las fuerzas de inercia de d'Alembert a partir de su definición para una partícula.

6.4 Equilibrado de mecanismos

En un mecanismo en movimiento, aparecen componentes de fuerza en los enlaces internos y en los soportes con el exterior, frecuentemente de magnitud elevada, a causa del comportamiento dinámico de los miembros del mecanismo. Estas fuerzas pueden provocar vibraciones e influir negativamente en su integridad mecánica –rotura y fatiga de piezas, desgaste en los elementos de enlace, etc. Al mismo tiempo, el comportamiento dinámico de los elementos influye en las fuerzas y los momentos que han de realizar los actuadores para conseguir el movimiento deseado.

Hay que minimizar estas fuerzas siempre que sea posible. Los teoremas vectoriales ponen de manifiesto que esto se consigue, en principio, si el centro de inercia tiene la aceleración más pequeña posible y el momento cinético en G varía lo mínimo posible. Los procedimientos utilizados para conseguir este objetivo se conocen como procedimientos de equilibrado y las causas que hacen alejarse de él son los llamados desequilibrios.

El equilibrado implica el diseño de los miembros, o conjuntos de miembros, con una distribución adecuada de masa. Las tolerancias de fabricación, el desgaste, etc. pueden requerir el equilibrado experimental de un sistema una vez construido, ya sea añadiéndole contrapesos o eliminando material en los lugares adecuados. El equilibrado sólo se puede abordar de manera sencilla en casos concretos, como el de los rotores y el de algunos mecanismos planos, por ejemplo, el cuadrilátero articulado y el mecanismo pistón-biela-manivela, como más usuales.

Equilibrado de rotores. Un tipo de elemento que se presenta frecuentemente en las máquinas es el rotor: elemento que gira con una componente de velocidad angular importante alrededor de un eje fijo –rotores de motores, bombas, turbinas, ventiladores, ruedas dentadas, poleas, ruedas de vehículos, etc. La dinámica del rotor girando puede implicar la aparición de componentes de fuerza importantes en los enlaces, causadas por la distribución particular de masa. Si bien en el diseño de un rotor usualmente se tiene en cuenta su equilibrado, frecuentemente es necesario realizar un equilibrado experimental posterior; este es el caso de las ruedas de un automóvil. El equilibrado de rotores se estudia en una referencia donde el eje de giro se mantiene fijo y se supone que el rotor gira con velocidad angular $\omega = \text{constante}$ y se soporta mediante rótulas en sus extremos (Fig. 6.6). En los rotores rígidos, se distinguen dos tipos de desequilibrios: el estático y el dinámico.

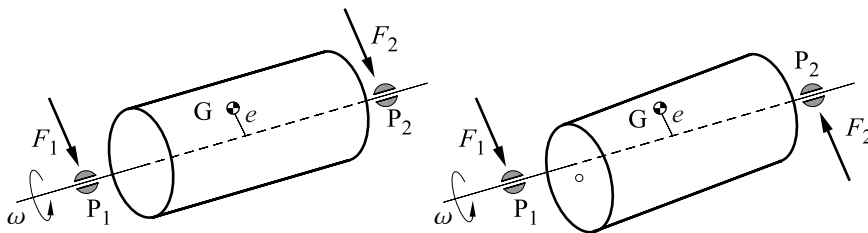


Fig. 6.6 a) Desequilibrio estático

b) Desequilibrio dinámico

Desequilibrio estático. Se presenta cuando el centro de inercia G del rotor se encuentra fuera de su eje de giro (Fig. 6.6.a). La aplicación del TCM al rotor manifiesta que este hecho provoca la aparición de componentes de fuerza F_1 y F_2 en los soportes del eje con la misma dirección y sentido, que giran solidarios con el rotor y que son las responsables de la aceleración centrípeta de G : $F_1 + F_2 = me\omega^2$, donde m es la masa del rotor, e la excentricidad del centro de inercia y ω su velocidad angular en rad/s. Estas fuerzas, al depender de ω^2 , pueden alcanzar valores importantes. Así, por ejemplo, para un rotor que gira a $n = 3000 \text{ min}^{-1}$, si la excentricidad e es 1 mm, la resultante de las fuerzas causadas por el desequilibrio es aproximadamente 10 veces el peso del rotor, $F_1 + F_2 \approx 10 mg$.

El nombre de desequilibrio estático proviene del hecho que este se manifiesta incluso con el rotor en reposo a causa de la tendencia del centro de inercia a ocupar la posición más baja posible.

Desequilibrio dinámico. Se presenta cuando el eje de giro no es paralelo a un eje central de inercia – eje principal de inercia en G (Fig. 6.6.b). El vector momento cinético $L(G)$ gira junto con el rotor, pero no tiene la dirección del eje de giro, y la aplicación del TMC en G pone de manifiesto que su variación $\dot{L}(G)$ es perpendicular al eje. En este caso, las componentes de fuerza que aparecen en los soportes también giran junto con el rotor, tienen la misma dirección pero pueden tener sentido

contrario. Estas fuerzas son las que crean el momento responsable de la variación del momento cinético $\dot{L}(G)$ y, al depender de ω^2 , pueden alcanzar también valores importantes.

$$\dot{L}(G) = M_d = \overline{GP_1} \times F_1 + \overline{GP_2} \times F_2$$

Se demuestra que el momento causado por el desequilibrio dinámico es

$$M_d = (I_{13}^2 + I_{23}^2)^{1/2} \omega^2 \quad (6.13)$$

donde I_{13} y I_{23} son los productos de inercia asociados al eje de giro 3.

Equilibrado del cuadrilátero articulado. En el equilibrado de un cuadrilátero articulado clásicamente se plantea anular la resultante de las fuerzas transmitidas a los soportes. Esto comporta forzar que la posición del centro de inercia G del cuadrilátero sea fija, independiente de su configuración (ver el anexo 6.IV).

Equilibrado del mecanismo pistón-biela-manivela. En este mecanismo, la manivela gira alrededor de un eje fijo y, por lo tanto, puede ser equilibrada mediante las técnicas para el equilibrado de rotores. No así el pistón, que tiene movimiento de translación alternativo, ni la biela, que realiza un movimiento complejo. El planteamiento tradicional del equilibrado de este mecanismo consiste en conseguir que la fuerza de enlace, que a causa de su inercia aparece en el soporte de la manivela, sea la mínima posible (ver el anexo 6.IV).

Anexo 6.I Planteamiento global del análisis dinámico mediante los teoremas vectoriales

Sea un sistema mecánico definido por un conjunto de coordenadas generalizadas q que permite posicionar cada miembro por separado. Al aplicar los teoremas vectoriales a cada miembro por separado se obtiene un conjunto de ecuaciones con un número de $6 \times$ número de miembros. Este conjunto de ecuaciones es lineal en las fuerzas, momentos y aceleraciones. Si se aíslan como incógnitas las fuerzas y los momentos de enlace así como las fuerzas y los momentos desconocidos introducidos por los accionamientos, el sistema de ecuaciones dinámicas se expresa matricialmente como

$$C(q) \cdot F = b(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \quad (6.14)$$

donde $C(q)$ es una matriz del sistema, función de las coordenadas, F es el vector de fuerzas y momentos desconocidos y b es un vector función de las coordenadas y sus derivadas hasta orden dos – es decir, función del estado mecánico y de las aceleraciones– y del tiempo. Este vector recoge los términos de inercia de las ecuaciones dinámicas y los términos asociados a fuerzas y momentos de formulación conocida y se puede descomponer en

$$b(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = -M(q) \cdot \ddot{q} + f(q, \dot{q}, t) \quad (6.15)$$

donde la matriz M no coincide, en general, con la matriz de inercia asociada al cálculo de la energía cinética. Si para cada sólido se utilizan coordenadas inerciales, la submatriz de M correspondiente a un sólido es

$$\begin{bmatrix} m & & & \\ & m & 0 & \\ & 0 & m & \\ & & & [I_G] \end{bmatrix}, \text{ donde } m \text{ es la masa del sólido e } I_G \text{ su tensor de inercia.}$$

Del conjunto de ecuaciones dinámicas 6.14 se pueden aislar las ecuaciones del movimiento, tantas como grados de libertad sin forzar tenga el sistema, si bien para resolverlo se han de considerar las relaciones establecidas entre las coordenadas. Estas relaciones, vistas en la cinemática, dan lugar a la expresión

$$\phi_q \cdot \ddot{q} = -\dot{\phi}_q \cdot \dot{q} - \dot{\phi}_t \quad (6.16)$$

En el caso de que el sistema sea no holónimo, en la obtención de esta ecuación se ha de añadir a la ecuación las velocidades, $\phi_q \cdot \dot{q} + \phi_t = 0$, las condiciones de enlace no holónomas.

El conjunto de ecuaciones dinámicas 6.14 se puede combinar con las ecuaciones cinemáticas 6.16 para formar un único sistema de ecuaciones algebricodiferencial (Ec. 6.17) donde las incógnitas son fuerzas y momentos desconocidos, y las aceleraciones asociadas a grados de libertad. Este sistema de ecuaciones constituye el modelo matemático del sistema mecánico.

$$\begin{bmatrix} M(q) & C(q) \\ \phi_q & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(q, \dot{q}, t) \\ -\dot{\phi}_q \cdot \dot{q} - \dot{\phi}_t \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

Ejemplo 6.5 En el ejemplo 6.3 del apartado 6.2, cuando se considera el grado de libertad forzado, es decir, cuando el cilindro hidráulico gobierna el movimiento, las ecuaciones dinámicas 6.9 y las dos ecuaciones de enlace 6.8, junto con la ecuación de gobierno de la coordenada x , son:

$$\begin{cases} -m\ddot{x} + R \cos \varphi + F_C = 0 \\ -m\ddot{y} + R \sin \varphi = -mg \\ R \sin \varphi + N_A = mg \\ R \cos \varphi + N_B = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - l \cos \varphi = 0 \\ y - l \sin \varphi = 0 \\ x - s(t) = 0 \end{cases}$$

De las ecuaciones dinámicas se obtienen las matrices $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ y $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ y el vector $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Ordenando las incógnitas según el vector $\{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, R, N_A, N_B, F_C\}^T$ son

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -m & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 & 1 \\ \sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 1 & 0 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}$$

Derivando dos veces respecto al tiempo el conjunto de ecuaciones de enlace, se obtienen las relaciones cinemáticas siguientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & l \sin \varphi \\ 0 & 1 & -l \cos \varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & 0 & l \dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{s}(t) \end{bmatrix}$$

El sistema global queda finalmente:

$$\begin{bmatrix} -m & 0 & 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -m & 0 & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & l \sin \varphi & & & & \\ 0 & 1 & -l \cos \varphi & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \\ R \\ N_A \\ N_B \\ F_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \\ -mg \\ 0 \\ -l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ -l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ \ddot{s}(t) \end{bmatrix}$$

Anexo 6.II Aspectos a considerar en el caso de mecanismos con movimiento plano

Al plantear la dinámica de mecanismos con movimiento plano, frecuentemente se prescinde de la determinación de las fuerzas de enlace perpendiculares al plano del movimiento y de los momentos de enlace contenidos en este plano, ya que se presupone que los elementos de enlace son capaces de garantizarlos. En este caso, sólo se utilizan tres de las seis ecuaciones que proporcionan los teoremas vectoriales para cada miembro. Por otra parte, cuando interesa conocer estas fuerzas y momentos; por ejemplo, a efectos del diseño de los enlaces, se ha de recurrir al planteamiento completo de los teoremas. Hay que remarcar que su valor usualmente no es nulo a causa de los siguientes hechos:

- La acción sobre el mecanismo de fuerzas perpendiculares al plano del movimiento o momentos contenidos en este plano.
- La propia estructura de los enlaces. En un par de revolución, por ejemplo, las dos barras que une no son coplanares (Fig. 6.7) y aparecen momentos de enlace contenidos en el plano del movimiento a causa del momento que hacen las fuerzas de cada barra.
- La existencia de algún miembro del mecanismo con la dirección normal al plano del movimiento no central de inercia (Fig. 6.8). El vector momento cinético referido a G para un miembro es

$$\mathbf{L}(G) = \mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\omega}^s = \{I_{13}\omega, I_{23}\omega, I_{33}\omega\}^T$$

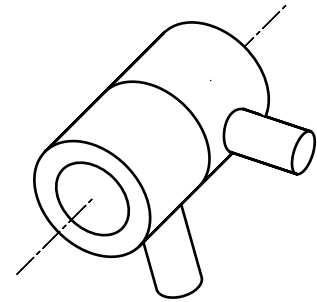


Fig. 6.7 Junta de revolución

y sólo en el caso de que la dirección 3 sea central de inercia ($I_{13} = I_{23} = 0$), los vectores $\mathbf{L}(G)$ y $\dot{\mathbf{L}}(G)$ son perpendiculares al plano del movimiento, condición necesaria para que el movimiento del miembro no requiera momentos en el plano.

$$\mathbf{L}(G) = \{0, 0, I_{33}\omega\}^T \rightarrow \dot{\mathbf{L}}(G) = \{0, 0, I_{33}\alpha\}^T = \sum \mathbf{M}_{\text{ext}}(G), \text{ donde } \alpha = \dot{\omega}$$

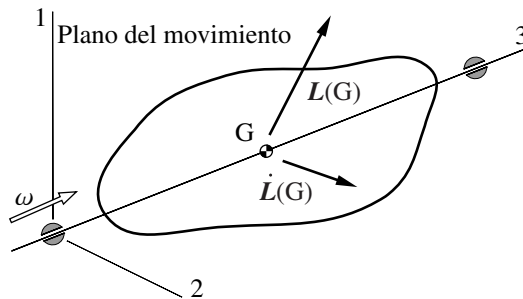


Fig. 6.8 Momento cinético en un rotor

Anexo 6.III Torsor de las fuerzas de inercia de d'Alembert

El principio de d'Alembert establece que la suma de fuerzas sobre una partícula, incluida la llamada *fuerza de inercia de d'Alembert*, es cero: $\mathbf{F}(P) - m \mathbf{a}(P) = \mathbf{F}(P) + \mathcal{F}(P) = 0$

En el caso de un sistema mecánico general, el torsor de fuerzas de inercia de d'Alembert referido a G es $\mathcal{F} = -m \mathbf{a}(G)$, $\mathcal{M}(G) = -\dot{\mathbf{L}}(G)$. Para comprobarlo, hay que aplicar la definición de torsor. La resultante es

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \sum_{i=1}^n -m(P_i) \mathbf{a}(P_i) = \sum_{i=1}^n -m(P_i) [\mathbf{a}_{\text{RTG}}(P_i) + \mathbf{a}(G)] = \\ &= -\frac{d^2}{dt^2} \left[\sum_{i=1}^n m(P_i) \overline{\mathbf{GP}_i} \right] - \left[\sum_{i=1}^n m(P_i) \right] \mathbf{a}(G) = -m \mathbf{a}(G) \end{aligned}$$

donde RTG indica la referencia que se traslada con G respecto a la de estudio y m es la masa total del sistema. El primer sumatorio es nulo por causa de la definición del centro de inercia.

Por lo que se refiere al momento resultante –par de inercia de d'Alembert:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(G) &= \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{GP}_i} \times -m(P_i) \mathbf{a}(P_i) = \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{GP}_i} \times -m(P_i) [\mathbf{a}_{\text{RTG}}(P_i) + \mathbf{a}(G)] = \\ &= -\sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{GP}_i} \times m(P_i) \mathbf{a}_{\text{RTG}}(P_i) - \left[\sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{GP}_i} m(P_i) \right] \times \mathbf{a}(G) = -\dot{\mathbf{L}}(G) \end{aligned}$$

ya que nuevamente $\sum_{i=1}^n m(P_i) \overline{\mathbf{GP}_i} = 0$ y, por otro lado,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}(G) &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{GP}_i} \times m(P_i) \mathbf{v}_{\text{RTG}}(P_i) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d\overline{\mathbf{GP}_i}}{dt} \times m(P_i) \mathbf{v}_{\text{RTG}}(P_i) + \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{GP}_i} \times m(P_i) \mathbf{a}_{\text{RTG}}(P_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{GP}_i} \times m(P_i) \mathbf{a}_{\text{RTG}}(P_i) \end{aligned}$$

donde el primer sumatorio es nulo al tratarse de productos vectoriales entre vectores paralelos. Hay que subrayar que, en este desarrollo, en ninguna etapa se ha impuesto al sistema de partículas la condición de sólido rígido y, por lo tanto, el concepto de torsor las fuerzas de inercia de d'Alembert es aplicable a cualquier sistema mecánico.

Anexo 6.IV Métodos de equilibrado

El equilibrado experimental de un rotor. El desequilibrio estático de un rotor se cuantifica mediante la magnitud $u = me$, tal que $F_1 + F_2 = u\omega^2$ (Fig. 6.6.a). Evidentemente, si a un rotor perfectamente equilibrado se añade una masa puntual m_p , situada a una distancia r del eje de giro, el desequilibrio estático introducido es $u = m_p r$, ya que $F_1 + F_2 = m_p r \omega^2$.

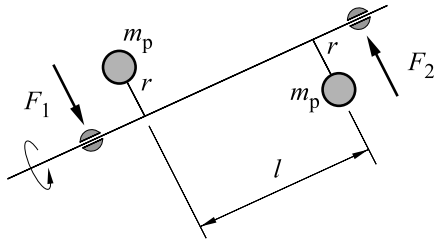


Fig. 6.9 Modelo equivalente de un desequilibrio dinámico

El momento causado por el desequilibrio dinámico (Ec. 6.13) se puede hacer igual al momento que produciría un rotor formado por dos masas puntuales iguales situadas en el plano axial perpendicular a M_d , como se indica en la figura 6.9, a partir de las cuales

$$M_d = (m_p r) \omega^2 l = u \omega^2 l$$

El desequilibrio dinámico se cuantifica mediante este desequilibrio u y la distancia l , que usualmente se toma igual a la distancia entre soportes.

Normalmente los dos desequilibrios, estático y dinámico, se presentan conjuntamente y dan lugar a una fuerza giratoria en cada uno de los soportes que se puede asociar a un desequilibrio $u = F/\omega^2$ situado en el plano radial del soporte.

La experiencia ha llevado a definir el *grado de calidad de equilibrado* de servicio de un rotor como $G = e\omega$. Para un desequilibrio estático, e corresponde a la excentricidad del centro de inercia y ω es la velocidad de rotación; así, G es la velocidad del centro de inercia. La tabla 6.1 presenta los grados de calidad de equilibrado admisibles para diferentes tipos de rotores de máquinas según la función que tengan que realizar. La información proviene de la norma ISO 1940 sobre el equilibrado de rotores.

Para la aplicación en el caso general del grado de calidad de equilibrado, éste se multiplica por la masa m del rotor y por su velocidad angular ω , y así se obtiene una fuerza máxima admisible $Gm\omega = me\omega^2$ atribuible a un desequilibrio máximo admisible $u = Gm/\omega$, que se reparte entre los dos soportes en función de la distribución de masa del rotor y de la capacidad de carga de los soportes.

Para corregir el desequilibrio, se parte de medidas experimentales de la vibración producida por los rotores en montajes específicos –máquinas de equilibrar– o montados en el lugar de trabajo –equilibrado *in situ*–. Las técnicas utilizadas se pueden subdividir en dos grupos:

- Técnicas basadas en la localización del centro de inercia del rotor, por su tendencia a ocupar la posición más baja posible, y corrección posterior de esta posición por adición o sustracción de masa. Estas técnicas sólo permiten corregir el desequilibrio estático.
- Técnicas basadas en la medida del efecto producido en los soportes por la rotación del rotor desequilibrado. Estas técnicas permiten corregir simultáneamente los dos tipos de desequilibrio y, cuando es posible, son preferibles a las anteriores para corregir el desequilibrio estático, ya que permiten una precisión más elevada.

Tabla 6.1 Grado de calidad admisible

Grado de calidad G (mm/s)	Tipos de rotores. Ejemplos
4000	Cigüeñales de motores marinos diesel lentos con número impar de cilindros y montados rígidamente en la bancada.
1600	Cigüeñales de grandes motores de dos tiempos montados rígidamente en la bancada.
630	Cigüeñales de grandes motores de cuatro tiempos montados rígidamente en la bancada. Cigüeñales de motores marinos diesel montados con elementos elásticos en la bancada.
250	Cigüeñales de motores diesel rápidos de cuatro cilindros montados rígidamente en la bancada.
100	Cigüeñales de motores diesel rápidos de seis cilindros o más. Motores enteros (de gasolina o diesel) para automóviles, camiones y locomotoras.
40	Cigüeñales de motores rápidos de cuatro tiempos (gasolina o diesel), de seis cilindros o más y montados con elementos elásticos en la bancada. Cigüeñales de motores para automóviles, camiones y locomotoras. Ruedas de automóvil, poleas y árboles de transmisión.
16	Árboles de transmisión con requerimientos especiales. Componentes de maquinaria trituradora. Componentes de maquinaria agrícola. Componentes individuales de motores para automóviles, camiones y locomotoras. Cigüeñales de motores de seis cilindros o más con requerimientos especiales.
6,3	Componentes de máquinas de producción. Engranajes en turbinas para propulsión marina. Volantes de inercia. Rodillos de bombas. Componentes de máquinas herramienta. Rotores de motores eléctricos de tamaño normal. Componentes de motores con requerimientos especiales.
2,5	Turbinas de gas y de vapor. Rotores rígidos de turbogeneradores. Turbocompresores. Accionamientos en máquinas herramienta. Rotores de motores eléctricos medios y grandes con requerimientos especiales. Rotores de motores eléctricos pequeños. Bombas accionadas por turbinas.
1	Accionamientos en magnetófonos y reproductores. Accionamientos en máquinas rectificadoras. Rotores de motores eléctricos pequeños con requerimientos especiales.
0,4	Ejes, discos y rotores en rectificadoras de precisión. Giroscopios.

Fuente: Norma ISO 1940

El método de equilibrado más frecuente es el de los *coeficientes de influencia*.

Si un rotor perfectamente equilibrado se hace girar alrededor de su eje con velocidad constante no requiere fuerzas exteriores y, por tanto, no genera vibraciones en los soportes ni, a través de ellos, al exterior. Si se introduce a este mismo rotor un desequilibrio, al hacerlo girar a velocidad constante se generan vibraciones en sus soportes –fuerzas y/o momentos– y al exterior. Al desequilibrio introducido, por una masa m descentrada –supuesta puntual– localizada en un determinado plano normal al eje –plano de equilibrado–, se le asocia el número complejo $u = m s e^{j\alpha}$. En la vibración de

un punto –de frecuencia igual a la de giro del rotor– $v = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$ se le asocia el número complejo v . El ángulo de fase φ se mide, por ejemplo, considerando $t = 0$ el instante en el que un punto fijo en el rotor –testimonio– pasa por un punto fijo del suelo (Fig. 6.10).

El cociente entre v y u , $c = v/u$ se conoce como *coeficiente de influencia del desequilibrio* en la vibración del punto considerado y se considera independiente del desequilibrio y función del plano de equilibrado, del punto en que se mide y de la velocidad de giro.

El proceso para equilibrar mediante los coeficientes de influencia es el siguiente:

- a) Se mide la vibración producida por el rotor en un conjunto de puntos –los soportes u otros puntos– a una o más velocidades de giro y se obtiene un conjunto de n medidas de vibración inicial v_i que se desearía que fuesen nulas. $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^T$
- b) Se introducen uno a uno l desequilibrios u_j en planos diferentes; para cada uno de ellos se repiten las medidas de vibración $V' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}^T$ –en los mismos puntos y en las mismas velocidades anteriores– y a partir de los incrementos de vibración se calculan los coeficientes de influencia

$$v'_i - v_i = c_{ij} u_j \text{ que definen la matriz de influencia } C = [c_{ij}]$$

- c) Se plantea la expresión de la vibración $V'' = \{v''_1, v''_2, \dots, v''_n\}^T$ al introducir un conjunto de l desequilibrios m_j de corrección $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}^T$ y se intenta determinar M para que V'' sea nula o mínima. En forma matricial, la expresión de la vibración es $V'' = V + CM$

Observaciones:

- Se puede plantear el procedimiento sin eliminar los desequilibrios sucesivos que se van introduciendo en el rotor.
- El procedimiento se puede reiterar con el fin de mejorar la precisión, que queda limitada fundamentalmente por la precisión en la obtención de los datos experimentales y por la no-linealidad.

El equilibrado en un plano, uno de los más habituales, es frecuentemente utilizado cuando el rotor sólo tiene un soporte –par de revolución– y la distribución es suficientemente plana –rueda de un vehículo, ventilador, etc. En este caso,

$$\left. \begin{aligned} v' - v &= c u \\ v + c m &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow m = \frac{-v}{v' - v} u$$

El equilibrado en dos planos, también muy habitual, es utilizado usualmente en los rotores rígidos. Se dispone de dos planos de equilibrado, A y B, de donde poner y quitar masa, y de dos puntos de medida, 1 y 2, situados usualmente en los soportes. El proceso de equilibrado lleva a

$$\left. \begin{aligned} v'_1 - v_1 &= c_{1A} u_A \ ; \ v'_2 - v_2 = c_{2A} u_A \\ v''_1 - v_1 &= c_{1B} u_B \ ; \ v''_2 - v_2 = c_{2B} u_B \\ V + CM &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{Bmatrix} m_A \\ m_B \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{1A} & c_{1B} \\ c_{2A} & c_{2B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

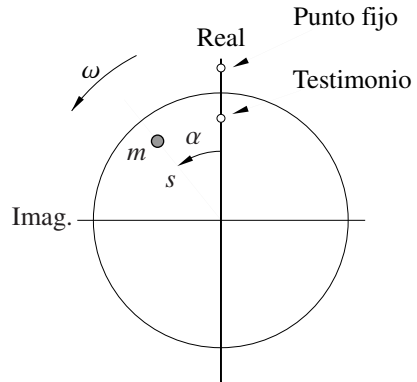


Fig. 6.10 Representación del desequilibrio introducido

Equilibrado de rotores flexibles. Un rotor rígido equilibrado genera un mínimo de vibraciones – teóricamente nulo– para todo el rango de velocidades de operación. Si después de un equilibrado en dos planos, un rotor genera pequeñas vibraciones en la velocidad de equilibrado, pero vibraciones elevadas a otras velocidades, no se puede considerar un rotor rígido y se ha de proceder con métodos específicos de equilibrado.

Equilibrado de un cuadrilátero articulado. En el cuadrilátero de la figura 6.11 se definen las coordenadas angulares que describen el movimiento de cada barra, φ_i , y las coordenadas polares, r_i y β_i , que sitúan los centros de inercia de cada barra G_i .

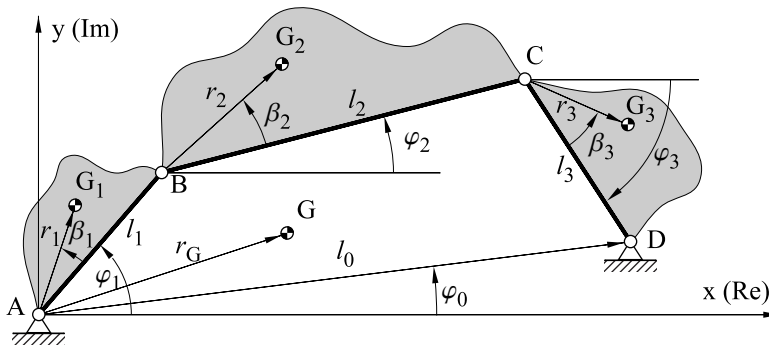


Fig. 6.11 Cuadrilátero articulado

En él se pueden establecer la posición del centro de inercia G del conjunto, y la ecuación vectorial de enlace:

$$m\mathbf{r}_G = m_1\overline{\mathbf{A}G_1} + m_2\overline{\mathbf{A}G_2} + m_3\overline{\mathbf{A}G_3} =$$

$$m_1r_1 + m_2[l_1 + r_2] + m_3[l_1 + l_2 + r_3], \text{ donde } m \text{ es la masa total.} \quad (6.18)$$

$$l_0 = l_1 + l_2 + l_3$$

Utilizando la representación compleja de los vectores en el plano del movimiento, de la segunda ecuación de 6.18 se puede aislar uno de los versores complejos, por ejemplo el asociado a φ_2

$$e^{j\varphi_2} = \frac{l_0 e^{j\varphi_0} - l_1 e^{j\varphi_1} - l_3 e^{j\varphi_3}}{l_2}$$

y sustituirlo en la primera. De esta manera se obtiene una ecuación que sólo depende de las variables φ_1 y φ_3 :

$$m\mathbf{r}_G = \left[m_1r_1 e^{j\beta_1} + m_2l_1 - \frac{m_2r_2l_1}{l_2} e^{j\beta_2} \right] e^{j\varphi_1} +$$

$$\left[-\frac{m_2r_2l_3}{l_2} e^{j\beta_2} - m_3l_3 + m_3r_3 e^{j\beta_3} \right] e^{j\varphi_3} +$$

$$\left[\frac{m_2r_2l_0}{l_2} e^{j\beta_2} + m_3l_0 \right] e^{j\varphi_0} \quad (6.19)$$

A partir de esta ecuación y teniendo en cuenta que el último término es constante, una posibilidad para fijar G es anular los coeficientes de los versores asociados a las rotaciones φ_1 y φ_3 . Estos coeficientes dependen de las masas y las longitudes de los miembros y de las posiciones de sus centros de inercia. Esta anulación permite obtener las cuatro ecuaciones escalares 6.20 (separando la parte real y la parte imaginaria) para determinar nueve parámetros.

$$\begin{aligned} m_1 r_1 \cos \beta_1 + m_2 l_1 - \frac{m_2 r_2 l_1}{l_2} \cos \beta_2 &= 0 \\ m_1 r_1 \sin \beta_1 - \frac{m_2 r_2 l_1}{l_2} \sin \beta_2 &= 0 \\ \frac{m_2 r_2 l_3}{l_2} \cos \beta_2 + m_3 l_3 - m_3 r_3 \cos \beta_3 &= 0 \\ \frac{m_2 r_2 l_3}{l_2} \sin \beta_2 - m_3 r_3 \sin \beta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Si se considera fijada la distribución de masa de la biela 2, los parámetros a determinar a partir de 6.20 son los desequilibrios de los miembros 1 y 3: $m_1 r_1$, β_1 , $m_2 r_2$ y β_2 .

En resumen, diseñando adecuadamente las manivelas y los balancines es posible equilibrar totalmente el cuadrilátero articulado por lo que se refiere al movimiento de su centro de inercia. Entonces, se anula la resultante de las fuerzas exteriores en los soportes causadas por la inercia del sistema, pero no cada una de ellas. Se pueden plantear procedimientos de equilibrado donde se impongan otras condiciones.

Este procedimiento es también aplicable al sistema pistón-biela-manivela, pero ahora, más que anular la resultante de las fuerzas en los soportes, el objetivo es minimizar la fuerza de enlace que hay en la articulación de la manivela con su soporte. Por eso se presenta a continuación el planteamiento clásico del equilibrado de este mecanismo.

Equilibrado del mecanismo pistón-biela-manivela. Para establecer procedimientos de equilibrado hay que determinar la aceleración del centro de inercia de cada miembro. En el caso de la biela, la determinación se acostumbra a simplificar substituyéndola por un sistema equivalente (Fig. 6.12) formado por dos masas puntuales, m_A y m_B , con la intención de que una se mueva junto con el pistón y que la otra lo haga con la manivela. Esta equivalencia es posible gracias a los dos planos de simetría (1-2, 1-3) que normalmente presenta una biela, de manera que G se encuentra en el plano diametral que contiene los centros A y B de las articulaciones. La articulación B con el pistón, usualmente más pequeña, se conoce como *cabeza de la biela* y la articulación A con la manivela se denomina *pie de biela*.

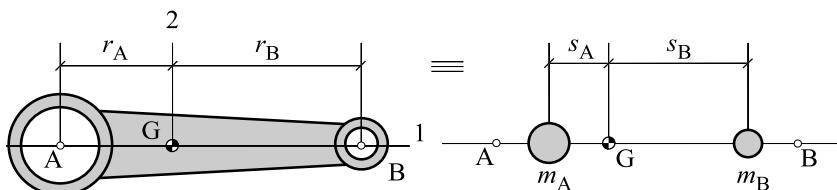


Fig. 6.12 Modelo equivalente de una biela.

Para que el sistema de las dos masas sea equivalente en la biela, se han de cumplir las relaciones siguientes:

$$m = m_A + m_B, \quad m_A s_A = m_B s_B, \quad I_G = m_A s_A^2 + m_B s_B^2 \quad (6.21)$$

Si se escoge $s_B = r_B$, es decir, se sitúa la masa m_B en la articulación con el pistón, de las expresiones 6.21 se pueden aislar los otros parámetros:

$$s_A = \frac{I_G}{m r_B}, \quad m_A = \frac{m^2 r_B^2}{I_G + m r_B^2}, \quad m_B = \frac{m I_G}{I_G + m r_B^2}$$

En una biela clásica, m_A se sitúa cerca de la articulación A. Esto permite aceptar en un estudio aproximado que la masa m_A se sitúe justo sobre la articulación A. En este caso, para determinar m_A y m_B se utilizan sólo las dos primeras igualdades de 6.21 y se acepta que el momento de inercia difiere del real.

$$m_A = \frac{m r_B}{r_A + r_B}, \quad m_B = \frac{m r_A}{r_A + r_B}$$

La masa m_A fija en la manivela junto con esta constituyen un sólido que se puede equilibrar haciendo coincidir, mediante un contrapeso, su centro de inercia con la articulación fija a O.

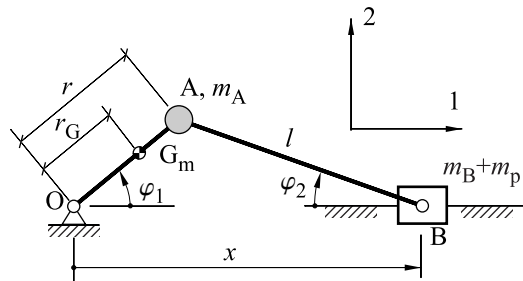


Fig. 6.13 Modelo equivalente del mecanismo pistón-biela-manivela

La aceleración del pistón se encuentra a partir de las ecuaciones de enlace

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2 \\ r \sin \varphi_1 &= l \sin \varphi_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow x = r \cos \varphi_1 + l \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi_1 \right)^{1/2}$$

La coordenada x es una función periódica del ángulo φ_1 , que se puede descomponer en serie de Fourier:

$$x = c_0 + c_1 \cos \varphi_1 + c_2 \cos 2\varphi_1 + c_3 \cos 3\varphi_1 + c_4 \cos 4\varphi_1 + \dots, \text{ con}$$

$$c_0 = l \left(1 - \frac{r^2}{4l^2} + \frac{3r^4}{64l^4} + \dots \right), \quad c_1 = r, \quad c_2 = l \left(\frac{r^2}{4l^2} - \frac{r^4}{16l^4} + \dots \right)$$

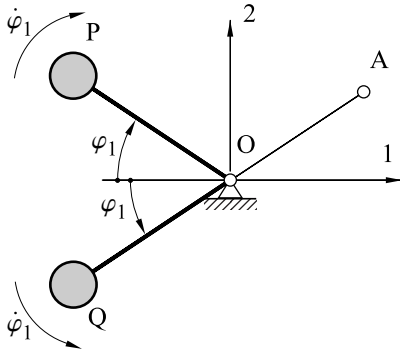
$$c_3 = 0, \quad c_4 = l \left(\frac{r^4}{64l^4} + \dots \right)$$

Ya que $r/l \ll 1$ en los mecanismos pistón-biela-manivela usuales, los coeficientes correspondientes a los armónicos de orden elevado decrecen rápidamente. Si se aproxima x hasta su segundo armónico y se considera $\dot{\varphi}_1 = \text{constante}$, la expresión para la aceleración del pistón y la masa m_B es

$$\ddot{x} = -\dot{\varphi}_1^2 (r \cos \varphi_1 + 4c_2 \cos 2\varphi_1)$$

y la fuerza procedente de la articulación O para conseguir esta aceleración es

$$F(B) = - \left\{ \begin{matrix} (m_B + m_p) \dot{\varphi}_1^2 (r \cos \varphi_1 + 4c_2 \cos 2\varphi_1) \\ 0 \end{matrix} \right\}$$



El término función de $\cos \varphi_1$ se llama *fuerza primaria* y el término función de $\cos 2 \varphi_1$, *fuerza secundaria*. La fuerza primaria podría eliminarse totalmente utilizando un sistema de dos masas iguales contrarrotantes equivalentes al desequilibrio $(m_B + m_p)r/2$, una que gire conjuntamente con la manivela y la otra en sentido contrario (Fig. 6.14), manteniendo la simetría respecto a la dirección 1, de manera que ejerzan sobre la articulación la fuerza

$$F_1 = \left\{ \begin{matrix} -(m_B + m_p) r \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

Fig. 6.14 Sistema de contrapesos contrarrotantes

Se podría proceder de la misma manera para contrarrestar la fuerza secundaria, pero en este caso las dos masas contrarrotantes han de ser equivalentes a un desequilibrio $(m_B + m_p)c_2/2$ y girar a una velocidad angular $2\dot{\varphi}_1$.

Estos procedimientos de equilibrado, utilizados en algunos motores, complican bastante el mecanismo, ya que requieren una transmisión de la manivela a las masas contrarrotantes – normalmente por medio de engranajes.

En la práctica, sólo se introduce un único desequilibrio en la manivela, el valor y la localización del cual se establecen según un criterio de optimización referido en la fuerza de enlace en el soporte de la manivela.

Caso de los motores multicilíndricos. Un motor multicilíndrico no es más que un conjunto de mecanismos pistón-biela-manivela colocados en paralelo, de manera que las manivelas constituyen un único miembro, el cigüeñal. Las características fundamentales del equilibrado de un motor multicilíndrico son:

- Los codos del cigüeñal, que actúan como las manivelas de cada pistón-biela-manivela, tienen entre ellos ángulos escogidos especialmente para minimizar la aceleración del centro de inercia.
- Los codos del cigüeñal se han de disponer a lo largo de este con la finalidad de que no se introduzcan momentos transversales que provocarían en los soportes reacciones no deseadas.

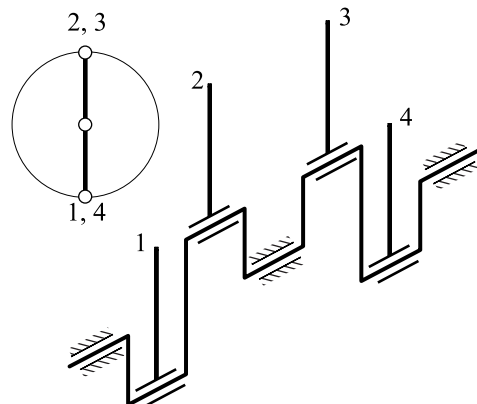
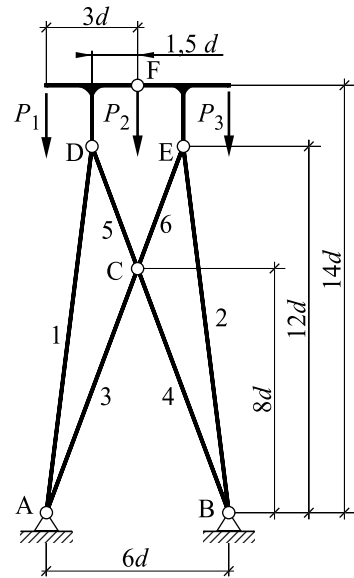


Fig. 6.15 Cigüeñal de un motor policilíndrico

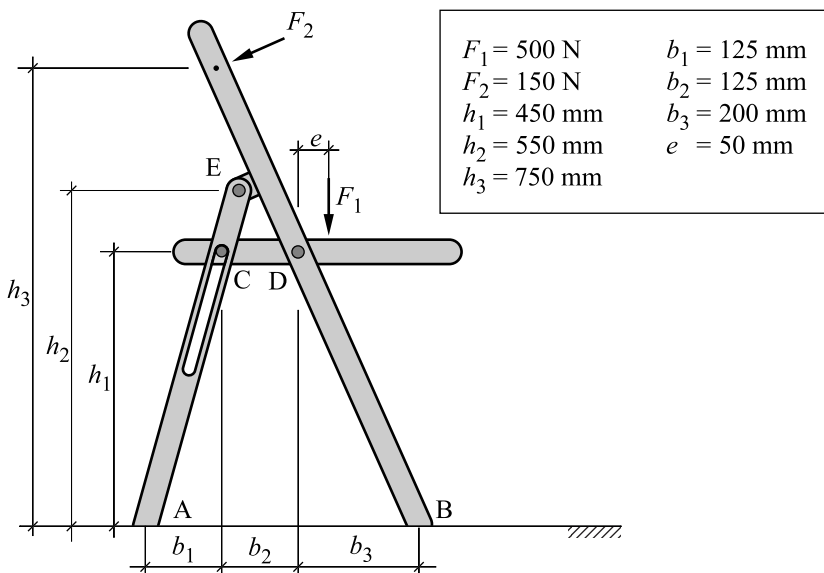
Problemas

P 6-1 En la estructura articulada de la figura –torre de alta tensión–, determinar las variaciones de las tensiones de las barras y de las fuerzas de enlace en las articulaciones A, B y F causadas por la aplicación de los sistemas de cargas indicados.

- a) $P_1 = P_2 = P_3 = 100 \text{ kN}$
- b) $P_1 = P_2 = 100 \text{ kN}$; $P_3 = 0$
- c) $P_1 = P_3 = 100 \text{ kN}$; $P_2 = 0$

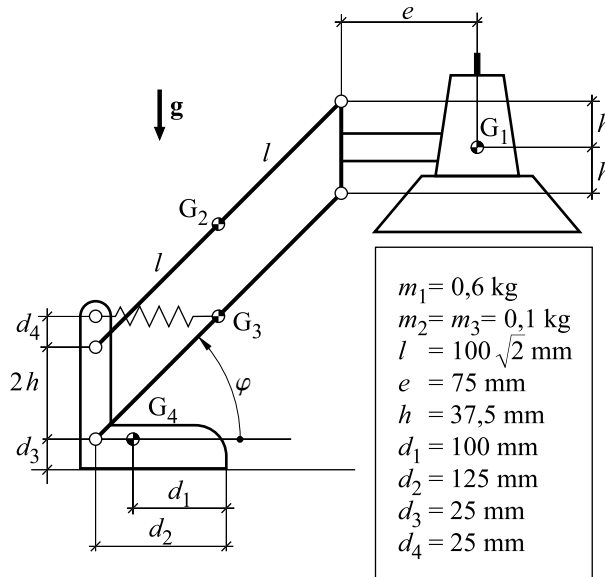


P 6-2 En la silla plegable de tijera de la figura, se considera que el roce en las articulaciones C, D y E es despreciable y que el contacto en las patas es puntual. Determinar el incremento de las fuerzas de enlace causado por el sistema de fuerzas exteriores indicado si la fuerza horizontal en las patas delanteras es nula.



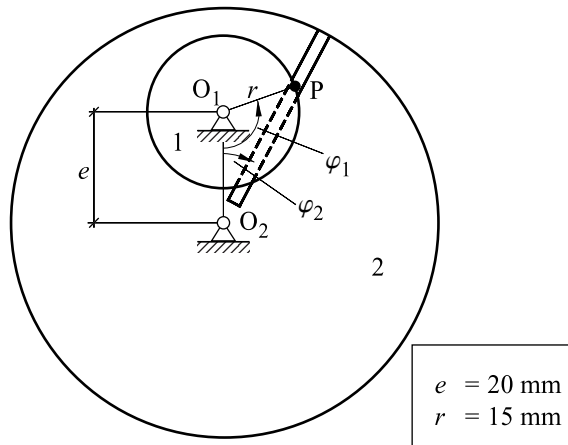
P 6-3 En la lámpara de la figura, el roce en las articulaciones se considera despreciable. Determinar:

- La fuerza del muelle para que las diferentes configuraciones asequibles sean de equilibrio.
- Las fuerzas en las articulaciones en las condiciones anteriores.
- La masa mínima del pie para que no vuelque.
- Las constantes de un muelle de comportamiento lineal adecuado.



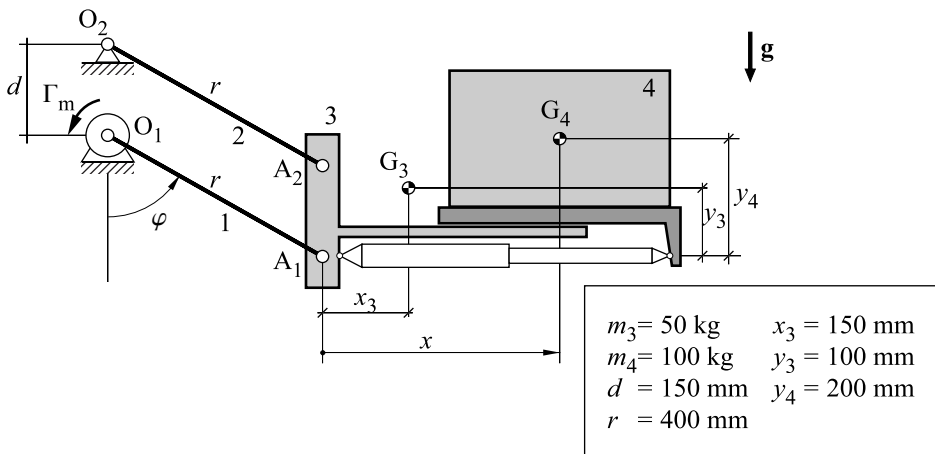
P 6-4 Las ruedas 1 y 2 del mecanismo de la figura pueden girar al rededor de sus centros fijos O_1 y O_2 y están unidas mediante un enlace guía-botón. Las ruedas están equilibradas y sus momentos de inercia respecto del eje de giro son $I_1=10^{-5} \text{ kg m}^2$ y $I_2=10^{-4} \text{ kg m}^2$. Si los roces son despreciables y la rueda 1 gira con velocidad angular $\dot{\varphi}_1 = 100\pi \text{ rad/s}$:

- Determinar el par motor que actúa sobre la rueda 1 y la fuerza en el par guía-botón. Utilizar las coordenadas generalizadas que se crean oportunas.
- Encontrar la aplicación numérica para $\varphi_1=0^\circ$ para $\varphi_1=180^\circ$ y para las configuraciones extremas de la rueda 2.



P 6-5 En el manipulador de la figura, las coordenadas x y φ están gobernadas por actuadores para poder realizar una maniobra con velocidades constantes $\dot{\varphi} = 0,1 \text{ rad/s}$ i $\dot{x} = 10 \text{ mm/s}$. La inercia de las barras 1 y 2, como también el roce en los enlaces, se consideran despreciables.

- Determinar las fuerzas en las articulaciones A_1 y A_2 .
- Hacer la aplicación numérica para la configuración $x = 400 \text{ mm}$ y $\varphi = 60^\circ$.
- Representar la evolución del par motor y la tensión de la barra 2 si la maniobra se realiza desde $x = 250 \text{ mm}$ y $\varphi = 15^\circ$ durante 10 s.

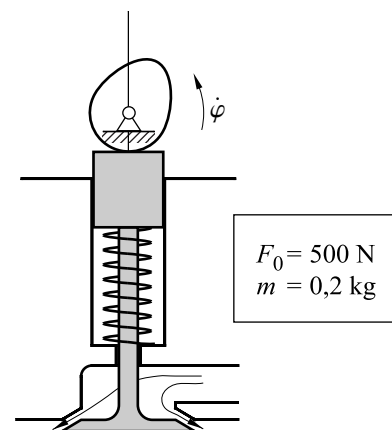


P 6-6 El mecanismo de leva de la figura ha de accionar la válvula de manera que ésta quede en reposo para $0 \leq \varphi \leq 240^\circ$ y alcance su máxima apertura de 5 mm para $\varphi = 300^\circ$.

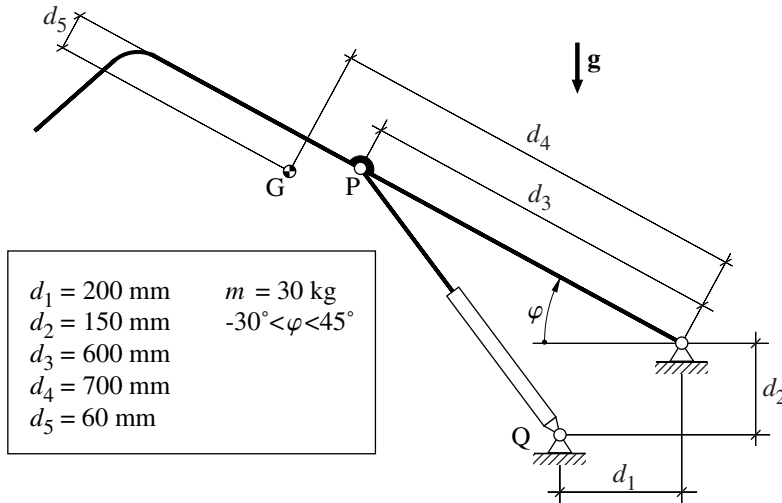
- Determinar una curva de Bézier adecuada para describir la ley de apertura de la válvula.

Si la compresión del muelle es tal que la fuerza que realiza se puede considerar constante,

- ¿cuál es la fuerza de contacto leva-palpador?
- ¿para qué velocidad de rotación de la leva se inicia la pérdida de contacto leva-palpador?

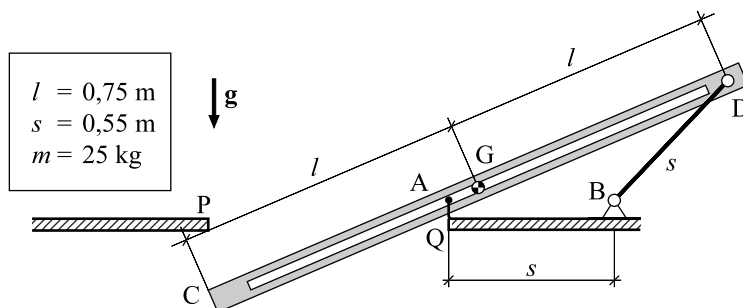


- P 6-7** El esquema de la figura representa una puerta posterior de un vehículo. El grupo muelle-amortiguador PQ facilita el accionamiento: el muelle actúa de contrapeso y el amortiguador ralentiza los movimientos rápidos. Determinar la fuerza que debería hacer el muelle para mantener la puerta en equilibrio en las diferentes configuraciones y sugerir las características de un muelle –tensión inicial y rigidez– adecuada.

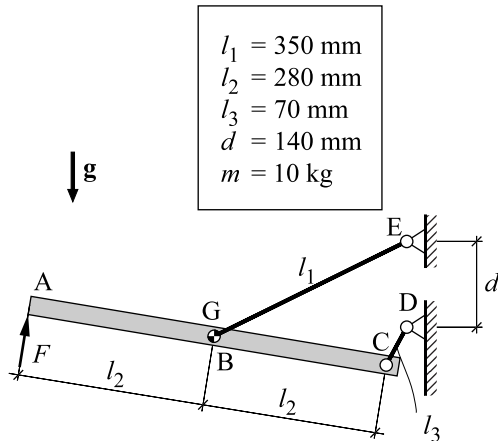


- P 6-8** La figura muestra el esquema de una escalera desplegable de desván accesible a través de la trampilla PQ. La escalera está unida al suelo del desván por medio de la barra articulada BD y del pasador A respecto al que puede deslizarse. Determinar:

- La inclinación de la escalera cuando está totalmente desplegada ($AD=100 \text{ mm}$).
- La fuerza vertical que hay que hacer para desplegar la escalera y las fuerzas de enlace que se originan –se desprecian las resistencias pasivas, la masa de la barra BD y las aceleraciones.



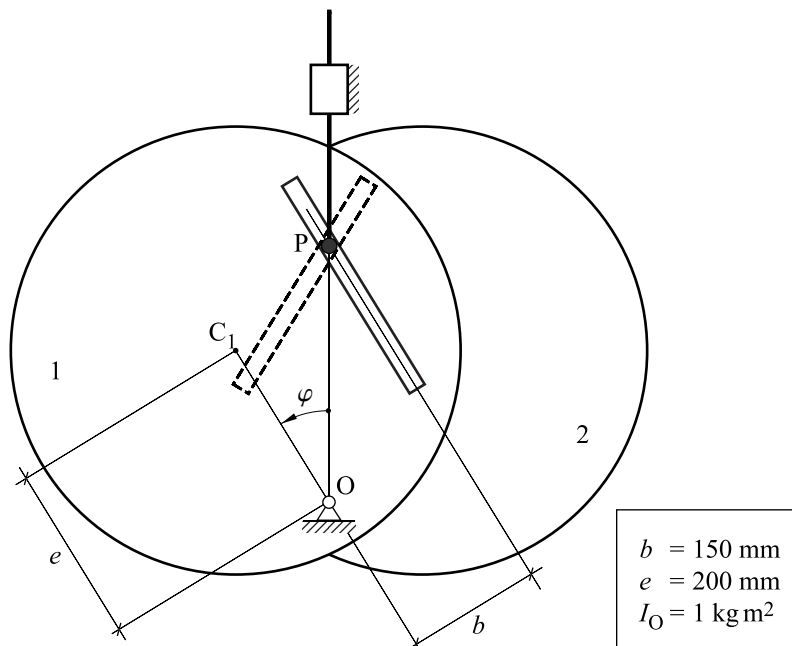
P 6-9 El mecanismo de la figura representa una mesa plegable que puede pasar de la posición vertical adosada a la pared a la posición horizontal. Para moverla, se le aplica una fuerza que le es perpendicular, situada en el centro de la arista A. Determinar esta fuerza y las fuerzas de enlace generadas con las hipótesis siguientes: inercia de las barras BE y CD, roces y aceleraciones despreciables. (Sugerencia: utilizar un conjunto adecuado de coordenadas generalizadas y establecer las ecuaciones de enlace entre ellas.)



Quando la mesa está horizontal, se deja de manera que la arista C se apoya en la pared (barra CD vertical). ¿Cuáles son ahora las fuerzas de enlace?

P 6-10 Los dos discos de la figura pueden girar libremente alrededor de la articulación fija O y son accionados por el pasador P que desliza dentro de las ranuras de cada disco. Determinar la fuerza que ha de actuar sobre el pasador para conseguir que el ángulo φ siga la ley temporal siguiente:

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \cos t$$



7 Resistencias pasivas. Mecanismos basados en el rozamiento

Las fuerzas que aparecen en el contacto entre sólidos –par cinemático– se pueden clasificar en fuerzas de enlace y en resistencias pasivas. Así como las fuerzas de enlace tienen siempre el valor necesario para impedir algún movimiento, las resistencias pasivas sólo se oponen sin llegar a impedirlo.

Tanto las fuerzas de enlace como las resistencias pasivas se caracterizan mediante un torsor: el torsor de las fuerzas de enlace y el torsor de las resistencias pasivas.

Las resistencias pasivas en los pares cinemáticos están asociadas a los tres movimientos relativos entre dos sólidos que mantienen contacto: el *deslizamiento*, la *rodadura* y el *pivotamiento*. El deslizamiento tiene lugar cuando los puntos de contacto tienen velocidad relativa entre ellos. El pivotamiento entre dos sólidos con contacto puntual es la rotación relativa alrededor del eje normal a las superficies en el punto de contacto. La rodadura entre dos sólidos en contacto puntual o lineal es la rotación relativa alrededor de un eje tangente a las superficies en el punto de contacto.

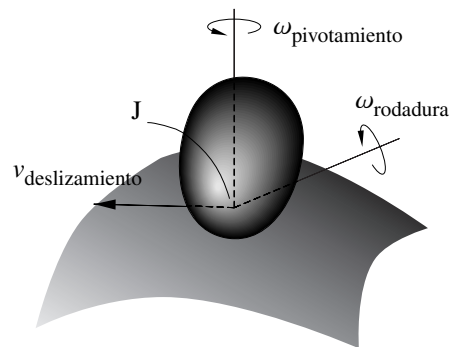


Fig. 7.1 Movimientos relativos entre dos sólidos

En las máquinas aparecen otras resistencias pasivas que se oponen al movimiento de sus miembros y que no provienen de los pares cinemáticos. Un caso usual son las resistencias pasivas asociadas al movimiento de sólidos dentro de fluidos, por ejemplo la resistencia al avance de los vehículos proveniente de la interacción con el aire.

Si el movimiento relativo asociado a una resistencia pasiva se anula, las fuerzas y/o los momentos correspondientes son sustituidos por las fuerzas y/o los momentos de enlace capaces de impedir este movimiento relativo. Es por eso que se dice que el torsor de las fuerzas de enlace y de las resistencias pasivas asociadas con un contacto entre sólidos son complementarios.

Las fuerzas de enlace son siempre una incógnita del problema dinámico, mientras que las resistencias pasivas han de ser de formulación conocida a priori –función del estado mecánico y/o explícitamente de las fuerzas de enlace – por medio de los modelos matemáticos. En este capítulo se estudian algunos de estos modelos.

Siempre que hay movimiento relativo entre sólidos aparecen resistencias pasivas no deseadas, ya que disipan energía mecánica de los sistemas. Un buen número de mecanismos, sin embargo, basan su funcionamiento en el rozamiento –origen principal de las resistencias pasivas–, como es el caso de los frenos y embragues, entre otros.

7.1 Resistencia al deslizamiento

Las fuerzas tangenciales entre superficies de sólidos directamente en contacto –superficies secas– provienen de fenómenos físicos complejos, como la rugosidad de las superficies, la adhesión, la formación de microsoldaduras y la creación de enlaces intermoleculares. Eso hace que se hayan de establecer modelos que formulen estas fuerzas de forma simplificada. El modelo más usual es el de rozamiento seco de Coulomb. Cuando entre las superficies sólidas hay lubricante, el modelo de rozamiento viscoso da una aproximación razonable de la fuerza tangencial.

Modelo de rozamiento seco. La experiencia pone de manifiesto que en un contacto puntual, lineal o superficial entre superficies secas pueden aparecer fuerzas tangenciales de valor limitado que tienden a impedir el deslizamiento. Si consiguen evitarlo son fuerzas de enlace, ya que valen lo que haga falta para garantizar la condición cinemática $v_{\text{desl}} = 0$. La resultante de estas fuerzas se denomina *fuerza de rozamiento*.

Si las fuerzas tangenciales no consiguen evitar el deslizamiento, dejan de ser fuerzas de enlace y pasan a ser resistencias pasivas. En este caso, la resultante se denomina *fuerza de fricción*. El paso de no-deslizamiento a deslizamiento –de fuerza de rozamiento a fuerza de fricción– corresponde a la condición límite del enlace establecido por el rozamiento.

El modelo de rozamiento seco establece que, en un punto de contacto y en ausencia de deslizamiento, el módulo de la fuerza de rozamiento F_{roz} está condicionada a $|F_{\text{roz}}| \leq \mu_e N$, siendo N la fuerza normal de repulsión en el punto de contacto y μ_e un coeficiente adimensional que se considera constante para una pareja de superficies en contacto y que se denomina coeficiente *de rozamiento estático*.

En presencia de deslizamiento, la fuerza de fricción se opone –misma dirección y sentido contrario– a la velocidad relativa de deslizamiento, y su módulo es $|F_{\text{fricción}}| = \mu_d N$, donde μ_d es un coeficiente adimensional que se denomina *coeficiente de rozamiento dinámico*. Se suele considerar constante y normalmente su valor es más pequeño que μ_e . En la tabla 7.1 se muestran algunos valores de rozamiento seco estático que se pueden encontrar en la bibliografía. La amplia dispersión de valores se debe a la gran diversidad de factores que influyen: rugosidad, tratamiento superficial, estado químico, limpieza, presión, etc. La introducción de una capa delgada de lubricante entre las superficies metálicas divide el coeficiente de rozamiento por dos o más.

Consideraciones que se han de hacer en el estudio de mecanismos con rozamiento seco. El hecho de que la fuerza tangencial pueda ser tanto de enlace –incógnita dinámica– como de fricción –de formulación conocida– presenta fuertes dificultades a la hora de resolver la dinámica de los mecanismos. Se desconoce, en principio, si hay deslizamiento o no y, por tanto, se desconoce la existencia o no de un enlace. Usualmente se plantea el estudio dinámico suponiendo que no hay deslizamiento y se repasa el valor de la fuerza de enlace. Si ésta en algún instante resulta más grande

que $\mu_e N$, se replantea el problema considerando que hay deslizamiento y entonces se atiende a la velocidad de deslizamiento. Si esta se anula, se ha de volver al planteamiento inicial –ausencia de deslizamiento.

Este procedimiento se complica enormemente en los mecanismos con más de un par cinemático con rozamiento y con más de un grado de libertad, ya que el número de modelos cinemáticos posibles puede ser elevado (Fig. 7.2).

Tabla 7.1 Coeficientes de rozamiento estáticos obtenidos de diferentes fuentes

Elementos en contacto	En seco	Capa delgada de lubricante
Madera – Madera	0,35 - 0,5	
Madera – Metal	0,2 - 0,6	
Cuero – Madera	0,25 - 0,5	
Cuero – Metal	0,3 - 0,6	
Caucho - Hormigón/Asfalto	0,6 - 0,9	
Caucho – Madera	0,5	
Acero - Acero	0,4 - 0,6	0,03 - 0,2
Acero – Bronce	0,35	0,18
Acero – Fundición	0,23	0,13
Fundición – Bronce	0,22	0,08
Fundición - Fundición	0,15	0,065
Acero – Grafito	0,1	
Acero – Teflon®	0,05	
Acero – Cloruro de polivinilo	0,5	
Acero – Nylon®	0,3	
Acero – Poliestireno	0,5	

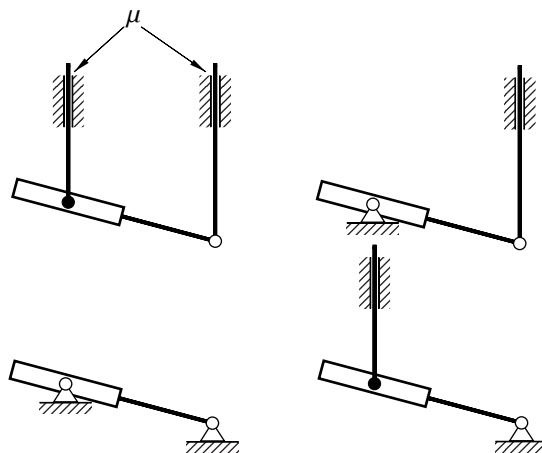


Fig. 7.2 Posibles modelos cinemáticos en un mecanismo de 2 grados de libertad con dos guías con rozamiento

Si las velocidades del mecanismo evolucionan de manera continua, es previsible que no se presenten simultáneamente condiciones límites para más de un enlace. No obstante, si se produce un cambio repentino a causa del inicio del movimiento o de una sacudida, se han de analizar todas las posibilidades –con la garantía de que sólo una puede ser buena si el problema está bien formulado, ya que el mecanismo real sólo puede evolucionar de una única manera.

Los enlaces introducidos por el rozamiento pueden ser redundantes y dar lugar a indeterminación. El caso más evidente es el de un mecanismo en reposo con más pares con rozamiento que grados de libertad.

El hecho de que usualmente $\mu_d < \mu_e$ y que μ_d puede ser función decreciente de la velocidad de deslizamiento para algún margen de valores, da lugar a fenómenos vibratorios a veces buscados, como es el caso de los instrumentos musicales de cuerda con arco, y otras veces no deseados, como es el caso del chirrido de las bisagras o del avance pulsante del carro de una máquina-herramienta.

Fenómeno de deriva. El hecho que la fuerza de fricción tenga sentido contrario a la velocidad de deslizamiento y su valor acotado, se puede aprovechar para facilitar el deslizamiento entre miembros de un mecanismo mediante el fenómeno de la deriva, que permite disminuir la fuerza de fricción en una dirección determinada.

Se considera un sólido que se mueve con $v_{desl.}$ respecto de una superficie, impulsado por elementos que hacen la fuerza necesaria. Sobre el sólido actúa una fuerza de fricción en la dirección de la velocidad de deslizamiento y de sentido contrario a ésta (Fig. 7.3.a), $F_{fric} = -\mu_d N (v_{desl.} / |v_{desl.}|)$. En la dirección transversal al movimiento no hay fuerza de fricción; por tanto, el bloque puede iniciar el movimiento transversal –derivar– en esta dirección aplicando una fuerza prácticamente nula. Una vez se ha iniciado el movimiento de deriva (Fig. 7.3.b), hay una componente de la fuerza de fricción que se opone, de valor

$$F_{transversal} = \mu_d N \frac{v_{deriva}}{\sqrt{v_{long.}^2 + v_{deriva}^2}}$$

pero que se puede hacer tan pequeña como se quiera aumentando la velocidad longitudinal de deslizamiento.

El fenómeno de la deriva explica, por ejemplo, la pérdida de control que se tiene en un vehículo si se hacen patinar las ruedas motrices. Si en una curva se hacen patinar las ruedas motrices, la fuerza de fricción llega a ser longitudinal y el vehículo no puede seguir la trayectoria curva porque no hay fuerza transversal.

El fenómeno de la deriva se puede aprovechar, por ejemplo, para desplazar un eje con apriete dentro de un alojamiento de manera suave y sin necesidad de aplicar una gran fuerza. Si se hace girar el eje se puede conseguir que la componente de la velocidad relativa entre la guía y el eje en la dirección de

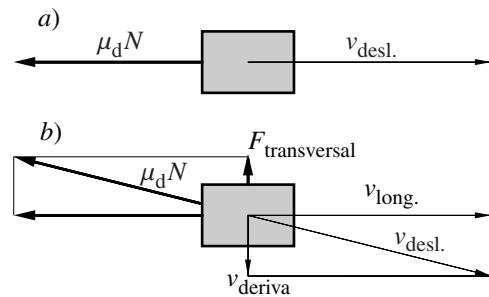


Fig. 7.3 Movimiento de deriva

avance sea pequeña, comparada con la velocidad de deslizamiento total y, por tanto, que la fuerza de fricción que se opone al avance también lo sea.

Una aplicación menos tecnológica que la anterior, pero no por eso menos práctica, es el aprovechamiento que se hace del fenómeno de la deriva para abrir una botella de cava.

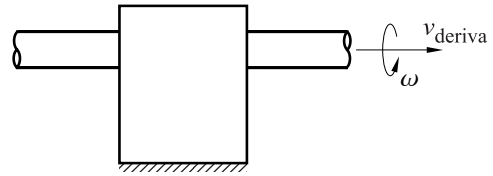


Fig. 7.4 Deriva en una guía

Modelo de rozamiento viscoso. Cuando entre los sólidos en contacto hay lubricante –capa fluida–, una aproximación razonable de la fuerza tangencial es la que proporciona el modelo de rozamiento viscoso con una fuerza proporcional a la velocidad de deslizamiento $F_{\text{fricción}} = -cv_{\text{desl.}}$, donde c es una constante.

Según este modelo, la fuerza tangencial es siempre de fricción y, por tanto, de formulación conocida. En ausencia de velocidad de deslizamiento, la fuerza tangencial es nula. En este modelo la fuerza no presenta discontinuidades como sucede en el caso del modelo de rozamiento seco.

En muchos casos, para conseguir un modelo realista haría falta considerar una formulación de rozamiento seco, pero siendo la fuerza tangencial función de la velocidad relativa (Fig. 7.5).

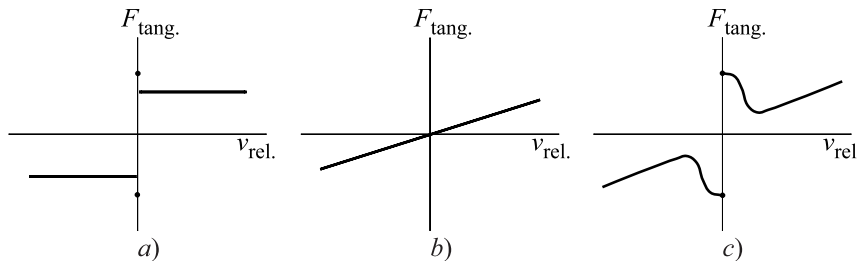


Fig. 7.5 Gráficos de la fuerza tangencial función de la velocidad relativa según: a) modelo de rozamiento seco, b) de rozamiento viscoso y c) de rozamiento seco con $F = f(v_{\text{rel}})$

7.2 Resistencia al pivotamiento y a la rodadura

La velocidad angular relativa entre dos sólidos, en contacto puntual, se puede descomponer en una componente normal a las superficies en el punto de contacto y una componente tangencial. La componente normal se denomina velocidad angular de pivotamiento y la tangencial velocidad angular de rodadura. Si el contacto es lineal a lo largo de una recta, la velocidad angular en la dirección de esta recta se denomina también velocidad angular de rodadura.

La experiencia pone de manifiesto que, en un contacto puntual entre sólidos, aparte de la resistencia al deslizamiento hay resistencia al pivotamiento y resistencia a la rodadura. Estos fenómenos no se pueden explicar considerando el contacto puntual, ya que en esta situación se tendría $M_e(J) = 0$. Para darles una explicación, se ha de considerar que en realidad el contacto se produce en una zona en el

entorno de un punto a causa de la deformación de los sólidos. En esta zona se tiene una distribución de fuerzas normales y, si hay rozamiento, también una distribución de fuerzas tangenciales.

Resistencia a la rodadura. La distribución de presiones en la zona de contacto puede dar lugar a momentos en el plano tangente respecto al punto teórico de contacto –par de rodadura– a causa de la no-simetría producida por fenómenos diversos, como la adhesión y la histéresis de los materiales, que tienden a hacer disminuir la presión, o hasta a hacerla negativa, donde el contacto tiende a desaparecer. Usualmente se admite una formulación similar a la del rozamiento seco:

- En ausencia de rodadura, hay un momento de enlace M_r suficiente para garantizarlo sometido a la condición $|M_r| \leq M_{re}$ (M_{re} es el momento de rodadura estático).
- En presencia de rodadura, hay un momento M_r tal que su proyección sobre ω_{rod} –velocidad angular de rodadura– es opuesta a esta velocidad y de módulo $|M_r| = M_{rd}$ (M_{rd} es el momento de rodadura dinámico). En la mayoría de contactos con rodadura con movimiento plano, las curvaturas de las superficies hacen que el momento de rodadura M_r tenga la dirección perpendicular al plano del movimiento –dirección de la ω .

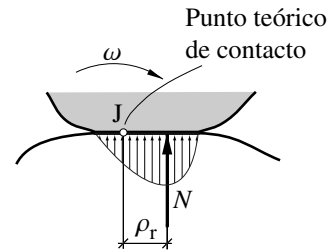


Fig. 7.6 Distribución de presiones en el punto de contacto

Estos momentos se suelen tomar como función de la resultante de las fuerzas normales N de contacto $M_{re} = \rho_{re} N$, $M_{rd} = \rho_{rd} N$, donde ρ_{re} i ρ_{rd} son coeficientes que dependen del material y de las curvaturas de las superficies. Estos coeficientes tienen dimensiones de longitud y tienen el significado de distancia entre la recta de acción de la fuerza normal –recta respecto de la cual el momento resultante de las fuerzas normales es nulo– y el punto teórico de contacto (Fig. 7.6).

Resistencia al pivotamiento. La distribución de presiones en la zona de contacto –que aparece a causa de la deformación de los sólidos– da lugar, en presencia de rozamiento, a una distribución de fuerzas tangenciales que hacen un momento respecto al punto teórico de contacto en la dirección normal a la superficie de contacto –par de pivotamiento. Para este momento se acepta una formulación similar al caso del rodadura de la forma:

- En ausencia de pivotamiento, hay un momento de enlace M_p suficiente para garantizarlo, sometido a la condición $|M_p| \leq M_{pe}$ (M_{pe} es el momento de pivotamiento estático).
- En presencia de pivotamiento, hay un momento M_p de sentido opuesto a ω_{piv} –velocidad angular de pivotamiento– y de módulo $|M_p| = M_{pd}$ (M_{pd} es el momento de pivotamiento dinámico).

Estos momentos se suelen tomar como función de la resultante de las fuerzas normales N de contacto $M_{pe} = \rho_{pe} N$, $M_{pd} = \rho_{pd} N$, donde ρ_{pe} y ρ_{pd} son longitudes que dependen del coeficiente de rozamiento, de la forma de la zona de contacto y de la distribución de presiones en su interior.

7.3 Acuñaamiento. Cono de rozamiento

Acuñaamiento. Las fuerzas de enlace provenientes del rozamiento seco están limitadas a ser inferiores a $\mu_e N$. Así, en general, un enlace originado por las fuerzas de rozamiento se rompe por encima de ciertos valores de las fuerzas exteriores que actúan sobre los sólidos enlazados. Se puede dar la situación, sin embargo, de que las fuerzas exteriores hagan crecer la fuerza normal N de manera que el

límite $\mu_e N$ sea siempre superior al necesario para mantener el enlace. En este caso, se dice que hay acuñaamiento y el enlace no se romperá sea cual sea el valor de las fuerzas exteriores. El acuñaamiento es el fenómeno que aparece en sargentos, engranajes de vi-sinfín, algunos mecanismos de seguridad de ascensores, escaleras manuales, mordazas para cuerdas, etc.

Cono de rozamiento. En un contacto puntual con rozamiento, la fuerza de enlace que puede existir tiene una dirección contenida dentro de un cono de semiapertura $\varphi = \arctan \mu$, denominado *cono de rozamiento*. Si existe una fuerza de enlace normal N , puede existir una fuerza de enlace tangencial de valor máximo μN . En el planteamiento de distribuciones de fuerzas en un plano, este cono pasa a ser el triángulo de rozamiento (Fig. 7.7). El cono de rozamiento es útil para estudiar condiciones límites y acuñaamiento en los enlaces. En un sólido con un contacto puntual con rozamiento en un punto J, si las fuerzas exteriores difieren de la de contacto en este punto, son equivalentes a una fuerza resultante única que pasa por J contenida dentro del cono de rozamiento, ésta siempre podrá ser equilibrada por la fuerza de contacto en J y habrá acuñaamiento. La rotura del enlace se producirá cuando la dirección de esta resultante quede fuera del cono de rozamiento.

Se producirá acuñaamiento y el sólido no deslizará

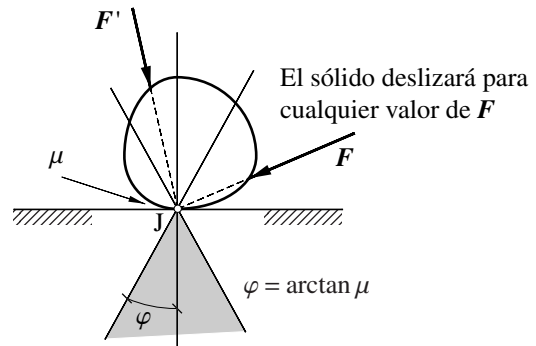


Fig. 7.7 Cono de rozamiento en un contacto puntual

El umbral de deslizamiento, o deslizamiento inminente, es el estado en el cual las fuerzas de rozamiento llegan a su valor máximo sin, no obstante, iniciarse el deslizamiento. De manera similar se pueden definir el umbral de pivotamiento y el de rodadura.

Ejemplo 7.1 Estudiar para que situaciones de G –centro de inercia de la escalera más la persona– la escalera recostada en los puntos A y B de la figura no desliza (Fig. 7.8).

Las condiciones necesarias y suficientes para que la escalera se mantenga en reposo –dejando de lado, de momento, la unilateralidad de los enlaces– son que se cumpla $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ y $\Sigma \mathbf{M}_{\text{ext}}(\text{O}) = 0$ para algún punto O. Al actuar sobre la escalera sólo 3 fuerzas exteriores –las dos de contacto y el peso–, la segunda condición implica que las líneas de acción de las tres fuerzas concurren en un punto. Si se dibujan los conos de rozamiento en los dos puntos de contacto, se delimita la zona donde se pueden cortar las dos fuerzas de contacto si no hay deslizamiento (zona gris de la figura 7.8). Por tanto, para que se corten las tres fuerzas en un mismo punto, hace falta que el centro de inercia G esté situado sobre la vertical de esta zona. En esta situación, la primera condición, $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ se verifica siempre ya que se dispone de dos fuerzas de enlace para equilibrar el peso.

Para evitar que el enlace en B deje de actuar –enlace unilateral– hace falta, además, que el centro de inercia quede a la izquierda de la vertical del punto A, como se puede ver tomando momentos respecto de este punto.

Este sistema, cuando se mantiene en reposo, es redundante y, por tanto, hay indeterminación en las fuerzas de enlace. Para la solución indicada en la figura 7.8, cualquier pareja de fuerzas de contacto en

A y B que se corten en un punto del segmento PQ mantendrá el sistema en reposo. Es fácil comprobar que si el rozamiento en B es despreciable, la solución es conceptualmente la misma –el segmento PQ queda reducido a un punto y la indeterminación se elimina. En el caso de que sea en A donde el rozamiento es despreciable, se necesita un cono de rozamiento en B de semiapertura superior a β para que la fuerza de enlace en B pueda ser vertical –como lo son el peso y la fuerza en A– y así poder verificar la condición para que la escalera se mantenga en reposo.

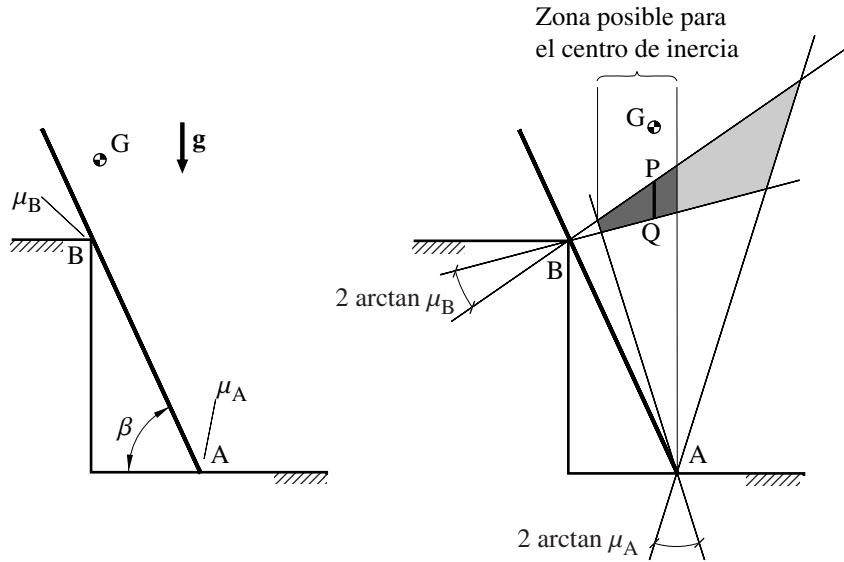


Fig. 7.8 Escalera de mano recostada. Intersección de los conos de rozamiento de los enlaces en A y B

7.4 Contacto multipuntual

El contacto entre miembros puede extenderse a una línea o superficie –contactos multipuntuales lineales o superficiales– y, en este caso, con la hipótesis de sólido rígido, la distribución de presiones es indeterminada, ya que sólo se puede conocer el torsor de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido. En muchas ocasiones, sin embargo, se ha de conocer esta distribución de presiones tanto para determinar los esfuerzos de los elementos como para evaluar la distribución de fuerzas tangenciales de rozamiento, y en particular, de sus momentos. Para determinar estas distribuciones de presiones en el ámbito del sólido rígido, se pueden plantear diferentes hipótesis: la de *existencia de juego en el enlace*, la de *apriete entre las superficies* y, para superficies con fricción intensa, la de la *superficie rodada*.

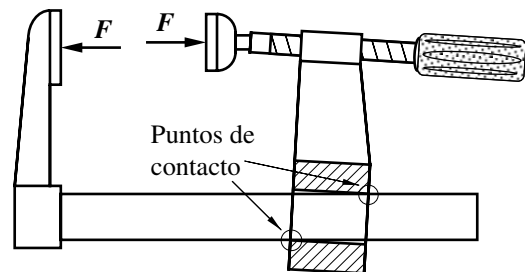


Fig. 7.9 Puntos de contacto en la guía de un sargento

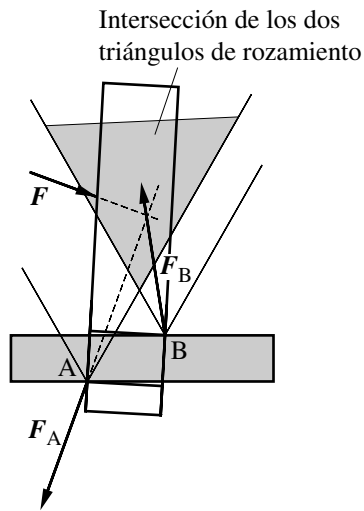


Fig. 7.10 Triángulos de rozamiento en una guía

Si las fuerzas exteriores que actúan sobre la corredera, diferentes de las de contacto con la guía, son equivalentes a la fuerza F (Fig. 7.10), el contacto con la guía se establece en los puntos A y B y el deslizamiento está condicionado a la no-existencia de acuñaamiento. Los conos de rozamiento en los puntos A y B delimitan la zona donde se pueden cortar las fuerzas de contacto cuando no hay deslizamiento. Si la recta de acción de F corta esta zona, existen fuerzas de enlace F_A y F_B que se cortan con F y, por tanto, verifican $\Sigma M_{\text{ext}} = 0$. Por otra parte, F_A y F_B son de módulo arbitrario y pueden garantizar que $\Sigma F_{\text{ext}} = 0$. En resumen, si la fuerza F corta la zona mencionada –intersección de los dos triángulos de rozamiento– siempre existen dos fuerzas de enlace que garanticen las condiciones de equilibrio, se produce acuñaamiento y la corredera no desliza respecto a la guía. Para evitar eso se han de diseñar correderas largas accionadas para fuerzas poco alejadas del eje.

Rozamiento en cojinetes. En el contacto entre un cojinete y un bulón de radio r , si se plantea la hipótesis de que la resistencia a la rodadura entre los dos sólidos es nula y que las fuerzas exteriores al bulón, diferentes de la de contacto, son equivalentes a una fuerza F , entonces el equilibrio $-\Sigma F_{\text{ext}} = 0$ y $\Sigma M_{\text{ext}} = 0$ – requiere que el punto de contacto J esté sobre la recta de acción de F (Fig. 7.11). En esta situación, habrá deslizamiento entre el bulón y el cojinete siempre que la resultante F esté fuera del triángulo de rozamiento que se puede definir en el contacto en J. La envolvente de todos los triángulos de rozamiento que se pueden definir sobre el cojinete al ir variando el punto J constituye el denominado *círculo de rozamiento*. Las fuerzas aplicadas sobre el bulón que sean equivalentes a una resultante que corte el círculo de rozamiento lo acuñaarán, mientras que aquellas que no lo corten provocarán el deslizamiento del bulón respecto del cojinete. El radio e de este círculo es

$$e = r \sin \alpha = r \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{r\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

La existencia del círculo de rozamiento prácticamente imposibilita el equilibrado estático para procedimientos estáticos de un rotor horizontal montado en cojinetes de fricción. Éste puede quedar en reposo en cualquier posición angular siempre que la excentricidad de su centro de inercia G no supere el radio del círculo de rozamiento –la fuerza exterior, en este caso, es el peso. Un ejemplo numérico justifica la afirmación inicial: un eje de 20 mm de diámetro y un coeficiente de rozamiento de 0,2 conducen a un radio del círculo de rozamiento de 1,96 mm, valor inadmisibles como excentricidad de G en un equilibrado.

Hipótesis de juego. Si entre las superficies en contacto no hay precompresión, se supone un juego y que las fuerzas de enlace normales se concentran en los puntos que las otras fuerzas exteriores pondrían en contacto, como es el caso de la guía de un sargento que se ilustra en la figura 7.9.

Rozamiento en guías. A menudo se presentan pares guía-corredera, en que la mínima o nula precompresión, en principio a fin de tener un deslizamiento suave, justifica la hipótesis de juego para su estudio. Este es el caso de carros sobre guías, cajones, sistemas de fijación, etc.

Si las fuerzas exteriores que actúan sobre la corredera, diferentes de las de contacto con la guía, son equivalentes a la fuerza F (Fig. 7.10), el contacto con la guía se establece en los puntos A y B y el deslizamiento está condicionado a la no-existencia de acuñaamiento. Los conos de rozamiento en los puntos A y B delimitan la zona donde se pueden cortar las fuerzas de contacto cuando no hay deslizamiento. Si la recta de acción de F corta esta zona, existen fuerzas de enlace F_A y F_B que se cortan con F y, por tanto, verifican $\Sigma M_{\text{ext}} = 0$. Por otra parte, F_A y F_B son de módulo arbitrario y pueden garantizar que $\Sigma F_{\text{ext}} = 0$. En resumen, si la fuerza F corta la zona mencionada –intersección de los dos triángulos de rozamiento– siempre existen dos fuerzas de enlace que garanticen las condiciones de equilibrio, se produce acuñaamiento y la corredera no desliza respecto a la guía. Para evitar eso se han de diseñar correderas largas accionadas para fuerzas poco alejadas del eje.

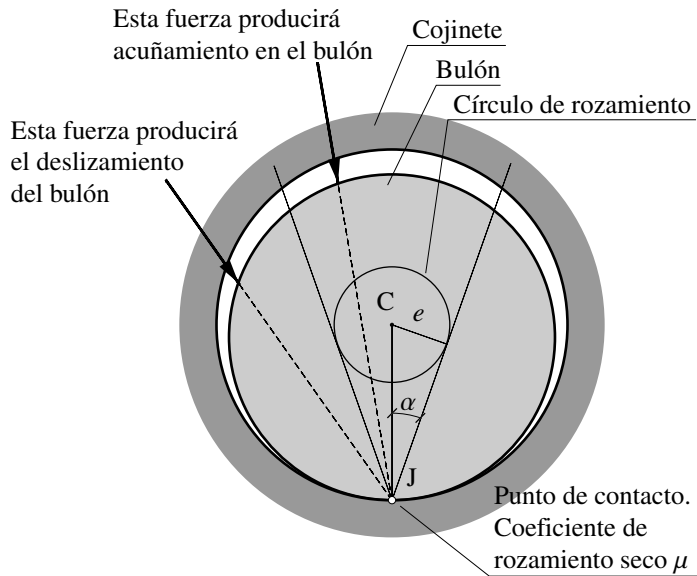


Fig. 7.11 Círculo de rozamiento

Hipótesis de apriete. Si entre las superficies en contacto hay un cierto apriete o precompresión, o la hipótesis de juego no es aceptable, se puede suponer una distribución de presiones simple que describa el efecto de la elasticidad normal de las superficies y la unilateralidad, si se presenta. Este puede ser el caso de un bloque que se apoya sobre un plano (Fig. 7.12), en el cual se supone una distribución de presión lineal.

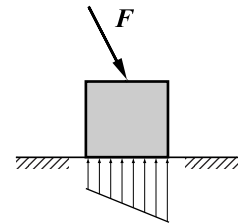


Fig. 7.12 Distribución de presiones en un par plano

Hipótesis de la superficie rodada. Si las superficies en contacto están destinadas a una fricción intensa, como es el caso de los frenos, embragues y cojinetes, para determinar la distribución de presiones se puede utilizar la teoría de las superficies rodadas. En ella se supone que las superficies se desgastan en la dirección normal a una velocidad δ , proporcional a la velocidad de deslizamiento v_{desl} en el punto y a la fuerza tangencial por unidad de superficie μp causada por el rozamiento (Eq. 7.1). Con esta hipótesis, el desgaste de las superficies es proporcional a la energía disipada por el rozamiento:

$$\delta = k (\mu p) v_{\text{desl}} \quad (7.1)$$

En el caso de que los sólidos a los que pertenecen las dos superficies en contacto no tengan otros enlaces entre ellas, se puede considerar la velocidad de desgaste uniforme. En el caso que haya otros enlaces entre los dos sólidos, la velocidad de desgaste está condicionada para estos enlaces y coincide con la componente normal a las superficies de la velocidad relativa de los puntos de contacto –prescindiendo evidentemente de la condición de impenetrabilidad de los cuerpos.

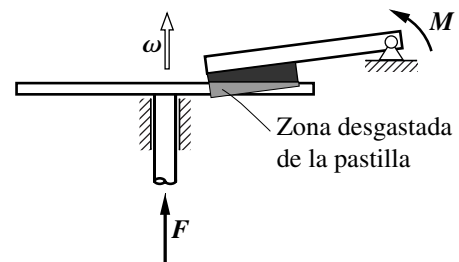


Fig. 7.13 Distribución del desgaste condicionado por los enlaces

Las superficies en contacto con fricción intensa aparecen en frenos, embragues y cojinetes de fricción y pueden ser:

- Cilíndricas en embragues centrífugos, frenos de tambor y cojinetes radiales.
- Planas en frenos de disco, embragues de disco y cojinetes axiales.
- Cónicas en otros embragues y frenos.

Contacto entre dos conos. Se consideran dos conos con velocidad angular relativa no nula y que mantienen contacto (Fig. 7.14). La hipótesis de la superficie rodada permite expresar la velocidad de desgaste perpendicular a la superficie de contacto como $\delta = k(\mu p) \cdot (\omega_{\text{rel}} \rho)$. Si los dos conos tienen movimiento relativo de translación, se puede considerar que esta velocidad es δ_0 constante.

Para analizar el par de las fuerzas de rozamiento entre los dos conos, se ha de determinar la distribución de presiones:

$$p = \frac{\delta_0}{k \mu (\omega_{\text{rel}} \rho)} = \frac{k'}{\rho}$$

La integral, sobre toda la superficie de contacto, de esta presión proyectada sobre la dirección axial es la fuerza axial de contacto N entre los conos (Fig. 7.14):

$$N = \int_{r_1}^{r_2} p \sin \alpha ds = \int_{r_1}^{r_2} \frac{k'}{\rho} \sin \alpha \left(2\pi \rho \frac{d\rho}{\sin \alpha} \right) = k' 2\pi (r_2 - r_1) \Rightarrow k' = \frac{N}{2\pi(r_2 - r_1)}$$

La distribución de presiones normales obtenida permite calcular el momento de las fuerzas de rozamiento respecto al eje de giro.

$$M = \int_{r_1}^{r_2} \mu p \rho \left(2\pi \rho \frac{d\rho}{\sin \alpha} \right) = \int_{r_1}^{r_2} \mu \frac{k'}{\rho} \rho \left(2\pi \rho \frac{d\rho}{\sin \alpha} \right) = \frac{\mu N}{\sin \alpha} \frac{(r_2 + r_1)}{2} \quad (7.2)$$

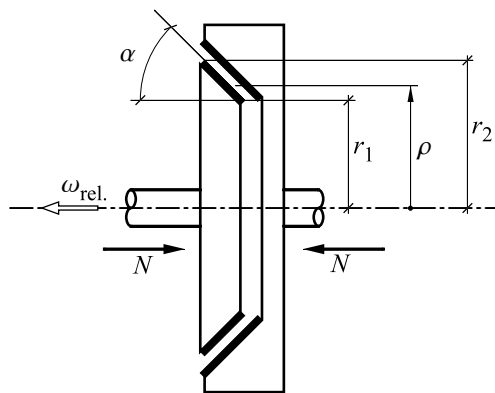


Fig. 7.14 Rozamiento entre dos conos coaxiales

En esta expresión se puede observar que el momento obtenido es equivalente al que se tendría si el rozamiento estuviese concentrado en el radio medio.

Si las superficies no estuviesen rodadas y por algún motivo la presión entre las dos superficies fuese constante, se obtendría

$$N = \int_{r_1}^{r_2} p_0 \sin \alpha \left(2\pi \rho \frac{d\rho}{\sin \alpha} \right) \Rightarrow p_0 = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

y el momento axial de las fuerzas de rozamiento tendría la expresión

$$M = \int_{r_1}^{r_2} \mu p_0 \rho \left(2\pi \rho \frac{d\rho}{\sin \alpha} \right) = \frac{2}{3} \mu N \frac{1}{\sin \alpha} \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{(r_2^2 - r_1^2)} \quad (7.3)$$

El caso de dos discos en contacto frontal corresponde al caso visto haciendo $\alpha = \pi/2$.

Contacto lateral entre una zapata y un tambor.

En esta situación, la velocidad de desgaste de la zapata está condicionada por la articulación A (Fig. 7.15). La velocidad relativa normal a las superficies en un punto P de contacto es la componente en esta dirección de la velocidad absoluta del punto P de la zapata –la velocidad del punto P del tambor es perpendicular a la normal– y, por tanto, es proporcional a la distancia entre A y P en la dirección perpendicular a la normal, $d = s \sin \alpha$.

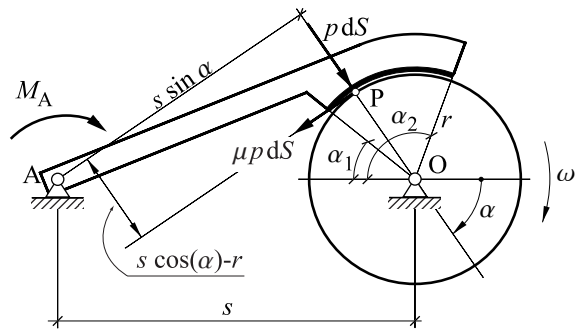


Fig. 7.15 Rozamiento entre una zapata y un tambor

Por tanto, la velocidad de desgaste en los diferentes puntos de contacto se puede expresar como una función del ángulo α como $\delta = k' s \sin \alpha$, y haciendo uso de la expresión 7.1 la presión es

$$p = \frac{k' s \sin \alpha}{k \mu(\omega r)} = k'' \sin \alpha$$

El momento resultante respecto a A de estas presiones y de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre el tambor ha de coincidir con el momento resultante, M_A , respecto de este mismo punto de las fuerzas exteriores que actúan sobre la zapata.

$$\begin{aligned} M_A &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p(s \sin \alpha + \mu(s \cos \alpha - r))(r b d\alpha) = \\ &= k'' \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha (s \sin \alpha + \mu(s \cos \alpha - r))(r b d\alpha) \right] \end{aligned} \quad (7.4)$$

donde b es el ancho de la zapata.

Si el tambor gira en sentido contrario, el signo del término asociado al rozamiento $\mu(s \cos \alpha - r)$ es negativo.

A partir de esta expresión (7.4) se puede encontrar k'' función de M_A y posteriormente calcular el momento de frenado M_O –momento respecto a O de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre el tambor– que tiene por expresión:

$$M_O = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu p r (r b d\alpha) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu k'' \sin \alpha r^2 b d\alpha = \mu k'' r^2 b (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (7.5)$$

En estos frenos se puede presentar acuñaamiento en situaciones como, por ejemplo, la de la figura 7.15 si el tambor gira en sentido contrario y el rozamiento es suficiente. Con el planteamiento realizado, el acuñaamiento se produce si la integral de 7.4 no es positiva.

7.5 Mecanismos basados en el rozamiento

La fricción entre dos piezas es en general no deseada, ya que produce desgaste, calentamiento de las piezas y pérdida de energía. Por otra parte, las fuerzas que intervienen en el fenómeno de rozamiento seco tienen características –limitación de su valor máximo, dependencia de este valor máximo de la fuerza normal entre las superficies en contacto así como la posibilidad de acuñaamiento– que las hacen útiles en muchos mecanismos como son, por ejemplo, transmisiones por correa, transmisiones por ruedas de fricción, embragues, frenos, mecanismos de escape, sistemas de seguridad, fusibles mecánicos, etc.

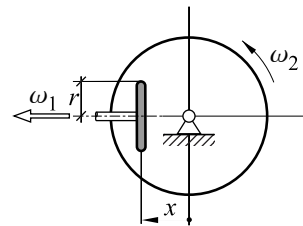


Fig. 7.16 Transmisión por ruedas de fricción con la relación de transmisión regulable

Ruedas de fricción. Los mecanismos de transmisión basados en el rozamiento –transmisión por correa y por ruedas de fricción– presentan características que en ocasiones pueden ser ventajosas frente a transmisiones por cadena o por ruedas dentadas, como la limitación del par transmisible –fusible mecánico–, la facilidad y simplicidad de construcción y montaje –reducción de costos– y la posibilidad de conseguir relaciones de transmisión variables continuas que no se podrían conseguir de otra manera (Fig. 7.16 y Fig. 7.17). Pero son sistemas de los cuales no se puede esperar una relación de transmisión precisa ni constante –a causa del deslizamiento– y que presentan siempre un calentamiento y un desgaste inherentes al propio funcionamiento, ya que el contacto se extiende a un conjunto de puntos en parte con movimiento relativo.

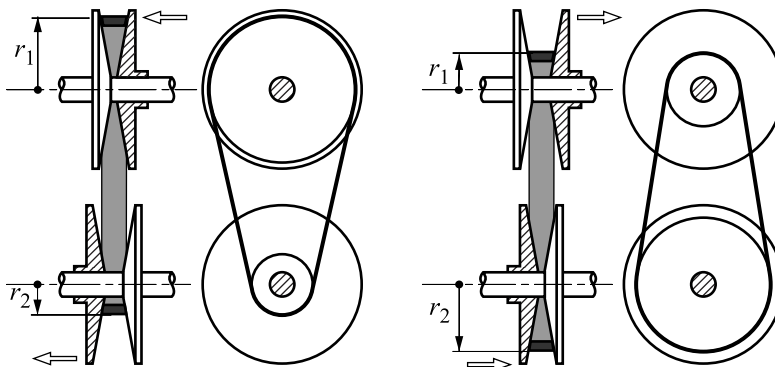


Fig. 7.17 Sistema de transmisión por correa con relación de transmisión τ regulable continuamente

Embragues. Los embragues son elementos que permiten unir –embragar– o separar –desembragar– partes de una cadena cinemática para que haya transmisión o no de movimiento y de fuerzas. En general, los embragues unen dos ejes giratorios (Fig. 7.18). Hay una distinción muy clara entre los embragues que actúan por *cierre de forma* y los que actúan por *fricción*.

Los embragues que actúan por cierre de forma están constituidos por dos elementos, cada uno de ellos fijo a uno de los ejes, con formas complejas que encajan entre ellos: dientes, estriados, pasadores, etc. Para que la unión se pueda realizar, al menos sin sacudidas, es necesario que la velocidad angular relativa entre los dos ejes que se han de embragar sea nula.

En los embragues que actúan por fricción, la unión entre los dos elementos se hace por medio de las fuerzas de rozamiento en las superficies de contacto. Las posibles disposiciones de estas superficies de contacto dan lugar a los diferentes tipos de embragues: de disco, cónicos o centrífugos (Fig. 7.18).

El sistema de accionamiento del embrague –hidráulico, mecánico, magnético, ...– es el encargado de hacer aumentar progresivamente el valor de la presión entre las superficies en contacto. De esta manera, en el proceso de embrague, el par transmitido aumenta de manera continua a partir de un valor nulo. Si el par transmitido por el embrague acelera suficientemente el segundo eje hasta anular la velocidad angular relativa, la unión se mantendrá, no ya por un par de fricción, sino por un par de enlace. Se pueden distinguir, por tanto, dos funciones realizadas por el embrague en el proceso de embrague:

- Acelerar un eje de manera suave hasta sincronizar las velocidades angulares. En este proceso hay fricción, calentamiento y desgaste entre las superficies.
- Mantener el enlace mediante fuerzas de rozamiento. Mientras el enlace se mantiene –velocidad relativa nula– no hay desgaste de las superficies.

En ocasiones los embragues de fricción se utilizan como paso previo a la actuación de un embrague por cierre de forma para igualar las velocidades de los dos ejes. Este es el caso de los sincronizadores de una caja de cambios de automóvil.

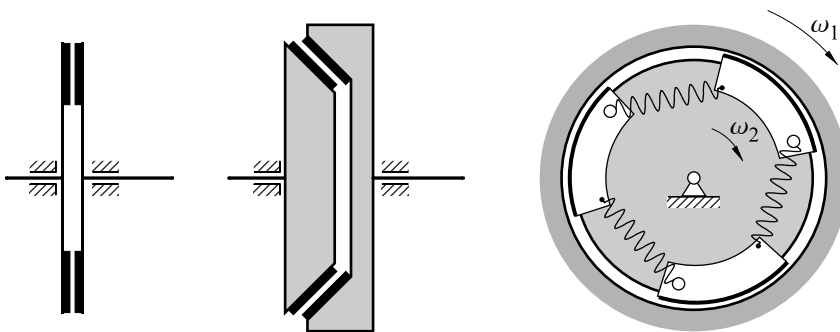


Fig. 7.18 Tipos de embragues más usuales: de disco, cónico y centrífugo

Frenos. Los frenos son elementos que sirven para ralentizar, parar y mantener en reposo los elementos de una máquina. Si el freno actúa entre dos elementos con movimiento relativo de rotación, puede ser considerado como un embrague con uno de los elementos fijo a la bancada. Hay, sin embargo, diferencias importantes entre los frenos y los embragues que conducen a soluciones constructivas diferenciadas:

- En los frenos, un elemento no gira respecto a la bancada. Este es el que usualmente se desplaza mediante un sistema de accionamiento hasta contactar con el otro elemento giratorio. Así, en un freno de disco el elemento fijo es normalmente un sector anular desplazable (Fig. 7.19) y, en un freno de tambor, la zapata, que puede ser exterior (Fig. 7.15) o interior (Fig. 7.18), articulada en un punto fijo.

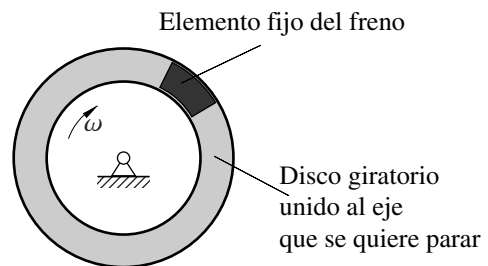


Fig. 7.19 Freno de disco

- En los embragues usualmente hay fricción durante un tiempo relativamente corto, mientras que en los frenos el deslizamiento se puede producir durante mucho más tiempo. Por esta razón el diseño de los frenos ha de facilitar la evacuación del calor generado.

El par máximo de rozamiento, tanto en frenos como en embragues, se puede determinar a partir de las ecuaciones 7.2, 7.3 y 7.5 del apartado 7.4.

Usualmente se utiliza más de un elemento fijo para obtener distribuciones de fuerzas que no carguen innecesariamente los elementos del mecanismo. Por ejemplo, en un freno de disco se disponen dos pastillas que actúan como grapa flotando, y así la acción de frenar no somete el disco a flexión.

Hay también frenos que actúan por cierre de forma que no sirven para detener una máquina, sino para mantenerla en reposo una vez que un freno de fricción la ha detenido.

Frenos de cinta y transmisiones por correa. En el contacto entre una cinta flexible plana –correa plana– y un tambor–polea–, si se desprecia la inercia de la correa, se supone ésta infinitamente flexible y hay deslizamiento o se está en situación de deslizamiento inminente; la relación entre las tensiones T_1 y T_2 de las dos ramas de la correa y el momento respecto a O transmitido a la polea viene dado por las expresiones siguientes:

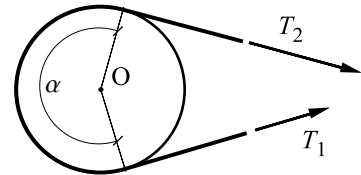


Fig. 7.20 Transmisión por rozamiento entre una correa y una polea

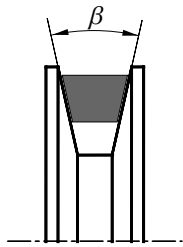


Fig. 7.21 Correa trapezoidal

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\alpha} \quad M(O) = r(e^{\mu\alpha} - 1)T_1 \quad (7.6)$$

A menudo se utilizan correas que tienen sección trapezoidal –correas trapezoidales. El contacto entre la correa y la polea se realiza en los lados de la ranura de la polea y, haciendo las mismas hipótesis que en el caso de la correa plana, la relación de tensiones es

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\alpha/\sin\beta}$$

Esta expresión pone de manifiesto que una correa trapezoidal se comporta como una correa plana con un coeficiente de rozamiento aparente $\mu' = \mu / \sin\beta$. El ángulo β a menudo es aproximadamente de 35° , de manera que el coeficiente de rozamiento aparente es $\mu' = 3,33 \mu$ y, por tanto, con la misma tensión en una rama de la correa se puede transmitir un momento muy superior a la polea.

Freno de cinta. Un freno de cinta está constituido por una cinta que roza sobre un tambor en rotación que se quiere desacelerar o mantener en reposo. Mediante algún sistema auxiliar –manual, mecánico, eléctrico, etc.– se actúa sobre la tensión de la cinta para modificar el par de frenado. La disposición más simple es aquella en que una de las ramas de la cinta tiene el extremo fijo, mientras que sobre la otra se hace la fuerza necesaria para frenar (Fig. 7.22). El par de frenado que se puede hacer, en este caso, sobre el tambor es $M(O) = F r (e^{\mu\alpha} - 1)$.

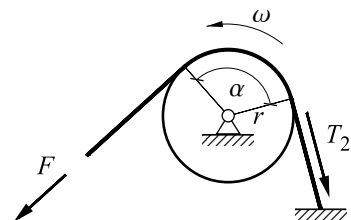


Fig. 7.22 Freno de cinta

Se pueden presentar muchas otras disposiciones de frenos de cinta, como la de la figura 7.23. En este caso el par de frenado es

$$M(O) = \frac{l_3(e^{\mu\pi} - 1)}{l_1 - l_2 e^{\mu\pi}} Fr$$

y si $l_1 - l_2 e^{\mu\pi} \leq 0$, se produce acuñamiento.

Transmisión de movimiento. Es usual la transmisión de movimiento entre ejes mediante correas no dentadas. Estos tipos de transmisiones no garantizan totalmente la relación de transmisión, pero son simples de construcción y montaje, tienen un coste reducido y permiten una gran flexibilidad debido a la disposición espacial de los ejes, si bien usualmente éstos son paralelos.

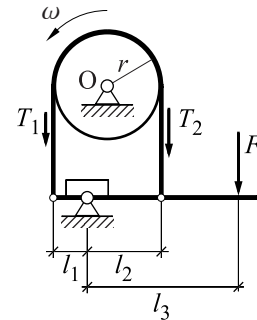


Fig. 7.23 Disposición para un freno de cinta

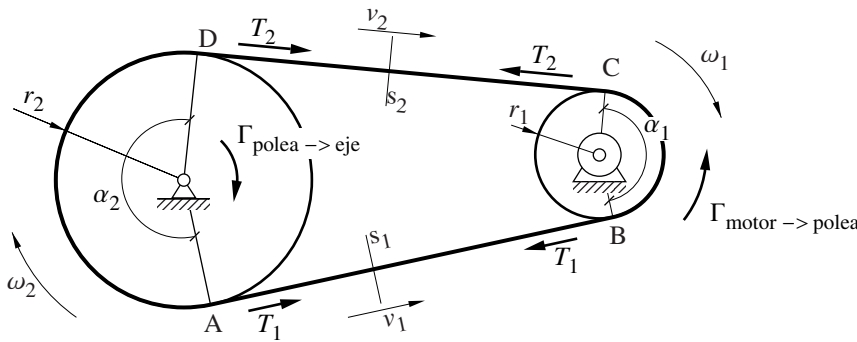


Fig. 7.24 Transmisión por correa

Un parámetro de montaje muy importante es la *tensión de montaje T* de la correa –tensión en las dos ramas de la correa cuando el sistema está en reposo sin transmitir par. Cuando el sistema está transmitiendo par, una de las ramas se tensa hasta T_2 y la otra se destensa hasta T_1 (Fig. 7.24). Si se supone que la correa tiene comportamiento elástico lineal, se cumple $T_1 + T_2 = 2T$ ya que lo que se acorta una rama es lo que se alarga la otra. Despreciando los efectos dinámicos de la rotación de la correa sobre las poleas que disminuyen la fuerza normal entre ambas, el par máximo –deslizamiento inminente de la correa– que se puede transmitir en cada una de las poleas es $\Gamma = r(e^{\mu\alpha} - 1)T_1$, que se puede escribir en función de la tensión de montaje como

$$\Gamma = 2Tr \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha} + 1} \tag{7.7}$$

Si el coeficiente de rozamiento es el mismo en las dos poleas, deslizará antes aquella en que α sea menor –la pequeña en los montajes usuales como el de la figura 7.24– y será, por tanto, la que limitará el par transmisible. Para aumentar el ángulo α y garantizar una cierta tensión de montaje, se suelen poner ruedas intermedias locas (Fig. 7.25).

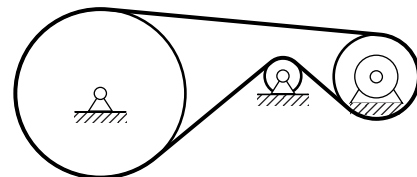


Fig. 7.25 Transmisión por correa con tensor

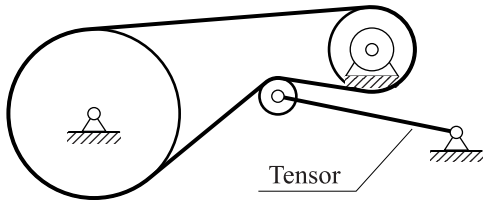


Fig. 7.26 Tensor accionado por un muelle

Otra solución para aumentar el par máximo que se puede transmitir es la incorporación a la rama menos tensada de la correa de un tensor (Fig. 7.26), que, ya sea por gravedad o por la acción de un muelle, mantiene la tensión constante e igual a la tensión de montaje T . El par máximo que se puede transmitir en esta situación es $\Gamma = T r (e^{\mu\alpha} - 1)$, superior al que se puede transmitir sin tensor (Eq. 7.7).

La diferencia de tensión entre las dos ramas de la correa hace que la velocidad de ésta en ellas no sea la misma. Sin tensión, la densidad lineal de la correa es m/l —donde m es la masa y l la longitud—y si se define el módulo de elasticidad de la correa, $e = T/(\Delta l/l)$, la densidad con una tensión T es $m/(l(1+T/e)) = m/(l(1+T/e))$. En régimen estacionario, ha de pasar la misma cantidad en masa de correa por las secciones s_1 y s_2 (Fig. 7.24), por tanto,

$$\frac{m}{l(1+T_1/e)} v_1 = \frac{m}{l(1+T_2/e)} v_2 \quad \text{d' on} \quad (7.8)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1+T_1/e}{1+T_2/e} \approx 1 - \frac{T_2 - T_1}{e} = 1 - \psi \quad \text{amb} \quad \psi = \frac{T_2 - T_1}{e}$$

La polea conductora 1 arrastra por rozamiento la correa, de manera que —sin consideraciones dinámicas en la dirección de la correa— la celeridad de los puntos periféricos de la polea no puede ser inferior a la celeridad de los puntos de la correa.

$$v(P_{\text{polea1}}) \geq v(P_{\text{correa}})$$

y si no hay deslizamiento en todos los puntos de contacto, esta condición lleva a

$$\omega_1 r_1 = v_2 \quad (7.9)$$

De manera análoga, la correa arrastra por rozamiento la polea conducida 2, de manera que

$$v(P_{\text{polea2}}) \leq v(P_{\text{correa}}) \quad \text{y}$$

$$\omega_2 r_2 = v_1 \quad (7.10)$$

Sustituyendo 7.9 y 7.10 en 7.8 se obtiene la relación de transmisión

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{v_1}{r_2} \frac{r_1}{v_2} \approx \frac{r_1}{r_2} (1 - \psi)$$

Anexo 7.I Rozamiento en los pares helicoidales

La superficie helicoidal de la rosca se considera generada por un segmento del eje 2 que hace un movimiento helicoidal de eje 3 y paso p –rosca de perfil rectangular– (Fig. 7.27). La normal a la cara de la rosca en el punto P es perpendicular al eje 2 y, por tanto, está contenida en el plano 1-3.

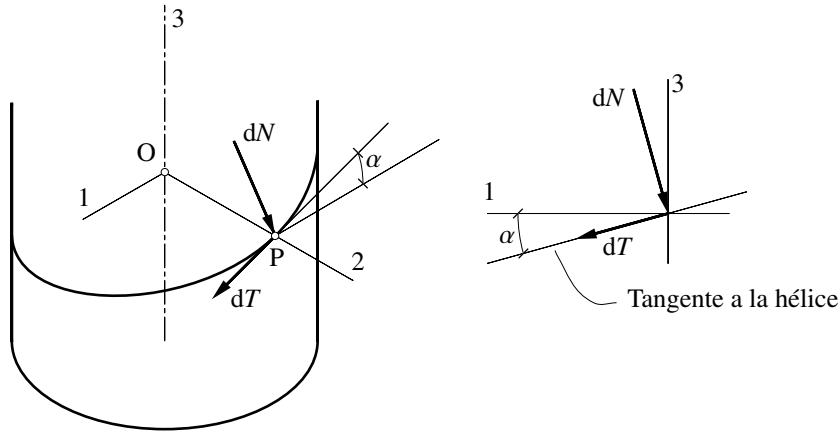


Fig. 7.27 Fuerzas en una hélice rectangular

Considerando que el tornillo mantiene contacto por la cara superior –y, por tanto, N es hacia abajo– y que tiende a atornillarse en el sentido de la hélice –y, por tanto, T es hacia la izquierda–, las fuerzas de contacto en el punto P se expresan en la base indicada como

$$F(P) = \begin{Bmatrix} -dN \sin \alpha + dT \cos \alpha \\ 0 \\ -dN \cos \alpha - dT \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

Suponiendo que la rosca tiene un número entero de vueltas y que las fuerzas de contacto se distribuyen uniformemente, su torsor respecto a un punto del eje es

$$\begin{cases} F_3 = -N \cos \alpha - T \sin \alpha \\ M_3 = (N \sin \alpha - T \cos \alpha)r \end{cases}$$

donde N y T son las integrales extendidas a toda la superficie de la rosca de dN y dT . Las otras componentes del torsor son nulas. Si sobre el tornillo actúan, aparte de las fuerzas en la rosca, una fuerza F y un momento M según el eje 3 y éste no se acelera o es de inercia despreciable, se tiene

$$\begin{aligned} \sum F_{ext} = 0 &\Rightarrow F = -F_3 = N \cos \alpha + T \sin \alpha \\ \sum M_{ext} = 0 &\Rightarrow M = -M_3 = -(N \sin \alpha - T \cos \alpha)r \end{aligned} \quad (7.11)$$

Condición de acañamiento por fuerza. Si sobre el tornillo se aplica sólo una fuerza axial ($F \neq 0, M = 0$) de 7.11, se obtiene $T \cos \alpha - N \sin \alpha = 0$; $T = N \tan \alpha$. Por tanto, no se consigue la

condición de deslizamiento si $\tan \alpha < \mu$, es decir, si $\tan \alpha < \mu$, por mucho que se apriete el tornillo este no se enrosca.

Condición de acañamiento por par. Si sobre el tornillo sólo se aplica un par axial ($F = 0, M \neq 0$) de 7.11, se obtiene $T \sin \alpha + N \cos \alpha = 0$. Como el tornillo tiende a enroscarse $T > 0$ y, por tanto, el contacto se ha de establecer por la cara inferior de la rosca de manera que

$$N \cos \alpha + T \sin \alpha = 0 \quad ; \quad T = N / \tan \alpha$$

En este caso, no se consigue la condición de deslizamiento si $1/\tan \alpha < \mu$, situación que no se da en roscas de fijación y transmisión de potencia, ya que usualmente $\tan \alpha \approx 0,05$.

Si el tornillo tiende a desenroscarse, las fuerzas dT cambian de sentido y, debido a 7.11, se obtiene

$$\begin{aligned} F &= N \cos \alpha - T \sin \alpha \\ M &= (-N \sin \alpha - T \cos \alpha)r \end{aligned} \quad (7.12)$$

Cuando la cara de la rosca en contacto es la inferior, el signo de N cambia y se obtienen dos expresiones parecidas a las anteriores.

Relación entre F y M . En condiciones de deslizamiento, inmediato o real, las fuerzas tangenciales son $dT = \mu dN$ y, suponiendo el rozamiento uniforme e integrando, se tiene $T = \mu N$. A partir de las expresiones 7.11 y 7.12 y las correspondientes al contacto para la cara inferior, las relaciones entre F y M y con $\theta = \arctan \mu$ son:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Enroscar y cara de contacto superior} \\ \text{Desenroscar y cara de contacto inferior} \end{array} \right\} M = \frac{-\tan \alpha + \mu}{1 + \mu \tan \alpha} Fr = -\tan(\alpha - \theta) Fr$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Enroscar y cara de contacto inferior} \\ \text{Desenroscar y cara de contacto superior} \end{array} \right\} M = -\frac{\tan \alpha + \mu}{1 - \mu \tan \alpha} Fr = -\tan(\alpha + \theta) Fr$$
(7.13)

En resumen, si F y M tienden a producir en el tornillo:

- el mismo movimiento $M = -\tan(\alpha - \theta) F r$
- movimientos contrarios $M = -\tan(\alpha + \theta) F r$

Ejemplo 7.2 Determinar el mínimo coeficiente de rozamiento para que una rosca rectangular de diámetro 16 mm y paso $p = 5$ mm sea irreversible –se puede enroscar haciendo un par pero no se puede desenroscar haciendo una fuerza axial.

- El acañamiento por fuerza requiere $\mu > \tan \alpha = p / 2 \pi r = 0,1$; $\alpha = 5,71^\circ$
- El acañamiento por par requiere $\mu > 1/\tan \alpha = 10$

Por lo tanto, si el rozamiento en esta rosca es $0,1 < \mu < 10$ se puede enroscar con un par, pero una fuerza axial no la desenrosca.

Ejemplo 7.3 Si el coeficiente de rozamiento en la rosca del ejemplo anterior es $\mu = 0,6$ y sobre el tornillo actúa la fuerza $F = -100$ N, como se indica en la figura 7.28—negativa porque su sentido es opuesto al de avance—, ¿qué par se necesita para enroscarlo y para desenroscarlo?

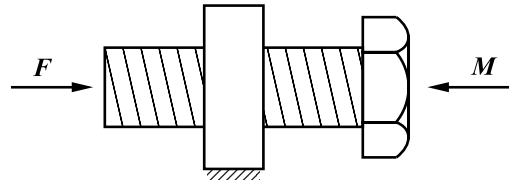


Fig. 7.28 Tornillo

La cara de contacto es la inferior y, a partir de las expresiones 7.13:

$$\text{Enroscar} \quad M_C = -\tan(\alpha + \theta)Fr = -\tan(5,71 + 30,96)(-100)8 = 596 \text{ N mm}$$

$$\text{Desenroscar} \quad M_D = -\tan(\alpha - \theta)Fr = -\tan(5,71 - 30,96)(-100)8 = -377 \text{ N mm}$$

Rosca trapezoidal o triangular. Si la superficie helicoidal se genera con un segmento rectilíneo contenido en el plano 2-3 y que forma un ángulo β con el eje 2, se obtiene un perfil de rosca trapezoidal o triangular (Fig. 7.29). La normal a la cara de la rosca en el punto P es ahora perpendicular a s y a la tangente a la hélice contenida en el plano 1-3. Si $t = \{\cos \alpha, 0, \sin \alpha\}^T$ es el versor tangente a la hélice y $s = \{0, \cos \beta, \sin \beta\}^T$ es el versor en la dirección del segmento generatriz, el versor normal exterior a la superficie superior de la rosca es

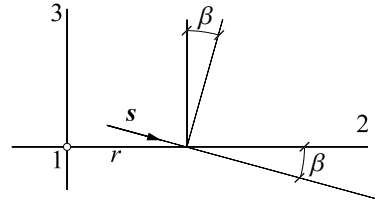


Fig. 7.29 Rosca trapezoidal

$$n = \frac{t \times s}{|t \times s|} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}} \begin{Bmatrix} \cos \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \cos \alpha \end{Bmatrix}$$

Considerando la misma situación en lo referente a las fuerzas que en el caso inicial, las fuerzas de contacto se expresan en la base 123 como:

$$F(P) = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} dT - \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}} \begin{Bmatrix} \cos \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \cos \alpha \end{Bmatrix} dN$$

y siguiendo los pasos anteriores se llega a

$$\left. \begin{aligned} F = -F_3 = N k \cos \alpha + T \sin \alpha \\ M = -M_3 = (-N k \sin \alpha + T \cos \alpha)r \end{aligned} \right\} \text{ con } k = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}}$$

A partir de este punto, todos los resultados presentados para la rosca plana son aplicables a la rosca trapezoidal o triangular simplemente definiendo un coeficiente de rozamiento efectivo $\mu_{\text{efec}} = \mu / k$. Para una situación usual, $\tan \alpha \approx 0,05$, $\beta = 30^\circ$ y $\mu_{\text{efec}} = 1,15 \mu$.

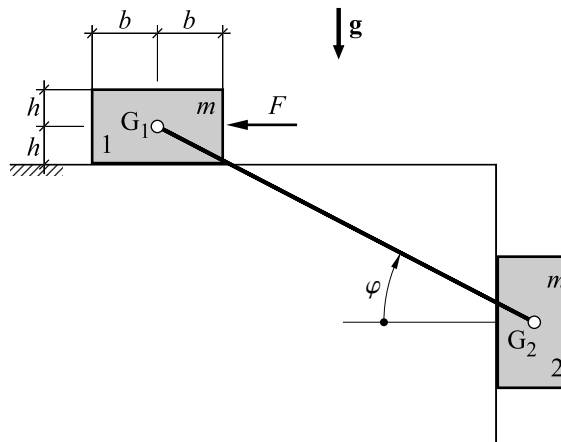
Notas:

- En todo el estudio de roscas a izquierdas –hélice de sentido contrario al estudiado– sólo cambia el signo de los momentos.
- Para tornillos de fijación, se utiliza el perfil de rosca triangular normalizado con $\beta = 30^\circ$. Los otros perfiles se utilizan para la transmisión de movimiento, es decir, como pares cinemáticos.
- Una rosca puede tener más de un filete –materialización de la superficie helicoidal. Este hecho no afecta el estudio realizado.

Problemas

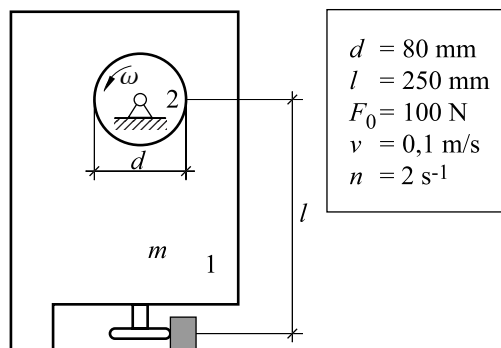
P 7-1 En el mecanismo de la figura, los dos bloques iguales están unidos por una barra articulada de masa despreciable. En los contactos bloque-guía hay rozamiento seco de coeficiente μ y en las articulaciones el rozamiento es despreciable.

- Determinar la fuerza F necesaria para iniciar el movimiento a partir del reposo.
- Hacer la aplicación numérica para la configuración $\varphi = 45^\circ$, con $\mu = 0,2$.
- Estudiar la posibilidad de vuelco de los bloques.



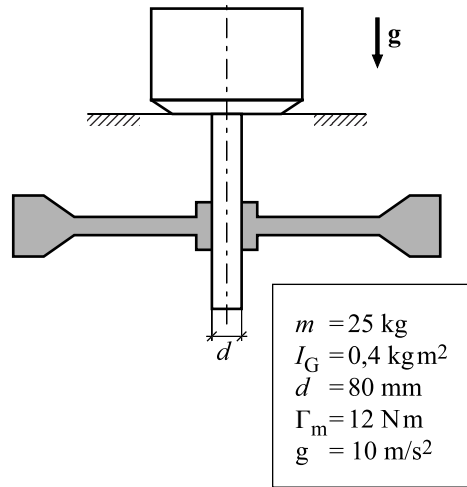
P 7-2 El bloque de la figura es guiado por una barra de eje fijo y por una ruedecilla que se apoya sobre una guía fija. Las resistencias pasivas asociadas a la ruedecilla se consideran despreciables. Para hacer avanzar el bloque con velocidad constante v –perpendicularmente al plano del dibujo– con la barra fija se ha de hacer una fuerza axial F_0 . Si la velocidad de rotación de la barra es n , determinar:

- El nuevo valor de la fuerza axial.
- El incremento de fuerza en el punto de contacto ruedecilla-guía.

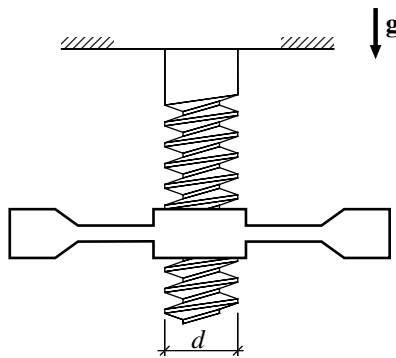


P7-3 Con el eje en reposo, se necesita una fuerza $F = 0,5 m g$ para hacer bajar el volante. El motor aplica un par Γ_m sobre el eje durante 1 s y a continuación se detiene. El volante se considera equilibrado y el eje del motor de inercia despreciable. Determinar qué distancia baja el volante:

- durante el primer segundo,
- hasta que queda en reposo.



P7-4 Un volante equilibrado, de masa m y momento de inercia I_G , está roscado sobre una barra vertical fija de paso p –par helicoidal. En la superficie de contacto hay rozamiento seco de coeficiente μ . Determinar la aceleración de caída si la rosca es de sección:

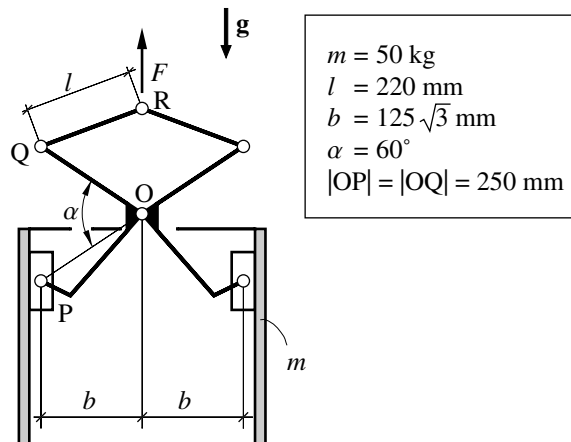


$$\begin{aligned} m &= 10 \text{ kg} \\ I_G &= 0,2 \text{ kg m}^2 \\ d &= 100 \text{ mm} \\ \mu &= 0,1 \\ \text{paso} &= 100 \text{ mm} \end{aligned}$$

- Rectangular.
- Triangular de ángulo entre caras $2\beta = 60^\circ$.

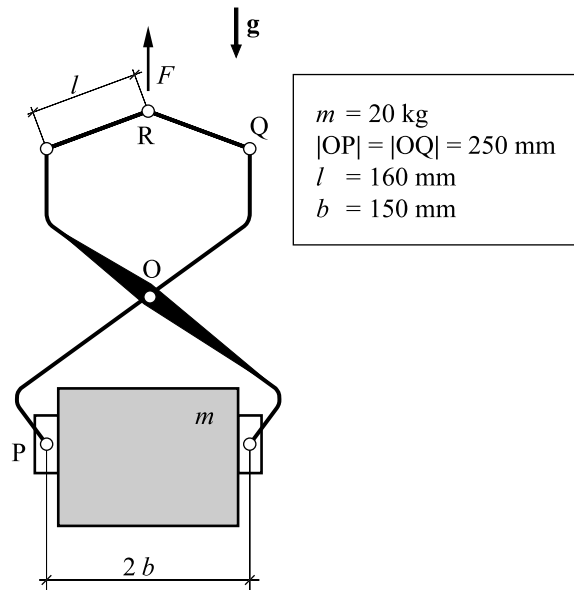
P7-5 La grapa en forma de tenaza de la figura está prevista para agarrar por el interior y alzar tubos de masa m . Determinar, en función del diámetro $2b$:

- El coeficiente de rozamiento mínimo entre el tubo y las zapatas.
- La tensión de la barra QR.

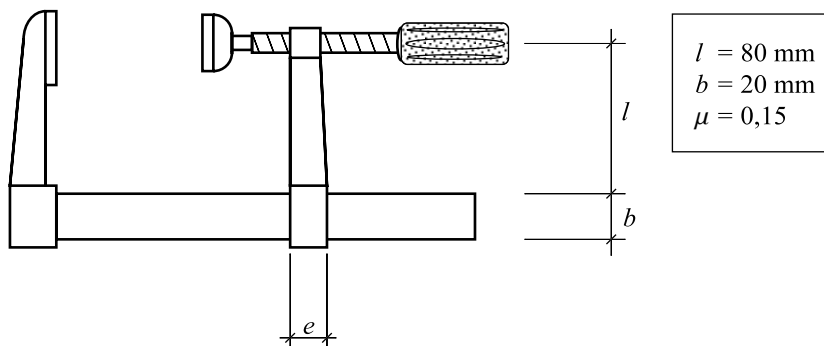


P7-6 La grapa en forma de tenaza de la figura ha de permitir alzar la caja de masa m . Determinar, en función del ancho $2b$:

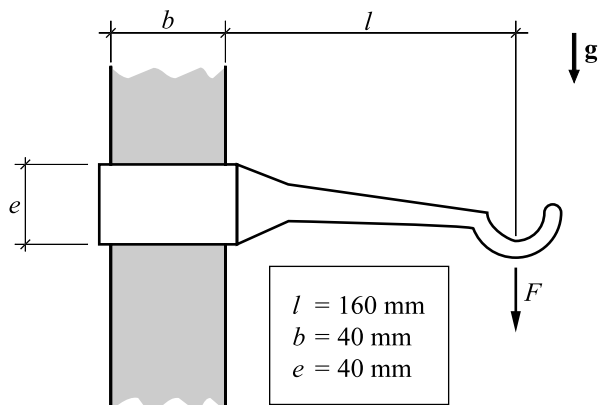
- El coeficiente de rozamiento mínimo entre la caja y las zapatas.
- La tensión de la barra QR.



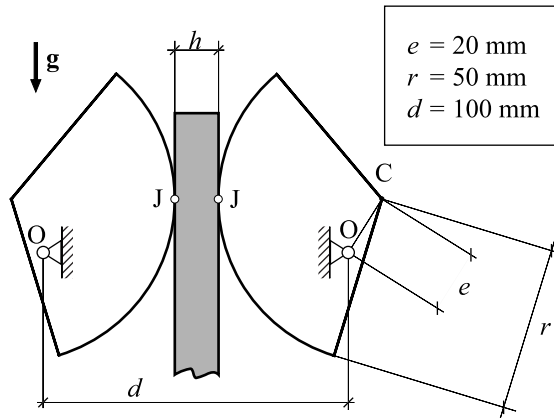
P7-7 Determinar el ancho máximo e del brazo del sargento si se ha de garantizar que apriete adecuadamente, con un coeficiente de rozamiento $\mu = 0,15$ entre la guía y el brazo.



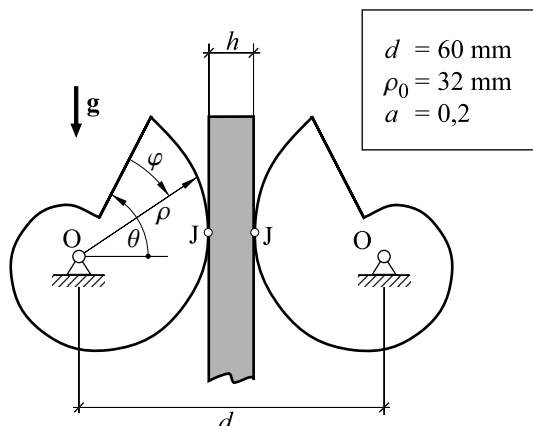
P7-8 El soporte de la figura puede deslizar respecto de la guía a fin de ajustar su altura y queda retenido por el rozamiento guía-soporte. Determinar el coeficiente de rozamiento mínimo que garantiza la retención –despreciar el peso del soporte.



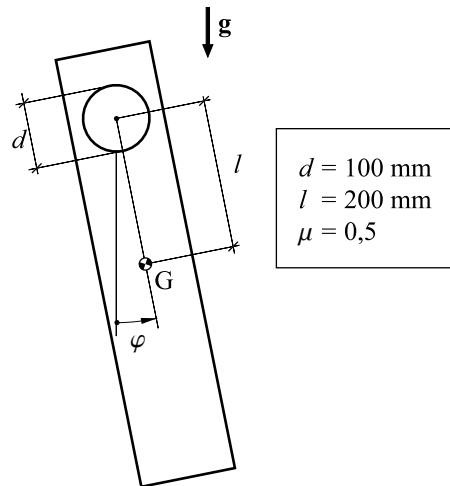
- P 7-9** La grapa de la figura está prevista para sostener barras de sección rectangular. Las levas son de perfil circular de centro C y, cuando no sujetan ninguna barra, unos muelles las mantienen en contacto. La masa de las levas, así como las constantes de los muelles, son despreciables. Determinar el mínimo coeficiente de rozamiento para que queden retenidas barras de diferentes anchuras.



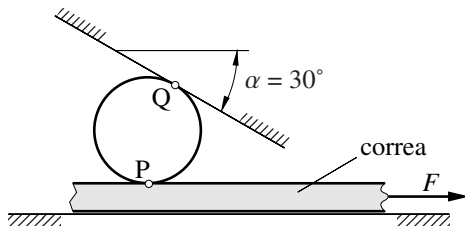
- P 7-10** La grapa de la figura está prevista para sostener barras de sección rectangular, las levas son de perfil espiral exponencial $\rho(\varphi) = 32 e^{-0,2\varphi} \text{ mm}$ y cuando no sujetan ninguna barra unos muelles las mantienen en contacto. La masa de las levas, así como las constantes de los muelles, son despreciables. Determinar el mínimo coeficiente de rozamiento para que queden retenidas barras de diferentes anchuras.
- Nota: En una espiral logarítmica el ángulo α entre el radio y la tangente en un punto es constante y tal que $\tan \alpha = 1/a$.



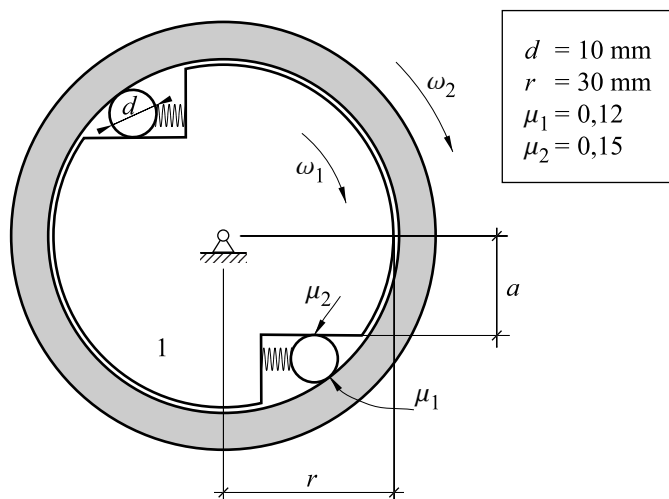
- P7-11** La barra de la figura es sostenida por un eje –pivote– fijo, horizontal y de diámetro d . El ajuste entre el eje y el agujero de la barra es con juego –sin apriete– y el coeficiente de rozamiento seco entre las superficies en contacto es μ . Determinar la inclinación φ máxima que se puede dar a la barra de manera que, dejada en reposo, no se mueva.



- P7-12** El dispositivo representado ha de ser autobloqueador para la fuerza F ; por grande que sea ésta no se ha de producir deslizamiento a fin de bloquear el movimiento de la correa hacia la derecha. Determinar el valor mínimo que ha de tener el coeficiente de rozamiento en los puntos de contacto P y Q.



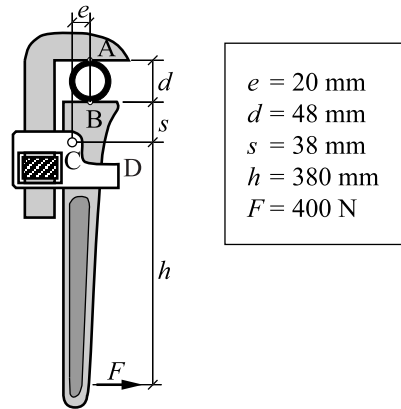
- P7-13** Para el mecanismo de rueda libre de la figura, determinar la distancia a para garantizar el acñamiento si ω_2 tiende a ser inferior que ω_1 .



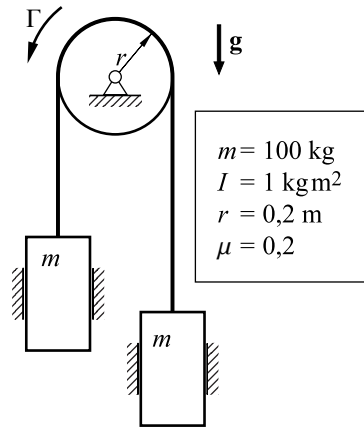
P7-14 Para la llave Stillson de la figura que se utiliza para desenroscar un tubo fijo, determinar:

- El coeficiente de rozamiento mínimo en los puntos A y B para que no haya deslizamiento.
- Las fuerzas en estos puntos y en la articulación C.

Nota: En el punto D no hay contacto.

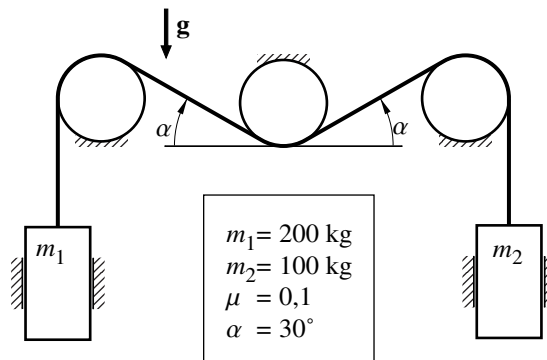


P7-15 En el ascensor de la figura, el coeficiente de rozamiento entre el cable y la polea es μ y las otras resistencias pasivas son despreciables. Determinar el par máximo que se puede aplicar a la polea sin que el cable resbale y la aceleración en esta situación.



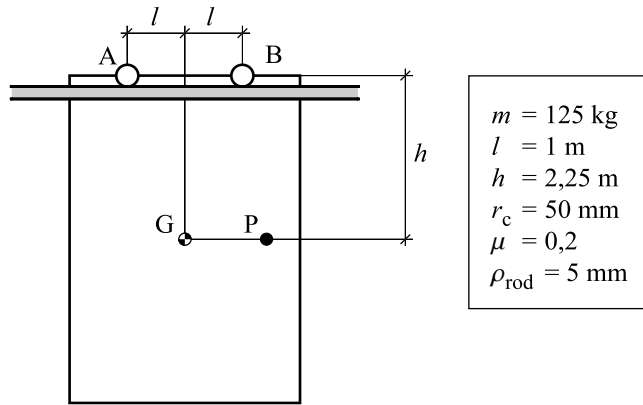
P7-16 El cable situado alrededor de los tres tubos horizontales fijos tiene un coeficiente de rozamiento seco μ con ellos. Determinar:

- La aceleración de los bloques.
- El mínimo coeficiente de rozamiento necesario para evitar el deslizamiento.



P7-17 La puerta corrediza está montada sobre dos rodillos de radio r_c que se mueven sobre una guía horizontal. El coeficiente de rodadura de estos rodillos es ρ_{rod} y su coeficiente de rozamiento seco con la guía es μ . Determinar la fuerza horizontal al pomo P necesaria para accionar la puerta si:

- ambos rodillos ruedan sobre la guía,
- un rodillo se bloquea y desliza sobre la guía.



8 Método de las potencias virtuales

El método de las potencias virtuales permite plantear el análisis dinámico de un mecanismo de manera selectiva, es decir, sin tener que plantear un número elevado de ecuaciones dinámicas para aislar posteriormente lo que interesa. Por ejemplo, permite determinar directamente una ecuación del movimiento del mecanismo sin tener que emplear otras ecuaciones para eliminar acciones de enlace, como sucede a menudo al emplear los teoremas vectoriales. También permite determinar la expresión de aquella fuerza o momento de enlace del mecanismo que interesa sin tener que plantear el estudio de todo el conjunto de fuerzas.

Ahora bien, si lo que interesa es justamente hacer un análisis de todas las fuerzas y los momentos de enlace del mecanismo, es más ventajoso plantear los teoremas vectoriales en cada miembro por separado y resolver el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene, usualmente mediante métodos numéricos. Intentar determinar todas las fuerzas y los momentos de enlace aplicando el método de las potencias virtuales puede ser largo y complejo si no se sistematiza utilizando las ecuaciones de Lagrange.

En este método, aparece un vector asociado a la velocidad –*velocidad virtual*– que en otros ámbitos se asocia a un desplazamiento –desplazamiento virtual. En este caso, el método se denomina *método de los trabajos virtuales*.

8.1 Fundamentos del método

El método de las potencias virtuales parte del hecho que, en una referencia galileana, la suma de fuerzas sobre una partícula P, incluida la fuerza de inercia de d'Alembert $\mathcal{F}(P)$, es igual a cero:

$$F(P) + \mathcal{F}(P) = 0 \quad \text{con} \quad \mathcal{F}(P) = -m(P) a(P)$$

Si se multiplica escalarmente esta ecuación vectorial por un vector arbitrario $v^*(P)$, se obtiene una única ecuación escalar:

$$F(P) \cdot v^*(P) + \mathcal{F}(P) \cdot v^*(P) = 0$$

Al vector escogido se le da significado de velocidad, y entonces los términos de la ecuación escalar tienen significado de potencia. Ahora bien, este vector no tiene por qué corresponder a la velocidad

real de la partícula, y por eso se denomina *velocidad virtual* (notación con $*$). La potencia obtenida así se denomina *potencia virtual* de las fuerzas que actúan sobre la partícula.

Para el conjunto de partículas de un sistema mecánico se cumple

$$\sum_{\text{sist.}} \left[\mathbf{F}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{v}^*(\mathbf{P}) + \mathcal{F}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{v}^*(\mathbf{P}) \right] = 0 \quad (8.1)$$

Esta es la expresión básica del método de las potencias virtuales y se puede enunciar de la manera siguiente: *La potencia virtual del conjunto de fuerzas que actúan sobre un sistema mecánico, incluidas las fuerzas de inercia de d'Alembert, es nula.* Escogiendo adecuadamente las velocidades virtuales se pueden obtener las ecuaciones del movimiento o las ecuaciones para la determinación de fuerzas y momentos desconocidos.

En el análisis estático de sistemas mecánicos –estructuras y mecanismos en reposo–, las fuerzas de inercia de de d'Alembert son obviamente nulas y la expresión 8.1 queda simplificada, ya que sólo incluye las fuerzas de interacción exteriores y interiores, y las fuerzas de inercia de arrastre si la referencia de estudio no es galileana.

Se denomina *movimiento virtual* a la distribución de velocidades virtuales empleadas en una aplicación del método de las potencias virtuales. Los movimientos virtuales se han de escoger de manera que, en principio, dependan de una única velocidad generalizada virtual –variable independiente. Así, ésta sale factor común del sumatorio de las potencias virtuales y se puede eliminar, obteniendo una relación entre las fuerzas que intervienen.

Ejemplo 8.1 Sobre el pistón de la figura 8.1 actúa la fuerza F_P y se quiere determinar la fuerza F_Q que se ha de aplicar a la manivela para mantener el mecanismo en reposo.

El sistema que se estudia está en equilibrio; por tanto, las fuerzas de inercia de d'Alembert son nulas. Tomando como velocidades virtuales las velocidades reales si la manivela girase con velocidad angular ω^* , es fácil ver que $v^*(\mathbf{P}) = \omega^* l$ y $v^*(\mathbf{Q}) = \omega^* l_1$, de manera que la ecuación 8.1 en este caso es

$$F_Q \omega^* l_1 - F_P \omega^* l = 0, \quad (F_Q l_1 - F_P l) \omega^* = 0 \rightarrow F_Q = F_P \frac{l}{l_1}$$

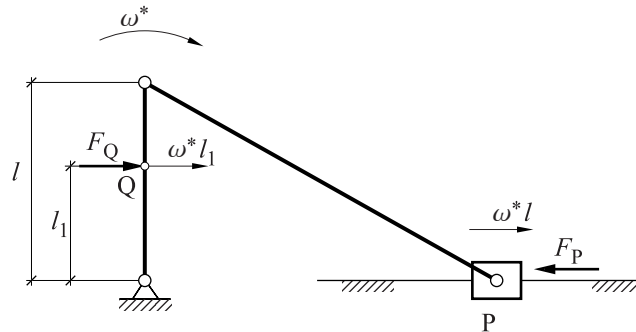


Fig. 8.1 Distribución de velocidades virtuales en un pistón

8.2 Tipos de movimientos virtuales

Hay dos tipos de movimientos virtuales: los movimientos virtuales compatibles con los enlaces y los no compatibles con los enlaces. Los primeros se emplean para la obtención de ecuaciones del movimiento y de las fuerzas y momentos desconocidos introducidos por accionamientos. Los segundos se emplean para la determinación de fuerzas y momentos de enlace.

Movimientos virtuales compatibles con los enlaces. Son movimientos virtuales que cumplen las restricciones cinemáticas impuestas por los enlaces y las ecuaciones cinemáticas constitutivas de los miembros; en particular, las velocidades virtuales asociadas a las partículas de un sólido rígido verifican la expresión $\mathbf{v}^*(B) = \mathbf{v}^*(A) + \omega^* \times \overline{AB}$, donde ω^* es la velocidad angular virtual del sólido. Por tanto, pueden ser tratados de la misma manera que los movimientos reales cinemáticamente posibles. Así, la velocidad de un punto P del sistema se puede expresar como

$$\mathbf{v}(P) = \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i(P) u_i \quad (8.2)$$

con $\mathbf{b}_i(P)$ coeficientes para cada punto función de las coordenadas q_i .
 u_i velocidades generalizadas independientes (normalmente $u_i = \dot{q}_i$).
 n número de grados de libertad.

y las velocidades virtuales de los movimientos virtuales compatibles con los enlaces se pueden expresar

$$\mathbf{v}^*(P) = \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i(P) u_i^*, \text{ donde } u_i^* \text{ son variables independientes o grados de libertad virtuales.}$$

Normalmente se escogen estos movimientos de manera que tan sólo dependan de un único grado de libertad u_i^* y entonces se consideran asociados a este u_i

$$\mathbf{v}^*(P) \Big|_{u_i} = \mathbf{b}_i(P) u_i^* \quad (8.3)$$

Con estos movimientos virtuales, las únicas incógnitas que pueden aparecer en las ecuaciones son las fuerzas desconocidas, diferentes de las de enlace, exteriores e interiores, y las fuerzas de inercia de d'Alembert. Las fuerzas de enlace no intervienen, ya que su potencia en este tipo de movimiento es nula. Para demostrarlo, se ha de analizar el contacto puntual, con y sin deslizamiento, como enlace básico, ya que cualquier otro tipo de enlace se puede considerar una superposición de éstos. La potencia, virtual o real, de una pareja de fuerzas de acción y reacción no depende de la referencia, ya que únicamente es función de la variación de la distancia –independiente de la referencia– entre los puntos de aplicación, como se demuestra en la nota adjunta.¹ Si se analiza este enlace desde la referencia solidaria al sólido 1, se tiene que:

- La potencia asociada a las fuerzas sobre el sólido 1 es nula al serlo la velocidad del punto de aplicación J_1 .

¹ La potencia de una pareja de fuerzas acción y reacción que actúan sobre dos puntos A y B separados una distancia ρ es:

$$\mathbf{F}(A)\mathbf{v}(A) + \mathbf{F}(B)\mathbf{v}(B) = \mathbf{F}\mathbf{v}(A) - \mathbf{F}\mathbf{v}(B) = \mathbf{F}(\mathbf{v}(A) - \mathbf{v}(B)) = \mathbf{F} \frac{d\overline{BA}}{dt} = \pm F \frac{d\overline{BA}}{dt} \Big|_{\text{dirección de AB}} = \pm F\dot{\rho}$$

- Cuando hay deslizamiento (Fig. 8.2.a) la fuerza de enlace sobre el sólido 2 tiene potencia nula al ser ortogonal a la velocidad del punto de aplicación J_2 .
- Cuando no hay deslizamiento (Fig. 8.2.b) la fuerza de enlace sobre el sólido 2 también tiene potencia nula al ser nula la velocidad del punto de aplicación J_2 .

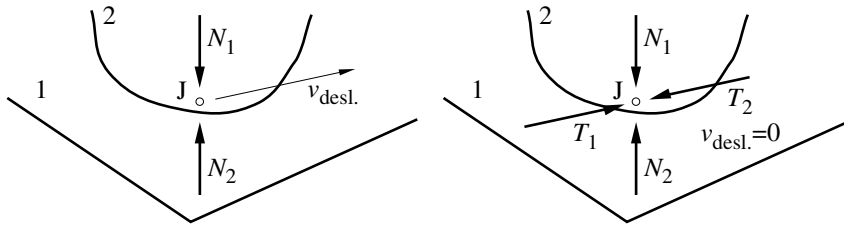


Fig. 8.2 a) Contacto con deslizamiento

b) Contacto sin deslizamiento

En cada ecuación 8.1 obtenida aplicando el movimiento virtual asociado a un grado de libertad (Eq. 8.3) se puede extraer este factor común y eliminarlo. Con este procedimiento se obtienen directamente tantas ecuaciones libres de movimientos virtuales como grados de libertad tiene el sistema.

Si el grado de libertad descrito por u_i es un grado de libertad no forzado, no gobernado por ningún accionamiento, la ecuación obtenida se denomina *ecuación del movimiento* para este grado de libertad. En sistemas de más de un grado de libertad, las ecuaciones del movimiento obtenidas no están en general desacopladas, es decir, cada una de ellas puede incluir diversos grados de libertad y sus derivadas.

Si el grado de libertad es gobernado por algún tipo de accionamiento, se obtiene la expresión de la fuerza o del momento introducidos por éste, para garantizar el control del grado de libertad. Cuando un grado de libertad es gobernado por más de un accionamiento –por ejemplo, los trenes automotores con tracción eléctrica tienen más de un motor–, la expresión que se obtiene corresponde al torsor de las acciones de todos los accionamientos y el valor de cada uno queda indeterminado.

Ejemplo 8.2 En el mecanismo elevador de la figura 8.3 el único elemento de masa no despreciable es el bloque. La determinación de la fuerza F_{C0} que ha de hacer el cilindro hidráulico para mantener el bloque en reposo se puede realizar mediante un movimiento virtual compatible con los enlaces. En este caso, este movimiento virtual compatible con los enlaces es único al tratarse de un sistema de un grado de libertad. Con este movimiento virtual, si v^* es la velocidad virtual del punto C, la velocidad virtual de G es $2v^*$. La expresión básica del método de las potencias virtuales 8.1 es

$$F_{C0}v^* - mg2v^* = 0 \quad \text{de donde} \quad F_{C0} = 2mg$$

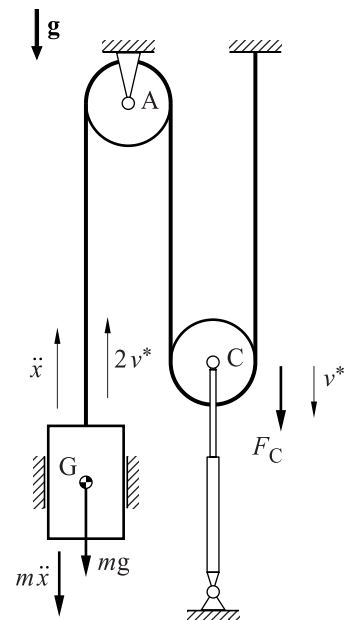


Fig. 8.3 Mecanismo elevador

Si la fuerza del cilindro hidráulico F_C no es la calculada, el bloque se mueve y, para aplicar el método de las potencias virtuales, se ha de considerar la fuerza de inercia de d'Alembert del bloque $m\ddot{x}$ de manera que la expresión 8.1 pasa a ser

$$F_C v^* - mg 2v^* - m\ddot{x} 2v^* = 0 \quad \text{de donde} \quad \ddot{x} = \frac{F_C}{2m} - g \quad \text{es la ecuación del movimiento.}$$

Movimientos virtuales no compatibles con los enlaces. Para determinar fuerzas y momentos de enlace se han de escoger movimientos virtuales que no verifiquen la restricción asociada a la fuerza o al momento de enlace por determinar –se dice que se rompe el enlace. Eso permite que la potencia virtual de la fuerza o el momento aparezca en la ecuación y pueda así ser aislada. Dentro de lo que es posible, se ha de escoger el movimiento virtual de manera que sólo aparezca como incógnita la fuerza o el momento por determinar.

Ejemplo 8.3 Si en el ejemplo anterior se quiere determinar, por el método de las potencias virtuales, la fuerza en el anclaje de la polea fija al techo –punto A–, se ha de prescindir del enlace que representa este anclaje –romperlo– pero no olvidar la fuerza que hace F_A , tal como se representa en la figura 8.4. El movimiento virtual compatible con todos los enlaces que quedan tiene dos grados de libertad, igual que el movimiento real si en el sistema no hubiese el anclaje. Por tanto, el movimiento virtual que se ha de emplear no es único y habrá que escogerlo de entre las dos opciones independientes siguientes:

$$a) \quad v^*(A) = v^*; \quad v^*(G) = 2v^*; \quad v^*(C) = 0$$

$$F_A v^* - mg 2v^* - m\ddot{x} 2v^* = 0; \quad F_A = 2m(g + \ddot{x})$$

$$b) \quad v^*(A) = v^*; \quad v^*(G) = 0; \quad v^*(C) = v^*$$

$$F_A v^* - F_C v^* = 0; \quad F_A = F_C$$

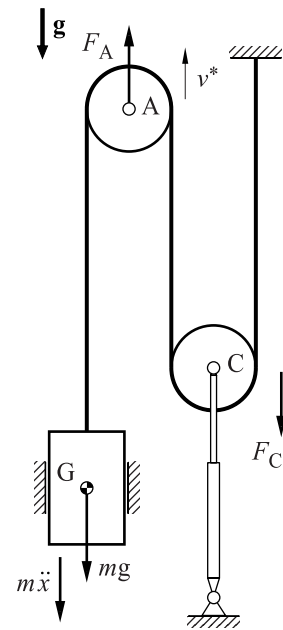


Fig. 8.4 Mecanismo elevador

Puntualizaciones. Se ha de subrayar que:

- Hacer un movimiento virtual no quiere decir modificar el movimiento real del sistema ni, por tanto, el sistema de fuerzas de inercia de d'Alembert.
- Si el sistema que se estudia presenta enlaces con resistencias pasivas, las fuerzas y los momentos que las describen tienen asociada, en principio, una potencia virtual no nula para los movimientos virtuales compatibles con los enlaces. Las resistencias pasivas en los enlaces a menudo se formulan en función de las fuerzas de enlace y eso obliga a determinar posteriormente estas fuerzas para obtener ecuaciones libres de fuerzas de enlace.
- La potencia de una pareja de fuerzas de acción y reacción y, en consecuencia, la de todo el conjunto de fuerzas interiores de un sistema –conjunto de parejas de acción y reacción– no es cero, en principio, y es independiente de la referencia desde la cual se determina (ver la nota 1 de la página 195). Este hecho se ha de tener en cuenta tanto en la aplicación del método de las potencias virtuales como en la del teorema de la energía. Son ejemplos de este hecho la potencia desarrollada por un motor y la potencia disipada por las resistencias pasivas, ambas no nulas en general e independientes de la referencia de estudio.

8.3 Potencia asociada a un tórsor de fuerzas sobre un sólido rígido

En el estudio de mecanismos, es usual emplear el modelo de sólido rígido para representar sus miembros. Los sistemas de fuerzas que actúan sobre un sólido rígido se pueden describir por medio de su tórsor referido a un punto. Así, hay el tórsor de las fuerzas gravitatorias, el tórsor de las fuerzas de enlace para cada enlace actuante sobre el sólido, el tórsor de las fuerzas de inercia de d'Alembert, etc. La potencia de estos diferentes sistemas de fuerzas, tanto potencia real como virtual –con movimientos virtuales compatibles con las condiciones constitutivas del sólido rígido–, se puede determinar mediante su tórsor.

Sea un sistema de fuerzas $F(P)$ que actúan sobre puntos P de un sólido rígido; su tórsor definido en un punto B del sólido es

$$F_R = \sum_{\text{sist.}} F(P)$$

$$M_R(B) = \sum_{\text{sist.}} \overline{BP} \times F(P)$$

Si se tiene en cuenta que para un movimiento virtual compatible con las condiciones constitutivas de un sólido rígido $v^*(P) = v^*(B) + \omega^* \times \overline{BP}$, la potencia virtual se puede calcular de acuerdo con

$$P^* = \sum_{\text{sist.}} F(P) \cdot v^*(P) = \sum_{\text{sist.}} F(P) \cdot v^*(B) + \sum_{\text{sist.}} F(P) \cdot (\omega^* \times \overline{BP}) =$$

$$\left[\sum_{\text{sist.}} F(P) \right] \cdot v^*(B) + \omega^* \cdot \left[\sum_{\text{sist.}} \overline{BP} \times F(P) \right] = F_R \cdot v^*(B) + M_R(B) \cdot \omega^* \quad (8.4)$$

Se ha de subrayar que el concepto de tórsor es aplicable a cualquier sistema de fuerzas sobre cualquier sistema mecánico –multisólido o no. En cambio, la expresión de la potencia del tórsor sólo es aplicable cuando se trata de un tórsor sobre un sólido rígido en el caso que el movimiento virtual sea compatible con las condiciones constitutivas del sólido rígido, es decir, cuando no se rompa el sólido. Si este no fuese el caso, habría que determinar previamente el tórsor sobre cada una de las partes separadas y realizar el cálculo como si se tratase de diferentes sólidos rígidos.

Ejemplo 8.4 En el diferencial de un automóvil (Fig. 8.5) entre las velocidades angulares relativas a la carcasa de sus tres ejes se verifica $\omega_m = 3(\omega_1 + \omega_2)$, siendo ω_m la velocidad angular del eje que proviene del motor y ω_1 y ω_2 las velocidades angulares de cada una de las ruedas motrices. En su estudio, se supone que el régimen es estacionario –sin aceleraciones angulares de los ejes– y que están equilibrados dinámicamente, o bien, que las inercias son despreciables si el régimen no es estacionario. De esta manera, las fuerzas de inercia de d'Alembert dan potencia nula y, por tanto, no aparecen en la expresión 8.1.

Se quiere determinar, en función del par motor Γ_m :

- Los pares Γ_1 y Γ_2 sobre el eje de cada una de las ruedas.
- El par Γ_E de enlace que la carcasa recibe del chasis.

- El mecanismo tiene 2 grados de libertad – ω_1 , ω_2 y ω_m son tres velocidades generalizadas relacionadas con la ecuación de enlace $\omega_m = 3(\omega_1 + \omega_2)$ –; por tanto, se pueden plantear dos

movimientos virtuales independientes compatibles con los enlaces. Si se toman ω_1 y ω_2 como grados de libertad, el movimiento virtual asociado a cada uno de ellos a partir de la expresión 8.1 da lugar a:

$$\omega_1^* \neq 0, \omega_2^* = 0, \rightarrow \omega_m^* = 3\omega_1^* \rightarrow \Gamma_m 3\omega_1^* - \Gamma_1 \omega_1^* = (3\Gamma_m - \Gamma_1)\omega_1^* = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = 3\Gamma_m$$

$$\Gamma_m \omega_m^* - \Gamma_1 \omega_1^* - \Gamma_2 \omega_2^* = 0$$

$$\omega_1^* = 0, \omega_2^* \neq 0, \rightarrow \omega_m^* = 3\omega_2^* \rightarrow \Gamma_m 3\omega_2^* - \Gamma_2 \omega_2^* = (3\Gamma_m - \Gamma_2)\omega_2^* = 0 \Rightarrow \Gamma_2 = 3\Gamma_m$$

$$\Gamma_m \omega_m^* - \Gamma_1 \omega_1^* - \Gamma_2 \omega_2^* = 0$$

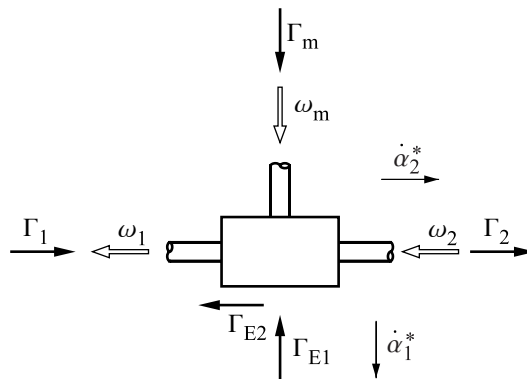


Fig. 8.5 Movimientos virtuales en un diferencial de automóvil

- b) Para determinar el momento de enlace se han de realizar movimientos virtuales que rompan el enlace correspondiente, es decir, que no sean compatibles. Cada movimiento virtual proporcionará una componente del momento de enlace, Γ_{E1} en la dirección longitudinal y Γ_{E2} en la dirección transversal del vehículo.

Si se hace un movimiento $\dot{\alpha}_1^*$ de rotación de todo el diferencial –como si fuese un sólido rígido– en el entorno del eje longitudinal, se rompe el enlace que impide esta rotación de la carcasa y la ecuación 8.1 da lugar a:

$$\Gamma_m \dot{\alpha}_1^* - \Gamma_{E1} \dot{\alpha}_1^* = 0 \Rightarrow \Gamma_{E1} = \Gamma_m$$

De manera similar, con un movimiento virtual $\dot{\alpha}_2^*$ de rotación en el entorno del eje transversal se obtiene:

$$\Gamma_1 \dot{\alpha}_2^* + \Gamma_2 \dot{\alpha}_2^* - \Gamma_{E2} \dot{\alpha}_2^* = 0 \Rightarrow \Gamma_{E2} = \Gamma_1 + \Gamma_2 = 6\Gamma_m$$

Si bien la determinación del momento de enlace se puede hacer fácilmente a partir de la aplicación del teorema del momento cinético a todo el diferencial, la determinación de los momentos en las ruedas a partir de los teoremas vectoriales no es trivial ni directa.

8.4 Cálculo de la potencia virtual en casos concretos

Torsores de inercia de d'Alembert de un sólido rígido. La potencia virtual asociada a las fuerzas de inercia de d'Alembert de un sólido rígido se calcula a partir del torsor de éstas, definido de manera general en el apartado 6.3 y haciendo uso de la expresión 8.4. En el caso particular de movimiento plano, y si el movimiento virtual está definido en el mismo plano, la potencia virtual del par de inercia de d'Alembert es $P^* = I_G \cdot \alpha \cdot \omega^*$. I_G es el momento de inercia en la dirección perpendicular al plano del movimiento, α es la aceleración angular y ω^* es la velocidad angular virtual.

Torsores de enlace sobre un sólido rígido. La potencia asociada a todas las fuerzas de un enlace, acciones y reacciones, es nula en los movimientos virtuales compatibles con el enlace. Si por rotura del enlace o por alguna otra razón se ha de calcular la potencia asociada a las fuerzas que actúan sólo sobre uno de los sólidos enlazados, ésta en general no es nula; se ha de caracterizar el torsor y aplicar la expresión 8.4.

Campos de fuerzas uniformes sobre un sólido rígido, tal como la aproximación uniforme de la atracción gravitatoria terrestre. El torsor del sistema de fuerzas gravitatorias definido en el centro de inercia es una resultante no nula y un momento resultante nulo; por tanto, $P^* = m \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^*(G)$.

Elementos que introducen fuerzas entre sus extremos en la dirección que definen: muelles, amortiguadores y accionamientos de desplazamiento. Lo más directo es calcular la potencia virtual desde la referencia solidaria a uno de los dos miembros unidos por el elemento (Fig. 8.6), ya que entonces sólo interviene en el cálculo la velocidad virtual de aproximación o de alejamiento de los extremos del elemento:

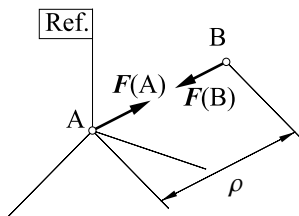


Fig. 8.6

$P^* = \pm F \dot{\rho}^*$, donde ρ es la distancia entre los extremos del elemento.

Como $\dot{\rho}^*$ es positiva cuando la distancia ρ aumenta, la potencia virtual es positiva si la fuerza se define positiva de repulsión, y es negativa si la fuerza se define positiva de atracción. Así, por ejemplo para un muelle de comportamiento lineal de constante k , la fuerza de atracción entre los extremos función de la distancia ρ entre ellos es $F = T_0 + k(\rho - \rho_0)$, donde T_0 es la fuerza de atracción para la distancia ρ_0 entre extremos, y la potencia asociada a las dos fuerzas, una en cada extremo, del muelle es $P^* = -(T_0 + k(\rho - \rho_0))\dot{\rho}^*$.

Elementos que introducen un par, según el eje de la articulación, entre dos sólidos rígidos unidos mediante un par de revolución: muelles y amortiguadores torsionales, motores y actuadores rotativos. Lo más directo también es calcular la potencia virtual desde la referencia solidaria a uno de los dos miembros: $P^* = \pm \Gamma \omega^*$, donde ω^* es la rotación virtual relativa entre los dos miembros relacionados –entre el rotor y el estator en el caso de un motor. El signo dependerá de si Γ y ω^* tienen el mismo sentido o no.

Si como ejemplo se toma un amortiguador torsional de comportamiento lineal de constante c , el par que introduce entre los sólidos rígidos que unen es $\Gamma = -c\omega$, donde ω es la velocidad angular relativa y el signo negativo corresponde al hecho de que el par de amortiguamiento le es opuesto. En este caso, la potencia virtual asociada a los dos pares del amortiguador, cada uno actuante sobre un sólido, es $P^* = -c\omega\omega^*$.

8.5 Ejemplo de aplicación

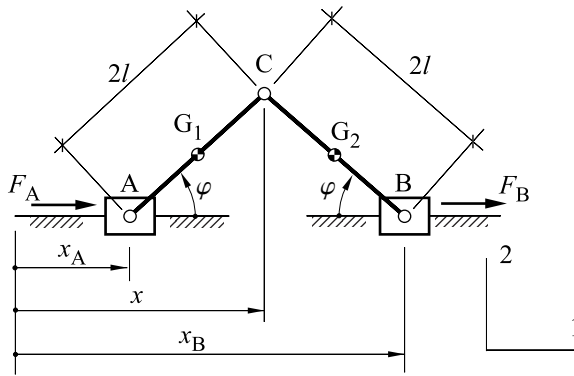


Fig. 8.7 Mecanismo de barras

El mecanismo esquematizado en la figura 8.7 consiste en dos correderas articuladas, A y B, que se mueven sobre una misma guía. Las dos correderas se articulan a las barras iguales AC y BC, las cuales se enlazan entre sí por medio de la articulación C. El movimiento de ambas correderas es gobernado por los correspondientes actuadores, que introducen las fuerzas F_A y F_B , respectivamente. Cada barra es de masa m y tiene un momento de inercia I respecto del eje perpendicular al plano del movimiento que pasa por G y que es central de inercia. Se desprecian la inercia de las correderas y el rozamiento en las guías y articulaciones.

El mecanismo tiene dos grados de libertad y para describir su movimiento se emplean las cuatro coordenadas $\{x, x_A, x_B, \varphi\}$. El triángulo ABC es isósceles y, por tanto, el ángulo que orienta cada una de las barras es el mismo. Se quiere determinar las fuerzas F_A y F_B y la fuerza de enlace en la articulación C, empleando el método de las potencias virtuales.

Se escogen, como coordenadas independientes, x y φ , ya que, por causa de la simetría del mecanismo, son las que proporcionan expresiones más compactas. Las dos ecuaciones de enlace que se establecen, y sus derivadas, son

$$\begin{cases} x_A = x - 2l \cos \varphi & \rightarrow & \dot{x}_A = \dot{x} + 2l\dot{\varphi} \sin \varphi \\ x_B = x + 2l \cos \varphi & \rightarrow & \dot{x}_B = \dot{x} - 2l\dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases}$$

\dot{x}_A y \dot{x}_B son las velocidades de las correderas A y B, y las velocidades de los puntos C, G_1 y G_2 en la base indicada son:

$$\mathbf{v}(C) = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 2l\dot{\varphi} \cos \varphi \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}(G_1) = \begin{Bmatrix} \dot{x} + l\dot{\varphi} \sin \varphi \\ l\dot{\varphi} \cos \varphi \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}(G_2) = \begin{Bmatrix} \dot{x} - l\dot{\varphi} \sin \varphi \\ l\dot{\varphi} \cos \varphi \end{Bmatrix}$$

Los torsores respectivos de las fuerzas de inercia de d'Alembert para cada barra definidos en sus centros de inercia son

$$\mathcal{F}(G_1) = -m\mathbf{a}(G_1) = -m \begin{Bmatrix} \ddot{x} + l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{M}(G_1) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I\ddot{\varphi} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(G_2) = -m\mathbf{a}(G_2) = -m \begin{Bmatrix} \ddot{x} - l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{M}(G_2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I\ddot{\varphi} \end{Bmatrix}$$

Para determinar las fuerzas F_A y F_B de los actuadores se realizan dos movimientos virtuales compatibles con los enlaces, uno para la coordenada x y el otro para la coordenada φ . El esquema de la figura 8.8 recoge el sistema de fuerzas que interviene en estos movimientos.

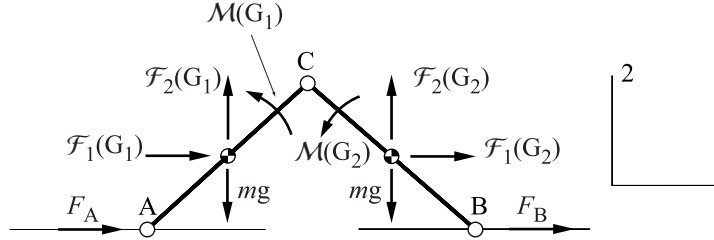


Fig. 8.8 Sistema de fuerzas que interviene en los movimientos virtuales compatibles con los enlaces

- Movimiento virtual $\dot{x}^* \neq 0$, $\dot{\varphi}^* = 0$. El mecanismo se traslada manteniendo $\varphi = \text{constante}$ y, por tanto, todos los puntos tienen la misma velocidad virtual \dot{x}^* . La expresión de la suma de potencias virtuales es

$$(F_A + F_B) \dot{x}^* - m(\ddot{x} + l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \dot{x}^* - m(\ddot{x} - l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \dot{x}^* = 0$$

y de aquí se obtiene

$$F_A + F_B = 2m\ddot{x} \quad (8.5)$$

ecuación que también se encuentra de manera trivial, dada la simetría del mecanismo, al aplicar el teorema de la cantidad de movimiento a todo el mecanismo.

- Movimiento virtual $\dot{x}^* = 0$, $\dot{\varphi}^* \neq 0$. El mecanismo se mueve simétricamente y C se desplaza sobre una recta vertical fija. Las velocidades virtuales de los puntos donde hay fuerzas aplicadas son

$$\mathbf{v}^*(A) = \begin{Bmatrix} 2l\dot{\varphi}^* \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}^*(B) = \begin{Bmatrix} -2l\dot{\varphi}^* \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^*(G_1) = \begin{Bmatrix} l\dot{\varphi}^* \sin \varphi \\ l\dot{\varphi}^* \cos \varphi \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}^*(G_2) = \begin{Bmatrix} -l\dot{\varphi}^* \sin \varphi \\ l\dot{\varphi}^* \cos \varphi \end{Bmatrix}$$

La expresión de la suma de potencias virtuales es

$$(F_A - F_B) 2l\dot{\varphi}^* \sin \varphi - m(\ddot{x} + l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) l\dot{\varphi}^* \sin \varphi +$$

$$m(\ddot{x} - l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) l\dot{\varphi}^* \sin \varphi - 2m(l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) l\dot{\varphi}^* \cos \varphi -$$

$$2mg l\dot{\varphi}^* \cos \varphi - 2I\ddot{\varphi} \dot{\varphi}^* = 0$$

y, simplificando esta expresión, se obtiene finalmente

$$(I + ml^2)\ddot{\varphi} = (F_A - F_B)l \sin \varphi - mgl \cos \varphi \quad (8.6)$$

Con las dos expresiones obtenidas, 8.5 y 8.6, es simple aislar las dos fuerzas F_A y F_B :

$$F_A = m\ddot{x} + \frac{1}{2l \sin \varphi} (I + ml^2) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} mg \frac{1}{\tan \varphi}$$

$$F_B = m\ddot{x} - \frac{1}{2l \sin \varphi} (I + ml^2) \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} mg \frac{1}{\tan \varphi}$$

Las fuerzas F_A y F_B se pueden encontrar con otros movimientos virtuales; por ejemplo, si se toman como coordenadas independientes x_A y x_B las expresiones de las velocidades son más complicadas pero cada movimiento virtual asociado a un grado de libertad da directamente una de las fuerzas buscadas.

Para determinar las dos componentes de la fuerza de enlace en la articulación C se han de hacer movimientos virtuales en los cuales se vulnera la condición de enlace en la dirección de la componente buscada, de manera que ésta tenga asociada una potencia virtual no nula y aparezca en la expresión 8.4.

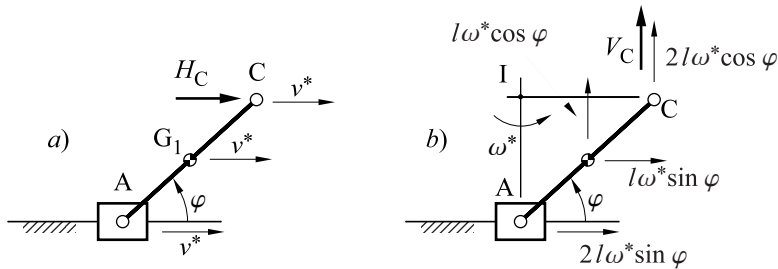


Fig. 8.9 Movimientos virtuales para determinar la fuerza de enlace a C. a) horizontal y b) vertical

- Para obtener la componente horizontal H_C se puede hacer un movimiento de traslación de la parte izquierda del mecanismo según el eje 1 positivo, rompiendo el enlace en C (Fig. 8.9.a):

$$F_A v^* - m(\ddot{x} + l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) v^* + H_C v^* = 0$$

de donde:

$$H_C = m(\ddot{x} + l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) - F_A$$

- Para obtener la componente vertical V_C se puede mantener en reposo la parte derecha y hacer un movimiento virtual de la parte izquierda del mecanismo tal que A se mueva horizontalmente y C verticalmente. Así, la barra AC gira alrededor del punto I, que es su centro instantáneo de rotación asociado al movimiento virtual (Fig. 8.9.b). La expresión de la potencia virtual es

$$F_A 2l\omega^* \sin \varphi - m(\ddot{x} + l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) l\omega^* \sin \varphi -$$

$$m(l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) l\omega^* \cos \varphi - mg l\omega^* \cos \varphi - I\ddot{\varphi} \omega^* + V_C 2l\omega^* \cos \varphi = 0$$

de donde:
$$V_C = \frac{(I + ml^2) \ddot{\varphi}}{2l \cos \varphi} + \left(\frac{m\ddot{x}}{2} - F_A \right) \tan \varphi + \frac{mg}{2}$$

De la misma manera que para las fuerzas F_A y F_B de los actuadores, las componentes de la fuerza de enlace H_C y V_C se pueden encontrar con otros movimientos virtuales. En este caso, es evidente que, por ejemplo, se pueden permutar los movimientos virtuales de la parte derecha e izquierda del mecanismo. La elección de otro movimiento virtual se rige por el interés que en la expresión obtenida aparezcan unas u otras fuerzas conocidas a priori.

8.6 Fuerzas generalizadas

Al hacer un movimiento virtual compatible con los enlaces asociados a una velocidad generalizada u_i independiente, la expresión básica del método de las potencias virtuales 8.1 se puede reescribir como:

$$\sum_{\text{sist.}} [F(P) \cdot b_i(P)] u_i^* + \sum_{\text{sist.}} [\mathcal{F}(P) \cdot b_i(P)] u_i^* = 0$$

Los escalares

$$F^* \Big]_{u_i} = \sum_{\text{sist.}} [F(P) \cdot b_i(P)] , \quad \mathcal{F}^* \Big]_{u_i} = \sum_{\text{sist.}} [\mathcal{F}(P) \cdot b_i(P)]$$

que, multiplicados por la velocidad virtual u_i^* dan la potencia virtual, se denominan *fuerzas generalizadas* asociadas al movimiento virtual compatible con los enlaces definidos por el grado de libertad u_i .

Las fuerzas generalizadas se definen para los diferentes tipos de fuerzas de las cuales provienen. Así, para una determinada velocidad generalizada se define la fuerza generalizada de las fuerzas gravitatorias, la fuerza generalizada de las fuerzas de inercia de d'Alembert, la de un actuador, la de las resistencias pasivas, etc.

Por tanto, el método de las potencias virtuales para movimientos compatibles con los enlaces se puede enunciar de nuevo como: *la suma de fuerzas generalizadas asociadas a un grado de libertad es nula:*

$$\mathcal{F}^* \Big]_{u_i} + \sum \left(F^* \Big]_{u_i} \right) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Para el conjunto de grados de libertad, se obtiene el sistema de n ecuaciones:

$$\{\mathcal{F}^*\} + \sum \{F^*\} = 0 ; \quad \mathcal{F}^* + \sum F^* = 0 \quad (8.7)$$

La velocidad de cada punto P de un sistema se puede expresar como:

$$v(P) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(P)}{\partial u_i} u_i$$

Por tanto, los coeficientes $b_i(P)$ de 8.2 son $b_i(P) = \partial v(P) / \partial u_i$.

Si se emplean como velocidades generalizadas independientes las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas independientes, $u_i = \dot{q}_i$, las expresiones de las fuerzas generalizadas, que ahora es usual asociar a las coordenadas y no a las velocidades, son

$$F^*]_{q_i} = \sum_{\text{sist.}} \left[\mathbf{F}(\mathbf{P}) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{P})}{\partial \dot{q}_i} \right], \quad \mathcal{F}^*]_{q_i} = \sum_{\text{sist.}} \left[\mathcal{F}(\mathbf{P}) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{P})}{\partial \dot{q}_i} \right] \quad (8.8)$$

Para los sistemas holónomos descritos mediante un conjunto de n coordenadas generalizadas independientes q_i , la velocidad de un punto P descrito por el vector de posición $\mathbf{r}(\mathbf{P})$ es

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) = \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{P})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{P})}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

de manera que las fuerzas generalizadas asociadas a las coordenadas generalizadas empleadas se pueden determinar también con las expresiones

$$F^*]_{q_i} = \sum_{\text{sist.}} \left[\mathbf{F}(\mathbf{P}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{P})}{\partial q_i} \right], \quad \mathcal{F}^*]_{q_i} = \sum_{\text{sist.}} \left[\mathcal{F}(\mathbf{P}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{P})}{\partial q_i} \right] \quad (8.9)$$

Ejemplo 8.5 En el ejemplo presentado en el apartado 8.5 se pueden definir diferentes fuerzas generalizadas, como son la fuerza generalizada gravitatoria F_g^* , la fuerza generalizada de los actuadores F_a^* , o la fuerza generalizada de d'Alembert \mathcal{F}^* . Para cada una de las coordenadas que se han escogido como independientes, x y φ , éstas son

$$\text{Para } x: \quad F_g^*]_x = 0 \quad ; \quad F_a^*]_x = F_A + F_B \quad ; \quad \mathcal{F}^*]_x = -2m\ddot{x}$$

$$\text{Para } \varphi: \quad F_g^*]_\varphi = -2mgl \cos \varphi \quad ; \quad F_a^*]_\varphi = (F_A - F_B)2l \sin \varphi$$

$$\mathcal{F}^*]_\varphi = -2(I + ml^2)\ddot{\varphi} - 2m\ddot{x}l \sin \varphi$$

Anexo 8.I Planteamiento global del método de las potencias virtuales

Sea un sistema mecánico descrito por un conjunto $\{q_i\}$ de coordenadas generalizadas, para el estudio del cual se utilizan como velocidades generalizadas sus derivadas temporales \dot{q}_i . Las coordenadas generalizadas no tienen por qué ser independientes, de manera que entre ellas se pueden establecer m_c ecuaciones de enlace geométricas y, si el sistema es no holónimo, se establecen también ecuaciones de enlace adicionales entre sus derivadas.

Si se plantea el conjunto de movimientos virtuales asociados a las coordenadas q_i , se pueden vulnerar condiciones de enlace y, por tanto, en las ecuaciones derivadas de las potencias virtuales pueden aparecer fuerzas y momentos de enlace. En el caso de que se emplee un conjunto de coordenadas que describa la configuración de cada miembro por separado, se vulneran todas las ecuaciones de enlace.

Si se prescinde, al establecer los movimientos virtuales, de las condiciones de enlace vulneradas, pero no de las fuerzas de enlace implicadas, todos los movimientos virtuales pasan a ser compatibles con los enlaces restantes y la expresión 8.7, considerando fuerzas de formulación conocida F_c y fuerzas desconocidas F_d –entre ellas las de enlace asociadas a los enlaces eliminados–, es

$$\mathcal{F}^* + F_c^* + F_d^* = 0 \quad (8.10)$$

- El vector \mathcal{F}^* , por causa de la linealidad de la dinámica en lo referente a las aceleraciones, se puede escribir

$$\mathcal{F}^* = -M(q) \cdot \ddot{q} + g(q, \dot{q})$$

donde la matriz M , función de la configuración, en general no coincide con la matriz de inercia asociada al cálculo de la energía cinética.

- El vector F_c^* depende, en principio, del estado mecánico del sistema (q, \dot{q}) y del tiempo:

$$F_c^* = h(q, \dot{q}, t)$$

- El vector F_d^* , por causa de la linealidad de la dinámica en lo referente a las fuerzas, se puede expresar como

$$F_d^* = -A(q) \cdot F$$

donde el vector F contiene todas las fuerzas y los momentos desconocidos.

Por otra parte, a partir de las ecuaciones geométricas de enlace, y las condiciones adicionales si el sistema es no holónimo, se obtiene

$$\phi_q \ddot{q} = -\dot{\phi}_q \dot{q} - \dot{\phi}_t \quad (8.11)$$

Combinando los sistemas 8.10 y 8.11 se obtiene un sistema global, algebricodiferencial, análogo al obtenido a partir del planteamiento vectorial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}) & \mathbf{A}(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\phi}_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ -\dot{\boldsymbol{\phi}}_q \cdot \dot{\mathbf{q}} - \dot{\boldsymbol{\phi}}_t \end{Bmatrix}$$

En éste, las incógnitas son las aceleraciones y las fuerzas y los momentos desconocidos. El sistema tiene solución siempre que no existan enlaces redundantes, el sistema no se encuentre en una configuración singular y, si el sistema tiene resistencias pasivas de formulación función de las fuerzas de enlace, se haya previsto la determinación de éstas prescindiendo de las condiciones de enlace adecuadas.

Este planteamiento se puede sistematizar analíticamente de manera similar a las ecuaciones de Lagrange. Se inicia el procedimiento prescindiendo, a todos los efectos, de todas las ecuaciones de enlace para que el conjunto de coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ sea independiente y el sistema holónomo. Puede llegar a prescindirse de todos los enlaces si el conjunto de coordenadas generalizadas describe la configuración de todos los miembros por separado.

Con esta situación, la fuerza generalizada de inercia de d'Alembert se puede calcular a partir de la energía cinética del sistema

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathcal{F}_i^* = - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} \right]$$

y el vector de fuerzas generalizadas de inercia se puede escribir

$$\mathcal{F}^* = -\mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \dot{q}_i \right] \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

A partir del planteamiento del conjunto de ecuaciones 8.1 para todo q_i y teniendo en cuenta que éstos no son independientes se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}) & \boldsymbol{\phi}_q^T \\ \boldsymbol{\phi}_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \dot{q}_i \right] \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ -\dot{\boldsymbol{\phi}}_q \cdot \dot{\mathbf{q}} - \dot{\boldsymbol{\phi}}_t \end{Bmatrix}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange. Cada multiplicador es asociado a una condición de enlace y la relación entre éstos y las fuerzas de enlace se obtiene a partir de:

$$\boldsymbol{\phi}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}_E^*$$

donde \mathbf{F}_E^* es la fuerza generalizada correspondiente a los enlaces descritos por las ecuaciones $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) = 0$

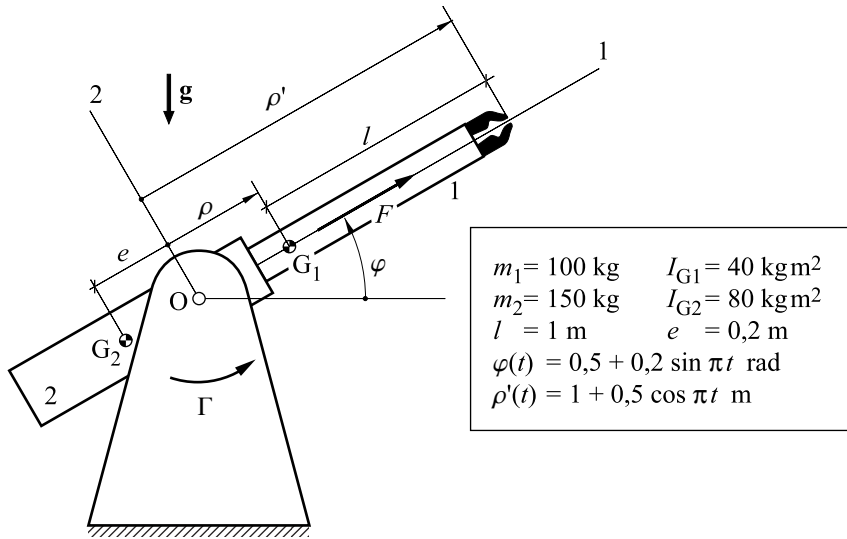
Problemas

P 8-1 Determinar para el manipulador de la figura:

a) El par motor Γ y la fuerza del actuador lineal F .

b) Las fuerzas y los momentos de enlace en la articulación O y al par prismático.

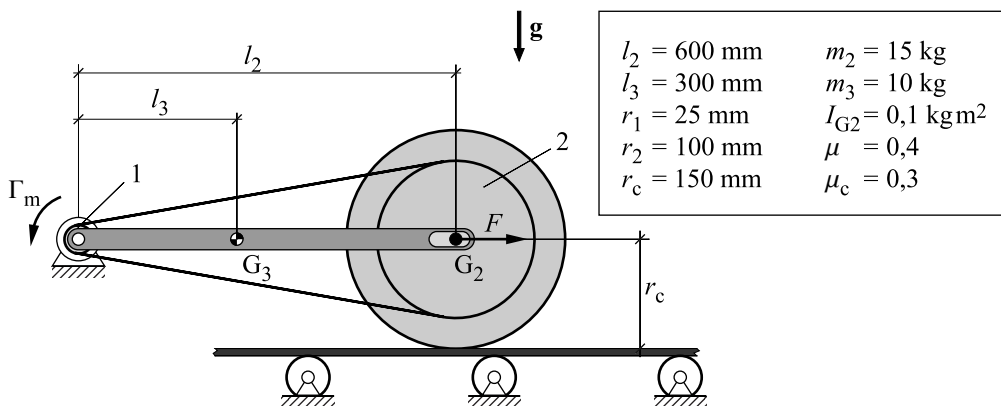
Particularizar los resultados para los valores y las funciones temporales $\varphi(t)$ y $\rho'(t)$ dadas, a fin de obtener una representación gráfica y analizar los resultados obtenidos.



P 8-2 El sistema de la figura está previsto para impulsar placas sobre una superficie horizontal. La polea 1 del eje motor es de inercia despreciable y la 2 es solidaria al rodillo. La placa se ha de mover con velocidad constante.

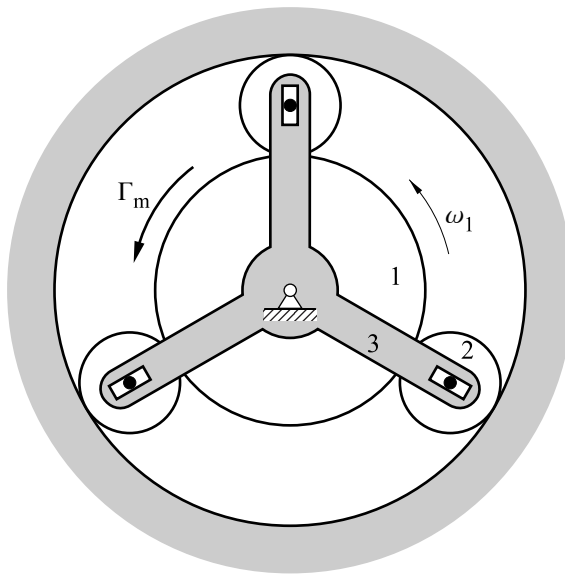
a) Si la correa de transmisión no desliza respecto a las poleas, determinar el par motor Γ_m –horario y antihorario– máximo que se puede aplicar sin que el rodillo resbale respecto a la placa. El coeficiente de rozamiento entre la placa y el rodillo es μ .

b) Si la correa es plana y su coeficiente de rozamiento con las poleas es μ_c , determinar la tensión F mínima para garantizar la situación anterior.



P 8-3 En el tren epicycloidal con ruedas de fricción de la figura, la rueda 1 y el soporte 3 están articulados a la carcasa y la corona exterior es fija. Si se estima que el rozamiento en cada una de las articulaciones es Γ_f independiente del movimiento y del estado de carga del tren:

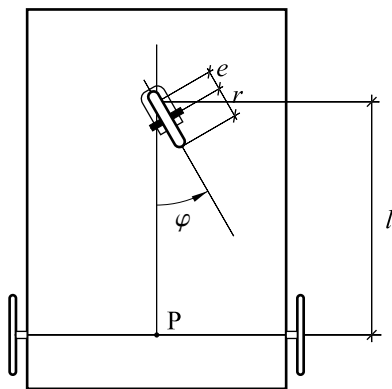
- Determinar el par Γ_m que se ha de aplicar a la rueda 1 a causa de los rozamientos citados.
- ¿Cómo se modificaría éste par si el soporte estuviese articulado a la rueda 1 y esta a la carcasa?



$$\begin{aligned} r_1 &= 240 \text{ mm} \\ r_2 &= 180 \text{ mm} \\ \Gamma_f &= 0,1 \text{ Nm} \end{aligned}$$

P 8-4 Un carrito de compras dispone de dos ruedas de orientación fija y de una tercera rueda que puede modificar la orientación gracias a una articulación de eje vertical –rueda *caster*–. La

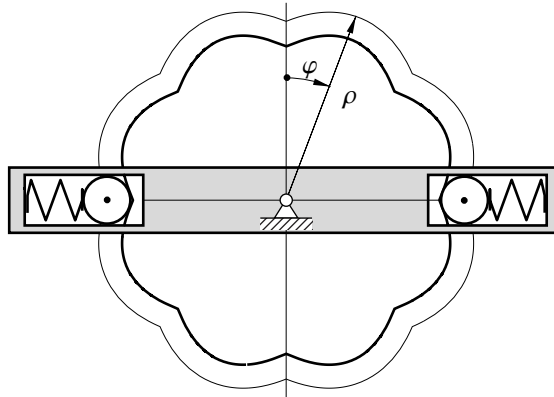
distancia entre el eje de la articulación vertical y el eje de la rueda es e . En ambas articulaciones hay rozamiento no despreciable que se puede caracterizar por unos pares Γ_V y Γ_H , respectivamente. En las otras articulaciones el rozamiento es despreciable y las ruedas no deslizan respecto del suelo. Si el carrito se encuentra en reposo en un plano horizontal, determinar el torsor en P de las fuerzas exteriores que se ha de aplicar para iniciar:



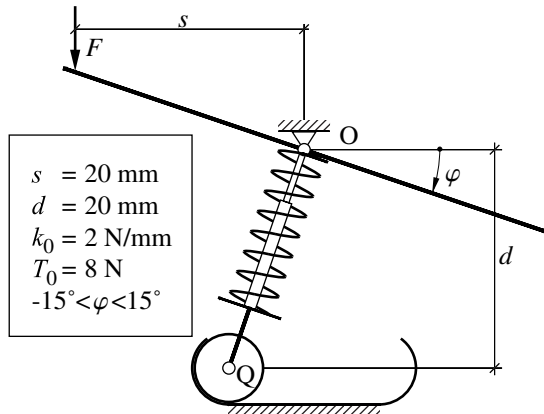
$$\begin{aligned} l &= 600 \text{ mm} \\ r &= 50 \text{ mm} \\ e &= 30 \text{ mm} \\ \Gamma_H &= 0,5 \text{ Nm} \\ \Gamma_V &= 0,6 \text{ Nm} \end{aligned}$$

- Una translación hacia adelante.
- Un giro alrededor de P en sentido antihorario.

- P 8-5** El mecanismo de la figura sirve para posicionar angularmente la barra. La leva tiene el perfil adecuado para que los centros de los rodillos –de 5 mm de diámetro– describan la curva de radio $\rho(\varphi) = 25(1 + |0,1 \sin(4\varphi)|)$ mm. Los muelles, de constante $k = 10$ N/mm, tienen una compresión inicial $T_0 = 25$ N para $\varphi = 0^\circ$. Determinar el par necesario para cambiar de posición.

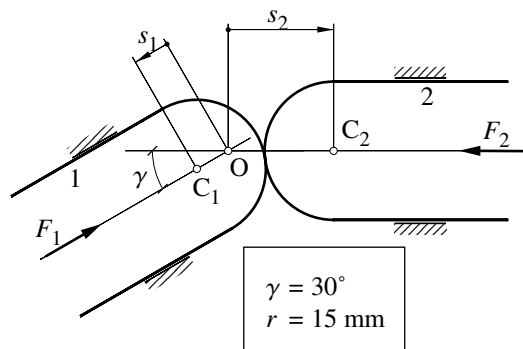


- P 8-6** El esquema de la figura corresponde a un interruptor basculante. El muelle, de constante k_0 , se somete a una compresión T_0 para $\varphi = 0^\circ$. Determinar la fuerza vertical F –que se mantiene a una distancia s de O – que se ha de hacer para accionar el interruptor.



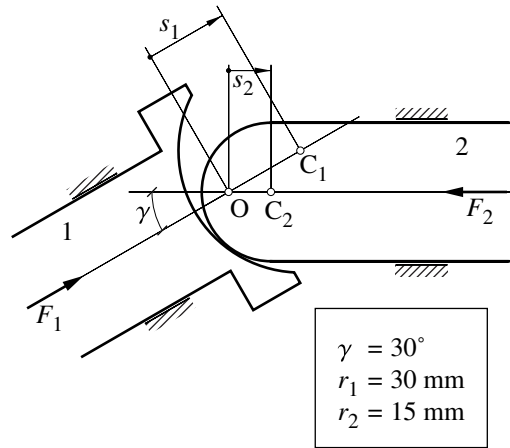
- P 8-7** Las barras 1 y 2 de la figura se mantienen en contacto por sus extremos, que son esféricos de radio r y centros C_1 y C_2 , respectivamente. Determinar:

- La ecuación de enlace entre las coordenadas s_1 y s_2 así como sus márgenes de variación.
- La relación entre las fuerzas F_1 y F_2 si el rozamiento y las inercias son despreciables.



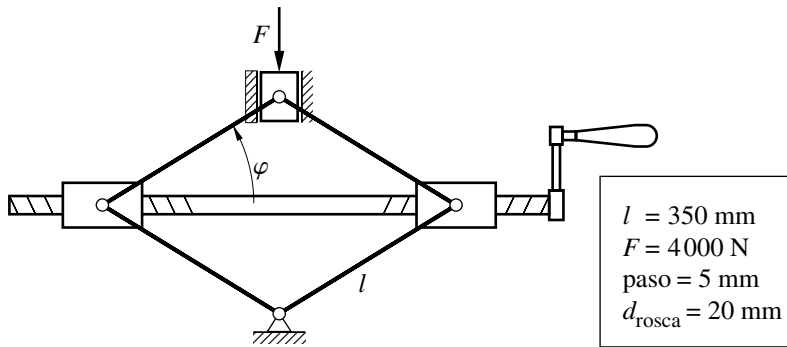
P8-8 Las barras 1 y 2 de la figura se mantienen en contacto a través de dos superficies cilíndricas de sección circular de radios r_1 y r_2 y centros C_1 y C_2 . Determinar:

- La ecuación de enlace entre las coordenadas s_1 y s_2 .
- La relación entre las fuerzas F_1 y F_2 si el rozamiento es despreciable y el sistema está en reposo.

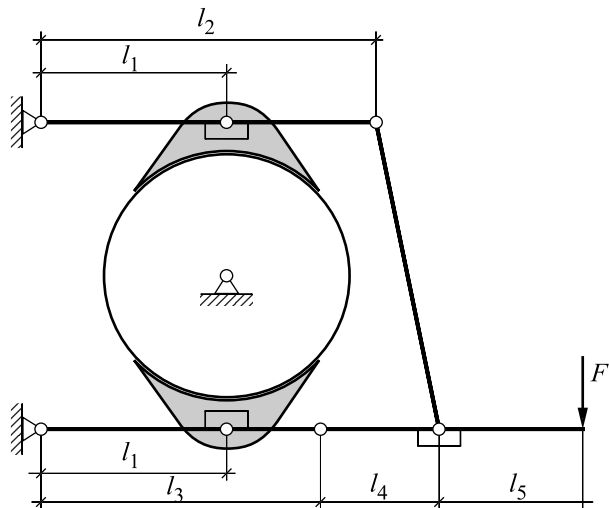


P8-9 En el gato de la figura, el rozamiento en las articulaciones es despreciable. Determinar:

- El par de accionamiento Γ si el rozamiento en el tornillo es despreciable.
- El mínimo coeficiente de rozamiento en el tornillo para que sea irreversible.
- El par de accionamiento –para subir y bajar– con el rozamiento anterior.



P8-10 La figura muestra las barras de accionamiento de las dos zapatas articuladas iguales de un freno. Determinar la relación que han de cumplir las longitudes de las barras para que la resultante de las fuerzas de las dos zapatas sobre el tambor sea nula.



9 Trabajo y potencia en máquinas

La energía que aparece en todos los ámbitos de la física: mecánica, electricidad, fisicoquímica, etc., es un nexo de unión entre estos y otros campos como la economía y el medio ambiente.

La relación de una máquina con el entorno se puede concretar en dos puntos: la tarea que realiza, que comporta una manipulación mecánica del entorno, y un balance energético, que se realiza contabilizando: *a)* energía suministrada, *b)* energía útil para la realización de la tarea encomendada, *c)* energía disipada en las resistencias pasivas necesaria pero no aprovechable y *d)* energía mecánica de la máquina, cinética más potencial.

La energía suministrada puede provenir de diferentes fuentes –electricidad, combustibles, viento, etc. La energía disipada usualmente lo es en forma de calor y la energía útil puede serlo para realizar tareas diferentes: deformar materiales en una prensa, comprimir un gas en un compresor, mover un generador eléctrico en un aerogenerador, etc.

9.1 Teorema de la energía

El teorema de la energía aplicado a un sistema mecánico plantea el balance siguiente entre dos estados mecánicos 1 y 2:

$$\Delta E_c]_1^2 = \sum W]_1^2$$

donde $\Delta E_c]_1^2$ es la variación de la energía cinética y $\sum W]_1^2$ es el trabajo realizado por todas las fuerzas, tanto exteriores aplicadas sobre el sistema como interiores a él.

Cálculo de la energía cinética. La energía cinética es la magnitud aditiva

$$E_c = \frac{1}{2} \sum m(P)v^2(P)$$

donde $m(P)$ es la masa de la partícula P y $v(P)$ es su velocidad. Para calcularla se ha de sumar la energía cinética de todos los componentes del sistema. Para un sistema multisólido formado por un conjunto de N miembros, enlazados o no, la energía cinética se calcula, teniendo en cuenta su aditividad y la descomposición baricéntrica, según la expresión:

$$E_c = \sum_{i=1}^N \left(E_{c_i \text{traslación}} + E_{c_i \text{rotación}} \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v^2(G_i) + E_{c_{RTG_i}} \right)$$

donde $v(G_i)$ es la velocidad del centro de inercia de cada miembro y $E_{c_{RTG_i}}$ es la energía cinética de cada miembro en la referencia que se traslada con su centro de inercia –energía cinética de rotación. Si el miembro es un sólido rígido, su energía cinética de rotación se calcula con la expresión:

$$E_{c_{RTG_i}} = \frac{1}{2} \omega_i^T [I_{G_i}] \omega_i$$

siendo ω_i la velocidad angular e I_{G_i} el tensor de inercia respecto al centro de inercia. Para sólidos con movimiento plano, esta expresión se calcula de forma simplificada como $E_{c_{RTG_i}} = \frac{1}{2} I_G \omega^2$, donde I_G es el momento de inercia en G para la dirección perpendicular al plano del movimiento.

Cálculo del trabajo. El trabajo hecho por una fuerza $F(P)$ aplicada en un punto P es

$$W_{11}^2 = \int_1^2 \mathbf{F}(P) \cdot d\mathbf{s}(P) = \int_1^2 \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{v}(P) dt$$

La primera integral es a lo largo de la trayectoria que P recorre para ir de la posición 1 a la 2 y la segunda es a lo largo del tiempo gastado para ir de 1 a 2.

Ejemplo 9.1 El rodillo de la figura 9.1 parte del reposo y, arrastrado por la fuerza horizontal F constante, gira sin deslizar sobre el plano horizontal. Su energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2} m(\omega r)^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} (mr^2 + I_G) \omega^2$$

y el incremento de energía cinética desde el estado inicial es

$$\Delta E_c \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (mr^2 + I_G) \omega^2$$

De las fuerzas que actúan sobre el rodillo, sólo F hace trabajo

$$W_{11}^2 = \int_1^2 F ds(G) = F \Delta s$$

siendo Δs el camino recorrido por el centro del rodillo. El peso mg no hace trabajo, ya que en todo instante es perpendicular a la velocidad de G, $mg \cdot v(G) = 0$ y las fuerzas de enlace en el punto de contacto J tampoco, ya que están aplicadas en cada instante a un punto de velocidad nula –el rodillo no desliza.

Entonces el teorema de la energía establece que

$$F \Delta s = \frac{1}{2} (mr^2 + I_G) \omega^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I_G}{r^2} \right) v^2$$

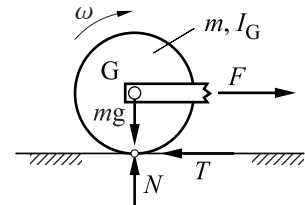


Fig. 9.1 Rodillo

Energía mecánica. Si en el teorema de la energía se hace la distinción entre fuerzas que deriven de potencial –conservativas– y fuerzas no conservativas, y el trabajo hecho por las primeras se escribe como $W_c = -\Delta E_p]_1^2$, donde E_p es su energía potencial, se obtiene

$$\Delta E_c]_1^2 = -\Delta E_p]_1^2 + W_{nc}]_1^2 \rightarrow \Delta(E_c + E_p)]_1^2 = W_{nc}]_1^2 \rightarrow \Delta E_m]_1^2 = W_{nc}]_1^2$$

La suma $E_c + E_p = E_m$ –energía mecánica del sistema– es función únicamente del estado mecánico del sistema, de las posiciones, por lo que se refiere a la energía potencial, y de las posiciones y velocidades, por lo que se refiere a la energía cinética. W_{nc} –trabajo de las fuerzas no conservativas– no es función del estado mecánico del sistema y se puede interpretar como el incremento de la energía mecánica causado tanto por los fenómenos mecánicos como por los no mecánicos que intervienen en la evolución del sistema al pasar del estado 1 al 2. Entonces, los fenómenos no mecánicos –en los que intervienen magnitudes diferentes de masa, espacio y tiempo– se manifiestan en el contexto de la mecánica como fuerzas no conservativas que realizan un trabajo asociado a la energía que intercambian. Así, por ejemplo, en un motor eléctrico la interacción eléctrica entre el estator y el rotor se manifiesta en la mecánica como el par motor que realiza un trabajo función de la energía eléctrica suministrada al motor.

Elección del sistema. Al aplicar el teorema de la energía, como en todo análisis dinámico, se ha de poner mucha atención en la definición del sistema que se estudia y especificar correctamente tanto el contenido como la interacción con el exterior. El contenido interviene en el cálculo de la energía cinética y del trabajo de las fuerzas interiores, como también en el de las fuerzas de inercia si la referencia de estudio no es galileana. La interacción con el exterior interviene en el cálculo del trabajo de las fuerzas exteriores y de la energía intercambiada.

9.2 Principio de conservación de la energía

El principio de conservación de la energía establece, para toda evolución de un sistema entre dos estados,

$$\text{Energía recibida del exterior} = \text{energía cedida al exterior} + \text{energía acumulada en el interior}$$

Por ejemplo, en una máquina equipada con un motor eléctrico (Fig. 9.2), el principio de conservación de la energía aplicado al sistema formado por la máquina más el motor se puede expresar como

$$E_{\text{eléctrica suministrada}} = \Delta E_{m \text{ mot.}} + \Delta E_{m \text{ máq.}} + \Delta E_{\text{térmica mot.}} + \Delta E_{\text{térmica máq.}} + E_{\text{dissipada mot.}} + E_{\text{dissipada máq.}} + E_{\text{útil}} \quad (9.1)$$

ya que al sistema se le suministra energía eléctrica, que se convierte en energía mecánica –por ejemplo, cinética– y en otras –por ejemplo, térmica, a causa de las resistencias pasivas. Parte de esta energía térmica puede permanecer en el sistema y aumentar su temperatura $-\Delta E_{\text{térmica}}$ – y parte es liberada al exterior $-E_{\text{dissipada}}$.

Ya que la experiencia pone de manifiesto que un motor eléctrico sólo es capaz de transformar una parte de la energía eléctrica que se le suministra en energía mecánica, en forma de trabajo $-W_{\text{mot.}}$ –

hecho por el par que el eje hace sobre el exterior, el principio de la conservación de la energía aplicado al sistema motor (Fig. 9.3) se puede escribir como

$$E_{\text{eléctrica suministrada}} = W_{\text{motor}} + \Delta E_{\text{m mot.}} + \Delta E_{\text{térmica mot.}} + E_{\text{dissipada en el motor}} \quad (9.2)$$

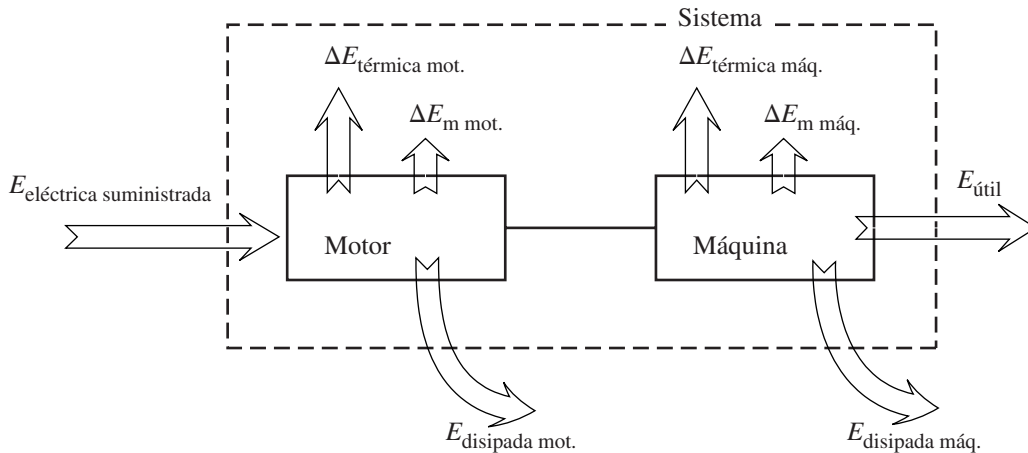


Fig. 9.2 Flujos de energía en un sistema formado por una máquina y un motor

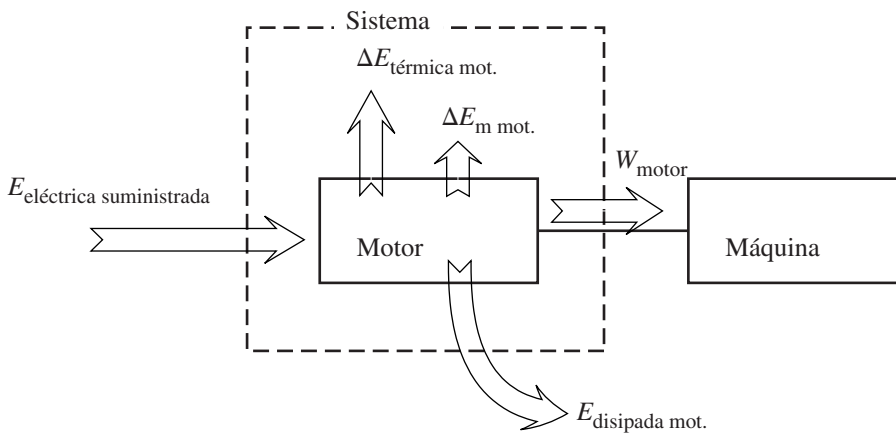


Fig. 9.3 Flujos de energía considerando como sistema al motor

Entonces, igualando ambas ecuaciones 9.1 y 9.2 y reagrupando se obtiene

$$W_{\text{motor}} = \Delta E_{\text{m máq.}} + \Delta E_{\text{térmica máq.}} + E_{\text{dissipada máq.}} + E_{\text{útil}} \quad (9.3)$$

La expresión 9.3 se puede escribir directamente considerando el sistema máquina (Fig. 9.4).

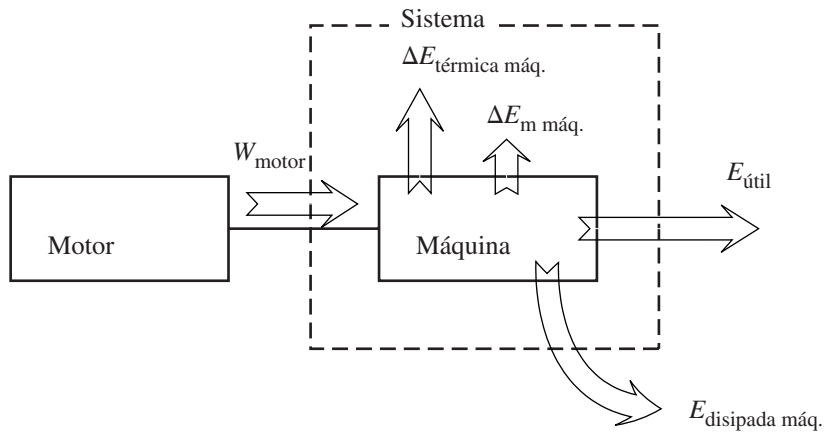


Fig. 9.4 Flujos de energía considerando como sistema la máquina

En el ámbito de las máquinas, se ha de pensar que el teorema de la energía es una aplicación del principio de la conservación de la energía, de manera que:

- Al utilizar el teorema de la energía no se han de incluir necesariamente todos los fenómenos no mecánicos a través del trabajo hecho por las fuerzas no conservativas, sino que todos o algunos se pueden incluir directamente a través de la energía que tienen asociada.
- En el principio de la conservación de la energía, una parte de la energía almacenada puede ser mecánica en forma de energía cinética y/o potencial y una parte de la energía intercambiada puede ser mecánica, en forma de trabajo hecho por fuerzas.

Así, por ejemplo, en un motor de combustión interna el principio de la conservación de la energía establece:

$$E_{\text{combustible}} = \Delta E_{\text{m}} + \Delta E_{\text{térmica}} + E_{\text{disipada}} + W_{\text{motor}}$$

expresión que se puede reescribir aplicando el teorema de la energía.

$$\Delta E_{\text{c}} = E_{\text{combustible}} + W_{\text{fuerzas conservativas}} - W_{\text{motor}} - \Delta E_{\text{térmica}} - E_{\text{disipada}}$$

9.3 Versión diferencial del teorema de la energía

Frecuentemente es útil expresar el teorema de la energía en versión diferencial

$$\dot{E}_{\text{c}} = \sum P, \text{ donde } P = \dot{W} \text{ es la potencia asociada a cada una de las fuerzas.}$$

Para un sólido rígido, la derivada temporal de la energía cinética es

$$\dot{E}_{\text{c}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 (G) + \frac{1}{2} \omega^T \cdot [I_G] \cdot \omega \right) = m v(G) \cdot a(G) + ([I_G] \cdot \omega) \cdot \alpha$$

De nuevo, la derivada de la energía cinética asociada a la rotación se calcula de forma simplificada para un sólido con movimiento plano como $I_G \omega \alpha$.

Cálculo de la potencia. La potencia asociada a una fuerza $F(P)$ aplicada en un punto P es

$$P = F(P) \cdot v(P), \text{ donde } v(P) \text{ es la velocidad de P.}$$

La potencia asociada a un sistema de fuerzas que actúan sobre un sólido rígido y caracterizadas mediante su torsor en el punto O –fuerza resultante F y momento resultante $M(O)$ – es, tal como se demuestra en el capítulo 8,

$$P = F \cdot v(O) + M(O) \cdot \omega$$

En máquinas con funcionamiento cíclico, se acostumbra a trabajar con magnitudes medias en un ciclo. Así, por ejemplo, la potencia de un motor –magnitud característica de todos los motores– es la potencia media a lo largo de un ciclo.

En sistemas de un grado de libertad y sin resistencias pasivas que dependan de las fuerzas de enlace, la aplicación de esta versión del teorema de la energía da la ecuación del movimiento –es totalmente equivalente a aplicar el método de las potencias virtuales con un movimiento virtual compatible con los enlaces. Si en lugar de aplicar esta versión del teorema de la energía, se aplica la versión integrada, se obtiene una integral primera de la ecuación del movimiento.

Ejemplo 9.2 En el rodillo del ejemplo 9.1 la derivada de la energía cinética es $\dot{E}_c = (mr^2 + I_G)\omega\alpha$ y la potencia asociada a la fuerza es $P = F \cdot v(G) = F \omega r$ de manera que la aplicación de la versión diferencial del teorema de la energía lleva a la ecuación

$$Fr = (mr^2 + I_G)\alpha$$

Esta expresión es, de hecho, una ecuación diferencial de segundo orden en la coordenada φ que describe el ángulo girado por el rodillo, $\ddot{\varphi} = \alpha$. Por lo tanto, es la ecuación del movimiento del rodillo. La ecuación encontrada en el ejemplo 9.1 es una ecuación diferencial de primer orden en φ , ya que $\Delta s = \varphi r$ y

$$Fr = \frac{1}{2}(mr^2 + I_G)\dot{\varphi}$$

La equivalencia entre el teorema de la energía y el principio de la conservación de la energía es válida, evidentemente, en versión diferencial.

9.4 Rendimiento

En una máquina o subconjunto –reductor, motor, etc.– se define el rendimiento η como el cociente entre la potencia considerada útil y la potencia suministrada:

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{suministrada}}}$$

Para un período determinado de funcionamiento entre dos estados 1 y 2, el rendimiento medio es

$$\eta = \frac{E_{\text{útil}} \int_1^2}{E_{\text{suministrada}} \int_1^2}$$

En un motor eléctrico, considerando la potencia eléctrica como suministrada y la potencia mecánica como útil, el rendimiento electromecánico es

$$\eta_{\text{electromecánico}} = \frac{P_{\text{mecánica del motor}}}{P_{\text{eléctrica suministrada}}}, \text{ donde } P_{\text{mecánica del motor}} = \Gamma_{\text{motor}} \omega_{\text{motor}}$$

y el rendimiento mecánico de la máquina que acciona si, por ejemplo, es un elevador, es

$$\eta_{\text{mecánico}} = \frac{\Delta E_{\text{p carga}}}{W_{\text{motor}}}$$

Así, el rendimiento global del elevador, calculado a partir de la energía eléctrica suministrada y el trabajo útil realizado es

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{p carga}}}{E_{\text{eléctrica suministrada}}}$$

En ocasiones, y según la definición que se haga, el rendimiento de una máquina puede ser superior a 1; este es el caso de una bomba de calor si el rendimiento se define como

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{E_{\text{térmica suministrada por la bomba}}}{E_{\text{eléctrica consumida}}}$$

En otros casos, el rendimiento puede ser nulo; por ejemplo, en un vehículo que sale de un punto (estado 1) y retorna al punto de partida (estado 2), si se define el rendimiento

$$\eta_{\text{vehículo}} = \frac{\Delta E_{\text{m}} \int_1^2}{E_{\text{combustible consumido}} \int_1^2}$$

Las resistencias pasivas de las máquinas, que se oponen a sus movimientos, son una de las causas principales del rendimiento no unitario de éstas y están causadas por fenómenos diversos:

- Fricción entre las superficies de contacto en los enlaces.
- Histéresis en la deformación de los sólidos.
- Viscosidad en el movimiento de fluidos –lubricantes, refrigerantes, etc.
- Avance de sólidos dentro de fluidos –resistencias aerodinámicas, etc.

Todas ellas se describen con modelos adecuados. Así, por ejemplo, para la fricción entre superficies secas se utiliza el modelo de roce seco de Coulomb y las resistencias pasivas que ocasiona son función de las fuerzas y/o los momentos que actúan sobre la máquina –carga de la máquina–, ya que estas modifican las fuerzas de enlace y, como consecuencia de esto, las fuerzas tangenciales. Las

resistencias pasivas también pueden ser función de la velocidad; este es el caso, por ejemplo, de las resistencias aerodinámicas proporcionales al cuadrado de la velocidad del sólido respecto al fluido.

Las resistencias pasivas realizan un trabajo negativo que corresponde a potencia no útil P_{rp} , pero que es necesario suministrar a la máquina para que funcione. En una máquina en que toda la potencia perdida se pueda considerar asociada a resistencias pasivas, se puede escribir la relación

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{sum.}}} = \frac{P_{\text{sum.}} - P_{rp}}{P_{\text{sum.}}} = 1 - \frac{P_{rp}}{P_{\text{sum.}}}$$

El rendimiento de una máquina, igual que las resistencias pasivas, puede depender de su carga y de su velocidad. Evidentemente, la dependencia no será la misma.

Así, por ejemplo, en una máquina accionada por un motor de par Γ_m y velocidad ω_m que funciona en régimen estacionario, si se expresa la potencia disipada en función de las resistencias pasivas reducidas al eje del motor Γ_{rp} (ver apartado 9.5) se puede escribir

$$\begin{aligned} P_{rp} &= (1 - \eta) P_{\text{sum.}} = (1 - \eta) \Gamma_m \omega_m = \Gamma_{rp} \omega_m \\ (1 - \eta) \Gamma_m &= \Gamma_{rp} \end{aligned}$$

Si se toma la hipótesis de que el rendimiento es independiente de la carga –el par motor es función directa de esta–, las resistencias pasivas crecen con ella. Si la hipótesis que se hace es que las resistencias pasivas son independientes de la carga, entonces el rendimiento aumenta a medida que lo hace la carga.

$$\eta = 1 - \frac{\Gamma_{rp}}{\Gamma_m}$$

Si las hipótesis anteriores no se ajustan suficientemente a la realidad o la máquina no está en régimen estacionario, se puede prever la utilización de un rendimiento función de la velocidad o, de una manera más detallada, de un modelo adecuado de las diferentes resistencias pasivas presentes e incluirlas a través del trabajo asociado.

9.5 Inercia y fuerza reducidas a una coordenada

Es usual caracterizar el comportamiento inercial de una máquina de un grado de libertad mediante su inercia reducida; así, por ejemplo, se tiene la inercia reducida en la rotación del eje –o simplemente al eje– de un motor o la inercia reducida a la rotación del eje de entrada de un reductor.

Frecuentemente también se utiliza el concepto de fuerza reducida para globalizar y simplificar un planteamiento, como por ejemplo la fuerza de tracción reducida al movimiento del enganche –o simplemente en el enganche– de un tractor ferroviario o las resistencias pasivas de un vehículo reducidas a su movimiento de avance.

Inercia reducida. En un sistema mecánico de un grado de libertad, si se toma como tal a la derivada \dot{q} de la coordenada generalizada q , la expresión de la energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2 \quad (9.4)$$

donde $m(q)$ recibe el nombre de inercia *reducida a la coordenada q* .

Si la coordenada generalizada utilizada es un ángulo, la inercia reducida tiene dimensiones de momento de inercia, y si es una coordenada lineal, tiene dimensiones de masa. Se ha de subrayar que, en principio, la inercia reducida es función de la configuración.

Ejemplo 9.3 En un reductor como el de la figura 9.5 de relación de transmisión τ , el momento axial de inercia del eje 1 de entrada es I_1 y el del eje 2 de salida es I_2 . La energía cinética del reductor es

$$E_c = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}(I_1 + \tau^2 I_2)\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I_1}{\tau^2} + I_2\right)\omega_2^2$$

Así, la inercia del reductor es

$$\begin{array}{ll} \text{reducida al eje 1} & I_{\text{red. 1}} = I_1 + \tau^2 I_2 \\ \text{reducida al eje 2} & I_{\text{red. 2}} = I_1/\tau^2 + I_2 \end{array}$$

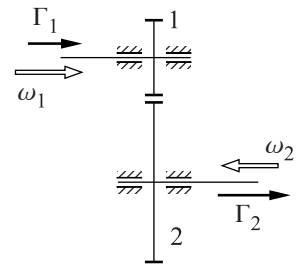


Fig. 9.5 Reductor de una etapa

Fuerza reducida. Para un conjunto de fuerzas aplicadas a puntos de un sistema de un grado de libertad, la fuerza reducida a la coordenada generalizada q es aquel factor que, multiplicado por su derivada temporal \dot{q} , da la potencia del conjunto de fuerzas.

$$\sum (\mathbf{F}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P})) = F_{\text{red.}}(q, \dot{q}) \dot{q}$$

Si la coordenada generalizada independiente es un ángulo, la fuerza reducida tiene unidades de momento y suele llamarse par *reducido*. Si es una coordenada lineal, tiene dimensiones de fuerza.

Ejemplo 9.4 En el reductor del ejemplo anterior, sobre el eje 1 actúa el par Γ_1 , procedente del motor, y sobre el eje 2 el par Γ_2 , procedente de la máquina que acciona. La potencia de estos dos pares es

$$P = \Gamma_1\omega_1 - \Gamma_2\omega_2 = (\Gamma_1 - \tau\Gamma_2)\omega_1 = \left(\frac{\Gamma_1}{\tau} - \Gamma_2\right)\omega_2$$

de manera que para a estos dos pares el par reducido es:

$$\begin{array}{ll} \text{al eje de entrada} & \Gamma_{\text{red. 1}} = \Gamma_1 - \tau \Gamma_2 \\ \text{al eje de salida} & \Gamma_{\text{red. 2}} = \Gamma_1/\tau - \Gamma_2 \end{array}$$

En una máquina de un grado de libertad, si las fuerzas que actúan diferentes de las de enlace no son función de éstas, la ecuación del movimiento se puede determinar a partir de la inercia reducida y de la fuerza reducida. Derivando la expresión 9.4 de la inercia reducida

$$\dot{E}_c = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 \right) = \frac{1}{2} m_q(q) \dot{q}^3 + m(q) \dot{q} \ddot{q} \quad \text{con} \quad m_q(q) = \frac{\partial m(q)}{\partial \dot{q}}$$

y aplicando el teorema de la energía, $\dot{E}_c = \sum P = F_{\text{red.}}(q, \dot{q}) \dot{q}$, la ecuación del movimiento queda

$$m(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} m_q(q) \dot{q}^2 = F_{\text{red.}}(q, \dot{q}) \quad (9.5)$$

En el reductor que hemos tomado como ejemplo en este apartado, la ecuación del movimiento puede ser, dependiendo de si se toma la velocidad del eje 1 o del eje 2 como independiente,

$$\begin{aligned} (I_1 + \tau^2 I_2) \dot{\omega}_1 &= \Gamma_1 - \tau \Gamma_2 \\ (I_1 / \tau^2 + I_2) \dot{\omega}_2 &= \Gamma_1 / \tau - \Gamma_2 \end{aligned}$$

Es interesante observar que, si la inercia reducida es constante y la fuerza reducida sólo es función de la velocidad $F_{\text{red.}}(\dot{q})$ –hipótesis aceptables en un buen número de casos–, la ecuación 9.5 es integrable por separación de variables

$$\begin{aligned} m \dot{q} &= F_{\text{red.}}(\dot{q}); \quad m \frac{d}{dt} \dot{q} = F_{\text{red.}}(\dot{q}), \text{ de donde} \\ \int dt &= m \int \frac{1}{F_{\text{red.}}(\dot{q})} d\dot{q} \end{aligned}$$

de manera que se tiene el tiempo necesario para conseguir una determinada velocidad.

Ejemplo 9.5 El yugo escocés de la figura 9.6 tiene la manivela equilibrada, de manera que su centro de inercia se encuentra sobre la articulación O fija. Para estudiar su cinemática se toma el vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = \{x, \varphi\}^T$. Las ecuaciones de enlace geométrica y cinemática son

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ \dot{x} &= -r \dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

La energía cinética del mecanismo función de $\dot{\mathbf{q}}$ es

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\varphi}^2$$

La potencia desarrollada por el par Γ y la fuerza F aplicada a la manivela se puede expresar como

$$P = -F \dot{x} + \Gamma \dot{\varphi}$$

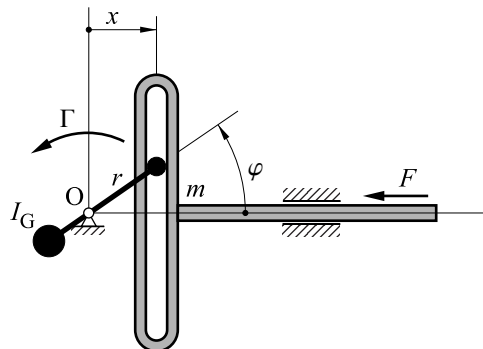


Fig. 9.6 Yugo escocés

Si se toma φ como coordenada independiente, la expresión de la energía cinética y de la potencia adoptan la forma:

$$E_c = \frac{1}{2}(I_G + mr^2 \sin^2 \varphi)\dot{\varphi}^2 ; P = (Fr \sin \varphi + \Gamma)\dot{\varphi}$$

Así, la inercia reducida $m(\varphi)$ y la fuerza reducida $F_{\text{red.}}(\varphi)$, para la coordenada φ , tienen la expresión:

$$m(\varphi) = I_G + mr^2 \sin^2 \varphi ; F_{\text{red.}}(\varphi) = \Gamma + Fr \sin \varphi$$

En este caso, al ser la coordenada independiente angular, $m(\varphi)$ tiene unidades de momento de inercia y $F(\varphi)$ de momento. La ecuación del movimiento 9.5, si las resistencias pasivas son despreciables, es

$$(I_G + mr^2 \sin^2 \varphi)\ddot{\varphi} + (mr^2 \sin \varphi \cos \varphi)\dot{\varphi}^2 = \Gamma + Fr \sin \varphi$$

9.6 Régimen de funcionamiento de las máquinas. Grado de irregularidad

Se define el régimen de funcionamiento de una máquina como su manera de funcionar a lo largo del tiempo. Así, se distingue entre régimen *permanente* o *intermitente* según si la máquina funciona constantemente o no durante el período de observación.

Si el régimen es permanente se dice que es *estacionario*, desde el punto de vista mecánico, si las velocidades o sus propiedades estadísticas se mantienen a lo largo del tiempo. En caso contrario, se dice que es *transitorio*.

Un régimen estacionario es cíclico si las variables de estado de la máquina se repiten periódicamente.

Frecuentemente se considera que una máquina tiene un régimen determinado en función del estudio que se quiere realizar y del tiempo de estudio que se considere. Así, por ejemplo, el funcionamiento de un ascensor a lo largo de un día se considera en régimen intermitente, mientras que si se quiere estudiar un viaje del ascensor se considerará que hay un transitorio de arranque –aceleración–, un régimen estacionario –velocidad constante– y un transitorio de parada –frenada.

Grado de irregularidad. En un régimen estacionario, el grado de irregularidad δ es un indicador de la variación de las velocidades al entorno del valor medio. Para una máquina de un grado de libertad, y utilizando la velocidad generalizada \dot{q} , el grado de irregularidad se puede definir como

$$\delta = \frac{\sigma_{\dot{q}}}{\mu_{\dot{q}}}, \text{ donde } \sigma_{\dot{q}} \text{ es la desviación estándar y } \mu_{\dot{q}} \text{ la mediana de } \dot{q}.$$

En los estudios clásicos para máquinas rotativas con funcionamiento cíclico, se define el grado de irregularidad de la manera siguiente:

$$\delta = \frac{\omega_{\text{máx.}} - \omega_{\text{mín.}}}{\omega_{\text{mediana}}} \quad (9.6)$$

con $\omega_{\text{mediana}} = 2 \pi n$, siendo n la frecuencia de giro del eje principal de la máquina, y $\omega_{\text{máx.}}$ y $\omega_{\text{mín.}}$ las velocidades angulares máxima y mínima de este eje en una vuelta.

Este grado de irregularidad aparece típicamente en máquinas con funcionamiento cíclico accionadas por motores de par variable a lo largo del ciclo, como por ejemplo los motores de explosión, o en máquinas con carga variable a lo largo del ciclo, como por ejemplo en las prensas.

Cálculo del grado de irregularidad de un sistema de un grado de libertad con funcionamiento cíclico. Para la determinación estricta del grado de irregularidad se ha de conocer la evolución de \dot{q} a lo largo de un ciclo, ya sea como función del tiempo, $\dot{q}(t)$, o como trayectoria en el plano de fases, $f(q, \dot{q}) = 0$.

Un procedimiento utilizado frecuentemente en el diseño para la determinación aproximada del grado de irregularidad según la expresión 9.6 consiste en suponer que la inercia reducida es aproximadamente constante $-m-$ y aplicar el teorema de la energía entre los estados de energía cinética máxima y mínima. De esta manera, se iguala el incremento de energía cinética entre estos estados con la máxima variación de energía $\Delta E_{\text{máx.}}$ en un ciclo y se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{máx.}} &= \frac{1}{2} m (\dot{q}_{\text{máx.}}^2 - \dot{q}_{\text{mín.}}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{q}_{\text{máx.}} + \dot{q}_{\text{mín.}}) (\dot{q}_{\text{máx.}} - \dot{q}_{\text{mín.}}) \approx \\ &\approx m \dot{q}_{\text{mediana}} (\dot{q}_{\text{máx.}} - \dot{q}_{\text{mín.}}) = m \dot{q}_{\text{mediana}}^2 \delta \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$\text{de donde } \delta \approx \frac{\Delta E_{\text{máx.}}}{m \dot{q}_{\text{mediana}}^2}$$

9.7 Volantes

La introducción de un volante en una cadena cinemática puede tener, en principio, los objetivos y efectos siguientes:

1. Regularizar las velocidades, fuerzas y pares, es decir, disminuir su grado de irregularidad.
2. Disponer de una cierta capacidad para almacenar energía a corto plazo.
3. Almacenar elevadas cantidades de energía para utilizar a largo término.
4. Modificar el comportamiento vibratorio de la cadena.

El primero se basa en el efecto dinámico de aumentar la inercia de la cadena y, por tanto, disminuir las aceleraciones.

El segundo efecto se basa en el aumento de energía cinética de la cadena que permite intercambios de energía, más o menos rápidos y elevados, con modificaciones moderadas de las velocidades. En ocasiones la cadena cinemática sin el volante podría no tener suficiente energía cinética para vencer una demanda exterior de energía necesaria para continuar el funcionamiento, por ejemplo en prensas, motores de combustión y compresores.

Estos dos puntos se suelen considerar en regímenes estacionarios cíclicos, si bien esto no es estrictamente necesario.

El tercer efecto se basa en la capacidad del volante para acumular una cantidad de energía suficiente para garantizar el funcionamiento de la cadena durante un tiempo, encargándose de las pérdidas por resistencias pasivas y demandas exteriores de energía –acumulador cinético. En este punto, el volante tiene claramente un régimen transitorio, ya que comienza con mucha energía cinética y acaba con muy poca. Son ejemplos de aplicación de los volantes como acumuladores de energía algunos vehículos hoy por hoy experimentales y los vehículos de juguete con motor de inercia.

El estudio del comportamiento vibratorio de la cadena cinemática se ha de realizar en el contexto de las vibraciones mecánicas, tema que no se incluye en este texto.

Dinámica de una cadena cinemática con volante. Con el fin de estudiar el efecto de un volante en una cadena cinemática con régimen cíclico, en la figura 9.7 se presenta el esquema de un motor y la máquina accionada, entre los que se ha introducido un volante.

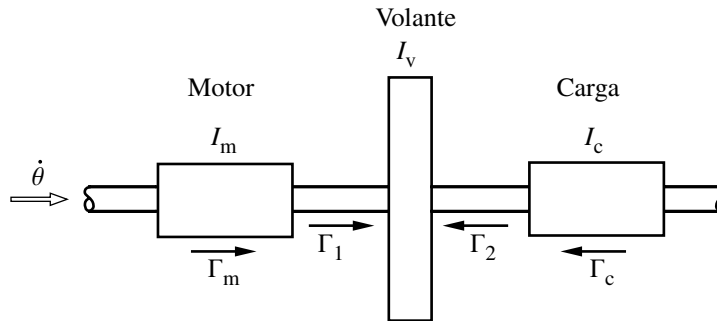


Fig. 9.7 Esquema de una cadena motor-volante-carga

Γ_1, Γ_2	Pares que el eje izquierdo y el eje derecho hacen sobre el volante, respectivamente
Γ_m	Par motor reducido para la rotación del volante
Γ_c	Par de carga reducido para la rotación del volante
I_m, I_c	Inercias reducidas del motor y de la carga para la rotación del volante
I_v	Momento de inercia del volante respecto al eje de giro

Aplicando el teorema de la energía a toda la cadena cinemática, se obtiene la ecuación del movimiento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (I_m(\theta) + I_v + I_c(\theta)) \dot{\theta}^2 \right) = (\Gamma_m - \Gamma_c) \dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2} (I_{m\theta} + I_{c\theta}) \dot{\theta}^2 + (I_m(\theta) + I_v + I_c(\theta)) \ddot{\theta} = \Gamma_m - \Gamma_c \quad \text{con} \quad \begin{cases} I_{m\theta} = \frac{\partial I_m(\theta)}{\partial \theta} \\ I_{c\theta} = \frac{\partial I_c(\theta)}{\partial \theta} \end{cases}$$

de donde

$$\ddot{\theta} = \frac{(\Gamma_m - \Gamma_c) - \frac{1}{2} (I_{m\theta} + I_{c\theta}) \dot{\theta}^2}{(I_m(\theta) + I_v + I_c(\theta))}$$

Aplicando el teorema de la energía al motor, a la carga y al volante se obtienen los pares Γ_1 y Γ_2

$$\Gamma_1 = \Gamma_m - I_m(\theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}I_{m\theta}\dot{\theta}^2$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 - I_v\ddot{\theta} = \Gamma_c + I_c(\theta)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}I_{c\theta}\dot{\theta}^2$$

De la expresión de $\ddot{\theta}$ se puede ver que, al introducir un volante de momento de inercia importante respecto a las inercias reducidas $I_m(\theta)$ y $I_c(\theta)$, se disminuye la aceleración angular $\ddot{\theta}$; por tanto, la fluctuación de velocidad angular disminuye y, en consecuencia, lo hace el grado de irregularidad.

Al disminuir la aceleración angular $\ddot{\theta}$, el par Γ_1 que el motor hace sobre el volante tiende a igualarse al par motor Γ_m y el de la derecha Γ_2 al par resistente de la carga Γ_c . Se ha de observar que Γ_1 no tiende a igualarse con Γ_2 ya que, si bien $\ddot{\theta}$ es pequeño, el momento de inercia I_v es grande y, por lo tanto, el producto de los dos no es despreciable. Aunque el par motor Γ_m sea fluctuante, como por ejemplo en un motor alternativo, el par que recibe la carga Γ_c lo es sólo en función de la aceleración $\ddot{\theta}$ del eje. El caso contrario se puede presentar en una prensa donde el par resistente Γ_c presenta fluctuaciones muy importantes y, en cambio, puede ser accionada por un motor de par Γ_m sensiblemente constante si se consigue una aceleración angular pequeña.

Directamente del teorema de la energía se puede razonar la necesidad de un volante e, incluso, hacer un cálculo estimativo sencillo de la inercia requerida. Este razonamiento se basa en el hecho que, al ser $\Delta E_c = \Sigma W$, si la inercia es grande se pueden presentar fluctuaciones de energía importantes, ya sea a causa del motor o de la carga, sin que la variación de la velocidad tenga que ser grande.

Ejemplo 9.6 Como ejemplo, se plantea el cálculo del momento de inercia estimado para el volante de una punzonadora. Su eje ha de girar a una velocidad mediana de n vueltas por segundo, con un grado de irregularidad no superior a δ . Realiza una operación por vuelta que dura una determinada fracción de vuelta y que requiere una energía E_d . Como se ha visto, para el cálculo del grado de irregularidad la variación máxima de energía se aproxima mediante $m \omega_{\text{mediana}}^2 \delta$ (Ec. 9.7), de manera que

$$m = \frac{E_d}{(2\pi n)^2 \delta}$$

es aproximadamente la inercia reducida a la rotación del eje adecuada para los elementos móviles de la máquina. A partir de esta inercia, se puede calcular el momento de inercia del volante simplemente por diferencia con la inercia reducida mediana del resto de la cadena cinemática, que en cálculos conservadores a veces se desprecia.

9.8 Curvas características velocidad-fuerza de las máquinas

En los sistemas de un grado de libertad, sean motores o máquinas conducidas, sus parámetros dinámicos se pueden caracterizar, como se ha visto, por la inercia y la fuerza reducidas a una coordenada. Frecuentemente la inercia reducida es sensiblemente constante y la fuerza reducida sólo es función de la velocidad; en algunas ocasiones esta función de la velocidad depende de un

parámetro de control. Este es el caso, por ejemplo, de un motor eléctrico, en el que la inercia reducida al eje es constante y el par motor es función de la velocidad, fijada la tensión de alimentación.

En la figura 9.8 se representa, para a un motor eléctrico, la relación entre la velocidad angular y el par utilizando la tensión como parámetro. Las curvas que se obtienen son las curvas características velocidad-par motor.

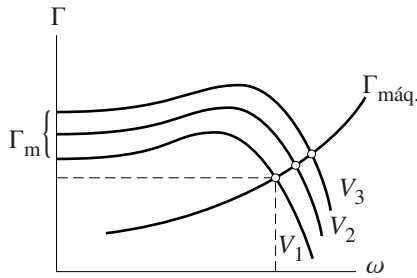


Fig. 9.8 Ejemplos de curvas características

Para una máquina conducida, la curva característica velocidad-par viene dada por el par necesario para accionar la máquina en régimen estacionario – aceleración despreciable. Este par, conocido como *par resistente*, es del mismo módulo y sentido opuesto al par reducido de todas las fuerzas y los momentos que se oponen al movimiento de la máquina.

Si en el mismo gráfico (Fig. 9.8) se dibujan el par motor y el par resistente, es evidente que los puntos de intersección de ambos pares –que se pueden determinar analíticamente si se conocen las funciones analíticas–

corresponden a régimen estacionario ya que, al igualarse los dos pares, la aceleración es nula. En este gráfico se manifiesta cómo se modifica la velocidad al variar el parámetro de control; en este caso, la tensión de alimentación del motor.

También se puede observar que el funcionamiento del volante a estas velocidades es estable; si por alguna razón la velocidad disminuye, el par motor será más grande que el par resistente, de manera que la máquina se volverá a acelerar. Si por alguna razón la máquina se acelera, el par resistente será más grande que el par motor y la máquina se frenará.

La intersección de las curvas características del motor y de la máquina podría ser como la que se representa al punto B de la figura 9.9. En este caso, la velocidad sería inestable: si la velocidad de la máquina disminuye por debajo de ésta, la máquina acabará parándose y, si aumenta, lo hará hasta el punto A.

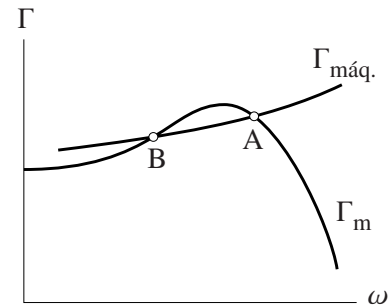


Fig. 9.9 Intersección inestable (punto B) de una curva característica de un motor y de una máquina

Las curvas características se han presentado utilizando ejemplos del caso más usual, en que el movimiento es de rotación. No se han de olvidar, las situaciones con movimiento de translación, como es el caso de los cilindros hidráulicos, que hacen una fuerza función de la velocidad que depende de la apertura de la válvula de comando.

Problemas

P 9-1 En una máquina, se necesita una potencia en el eje de entrada $P_{\text{máq.}} = 2 \text{ kW}$ y una velocidad de rotación $n_{\text{máq.}} = 100 \text{ min}^{-1}$. Se dispone de un motor que gira a $n_{\text{mot.}} = 750 \text{ min}^{-1}$ y de un reductor de rendimiento $\eta = 0,8$. Determinar:

- La potencia y el par motor.
- El par en el eje de entrada de la máquina.

P 9-2 Una máquina es accionada por un motor a través de un reductor. El motor gira a $n_{\text{mot.}} = 3000 \text{ min}^{-1}$ y suministra una potencia $P_{\text{mot.}} = 1 \text{ kW}$. El rendimiento del reductor es $\eta = 0,8$ y la relación de reducción es $i = 10$. Determinar la potencia y el par en el eje de entrada de la máquina.

P 9-3 La inercia de una máquina reducida a la rotación del eje de entrada es $I = 5 \text{ kg m}^2$. Las resistencias pasivas reducidas en esta rotación equivalen a un par resistente $\Gamma_{\text{rp}} = 5 \text{ N m}$. En el momento de acelerar, el motor suministra a la máquina un par $\Gamma_{\text{m}} = 20 \text{ N m}$. Determinar:

- La aceleración del eje de entrada.
Una vez conseguida la velocidad de régimen $n = 1200 \text{ min}^{-1}$ el motor pasa a suministrar el par necesario para mantenerla. En estas condiciones determinar:
- La potencia del motor.

P 9-4 Un vehículo con una determinada marcha tiene una relación de transmisión $\tau = 0,2$ entre el eje del motor y el eje de las ruedas, que son de diámetro $d = 0,6 \text{ m}$. El rendimiento de la transmisión –caja de cambios, diferencial, etc.– es $\eta = 0,75$. En un cierto instante, el motor gira a $n_{\text{mot.}} = 3000 \text{ min}^{-1}$ y genera un par $\Gamma_{\text{m}} = 100 \text{ N m}$. Determinar:

- El par al eje de las ruedas.
- Las resistencias pasivas diferentes de las de la transmisión, reducidas a la velocidad de avance si ésta es constante y el vehículo se mueve en terreno horizontal.

P 9-5 En un automóvil de cuatro marchas, las relaciones de transmisión para cada marcha $\tau = \omega_{\text{secundario}}/\omega_{\text{primario}}$ son: $\tau_1 = 11/42$, $\tau_2 = 16/37$, $\tau_3 = 22/31$, $\tau_4 = 26/27$. El eje secundario actúa sobre los ejes de las ruedas (paliers) a través de un engranaje cónico de relación de transmisión $\tau_c = 12/37$ y un diferencial. El diámetro de las ruedas es $d_r = 600 \text{ mm}$.

Las características inerciales del vehículo son:

- Masa total: $m_t = 800 \text{ kg}$
- Momento de inercia axial de cada rueda: $I_r = 0,36 \text{ kg m}^2$
- Momento de inercia del eje primario: $I_1 = 0,025 \text{ kg m}^2$
- Momento de inercia del eje secundario: $I_2 = 0,025 \text{ kg m}^2$
- Momento de inercia del diferencial + paliers: $I_3 = 0,025 \text{ kg m}^2$

Nota: I_1 incluye la inercia reducida de las ruedas dentadas del secundario que están permanentemente engranadas con las del primario.

Determinar, para cada marcha:

- La inercia del vehículo reducida a la rotación del motor.
- La aceleración del vehículo en una subida del 2% si el par motor es $\Gamma_{\text{m}} = 100 \text{ N m}$ y las resistencias pasivas son despreciables.

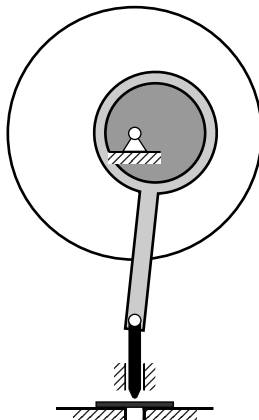
P 9-6 Un motor acciona, a través de un reductor de relación de reducción $i = 3$, una máquina que necesita en el eje de entrada un par $\Gamma_{\text{máq.}} = 100 \text{ N m}$ a $n_{\text{máq.}} = 500 \text{ min}^{-1}$. El rendimiento electromecánico del motor es $\eta_{\text{mot.}} = 0,9$ y el del reductor es $\eta_{\text{red.}} = 0,8$. Determinar:

- La velocidad angular y el par al eje del motor.
- La potencia eléctrica necesaria.
- Las resistencias pasivas del reductor reducidas a la rotación del eje motor.

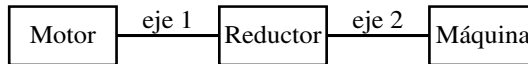
P 9-7 Un compresor alternativo ha de proporcionar diariamente 10 m^3 de aire comprimido a una presión absoluta de 8 bar. Determinar:

- El consumo eléctrico diario, en las hipótesis siguientes:
 - Compresión politrópica ($p v^{1,1} = \text{constante}$) del aire a partir de las condiciones atmosféricas (tomar $p_{\text{atmosférica}} = 1 \text{ bar}$)
 - Rendimiento electromecánico del motor eléctrico de accionamiento $\eta_{\text{mot.}} = 0,9$
 - Rendimiento mecánico del compresor $\eta_{\text{comp.}} = 0,8$
- Si se utiliza un motor de 1 kW y 1500 min^{-1} , ¿qué volante necesitará para garantizar un grado de irregularidad de un 1%?

P 9-8 Una punzonadora ha de realizar 5 operaciones por segundo y cada operación de punzonado requiere 80 J . Determinar el momento de inercia del volante para garantizar un grado de irregularidad inferior al 2%. Cuando la máquina funciona en régimen estacionario con este volante se desconecta el motor; ¿cuántas operaciones hará y cuánto tardará en pararse?



- P 9-9** Un motor eléctrico acciona, a través de un reductor de relación de transmisión $\tau = 0,16$, una máquina que gira a $n_{m\grave{a}q.} = 120 \text{ min}^{-1}$ y en cada vuelta realiza una operación de trabajo que requiere una energía $E_{op.} = 2 \text{ kJ}$ concentrada en una pequeña fracción del ciclo.



$$\begin{array}{llll}
 \eta_{mot.} = 0,8 & \eta_{red.} = 0,7 & \Gamma_{rp} = 50 \text{ N m} & E_{op.} = 2 \text{ kJ} \\
 I_{mot.} = 1 \text{ kg m}^2 & I_{red.} = 3 \text{ kg m}^2 & I_{m\grave{a}q.} = 50 \text{ kg m}^2 & \\
 & \tau = 0,16 & n_{m\grave{a}q.} = 120 \text{ min}^{-1} &
 \end{array}$$

Los elementos de la cadena motor-reductor-máquina tienen las características siguientes:

Motor	Rendimiento electromecánico	$\eta_{mot.} = 0,8$
	Inercia reducida al eje 1	$I_{mot.} = 1 \text{ kg m}^2$
Reductor	Rendimiento	$\eta_{red.} = 0,7$
	Inercia reducida al eje 1	$I_{red.} = 3 \text{ kg m}^2$
Máquina	Inercia reducida al eje 2	$I_{m\grave{a}q.} = 50 \text{ kg m}^2$
	Resistencias pasivas reducidas al eje 2	
	(Independientes de la velocidad y de la carga)	$\Gamma_{rp} = 50 \text{ N m}$

Determinar:

- La potencia eléctrica mediana que el motor consume.
- La potencia media disipada en el reductor y sus resistencias pasivas reducidas al eje 1 para la velocidad nominal.
- La inercia total reducida al eje 1 y una estimación del grado de irregularidad.
- El momento de inercia de un volante en el eje 2 que reduzca el grado de irregularidad a 0,03. Razonar las ventajas y los inconvenientes de colocarlo en uno u otro eje.

La máquina no realiza trabajo en los transitorios de puesta en marcha ni parada y finalmente se ha equipado con un volante en el eje 1, de momento axial de inercia $I_v = 5 \text{ kg m}^2$.

- ¿Cuál es la aceleración del eje motor si en un cierto instante este ejerce un par $\Gamma_m = 60 \text{ N m}$ y las resistencias pasivas del reductor continúan siendo las calculadas en el apartado b ?

- P 9-10** Un motor eléctrico de corriente continua alimentado a tensión constante suministra un par linealmente decreciente con la velocidad de giro $\Gamma = \Gamma_0(1 - \omega/\omega_{m\grave{a}x.})$ y su rendimiento electromecánico crece linealmente con la velocidad de giro, $\eta = \omega/\omega_{m\grave{a}x.}$
 $\Gamma_0 = 0,1 \text{ N m}$; $I = 10^{-3} \text{ kg m}^2$; $\omega_{m\grave{a}x.} = 600 \pi \text{ rad/s}$

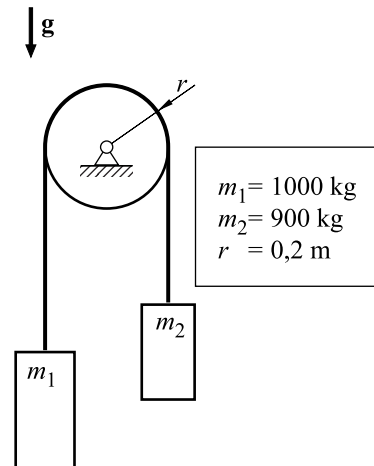
- Determinar la potencia mecánica suministrada y la potencia eléctrica consumida función de la velocidad de giro.

Se quiere utilizar un motor de estas características para acelerar un volante de momento de inercia I . Si las resistencias pasivas se consideran despreciables:

- Determinar la velocidad angular y la energía eléctrica consumida en función del tiempo.

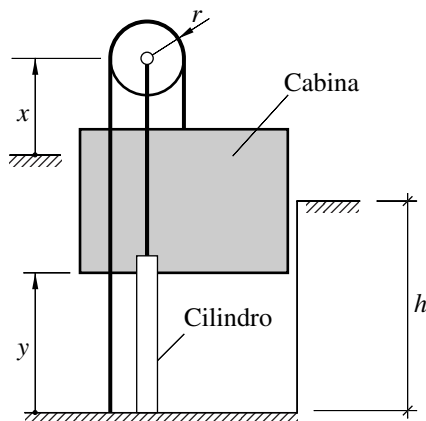
P9-11 Con tal de tener maniobras suaves en el elevador de la figura, se impone en las arrancadas y paradas una aceleración $a = 6 v_{\text{máx.}} (\lambda - \lambda^2) / t_0$ para $0 < \lambda \leq 1$, con $v_{\text{máx.}} = 2 \text{ m/s}$, $t_0 = 3 \text{ s}$ y $\lambda = t / t_0$. Se consideran despreciables la inercia del cable y la de las poleas, así como las resistencias pasivas. El desplazamiento vertical de una maniobra es de 10 m. Determinar:

- Las curvas de aceleración, velocidad y desplazamiento.
- El par motor y la potencia necesarios.
- La energía consumida en una maniobra.



P9-12 Un elevador hace diariamente 500 maniobras levantando una carga de 1800 kg – tara = 1000 kg, carga útil = 800 kg– a una altura de 10 m y bajando en vacío. El contrapeso es de 1400 kg. El arranque y la frenada se hacen con aceleración constante de 1 m/s^2 durante 2 s. Si se consideran despreciables las resistencias pasivas, como también las inercias no citadas, ¿cual es la energía consumida diariamente?

P9-13 El ascensor de la figura, accionado mediante el cilindro hidráulico que desplaza el eje de la polea de radio $r = 0,2 \text{ m}$ tiene un recorrido vertical $h = 8 \text{ m}$ y sus inercias son:



Masa de la cabina con carga	$m_c = 1000 \text{ kg}$
Masa de la polea y de la varilla	$m_p = 300 \text{ kg}$
Momento de inercia de la polea	$I_p = 2 \text{ kg m}^2$
Cable de inercia despreciable	

El arranque y la frenada se hacen con una aceleración constante $a = 0,5 \text{ m/s}^2$ durante 2 s. El rendimiento del cilindro es $\eta_{\text{ch}} = 1 - 0,2 v^2$, siendo v la velocidad de la varilla respecto al cilindro, y el rendimiento global del grupo hidráulico que genera la presión de alimentación del cilindro es $\eta_{\text{gh}} = 0,7$. Si las resistencias pasivas en los pares cinemáticos son despreciables y el cable no se desplaza respecto de la polea, determinar:

- El tiempo total de una maniobra de subida.
- La inercia de todo el ascensor, reducida al movimiento de la varilla del cilindro hidráulico.
- La fuerza del cilindro en el tramo de aceleración de una maniobra de subida.
- La energía consumida en el tramo de velocidad constante de una maniobra de subida.

P9-14 Un vehículo tiene las características siguientes: masa total, $m = 1200$ kg; Radio de las ruedas, $r_r = 0,3$ m; momento de inercia axial de las ruedas, $I = 1$ kg m² (por rueda). Para la marcha escogida: relación de transmisión, $\omega_{\text{ruedas}}/\omega = 0,2$; momento de inercia reducido a la rotación del motor de sus partes móviles y de la transmisión, $I_t = 0,5$ kg m².

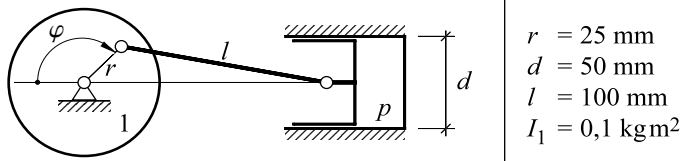
La potencia del motor para una posición del acelerador función de la velocidad angular ω del motor cuando ésta se encuentra entre 100 rad/s y 500 rad/s se puede aproximar por $P = 80 (u + 0,5 u^2 - 0,5 u^3)$ kW con $u = \omega/\omega_0$ y $\omega_0 = 500$ rad/s.

Al avanzar por un terreno horizontal las resistencias pasivas son: $F = 500 + c v^2$ N con $c = 4$ N/(m/s)² y v velocidad en m/s. Determinar:

- La curva de par motor función de su velocidad angular.
- La velocidad máxima en dichas condiciones.
- El tiempo que tarda en pasar de 9 m/s a 24 m/s.
- La energía disipada en el proceso del apartado anterior.

P9-15 En un compresor, cuando la frecuencia de giro del cigüeñal es de 50 Hz, la presión en el interior del cilindro (medida experimentalmente) es $p(\varphi) = (4 + 6 \cos(\varphi + 3,75) + \cos(2\varphi + 1,5)) 10^5$ Pa

- Si las resistencias pasivas son despreciables, determinar la potencia media del motor.
- Si el motor suministra una potencia constante –a lo largo de un ciclo–, determinar la velocidad angular lo largo de un ciclo.

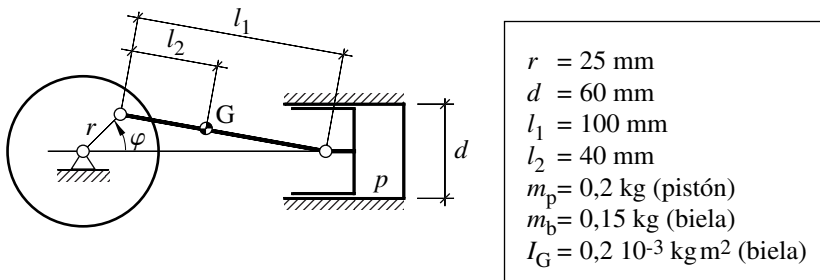


P9-16 En un motor monocilíndrico de 4 tiempos, la presión en el interior del cilindro se puede aproximar, cuando gira a 50 Hz, por la expresión:

$$p(\varphi) = 10^7 (1,05 e^{-\varphi} - e^{-2\varphi}) + e^{\varphi} \quad 0 \leq \varphi \leq 4\pi$$

Determinar, despreciando las resistencias pasivas:

- La potencia mediana y el par medio del motor.
- El par en el eje del motor a causa de la presión de los gases.
- La inercia de un volante que, colocado en el eje del motor, garantice un grado de irregularidad inferior a un 1%.
- La ecuación del movimiento si sobre el eje actúa un par resistente igual al par medio del motor y se ha colocado un volante de momento de inercia I .



- P 9-17** En un motor de corriente continua con excitación independiente, el par Γ_m en el eje y su velocidad angular ω están relacionados en primera aproximación por la expresión:

$$\Gamma_m = \frac{cV}{R} - \frac{c^2\omega}{R}, \text{ donde}$$

c (N m/A) es función del campo magnético y otras características constructivas,
 V es la tensión de alimentación,
 R es la resistencia del circuito del inducido y
 la intensidad de alimentación –considerando sólo la del inducido– es $I = (V - c\omega)/R$.

Para accionar un pequeño taladro se utiliza un motor que tiene las características siguientes: $c = 0,02$ N m/A, $V = 12$ V, $R = 2 \Omega$. La inercia reducida de la máquina en rotación del motor es $I_r = 0,2 \cdot 10^{-3}$ kg m² y sus resistencias pasivas reducidas también en rotación de este eje se evalúan en $M_R = 20 + 0,05 \omega$ Nmm.

Si se conecta el taladro en vacío, determinar:

- La velocidad de régimen estacionario sin carga, ω_0 .
- El tiempo que tarda en llegar a $0,8 \omega_{\text{máx}}$.
- La energía consumida y la energía disipada –en el circuito eléctrico y en las resistencias pasivas mecánicas– hasta llegar a $0,8 \omega_{\text{máx}}$.
- Si el taladro gira con velocidad angular constante, determinar, en función de ésta, la potencia eléctrica consumida, la potencia mecánica aprovechada y el rendimiento.

- P 9-18** El par motor de un motor de corriente continua se puede aproximar mediante la expresión:

$$\Gamma_m = c(V - c\omega)/R, \text{ donde}$$

V (tensión de alimentación) = 1200 V

R (resistencia del inducido) = 2 Ω

c (factor proporcional al campo magnético de excitación) = 4 V/(rad/s)

ω (velocidad angular del eje)

$(V - c\omega)/R$ (intensidad de alimentación del inducido)

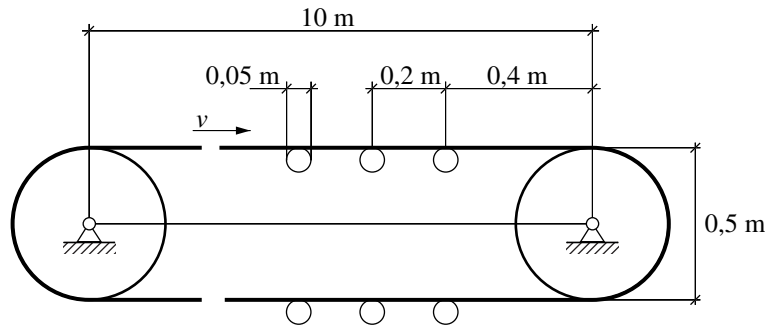
Determinar:

- La curva de par motor, Γ_m , y la potencia suministrada, P_{mec} , en función de ω .
- La velocidad angular máxima, $\omega_{\text{máx}}$, a que puede llegar el motor. La potencia máxima, $P_{\text{máx}}$, que puede suministrar el motor y la velocidad angular a la que ésta se produce.
- El rendimiento $\eta = P_{\text{mec}}/P_{\text{consumida}}$ en función de ω .

Si la carga del motor es equivalente a una inercia reducida en su eje $I_{\text{red}} = 100$ kg m² y las resistencias pasivas son despreciables, determinar:

- El tiempo necesario para pasar del reposo a $0,8 \omega_{\text{máx}}$.
- La energía consumida y la energía disipada en el proceso de arranque anterior.

- P9-19** Uno de los tambores de la cinta transportadora de la figura es accionado por un motor de corriente alterna a través de un reductor de relación de transmisión $\tau = 0,01$.



Las características inerciales de los diferentes elementos son:

Banda:	$\rho_b = 5 \text{ km/m}$ (densidad lineal)
Rodillos:	$I_c = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ (momento de inercia respecto al eje de giro)
Tambores:	$I_t = 0,5 \text{ kg m}^2$ (momento de inercia respecto al eje de giro)
Reductor + motor:	$I_r = 0,6 \text{ kg m}^2$ (inercia reducida a la rotación del eje del motor)

El par motor Γ_m función de la velocidad angular de giro ω viene dado por la expresión:

$$\Gamma_m = \frac{\Gamma_1 s \operatorname{sgn}(\omega_0)}{s^2 + s_c^2 + k_1 |s|}, \quad \text{donde } s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \quad (\text{deslizamiento})$$

con $\omega_0 = 50 \pi \text{ rad/s}$; $s_c = 0,2$; $k_1 = 0,4$ y $\Gamma_1 = 10 \text{ Nm}$

Las resistencias pasivas del conjunto, reducidas a la rotación del eje del motor, se evalúan según la expresión $\Gamma_R = \Gamma_2(1 + k_2 |\omega|)$, con $\Gamma_2 = 2 \text{ N m}$ y $k_2 = 10^{-2} \text{ s}$

Si no hay deslizamiento en ningún contacto, determinar:

- La velocidad máxima $v_{\text{máx}}$ a que puede llegar la cinta transportadora.
- El tiempo que tarda en pasar del reposo a $0,9 v_{\text{máx}}$.
- La energía mecánica disipada al pasar del reposo a $0,9 v_{\text{máx}}$.
- El rendimiento mecánico cuando el motor gira a $0,8 \omega_0$.
- El tiempo en la maniobra de frenada desde $v_{\text{máx}}$ hasta el reposo si se realiza:
 - desconectando el motor
 - invirtiendo la polaridad del motor ($\omega_0 \rightarrow -\omega_0$)

Resultados de los problemas

Capítulo 2

P 2-1 b) 1 grado de libertad.

c) $x^2 + y^2 = l^2$; $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$

P 2-2 b)
$$\begin{cases} r \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 = 0 \\ r \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2 - x = 0 \end{cases}$$

d) Para φ_1 no existen puntos muertos.

$$\varphi_2 = \pm 30^\circ$$

$$x = 1 \text{ m i } x = 3 \text{ m}$$

P 2-3 a) 2 grados de libertad.

b) Ecuación de enlace geométrica: $y_1 + y_3 - 2y_2 = 0$

P 2-4 a) 3 grados de libertad.

b)
$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + s - x_0 = 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 - y_0 = 0 \end{cases}$$

P 2-5 a) 4 grados de libertad.

P 2-6 Con una biela, $\{\varphi_1 = n\pi, \varphi_2 = m\pi \forall n, m \in \mathbb{Z}\}$ son bifurcaciones.
Con dos bielas, hay redundancia.

P 2-7

P 2-8 a) 2 grados de libertad.

b) $x = 48 + (\rho_1 - \rho_2) / 2$ en milímetros

$$\frac{h}{2} = \sqrt{99 - 15(\rho_1 + \rho_2) - \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)^2} - 6 \text{ en milímetros}$$

P 2-9 b) $\varphi_2 = 2 \varphi_1$

- P 2-10** a) $4-3(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) + 2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$
 b) $\begin{cases} \varphi_1 = 38,94^\circ \\ \varphi_2 = 70,53^\circ \end{cases}, \begin{cases} \varphi_1 = -38,94^\circ \\ \varphi_2 = -70,53^\circ \end{cases}$ son puntos muertos para φ_2 . Los puntos muertos para φ_1 corresponden a los ángulos cambiados.
 c) $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ es una bifurcación.

P 2-11

- P 2-12** a) 3 grados de libertad.

- P 2-13** a) 2 grados de libertad.
 b) $x = 900 - 3\rho_2$; $y = 4\rho_1$ en milímetros

- P 2-14** a) 5 grados de libertad.
 b) 2 grados de libertad.

Capítulo 3

P 3-1
$$\phi_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \cos \varphi_1 \\ 1 & 0 & \sin \varphi_1 - \frac{3}{2} \frac{2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{(12 + 4 \sin \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

- P 3-2** a)
$$\phi_q = \begin{bmatrix} 2(x - \rho_1) & 2y & -2(x - \rho_1) & 0 \\ 2x & 2(y - \rho_2) & 0 & -2(y - \rho_2) \end{bmatrix}$$

 c) Segmento de (5, 4, 5) a (3, 376, 3, 688) en metros

- P 3-3** a) $\dot{y} = -\frac{dr \sin \varphi}{y} \dot{\varphi}$
 Para $l = 4$, $y = \sqrt{7}$; $y = \sqrt{15}$ son puntos muertos para y .
 b) Para $l = 3$, $\begin{cases} y = 2\sqrt{2} \\ y = 0, \alpha = n\pi \end{cases}$ son puntos muertos para y .
 Para $l = 2$, $\begin{cases} y = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ son puntos muertos para y .
 $\begin{cases} \varphi = 75,5^\circ \\ \varphi = -75,5^\circ \end{cases}$ son puntos muertos para φ .

- P 3-4** a)
$$\begin{bmatrix} -r \cos \varphi_1 & l \cos \varphi_2 - x \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \\ r \sin \varphi_1 & -l \sin \varphi_2 - x \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \end{bmatrix}$$

 c) $\begin{cases} x = 54,54 \text{ mm}; \dot{x} = \dot{\varphi}_1 r \\ x = 23,98 \text{ mm}; \dot{x} = -\dot{\varphi}_1 r \end{cases}$
 d) $\begin{cases} \varphi_2 = 62,73^\circ; \dot{\varphi}_2 = -\dot{\varphi}_1 / 3 \\ \varphi_2 = 32,23^\circ; \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 / 5 \end{cases}$

- P 3-5** a) $\dot{\varphi}_2 = 0$; $\dot{s} = -l_1 \dot{\varphi}_1$
 b) $\phi_q = \begin{bmatrix} l_1 \cos \varphi_1 & l_3 \cos \varphi_2 & 0 \\ -l_1 \sin \varphi_1 & -l_3 \sin \varphi_2 & -1 \end{bmatrix}$
 c) Punto muerto para $\varphi_2 \varphi_2 = 0$, $\dot{s} = -\dot{\varphi}_1 l_1$
 Punto muerto para $s = 0,283$ mm, $\dot{\varphi}_2 = -\frac{l_1}{l_3} \dot{\varphi}_1$

P 3-6

- P 3-7** b) $v_{\text{desl.}} = \frac{d}{dt} |\overline{\mathbf{EP}}| = 40\omega$ mm/s
 $a_{\text{desl.}} = \frac{d^2}{dt^2} |\overline{\mathbf{EP}}| = -40\omega^2$ mm/s²

- P 3-8** $\omega_{s2} = -0,25$ rad/s; $\omega_{s3} = 0,25$ rad/s; $\omega_{s4} = 0,25$ rad/s; $\omega_{s5} = 0,25$ rad/s
 $\alpha_{s2} = -0,0625$ rad/s²; $\alpha_{s3} = -0,125$ rad/s²; $\alpha_{s4} = -0,25$ rad/s²; $\alpha_{s5} = 0,1875$ rad/s²

- P 3-9** $\omega_{s2} = 2$ rad/s; $\omega_{s3} = -0,5$ rad/s; $\omega_{s4} = 0,5$ rad/s; $v_{\text{desl.}}(\mathbf{F}) = -10$ mm/s;
 $\alpha_{s2} = 3$ rad/s²; $\alpha_{s3} = -0,5$ rad/s²; $\alpha_{s4} = 0,833$ rad/s²; $a_{\text{desl.}}(\mathbf{F}) = 39,17$ mm/s²;

- P 3-10** $\begin{Bmatrix} \omega_{s2} \\ \omega_{s3} \\ \omega_{s4} \\ \omega_{s5} \\ v_{\text{desl.}}(\mathbf{D}) \\ v_{\text{desl.}}(\mathbf{G}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,1515 \text{ rad/s} \\ 0,1818 \text{ rad/s} \\ -0,1818 \text{ rad/s} \\ -0,2727 \text{ rad/s} \\ 2,7272 \text{ mm/s} \\ 4,0909 \text{ mm/s} \end{Bmatrix}$; $\begin{Bmatrix} \alpha_{s2} \\ \alpha_{s3} \\ \alpha_{s4} \\ \alpha_{s5} \\ a_{\text{desl.}}(\mathbf{D}) \\ a_{\text{desl.}}(\mathbf{G}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,2438 \text{ rad/s}^2 \\ -0,0546 \text{ rad/s}^2 \\ 0,0215 \text{ rad/s}^2 \\ 0,2616 \text{ rad/s}^2 \\ 0,1729 \text{ mm/s}^2 \\ 5,908 \text{ mm/s}^2 \end{Bmatrix}$

- P 3-11** a) $\begin{bmatrix} -l_1 \sin \varphi_1 & -d_1 \sin \varphi_2 & l_3 \sin \varphi_3 & 0 & \cos \varphi_2 \\ l_1 \cos \varphi_1 & d_1 \cos \varphi_2 & -l_3 \cos \varphi_3 & 0 & \sin \varphi_2 \\ -l_1 \sin \varphi_1 & -l_2 \sin \varphi_2 & 0 & b \cos \varphi_4 & 0 \end{bmatrix}$
 b) $\rho = 2(b \cos \varphi_4 - e \sin \varphi_4)$
 $h = y_0 + l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2$
 d) $\begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_4 \\ \dot{d}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,18 \text{ rad/s} \\ 0,34 \text{ rad/s} \\ -9,192 \text{ mm/s} \end{Bmatrix}$; $\begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_4 \\ \ddot{d}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,3673 \text{ rad/s}^2 \\ 0,2587 \text{ rad/s}^2 \\ 5,724 \text{ mm/s}^2 \end{Bmatrix}$

- P 3-12** $s=l$ recta; $s \neq 0$ elipse; $s=0$ circunferencia

- P 3-13** a) $\dot{\varphi}_2 = \frac{r(s \cos \varphi_1 - r) \cos^2 \varphi_2}{s^2 + r^2 - 2sr \cos \varphi_1} \dot{\varphi}_1 = \frac{r \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{(s^2 + r^2 - 2sr \cos \varphi_1)^{1/2}} \dot{\varphi}_1$
 b) $v_{\text{desl.}} = \sin(\varphi_1 + \varphi_2) r \dot{\varphi}_1$

Capítulo 4

- P 4-1** a) $d(\varphi) = 10(-2u^3 + 3u^2)$ mm con $u = \varphi/60$
 b) $d(\varphi) = 10(6u^5 - 15u^4 + 10u^3)$ mm
 c) $d(\varphi) = 5(1 - \cos(\pi u))$ mm. Continuidad C^1

P 4-2 $C^1 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{3}(8u^3 - 12u^2 + u + 3)$, amb $u = \left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) / \frac{\pi}{2}$
 $C^2 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{3}(-24u^5 + 60u^4 - 40u^3 + u + 3)$

P 4-3 $C^1 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{8}(-2u^2 + 2u + 7)$, con $u = \left(\varphi - \frac{7\pi}{8}\right) / \frac{\pi}{4}$ (tramo superior)
 $C^1 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{8}(2u^2 - 2u + 1)$, con $u = \left(\varphi - \frac{15\pi}{8}\right) / \frac{\pi}{4}$ (tramo inferior)
 $C^2 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{8}(2u^4 - 4u^3 + 2u + 7)$
 $C^2 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{8}(-2u^4 + 4u^3 - 2u + 1)$

P 4-4 Para $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, $d(\varphi) = a(-2u^3 + 3u^2)$, con $u = \varphi / \frac{3\pi}{2}$
 Para $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$, $d(\varphi) = a(2u^3 - 3u^2 + 1)$, con $u = \left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) / \frac{\pi}{2}$

P 4-5 $r_0 = 30$ mm ; $\{\overline{OC}\}_{xy} = \begin{cases} a \sin^2 \varphi + a_0 \sin \varphi \\ a \sin \varphi \cos \varphi + a_0 \cos \varphi \end{cases}_{xy}$

P 4-6 $r_0 = 25$ mm
 $\{\overline{OJ}\}_{xy} = \begin{cases} a + a_0 \sin \varphi \\ a_0 \cos \varphi \end{cases}_{xy}$

Excéntrica de centro sobre el eje x, radio a_0 y excentricidad a

P 4-7 $\{\overline{OJ}\}_{xy} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d' \\ d \end{Bmatrix}$; $r_c = d + d''$ con $\begin{cases} d'' = \frac{100}{\pi}(2u - 6u^2 + 4u^3) \\ d'' = \frac{50}{\pi^2}(2 - 12u + 12u^2) \end{cases}$

P 4-8 $\{\overline{OC}\}_{xy} = \begin{cases} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{cases} d(\varphi)$, $r_c = \frac{(d^2 + d'^2)^{3/2}}{2d'^2 - d'd + d^2}$
 $r_c = r_{cp} - r$, con $\begin{cases} d' = 10 \sin 2\varphi \\ d'' = 20 \cos 2\varphi \end{cases}$

- P 4-9** a) $\dot{s}_2 = 3\dot{s}_1 / 4$; $\ddot{s}_2 = 3\ddot{s}_1 / 4 - 25\dot{s}_1^2 / 64d$
 b) $v_{\text{desl.}} = 5\dot{s}_1 / 4$
 c) $s_1^2 + s_2^2 - 10d s_1 = 0$
- P 4-10** a) $\dot{\varphi} = \dot{s} / 4d$; $\ddot{\varphi} = \ddot{s} / 4d - \dot{s}^2 / 256d^2$
 b) $v_{\text{desl.}} = 3\dot{s} / 8$
 c) $(31,25 + (s/d)^2) / 8,062 + (s/d) \cos \varphi - 4 \sin \varphi = 0$
- P 4-11** b) $\omega^{s4} = 13,33 \text{ rad/s}$; $\omega^{s5} = 20 \text{ rad/s}$
- P 4-12** $v(u) = b_2 B_2^3(u) + b_3 B_3^3(u) = 45u^2 - 30u^3 \text{ m/s}$ con $u = t / 15$; $a_{\text{máx.}} = 1,5 \text{ m/s}^2$
- P 4-13** $a_{\text{máx.}} = -37,5 \text{ m/s}^2$
- P 4-14** a) $v(u) = 0,8(B_2^3(u) + B_3^3(u)) \text{ m/s}$ con $u = t / \Delta t$
 $a(u) = 3 \cdot 0,8 \cdot B_1^2(u) \dot{u} \text{ m/s}^2$
 $d(u) = \frac{1}{\dot{u}} \frac{1}{4} (0,8 \cdot B_3^4(u) + 1,6 \cdot B_4^4(u)) \text{ m}$
 b) $\Delta t = 2 \text{ s}$

Capítulo 5

- P 5-1** a) $\tau = 60$ b) $\tau = -1/180$ c) $\tau = 25$
- P 5-2** a) $z_1 = 63$ $z_2 = 21$ $z_3 = 72$ $z_4 = 12$
 $z_1 = 54$ $z_2 = 14$ $z_3 = 56$ $z_4 = 12$
 $z_1 = 72$ $z_2 = 13$ $z_3 = 65$ $z_4 = 20$
 $z_1 = 65$ $z_2 = 20$ $z_3 = 72$ $z_4 = 13$
 b) $z_1 = 70$ $z_2 = 14$ $z_3 = 69$ $z_4 = 15$
 $z_1 = 69$ $z_2 = 19$ $z_3 = 76$ $z_4 = 12$
- P 5-3** a) $z_1 = 19$ $z_2 = 20$ $z_3 = 28$ $z_4 = 20$
 b) $z_1 = 37$ $z_2 = 20$ $z_3 = 53$ $z_4 = 50$
 c) $z_1 = 78$ $z_2 = 25$
 d) $z_1 = 163$ $z_2 = 100$
 $z_1 = 26$ $z_2 = 16$ error = 0,3 %
- P 5-4** $z_1 = 35$ $z_2 = 86$ error = 1,75%
 $z_1 = 45$ $z_2 = 76$ error = -1,3%
 $z_1 = 57$ $z_2 = 64$ error = -1%
 $z_1 = 70$ $z_2 = 51$ error = 1,7%
 $z_1 = 81$ $z_2 = 40$ error = 0%

P 5-5

	$\omega_b = 0$	$\omega_1 = 0$	$\omega_2 = 0$
a)	$\omega_1/\omega_2 = -2$	$\omega_2/\omega_b = 1,5$	$\omega_1/\omega_b = 3$
b)	$\omega_1/\omega_2 = 1,8$	$\omega_2/\omega_b = 4/9$	$\omega_1/\omega_b = -0,8$
c)	$\omega_1/\omega_2 = -1,5$	$\omega_2/\omega_b = 5/3$	$\omega_1/\omega_b = 2,5$
d)	$\omega_1/\omega_2 = 0,7619$	$\omega_2/\omega_b = -0,3125$	$\omega_1/\omega_b = 0,2381$

P 5-6

a) $\omega_1 - \omega_b = -2(\omega_{34} - \omega_b)$; $(\omega_{34} - \omega_b) = \frac{21}{16}(\omega_7 - \omega_b)$

b) $\omega_1 - \omega_b = \frac{9}{4}(\omega_5 - \omega_b)$; $(\omega_1 - \omega_b) = -\frac{27}{8}(\omega_6 - \omega_b)$

P 5-7

a) $z_b = 48$ $z_c = 16$

b) $z_b = 36$ $z_c = 15$

c) $z_b = 48$ $z_c = 24$

P 5-8

$2 \omega_b = \omega_1 + \omega_2$

$\omega_3 = 2 \omega_2 - \omega_1$ $\omega_4 = 2 \omega_1 - \omega_2$

P 5-9

$\omega_3 - 1,5 \omega_4 + 0,5 \omega_1 = 0$

$\omega_6 - 1,4 \omega_3 + 0,4 \omega_4 = 0$

Si $\omega_3 = 0$, $\omega_6 / \omega_1 = -2 / 15$

Si $\omega_4 = 0$, $\omega_6 / \omega_1 = -0,7$

Capítulo 6

P 6-1

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	$V_{F \text{ der.}}$	$V_{F \text{ izq.}}$	H_F
a)	37,79	37,79	120,2	120,2	120,2	120,2	50	50	37,5
b)	151,2	0	0	53,4	53,4	0	0	0	0
c)	-75,58	-75,58	186,9	186,9	186,9	186,9	0	0	75

Todos los valores están en kN y las tensiones de las barras definidas positivas a compresión.

P 6-2

	H_A	V_A	V_B	H_C	V_C	H_D	V_D	H_E	V_E
	137,1	440,2	120,7	25,74	-200	25,74	-700	111,3	640,2

Todos los valores en N.

P 6-3

a) $F_m = 140 l_m \text{ N}$ (l_m : longitud del muelle en m; F_m : fuerza del muelle en N)

c) $m = 1,430 \text{ kg}$ d) $k = 140 \text{ N/m}$

P 6-4

a) $\Gamma_m = I_2 \frac{r \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{e \cos \varphi_2 - r \cos(\varphi_1 + \varphi_2)} \ddot{\varphi}_2$; $F = I_2 \frac{1}{e \cos \varphi_2 - r \cos(\varphi_1 + \varphi_2)} \ddot{\varphi}_2$

b) $\varphi = 0^\circ$ i $\varphi = 180^\circ \rightarrow \Gamma_m = 0$; $F = 0$ $\varphi = \pm 48,59^\circ \rightarrow \Gamma_m = 0$; $F = 846 \text{ N}$

P 6-5

b) F_{A1} (Dirección de la barra) = -2907 N; F_{A1} (Perpendicular a la barra) = 1300 N

- b) F_{A2} (Dirección de la barra) = 3658 N; F_{A2} (Perpendicular a la barra) = 0
 c) $\Gamma_m = 600 \sin \varphi \text{ Nm}$

- P 6-6** a) $d(\varphi) = 320 u^3(1-u)^3 \text{ mm}$ con $u = (\varphi - 240^\circ)/120^\circ$
 b) $N = 500 + 0,04559 (1,92 u - 11,52 u^2 + 19,2 u^3 - 9,6 u^4) \dot{\varphi}^2 \text{ N}$
 c) $\dot{\varphi}_{\text{máx}} = 302,3 \text{ rad/s}$; $n = 2887 \text{ min}^{-1}$

- P 6-7** $F = \left(\frac{7}{5} \cos \varphi + \frac{6}{50} \sin \varphi \right) \frac{(0,4225 - 0,3 \cos(\varphi + \beta_0))^{1/2}}{\sin(\varphi + \beta_0)} \text{ kN}$; $\beta_0 = \arctan 0,75$
 $T_0 = 1200 \text{ N}$; $k = 1,6 \text{ N/mm}$

- P 6-8** a) 85°

$$b) F_A = \frac{mgl}{2} \frac{\cos 2\varphi}{l \cos \varphi - s \cos 2\varphi}$$

$$F_D = \frac{mgl}{2} \frac{\sin \varphi}{l \cos \varphi - s \cos 2\varphi}$$

$F_C = -mg + F_A \cos \varphi + F_D \sin 2\varphi$, siendo φ el ángulo que forma la escalera con la dirección horizontal, definido positivo en sentido antihorario.

P 6-9
$$\begin{bmatrix} -\cos \varphi_2 & \sin \varphi_1 & \sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_1 & \cos \varphi_3 \\ -1 & 0 & \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix}$$

siendo φ_1 , φ_2 y φ_3 los ángulos que forman las barras EB, CA y DC con la vertical, respectivamente, definidos positivos en sentido horario.

$$F_B = \frac{5}{3} mg; F_C = 0 \text{ cuando la mesa se apoya en la pared.}$$

- P 6-10** $F = \frac{40 \sin^2 \varphi}{3 \cos \varphi} \dot{\varphi}$

Capítulo 7

- P 7-1** a) $F = mg \frac{1 - \mu^2 \pm 2\mu \tan \varphi}{\tan \varphi - \mu}$

el signo + corresponde a un deslizamiento hacia la izquierda
 el signo - a un deslizamiento hacia la derecha

- b) $F = 1,7 mg$ hacia la izquierda. $F = 0,7 mg$ hacia la derecha.
 c) Si $\mu < b/h$, los bloques no vuelcan.

- P 7-2** a) $F = 19,51 \text{ N}$
 b) $F_{\text{contacto}} = 15,69 \text{ N}$

- P 7-3** a) $s = 0,5 \text{ m}$
b) $s = 1,2 \text{ m}$
- P 7-4** a) $a = 83,48 \text{ mm/s}^2$
b) $a = 77,78 \text{ mm/s}^2$
- P 7-5** a) $\mu_{\text{mín}} = 0,18$
b) $T = 1409 \text{ N}$
- P 7-6** a) $\mu_{\text{mín.}} = 0,238$
b) $T = 287,4 \text{ N}$
- P 7-7** $e = 27 \text{ mm}$
- P 7-8** $\mu_{\text{mín.}} = 0,11$
- P 7-9** $\mu_{\text{mín.}} = 2 \frac{\sqrt{20^2 - (h/2)^2}}{100 - h}$
- P 7-10** $\mu_{\text{mín.}} = 0,2$ independientemente de h .
- P 7-11** $\varphi = 6,42^\circ$
- P 7-12** $\mu_{\text{mín.}} = 0,27$
- P 7-13** $a = 19,29 \text{ mm}$
- P 7-14** a) $\mu_A = 0,23$; $\mu_B = 0,26$
b) $F_A = 15,36 \text{ kN}$; $F_B = 15,46 \text{ kN}$; $F_C = 15,36 \text{ kN}$
- P 7-15** $\Gamma_{\text{máx.}} = 13,7 \text{ g Nm}$; $a_{\text{máx.}} = 0,304 \text{ g m/s}^2$
- P 7-16** a) $a = 0,085 \text{ g m/s}^2$
b) $\mu_{\text{mín.}} = 0,132$
- P 7-17** a) $F = 125 \text{ N}$
b) rodillo A bloqueado $F = 210,8 \text{ N}$
rodillo B bloqueado $F = 168,6 \text{ N}$

Capítulo 8

- P 8-1** a) $F = m_1(g \sin \varphi + \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \rho)$
 $\Gamma = (m_1 \rho^2 + m_2 e^2 + I_{G_1} + I_{G_2}) \ddot{\varphi} + 2m_1 \rho \dot{\varphi} \dot{\rho} + (m_1 \rho - m_2 e) g \cos \varphi$

- b) En el prismatico $T = m_1(g \cos \varphi + 2\dot{\varphi}\dot{\rho} + \ddot{\varphi}\rho)$
 $M = m_1(g \cos \varphi + 2\dot{\varphi}\dot{\rho} + \ddot{\varphi}\rho)\rho + I_{G_1}\ddot{\varphi}$
- En la articulacion $F_1 = F + m_2(g \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 e)$
 $F_2 = T + m_2(g \cos \varphi - \dot{\varphi} e)$
- P 8-2** a) Sentido horario $\Gamma = 2,791 \text{ Nm}$
 Sentido antihorario $\Gamma = 3,243 \text{ Nm}$
 b) $F_{\text{mín.}} = 401,7 \text{ N}$ (giro antihorario)
- P 8-3** a) $\Gamma_m = 0,4143 \text{ N m}$
 b) $\Gamma_m = 0,4571 \text{ N m}$
- P 8-4** a) $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ $F = 20 \sin \varphi + 10 \cos \varphi$ $\Gamma = 0,6 - 12 \cos \varphi + 6 \sin \varphi$
 $-90^\circ \leq \varphi \leq 0$ $F = -20 \sin \varphi + 10 \cos \varphi$ $\Gamma = -0,6 + 12 \cos \varphi + 6 \sin \varphi$
- b) $\cos \varphi \geq 0,05$
 $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ $F = -20 \sin \varphi + 10 \cos \varphi$ $\Gamma = -0,6 + 12 \cos \varphi + 6 \sin \varphi$
 $-90^\circ \leq \varphi \leq 0$ $F = -20 \sin \varphi - 10 \cos \varphi$ $\Gamma = -0,6 + 12 \cos \varphi - 6 \sin \varphi$
- P 8-5** $\Gamma = 0,5 (1 + \sin 4 \varphi) \cos 4 \varphi \text{ N m}$; $\Gamma_{\text{máx.}} = 0,650 \text{ N m}$ para $\varphi = 7,5^\circ$
- P 8-6** $F = 48 \sin \varphi - 40 \tan \varphi$; $F_{\text{máx.}} = 1,705 \text{ N}$ para $\varphi = 15^\circ$
- P 8-7** a) $900 = s_1^2 + s_2^2 + \sqrt{3} s_1 s_2$ s_1 y s_2 en milímetros.
- Margen de variación: de $\begin{cases} s_1 = 60 \text{ mm} \\ s_2 = -30\sqrt{3} \text{ mm} \end{cases}$ hasta $\begin{cases} s_1 = -30\sqrt{3} \text{ mm} \\ s_2 = 60 \text{ mm} \end{cases}$
- b) $F_2 = \frac{s_2 + s_1 \sqrt{3}/2}{s_1 + s_2 \sqrt{3}/2} F_1$
- P 8-8** a) $225 = s_1^2 + s_2^2 - \sqrt{3} s_1 s_2$ s_1 y s_2 en milímetros.
- b) $F_2 = -\frac{s_2 - s_1 \sqrt{3}/2}{s_1 - s_2 \sqrt{3}/2} F_1$
- P 8-9** a) $\Gamma = 6,366 / \tan \varphi \text{ N m}$
 b) $\mu_{\text{mín.}} = 0,08$
 c) $\Gamma_{\text{subida}} = 12,81 / \tan \varphi \text{ N m}$
 $\Gamma_{\text{bajada}} = 0$
- P 8-10** $l_2 (l_4 + l_5) = l_3 l_5$

Capítulo 9

- P 9-1** a) $P_{\text{mot.}} = 2,5 \text{ kW}$; $\Gamma_{\text{mot.}} = 31,83 \text{ N m}$
 b) $\Gamma_{\text{máq.}} = 191,0 \text{ N m}$
- P 9-2** $P_{\text{máq.}} = 0,8 \text{ kW}$; $\Gamma_{\text{máq.}} = 25,46 \text{ N m}$
- P 9-3** a) $\alpha = 3 \text{ s}^{-2}$ b) $P_{\text{máq.}} = 628,3 \text{ W}$
- P 9-4** a) $\Gamma_{\text{ruedas}} = 375 \text{ N m}$ b) $F = 1250 \text{ N}$
- P 9-5**
- | | 1a | 2a | 3a | 4a |
|----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) | 0,557 kg m ² | 1,475 kg m ² | 3,929 kg m ² | 7,215 kg m ² |
| b) | 4,39 m/s ² | 2,66 m/s ² | 1,56 m/s ² | 1,10 m/s ² |
- P 9-6** a) $n_{\text{mot.}} = 1500 \text{ min}^{-1}$; $\Gamma_{\text{mot.}} = 125/3 \text{ N m}$ b) $P_{\text{eléc.}} = 7,27 \text{ kW}$ c) $\Gamma_{\text{rp}} = 25/3 \text{ N m}$
- P 9-7** a) $W_{\text{eléc.}} = 5,316 \text{ kW h}$ b) $I_v = 0,162 \text{ kg m}^2$ (valor muy conservador)
- P 9-8** a) $I_v = 4,053 \text{ kg m}^2$; 25 operaciones ; $t_{\text{total}} = 8,64 \text{ s}$
- P 9-9** a) $P_{\text{eléc.}} = 8,265 \text{ kW}$
 b) $P_{\text{reductor}} = 1,984 \text{ kW}$; $\Gamma_{\text{rp}} = 25,3 \text{ N m}$
 c) $I_{\text{total}} = 5,28 \text{ kg m}^2$; $\delta = 6,14 \%$
 d) $I_{\text{vol. eje 1}} = 5,53 \text{ kg m}^2$; $I_{\text{vol. eje 2}} = 216 \text{ kg m}^2$
 e) $\alpha = 2,601 \text{ rad/s}^2$
- P 9-10** a) $P_{\text{mec.}} = 0,1 \omega (1 - \omega / 600 \pi) \text{ W}$; $P_{\text{eléc.}} = 60 \pi (1 - \omega / 600 \pi) \text{ W}$, con ω en rad/s
 b) $\omega = (1 - e^{-t/6\pi}) 600 \pi \text{ rad/s}$; $W_{\text{eléc.}} = 0,36 \pi^2 (1 - e^{-t/6\pi}) \text{ kJ}$, con t en segundos
- P 9-11** c) $E_{\text{cons.}} = 11,234 \text{ kJ}$
 $E_{\text{cons.}} = 10 \text{ kJ}$, con motores regenerativos capaces de recuperar la potencia negativa.
- P 9-12** $E_{\text{cons.}} = 11,1 \text{ kW h}$
- P 9-13** a) $t_{\text{total}} = 10 \text{ s}$ b) $m_{\text{red.}} = 4350 \text{ kg}$ c) $F = 24,09 \text{ kN}$ d) $E = 103,8 \text{ kJ}$
- P 9-14** b) $v_{\text{máx.}} = 24,35 \text{ m/s}$ c) $t = 26,5 \text{ s}$ d) $E_{\text{dis.}} = 1,204 \text{ MJ}$
- P 9-15** a) $P = 2,742 \text{ kW}$ b) grado de irregularidad $\delta = 0,51 \%$
- P 9-16** a) $P = 5,845 \text{ kW}$; $\Gamma = 18,6 \text{ N m}$
 c) $I = 0,237 \text{ kg m}^2$ es suficiente
 d) Resolviendo la ecuación del movimiento, grado de irregularidad $\delta \approx 0,89 \%$

- P 9-17** a) $\omega_0 = 400 \text{ rad/s}$
b) $t = 1,29 \text{ s}$
c) $E_{\text{cons.}} = 61,62 \text{ J}$; $E_{\text{eléc. dis.}} = 43,07 \text{ J}$; $E_{\text{mec. dis.}} = 8,31 \text{ J}$
d) $P_{\text{cons.}} = 72 - 0,12 \omega \text{ W}$; $P_{\text{mec.}} = (100 - 0,25 \omega) \omega 10^{-3} \text{ W}$
- P 9-18** b) $\omega_{\text{máx.}} = 300 \text{ rad/s}$; $P_{\text{máx.}} = 180 \text{ kW}$ a) $\omega = 150 \text{ rad/s}$
c) $\eta = \omega / 300$
d) $t = 20,1 \text{ s}$
e) $E_{\text{cons.}} = 7,2 \text{ MJ}$; $E_{\text{dis.}} = 4,32 \text{ MJ}$
- P 9-19** a) $v_{\text{máx.}} = 0,38 \text{ m/s}$ b) $t = 13,2 \text{ s}$ c) $E_{\text{mec. dis.}} = 3,101 \text{ kJ}$ d) $\eta = 0,64$
e) 1. $t = 27,9 \text{ s}$
2. $t = 10,4 \text{ s}$

Bibliografia

AGULLÓ, J. *Mecànica de la partícula i del sòlid rígid*. Barcelona, Publicacions OK Punt, 1997.

AGULLÓ, J. *Introducció a la mecànica analítica, percussiva i vibratòria*. Barcelona, Publicacions OK Punt, 1997.

BEER, FERDINAND P.; JOHNSTON, E. RUSSELL. *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática*. Madrid. McGraw-Hill, 1992.

FARIN, GERALD E. *Curves and surfaces for computer-aided design*. Boston. Academic Press, 1997.

GARCÍA DE JALÓN, J.; BAYO, E. *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems*. New York. Springer-Verlag, 1994

HAUG, EDWARD J. *Computer-aided kinematics and dynamics of mechanical systems*. Boston. Allyn and Bacon, 1989.

HENRIOT, GEORGES. *Traité théorique et pratique des engranages*. Paris. Dunod, 1968

MABIE, HAMILTON H. *Mechanisms and dynamics of machinery*. New York. John Wiley & Sons, 1986

MOLINER, P. R. *Engranajes*. Barcelona. ETSEIB CPDA, 1990.

NIETO, J. *Síntesis de mecanismos*. Madrid. Editorial AC, 1978.

NORTON, ROBERT L. *Diseño de maquinaria*. México. McGraw-Hill, 1995.

SHIGLEY, JOSEPH E. *Teoría de máquinas y mecanismos*. México. McGraw-Hill, 1988.

WILSON, CHARLES E. *Kinematics and dynamics of machinery*. New York. HarperCollins Colege Publishers, 1991

E

- Energía, 213
 - cinética, 213
 - de rotación, 214
 - de translación, 214
 - mecánica, 215
 - potencial, 216
 - Engranaje, 24, 122
 - cilíndrico helicoidal cruzado, o hipoide, 123
 - cilíndrico o paralelo, 123
 - cónico, 123
 - módulo de un, 126
 - paso de un, 126, 129
 - Enlace, 14
 - cinemático, 14, 36
 - condiciones de, 14
 - geométrico, 14, 35
 - redundante, 39
 - total, 41
 - tangente, 42
 - Embrague, 177
 - Ecuación
 - de enlace
 - geométrica, 35, 90
 - cinemática, 36, 67
 - de gobierno, 37
 - reónoma, 37
 - Equilibrado,
 - de mecanismos, 145
 - de rotores, 146, 152
 - del cuadrilátero articulado, 147, 155
 - dinámico, 146
 - estático, 146
 - experimental, 152
 - grado de calidad, 153
 - Espacio de configuraciones, 43
 - Euler
 - ángulos de, 51
 - parámetros de, 50
 - teorema de, 50
- F**
- Acuñaamiento, 170
 - en los tornillos, 183
 - Fuerza
 - de rozamiento, 166
 - de fricción, 166
 - generalizada, 204
 - de inercia de d'Alembert, 145, 151, 193
 - reducida, 221

- Rozamiento
 - circulo de, 173
 - cono de, 170
 - seco de Coulomb, 166
 - en cojinetes, 173
 - en guías, 172
 - triángulo de, 170
 - viscoso, 169
- Frenos, 179
- Freudenstein, ecuación de, 48
- Fricción, ruedas de, 123, 177

G

- Grashof, ley de, 21
- Grado de libertad, 35, 39
- Grado de irregularidad, 213
- Grado de redundancia, 43
- Grupo de Assur, 39
- Grübler-Kutzbach, criterio de, 39

H

- Holonomía, 38

I

- Inercia reducida, 221

J

- Juego, hipótesis de, 172
- Junta, 15

L

- Ley de desplazamiento, 97
- Ley de Grashof, 21
- Leva
 - de detención simple, 113
 - de doble detención, 114
 - excéntrica, 90
 - perfil de la, 101, 104
 - radio de curvatura del, 104
- Deslizamiento, 165
 - inminente, 171
 - umbral de, 171

M

- Manivela, 18
- Máquina, 13

Mecanismo, 13
 con anillos, 39
 basado en el rozamiento, 176
 cognado, 78
 de barras, 21
 de pistón-biela-manivela, 47
 de cuadrilátero articulado, 21, 48
 diferencial, 133, 198
 equivalente, 94
 leva-palpador, 22, 89
 de transmisión de movimiento entre ejes, 122

Método
 de las potencias virtuales, 139, 193, 206
 de Newton-Raphson, 44
 de los trabajos virtuales, 193

Modelo
 de rozamiento seco de Coulomb, 166
 cinemático, 167
 de rozamiento viscoso, 169

Momento cinético, teorema del,

Movimiento
 plano, 69, 75
 virtual, 194
 compatible con los enlaces, 195
 no compatible con los enlaces, 197
 transmisión de, 121, 180

N

Número de
 coordenadas independientes, 35
 velocidades independientes, 35

O

Osculador, círculo, 94
 Osculadora, cuádrica, 94

P

Palpador
 circular, 97
 plano, 96

Par

cilíndrico, 15
 cinemático, 15, 165
 de revolución, 15
 esférico, 16
 guía-botón, 67
 guía-corredora, 67
 helicoidal, 16, 182

plano, 16
 prismático, 16
 superficial o inferior, 15
 superior, 17

Perfil

conjugado, 124
 de evolvente, 128

Pivotamiento, 170

resistencia al, 170
 velocidad angular de, 170

Polo

de velocidades, 72
 de aceleraciones, 74

Potencia, 218

virtual, 193, 198, 200

Principio

de conservación de la energía, 215
 de acción i reacción, 140

Punto muerto, 45, 65

Q

Cuadrilátero articulado, 21, 48
 Cantidad de movimiento, 140

R

Redundancia, 41, 45
 tangente, 42
 total, 41

Régimen de funcionamiento, 223

Relación de transmisión, 121, 127

Rendimiento, 218

Resistencia

al deslizamiento, 166
 al pivotamiento, 170
 a la rodadura, 169

Resistencias pasivas, 165, 219

Rodadura, 68, 169

resistencia a la, 169
 velocidad angular de, 165

Rotor, 146, 152

S

Apriete, hipótesis de, 174

Sistema, 142, 215

holónomo, 38
 mecánico, 142

Subespacio de configuraciones accesibles, 43

Superficie desgastada, hipótesis de la, 174

T

Teorema

- de la energía, 213
- del momento cinético, 140
- de la cantidad de movimiento, 140
- de los tres centros o Aronhold-Kennedy, 73
- de Euler, 50

Teoremas vectoriales, 139

Torsor,

- de enlace, 200
- de fuerzas de inercia de d'alembert, 145, 151, 200

Tren de engranajes, 24

- de ejes fijos, 130
- planetario o epicicloidal, 130

V

Velocidad

- absoluta, 51
- angular,
 - de pivotamiento, 165
 - de rodadura, 165
- de deslizamiento, 93, 125
- generalizada, 34
- independiente, 35
- virtual, 193

Virtual

- movimiento, 194
- potencia, 193

Volante de inercia, 224

W

Willis, ecuación de, 112

