



UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH

→ **UPCGRAU**

# Mecánica de fluidos en ingeniería →

Salvador de las Heras





UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH



iniciativa  
digital politècnica  
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Mecánica de fluidos en ingeniería →

Salvador de las Heras

Primera edición: julio de 2012

Diseño y dibujo de la cubierta: Jordi Soldevila  
Diseño maqueta interior: Jordi Soldevila  
Imagen de la cubierta: *Fall water*, Corbis/Cordon Press

© Salvador de las Heras, 2012

© Iniciativa Digital Politècnica, 2012  
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC  
Jordi Girona Salgado 31,  
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101  
[www.upc.edu/idp](http://www.upc.edu/idp)  
E-mail: [info.idp@upc.edu](mailto:info.idp@upc.edu)

Producción: SERVICE POINT  
Pau Casals, 161-163  
08820 El Prat de Llobregat (Barcelona)

Depósito legal: B. 18843-2012  
ISBN: 978-84-7653-936-1

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley.



# Índice

<b>Índice</b>	<b>5</b>
<b>Prólogo</b>	<b>9</b>
<b>1. Introducción a la mecánica de fluidos</b>	<b>13</b>
1.1. El campo fluido	17
1.1.1. Definiciones y magnitudes cinemáticas	17
1.1.2. Sistemas coordenados ortogonales	20
1.1.3. Relaciones de Frenet y coordenadas naturales	23
1.1.4. La derivada sustancial	27
1.1.5. Teoremas fluidos	28
1.1.6. Integrales extendidas a volúmenes fluidos	29
1.2. Fuerzas, tensiones y corrimientos	31
1.2.1. Fuerzas másicas y volumétricas	31
1.2.2. Fuerzas y tensiones superficiales	31
1.2.3. Descripción del movimiento en el continuo	33
1.2.4. Relación entre tensiones y deformaciones	35
1.2.5. Ecuaciones de Cauchy y Navier-Stokes	36
1.3. Fenómenos, procesos y propiedades	37
1.3.1. Fenómenos de transporte, difusividades y simultaneidad	37
1.3.2. Viscosidad y reología	41
1.3.3. Densidad y estado	45
1.3.4. Procesos termodinámicos y trabajos	46
1.3.5. Coeficientes de compresibilidad y otros	49
1.3.6. Fenómenos de interfase y capilares	53
1.3.7. Presión de vapor	57
1.4. Fluidostática	59
1.4.1. Condiciones de estabilidad en el campo gravitatorio	61
1.4.2. Equilibrio relativo	62
1.4.3. Fuerzas y empujes sobre superficies	64
1.4.4. Principio de Arquímedes	66
1.4.5. Flotación y estabilidad	67



<b>2. Ecuaciones fundamentales y análisis dimensional</b>	<b>75</b>
2.1. Principios integrales de conservación	76
2.1.1. Conservación de la masa	76
2.1.2. Conservación de la cantidad de movimiento	78
2.1.3. Conservación de la energía	80
2.2. Ecuaciones en forma diferencial	83
2.2.1. Principios de conservación	84
2.2.2. Generación y transporte de vorticidad	87
2.2.3. Otras ecuaciones en forma diferencial	90
2.3. Análisis dimensional y de magnitud	94
2.3.1. Homogeneidad dimensional y semejanza física	94
2.3.2. Semejanza física en mecánica de fluidos	97
2.3.3. Grupos adimensionales característicos	100
2.3.4. Análisis por órdenes de magnitud	103
2.3.5. Condiciones de incompresibilidad	106
2.3.6. Semejanza física en las turbomáquinas	110
2.3.7. Leyes de semejanza y teoría de modelos	115
<b>3. Flujos característicos y dinámica de fluidos</b>	<b>123</b>
3.1. Ecuaciones de Euler y Bernoulli	124
3.1.1. Ecuaciones de Euler en coordenadas intrínsecas	126
3.1.2. Energía mecánica y potencia de un flujo	128
3.1.3. Difusión de la energía cinética	129
3.2. Flujo irrotacional o potencial	131
3.2.1. Dominios de irrotacionalidad	131
3.2.2. Características del movimiento irrotacional	133
3.2.3. Movimiento bidimensional en torno a un cilindro	137
3.2.4. Generación de sustentación en un perfil alar	139
3.3. Movimiento en medios permeables	142
3.3.1. Descripción macroscópica del movimiento	142
3.3.2. Condiciones de contorno y ley de la refracción	145
3.3.3. Movimiento de líquidos en capas freáticas	147
3.4. Flujo unidireccional incompresible	149
3.4.1. Condiciones de unidireccionalidad	149
3.4.2. Algunas soluciones laminares	151
3.4.3. Movimiento en conductos de sección lentamente variable	156
3.5. Lubricación por película líquida	157
3.5.1. Movimiento estacionario bidimensional	157
3.5.2. Generalización tridimensional. Ecuaciones de Reynolds	164
3.5.3. Lubricación fluidostática	168
3.6. Flujo compresible estacionario	170
3.6.1. Efecto de una perturbación y número de Mach	170
3.6.2. Flujo homentrópico unidimensional	172
3.6.3. Movimiento en conductos de sección lentamente variable	174
3.6.4. Flujo en una tobera convergente-divergente	176
3.7. Ondas en el seno de un fluido	181
3.7.1. Ondas sonoras respecto del reposo	181
3.7.2. Ondas simples no lineales	187

<b>4. Turbulencia y capa límite</b>	<b>201</b>
4.1. Turbulencia	202
4.1.1. Escalas características	204
4.1.2. Movimiento turbulento medio	206
4.1.3. Tensiones y ecuaciones de Reynolds	208
4.1.4. Energía cinética y vorticidad	210
4.1.5. Movimientos turbulentos unidireccionales	217
4.1.6. Viscosidad de remolino y longitud de mezcla	221
4.1.7. Distribución de velocidad próxima a una pared	223
4.1.8. Movimientos turbulentos libres	230
4.2. Capa límite	234
4.2.1. Ecuaciones características y analogía de Reynolds	237
4.2.2. Espesores típicos de la capa límite	241
4.2.3. Ecuación integral de von Kármán	243
4.2.4. Capas límite laminar y turbulenta	244
4.2.5. Desprendimiento de la capa límite	247
<b>5. Complementos y aplicaciones</b>	<b>257</b>
5.1. Aplicaciones de las ecuaciones de Euler y Bernoulli	257
5.1.1. Tubos piezométricos y de Pitot, y sonda de Prandtl	257
5.1.2. Medida diferencial del caudal	259
5.1.3. Introducción a la descarga de un depósito	260
5.1.4. Establecimiento de una corriente desde un depósito	261
5.2. Procesos de descarga	264
5.2.1. Descarga de un líquido desde un depósito	264
5.2.2. Descarga del gas contenido a presión en un calderín	270
5.3. Balance energético en una máquina	278
5.3.1. Ecuación de la energía mecánica	280
5.3.2. Altura manométrica y formas de energía específica	281
5.3.3. Pérdidas y rendimientos característicos	282
5.4. Teoría unidimensional para turbomáquinas	284
5.4.1. Velocidades características en un rotor	285
5.4.2. Conservación del momento cinético	287
5.4.3. Ecuaciones de Euler	288
5.4.4. Grado de reacción y característica real	290
5.5. Flujo incompresible en tuberías	293
5.5.1. Ecuación de Bernoulli generalizada	293
5.5.2. Ecuación del sistema y punto de funcionamiento	294
5.5.3. Cálculo de pérdidas	296
5.5.4. Sistemas simples unidireccionales	300
5.6. Lubricación por fluidos	303
5.6.1. Cojinetes por patín oscilante	304
5.6.2. Cojinetes cilíndricos	309
5.7. Flujo de fluidos no newtonianos	313
5.7.1. Flujo por un tubo capilar	314
5.7.2. Flujo por un canal plano	317
5.8. Discontinuidades en el seno de un fluido	318
5.8.1. Condiciones generales de compatibilidad	318



5.8.2.	Expansión isentrópica de Prandtl-Meyer	322
5.8.3.	Superficies de discontinuidad tangencial	324
5.8.4.	Ondas de choque normales	327
5.9.	Generalización del flujo compresible	332
5.9.1.	Flujo sin rozamiento con aporte de calor	334
5.9.2.	Flujo adiabático con rozamiento	338
5.9.3.	Flujo isotérmico	342
5.9.4.	Flujo de descarga de un calderín por un conducto	344
5.9.5.	Solución general del flujo compresible	353
5.10.	Sobre el índice politrópico	355
5.10.1.	Límites naturales para el índice politrópico	356
5.10.2.	Generación de líneas isotrópicas	359
5.10.3.	Relación con el número de Mach	360
	<b>Anexo. Ecuaciones diferenciales de la mecánica de fluidos</b>	<b>373</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>381</b>





## Prólogo

El profesor. Salvador de las Heras, distinguido discípulo y buen amigo, me ha invitado a prologar este libro, deferencia que agradezco, y responsabilidad que asumo no sin la sospecha de que pueda ser capaz, por una parte, de encontrar las esencias del mismo y, por otra, de informar a los lectores sobre su contenido y de los aspectos relevantes del mismo.

De su lectura, dos características del libro me han llamado la atención: el título y la ordenación de las materias que incluye.

El título: Mecánica de Fluidos en ingeniería, viene a reflejar, por su carácter generalista, el interés del autor por dejar constancia desde un principio de la amplia gama de aplicaciones de dicha disciplina en ese sector de actividad profesional, y de no incurrir en excesivos formalismos sobre la esencia de ese estado de la materia, más propio de la Física de Fluidos, aunque se nutra de ella. En cuanto concierne a la ordenación de las materias tratadas en el libro, se ha de resaltar que difiere de la que es habitual en este tipo de obras. La separación de fundamentos y aplicaciones obedece, según criterio del autor, a una adecuación secuencial de los temas a su ubicación en los planes de estudios en que se imparten.

Permítanme los lectores que ahora me extienda exponiendo algunas consideraciones acerca del grado de armonía entre el título del libro: Mecánica de Fluidos en *ingeniería* y la separación de sus contenidos en los bloques *fundamentos* y *aplicaciones*, con el desarrollo que este “campo de conocimiento” ha experimentado desde la década de los años cuarenta hasta la actualidad.

El hecho que el título incluya el término “ingeniería” parece adecuado a la vista de las múltiples ramas de esa actividad en las que los conocimientos de Mecánica de Fluidos son, si no fundamentales, si muy importantes; a saber: ingenierías mecánica, química, energética, hidráulica, aeronáutica y espacial, medio ambiente, entre otras. Por lo que se refiere a la separación entre fundamentos y aplicaciones, conviene tener presente que aunque los fundamentos son comunes a muchas ramas de la ingeniería, lo son también para muy diversas ciencias aplicadas: oceanografía, meteorología, geofísica, astrofísica



y biología entre otras, además de muchas ingenierías, por lo que cabe comprender que sus aplicaciones difieran entre ellas y deban ser expuestas en cada ámbito particular.

Por otra parte, la MF, en tanto que materia troncal, requiere ser impartida teniendo muy presente la gran complejidad y el carácter multidisciplinar de gran número de proyectos de ingeniería y de los fenómenos implicados. Su ejecución requiere pues la intervención de técnicos de diferente procedencia, lo cual exige un mínimo de convergencia en el conocimiento básico de ciertas materias, como puede ser la MF, para la buena coordinación y eficacia del equipo que forman. A título de ejemplo, veamos qué ocurre en el proceso de solidificación del agua -formación de hielo-. Durante la solidificación, las fronteras del dominio fluido son alteradas por cambios de fase que resultan del transporte de calor. En el fenómeno se combinan aspectos de dinámica de fluidos interfacial y de convección. En muchas circunstancias, la interfase sólido-líquido puede devenir tan compleja como para formar un medio poroso en el que pueden ocurrir procesos de transferencia de calor y de masa, cambio de fase y flujo bifásico. Estos procesos tienen también muy significativa influencia sobre la fabricación de modernos materiales, p.ej. aleaciones y semiconductores, y en la evolución de muchos sistemas geofísicos.

El libro del Prof. de las Heras está constituido por cinco bloques con sus correspondientes capítulos, epígrafes y notas de pie de página. El primer bloque incluye conceptos fundamentales del campo fluido, fuerzas y tensiones actuantes: su equilibrio, descripción del movimiento, fenómenos de transporte y sus coeficientes, procesos termodinámicos y fenómenos de interfase. Se ha de destacar cómo el autor hace un avance de las ecuaciones fundamentales de dinámica de fluidos: Cauchy y Navier-Stokes, combinando razonadamente fuerzas, tensiones, deformaciones y coeficientes de transporte, con las ecuaciones fundamentales de conservación y de cantidad de movimiento de la materia.

El segundo bloque trata de las ecuaciones fundamentales que expresan los principios de conservación, e introduce las herramientas de análisis dimensional y teoría de modelos como muletas de las que servirse para concebir experimentos y/o interpretar sus resultados, y también para simplificar las ecuaciones de los modelos teóricos y descubrir sus invariantes. La incorporación a este capítulo de dichos métodos de “inspección de ecuaciones” y de “concepción de experimentos” está más que justificada por cuanto, a pesar de los grandes avances en la elaboración de modelos físico-matemáticos de los fenómenos en que se encuentra implicada la MF, y sus técnicas de resolución analíticas y numéricas, la experimentación, sea para validar los resultados del modelo sea para profundizar en las relaciones causa-efecto, resulta en muchos casos necesaria, cuando no imprescindible, pues el modelo teórico no es capaz de traducir correctamente las condiciones de valor inicial y de contorno del fenómeno real, discrepancias que pueden resultar determinantes.

En el tercer bloque se exponen los fundamentos de tres tipos distintos de movimiento de los fluidos: los movimientos potenciales e irrotacionales, los movimientos a altos números de Reynolds en los que los efectos de viscosidad son despreciables, sea el fluido incompresible o compresible, incluyendo en estos últimos el estudio de la propagación de perturbaciones y sus efectos, y, por último, los movimientos con viscosidad dominante, sean los clásicos flujos laminares, sean los movimientos lentos: flujo en medio poroso y de capa delgada -lubricación-. Cabe resaltar los comentarios que el autor hace acerca de las posibilidades de aplicación de las ecuaciones simplificadas que resultan de suprimir los efectos de la viscosidad.

El cuarto bloque comprende la descripción de la turbulencia como característica esencial de la mayor parte de flujos que se encuentran en la práctica de la ingeniería; la turbulencia de los flujos libres: chorros, estelas y penachos, y la capa límite. El autor deja constancia de las limitaciones que la teoría desarrollada hasta la fecha tiene para resolver los problemas reales. En un párrafo de la introducción al capítulo dice: *“Las soluciones analíticas obtenidas ofrecen un conocimiento más o menos preciso de la naturaleza y de los efectos especiales contenidos en las ecuaciones, pero no son más que casos particulares en los que, además, pueden existir regiones en el campo fluido en las que las hipótesis que dieron lugar a la simplificación general no sean válidas”*. Efectivamente, esto es así, por ej., para la condición de Stokes de no deslizamiento del fluido en la pared, asumida en todos los problemas de flujo de pared.

La concausa de la exposición en un mismo capítulo de los temas de turbulencia y de capa límite encuentra su justificación en el hecho, entre otros, de que la estabilidad del flujo y su transición de régimen no solo controla la generación de turbulencia y su comportamiento a bajos números de Reynolds, sino que sus efectos persisten, en algún caso, en el régimen a altos números de Reynolds.

El quinto bloque está dedicado a complementos y aplicaciones. Es un bloque destinado a la ampliación de conocimientos sobre temas de MF que, o bien no han recibido suficiente atención en el libro, o merecen particular exposición por su interés en ingeniería. Son muchos y diferentes los temas que han sido incluidos en este capítulo: desde aplicaciones clásicas de las ecuaciones de Euler y Bernoulli, hasta el flujo compresible a alto número de Mach con transferencia de calor y rozamiento, pasando por la teoría unidimensional de turbomáquinas, flujo incompresible en tuberías, lubricación, flujo de fluidos no-Newtonianos, discontinuidades en el seno de un fluido, ondas de expansión y de choque, etc. Esta diversidad de fenómenos de flujo y su acomodación a los fundamentos teóricos mediante la incorporación de coeficientes y parámetros experimentales, contribuyen, sin duda, a que el estudioso de la materia tome plena conciencia de la complejidad de la MF como tecno-ciencia, de sus límites de aplicación, de la importancia de la intuición en el enfoque de los problemas, de la necesidad de completar la teoría con la experimentación en la ejecución fiable de proyectos de ingeniería y, en definitiva, sirvan para despertar en él suficiente interés para profundizar en el conocimiento de la Mecánica de Fluidos, cuyos fundamentos son aplicados en tantos campos de la ingeniería, desde la bioingeniería a la astronáutica.

Por último, dos características del libro del Prof. de las Heras merecen particular mención: la crítica que el autor hace, al principio de cada capítulo, del alcance, de los límites de validez y de la relación de sus contenidos con los de otros capítulos del libro, y los comentarios que incluye a pie de página.

Sin duda, la visión particular del libro del Prof. de las Heras es una valiosa aportación a la colección de publicaciones existente sobre Mecánica de Fluidos. El esfuerzo que, sin duda, ha requerido su elaboración, es merecedor de aplauso y reconocimiento.

Profesor Luis Virto Albert

Junio de 2012

→ 1



# Introducción a la mecánica de fluidos

La mecánica de fluidos trata de los fluidos en movimiento o en reposo y, para hacerlo, utiliza magnitudes que pueden ser escalares, vectoriales y tensoriales. Asimismo, estas magnitudes pueden estar asentadas en campos, en función de la posición y del tiempo, que se denominan *escalares*, *vectoriales* o *tensoriales* según el carácter de la magnitud. Los campos se pueden describir de dos formas en mecánica de fluidos: la *lagrangiana*, según la cual se observa una partícula fluida concreta y se sigue su desplazamiento en virtud del flujo, y la *euleriana*, con la que se fija la atención en un punto del espacio y se contempla el desfile de diferentes partículas por él.

El estudio de los fluidos es el estudio de la materia en sí, de sus manifestaciones y de sus transformaciones. La materia puede hallarse condensada o no condensada, en estado cristalino, vítreo, líquido o gaseoso. Tanto en los sólidos como en los fluidos, las energías cinética y potencial de sus átomos dependen del ordenamiento interior de la materia y determinan sus propiedades másicas. El concepto de grado de agregación de una sustancia ayuda a comprender mejor cada uno de los estados en los que puede encontrarse la materia y, en particular, los fluidos. En este orden de ideas, dado que los fluidos se componen de moléculas que se mueven y colisionan entre sí, un análisis riguroso habría de tener en cuenta la acción de cada molécula o grupo de moléculas en el flujo. Estos procedimientos son utilizados por la teoría cinética de los gases y la mecánica estadística, pero no son adecuados para la práctica usual de la ingeniería.

Las aplicaciones de la mecánica de fluidos son enormes, pero, como ciencia, su estudio se basa en el compromiso entre teoría y experimentación, y en la formulación de un conjunto de principios de conservación que permiten un planteamiento riguroso de cualquier problema real. No obstante, muchos de los conceptos de la física moderna están tan íntimamente ligados con su forma lógica o matemática que, en muchas ocasiones, el planteamiento previo del tipo de solución que se espera encontrar es fundamental para describirlos. Aun así, la experiencia enseña a diario que la diversidad de recursos de la naturaleza hace que la imaginación del hombre sea insuficiente para explicar las maravillas de la vida cotidiana.



Los dos obstáculos principales con los que se enfrenta un ingeniero a la hora de aplicar los principios fundamentales a un caso son la geometría, o contorno, y la viscosidad. Esta última, que es acaso la propiedad que mejor define un fluido al estar asociada al fluir, suele dificultar mucho la resolución analítica de los problemas y sólo se puede despreciar en algunos casos idealizados. La estabilidad de los flujos está condicionada por la presencia de la viscosidad: aparece turbulencia cuando el balance entre los términos cinéticos y los viscosos descrito por el número de Reynolds alcanza un valor determinado. En presencia de turbulencia, las variables del flujo se vuelven aleatorias y no permanentes, lo que hace aumentar la velocidad de agitación de las partículas y, con ella, el transporte de cualquier fenómeno. En el flujo turbulento, los transportes de masa por difusión, de calor por conducción o de cantidad de movimiento son más importantes que en un flujo laminar (del orden de cien veces o más), por lo que el ingeniero y la ingeniera deben estar preparados para su interpretación porque existen aplicaciones industriales en las que interesa que el flujo sea, dependiendo del caso, laminar o turbulento.

Por lo que se refiere a la geometría, se ha de tener presente que las leyes y los principios formulados en la física, en la mecánica y en la termodinámica suelen estar referidos a *volúmenes fluidos* o a sistemas materiales, que, por definición, son sistemas cerrados de masa constante. Los sistemas fluidos pueden intercambiar calor con el entorno y también realizar trabajo mecánico, pero siempre incluyen las mismas partículas de fluido. Esto puede suponer un inconveniente a la hora de estudiar cualquier problema porque usualmente no se conoce la forma del sistema fluido sino la del entorno que lo incluye o por el que fluye. En mecánica de fluidos, este problema se resuelve mediante el concepto de *volumen de control*, por el que es posible extender los principios y las leyes fundamentales al fluido contenido en contornos que pueden cambiar de forma o desplazarse. Este tratamiento no siempre es sencillo pero, afortunadamente, los casos con solución analítica nos han hecho la vida más sencilla.

En mecánica de fluidos, es fundamental el estudio que resulta de asociar las condiciones de contorno a las ecuaciones de estado termodinámico local o de proceso, y a las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento fluido. Entre estas ecuaciones se encuentran las *ecuaciones de Navier-Stokes*, cuya aplicación, no obstante, a muchos cálculos técnicos sólo es posible tras la asunción de una serie de hipótesis simplificadoras que el analista debe valorar en cada caso. Por ejemplo, las *ecuaciones de Euler* no incluyen términos viscosos y, por tanto, no pueden representar adecuadamente las condiciones de contorno entre el fluido y los sólidos con los que está en contacto, pero permiten calcular con suficiente aproximación las magnitudes medias de un flujo y su variación, tanto espacial como temporal. De hecho, muchos cálculos técnicos se realizan con los valores medios de las manifestaciones macroscópicas de un conjunto significativo de moléculas (que permiten definir la densidad, la presión, la temperatura y la velocidad media de un flujo), y se suponen asentadas en una distribución continua de materia, denominada *continuo*.

El concepto de continuo proporciona una gran simplificación en el análisis, pero deja de tener sentido cuando el recorrido libre medio de las moléculas o partículas elementales es del mismo orden que la longitud significativa más pequeña que interviene en el problema. En ingeniería, la violación de la hipótesis del continuo es más probable en los gases que en los líquidos, en especial si los primeros se encuentran a muy baja presión (técnicas de vacío extremo) o se mueven a muy alta velocidad (flujos de reentrada), y salvo que los segundos se utilicen en aplicaciones en las que la longitud caracte-



rística sea muy pequeña (nanotecnología). Para discernir si es válida la hipótesis del continuo, se utiliza el *número de Knudsen*, que se define como la relación entre el recorrido libre molecular y la longitud característica del cuerpo. El número de Knudsen asociado al movimiento de un gas es una combinación de los números de Reynolds y de Mach, y es proporcional a  $M/Re$ , puesto que el recorrido libre medio es del orden de  $\nu/c$ , donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $c$  es la velocidad del sonido. Así, para números de Knudsen superiores a la unidad, es decir, para números de Mach muy elevados, deben aplicarse teorías estadísticas o la teoría cinética de los gases, mientras que los problemas de flujo compresible son fluidodinámicos cuando el número de Knudsen es inferior a 0,01.

Las ecuaciones de la termodinámica clásica se refieren a magnitudes del sistema medibles en equilibrio. Según el *postulado de estado*, el estado de equilibrio de una sustancia simple homogénea puede determinarse mediante la especificación de dos propiedades independientes, intensivas e intrínsecas, cuando sobre la sustancia sólo se realiza una de las formas fundamentales de trabajo reversible, por ejemplo, el de compresión. Pero los procesos de flujo no siguen una sucesión constante de estados en equilibrio, ni tampoco puede reducirse el análisis a los estados inicial y final del movimiento, probablemente de reposo. Es preciso estudiar el flujo en sí, irreversible por real, de modo que resulta necesario asumir la hipótesis de *equilibrio termodinámico local*, o casi equilibrio, que justifique el uso de las relaciones termodinámicas clásicas.

De hecho, la hipótesis de equilibrio local se fundamenta en que, en particular para números de Knudsen pequeños, una partícula de fluido experimenta una infinidad de colisiones con sus vecinas antes de alcanzar regiones donde las magnitudes macroscópicas sean diferentes. Su energía y su movimiento se adaptan a las locales de forma gradual, a medida que van perdiendo memoria de su situación primitiva con cada colisión. Es por ello que dicha partícula parece encontrarse, en todo momento, en el mismo estado de agitación térmica que las partículas circundantes, con lo que el problema puede tratarse mediante variables termodinámicas que definan el estado macroscópico de volúmenes infinitesimales, para los que seguirán siendo válidas las ecuaciones termodinámicas.

Una vez aceptados el continuo y el equilibrio termodinámico local, es posible deducir las ecuaciones fundamentales que rigen el comportamiento del fluido mediante la aplicación de los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía. Estos principios relacionan la evolución del fluido, observable mediante sus cambios de velocidad, presión, temperatura o densidad, con las manifestaciones externas consiguientes de las que la ingeniería se sirve para producir trabajo, intercambiar calor o producir empuje. Es muy importante que el ingeniero o la ingeniera tengan conciencia del orden de magnitud de dichos términos, para lo cual resulta conveniente describir las propiedades básicas de los fluidos y las fuerzas que pueden actuar sobre ellos y determinan su comportamiento.

El movimiento de un fluido se denomina *permanente* cuando los valores medios temporales de las componentes de la velocidad, la presión, la densidad y la temperatura son constantes. En el flujo turbulento, en cambio, incluso cuando es válida la hipótesis del continuo y se puede considerar que el régimen es permanente, se sabe que tales magnitudes fluctúan irregularmente y de forma aleatoria. Reynolds redujo las ecuaciones de Navier-Stokes a un sistema de ecuaciones que representa adecuadamente el flujo turbulento medio, e introdujo las denominadas *tensiones de Reynolds*, que incorporan la tasa



de transferencia turbulenta de cantidad de movimiento debida a las fluctuaciones de la velocidad. No obstante, la aparición de estas tensiones adicionales hace que el sistema de ecuaciones resulte insuficiente para resolver el problema (por el exceso de incógnitas que manejan) y que, a menudo, la turbulencia tenga que estudiarse mediante métodos semiempíricos o estadísticos.

En la teoría de la *longitud de mezcla de Prandtl*, se supone que la cantidad de movimiento es una cantidad transportable entre capas adyacentes de fluido, y que las fluctuaciones de las componentes de la velocidad instantánea son del mismo orden. La hipótesis inicial de Prandtl consistió en admitir que la longitud de mezcla era proporcional a la distancia al contorno, lo que predecía una distribución de velocidad logarítmica cerca de la pared. Los experimentos verificaron más tarde que esta hipótesis es correcta para el flujo sobre una placa plana horizontal y que, en otros casos, como en estelas o en el flujo turbulento libre en penachos, la teoría de Prandtl podía utilizarse con ligeras modificaciones. En este sentido, von Kármán extendió la teoría original de Prandtl mediante la formulación de relaciones para la tensión de cortadura independientes de cualquier modelo espacial.

Otros investigadores sugirieron que la magnitud que se conservaba durante el proceso de mezcla turbulenta era el momento cinético. Sobre esta base, Taylor desarrolló una teoría sobre el transporte de vorticidad que concuerda mejor con los resultados experimentales para el movimiento bidimensional. También fue Taylor el primero que desarrolló con éxito una teoría estadística sobre la turbulencia isotrópica. Con todo ello, se puede obtener una imagen más detallada de la turbulencia, considerando que la energía se distribuye entre remolinos de tamaños diferentes dentro de un espectro continuo de frecuencias. Los estados de remolinos más pequeños son de frecuencia más elevada y, en ellos, la viscosidad juega un papel disipativo decisivo. Los remolinos más grandes y, por tanto, los de menor frecuencia, son básicamente inerciales y disipan una porción ínfima de la energía total. La experiencia constata que la turbulencia puede ser visualizada como una sucesión de estados en los que la energía pasa de los remolinos de frecuencia más baja a los de más alta, y se disipa al final cuando alcanza un tamaño de remolino determinado por la microescala de Kolmogorov.

Prandtl también fue el primero en utilizar criterios de *orden de magnitud* para simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes en el interior de la capa límite. La idea original de Prandtl confinaba la vorticidad y los efectos viscosos en la capa límite que se desarrolla a lo largo de los cuerpos y en su estela de salida. Ahora se sabe que, en el exterior de la capa límite, son aplicables las ecuaciones de Euler porque la velocidad de cortadura es baja y el flujo, aproximadamente irrotacional. Se sabe también que se retarda la separación de la capa límite y se producen estelas más estrechas y menos disipativas cuando la capa límite es turbulenta. Es muy conocido el enunciado de Leonardo da Vinci para el principio del movimiento relativo: “Un cuerpo moviéndose a través de aire en reposo experimenta tanta resistencia como si estuviera en reposo y fuera el aire quien se moviera a su alrededor a la misma velocidad”. Esta afirmación resultó no ser cierta, pese a que su incumplimiento parezca contradecir las leyes de Newton para sistemas inerciales. El problema no se resolvió hasta tiempos de Prandtl: la resistencia es menor cuando es el aire el que se mueve alrededor del cuerpo como consecuencia del transporte turbulento de la corriente libre. Es decir, la turbulencia de la corriente induce la transición a turbulenta de la capa límite sobre el cuerpo, lo que reduce la pérdida de forma por arrastre aerodinámico.





## 1.1. El campo fluido

Admitida la validez del continuo en el medio fluido, es posible definir en cada punto un vector de posición  $\mathbf{x}$ , en cada instante de tiempo  $t$ , al que se asociarán las diferentes variables del fluido: vector velocidad  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , presión, temperatura, densidad, etc. Esta forma de describir el campo fluido se denomina *euleriana* y sirve para analizar las variaciones de las magnitudes físicas en puntos fijos del espacio.

Se plantea el estudio desde un punto de vista *lagrangiano* si las magnitudes físicas no se refieren al punto del espacio, sino a la partícula fluida que pasa en el mismo instante por ese punto. Una partícula fluida es la cantidad diferencial de sustancia asentada en el continuo en la que están definidas las magnitudes intensivas. Desde la perspectiva lagrangiana, son válidas las leyes fundamentales en su forma clásica (por lo que este método presenta algunas ventajas en su formulación), si bien, en realidad, el tratamiento de los fluidos aconseja adoptar la perspectiva euleriana.

### 1.1.1. Definiciones y magnitudes cinemáticas

La *trayectoria* de una partícula que en un instante anterior estuvo en  $\mathbf{x}_0$  es una ecuación vectorial, desde el punto de vista lagrangiano, tal que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \quad [1.1]$$

de modo que la velocidad y la aceleración del fluido se calcularían haciendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \\ \mathbf{a}(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad [1.2]$$

Desde el punto de vista *euleriano*, se toma como variable fundamental del movimiento la velocidad del fluido en un punto del espacio,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , y se define el campo fluido mediante el campo de velocidades descrito por las *líneas de corriente*, que son las líneas tangentes al vector velocidad en un instante dado, es decir,  $\mathbf{v} \wedge s dl$ . Estas líneas son las trayectorias del campo de velocidad, y satisfacen las ecuaciones siguientes en coordenadas cartesianas:<sup>1</sup>

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad [1.3]$$

Estas ecuaciones pueden integrarse utilizando dos condiciones de contorno y considerando que el tiempo aparece como un parámetro constante. La trayectoria de la partícula de fluido, desde la perspectiva euleriana, se deduce por integración del vector velocidad para cada una de las coordenadas y eliminando el tiempo del sistema de tres ecuaciones [1.3]. En este caso, las constantes de integración son tres y pueden ser, por ejemplo, las coordenadas iniciales de la partícula.

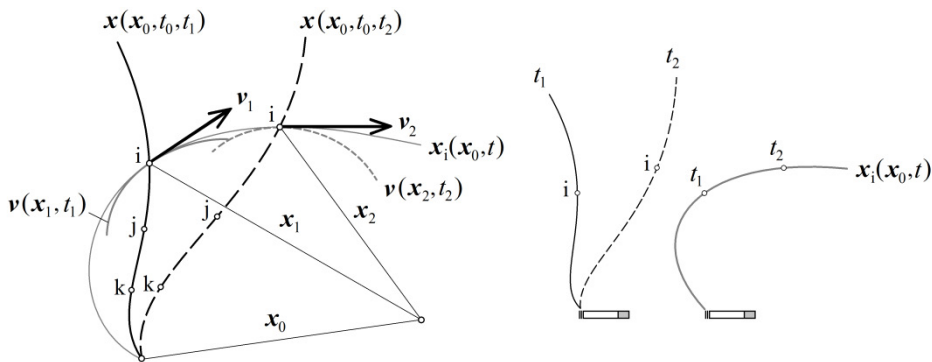
Las líneas fluidas que muestran la ubicación, en cada instante, de todas las partículas que pasaron en un momento anterior por un punto del espacio se denominan *trazas* o *líneas de emisión*:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0, t)$ . Estas líneas pueden obtenerse por integración del vector velocidad, como se hizo con la trayectoria, pero reteniendo las que pasan por el



punto de referencia  $\mathbf{x}_0$  en distintos instantes  $t_0$ . La figura 1.1 muestra una interpretación gráfica de estas líneas.

Las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de traza coinciden en el movimiento *permanente* o *estacionario*, que se define como aquel movimiento en el que la velocidad no depende del tiempo, aunque pueda depender del espacio  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Por definición, en un movimiento permanente, todas las magnitudes fluidas son independientes del tiempo, pero un movimiento puede ser permanente en un sistema de referencia y no serlo en otro. Si la velocidad no depende del espacio, aunque pueda depender del tiempo  $\mathbf{v}(t)$ , el movimiento se denomina *uniforme*. Esta condición es bastante restrictiva e infrecuente, pues implica que el vector velocidad es el mismo en todo el campo fluido, tanto en dirección como en módulo, y sólo se presenta en los flujos no perturbados y en algunos casos idealizados. En la práctica, no obstante, es común describir como uniforme el movimiento que se mantiene idéntico a sí mismo. Por ejemplo, en el flujo completamente desarrollado en un conducto de sección recta constante, el perfil de la distribución de la velocidad es la misma en todo el conducto y, por tanto, se dice que el flujo es uniforme en él. Además, si el fluido es incompresible y el conducto, indeformable, entonces cualquier cambio temporal del caudal transportado afecta, al instante, a todo el conducto, en el que el flujo se mantendrá uniforme,<sup>2</sup> aunque no sea permanente.

Figura 1.1. Definición de las líneas de corriente, traza y trayectoria. La partícula "i" pasó por  $\mathbf{x}_0$ , lo hace por  $\mathbf{x}_1$  y lo hará por  $\mathbf{x}_2$  siguiendo su trayectoria  $\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0, t)$ . Las partículas "i", "j" y "k" forman la traza en cada instante considerado (por ejemplo, en  $t_2$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_2)$ ) y la línea de corriente de "i" en el instante  $t_2$  es  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_2, t_2)$ . El observador ve la evolución de la línea de traza como la estela de humo de un cigarrillo.



Los puntos de velocidad nula son puntos de *remanso* o *estancamiento*, y son puntos singulares de las líneas de corriente porque son los únicos que pueden pertenecer a más de una ellas. Dicho de otro modo: dos líneas de corriente no pueden cortarse en ningún punto que no sea de remanso porque entonces ese punto tendría definidas dos velocidades. Como corolario, si existe una línea cerrada en el espacio en la que se apoyen líneas de corriente, como en la figura 1.2, la superficie tubular que éstas forman es un tubo de corriente que encierra el fluido en su interior porque no puede atravesarla.

Se denomina *flujo convectivo* de una magnitud  $\phi$  a través de una superficie fija, en un sistema de referencia dado, la cantidad de esa magnitud que la atraviesa por unidad de tiempo:

$$F_\phi = \int_S \phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad [1.4]$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $dS$ .



El flujo convectivo es una magnitud extensiva, ligada al movimiento del fluido, que puede aplicarse a cualquier magnitud intensiva,  $\phi$ , de carácter escalar o vectorial. Si  $\phi$  es un escalar, entonces  $\phi\mathbf{v}$  es el *vector flujo* de  $\phi$  y, por ejemplo,  $\rho\mathbf{v}$ , el vector flujo másico. El flujo convectivo de la densidad es el flujo másico que atraviesa la superficie en un momento dado. Cuando  $\phi$  es un vector, la cantidad  $\phi\mathbf{v}$  se denomina *tensor flujo* de  $\phi$ .

La *circulación* del vector velocidad a lo largo de una línea cualquiera,  $L$ , se define como:<sup>3</sup>

$$\Gamma = \int_L \mathbf{v} \cdot sdl \tag{1.5}$$

y es una magnitud cinemática que ayuda a interpretar el movimiento fluido porque, como se verá a continuación, está relacionada con la existencia o no de rotación. Son muchas las situaciones prácticas en las que el movimiento del fluido sigue trayectorias curvilíneas alrededor de un punto central, aunque ello no siempre indica que el fluido rote como un sólido rígido. Cuando se calcula la circulación en una línea de corriente que se cierra sobre sí misma formando un círculo en el que la velocidad es constante, se obtiene la siguiente dependencia funcional entre la circulación, la velocidad y el radio del círculo:<sup>4</sup>

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot sdl = v \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r v \tag{1.6}$$

En mecánica de fluidos, se define el vector *vorticidad* o vector torbellino como el rotacional del vector velocidad en un punto:<sup>5</sup>

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \wedge \mathbf{v} \tag{1.7}$$

También se definen, por analogía a las líneas y a los tubos de corriente, las líneas de remolino,  $\boldsymbol{\Omega} \wedge sdl = 0$ , que son las envolventes del vector vorticidad, y los tubos de vórtices o remolino, cuyas paredes están formadas por líneas de remolino. Como el campo de vorticidad es un campo solenoidal, ya que su divergencia  $\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}$  es cero y, en consecuencia, el flujo de  $\boldsymbol{\Omega}$  a través de una superficie cerrada es nulo, resulta que el flujo de la vorticidad es constante en el tubo de remolino en un instante dado de tiempo. Esta propiedad cinemática es sumamente importante y es independiente del tipo de fluido o del modelo de flujo que se presente.<sup>6</sup>

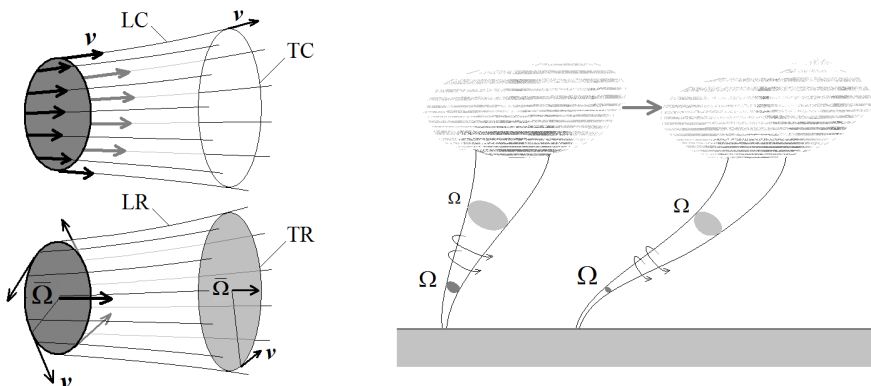


Figura 1.2. A la izquierda y arriba, un tubo de corriente (TC) formado por las líneas de corriente (LC) apoyadas en el perímetro de una superficie. El fluido dentro del tubo de corriente se encuentra encerrado como si el tubo de corriente fuera una tubería de pared impermeable. A la izquierda y abajo un tubo de remolino (TR) en el que el flujo de la vorticidad es constante en un instante de tiempo. El tornado de la derecha es un buen ejemplo de tubo de remolino.



La vorticidad es una medida de la rotación del fluido en torno a un punto, y se denomina *irrotacional* aquel movimiento para el que es cero. Estos movimientos son potenciales en un dominio simplemente conexo, es decir, son movimientos en los que la velocidad deriva de un potencial escalar:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad [1.8]$$

En un movimiento irrotacional, se demuestra que el potencial  $\phi$  es la circulación, independientemente del camino, entre el punto  $\mathbf{x}_0$ , donde el potencial es nulo, hasta el punto  $\mathbf{x}$ . En otras palabras, cuando la velocidad deriva de un potencial, su circulación en una línea cerrada es nula. De esta ecuación se deduce que las líneas equipotenciales y las líneas de corriente son ortogonales en el campo fluido irrotacional simplemente conexo. Más adelante, se demostrará que la divergencia de la velocidad es nula en los fluidos incompresibles, lo que conduce a la ecuación de Laplace:  $\nabla^2 \phi = 0$ .

El gradiente en una dirección  $\mathbf{n}$  de una propiedad  $\phi$  escalar o vectorial, se obtiene a partir del operador  $\mathbf{n} \cdot \nabla$ . En consecuencia, las operaciones  $\mathbf{v} \cdot \nabla \phi$  y  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \phi$ , representan el gradiente de dicha propiedad en la dirección de las líneas de corriente y de las líneas de remolino, respectivamente. Esto es, la condición  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$  indica que la velocidad es constante a lo largo de la línea de corriente, lo que ocurre en los movimientos unidireccionales incompresibles, mientras que su homóloga,  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$ , se presenta en los movimientos bidimensionales, en los que  $\boldsymbol{\Omega}$  y  $\mathbf{v}$  son, necesariamente, perpendiculares.

### 1.1.2. Sistemas coordenados ortogonales

Las coordenadas cartesianas  $\{xyz\}$  no son la única forma de describir la posición de un punto en el espacio. En general, la posición puede determinarse mediante fórmulas del tipo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1, q_2, q_3)$ , donde  $\{q_1, q_2, q_3\}$  son las coordenadas generalizadas del sistema de referencia elegido. La relación entre este sistema y el cartesiano, o entre dos sistemas cualesquiera de coordenadas curvilíneas, puede realizarse mediante las fórmulas de transformación  $q_i = q_i(x, y, z)$ , o bien mediante sus inversas  $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$ .

Las ecuaciones  $q_i = q_i(x, y, z) = C$ , donde  $C$  es una constante, son una familia de superficies coordenadas cuyas intersecciones por parejas definen las líneas coordenadas. Cuando los vectores unitarios a lo largo de dichas líneas coordenadas,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ , son perpendiculares en todo punto del espacio, entonces el sistema de coordenadas curvilíneo se identifica como ortogonal y la transición infinitesimal a lo largo de las líneas coordenadas se obtiene mediante la forma incremental:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_3} dq_3 \quad [1.9]$$

Como el sistema es ortogonal, la longitud diferencial de un elemento de línea es:

$$(ds)^2 = (d\mathbf{x})^2 = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right)^2 dq_i^2 = \sum_{i=1}^3 L_i^2 dq_i^2 \quad [1.10]$$

siendo:

$$L_i^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad [1.11]$$



los *coeficientes de Lamé* del sistema  $\{q_1q_2q_3\}$  o coeficientes métricos. Estos coeficientes permiten escribir los vectores unitarios de la base local como:<sup>7</sup>

$$L_i \mathbf{e}_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right\| \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \quad [1.12]$$

y entonces la ecuación [1.9] toma la forma:

$$d\mathbf{x} = L_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + L_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + L_3 dq_3 \mathbf{e}_3 \quad [1.13]$$

Como la familia de ejes coordenados es ortogonal, se tiene, para  $i \neq j$ :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = 0 \quad [1.14]$$

Puesto que, además:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \right) = -2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_i \partial q_j} \quad [1.15]$$

resulta que el vector:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial(L_i \mathbf{e}_i)}{\partial q_j} \quad [1.16]$$

es normal a  $\mathbf{e}_k$ . Estas ecuaciones proporcionan relaciones útiles para las derivadas de  $\mathbf{e}_i$  respecto a las  $q_i$ . El resultado para  $\mathbf{e}_i$  es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_i} &= \frac{\partial(\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k)}{\partial q_i} = -\frac{1}{L_j} \frac{\partial L_i}{\partial q_j} \mathbf{e}_j - \frac{1}{L_k} \frac{\partial L_i}{\partial q_k} \mathbf{e}_k \\ \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_j} &= \frac{1}{L_i} \frac{\partial L_j}{\partial q_i} \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad [1.17]$$

Los principales procesos del cálculo vectorial para las funciones escalar y vectorial,  $f$  y  $\mathbf{v}$ , respectivamente, se resumen en las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{1}{L_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{L_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{L_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left( \frac{\partial(L_2 L_3 v_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(L_1 L_3 v_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(L_1 L_2 v_3)}{\partial q_3} \right) \\ \nabla \wedge \mathbf{v} &= \frac{1}{L_2 L_3} \left( \frac{\partial(L_3 v_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(L_2 v_2)}{\partial q_3} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{L_1 L_3} \left( \frac{\partial(L_1 v_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(L_3 v_3)}{\partial q_1} \right) \mathbf{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{L_1 L_2} \left( \frac{\partial(L_2 v_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(L_1 v_1)}{\partial q_2} \right) \mathbf{e}_3 \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left( \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{L_2 L_3}{L_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{L_1 L_3}{L_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{L_1 L_2}{L_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \end{aligned} \quad [1.18]$$

donde los coeficientes de Lamé que resultan de [1.11] son los que figuran en la tabla 1.1 para los sistemas ortogonales más frecuentes.



La operación vectorial  $\nabla^2 \mathbf{v}$  puede calcularse de la última ecuación [1.18], sustituyendo  $f$  por  $\mathbf{v}$  y teniendo en cuenta [1.17]. Esta operación se facilita con la identidad vectorial:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{v} \quad [1.19]$$

y las [1.18], lo que, además, simplifica el seguimiento analítico de las ecuaciones.

Tabla 1.1.  
Coeficientes de Lamé para coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Téngase presente que la coordenada  $r$  se define de forma diferente en los sistemas cilíndricos que en los esféricos (figura 1.3).

Sistema coordinado	$L_1$	$L_2$	$L_3$
Cartesiano $(x,y,z)$	1	1	1
Cilíndrico $(r,\theta,z)$	1	$r$	1
Esférico $(r,\theta,\phi)$	1	$r$	$r \sin \theta$

En ocasiones, es más práctico solucionar un problema en un sistema coordinado, pero se prefiere presentar los resultados en otro sistema. La conversión entre dos sistemas se realiza mediante la denominada *matriz de transformación*, en cuyas filas se encuentran las componentes de la base destino con respecto a la de origen. Por ejemplo, como la base local unitaria en coordenadas cilíndricas con respecto a la cartesiana es:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \boldsymbol{\theta} &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k} \end{aligned} \quad [1.20]$$

si las componentes del vector OA de la figura 1.3 en la base rectangular son  $(x_A, y_A, z_A)$ , entonces sus componentes en la base cilíndrica,  $(c_r, c_\theta, c_z)$ , son:<sup>8</sup>

$$\begin{bmatrix} c_r \\ c_\theta \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_A & \sin \theta_A & 0 \\ -\sin \theta_A & \cos \theta_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad [1.21]$$

Para pasar estas coordenadas a las esféricas correspondientes,  $(e_r, e_\theta, e_\phi)$ , se aplica el mismo criterio y resulta:

$$\begin{bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_A \cos \phi_A & \sin \theta_A \cos \phi_A & \sin \phi_A \\ -\sin \theta_A & \cos \theta_A & 0 \\ -\cos \theta_A \sin \phi_A & -\sin \theta_A \sin \phi_A & \cos \phi_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad [1.22]$$

Por razones de ortogonalidad entre las diferentes bases, se puede afirmar que las matrices de transformación tienen como determinante la unidad y que la matriz inversa es igual a la transpuesta. Esto permite realizar fácilmente la transformación en sentido contrario y también relacionar los diferentes sistemas coordinados entre sí. Así, para transformar unas coordenadas cilíndricas en esféricas, se operaría con [1.21] y [1.22] del modo siguiente:

$$\begin{bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_A \cos \phi_A & \sin \theta_A \cos \phi_A & \sin \phi_A \\ -\sin \theta_A & \cos \theta_A & 0 \\ -\cos \theta_A \sin \phi_A & -\sin \theta_A \sin \phi_A & \cos \phi_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_A & \sin \theta_A & 0 \\ -\sin \theta_A & \cos \theta_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_r \\ c_\theta \\ c_z \end{bmatrix} \quad [1.23]$$



cuyo resultado es:

$$\begin{bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_A & 0 & \sin \phi_A \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_A & 0 & \cos \phi_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_r \\ c_\theta \\ c_z \end{bmatrix} \quad [1.24]$$

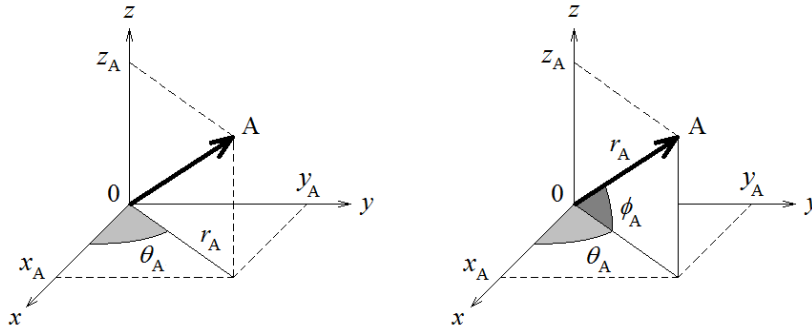


Figura 1.3. Sistemas coordenados curvilíneos cilíndrico (izquierda) y esférico (derecha).

### 1.1.3. Relaciones de Frenet y coordenadas naturales

El triedro de Frenet en geometría diferencial es un sistema de coordenadas local creado sobre una curva en el espacio, cuya terna unitaria de vectores base  $(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  está definida sobre la dirección de la tangente a la curva, su normal principal y la dirección binormal. La orientación relativa entre los vectores de la base se define en sentido dextrógiro y los planos que contienen los vectores  $(\mathbf{s}, \mathbf{n})$  y  $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$  se denominan *osculador* y *normal*, respectivamente.

En comparación con otros sistemas de coordenadas, el sistema de coordenadas intrínsecas no sirve, en general, para describir la posición de cualquier punto en el espacio, sino sólo su ubicación a lo largo de una curva cualquiera, en principio conocida y parametrizable.<sup>9</sup> Para identificar la posición de un punto P de la curva, es necesario definir su origen O, la distancia medida a lo largo de la misma con respecto a dicho origen y un sentido positivo de desplazamiento. Siendo  $s$  la coordenada genérica o abscisa curvilínea de la curva a lo largo de su tangente, y  $\mathbf{r}(s)$  el vector OP correspondiente, el vector tangente  $\mathbf{s}(s)$  se define como:

$$\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \quad [1.25]$$

ya que el cociente  $\Delta \mathbf{r} / \Delta s$  tiende, en el límite, a ser un vector unitario tangente a la curva en P.

En mecánica de fluidos, los triedros de Frenet pueden definirse a lo largo de trayectorias, líneas de corriente y líneas de remolino. La mayor ventaja de usar líneas de corriente es, evidentemente, que entonces el vector velocidad sólo tiene componente en  $\mathbf{s}$ , de modo que las ecuaciones básicas se simplifican notablemente y el propio campo de velocidades define la terna  $(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ . En este caso, el vector tangente es:



$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{v}}{v} \quad [1.26]$$

donde  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ . Como se cumple que  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$ , se deduce que  $2(\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}/ds) = 0$ , de modo que  $d\mathbf{s}/ds$  es un vector perpendicular a  $\mathbf{s}$  y siempre dirigido hacia el centro de curvatura. El vector unitario del marco de Frenet en esta dirección (y sentido) es el vector normal  $\mathbf{n}$ , que resulta de:

$$\frac{d\mathbf{s}}{ds} = \left\| \frac{d\mathbf{s}}{ds} \right\| \mathbf{n} \quad [1.27]$$

Con  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{n}$  definidos, el vector binormal se obtiene del producto vectorial:

$$\mathbf{b} = \mathbf{s} \wedge \mathbf{n} \quad [1.28]$$

A medida que el punto P se desplaza a lo largo de la curva definida por  $s$ , el marco de Frenet puede rotar y los vectores de la base sujetos a P pueden cambiar de dirección. La rotación asociada a este desplazamiento se contempla mediante el denominado *vector de Darboux*, que se define como:

$$\mathbf{D} = \tau \mathbf{s} + \kappa \mathbf{b} \quad [1.29]$$

Los dos coeficientes escalares que aparecen en esta fórmula son la torsión de la curva,  $\tau$ , y su curvatura,  $\kappa$ . En consecuencia, el vector de Darboux proporciona una forma geométrica concisa para interpretar la curvatura y la torsión de una curva en el espacio: curvatura y torsión son la medida de la rotación del marco de Frenet sobre los vectores binormal y tangente, respectivamente.

La variación de los vectores de base a lo largo de la curva viene descrita por las conocidas relaciones de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{s}}{ds} &= \mathbf{D} \wedge \mathbf{s} = \kappa \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \mathbf{D} \wedge \mathbf{n} = -\kappa \mathbf{s} + \tau \mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \mathbf{D} \wedge \mathbf{b} = -\tau \mathbf{n} \end{aligned} \quad [1.30]$$

La primera de estas ecuaciones permite definir analíticamente la curvatura,  $\kappa$ , cuya inversa se sabe que es el radio de curvatura, el cual, según [1.27], es siempre positivo o cero.

Cuando la curva alcanza un punto de inflexión, se produce una singularidad, que conduce a una indefinición del marco de Frenet que limita o condiciona su uso. Esta circunstancia se resuelve imponiendo restricciones al vector normal y definiéndolo en los puntos singulares de la curva.<sup>10</sup> En resumen, se define el sistema natural de coordenadas, en el que el vector normal se define positivo cuando apunta a la izquierda de  $\mathbf{s}$ , de la curva en definitiva, y también en los puntos de inflexión. Como corolario, la concavidad y el radio de curvatura son también definidos positivos en el mismo sentido, y así se cumple que la curvatura en el sistema natural de coordenadas es el número real que resulta del producto escalar:

$$\kappa = \frac{d\mathbf{s}}{ds} \cdot \mathbf{n} \quad [1.31]$$





donde:

$$\frac{ds}{ds} = -\left\| \frac{ds}{ds} \right\| \mathbf{n} = \kappa \mathbf{n} \quad [1.32]$$

cuando  $ds/ds$  apunta a la derecha de  $\mathbf{s}$ . Obsérvese que la definición del sistema natural de coordenadas no afecta las relaciones de Frenet ni el sentido del vector normal, que sigue dirigido hacia el centro de curvatura, sino sólo su signo.

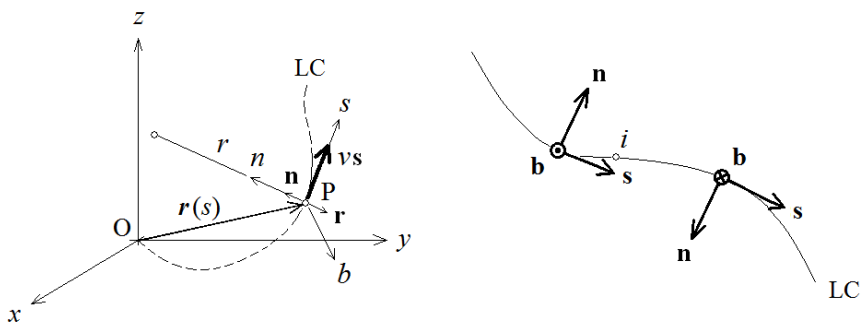


Figura 1.4. Triedro de Frenet sobre una línea de corriente (LC) cuyo radio de curvatura en P es  $r$ , y movimiento del triedro de Frenet a través de un punto de inflexión ( $i$ ). El vector normal  $\mathbf{n}$  siempre apunta hacia la concavidad de la curva, de modo que donde la curvatura cambia de signo el vector  $\mathbf{n}$  no está definido y el vector  $\mathbf{b}$  experimenta una inversión. Para resolver este problema y dar continuidad a la función  $\mathbf{n}(s)$ , en el sistema de coordenadas natural  $\mathbf{n}$  apunta a la izquierda de  $\mathbf{s}$  en este punto. Cuando la curvatura es a la derecha según el sentido de avance de  $\mathbf{s}$ , el vector normal y la curvatura son definidos negativos.

Las relaciones de Frenet [1.30] también pueden escribirse de forma matricial. Además, utilizando la regla de derivación en cadena para introducir el módulo de la velocidad  $v$ , resulta:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad [1.33]$$

La matriz resultante es antisimétrica y, por tanto, los vectores de la base rotan con una velocidad angular  $v(\kappa^2 + \tau^2)^{1/2}$  alrededor de un eje que tiene la dirección del vector  $\mathbf{D}$ . Como el vector de Darvoux de [1.29] no tiene componente en dirección  $\{n\}$ , la curva sólo puede torsionarse en dirección  $\{s\}$  y curvarse (rotar) sobre las líneas en dirección  $\{b\}$ . Esto ha dado lugar al estudio del flujo fluido desde una perspectiva topológica, que queda fuera del alcance de esta obra, del que se extraen importantes conclusiones cuando se analiza la forma que adquiere la superficie de corriente sobre la que se apoya la curva y su relación con la distribución de energía en el flujo y su vorticidad.

Para concluir este apartado, cabe mencionar la forma en que se describen la aceleración de la partícula y su vorticidad en coordenadas naturales. Es bien sabido que la aceleración resulta de la expresión:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{s} + \frac{1}{r} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{n} = \frac{dv}{dt} \mathbf{s} + \frac{v^2}{r} \mathbf{n} = a_t \mathbf{s} + a_n \mathbf{n} \quad [1.34]$$

donde  $a_t$  representa la aceleración tangencial, o variación del módulo de la velocidad;  $a_n$  es la aceleración normal, que representa la variación en dirección de la velocidad y se halla contenida en el plano osculador, y  $r = 1/\kappa$  es el radio de curvatura en ese punto. Se sigue que la aceleración de la partícula no tiene componente en dirección binormal,



lo que evidentemente no quiere decir que sobre la partícula no puedan actuar fuerzas en esa dirección, sino que la resultante de las fuerzas aplicadas en  $\mathbf{b}$  es nula.<sup>11</sup>

No es tan conocida ni tan fácil de interpretar la expresión que rige la vorticidad en un punto. En el caso tridimensional más general, y por componentes, es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_s \mathbf{s} + \Omega_n \mathbf{n} + \Omega_b \mathbf{b} = v \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial n} \mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \mathbf{n} \right) + \frac{\partial v}{\partial b} \mathbf{n} + \left( \kappa v - \frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathbf{b} \quad [1.35]$$

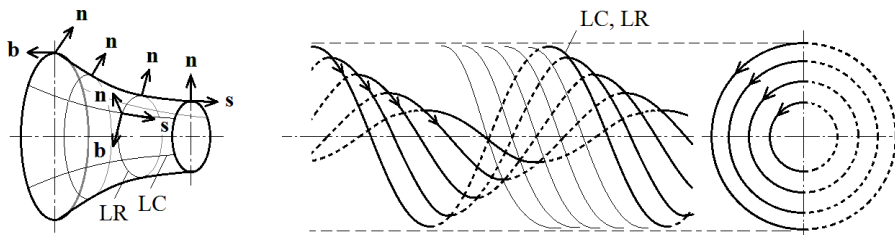
donde aparecen las derivadas del versor  $\mathbf{s}$  y de la velocidad en las direcciones normal y binormal a la línea de corriente. Para determinar las primeras, es necesario operar en coordenadas naturales sobre la superficie parametrizada que contiene la línea de corriente, que será una superficie de corriente.<sup>12</sup> Las segundas son conocidas si se conoce el campo de velocidades sobre dicha superficie.

Es evidente que, en caso de movimiento plano o axilsimétrico sin velocidad acimutal, la vorticidad sólo podría ser perpendicular al plano osculador, es decir, sólo  $\Omega_b$  sería no nula. En cualquier otro caso, la vorticidad puede tener componentes en las tres direcciones de la base local, lo que genera todo un subconjunto de superficies de flujo características.

Sin entrar en más detalles de los estrictamente necesarios, la condición  $\Omega_n = 0$  por sí sola es condición necesaria y suficiente para la existencia de una familia de superficies de un solo parámetro, en las que las líneas de corriente son líneas geodésicas; las líneas normales, perpendiculares a la superficie, y las líneas binormales, paralelas entre sí. Esta condición también implica que el vector de Darvoux y la vorticidad sean paralelos, pues entonces el *vector de Lamb*,  $\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ , es paralelo a  $\mathbf{n}$ .<sup>13</sup> Si es  $\Omega_s$  la que es nula, entonces las líneas de corriente y las de remolino son perpendiculares entre sí y ambas son geodésicas sobre la superficie. Esta condición también tiene otra consecuencia importante en el estudio del flujo: el sistema natural de coordenadas puede transformarse en cualquier otro sistema ortogonal, siempre que la densidad de helicidad,  $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ , sea nula; es decir, el sistema natural de coordenadas es también un sistema ortogonal en aquellos movimientos no helicoidales para los que  $\Omega_s = 0$ .

Por otro lado, cuando  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_s \mathbf{s}$ , se obtiene el flujo de Beltrami, para el que el vector de Lamb es cero y en el que el flujo está formado por vórtices longitudinales cuyas líneas de corriente tienen forma helicoidal y coinciden con las líneas de remolino. En estos movimientos, las partículas de fluido por separado tienen el movimiento de un sólido rígido y una velocidad paralela al eje de rotación de la partícula aislada: cuanto más cerca se encuentra una línea de corriente del eje central, más estirada es su forma y mayor es la velocidad del flujo.

Figura 1.5. Visualización de un flujo axilsimétrico sin velocidad acimutal en que  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_b \mathbf{b}$  (izquierda) y del flujo de Beltrami (derecha). LC y LR son las líneas de corriente y remolino correspondientes.





#### 1.1.4. La derivada sustancial

Los puntos de vista lagrangiano y euleriano se relacionan en mecánica de fluidos mediante la derivada temporal de una propiedad intensiva escalar o vectorial siguiendo una partícula. Esta derivada resulta de la operación:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi \quad [1.36]$$

El término de la izquierda de esta ecuación es la derivada de la propiedad cuando el observador sigue la partícula en su movimiento, y coincide con el punto de vista de Lagrange. El primer término de la derecha es la denominada *derivada local* de dicha propiedad, que es su variación temporal en el punto fijo considerado, mientras que el último término de la derecha es la *derivada convectiva*, o cambio de la propiedad con el movimiento en el campo fluido.

La aceleración de una partícula fluida se calcula, conforme a [1.36], como:<sup>14</sup>

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} \quad [1.37]$$

El primer término de la derecha es la aceleración local y no tiene una interpretación física directa ya que, de hecho, no es una aceleración, pues representa la diferencia de velocidad de dos partículas distintas por unidad de tiempo. El segundo sumando debe entenderse como el producto escalar del vector velocidad por el tensor gradiente de velocidad, y representa el gradiente de la velocidad en la dirección de la línea de corriente.

Cuando las coordenadas son cartesianas o bien  $\phi$  es un escalar, es útil definir el operador *derivada sustancial* como:

$$\frac{D}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \quad [1.38]$$

ya que entonces se cumple que  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (\nabla\mathbf{v})$ . En coordenadas cartesianas, por tanto, la aceleración de [1.37] se puede calcular de forma vectorial mediante la operación:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \quad [1.39]$$

que, en forma de subíndices, resulta:

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad [1.40]$$

En muchas ocasiones, es preferible utilizar la ecuación siguiente:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) \quad [1.41]$$

que es equivalente a la [1.37] y válida en cualquier tipo de coordenadas, porque resulta útil relacionar la aceleración de la partícula fluida con su vorticidad, a través del vector de Lamb, y con el gradiente de la energía cinética específica.



### 1.1.5. Teoremas fluidos

En este apartado, se describen algunos de los teoremas más importantes que se aplican a la cinemática del medio de fluido. Estos teoremas permiten relacionar entre sí algunas de las magnitudes descritas hasta el momento y ofrecen un marco matemático básico, a la vez que necesario, que permite explicar mejor el movimiento fluido y ayuda a interpretarlo.

El teorema de Gauss-Ostrogradskii relaciona el flujo convectivo de una determinada propiedad a través de una superficie cerrada con la divergencia de su vector o tensor flujo en el volumen encerrado por dicha superficie. Esto es:

$$\int_S \phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) dV \quad [1.42]$$

con lo cual  $\nabla \cdot (\phi \mathbf{v})$  es el flujo de  $\phi$  hacia el exterior de la unidad de volumen. Este teorema permite escribir el flujo como una integral de volumen y es de gran ayuda en la deducción analítica de muchos principios básicos.

El teorema de Stokes afirma que la circulación de la velocidad a lo largo de una línea cerrada es igual al flujo de la vorticidad a través de cualquier superficie que se apoye en ella.<sup>15</sup>

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad [1.43]$$

Como consecuencia del teorema de Stokes, si la circulación es nula a lo largo de cualquier línea cerrada, entonces la vorticidad es nula en todo el campo fluido y el movimiento es irrotacional. El recíproco no es cierto si el campo fluido no es simplemente conexo, como ocurriría, por ejemplo, si el fluido estuviera encerrado por una superficie toroidal o si hubiera un número finito de discontinuidades en el campo fluido. Es decir, la circulación de la velocidad no se anula al hacerlo el rotacional cuando no se cumplen las condiciones de aplicación del teorema de Stokes.<sup>16</sup> Más adelante, se describen con más detalle las propiedades del campo fluido irrotacional.

Si el movimiento del fluido es permanente y tal que  $\boldsymbol{\Omega}$  es constante, por ejemplo cuando el fluido rota en torno a un eje, entonces [1.43] se transforma en:

$$\Gamma = \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = \Omega \pi r^2 \quad [1.44]$$

de donde, con [1.6]:

$$\Omega = 2 \frac{v}{r} = 2\omega \quad [1.45]$$

Es decir, el rotacional es el doble de la velocidad de rotación del fluido considerado sólido rígido.

Otros teoremas relacionados con la circulación son los teoremas de Bjerknes y de Kelvin. El primero relaciona la variación en la unidad de tiempo de la circulación de la velocidad a lo largo de una línea fluida cerrada con la circulación de la aceleración de la partícula:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} \quad [1.46]$$



Un resultado interesante del teorema de Bjerknes es el enunciado por el teorema de Kelvin, según el cual, cuando la aceleración deriva de un potencial, su circulación es nula y la circulación de la velocidad a lo largo de cualquier línea cerrada se mantiene constante e igual a su valor inicial. Esta conclusión es muy importante porque existen numerosas situaciones en las que  $\mathbf{a} = \nabla\Psi$ , en concreto aquellas en las que las fuerzas másicas derivan de un potencial (no son potenciales la de Coriolis ni la debida a la aceleración angular del sistema de referencia), las superficiales son sólo de presión (el rozamiento es despreciable o el fluido, no viscoso) y existe una relación de barotropía en el fluido (v. [2.39], por ejemplo).

Otro enunciado del teorema de Kelvin afirma que la circulación a lo largo de una línea cerrada constituida siempre por los mismos elementos de fluido es constante. El movimiento puede ser rotacional o no, pero, si es irrotacional porque parte del reposo o es uniforme, se mantendrá irrotacional mientras la aceleración derive de un potencial.<sup>17</sup> Si el movimiento es rotacional y existen tubos de remolino, puesto que la circulación es la misma sobre cualquier línea perimétrica del tubo de remolino y se mantiene constante en este caso, el vector  $\boldsymbol{\Omega}$  se intensifica a medida que la sección transversal del tubo tiende a cero para mantener su flujo constante (figura 1.2). Como la velocidad no puede hacerse infinita al aumentar la vorticidad, se concluye que los tubos de remolino han de ser cerrados o terminar en un contorno sólido o en una superficie libre.

### 1.1.6. Integrales extendidas a volúmenes fluidos

En mecánica de fluidos, un volumen fluido,  $V_F$ , es un sistema material cerrado al que no entra ni del que sale masa a través de su superficie: es un sistema fluido de masa constante. Para la formulación de los principios fundamentales de la mecánica de fluidos, es fundamental tener en cuenta la variación de cualquier magnitud física asociada al volumen fluido.

Si  $\phi$  es una magnitud fluida intensiva ligada al fluido, la propiedad extensiva asociada a un volumen fluido es:

$$\Phi = \int_{V_F} \phi dV \quad [1.47]$$

La derivada material de  $\Phi$  no puede aplicarse a través de la integral porque el volumen de integración es una función del tiempo. Esta integral puede variar por dos razones: porque  $\phi$  cambie dentro del volumen geométrico fijo,  $V$ , que en ese instante coincide con el volumen fluido,  $V_F$ , y también porque cambie dicho volumen, cuya superficie se mueve a una velocidad  $\mathbf{v}$  y se desplaza una distancia  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\delta t$  en un tiempo diferencial.

El sentido de  $\mathbf{n}$  es definido positivo hacia el exterior del volumen encerrado por la superficie. Es obvio que el producto  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  puede ser positivo, negativo o cero, y que el movimiento de la superficie según su tangente en un punto determinado no aumenta ni disminuye el volumen.

En resumen, el cambio total de  $\Phi$  en un diferencial de tiempo es:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_F} \phi dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\Phi}{\delta t} = \int_V \frac{\partial\phi}{\partial t} dV + \int_S \phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad [1.48]$$



La ecuación [1.48] es el *teorema de arrastre de Reynolds*, que afirma que la variación temporal de una función integral vinculada al movimiento es la integral de su variación local extendida al volumen integral, que en ese instante coincide con el volumen fluido, más el flujo neto de la función a través de la superficie frontera de dicho volumen.

Como la segunda integral de la ecuación [1.48] es el flujo convectivo de la propiedad  $\phi$  a través de la superficie, el teorema de Gauss-Ostrogradskii conduce a:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_V \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\mathbf{v}) \right) dV \quad [1.49]$$

Es importante advertir que, aunque el volumen fijo no es el volumen fluido y sólo coincide con él en el instante considerado, no existe límite para su valor. En otras palabras, el volumen de la ecuación [1.49] puede ser cualquiera, ya que la integral está tomada en un instante y cualquier volumen puede ser volumen fluido.

Con frecuencia, es más cómodo referir la derivada de una integral a volúmenes que coincidan con la geometría variable del contorno. Sea  $V_C$  un volumen de control dependiente del tiempo y cuya superficie se mueve a una velocidad  $\mathbf{v}_C$ . La derivada temporal de la propiedad  $\Phi_C$  contenida en dicho volumen es:

$$\frac{d\Phi_C}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \phi dV = \int_{V_C} \frac{\partial\phi}{\partial t} dV + \int_{S_C} \phi(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{n}) dS \quad [1.50]$$

Si los volúmenes fluido, fijo y de control coinciden en el instante en que se toma la derivada, entonces:

$$\int_V \frac{\partial\phi}{\partial t} dV = \int_{V_C} \frac{\partial\phi}{\partial t} dV \quad [1.51]$$

y, combinando [1.48] y [1.50], se obtiene:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \phi dV + \int_{S_C} \phi((\mathbf{v} - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{n}) dS \quad [1.52]$$

donde  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_C$  es la velocidad relativa del fluido al volumen de control móvil. Evidentemente, si el volumen de control es fijo, entonces:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_C} \phi dV = \int_{V_C} \frac{\partial\phi}{\partial t} dV \quad [1.53]$$

y, al ser  $\mathbf{v}_C = 0$ , [1.52] conduce de nuevo a la ecuación [1.48].

Cuando la propiedad  $\phi$  se distribuye de forma uniforme en el volumen de control,  $\phi(t)$ , la ecuación [1.52] se escribe, en función de los cambios temporales de  $\phi$  y del volumen, como:

$$\frac{d\Phi}{dt} = V_C \frac{d\phi}{dt} + \phi \frac{dV_C}{dt} + \int_{S_C} \phi((\mathbf{v} - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{n}) dS \quad [1.54]$$

que puede aplicarse a numerosos casos en ingeniería, tanto si  $\phi$  es un escalar como si es un vector.



## 1.2. Fuerzas, tensiones y corrimientos

Las fuerzas que pueden actuar sobre los fluidos en el continuo se pueden clasificar en tres categorías: fuerzas másicas o inerciales; fuerzas volumétricas o electromagnéticas, y fuerzas superficiales o de contacto. Las fuerzas de contacto que actúan sobre la superficie de una partícula fluida en movimiento son debidas a la agitación y a la interacción molecular y son de muy corto alcance. Entre estas fuerzas, las lineales o capilares sólo aparecen en la superficie de separación de dos medios no miscibles y apenas afectan al movimiento del fluido.

### 1.2.1. Fuerzas másicas y volumétricas

Las fuerzas másicas son proporcionales a la masa, siendo  $f_m$  la fuerza por unidad de masa y  $\rho f_m$  la fuerza por unidad de volumen correspondiente. Son de este tipo las fuerzas gravitatorias, para las que  $f_m = -g\mathbf{k}$ , y las fuerzas de inercia debidas a la aceleración del sistema de referencia no inercial al cual está asociado el fluido, que son:<sup>18</sup>

$$\mathbf{f}_m = -\mathbf{a}_0 - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r \quad [1.55]$$

Con frecuencia, las fuerzas másicas derivan de un potencial y son conservativas, es decir,  $\mathbf{f}_m = -\nabla U$ . Por ejemplo, las fuerzas gravitatorias derivan del potencial  $gz$  y las centrípetas, de  $\omega^2 r^2/2$ , siendo  $r$  la distancia al eje de giro.

Las fuerzas volumétricas son proporcionales al volumen, no a la masa, y un ejemplo de éstas son las fuerzas electromagnéticas, para las que:<sup>19</sup>

$$\mathbf{f}_v = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \quad [1.56]$$

donde  $\rho_e$  es la carga eléctrica por unidad de volumen, y los vectores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{B}$  son el campo eléctrico, el vector densidad de corriente y el campo magnético, respectivamente.

### 1.2.2. Fuerzas y tensiones superficiales

Las fuerzas superficiales son aquellas que se ejercen sobre el contorno de una masa de fluido por el contacto con otro fluido o con un sólido. Estas fuerzas resultan de realizar la integración vectorial:

$$\mathbf{F}_s = \int_S \delta \mathbf{F}_s = \int_S \mathbf{f}_s \delta S \quad [1.57]$$

donde  $\mathbf{f}_s$  es la fuerza actuante por unidad de superficie [ $\text{N}/\text{m}^2$ ], que, en general, tiene una dirección diferente del versor de la superficie en el que actúa,<sup>20</sup> y es:

$$\mathbf{f}_s = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \quad [1.58]$$

La distribución espacial de estas fuerzas en un instante se define mediante el tensor de tensiones en un punto, de forma que la fuerza vectorial que actúa sobre un diferencial de superficie se calcula:



El estado de tensiones se especifica en función de las componentes normal y tangencial del tensor de tensiones,  $\sigma$  y  $\tau$ , respectivamente, definidas en un sistema de coordenadas  $\{xyz\}$  determinado. Si, con el primer subíndice, se indica la dirección normal al plano asociado a la tensión y, con el segundo, su dirección, entonces se escribe:

$$\mathbf{f}_S = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \overline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} \quad [1.60]$$

donde los  $n_i$  son los cosenos directores del vector unitario normal a  $\delta S$ ,  $\mathbf{n}$ , es decir,

$$\delta S_i = n_i \delta S \quad [1.61]$$

La expresión [1.60] indica que la componente  $i$  de la tensión que actúa sobre el plano de normal  $\mathbf{n}$  es la suma de tres tensiones, cada una aplicada sobre un plano distinto, pero proyectadas sobre el mismo eje coordenado  $i$ . Se demuestra que el tensor de tensiones es simétrico, es decir  $\tau_{12} = \tau_{21}$  y, por tanto,

$$\overline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{T}} \quad [1.62]$$

Ello implica, por un lado, que, para la determinación de la fuerza actuante en un punto y en un instante determinados sobre un elemento de superficie diferencial, se requiere el conocimiento de seis componentes del tensor de esfuerzos definido en ese punto, y, por otro, que la componente según una dirección  $\mathbf{n}$  de la tensión que actúa en un plano de normal  $\mathbf{n}'$  es igual a la componente según la dirección  $\mathbf{n}'$  de la tensión que actúa en un plano de normal  $\mathbf{n}$ . Otra forma de escribir [1.60] es la siguiente:  $f_i = n_j T_{ji}$ .

La interpretación de estas fuerzas resulta evidente cuando se observan en equilibrio en el tetraedro de Cauchy de la figura 1.6. La fuerza diferencial y vectorial actuante sobre  $\delta S$  es:

$$\delta \mathbf{F}_S = \delta \mathbf{F}_x + \delta \mathbf{F}_y + \delta \mathbf{F}_z \quad [1.63]$$

y

$$\delta \mathbf{F}_i = (\sigma_{ix} \mathbf{i} + \tau_{iy} \mathbf{j} + \tau_{iz} \mathbf{k}) \delta S_i = \mathbf{T}_i \delta S_i \quad [1.64]$$

donde  $\mathbf{T}_i$  es la tensión o fuerza por unidad de superficie que actúa sobre la superficie  $\delta S_i$  y que, en general, no tiene la dirección de su versor.

El equilibrio de las fuerzas superficiales es posible porque son de un orden de magnitud superior a las fuerzas volumétricas que pudieran actuar sobre la masa diferencial encerrada por su superficie. Este análisis se realiza en un orden  $(\delta r^2)$ , que mantiene las primeras y anula las segundas o, dicho de otro modo: la fuerza superficial (no la tensión) se anula en el orden del área de las caras del tetraedro diferencial, pero no en el orden de su volumen  $(\delta r^3)$ .<sup>21</sup> En definitiva, la necesidad de que las magnitudes mecánicas macroscópicas cumplan la hipótesis del continuo conduce a que la resultante de las fuerzas de superficie sobre un elemento de volumen sea proporcional al volumen encerrado, y no al área de la superficie que lo limita.

Cualquier tensión  $\mathbf{T}_i$  puede descomponerse en sus proyecciones normal y tangencial a la superficie sobre la que actúa. Así, las componentes normal y tangencial de la tensión  $\mathbf{f}_S$  resultan ser:





$$\sigma_n = (\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{n} \tag{1.65}$$

$$\tau_t = (|\mathbf{f}_s|^2 - \sigma_n^2)^{1/2}$$

Las tensiones  $\tau_{ij}$  de [1.60] son definidas positivas cuando el vector asociado tiene el mismo sentido que el eje del triedro de referencia,  $j$ , de modo que, por ejemplo, para las tensiones normales,  $\sigma_{ii}$ , las compresiones son negativas y las tracciones, positivas.

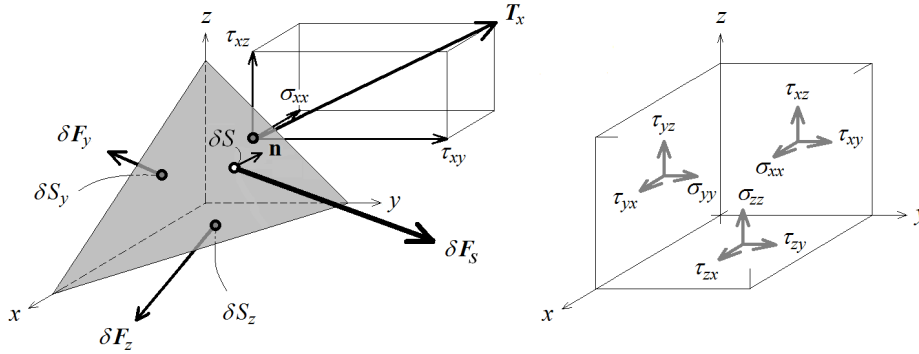


Figura 1.6. Equilibrio de fuerzas superficiales. Sobre cada cara del tetraedro actúa una tensión de valor  $T_i$ , que, multiplicada por el  $\delta S_i$ , proporciona la fuerza sobre dicha cara,  $\delta F_i$ .

Cuando el fluido está en reposo y, por definición, no puede haber esfuerzos cortantes porque entonces aparecería movimiento, el tensor de tensiones se convierte en diagonal,<sup>22</sup> y

$$\mathbf{f}_s = -p_0 \mathbf{n} \tag{1.66}$$

$$-p_0 = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$$

En este caso, se demuestra que:

$$\delta \mathbf{F}_s = -\nabla p_0 \delta V \tag{1.67}$$

donde  $p_0$  es la presión hidrostática, que coincide con la presión mecánica media,  $p_m$ , y con la presión termodinámica local,  $p$ , en condiciones estáticas. La presión mecánica se define como el valor medio de las tensiones normales en un punto y coincide con la termodinámica si el fluido está en reposo, es incompresible o se verifica la condición de Stokes.<sup>23</sup>

### 1.2.3. Descripción del movimiento en el continuo

Cuando el fluido no está en reposo es porque está en traslación, en rotación o en estado de deformación lineal o angular. En general, un vector  $\mathbf{r}_0$  de componentes  $(x, y, z)$ , en el campo fluido en movimiento, se transforma en otro  $\mathbf{r}(\xi, \eta, \theta)$ , cambiando de módulo y dirección. Este cambio se describe, de forma matricial, mediante el tensor gradiente de desplazamiento utilizado en elasticidad:



$$\delta \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \delta \xi \\ \delta \eta \\ \delta \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \overline{\overline{\mathbf{G}_d}} \delta \mathbf{r}_0 \quad [1.68]$$

Como los fluidos, contrariamente a los sólidos elásticos, no presentan resistencia a la deformación sino a la velocidad de deformación o corrimiento, conviene plantear el estudio respecto a las variaciones de la velocidad entre dos puntos. Es decir, un vector  $\delta \mathbf{r}_0$ , situado en un punto de referencia  $\mathbf{r}_0$ , un instante  $dt$  más tarde está situado en  $\mathbf{r}$  y toma la forma  $\delta \mathbf{r}$ , de modo que el corrimiento del vector ha sido:

$$\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{r}_0 = \delta \mathbf{v} dt \quad [1.69]$$

Con esta perspectiva se define el tensor gradiente de velocidad o de corrimiento,  $\overline{\overline{\mathbf{G}_v}}$ . Este tensor no contempla la traslación pura (porque una traslación no implica velocidad relativa entre dos puntos), y se puede escribir, en coordenadas cartesianas, como:

$$\delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \delta \mathbf{r}_0 = \overline{\overline{\mathbf{G}_v}} \delta \mathbf{r}_0 \quad [1.70]$$

El tensor gradiente de velocidad no es simétrico, pero puede ser descompuesto en una parte simétrica y otra antisimétrica, de la forma:

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad [1.71]$$

y

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad [1.72]$$

La parte simétrica,  $\mathbf{e}$ , se denomina *tensor de deformación*, e indica la velocidad de deformación lineal y angular de una partícula. Como el gradiente, en la dirección  $\mathbf{n}$ , de la componente del vector velocidad  $\mathbf{v}$ , en la dirección fija  $\mathbf{m}$ , es  $\mathbf{n} \cdot \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v})$ , los elementos diagonales de este tensor representan porciones de extensión, obtenidas al hacer  $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ , y los elementos no diagonales implican gradientes de velocidad para los que  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{m}$  son ortogonales. Es decir, en el tensor de deformación, los elementos diago-



nales representan la velocidad de dilatación cuando  $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ , a la que puede asociarse una expansión isotrópica,<sup>24</sup> y los no diagonales, la mitad de la velocidad con que disminuye el ángulo recto formado por las direcciones  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{m}$  en el movimiento de deformación, pero sin cambio de volumen.

El tensor antisimétrico,  $\bar{\bar{\Omega}}$ , tiene asociado un vector cuyas tres componentes son:

$$\bar{\bar{\Omega}} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix} \quad [1.73]$$

que cumplen:

$$\boldsymbol{\omega} = |\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3| = \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2} \bar{\bar{\Omega}} \quad [1.74]$$

Es decir, la parte antisimétrica del tensor de corrimiento representa la velocidad de giro del fluido considerado sólido rígido, que es la mitad del vector rotacional de la velocidad o vorticidad. Este resultado generaliza el obtenido en [1.45].

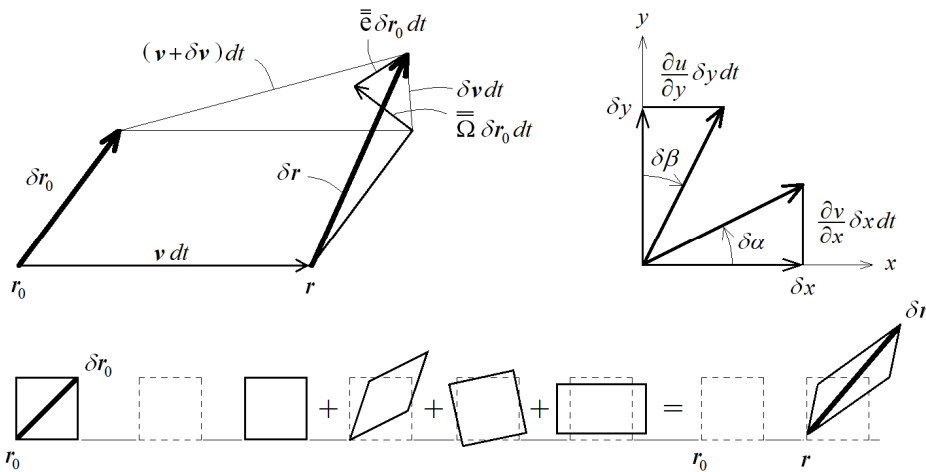


Figura 1.7. Velocidades en el entorno de un punto. El vector  $\delta \mathbf{r}_0$  se traslada, rota y se deforma (se alarga, en la figura) hasta ser  $\delta \mathbf{r}$ . A la derecha, se muestra el significado de las componentes no diagonales del tensor de deformación. La velocidad de deformación del ángulo formado por las direcciones ortogonales  $\{x\}$  e  $\{y\}$ , es  $2e_{xy}$ . Abajo, se presenta la composición del movimiento total: traslación, deformación angular, rotación y deformación lineal.

### 1.2.4. Relación entre tensiones y deformaciones

Las tensiones y las deformaciones asociadas del medio fluido están relacionadas entre sí. La ley experimental de Navier-Poisson para fluidos homogéneos e isotrópicos establece que la relación entre las tensiones viscosas del tensor de tensiones y la velocidad de deformación específica es lineal, esto es:<sup>25</sup>

$$\tau'_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij} \quad [1.75]$$

donde:  $e_{ij}$  son las componentes del tensor de deformación;  $\lambda$  y  $\mu$  son dos coeficientes escalares ( $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido), y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker (con  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ).



Las tensiones viscosas introducidas en [1.75] resultan de arreglar el tensor de tensiones de forma que resulte la suma de un tensor esférico, correspondiente a la presión termodinámica, y de otro que determine la diferencia entre la tensión total en un punto y  $p$ :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{T}} &= -p\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} \\ \tau_{ij} &= -p\delta_{ij} + \tau'_{ij} \end{aligned} \quad [1.76]$$

Las tensiones viscosas son nulas siempre que el tensor de deformación sea cero, esto es, cuando el fluido está en reposo, se traslada o rota como un sólido rígido (y, entonces,  $\tau_{ij} = -p_0\delta_{ij}$ , y el tensor de tensiones queda reducido a su forma esférica, con  $p = p_0$ ).

La ecuación de la cantidad de movimiento que se presenta a continuación relaciona las fuerzas másicas y volumétricas que actúan sobre el fluido con la variación espacial de las tensiones, es decir, con la variación espacial de la presión y las fuerzas de rozamiento que encuentra en su fluir. Las componentes del gradiente del tensor de tensiones se obtienen por derivación de la ecuación [1.76] con [1.71] y [1.75], y son:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \quad [1.77]$$

o también, para  $\lambda$  y  $\mu$  constantes:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad [1.78]$$

Esta ecuación, en notación vectorial y aplicando la ley empírica de Stokes, es:

$$\nabla \overline{\mathbf{T}} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad [1.79]$$

La ley de Stokes indica que  $\mu_v = \lambda + 2\mu/3 = 0$ , pero es sólo es válida para los gases monoatómicos. La viscosidad volumétrica,  $\mu_v$ , tiene valores cercanos a la viscosidad dinámica en otros fluidos, y representa la resistencia viscosa a la deformación volumétrica. El motivo real de introducir  $\mu_v$  es su relación con la suma invariante de los tres elementos de la diagonal del tensor de esfuerzos y las presiones mecánica y termodinámica:

$$p_m = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = p - \mu_v \nabla \cdot \mathbf{v} = p - \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \quad [1.80]$$

Es decir, en fluidos incompresibles o en reposo, es  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , y ambas presiones coinciden, pero, en los compresibles, sólo lo hacen si  $\mu_v = 0$ .

### 1.2.5. Ecuaciones de Cauchy y Navier-Stokes

Las fuerzas másicas y superficiales que actúan sobre un  $\delta V$  en movimiento que en el instante  $t$  contenga un fluido de densidad  $\rho$  han de cumplir la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:<sup>26</sup>

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \delta V = \rho \mathbf{f}_m \delta V + \delta \mathbf{F}_s \quad [1.81]$$



Como las fuerzas superficiales son:

$$\delta F_s = \nabla \bar{T} \delta V \quad [1.82]$$

la ecuación [1.81] queda:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_m + \nabla \bar{T} \quad [1.83]$$

Esta es la ecuación de Cauchy del movimiento en el medio continuo, que se verifica para cualquier fluido porque es independiente de la relación entre el tensor de tensiones y el tensor gradiente de velocidad. La ecuación de Cauchy en componentes es:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_{m,i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad [1.84]$$

La ecuación de Navier-Stokes de la cantidad de movimiento para fluidos newtonianos se obtiene al relacionar estas ecuaciones con [1.79] y [1.78]. En notación vectorial, es:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_m - \nabla p + \mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot v) \quad [1.85]$$

y, por componentes, en cartesianas:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_{m,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot v \quad [1.86]$$

Ambas ecuaciones, para un fluido de Stokes ( $\lambda = -2\mu/3$ ), son:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho f_m - \nabla p + \mu \nabla^2 v + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot v) \\ \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= \rho f_{m,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot v \end{aligned} \quad [1.87]$$

### 1.3. Fenómenos, procesos y propiedades

El dominio y el buen uso de las instalaciones hidráulicas requieren el conocimiento de las ecuaciones que definen el comportamiento del sistema en función de las variables de estado y de proceso, de las condiciones de frontera y de las propiedades del fluido. Entre las propiedades más empleadas, se encuentran aquellas que están asociadas a cada uno de los fenómenos de transporte: difusividades de cantidad de movimiento, masa y calor; además de la densidad, los coeficientes de compresibilidad, las capacidades caloríficas y la presión de vapor.

#### 1.3.1. Fenómenos de transporte, difusividades y simultaneidad

Los estados de equilibrio de la materia en el continuo se caracterizan por una distribución espacial uniforme de cada una de las variables del material, en que cada elemento está en equilibrio mecánico y térmico con los de su entorno. Con el fluido en reposo,



cuando ciertas propiedades no son uniformes, se observa un flujo de intercambio de éstas que tiende a llevarlas a un nuevo equilibrio. Existe una clara relación causa-efecto en este proceso que satisface las leyes de conservación y que se denomina *fenómeno de transporte*.<sup>27</sup>

Los fenómenos de transporte que se producen a escala molecular son básicamente de tres clases y guardan fuertes analogías físicas y matemáticas entre sí. Estos fenómenos son: el transporte de masa, el de energía y el de cantidad de movimiento.

El flujo de masa o gasto a través de una superficie de un fluido de densidad  $\rho$  se calcula mediante la expresión [1.4], donde  $\phi$  es la densidad:

$$G = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad [1.88]$$

Si la superficie es cerrada, la integral anterior representa la cantidad de materia que abandona el volumen encerrado por unidad de tiempo.

Cuando la concentración del fluido no es uniforme, cada especie  $q$  presenta una densidad  $\rho_q$ , de forma que el cociente  $\rho_q/\rho$  es la fracción másica o concentración,  $c_q$ , de dicho componente. Los resultados experimentales manifiestan que el vector flujo másico de la especie  $q$  a través de una superficie es proporcional a su gradiente de concentración, es decir:

$$\rho_q \mathbf{v} = -\rho D \nabla c_q \quad [1.89]$$

donde  $D$  es el *coeficiente de difusión de la mezcla*.

La ecuación [1.89] es la primera ley de Fick de la difusión, válida especialmente para mezclas binarias o en las que exista una especie preponderante. Puesto que la especie  $q$  se conserva, la aplicación del principio de conservación de la masa [2.1] y del teorema de Ostrogradskii resuelven que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_q dV = - \int_S \rho_q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla \cdot (\rho_q \mathbf{v}) dV \quad [1.90]$$

de donde resulta, con [1.89] y suponiendo que  $D$  es constante o que sus gradientes en el medio son despreciables:

$$\frac{\partial c_q}{\partial t} = D \nabla^2 c_q \quad [1.91]$$

que es la conocida ecuación de difusión o segunda ley de Fick,<sup>28</sup> que relaciona la variación de concentración de una especie con su laplaciano según una ecuación de onda.

De forma análoga a lo que sucede con el transporte de una especie  $q$ , para el transporte de calor a través de una superficie se cumple que:

$$\int_V \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV \quad [1.92]$$

La ley de Fourier indica que el flujo de calor es:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad [1.93]$$

con lo que, para un fluido de conductividad constante, resulta:



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad [1.94]$$

que es de la misma forma que [1.91]. El parámetro,  $\alpha$ , se denomina *difusividad térmica*, y es función directa de la conductividad térmica, e inversa de la densidad y de la capacidad calorífica a presión constante del fluido:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad [1.95]$$

El transporte de cantidad de movimiento está asociado a las diferencias relativas de velocidad entre dos puntos y a la viscosidad del fluido. Un gradiente de la velocidad supone la aparición de fuerzas cortantes, tendentes a frenar y acelerar las diferentes partes móviles. Newton enunció que el esfuerzo cortante entre capas contiguas de fluido es proporcional a la velocidad relativa entre capas o velocidad de deformación,<sup>29</sup> y denominó a la constante de proporcionalidad *viscosidad dinámica*,  $\mu$ , de forma que:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \mu \dot{\gamma} \quad [1.96]$$

Cuando el gradiente de presiones y las fuerzas másicas son despreciables, y no hay efectos convectivos de velocidad, la variación de la cantidad de movimiento de un fluido incompresible por unidad de masa y tiempo se relaciona con las fuerzas de origen viscoso mediante la expresión:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad [1.97]$$

de nuevo semejante en forma a [1.91] y [1.94]. La relación  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática del fluido o *difusividad de la cantidad de movimiento*.

Los tres fenómenos de transporte mencionados tienen asociada una difusividad, de dimensiones  $[L^2T^{-1}]$ , que indica la rapidez con que se produce el transporte de dicha propiedad en función del gradiente actuante (superficie barrida por el fenómeno por unidad de tiempo). Por ejemplo, si  $\alpha$  es grande, domina la conductividad sobre la capacidad de almacenar calor y, por tanto, no habrá grandes gradientes de temperatura. Basándose en esta idea, se definen una serie de grupos adimensionales, que comparan la importancia relativa (simultánea) de estas difusividades, que son los números de Prandtl, de Lewis y de Schmidt:<sup>30</sup>

$$\begin{aligned} \text{Pr} &= \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{k} \\ \text{Le} &= \frac{D}{\alpha} = \frac{\rho c_p D}{k} \\ \text{Sc} &= \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D} \end{aligned} \quad [1.98]$$

Además, los diferentes fenómenos de transporte interfieren entre ellos para provocar la aparición de nuevos fenómenos. En mecánica de fluidos, son conocidos los efectos de Souret y Dufoir, que relacionan el transporte de masa como consecuencia de un gra-



diente de temperatura y el transporte de calor por gradiente de concentración, respectivamente.

Para estados no demasiado alejados del equilibrio, se acepta que los flujos,  $f_i$ , de los diferentes fenómenos, son funciones lineales de los esfuerzos,  $e_j$ . De forma generalizada, se escribe:

$$f_i = \alpha_{ij} e_j \quad [1.99]$$

Los coeficientes  $\alpha_{ij}$  se denominan *coeficientes cinéticos* y pueden presentarse en forma matricial, en que los diagonales,  $\alpha_{ii}$ , representan los efectos directos y los no diagonales,  $\alpha_{ij}$ , los efectos de acoplamiento. Onsager demostró que los coeficientes cinéticos pueden ser simétricos si se efectúa una elección apropiada de  $f_i$  y  $e_i$ . Esta elección debe realizarse de forma que el producto del esfuerzo y el flujo represente el caudal de producción de entropía del fenómeno en cuestión.

En general, se sabe que los flujos y los esfuerzos generalizados pueden ser escalares, vectoriales o tensoriales aunque, y según el principio de Curie, en un sistema isotrópico sólo se produce acoplamiento entre los transportes cuyas fuerzas impulsoras son tensores del mismo orden o cuya diferencia de órdenes sea par. Puede haber acoplamiento, por tanto, entre los fenómenos de transporte de masa y energía, puesto que sus fuerzas impulsoras respectivas, gradientes de concentración y temperatura, son vectores (tensores de primer orden), pero no puede haberlo entre ellos y el transporte de la cantidad de movimiento, cuyo esfuerzo característico es el producto diádico  $\nabla v$  (gradiente de la velocidad) por ser un tensor de segundo orden. El transporte de cantidad de movimiento podría acoplarse con la generación de componentes por reacción química, cuya fuerza impulsora es un escalar (la entalpía de Gibbs), pero este posible acoplamiento parece que ser muy débil y no se ha detectado.<sup>31</sup>

Tabla 1.2.  
Coeficientes de difusión de diversas parejas de gases.  $D_0$  está en  $[\text{cm}^2/\text{s}]$ .

Mezcla binaria	$D_0$	$m$
Monóxido de carbono y oxígeno	0,185	1,75
Oxígeno y nitrógeno	0,181	1,75
Vapor de agua y aire	0,220	1,75
Oxígeno y aire	0,178	1,75
Dióxido de carbono y aire	0,138	2
Hidrógeno y aire	0,611	2
Metano y aire	0,196	2

Es conveniente tener un orden de magnitud de los coeficientes de difusividad y de su tendencia al cambiar la presión o la temperatura en numerosos cálculos en ingeniería. La difusividad de masa, por ejemplo, depende del estado termodinámico local del fluido y aumenta con la temperatura. En los gases, el coeficiente de difusión disminuye con la presión y es del orden de  $10^4$  veces mayor que en los líquidos. Una buena aproximación a  $D$  la proporciona la relación:

$$D = D_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^m \left( \frac{P_0}{P} \right) \quad [1.100]$$





En la tabla 1.2, se muestran los valores de  $D_0$  y  $m$  para diferentes mezclas de gases referidos a una atmósfera y 273 K.

La conductividad térmica suele decrecer con la temperatura y depende débilmente de la presión. Curiosamente, el aire y el agua son excepciones a esta regla. Para el aire y el agua a 15°C,  $k$  es, respectivamente,  $2,51 \cdot 10^{-2}$  y  $0,59$  W/m/K, mientras que, a 100 °C, es  $3,17 \cdot 10^{-2}$  y  $0,67$  W/m/K.

### 1.3.2. Viscosidad y reología

La viscosidad es la propiedad distintiva de los medios fluidos, pues relaciona la fuerza cortante aplicada por unidad de superficie con la velocidad de deformación resultante. La viscosidad se utiliza para evaluar la resistencia a fluir de los fluidos por el interior de conductos o a derramar por orificios (cuanto más grande es la viscosidad, mayor es la resistencia).

La unidad de la viscosidad dinámica,  $\mu$ , en el sistema internacional es el [Pa·s]. En la práctica, también se utilizan el *poise*,<sup>32</sup> definido en el sistema cegesimal como [g/cm/s], y el *centipoise* [cPo]. La viscosidad cinemática,  $\nu$ , tiene por unidades prácticas el *stoke*, definido en sistema cegesimal como [cm<sup>2</sup>/s], y el *centistoke* [cSt].

Otras medidas prácticas de la viscosidad son las expresadas en segundos Saybolt [S] y Redwood [R], y grados Engler [°E], que se sirven de aparatos calibrados mediante los cuales se mide el tiempo que tarda en fluir una determinada cantidad de fluido a una temperatura controlada. En la figura 1.8, se muestra la equivalencia entre todas estas unidades de viscosidad.

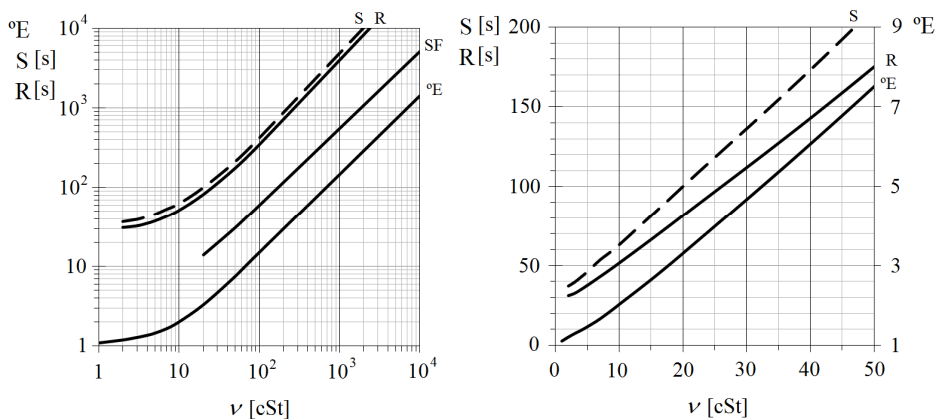


Figura 1.8. Relación entre unidades prácticas de viscosidad. Leyenda: °E, Engler; S, Saybolt; R, Redwood, y SF, Saybolt Furol.

La viscosidad de los gases es del orden de  $10^{-5}$  Pa·s y crece con la temperatura, al aumentar el intercambio de impulso con la agitación molecular, normalmente con un factor  $T^{2/3}$ . En los líquidos, en cambio, la viscosidad decrece al aumentar la temperatura porque los movimientos moleculares ayudan a contrarrestar las fuerzas viscosas. No existe ninguna teoría general que ordene la viscosidad de los líquidos de forma satisfac-



toria, pero se observa experimentalmente que la relación con la temperatura es logarítmica, y una buena aproximación de ello es la expresión:

$$\ln\left(\frac{\mu}{\rho M}\right) = A + \frac{B}{T} \quad [1.101]$$

en la que  $M$  es la masa molecular del líquido, y  $A$  y  $B$  son dos constantes que dependen de su estructura.

La ecuación de Walther de la tabla 1.3, es la base del diagrama viscosidad-temperatura de la ASTM.<sup>33</sup> Según esta ecuación, para  $d=10$  y con la viscosidad en centistokes ( $a \approx 0,6$ ), se tiene:

$$\log_{10}(\nu + 0,6) = \log_{10} b + \frac{1}{T^c} \quad [1.102]$$

y, tomando logaritmos:

$$\log_{10} \log_{10}(\nu + 0,6) = k - c \log_{10} T \quad [1.103]$$

Esta ecuación, representada con una abscisa logarítmica y una ordenada doble logarítmica, conduce a líneas rectas cuya ordenada es  $\nu [\text{cSt}] + 0,6$ .<sup>34</sup>

La variación de la viscosidad con la presión en los líquidos es más notoria que en los gases, y aumenta de forma casi lineal a bajas presiones y de forma exponencial a altas. Una buena aproximación es:

$$\ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) = Cp \quad [1.104]$$

donde  $\mu_0$  es la viscosidad en condiciones atmosféricas, en [Pa·s], y  $C$ , un parámetro que depende, a su vez, de la viscosidad y que puede ajustarse por la expresión:

$$C = 10^{-8} (0,6 + 0,965 \log_{10} \mu_0) \quad [1.105]$$

El aumento de la viscosidad con la presión es especialmente importante en los cojinetes muy cargados, o con cargas fluctuantes, porque el fluido puede perder temporalmente su capacidad de mantener lubricadas las superficies y comportarse más como un sólido que como un fluido viscoso.

Tabla 1.3. Relaciones teórico-empíricas de la viscosidad con la temperatura:  $a, b, c$  y  $d$  son constantes para cada fluido. La temperatura está en kelvin.

	<b>Ecuación</b>	<b>Comentario</b>
Reynolds	$\mu = be^{-aT}$	Ecuación muy temprana, pero sólo precisa en un intervalo de temperaturas muy reducido.
Slotte	$\mu = \frac{a}{(b+T)^c}$	Correcta y muy útil en cálculos numéricos rápidos.
Walther	$\nu + a = bd^{1/T^c}$	Base del diagrama viscosidad-temperatura de la ASTM.
Vogel	$\mu = ae^{b/(T-c)}$	Muy precisa.

Los rangos de viscosidad de los fluidos hidráulicos industriales se subdividen en grados de viscosidad (VG) ISO, relacionados con determinados intervalos de viscosidad en centistokes y a 40°C. Los grados de viscosidad ISO se relacionan con las clases de



viscosidad SAE, según la temperatura del entorno donde tenga que trabajar el equipo. En la tabla 1.4, se muestran algunos de los grados de viscosidad más comunes.

Grados ISO de viscosidad	Viscosidad cinemática a 40 °C [cSt]	Límites de la viscosidad media a 40 °C [cSt]	
		Mínimo	Máximo
ISOVG5	4,6	4,14	5,06
ISOVG10	10	9,00	11,0
ISOVG22	22	19,8	24,2
ISOVG46	46	41,4	50,6
ISOVG100	100	90,0	110
ISOVG220	220	198	242
ISOVG460	460	414	506
ISOVG1000	1.000	900	1.100

Tabla 1.4. Grados de viscosidad ISO. Obsérvese que la viscosidad aumenta con el número de grado. Para tener la viscosidad adecuada a cada temperatura, el VG desciende al hacerlo la temperatura de trabajo.

Los fluidos se pueden clasificar atendiendo a su comportamiento a lo largo del tiempo ante la exposición a esfuerzos viscosos. Este comportamiento puede describirse de forma gráfica utilizando *diagramas reológicos*, en los cuales se representa la relación entre el esfuerzo cortante y la consiguiente velocidad de deformación. En un diagrama reológico, la línea de abscisas se corresponde con el fluido ideal ( $\mu=0$ ) y la de ordenadas, con el sólido elástico perfecto.

Los fluidos newtonianos siguen la ecuación [1.96], o la más general [1.75], que se presenta mediante una característica lineal en un diagrama reológico (cuya pendiente es la viscosidad dinámica,  $\mu$ ). Son fluidos no newtonianos todos aquellos cuya característica reológica no sea lineal o no sea constante en el tiempo. En estos fluidos, no tiene sentido definir una viscosidad newtoniana “constante”, por lo que su comportamiento reológico debe contemplarse desde una perspectiva más amplia. Este comportamiento variable puede describirse en función, por ejemplo, de su viscosidad aparente y de su variación ante cambios de la sollicitación, de la temperatura del fluido, de su estructura físico-química, etc. La *viscosidad aparente* es la viscosidad del fluido newtoniano equivalente a una velocidad de deformación determinada.

La mayor parte de los fluidos no newtonianos e independientes del tiempo tienen un comportamiento que sigue la ley de la potencia de Ostwald-de Waele, según la cual:

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \quad [1.106]$$

donde  $k$  y  $n$  son los índices de consistencia y de comportamiento al flujo o fluencia del fluido, respectivamente. Un fluido para el que  $n < 1$  se denomina *pseudoplástico*, y *dilatante* si  $n > 1$ . Para un fluido que siga la ley potencial, la viscosidad aparente es:

$$\mu_a = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad [1.107]$$

Los cambios de esfuerzo, en cambio, están asociados a la denominada *viscosidad diferencial*, que es:

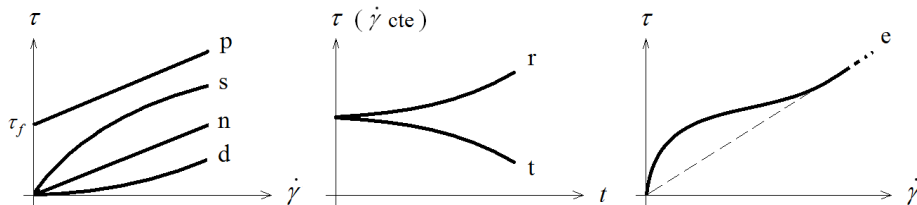
$$\mu_d = \frac{d\tau}{d\dot{\gamma}} = nk\dot{\gamma}^{n-1} \quad [1.108]$$

que se incrementa al aumentar la velocidad de deformación en los dilatantes y disminuye en los pseudoplásticos. Esta viscosidad es útil en el cálculo de los esfuerzos viscosos en los que el gradiente de deformación varía entre dos condiciones de trabajo determinadas.

La característica pseudoplástica es, tal vez, el comportamiento no newtoniano más común. No obstante, muchos fluidos tienen un comportamiento híbrido, a veces pseudoplástico, a veces dilatante, en función del rango de actuación de la velocidad de deformación. Esta circunstancia se explica por los cambios de la estructura del fluido y, por norma general, conduce a una viscosidad límite, conocida como *viscosidad estructural*, para valores de velocidad de deformación elevados.<sup>35</sup> Otros fluidos tienen una estructura reticular a la que se asocia cierto comportamiento sólido, de modo que el fluido sólo se manifiesta cuando se rompe dicha estructura plástica con una *tensión de fluencia*,  $\tau_f$ . A partir de ese momento, la característica puede ser lineal, pseudoplástica o dilatante.

El comportamiento reológico de muchos fluidos reales no puede describirse mediante una simple ecuación porque depende del estado de deformación previo, de si estuvieron en reposo e, incluso, de cuánto tiempo lo estuvieron. El diagrama reológico de estos fluidos dependientes de la historia previa suele manifestar histéresis cuando se agitan hasta un estado de deformación particular y, después, son llevados al reposo. Son *tixotrópicos* los fluidos cuyo lazo de histéresis es dextrógiro, es decir, su tensión tangencial disminuye a medida que aumenta el tiempo durante el cual han experimentado una velocidad de deformación determinada, y *reopécticos* en caso contrario. La mayoría de los fluidos tixotrópicos manifiestan una tensión de fluencia que indica la existencia de una estructura floculada, formada por cadenas de moléculas en las que las fuerzas de interacción juegan un papel muy importante, tanto en los procesos de reconstrucción como de rotura estructural. En estos fluidos, muchos de ellos con carácter pseudoplástico, las cadenas moleculares se reorientan en presencia de esfuerzos cortantes para ofrecer una menor resistencia a la deformación, lo que justifica que su viscosidad aparente disminuya con el tiempo.<sup>36</sup>

Figura 1.9. A la izquierda, el reograma tipo de diferentes fluidos no newtonianos independientes del tiempo. En el centro, el comportamiento de los fluidos cuya viscosidad aparente depende de tiempo. A la derecha, un ejemplo de fluido con viscosidad estructural. Leyenda: p, plástico de Bingham; s, pseudoplástico; n, newtoniano; d, dilatante; r, reopéctico; t, tixotrópico, y e, estructural.



Algunos fluidos añaden, a su comportamiento viscoso, un componente elástico. Entre otros modelos más complejos, el de Maxwell describe, de una manera sencilla, los efectos principales de este tipo de fluidos, admitiendo que su velocidad de deformación se obtiene mediante la superposición de ambos efectos:



$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu} + \frac{\dot{\epsilon}}{G} \quad [1.109]$$

donde  $G$  es el módulo de elasticidad volumétrica del fluido. En los fluidos viscoelásticos, las tensiones creadas por el flujo desaparecen exponencialmente cuando se detienen, y su tiempo de relajación correspondiente es  $\mu/G$ .<sup>37</sup>

### 1.3.3. Densidad y estado

La densidad es la masa específica que manifiesta la materia desde un punto de vista macroscópico. Las unidades de densidad son, por tanto,  $[\text{kg}/\text{m}^3]$  y, en sistema cegesimal,  $[\text{g}/\text{cm}^3]$ . El peso específico se obtiene multiplicando la densidad por la gravedad,  $\rho g$ , y tiene por unidades  $[\text{N}/\text{m}^3]$ , mientras que la inversa de la densidad es el volumen específico,  $\nu$   $[\text{m}^3/\text{kg}]$ . La figura 1.10 muestra la variación de la densidad y de la viscosidad de un aceite mineral con la temperatura y la presión.

Admitida la hipótesis de continuo, la densidad de un gas se puede calcular mediante la ecuación de estado de gas ideal:

$$\rho = \frac{pM}{rT} = \frac{p}{RT} \quad [1.110]$$

con la constante universal  $r = 8,314 \text{ J/K/mol}$ , y  $R = 287 \text{ J/kg/K}$  para el aire (de masa molecular  $M = 28,9 \text{ g/mol}$ ).

Para presiones o temperaturas elevadas, la hipótesis de gas ideal no es suficiente porque un gas ideal no es más que un agregado de partículas en movimiento aleatorio en el que las fuerzas intermoleculares y el calor interno generado por rozamiento son despreciables. No obstante, se puede generalizar la ecuación anterior introduciendo el factor de compresibilidad,  $z$ , de la forma:

$$\rho = \frac{p}{zRT} \quad [1.111]$$

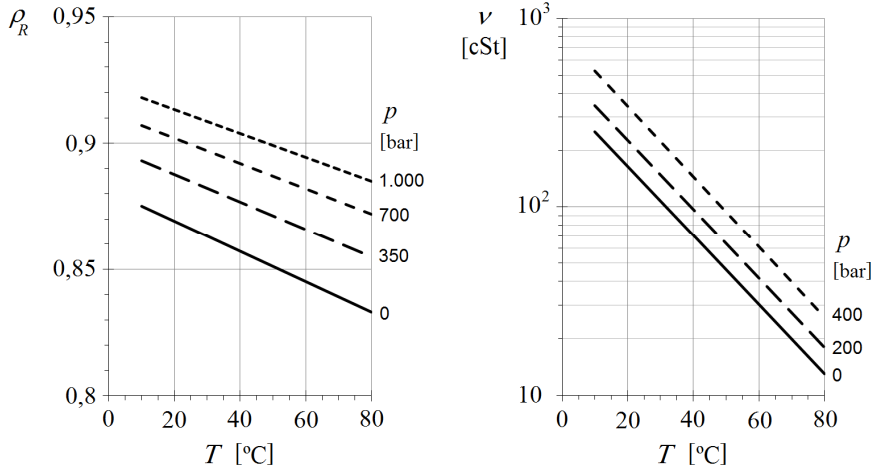
Este factor puede interpretarse como una medida de la desviación en volumen específico del comportamiento del gas real respecto al ideal en las mismas condiciones de presión y temperatura. El principio de los estados correspondientes establece que el factor de compresibilidad es, aproximadamente, el mismo para dos gases a idéntica presión y temperatura reducida,<sup>38</sup> por lo que  $z$  se representa en gráficos o tablas termodinámicas, en función de dichas variables generalizadas. A efectos de la estimación de la desviación antes mencionada,  $z$  también puede calcularse mediante ecuaciones de estado modificadas, pero entonces se ha de tener especial atención a que éstas contemplen de forma adecuada el estado del gas en torno al punto crítico.<sup>39</sup>

El estado de un sistema viene determinado por el valor de sus propiedades. Para determinar el estado intensivo de una sustancia simple compresible, basta con fijar el valor de dos de dichas propiedades intrínsecas independientes cualesquiera.<sup>40</sup> Por tanto, la ecuación de estado no es más que una relación funcional entre un conjunto de tres variables de las que dos se escogen como independientes. Esto es útil cuando, por ejemplo, una variable termodinámica no se puede medir directamente pero se sabe que está relacionada con dos que sí son medibles. Así, la entropía de una sustancia simple y homogénea,  $s$ , se relaciona con la temperatura y el volumen específico mediante una



relación del tipo:  $s = f(T, v)$ , desconocida a priori, pero que puede ser evaluada mediante técnicas gráficas, analíticas, etc. Evidentemente, la relación  $f$  se puede transformar en otra  $g$  del tipo:  $T = g(s, v)$ , y ambas son diferenciales exactas.

Figura 1.10. Relación de la viscosidad y de la densidad con la temperatura y la presión de un aceite mineral. La densidad relativa se define como el cociente de la densidad absoluta del fluido y la de un fluido de referencia, que en el caso de los líquidos y los sólidos es el agua a 1 atm y a 4°C, cuya densidad es 1.000 kg/m<sup>3</sup>. Este aceite, por tanto, es menos denso que el agua.



### 1.3.4. Procesos termodinámicos y trabajos

Los procesos reales son transformaciones termodinámicas del estado fluido en desequilibrio e implican siempre un aumento de la entropía del sistema. No obstante, muchos procesos pueden asimilarse a escenarios idealizados en los que alguna de las magnitudes termodinámicas permanezca constante o sea nula.<sup>41</sup> Este es el caso de los procesos isotérmicos, isobáricos, isócoros y adiabáticos, que se han tratado extensamente en la literatura.

La experiencia enseña que el suministro de calor a un cuerpo hace incrementar su energía interna.<sup>42</sup> En condiciones ordinarias para una sustancia compresible, el incremento de energía interna es observable por un aumento de la temperatura y del volumen específico: los cuerpos se calientan y dilatan. Esto es así pues, para cualquier sustancia, han de cumplirse las condiciones de estabilidad térmica y mecánica definidas por las relaciones siguientes:

$$c_v = \frac{\delta q_v}{dT} > 0 \quad [1.112]$$

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_T < 0 \quad [1.113]$$

Es decir, primero, el calor específico a volumen constante es siempre positivo y, segundo, el aumento de la presión en un proceso isoterma ocasiona siempre una disminución del volumen específico. En caso contrario, el sistema sería inestable y no se alcanzaría nunca al equilibrio.



Al ser la energía interna intrínseca una función de estado, su diferencial es exacta y se verifican las relaciones siguientes:

$$du = \left[ \frac{\partial u}{\partial T} \right]_v dT + \left[ \frac{\partial u}{\partial v} \right]_T dv = c_v dT + \left( T \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v - p \right) dv \quad [1.114]$$

$$du = \left[ \frac{\partial u}{\partial s} \right]_v ds + \left[ \frac{\partial u}{\partial v} \right]_s dv = T ds - p dv$$

y también para la entalpía:

$$dh = \left[ \frac{\partial h}{\partial T} \right]_p dT + \left[ \frac{\partial h}{\partial p} \right]_T dp = c_p dT + \left( v - T \left[ \frac{\partial v}{\partial T} \right]_p \right) dp \quad [1.115]$$

$$dh = \left[ \frac{\partial h}{\partial s} \right]_p ds + \left[ \frac{\partial h}{\partial p} \right]_s dp = T ds + v dp$$

Las ecuaciones anteriores son una buena herramienta para interpretar los diferentes procesos termodinámicos. Así, por ejemplo, en un proceso isócoro,<sup>43</sup> se verifica:

$$du = c_v dT = T ds \quad [1.116]$$

mientras que en uno isobárico:

$$dh = c_p dT = T ds \quad [1.117]$$

El término  $T ds$  representa el calor total recibido por unidad de masa de fluido, tanto de origen externo,  $\delta q$ , como interno e irreversible,  $|\delta q_i|$ .

Si el proceso puede considerarse adiabático y, además, es cuasiestático, es decir, transcurre siguiendo una sucesión de estados de equilibrio, entonces las ecuaciones [1.114] y [1.115] son:

$$du = -p dv$$

$$dh = v dp \quad [1.118]$$

donde  $p dv$  y  $v dp$  son, respectivamente, los trabajos de *expansión* y *compresión* recibidos o realizados por el fluido. En estas condiciones, también se cumple que:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{1}{c_v} \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v dv = \frac{1}{c_p} \left[ \frac{\partial v}{\partial T} \right]_p dp \quad [1.119]$$

expresiones que relacionan los cambios de temperatura, presión y densidad, con los coeficientes de compresibilidad y las capacidades caloríficas en un proceso isentrópico.

Las variables de proceso, calor y trabajo, en cambio, no son función de estado, de modo que su balance en un ciclo cerrado es no nulo y su diferencial no es exacta, pero se relacionan con las de estado mediante los principios primero y segundo de la termodinámica. Así, las formas del primer principio para un sistema cerrado y para una corriente, en forma diferencial y por unidad de masa, son:

$$\delta q - \delta w = du$$

$$\delta q - \delta w = dh + v dv + g dz \quad [1.120]$$



Tanto en los sistemas cerrados como en los abiertos, el fluido realiza o recibe trabajo de expansión cuando su densidad varía. Por ejemplo, en un sistema cerrado cilindro-pistón que contenga una carga de gas de masa  $m$  constante, el trabajo de expansión  $p dv$  es, en sí mismo, el trabajo frontera  $p dV$  obtenido o realizado por la unidad de masa. Con el criterio de signos definido en la ecuación [1.120], el trabajo externo  $\delta w$  es siempre menor que el trabajo de expansión por la presencia de rozamientos y otras irreversibilidades internas al gas.

Figura 1.11.  
Visiones interna y externa: ecuación de Gibbs de la energía interna y primer principio.

$$T ds - p dv = du = \delta q - \delta w$$

Si el cilindro presenta una fuga de gas ( $dm < 0$ ) mientras el pistón reduce el volumen interno ( $dV < 0$ ), es posible que el gas no realice expansión alguna y  $dv = 0$ , si la pérdida de masa se compensa exactamente con la disminución del volumen (en condiciones cuasiestacionarias). Esto es, puesto que:

$$dV = m dv + v dm \tag{1.121}$$

el trabajo frontera se dedicaría por completo a expulsar gas, es decir:

$$m p dv = 0 = p dV - p v dm \tag{1.122}$$

En una corriente, el trabajo que se consume para desplazar la unidad de masa una distancia diferencial es  $d(pv)$ . Este trabajo se extrae de la expansión del fluido y se denomina *trabajo de impulsión* o *de flujo*. El trabajo de impulsión es compañero inevitable de toda corriente por lo que, de todo el trabajo de expansión que el fluido, en este caso el flujo, realiza al expandirse, sólo está disponible aquella parte que queda después de descontar el trabajo de impulsión. Es decir, se dispone del término:

$$-v dp = p dv - d(pv) \tag{1.123}$$

La cualificación de *disponible* del trabajo de compresión se entiende de lo que sigue: cuando se combinan la ecuación de Gibbs de la entalpía [1.115] y la ecuación del primer principio para sistemas abiertos en su forma diferencial [1.120], ambas por unidad de masa, se tiene que:

$$p dv = d(pv) + v dv + g dz + \delta w + |\delta q_i| \tag{1.124}$$

que, con [1.123], conduce a

$$-v dp = v dv + g dz + \delta w + |\delta q_i| \tag{1.125}$$

En otras palabras, el trabajo disponible por la corriente se utiliza para acelerar el flujo, aumentar su cota, producir trabajo mecánico y vencer las fuerzas de rozamiento que implican la generación irreversible de calor en el proceso, y que siempre suponen un exceso del consumo y una disminución de la producción.





Las ecuaciones [1.124] y [1.125] son válidas tanto para procesos adiabáticos como no adiabáticos, con y sin rozamiento, e independientemente de si el flujo es subsónico o supersónico. Evidentemente, todos los términos diferenciales anteriores pueden ser integrados para representar el cambio correspondiente entre dos estados {1,2} del proceso en cuestión.

### 1.3.5. Coeficientes de compresibilidad y otros

Es habitual utilizar coeficientes de expansión, compresión o dilatación para referir los cambios de volumen específico a los cambios de temperatura y presión. Estos coeficientes determinan las propiedades reales de cualquier sustancia y están relacionados entre sí y con sus propiedades calóricas. Como,  $v = v(T, p)$ , se escribe:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{v} \left[ \frac{\partial v}{\partial T} \right]_p dT + \frac{1}{v} \left[ \frac{\partial v}{\partial p} \right]_T dp \quad [1.126]$$

y se definen el *coeficiente de expansión térmica*,  $\alpha$  [ $\text{K}^{-1}$ ], que representa la variación de volumen con la temperatura en un proceso isobárico cuasiestático:

$$\alpha = \frac{1}{v} \left[ \frac{\partial v}{\partial T} \right]_p \quad [1.127]$$

y el *coeficiente de compresibilidad isotérmica*,  $\beta_t$  [ $\text{Pa}^{-1}$ ], que caracteriza el cambio de volumen con la presión a temperatura constante:

$$\beta_t = -\frac{1}{v} \left[ \frac{\partial v}{\partial p} \right]_T \quad [1.128]$$

La inversa de  $\beta_t$  es el módulo volumétrico isotérmico,  $B_T$  [ $\text{Pa}$ ], que relaciona el cambio de presión con el cambio unitario de volumen específico:

$$B_T = -v \left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_T = \rho \left[ \frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_T \quad [1.129]$$

Ambos coeficientes tienen sus homólogos en condiciones isentrópicas,  $\beta_s$  y  $B_s$ :

$$\begin{aligned} \beta_s &= -\frac{1}{v} \left[ \frac{\partial v}{\partial p} \right]_s = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial p} \right]_s \\ B_s &= -v \left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_s = \rho \left[ \frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_s \end{aligned} \quad [1.130]$$

En la tabla 1.5, se presentan los coeficientes de compresibilidad y otras relaciones termodinámicas usuales, y su equivalencia en el caso del gas ideal.

En condiciones ordinarias, es decir, en estados alejados del punto crítico, los líquidos son bastante incompresibles, pero, en general, lo son más ante cambios de presión que de temperatura, ya que  $\beta_t$  es del orden de  $10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  (algo mayor que en la mayoría de los sólidos), mientras  $\alpha$  se encuentra en el intervalo  $[10^{-4}, 10^{-5}] \text{ K}^{-1}$ . En cualquier caso,



estos cambios tan pequeños del volumen específico hacen que la magnitud  $[\partial p/\partial T]_v$  sea relativamente alta en los líquidos, pues tiene que verificarse la relación de Maxwell:

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v \left[ \frac{\partial v}{\partial p} \right]_T \left[ \frac{\partial T}{\partial v} \right]_p = - \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v \frac{\beta_t}{\alpha} = -1 \quad [1.131]$$

Por ejemplo, para el agua a 20 °C,  $\alpha = 1,998 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  y  $\beta_t = 4,456 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ , por lo que resulta que  $[\partial p/\partial T]_v = 4,484 \cdot 10^5 \text{ Pa/K}$ . En consecuencia, cuando se calienta agua a volumen constante, el incremento de presión es de casi 4,5 bares por cada grado de aumento de su temperatura.<sup>44</sup>

Tabla 1.5. Relaciones termodinámicas normalizadas y equivalencias.  $\phi$  es el parámetro de Grüneisen;  $\psi$  el coeficiente de Joule-Thompson, y  $\gamma$  la razón de los calores específicos  $c_p/c_v$ .

Definición	Fluido real	Gas ideal
$-\frac{T}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_p$	$\hat{\alpha} = \alpha T$	1
$\frac{p}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial p} \right]_T$	$\hat{\beta}_t = \beta_t p$	1
$\frac{p}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial p} \right]_s$	$\hat{\beta}_s = \frac{1}{\gamma_s}$	$\frac{1}{\gamma}$
$\frac{\rho}{T} \left[ \frac{\partial T}{\partial \rho} \right]_s$	$\phi$	$\gamma - 1$
$\frac{p}{T} \left[ \frac{\partial T}{\partial p} \right]_s$	$\frac{\phi}{\gamma_s}$	$\frac{\gamma - 1}{\gamma}$
$\frac{p}{T} \left[ \frac{\partial T}{\partial p} \right]_h$	$\psi = \frac{\phi}{\gamma_s} \left( 1 - \frac{1}{\hat{\alpha}} \right)$	0
$\frac{p}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial p} \right]_h$	$\hat{\beta}_h = \frac{1 + \phi}{\gamma_s}$	1

A menudo, el cambio de densidad de los líquidos se calcula mediante la expresión aproximada:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{E} (p - p_0) - \alpha (T - T_0) \quad [1.132]$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad análogo a los sólidos, cuya inversa es el módulo volumétrico.

Todos estos coeficientes se representan en gráficos termodinámicos, que muestran su evolución con la temperatura, la presión o la densidad. Se puede considerar que son siempre positivos en la mayoría de las sustancias pero, en lo que se refiere al coeficiente de expansión térmica, es bien sabido que la densidad del agua a presión atmosférica presenta un máximo a la temperatura de 3,98 °C.<sup>45</sup> Por debajo de esta temperatura,  $\alpha$  es negativo, es decir, desde el punto de fusión hasta los 3,98 °C, el volumen del agua disminuye cuando se calienta a presión constante (figura 1.12).



Por norma general, los fluidos se rigidizan a medida que se comprimen, de modo que, cuanto mayor es la presión, más cuesta conseguir el mismo aumento unitario de densidad. En los gases que sigan un proceso de compresión politrópico, se demuestra que el módulo volumétrico correspondiente es proporcional a la presión absoluta, esto es,  $B_n = np$ , donde  $n$  es el índice de politropía. Para el gas ideal, por tanto: en un proceso isoterma,  $B_T = p$ , y en uno adiabático,  $B_S = \gamma p$ .

Por último, es posible relacionar los coeficientes de expansión térmica y de compresibilidad isotérmica con los calores específicos a presión y a volumen constante de una sustancia mediante la ecuación:

$$c_p - c_v = T \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v \left[ \frac{\partial v}{\partial T} \right]_p \quad [1.133]$$

que, con [1.127] y [1.131], es:

$$c_p - c_v = \frac{\alpha^2}{\beta_t} T v \geq 0 \quad [1.134]$$

Para el gas ideal, la ecuación [1.134] conduce a la conocida *relación de Mayer* según la cual:

$$c_p - c_v = R \quad [1.135]$$

ya que entonces  $\alpha = 1/T$  y  $\beta_t = 1/p$ . Para un líquido, en cambio, muestra que la variación de los calores específicos es despreciable en la mayoría de los cálculos técnicos. Por ejemplo, para el agua a 20 °C y a presión atmosférica, resulta:

$$c_p - c_v = \frac{(1,998 \cdot 10^{-4})^2}{4,456 \cdot 10^{-10}} \frac{293}{998} = 26,4 \text{ J/kg/K} \quad [1.136]$$

es decir, un 0,7 % respecto al valor del  $c_v$  y, por tanto,  $c_v \approx c_p$ . Esta diferencia aumenta, no obstante, al aumentar la temperatura, y es del 12 % a 100 °C. La figura 1.12 muestra la relación entre ambos coeficientes en función de la temperatura a presión atmosférica.

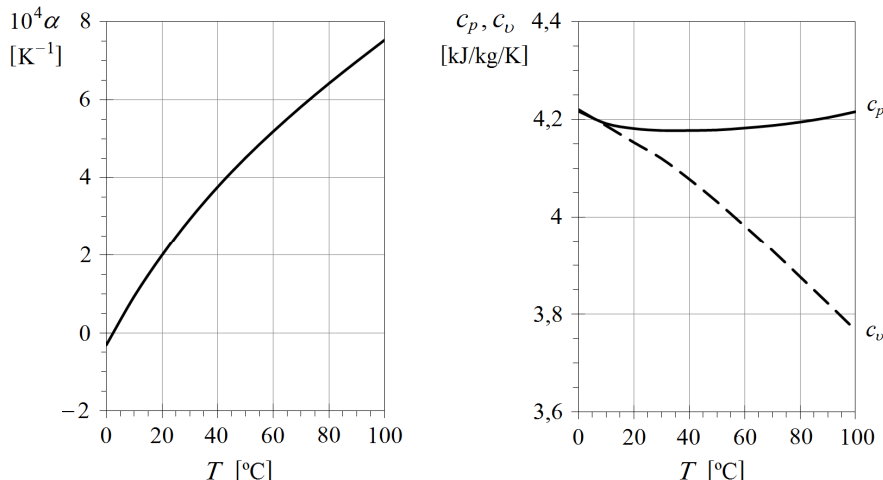


Figura 1.12. Coeficiente de expansión térmica y capacidades caloríficas del agua a presión atmosférica.

Otra dependencia muy importante en termodinámica entre los calores específicos es la siguiente:

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_s = \frac{c_p}{c_v} \left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_T \quad [1.137]$$

pues relaciona los procesos isentrópicos con los isotermos. Utilizando las relaciones de la tabla 1.5 y la ecuación [1.131], se deduce:

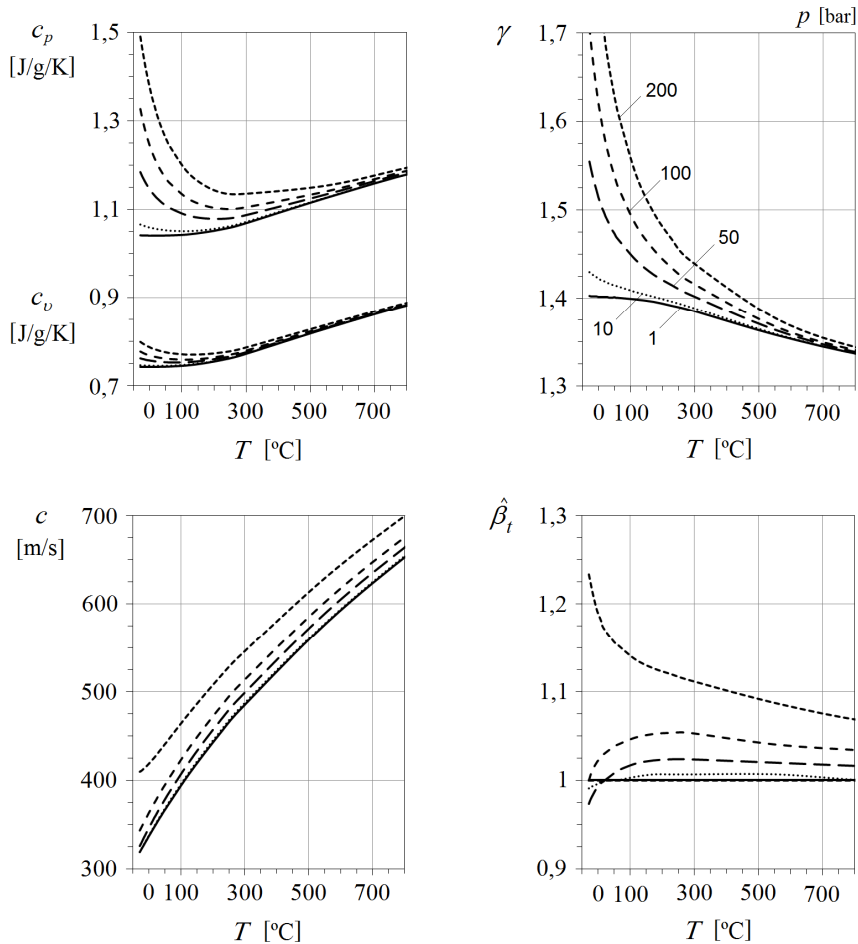
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\beta_t}{\beta_s} = \gamma_s \hat{\beta}_t = 1 + \hat{\alpha} \phi \quad [1.138]$$

o bien:

$$\gamma = \rho c^2 \beta_t \quad [1.139]$$

donde  $c$  es la velocidad del sonido en el medio (v. [3.176] o [5.300]).

Figura 1.13. Algunos coeficientes y propiedades del gas nitrógeno, en función de la presión y de la temperatura.





### 1.3.6. Fenómenos de interfase y capilares

La experiencia enseña que, en la superficie de separación de dos fases distintas, no miscibles,  $\alpha$  y  $\beta$ , aparecen unas tensiones que se extienden hasta la línea que las separa. La fuerza de tracción sobre una longitud elemental de línea es normal a la misma, proporcional a la longitud e independiente de su orientación.

La tensión superficial  $\sigma$  es la fuerza por unidad de longitud [ $\text{N/m} = \text{J/m}^2$ ] que se requiere para aumentar la superficie de una fase cuando está en contacto con el vacío o su vapor. La tensión interfacial  $\sigma^{\alpha\beta}$  representa el mismo concepto pero entre dos fases  $\alpha$  y  $\beta$ , y depende sólo de la temperatura en el punto considerado y, por supuesto, de las fases.<sup>46</sup> Este valor tiene gran importancia en muchos fenómenos de la mecánica de fluidos, pues domina la fuerza de adhesión entre dos superficies, sea entre líquidos o con un sólido, vapor o gas, la estabilidad de las emulsiones, la mojabilidad, la capilaridad, el fenómeno de extensión y el ángulo de contacto entre las fases, y la propagación de ondas capilares.

La superficie libre de cualquier fluido tiende a buscar el equilibrio entre las fuerzas mecánicas, térmicas, químicas y de tensión superficial que se presenten en ella, de forma que la energía total del sistema sea mínima. Esta energía incluye la energía de cada una de las fases másicas en contacto,  $U^\alpha$  y  $U^\beta$ , y la energía asociada a la superficie,  $U^S$ , cuyas variaciones se expresan para sistemas multicomponente como:

$$dU^S = T^S dS - p^S dV + \sigma^{\alpha\beta} dA + \sum_i \mu_i^u dn_i^S \quad [1.140]$$

donde  $\mu_i$  es el potencial químico de la especie  $i$ , y  $n_i$  es el número de moléculas correspondiente.

Como la situación más frecuente es que la superficie libre esté en equilibrio de presión y temperatura, es más conveniente referir el equilibrio total a los cambios de la energía de Gibbs:

$$dG = dG^\alpha + dG^\beta + dG^S \quad [1.141]$$

siendo, para la fase volumétrica  $\alpha$ :

$$dG^\alpha = -S^\alpha dT + V^\alpha dp + \sum_{i,\alpha} \mu_i^g dn_i^\alpha \quad [1.142]$$

y, para una superficie de volumen infinitesimal (convención de Gibbs,  $V^S = 0$ ):

$$dG^S = -S^S dT + \sigma^{\alpha\beta} dA + \sum_{i,S} \mu_i^g dn_i^S \quad [1.143]$$

Combinando estas ecuaciones cuando la temperatura y la presión son constantes, resulta:<sup>47</sup>

$$dG = \sigma^{\alpha\beta} dA + \sum_{i,\alpha} \mu_i^g dn_i^\alpha + \sum_{i,\beta} \mu_i^g dn_i^\beta + \sum_{i,S} \mu_i^g dn_i^S \quad [1.144]$$

Si la composición química de las fases ni de la superficie no cambia,<sup>48</sup> entonces:

$$\left. \frac{dG}{dA} \right|_{T,p,n_i} = \sigma^{\alpha\beta} \quad [1.145]$$



por lo que la tensión interfacial es denominada también *energía libre específica interfacial*.

Por otro lado, la ecuación [1.143], integrada a temperatura constante y dividida por el área, es:

$$g^S = \sigma^{\alpha\beta} + \sum_i \mu_i^g \frac{n_i^S}{A} \quad [1.146]$$

y, como en los sistemas monofásicos se anula el sumatorio, se cumple que la tensión superficial es la energía libre específica de superficie del mismo componente aislado ( $g^S = \sigma^\alpha$ ).

A la cantidad

$$\Gamma_i = \frac{n_i^S}{A} \quad [1.147]$$

se la denomina *densidad superficial de la especie "i"* y representa el exceso de moléculas de soluto que hay por unidad de superficie en el plano de la interfase, en comparación con el número de moléculas que hay por unidad de superficie en cualquier otro plano del seno de la solución. Gibbs descubrió que la tensión superficial de un substrato sigue las variaciones del potencial químico y de la composición de la capa absorbida. La relación existente se encuentra fácilmente diferenciando la ecuación [1.146], y resulta ser:

$$d\sigma = -\sum_i \Gamma_i d\mu_i^S \quad [1.148]$$

a la que se denomina *isoterma de absorción de Gibbs*.

Las características de la interacción de dos fases condensadas en una interfase se describen mejor mediante el método de Dupré, según el cual, si se quiere crear una superficie entre dichas fases, se han de crear primero las de cada fase por separado y después unir las. Esto es:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^\alpha + \sigma^\beta - w_A \quad [1.149]$$

donde  $w_A$  es el *trabajo de adhesión*, que es la energía por unidad de área que se requiere para separar dos líquidos inmiscibles y formar dos interfases líquido-aire. No se formará superficie ni habrá interacción entre ambas fases si en el proceso de unión no se reduce la energía libre interfacial del sistema. Esto ocurre cuando  $w_A = 0$ , y entonces se dice que las fases no se mojan entre sí.

El comportamiento del sistema depende de que el *trabajo de adhesión* rebase o no el valor crítico  $2\sigma^\alpha$ , siendo  $\sigma^\alpha < \sigma^\beta$ . Este valor crítico es el trabajo de cohesión,  $w_C$ , de una de las fases o la energía necesaria para cortar dicha fase aislada por la mitad y generar una superficie de separación unitaria y plana. Cuando el trabajo de adhesión es igual al menor de los trabajos de cohesión, la energía libre específica interfacial está definida por la diferencia de las tensiones superficiales de cada fase aislada,  $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^\beta - \sigma^\alpha$ , por lo que una fase no se siente extraña en presencia de la otra y no se adhiere (v. [1.150]).

La mojabilidad del sistema aumenta a medida que lo hace  $w_A$ . Cuando el trabajo de adhesión es inferior a  $2\sigma^\alpha$ , entonces  $\sigma^{\alpha\beta} > \sigma^\beta - \sigma^\alpha$  y la mojabilidad de  $\beta$  por  $\alpha$  es imperfecta. Si  $w_A > 2\sigma^\alpha$ , entonces  $\sigma^{\alpha\beta} < \sigma^\beta - \sigma^\alpha$  y la mojabilidad es mejor que perfecta. Si, por último,  $w_A \geq \sigma^\alpha + \sigma^\beta > 2\sigma^\alpha$ , entonces  $\sigma^{\alpha\beta}$  es cero o negativa y las dos fases se mezclan.



El concepto de mojabilidad está asociado al problema de la extensión, que consiste en la formación de películas monomoleculares de un líquido sobre la superficie plana de otro líquido inmisible o un sólido. Como los trabajos de adhesión y de cohesión representan, respectivamente, las fuerzas atractivas que existen entre moléculas de diferente e igual naturaleza, se produce extensión cuando el trabajo de adhesión es mayor que el de cohesión.<sup>49</sup> La diferencia de estos dos trabajos se denomina *coeficiente de expansión*,  $S$ , siendo:

$$S = w_A - w_C = (\sigma^\alpha + \sigma^\beta - \sigma^{\alpha\beta}) - 2\sigma^\alpha = (\sigma^\beta - \sigma^\alpha) - \sigma^{\alpha\beta} \quad [1.150]$$

En caso contrario,  $S < 1$ , la fase menos densa se contrae sobre la superficie de la otra fase y adopta la forma de gotas lenticulares.

Sustancia	$\sigma^\alpha$	$\sigma^{\alpha\beta}$	$w_A$	$S$
Agua	72,8	-	-	-
Ácido oleico	32,6	15,6	89,8	24,6
Aceite de oliva	35,8	22,9	85,7	14,1
Cloroformo	27,1	32,8	67,1	12,9
Tolueno	29,0	32,7	69,1	11,1
Tetracloruro de carbono	26,7	45,0	54,5	1,1
Vaselina líquida	33,1	53,1	52,8	-13,4

Tabla 1.6. Tensiones superficiales e interfaciales, trabajo de adhesión y coeficientes de expansión iniciales de diversos fluidos en contacto con agua a 20°C. Unidades [din/cm]. Por norma general, si la tensión interfacial es grande, el trabajo de adhesión es débil (v. [1.149]).

El ángulo de contacto formado entre las fases es muy útil para estudiar la mojabilidad y las propiedades de liofilidad de diversas superficies ante cambios de presión, temperatura o composición. Cuando se deposita una gota de agua (1) sobre una superficie sólida (2) sumergida en aceite (3), se obtiene una de las configuraciones de la figura 1.14, para las que la condición de equilibrio viene dada por la ecuación de Young:

$$\cos \theta = \frac{(\sigma^{s2} - \sigma^{s1})}{\sigma^{12}} \quad [1.151]$$

Se dice que la superficie es mojable por agua si  $\theta < \pi/3$ , y por aceite si  $\theta > \pi/2$ . En general, el líquido no moja el sólido si  $\theta > \pi/2$ , y si  $(\sigma^{s2} - \sigma^{s1})/\sigma^{12} > 1$ , el equilibrio no es posible y se produce extensión. Este fenómeno también explica la capilaridad.

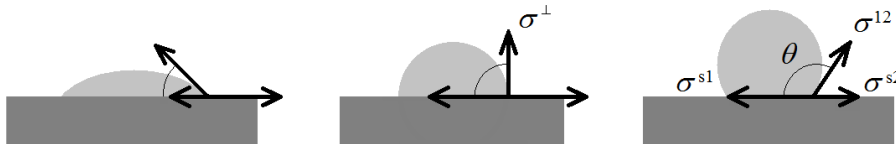


Figura 1.14. Configuraciones de contacto en un sistema ideal sólido-líquido-líquido/gas. Cuando se deposita agua sobre una superficie plana, el sólido es hidrofílico si  $\theta < \pi/2$  e hidrofóbico en caso contrario.

La *ecuación de Laplace* relaciona la diferencia de presiones a través de una superficie curvada con los radios de curvatura principales de ésta y la tensión interfacial:

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \right) \quad [1.152]$$

siendo la presión mayor del lado cóncavo que del convexo. Se demuestra que la curvatura media (término entre paréntesis de esta ecuación) es independiente de la orientación de los elementos de línea ortogonales escogidos, cuyos radios de curvatura son  $r_i$  y  $r_j$ . Esta ecuación se deduce del equilibrio de fuerzas en dirección normal a la superficie curva diferencial de área  $dl_1 dl_2$  de la figura 1.15. La fuerza diferencial debida a la tensión superficial es:

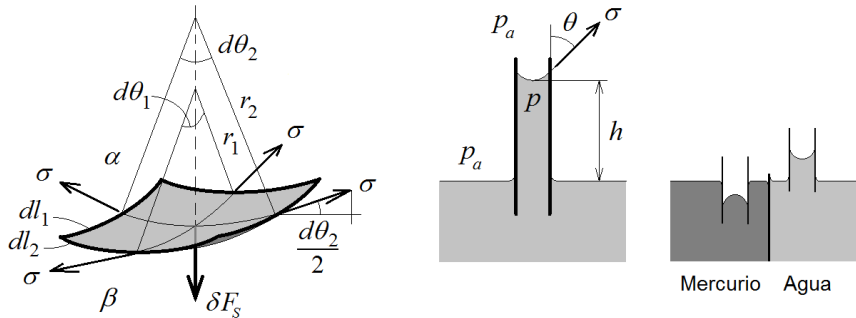
$$\delta F_\sigma = 2\sigma \left( dl_1 \frac{d\theta_2}{2} + dl_2 \frac{d\theta_1}{2} \right) \quad [1.153]$$

mientras que la debida a la fuerza de superficie es [1.64] y, por tanto:

$$\delta F_S = ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_\beta) \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_\alpha) \cdot \mathbf{n}) dl_1 dl_2 \quad [1.154]$$

Si el fluido está en reposo a ambos lados de la superficie, se ha de cumplir [1.66], de donde  $\delta F_S = (p_\alpha - p_\beta) dl_1 dl_2$ . La ecuación [1.152] se obtiene igualando ambas fuerzas y teniendo en cuenta que  $d\theta_i = dl_i/r_i$ .

Figura 1.15. A la izquierda, se ilustra la configuración de la superficie diferencial curvada entre dos medios empleada en la obtención de la ecuación de Laplace. En el centro y a la derecha: fenómeno de ascensión capilar en un tubo de radio  $r$  y meniscos formados en agua (cóncavo) y mercurio (convexo).



Puesto que, en un tubo capilar como el de la figura 1.15, el radio de curvatura de una sección axial del menisco formado es uniforme y aproximadamente  $r/\cos\theta$ , el equilibrio fluidostático se escribe:<sup>50</sup>

$$p_a - p = \frac{2\sigma \cos\theta}{r} = \rho gh \quad [1.155]$$

y el líquido se desplaza a lo largo del tubo una distancia:

$$h = 2 \frac{\sigma}{\rho g} \frac{1}{r} \cos\theta \quad [1.156]$$

que puede ser positiva (ascenso) o negativa (descenso) en función del valor del ángulo de contacto. La relación:

$$r_c = \left( \frac{\sigma}{\rho g} \right)^{1/2} \quad [1.157]$$





tiene las dimensiones de una longitud y se denomina *radio capilar*.<sup>51</sup> Si la longitud típica de la superficie libre a considerar es muy inferior a este valor, se pueden despreciar las fuerzas másicas respecto a las de tensión superficial y la superficie de separación será de curvatura constante. Por ejemplo, la presión dentro de una gota de radio  $R$  es superior a la del entorno y, además, uniforme si  $R \ll r_c$ , según lo explicado.

### 1.3.7. Presión de vapor

A través de la superficie libre de los líquidos, se produce un intercambio bidireccional continuo de moléculas de líquido y de gas que tiende a un equilibrio dinámico. La evaporación es el balance entre los procesos de vaporización y condensación, de modo que, cuando la presión del vapor sobre la superficie es muy baja, la vaporización supera la condensación y se produce una evaporación neta positiva, que aumenta la presión del vapor y la condensación. Si el vapor no se elimina, como pasa en el interior de un depósito estanco parcialmente lleno de líquido, su presión parcial seguirá aumentando hasta que la condensación equilibre la vaporización. En este momento, el aire está saturado y la presión parcial del vapor correspondiente se denomina *presión de saturación*,  $p_{sat}$ , o simplemente *presión de vapor*.<sup>52</sup> Si el vapor no se acumula porque el líquido se evapora en un entorno abierto, la presión parcial del vapor ambiental se relaciona con la de saturación mediante la humedad relativa,  $p_v/p_{sat}$ , y el líquido no deja de evaporarse por no haberse alcanzado el equilibrio.

El equilibrio dinámico se alcanzará más rápidamente cuanto mayor sea la superficie de contacto entre el líquido y el vapor, y persistirá mientras coexistan ambas fases. La presión de saturación depende de la naturaleza del líquido y, como el proceso de vaporización sólo depende de la actividad molecular cuando ambas fases están en equilibrio de presión y temperatura,<sup>53</sup> la presión de saturación depende sólo de la temperatura y aumenta con ella.

La relación entre la presión de saturación y la temperatura durante una transición de fase se describe mediante la ecuación de Clausius-Clapeyron:

$$\frac{dp_{sat}}{dT} = \frac{h_{LV}}{T(v_v - v_l)} > 0 \quad [1.158]$$

Esta ecuación se puede obtener de diferentes maneras. Por ejemplo, como, durante la transición, la presión y la temperatura son constantes, la combinación de las ecuaciones [1.114] y [1.115] conduce a:

$$du = \left( T \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v - p \right) dv = dh - pdv \quad [1.159]$$

El término  $[\partial p/\partial T]_v$  es la pendiente de la curva de saturación y es independiente del volumen durante el cambio de fase. Sustituyendo entonces la derivada parcial por la total, la ecuación de Clapeyron se obtiene integrando entre las dos fases ( $L$  y  $V$ ) e identificando el término  $h_L - h_V$  como el calor latente de cambio de estado o entalpía de vaporización,  $h_{LV}$ .

Si la presión de vapor es pequeña, resulta que el volumen específico de la fase vapor es varios órdenes de magnitud mayor que el del líquido. Admitiendo también el comportamiento ideal del vapor, resulta:



$$\frac{dp_{sat}}{p_{sat}} = \frac{h_{LV}}{R} \frac{dT}{T^2} = \frac{Mh_{LV}}{r} \frac{dT}{T^2} \quad [1.160]$$

que puede ser integrada conociendo la variación de  $h_{LV}$  con la temperatura, o escogiendo unos límites de integración en los que  $h_{LV}$  sea casi constante.

En un entorno cerrado como el depósito anterior, se sabe que la evaporación del líquido se acelera cuando la presión absoluta aumenta, por ejemplo añadiendo un gas inerte. Este resultado puede resultar paradójico porque, al aumentar la presión sobre el líquido, parece que el proceso de vaporización debería disminuir, cuando lo que sucede es todo lo contrario, porque aumenta la presión de vapor en el nuevo equilibrio.

Efectivamente, estando las fases en equilibrio, sus energías libres de Gibbs han de ser iguales y cualquier cambio de la presión sobre el líquido tendrá su efecto sobre la presión de la fase vapor. Con la temperatura y el potencial químico constantes, la ecuación [1.142] muestra que:

$$v_V dp_{sat} = v_L dp_L \quad [1.161]$$

es decir:

$$\frac{dp_{sat}}{p_{sat}} = \frac{v_L}{RT} dp_L \quad [1.162]$$

que, integrada entre ambos estados de equilibrio, conduce a:

$$\ln \frac{p_{sat}}{p_{sat,0}} = \frac{p_L - p_{L,0}}{\rho_L RT} \quad [1.163]$$

En realidad, la variación que experimenta la presión de vapor es muy pequeña porque el término  $\rho_L RT$  es muy grande,<sup>54</sup> pero suficiente para que este planteamiento tenga aplicaciones prácticas muy interesantes, relacionadas con la tensión superficial. Por ejemplo, en el interior de una gota líquida, la presión es superior a la del entorno en un valor  $2\sigma/r$ . Si las gotas se han formado por condensación de un vapor sobreenfriado, entonces la presión externa a la gota es la presión de saturación,  $p_{sat}$ , y será mayor que la presión de vapor que se tendría sobre una superficie plana,  $p_0$ , en las mismas condiciones. Es decir:

$$\ln \frac{p_{sat}}{p_0} = \frac{(p_{sat} + 2\sigma/r) - p_0}{\rho_L RT} \quad [1.164]$$

Como se ha visto que  $p_{sat} - p_0$  es muy pequeña, la gota está en equilibrio con su vapor a una presión  $p_{sat}$  si su radio es:

$$r = \frac{2\sigma}{\rho_L RT} \frac{1}{\ln \frac{p_{sat}}{p_0}} \quad [1.165]$$

En un entorno en el que coexistan gotas de diferente radio a la misma presión, las gotas más pequeñas tendrán una presión de saturación mayor y se evaporarán antes, mientras que las mayores condensarán más vapor y crecerán de tamaño, a expensas de las pequeñas.<sup>55</sup>

Un fenómeno parecido, pero a la inversa, ocurre en los medios porosos saturados por agua. La presión en el interior de la fase líquida en estos medios es inferior a la del



entorno en un valor  $\varepsilon\sigma/r$ , donde  $\varepsilon$  es un factor que depende de la configuración del medio poroso y del tipo de menisco formado. Por ello, la presión de saturación correspondiente es menor que la que habría sobre una superficie plana y el líquido no se evapora o lo hace muy lentamente. Esta circunstancia justifica por qué el suelo está siempre saturado de líquido salvo a unos pocos centímetros por debajo de la superficie, donde el efecto de la radiación solar es más importante. De la ecuación [1.164], se deduce:

$$p_{sat} = p_0 e^{-\frac{\varepsilon\sigma}{\rho_L RT} \frac{1}{r}} \quad [1.166]$$

de forma que, si el radio capilar tiende a cero, la presión de vapor correspondiente se anula y la entalpía de vaporización resulta altísima. Este hecho fundamenta también el desarrollo de los tubos de calor como instrumentos para el transporte de calor a través de un medio poroso saturado de líquido.

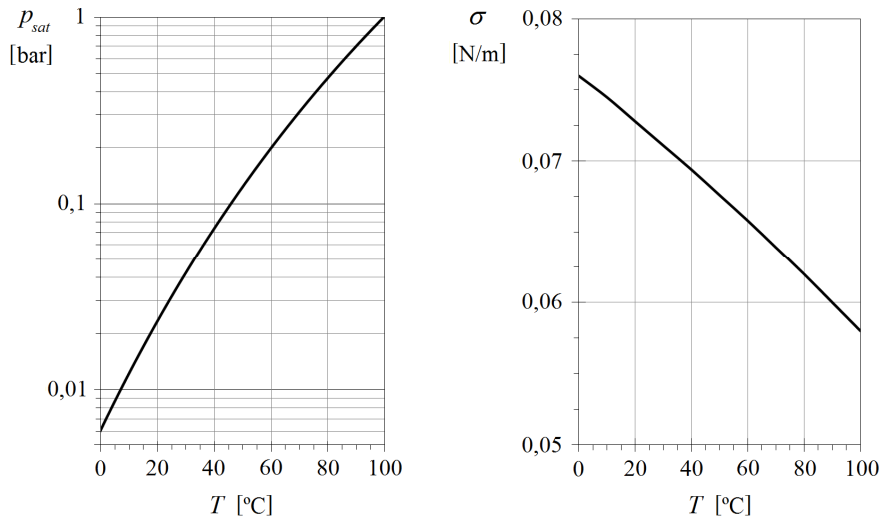


Figura 1.16. Presión de saturación y tensión superficial del agua en el intervalo de temperatura [0-100]°C.

### 1.4. Fluidostática

La fluidostática se ocupa del estudio del equilibrio de fluidos en reposo, es decir, de velocidad nula en algún sistema de referencia que no tiene por qué ser necesariamente la Tierra. Según esto, utilizando las ecuaciones [1.67] y [1.83], se ha de cumplir:

$$\rho f_m - \nabla p = 0 \quad [1.167]$$

Esta ecuación implica, por un lado, que el equilibrio de un fluido se representa por el balance de fuerzas másicas y de presión, y, por otro, que las fuerzas másicas han de derivar de un potencial cuando el fluido está en reposo,<sup>56</sup> tal que:

$$f_m = -\nabla U \quad [1.168]$$



donde  $U$  es el potencial de fuerzas másicas cuyo signo se escoge por conveniencia. Ejemplos de fuerzas másicas que deriven de un potencial son la gravedad, y cualquier aceleración inercial uniforme y lineal que actúe sobre el volumen fluido, y la aceleración centrífuga a velocidad de giro constante.<sup>57</sup> Si estas fuerzas aparecieran combinadas, sus potenciales respectivos se sumarían para dar la  $f_m$  total y hacer  $\rho \nabla U_{tot} + \nabla p = 0$ .

El carácter vectorial de las ecuaciones [1.167] y [1.168], junto a que la densidad sea un escalar, indican que la presión es constante en las líneas equipotenciales de  $U$  y que las isobaras son perpendiculares al campo de fuerzas másicas. Se deduce también que la densidad, aun variable en el campo fluido, ha de ser constante en los isocontornos de  $U$ , ya que  $\nabla \wedge (\rho \nabla U + \nabla p) = \nabla \rho \wedge \nabla U = 0$  (recuérdese que  $\nabla \wedge \nabla p = 0$ ). En consecuencia, el gradiente de densidad es paralelo al gradiente de  $U$  en condiciones estáticas porque, de no ser así, aparecería movimiento.

La combinación de estos resultados indica que, para que sea posible el equilibrio bajo fuerzas másicas irrotacionales, es necesario que la densidad sea una función exclusiva de la presión<sup>58</sup> y, por tanto, que exista una relación de barotropía entre la presión y la densidad que permita introducir el potencial de presiones,  $P$ , como:

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p,t)} \quad [1.169]$$

Con todo, la ecuación general de la fluidostática se escribe:

$$\nabla(U + P) = 0 \quad [1.170]$$

que significa que la suma  $\{U + P\}$  se mantiene constante en equilibrio. La constante puede determinarse cuando son conocidos el valor de  $p$  en algún punto del fluido y el campo de fuerzas másicas.

Las condiciones de contorno de esta ecuación imponen el equilibrio de fuerzas en el fluido aislado, o en contacto con otro fluido o un sólido. La superficie de separación de dos fluidos en reposo, sean dos líquidos inmiscibles o un líquido y un gas, ha de ser una superficie equipotencial de  $U$  en ausencia de fuerzas superficiales y, por tanto, la densidad del fluido en contacto con la superficie ha de ser constante a ambos lados. Cuando dos líquidos en contacto están en equilibrio estático, en cada uno de ellos se tiene que  $p + \rho_i U = C_i$ , y, en la superficie de separación, el salto de presiones ha de estar equilibrado con las fuerzas de tensión superficial. Si  $p_1$  y  $p_2$  son las presiones correspondientes a ambos lados de la superficie, la ecuación [1.152] indica que se cumple:

$$\sigma \left( \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \right) + (\rho_2 - \rho_1) U_s = C_2 - C_1 \quad [1.171]$$

donde  $U_s$  es el valor del potencial de fuerzas másicas en el punto considerado de la superficie. Si la superficie de contacto es plana o su longitud característica es superior a la longitud capilar, entonces las fuerzas de tensión superficial son despreciables y la presión es continua a través de la superficie. En este caso, el valor del potencial  $U_s$  es  $(C_2 - C_1)/(\rho_2 - \rho_1)$  y es constante en toda la superficie, tal como se había enunciado. En superficies muy curvas y, en general, allí donde el primer término de la izquierda de la ecuación [1.171] predomina sobre el segundo, el efecto de la tensión superficial modifica el valor local de  $U_s$ . Esta situación particular se da en meniscos,



en la vecindad de un contorno sólido<sup>59</sup> o en condiciones de gravedad casi nula. Asimismo, el equilibrio estático se deshace y aparece movimiento (por la aparición de tensiones rasantes), si la forma de la superficie de separación cambia o la tensión superficial deja de ser constante a lo largo de la superficie, sea por la existencia de gradientes de temperatura o por la presencia de algún tensioactivo en concentración no uniforme.

#### 1.4.1. Condiciones de estabilidad en el campo gravitatorio

La relación de barotropía de la ecuación [1.169] adecuada a cada problema sólo la puede proporcionar la ecuación de la energía y se intuye, por ejemplo, de la inspección de los tiempos característicos de los procesos mecánicos y térmicos que aparecen en ella. A partir de esta relación, se integra la ecuación [1.170] para hallar las condiciones de equilibrio mecánico de líquidos y gases.

El caso más sencillo es cuando la densidad del fluido es constante, pues entonces se deduce:

$$U + P = gz + \frac{P}{\rho} = C \quad [1.172]$$

Si el fluido es compresible y la compresión cuasiestática es isotérmica, se deduce:

$$gz + \int \frac{dp}{\rho} = gz + \int \frac{1}{\beta_t} \frac{d\rho}{\rho^2} = C \quad [1.173]$$

y, si  $\beta_t$  [1.128] es constante en el intervalo de integración, entonces:

$$g(z - z_0) = \frac{1}{\beta_t} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \quad [1.174]$$

Para un gas ideal en equilibrio isotérmico, la relación entre la presión y la cota resulta de aplicar de nuevo la ecuación [1.170], y se obtiene:

$$RT_0 \frac{dp}{p} = -gdz \quad [1.175]$$

que, integrada, es:

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{g}{RT_0}(z-z_0)} \quad [1.176]$$

Esta situación se reproduce, de forma bastante aproximada, en la estratosfera a partir de los 14 km. En la troposfera, en cambio, el aire atmosférico varía de temperatura con la altura de forma lineal:

$$T = T_0 - Kz \quad [1.177]$$

con  $K = 6,5^\circ\text{C}/\text{km}$ . La relación entre la presión y la altura se obtiene integrando [1.175] con [1.177]:

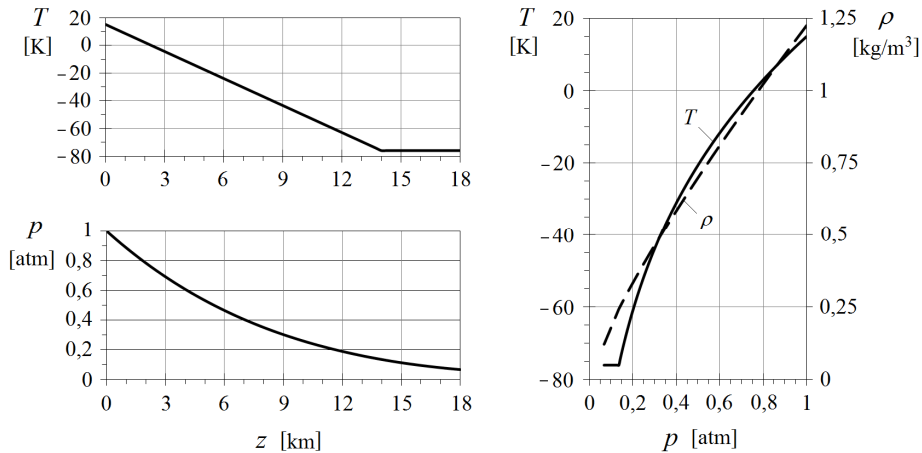
$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T_0 - Kz}{T_0} \right)^{\frac{g}{RK}} \quad [1.178]$$

siendo  $g/R/K = 5,256$ . La densidad se calcula, en cualquier caso, mediante la ecuación de estado.

Cualquiera de los equilibrios anteriores ha de ser estable para mantenerse en el tiempo y no supone que haya equilibrio termodinámico.<sup>60</sup> Una condición necesaria para que la estratificación de la densidad en el fluido sometido a la acción del campo de fuerzas másicas sea estable es que la densidad aumente con la presión. Por ejemplo, en el campo gravitatorio, el líquido más pesado se sitúa por debajo del más ligero.

En la atmósfera no saturada, se demuestra que la configuración [1.178] no es estable si  $K > g/c_p \approx 9,7 \text{ °C/km}$ .<sup>61</sup> Sobrepasar esta condición conlleva que cualquier perturbación que implique un desplazamiento vertical de una partícula fluida será ampliada por la estratificación circundante en equilibrio mediante una fuerza de restitución negativa que la alejará de su posición inicial. Este desequilibrio se produce, en definitiva, si el ritmo de cambio de la temperatura de la partícula no es suficientemente rápido para que ésta se adapte a su nuevo entorno. Por ejemplo, si la temperatura decrece con la altura más rápidamente que la temperatura de la partícula en un pequeño desplazamiento ascendente –lo que ocurre en la condición de inestabilidad mencionada–, la partícula se situará en un entorno de mayor densidad y continuará su ascenso.

Figura 1.17. Evolución aproximada de la presión atmosférica en función de la altura. Atmósfera de composición constante. La atmósfera estándar se define en sus primeros 11 km (troposfera) con una temperatura que disminuye linealmente desde los 15 hasta los  $-56,5 \text{ °C}$ . Por encima de los 11 km y hasta los 22, aproximadamente, la temperatura continúa su descenso, se estabiliza y, después, vuelve a aumentar.



### 1.4.2. Equilibrio relativo

Existen dos casos particulares de movimiento de un fluido en los cuales, aun existiendo aceleración, no se originan esfuerzos cortantes entre capas de fluido que puedan provocar movimiento relativo entre ellas. Es decir, en estos movimientos, el fluido puede considerarse un sólido rígido respecto al sistema de referencia no inercial, por lo que ambos casos se engloban dentro de la estática. Se trata del movimiento uniformemente acelerado y la rotación uniforme respecto a un eje vertical.

Una aceleración lineal uniforme implica:

$$f_m = -(g\mathbf{k} + \mathbf{a}_0) \quad [1.179]$$



y son válidas todas las conclusiones anteriores, en concreto, que la superficie libre resultante es una superficie equipotencial plana normal al vector  $f_m$ . Si  $a_0 = a\mathbf{i}$ , la superficie libre verifica la ecuación:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -a(x - x_0) - g(z - z_0) = 0 \quad [1.180]$$

y su inclinación será:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z - z_0}{x - x_0} = -\frac{a}{g} \quad [1.181]$$

En el caso de una rotación uniforme, se cumple:

$$\mathbf{f}_m = -(\mathbf{g}\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \quad [1.182]$$

siendo, con [1.170]:

$$\nabla \left( gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0 \quad [1.183]$$

y, en la dirección del gradiente:

$$\frac{dp}{\rho} = \omega^2 r dr - g dz \quad [1.184]$$

Esta ecuación muestra que la presión aumenta con el radio y disminuye con la altura. En la centrifugación de líquidos con sólidos en suspensión para su separación, los sólidos de mayor densidad se extraen por el fondo exterior del depósito mientras que los menos densos, como las espumas, las natas, etc., se retiran por la parte central de la superficie del paraboloide.<sup>62</sup>

En el caso de los líquidos de densidad constante, la ecuación de la superficie libre, cuando se alcanza el equilibrio, es un paraboloide de revolución como el que se ilustra en la figura 1.18, de ecuación:

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad [1.185]$$

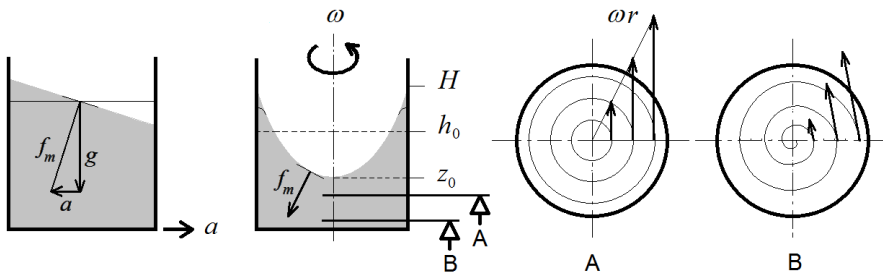


Figura 1.18. Configuraciones de equilibrio relativo. El vector de las fuerzas másicas,  $f_m$ , es perpendicular a las superficies de presión constante. La distribución de la velocidad en el cilindro en rotación es la de un sólido rígido (A), salvo por el efecto de la viscosidad en la vecindad de las paredes laterales y del fondo. Cuando se remueve una taza de café, el poso queda en la parte central del fondo porque sobre la base (B) prevalece el gradiente de presión radial sobre la fuerza centrífuga (v. [1.183]) cuando disminuye  $v^2/r$ . Las fuerzas viscosas disminuyen la velocidad del fluido cerca del fondo por lo que aparece un vórtice en dirección  $(\theta)$ . El poso del fondo gira en espiral hasta el centro de la taza empujado por el gradiente de presión radial y el más ligero puede llegar a ascender por el centro del vórtice donde la presión es menor.

Si  $h_0$  es la altura inicial de líquido en el vaso de radio  $R$ , la igualdad de los volúmenes en reposo y en movimiento permite calcular las alturas máxima y mínima del paraboloide. El resultado es:



$$H = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

$$z_0 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$
[1.186]

que condicionan el rebose del líquido o su separación del fondo al valor de la velocidad de rotación,  $\omega$ .

### 1.4.3. Fuerzas y empujes sobre superficies

Para el cálculo y el diseño industrial de compuertas, presas hidráulicas e incluso barcos, es necesario conocer la resultante de la distribución de la presión y su punto de aplicación o centro de presiones,  $C$ , sobre la superficie en cuestión. La fuerza total sobre una superficie se calcula, a partir de [1.57], como:

$$\mathbf{F}_S = \int_S \mathbf{f}_S dS = \int_S \overline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dS$$
[1.187]

que en estática es:

$$\mathbf{F}_S = - \int_S p \mathbf{n} dS$$
[1.188]

En adelante se considerará un líquido en condiciones hidrostáticas, sometido a la fuerza de la gravedad y sobre cuya superficie libre actúa una presión  $p_a$  constante sin efectos apreciables de tensión superficial. En estas condiciones, si la cota de la superficie es  $z=H$ , se cumple:

$$p + \rho g z = p_a + \rho g H$$
[1.189]

La fuerza sobre una superficie viene dada por la ecuación [1.188] o, en este caso:

$$\mathbf{F}_S = - \int_S (p_a + \rho g (H - z)) \mathbf{n} dS$$
[1.190]

Cuando el efecto de la presión  $p_a$  se anula por simetría (porque actúa sobre ambos lados de la superficie), cada una de las componentes de esta fuerza se calcula, con [1.61], haciendo:

$$F_i = \int_{S_i} \rho g (H - z) dS_i$$
[1.191]

y van dirigidas hacia la superficie.

La interpretación de la componente vertical  $F_z$  es sencilla, ya que es simplemente el peso del volumen del fluido, real o imaginario, situado por encima de la superficie considerada hasta la superficie libre, real o imaginaria, que se extiende hasta una altura  $H + p_a/\rho g$  (cuando  $p_a$  se anula por consideraciones de simetría). Esta fuerza no depende del peso real de fluido situado por encima de la superficie, sino del peso imaginario (en su caso) del fluido contenido en el volumen a trazos de la figura 1.19 (esta circunstancia es conocida como “paradoja hidrostática”).

La fuerza  $F_z$  está aplicada en el centro de gravedad del volumen,  $G$ , porque, dado que el momento de la resultante respecto de cualquier eje es igual al momento de las fuerzas distribuidas respecto del mismo, se tiene, por ejemplo, para  $x_C$ :





$$x_C = \frac{1}{F_z} \int_{S_z} x \rho g (H - z) dS_z = \frac{\int_{S_z} x (H - z) dS_z}{\int_{S_z} (H - z) dS_z} \equiv x_G \quad [1.192]$$

La fuerza horizontal resultante sobre cada uno de los ejes coordenados es la misma que actuaría sobre la superficie plana vertical proyectada sobre el plano perpendicular a dicho eje. Es decir:

$$F_x = \int_{S_x} \rho g (H - z) dS_x = \rho g (H - z_G) S_x = p_G S_x \quad [1.193]$$

donde  $z_G$  es la coordenada vertical del centro de gravedad de la superficie proyectada y  $p_G$  es la presión en dicho punto. La línea de actuación de esta fuerza se calcula, por ejemplo, para la componente  $z$ , de la forma:

$$z_C = \frac{1}{F_x} \int_{S_x} z \rho g (H - z) dS_x = \frac{\int_{S_x} z (H - z) dS_x}{(H - z_G) S_x} \quad [1.194]$$

Intuitivamente, se colige que  $z_C$  es inferior a  $z_G$  porque la distribución de la presión es tal que aumenta con la profundidad. En cualquier caso, las tres componentes de la fuerza calculadas por [1.191] no pasan, en general, por un punto común y, en consecuencia, no se pueden combinar en una única fuerza.

Los cálculos se simplifican bastante cuando la superficie sobre la que se quiere calcular la fuerza es plana. En este caso, como la fuerza resultante es ortogonal a la superficie, el cálculo de una única componente proporciona el resto por proyección y el punto de aplicación será el mismo para todas ellas. Otra consecuencia inmediata es que la magnitud de la fuerza resultante no cambia con la rotación de la superficie sobre cualquier eje que pase por su centro de gravedad.

Con estas consideraciones y con el sistema de coordenadas que aparece a la derecha de la figura 1.19, se tiene:

$$\begin{aligned} F &= (F_x^2 + F_z^2)^{1/2} = \rho g (H - z_G) S = \rho g y_G \sin \theta S \\ F_z &= F \sin \theta = \rho g y_G \sin \theta S_x \\ F_x &= F \cos \theta = \rho g y_G \sin \theta S_z \end{aligned} \quad [1.195]$$

El centro de presiones continúa sin cruzar la superficie por  $G$ , pero su evaluación es más sencilla:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{F} \int_S x \rho g y \sin \theta dS = \frac{\int_S x y dS}{y_G S} = \frac{I_{xy}}{y_G S} \\ y_C &= \frac{1}{F} \int_S y \rho g y \sin \theta dS = \frac{\int_S y^2 dS}{y_G S} = \frac{I_x}{y_G S} \end{aligned} \quad [1.196]$$

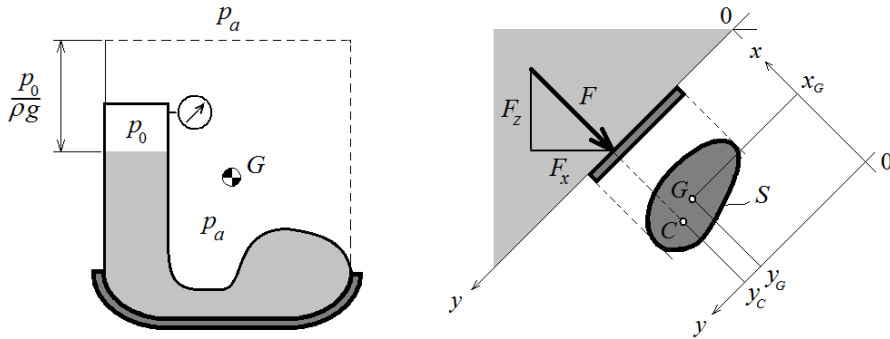
donde  $I_{xy}$  es el producto de inercia  $\{x, y\}$  de la superficie, que puede ser positivo o negativo, e  $I_x$  es el momento de inercia respecto a  $\{x\}$ . Estas últimas expresiones, referidas a los ejes centroidales, toman la forma:

$$x_C = \frac{I_{xy,G}}{y_G S} + x_G$$

$$y_C = \frac{I_{x,G}}{y_G S} + y_G$$
[1.197]

En conclusión,  $x_C = x_G$  cuando el producto de inercia  $I_{xy,G}$  es cero, lo que sucede cuando alguno de los ejes centroidales es eje de simetría para la superficie. En cambio, como  $I_{x,G}$  es siempre positivo, se verifica que el centro de presiones está siempre por debajo del centro de gravedad.

Figura 1.19. Volumen imaginario para el cálculo de la componente vertical del empuje sobre una superficie (izquierda) y fuerza sobre una superficie plana inclinada (derecha). La fuerza se evalúa con la presión actuante en  $G$  [1.195] pero se encuentra aplicada en  $C$  [1.196].



#### 1.4.4. Principio de Arquímedes

El enunciado del principio de Arquímedes es bien conocido y cualquier buen estudiante puede conseguir demostrarlo de alguna manera. En este apartado, se va a deducir la expresión generalizada de la fuerza que actúa sobre un volumen encerrado por una superficie inmersa en un fluido y el valor del momento resultante respecto de un punto cualquiera.

Aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradskii y la ecuación [1.167] a la [1.188], resulta:

$$\mathbf{F}_S = -\int_V \nabla p dV = -\int_V \rho \mathbf{f}_m dV$$
[1.198]

que dice que la fuerza que ejerce el fluido exterior sobre una superficie cerrada<sup>63</sup> es igual y opuesta a la que ejercen las fuerzas másicas sobre el fluido dentro de esa superficie.

El momento de esta fuerza respecto a un punto que se tomara como origen de coordenadas,  $\mathbf{r}_0$ , sería:

$$\mathbf{M} = \int_S p \mathbf{n} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dS = \int_V \nabla \wedge (p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) dV$$
[1.199]

que, puesto que  $\nabla \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ , también es:

$$\mathbf{M} = \int_V \nabla p \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = -\int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge \rho \mathbf{f}_m dV$$
[1.200]



que dice que el momento de las fuerzas de superficie respecto a un punto es igual y opuesto al que ejercerían las fuerzas másicas que actúan sobre el fluido desplazado por el sólido.

Las ecuaciones anteriores, en el caso de líquidos bajo la acción de fuerzas gravitatorias en las que  $p + \rho gz = p_0$ , según [1.172], toman la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= -\int_V \nabla(p_0 - \rho gz) dV = -\mathbf{k} \int_V \frac{d}{dz}(p_0 - \rho gz) dV = \rho g V \mathbf{k} \\ \mathbf{M} &= \int_V \nabla(p_0 - \rho gz) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \\ &= -\rho g \mathbf{k} \wedge \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = -\rho g V \mathbf{k} \wedge (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad [1.201]$$

que constituyen el enunciado matemático del principio de Arquímedes. Obsérvese que el momento resultante es nulo respecto del centro de gravedad del volumen fluido desplazado o centroide ( $0 \equiv G$ ), y que este punto no tiene por qué coincidir con el centro de gravedad del sólido.

Evidentemente, estas ecuaciones se pueden desglosar por componentes en las diferentes coordenadas. Se observa que el empuje de Arquímedes es completamente vertical, ya que la componente horizontal de la fuerza sobre una superficie sumergida se calcula sobre la proyección de ésta en el plano perpendicular a la dirección correspondiente, lo que la anula sobre una superficie cerrada por simetría.

#### 1.4.5. Flotación y estabilidad

La estabilidad de los cuerpos sumergidos o flotantes es muy importante en el diseño de navíos y embarcaciones de todo tipo. Se consigue que un cuerpo esté en equilibrio estable en un líquido si, ante una perturbación de su posición, aparecen fuerzas o pares restituyentes que tiendan a llevarlo a su posición primitiva.

Un cuerpo totalmente sumergido está en equilibrio si su peso iguala el empuje hidrostático, y entonces el centro de gravedad del cuerpo,  $C$ , y el centroide del volumen que ocupa,  $G$ , están sobre la misma vertical. El equilibrio es estable si  $C$  está por debajo de  $G$ , pues entonces el giro del cuerpo en cualquier sentido causa la aparición de un par que se opone al desplazamiento, como en el caso de un péndulo.<sup>64</sup>

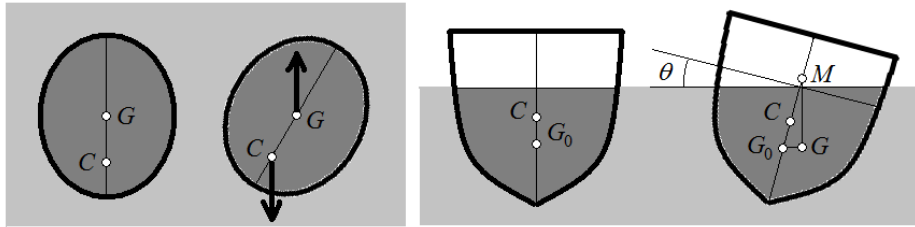
En el caso de los cuerpos flotantes o parcialmente sumergidos, el equilibrio es posible aunque  $C$  esté por encima de  $G$ , siempre que, tras una perturbación, el desplazamiento horizontal de  $G$  sea superior al de  $C$  y, en consecuencia, el metacentro,  $M$ , se encuentre por encima de  $C$  (existe un metacentro por cada eje de giro). Se ha de observar que el volumen sumergido cambia de forma durante el giro del cuerpo y, con ello, la posición de su centroide, pero si el desplazamiento no es muy brusco y transcurre en condiciones casi estáticas, entonces el volumen sumergido se mantiene constante y su empuje iguala el peso del cuerpo.

Se demuestra que el desplazamiento horizontal del centroide,  $L = G_0G$  (de  $G_0$  a  $G$ , en la figura 1.20) es igual a  $\text{tg} \theta (I/V)$ , donde  $I$  es el momento de inercia del área formada por las cuñas generadas durante el giro  $\theta$  del cuerpo, y  $V$  es el volumen sumergido. El des-



plazamiento es estable si la distancia  $G_0M$  es mayor que  $G_0C$ , siendo  $G_0M = L/\sin \theta \approx l/V$  para ángulos de giro pequeños.

Figura 1.20. Condiciones de estabilidad de los cuerpos sumergidos y flotantes.



<sup>1</sup> Las líneas de corriente en coordenadas cilíndricas vienen dadas por la expresión:

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_\theta} = \frac{dz}{v_z}$$

- <sup>2</sup> Evidentemente, el flujo no es estrictamente uniforme, pues la velocidad es menor en la proximidad de la pared, pero si el flujo es turbulento y está completamente desarrollado, la condición de uniformidad es bastante aproximada.
- <sup>3</sup> No se exige que la línea sobre la que se integra sea línea de corriente. En algunos textos, la circulación se interpreta como el trabajo desarrollado por la velocidad en esa línea, lo cual sólo es aceptable de la analogía entre las fórmulas de ambas definiciones.
- <sup>4</sup> En general, si las líneas de corriente no son circulares pero el campo de velocidades es tal que el vector velocidad forma un ángulo constante a lo largo de todo el círculo de integración (como en un movimiento en espiral, por ejemplo), se resuelve que  $\Gamma = 2\pi r v_\theta$ , donde  $v_\theta$  es la proyección de la velocidad sobre la dirección perimetral del círculo.
- <sup>5</sup> Matemáticamente, el rotacional se define como el límite al que tiende la circulación del campo vectorial de velocidad cuando la curva sobre la que se integra se reduce a un punto, es decir:

$$\Omega_j = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

El resultado es la componente del rotacional en la dirección  $\{j\}$  perpendicular a la superficie  $\Delta S$ .

- <sup>6</sup> Si el fluido es ideal, el teorema de Helmholtz [2.58] establece que las líneas de remolino siempre estarán constituidas por las mismas partículas, por lo que la superficie lateral del tubo de remolino será invariante e impermeable. En otras palabras, la superficie material que coincide en un instante con un tubo de remolino continúa siéndolo aunque éste se desplace. En cambio, la vorticidad puede difundirse a través de las paredes del tubo de remolino si el fluido es viscoso, por lo que el flujo de la vorticidad en una sección del tubo puede cambiar de un instante a otro.
- <sup>7</sup> Estos vectores son ortogonales entre sí en un sistema ortogonal, pero hay que tener siempre presente que la terna de vectores unitarios varía de un punto a otro, puesto que dependen de las coordenadas. En cambio, el triedro local en el sistema de coordenadas cartesianas es invariante.
- <sup>8</sup> Para el vector OA de la figura con origen en O, la componente  $c_\theta$  es nula.
- <sup>9</sup> El parámetro suele ser el tiempo o su longitud. La curva ha de ser diferenciable y sus derivadas, continuas.



- <sup>10</sup> Esta indefinición no se presenta cuando  $\tau=0$ , por cuanto el vector binormal está definido por [1.28] si lo están  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{n}$ .
- <sup>11</sup> Un ejercicio interesante es analizar el efecto que las fuerzas de Coriolis pueden tener sobre la curva. Como la contribución de la aceleración de Coriolis,  $-\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ , es perpendicular a la línea de corriente, ésta sólo puede afectar su curvatura y su torsión. La presencia de aceleración de Coriolis modifica la distribución del campo de presiones en dirección perpendicular a la curva, pero nunca realiza trabajo.
- <sup>12</sup> Las ecuaciones [1.30] se completan en coordenadas naturales con las variaciones en las direcciones de  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{b}$ , lo que proporciona una descripción tridimensional del espacio en función de las curvaturas y las torsiones de las curvas ortogonales en P, que son sus líneas coordenadas.
- <sup>13</sup> El vector de Lamb se conoce también como fuerza del vórtice por unidad de masa. Recuérdese también que el vector de Darvoux no tiene componente normal, pues, de hecho, se cumple que  $\mathbf{D} \wedge \mathbf{s} = \kappa \mathbf{n}$ . La interpretación física del vector de Darvoux como una vorticidad no es posible en los movimientos anómalos, en los que se cumple que  $\Omega_n \neq 0$ .  $\Omega_n$  se denomina *anormalidad* del campo de vorticidad.
- <sup>14</sup> Obsérvese que la aceleración de una partícula fluida puede no ser nula en un movimiento estacionario por el efecto del término convectivo asociado al gradiente de la velocidad. Si el sistema de referencia no es inercial, para obtener la aceleración absoluta de la partícula se ha de añadir, a la aceleración relativa calculada con [1.37], la aceleración debida al movimiento del sistema de referencia.
- <sup>15</sup> En esta definición, el versor de superficie apunta hacia fuera de ésta del lado en que se ve girar el vector velocidad en sentido opuesto al de las agujas del reloj, o sentido levógiro.
- <sup>16</sup> Merece atención el caso del vórtice libre lineal, movimiento claramente irrotacional en el que la circulación sobre una línea cerrada circular es constante e igual a la ecuación [1.6]. Evidentemente, esta aparente incongruencia se resuelve cuando se observa la singularidad del centro del vórtice.
- <sup>17</sup> Más adelante, se trata en más detalle esta cuestión y las causas de la variación de la vorticidad y de la circulación en el campo fluido. Ahora ha de quedar claro, no obstante, que tanto el teorema de Bjerknes como el de Kelvin son teoremas cinemáticos que no imponen restricción alguna a la naturaleza del fluido.
- <sup>18</sup> La interpretación de los términos inerciales es bien conocida y no se tratará aquí.
- <sup>19</sup> La interacción de los campos electromagnéticos y los fluidos es tratada por la electrodinámica, la magnetodinámica y la ferrodinámica, categorías todas ellas de la mecánica de fluidos sobre las cuales el lector puede consultar la bibliografía especializada.
- <sup>20</sup> En general, no se cumple que la integración de los módulos sea el módulo de la integral.
- <sup>21</sup> La forma más clara de verlo es mediante la aplicación del teorema de Gauss-Ostrogradskii a un  $\delta V$  que encerrara el  $\delta S$ :

$$\delta F_S = \int_{\delta S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \delta S = \int_{\delta V} \nabla \mathbf{T} \delta V \approx \nabla \mathbf{T} \delta V$$

expresión en que la aproximación se convierte en igualdad si el  $\delta V$  es suficientemente pequeño y regular.

- <sup>22</sup> A todo tensor simétrico, se le puede asociar una cuádrlica, que, en general, será un elipsoide. Los ejes del *elipsoide de tensiones* son principales cuando el tensor es diagonal, y, en reposo, todas las direcciones lo son y la cuádrlica es una esfera. Es decir, el esfuerzo es normal en cualquier dirección sólo cuando las tensiones principales son iguales y el fluido está en reposo.
- <sup>23</sup> La traza de un tensor es un escalar invariante ante rotaciones de los ejes de referencia. La relación entre ambas presiones se puede establecer a partir de la traza del tensor de tensiones y la ley de Navier-Poisson [1.75]. El resultado es [1.80]. Si el fluido está en reposo o es ideal (con coeficientes de transporte nulos), las únicas interacciones moleculares son debidas a la agitación térmica. En este caso, no hay direcciones privilegiadas para los esfuerzos, que sólo pueden ser normales sobre la superficie. Por ello, y como se explicaba en el pie anterior, el tensor de tensiones en un punto determinado de un fluido en reposo es un tensor esférico cuyas componentes normales son iguales a la presión termodinámica.
- <sup>24</sup> La traza de este tensor o, en el caso más general, la del tensor gradiente de velocidad [1.70], está relacionada con el principio de continuidad, y es  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  en un fluido incompresible. Debido a la invarianza de su traza, en las direcciones principales, un elemento de fluido sólo puede estirarse o acortarse, pero no rotar.



Como el tensor de deformación es simétrico, tiene asociada una cuádrica, como el tensor de tensiones, a la que se denomina *elipsoide de deformaciones*, cuya normal en un punto dado de su superficie indica la velocidad de deformación correspondiente. Una esfera diferencial se convierte en un elipsoide al deformarse, y su variación de volumen es  $4/3\pi\delta r^3 \nabla \cdot \mathbf{v}$ .

- <sup>25</sup> La ley de Navier-Poisson establece una relación lineal que es experimental por cuanto muchos fluidos la cumplen, pero su determinación se basa en el establecimiento teórico de una serie de principios que deben seguir todas las ecuaciones reológicas, a saber: el principio del determinismo, según el cual las tensiones en los distintos puntos de un flujo están determinadas por la historia del movimiento; el principio de la acción local, por el cual la tensión en un punto de un flujo es insensible a lo que pase fuera de una pequeña región alrededor del punto indicado, y el principio de la indiferencia del sistema cartesiano de referencia. En un fluido newtoniano, cada componente del tensor de tensiones viscosas es función lineal de cada componente del tensor de velocidad de deformación, y puede tener 81 coeficientes de proporcionalidad (9x9). Si el medio es isótropo, en cambio, estos coeficientes se reducen a tres: uno para la dirección normal ( $\lambda$ ), y dos para cada dirección tangencial, que resultan ser iguales por simetría ( $\mu$ ). En coordenadas cartesianas, la ley de Navier-Poisson es:

$$\sigma'_{ii} = 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \lambda \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)$$

$$\tau'_{ij} = \tau'_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad i \neq j$$

En esta obra, las magnitudes “prima” denotan las componentes del tensor viscoso, sean normales o tangenciales. Las componentes tangenciales de este tensor coinciden con las del tensor de tensiones.

- <sup>26</sup> Las fuerzas volumétricas también deberían incluirse en esta ecuación en caso de existir, aunque en lo que sigue se supondrá que son despreciables. En cambio, las fuerzas de tensión superficial en líquidos sí están incluidas en  $\delta F_s$  porque modifican el campo de presiones en torno al punto considerado. Este efecto debe tenerse en cuenta cuando se fijan las condiciones de contorno al integrar las ecuaciones y supone una discontinuidad, en su caso, del campo de presiones.
- <sup>27</sup> No deben confundirse el fenómeno de transporte y la transferencia. Si bien ambos sugieren el desplazamiento irreversible de una propiedad, la transferencia se realiza entre dos medios distintos, separados por una superficie física.
- <sup>28</sup> Cuando el fluido no está en reposo, se ha de añadir el correspondiente término convectivo  $\mathbf{v} \cdot \nabla c_q$  en el desplazamiento de la especie  $q$ . Se habla entonces de principio de conservación de la especie (v. [2.34]).
- <sup>29</sup> Su forma general es [1.75] para fluidos incompresibles ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ). Esta ley ha resultado muy conveniente en la práctica, aunque se sabe que hay fluidos que no la siguen y estados fluidos de agregación capaces de resistir pequeños esfuerzos de corte sin deformarse (v. 1.3.2).
- <sup>30</sup> Cantidad de movimiento vs. térmica, cantidad másica vs. térmica y cantidad de movimiento vs. másica, respectivamente. Entre ellos, se verifica que  $Pr = Le \cdot Sc$ . También se denominan *grupos de separación*. Si, por ejemplo, los fenómenos de propagación másicos son despreciables frente a los térmicos, entonces  $Le \approx 0$ .
- <sup>31</sup> El principio de Curie está siendo discutido en la actualidad, pero explica los resultados experimentales de forma adecuada.
- <sup>32</sup> 1 *poise* equivale a 0,1 Pa·s. La viscosidad dinámica del agua a 20 °C y una atmósfera es de 1 cPo, y la cinemática, de 1 cSt.
- <sup>33</sup> *American Society for Testing Materials*.
- <sup>34</sup> Matemáticamente, el paso de [1.102] a [1.103] es incorrecto, pero el gráfico doble logarítmico se ha convertido en un estándar aceptado por los usuarios de instalaciones hidráulicas, que usan aceites minerales o sintéticos, debido a su facilidad de uso y a sus buenos resultados.
- <sup>35</sup> Esta viscosidad estructural límite “newtoniana” a la que parecen tender muchos fluidos, a menudo no puede observarse en la práctica porque se requieren velocidades de deformación tan elevadas que la generación de calor por rozamiento y la degradación del material lo impiden.

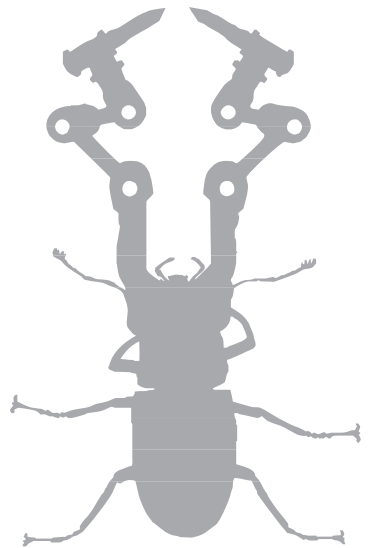


- <sup>36</sup> Otros fenómenos reológicos dependientes del tiempo son: la reopexia, la reodestrucción y la tixotropía irreversible. Esta clasificación depende de si se recupera el estado de viscosidad inicial al cesar el esfuerzo cortante, o no. Se dice que se produce una destrucción estructural irreversible del fluido (del material) cuando, al cesar el movimiento de deformación, no se recupera el estado inicial de viscosidad. Esto ocurre cuando el proceso de reconstrucción molecular es más lento que el de rotura. Los grados de reconstrucción y rotura dependen del tiempo de agitación y de la tensión rasante aplicada. A cada nivel de velocidad de agitación, le corresponde un estado estacionario en el que los procesos de reconstrucción y rotura se equilibran.
- <sup>37</sup> La pasta dentífrica manifiesta un comportamiento plástico. La mayor parte de los polímeros, las disoluciones, los detergentes, las suspensiones, etc., son pseudoplásticos con cierto comportamiento tixotrópico. Las pinturas son tixotrópicas y el yeso, reopéctico. La masa de harina, el betún y los polímeros son fluidos viscoelásticos.
- <sup>38</sup> Salvo excepciones. El hidrógeno, el helio y el neón no se ajustan del todo a la carta de compresibilidad generalizada.
- <sup>39</sup> Las fases líquida y gaseosa de una sustancia por debajo del punto crítico pueden coexistir en equilibrio, pero por encima de la temperatura crítica se mezclan en el continuo, y se puede pasar de una fase a la otra sin cambio de fase y sin más diferencia que un cambio de densidad.
- <sup>40</sup> Según el postulado de estado, el estado de equilibrio de una sustancia simple homogénea puede determinarse mediante la especificación de dos propiedades independientes e intensivas cuando sobre la sustancia sólo se realiza una de las formas fundamentales de trabajo reversible, es decir, uno más el número de trabajos cuasiestáticos relevantes. La ecuación [1.140] del apartado 1.3.6 se reduce a la ecuación de Gibbs de la energía interna [1.114] cuando el único trabajo es el de compresión, pero en [1.140] se han de tener en cuenta el trabajo de la tensión interfacial y el trabajo químico.
- <sup>41</sup> Por ejemplo, en la mayoría de turbomáquinas puede admitirse que el proceso que experimenta el fluido a su paso es adiabático, porque el tiempo de residencia de éste en su interior es mucho menor que el tiempo térmico correspondiente.
- <sup>42</sup> La energía interna considerada en este apartado incluye, desde un punto de vista microscópico, la energía de agitación térmica, así como las interacciones moleculares de corto alcance.
- <sup>43</sup> O para un fluido incompresible. Obsérvese que las expresiones entre paréntesis de las ecuaciones [1.114] y [1.115] son nulas para el gas ideal.
- <sup>44</sup> Es importante tener presente, en el caso de los líquidos, que el valor efectivo de estos coeficientes depende de la cantidad de gas o de vapor disuelto en ellos, lo que puede significar un aumento importante de su compresibilidad. Los valores proporcionados aquí son válidos para el agua destilada pura.  $[\partial p/\partial T]_v$  no varía mucho con la temperatura en la mayoría de los líquidos. Nótese que este término aparece en la ecuación [1.114] y es  $\rho R$  para un gas ideal. En un gas real, el término  $[\partial p/\partial T]_v$  puede calcularse derivando la ecuación de estado correspondiente.
- <sup>45</sup> Este máximo ( $\alpha=0$ ) explica por qué no se congela el agua del fondo de un depósito cuando hace mucho frío.
- <sup>46</sup> En general, la tensión superficial decrece con la temperatura hasta anularse a la temperatura crítica, donde un líquido y su vapor se confunden al desaparecer su interfase.
- <sup>47</sup> Son posibles cambios de presión y de temperatura, pero implicarían un desplazamiento hacia el desequilibrio:  $dG \neq 0$ .
- <sup>48</sup> Lo cual no siempre es cierto, porque los fluidos en contacto tienden a saturarse. Es evidente que añadir tensoactivos o electrolitos a una de las fases afecta a la energía libre específica interfacial.
- <sup>49</sup> En ocasiones, a la extensión inicial le sigue una contracción que es consecuencia de la saturación mutua de ambos fluidos, lo que aumenta la energía libre específica interfacial y reduce  $w_A$ , haciendo  $S < 1$ .
- <sup>50</sup> Obsérvese que también  $\pi r^2 \Delta p = 2\pi r \sigma \cos \theta$ .
- <sup>51</sup> Para un menisco agua-aire a 20°C, el radio capilar es de 2,7 mm. En un tubo capilar, se demuestra que, si  $r \ll r_c$ , entonces  $h \gg 2r$ , y el fluido se desplaza más que el diámetro del capilar.



- 
- <sup>52</sup> Si en el depósito se había practicado el vacío, la presión reinante, una vez alcanzado el equilibrio, es la de saturación y la fase gaseosa estará formada sólo por vapor de líquido. En el experimento de Torricelli, la presión sobre la columna de mercurio en el interior del tubo no es cero, sino la presión de vapor del mercurio a temperatura ambiente (que es realmente baja,  $p_{sat,Hg} \approx 0,17$  Pa, aun comparada con la del agua a la misma temperatura,  $p_{sat,agua} \approx 2.300$  Pa).
- <sup>53</sup> En un depósito abierto parcialmente lleno de líquido, ambas fases se encuentran en equilibrio a la misma presión y temperatura, pero la presión parcial del vapor en el aire no saturado es inferior a la atmosférica por la ley de Dalton.
- <sup>54</sup> Para un incremento de presión sobre la superficie del líquido de 100 bar, el incremento de la presión de saturación resulta ser de un 7,7% para el agua a 20 °C. La ecuación [1.161] sirve para cualquier transición de fase que parta del equilibrio y se realice a temperatura constante, e indica que  $[dp_2/dp_1]_T = v_1/v_2$ , es decir, el aumento de la presión de una de las fases implica un aumento proporcional de la presión de la otra fase. Esta cuestión merece una atención especial cuando la transición es sólido-líquido, al ser parecidas ambas densidades.
- <sup>55</sup> La gota pequeña se evapora y pierde volumen, y con radios más pequeños se evapora aún más rápido. El equilibrio es metaestable y, en la práctica, no se alcanza nunca (inestabilidad de Kelvin). En cualquier caso, el incremento de  $p_{sat}$  es pequeño (del 11% para una gota de agua de  $10^{-8}$  m), lo que implica tiempos de relajación largos, que dificultan la observación de este fenómeno.
- <sup>56</sup> Por ejemplo, para un fluido de densidad constante, resulta  $f_m = \nabla p/\rho = \nabla(p/\rho)$ . La condición precisa que ha de cumplir el campo de fuerzas másicas es  $f_m \cdot (\nabla \wedge f_m) = 0$  que, en particular, se cumple si  $f_m$  deriva de un potencial y es irrotacional.
- <sup>57</sup> La fuerza de Coriolis no deriva de un potencial, pero no afecta al equilibrio relativo que se da en rotación porque la velocidad relativa es cero.
- <sup>58</sup> Esto tiene una consecuencia importante a nivel terrestre: admitiendo la constancia de la composición del aire, como la temperatura es una función de la densidad y de la presión, se deduce que la temperatura es constante a  $U$  constante. Es imposible, por tanto, tener aire atmosférico en reposo si existen gradientes de temperatura a la misma cota.
- <sup>59</sup> La zona de influencia del contorno se extiende una región de valor  $\delta \approx (\sigma/(\rho_2 - \rho_1)f_m)^{1/2}$ , donde la superficie se separa de la equipotencial correspondiente a  $U_S = (C_2 - C_1)/(\rho_2 - \rho_1)$ .  $f_m$  es el valor característico de las fuerzas másicas ( $g$ , si las únicas fuerzas másicas son las gravitatorias).
- <sup>60</sup> El estudio riguroso de la estabilidad implica el análisis del movimiento después de una perturbación para encontrar el sentido de la fuerza de restitución hacia el equilibrio.
- <sup>61</sup> En cambio, la atmósfera es muy estable en la inversión térmica cuando la temperatura aumenta con la altura y  $K < 0$ .
- <sup>62</sup> La centrifugación es tan efectiva que permite separar incluso isótopos por su peso atómico.
- <sup>63</sup> Que puede contener un sólido o no, pero que debe estar totalmente inundada por el fluido para que no aparezca el fenómeno de la subpresión.
- <sup>64</sup> Si el volumen no se deforma con el desplazamiento, la situación relativa de  $C$  y  $G$  respecto del volumen no cambia.





→2



## Ecuaciones fundamentales y análisis dimensional

El estado y el movimiento de cualquier volumen fluido se pueden determinar utilizando los principios fundamentales de conservación de la masa o ecuación de continuidad, de la cantidad de movimiento y de la energía, para unas condiciones de contorno y de valor inicial determinadas, y respetando las ecuaciones constitutivas y de estado.

Las condiciones de contorno se imponen al fluido en contacto con un sólido u otro fluido no miscible. En ambos casos, se cumple que la velocidad y la temperatura son continuas en la superficie de separación, pero cuando el contorno es otro líquido inmiscible la presión puede experimentar una discontinuidad si los esfuerzos superficiales no son despreciables. Se dice que se conocen las condiciones en el infinito o condiciones no perturbadas cuando el fluido evoluciona sobre un contorno y se extiende sin límites hasta una región suficientemente alejada como para que su estado no se sienta perturbado por la presencia de éste.

En problemas no estacionarios, se puede suponer conocido el campo de velocidades, densidades y temperaturas en el instante inicial, pero, si se busca una solución estacionaria o periódica con condiciones de contorno estacionarias o periódicas, se han de rechazar las condiciones iniciales que no sean compatibles con el tipo de movimiento resultante.

En adelante, se admitirá que es válida la hipótesis de equilibrio termodinámico local en el continuo, que impone el equilibrio termodinámico del fluido en un entorno elemental en correspondencia con un valor concreto de las variables de estado. Esta hipótesis se justifica por el hecho que una partícula fluida experimenta una infinitud de colisiones con sus vecinas antes de alcanzar regiones donde las magnitudes macroscópicas son distintas, de forma que se adapta gradualmente al estado local, a medida que va perdiendo memoria de su estado anterior con cada colisión. No obstante, no tiene sentido referir una propiedad intensiva a un volumen finito si localmente no es homogénea. En cambio, una propiedad extensiva sí se puede calcular en el continuo mediante la integración de la intensiva correspondiente en el volumen fluido, y entonces puede ser comparada en magnitud con la de equilibrio.



## 2.1. Principios integrales de conservación

Los principios fundamentales pueden ser expresados en forma diferencial e integral. Cada uno de estos métodos presenta ventajas e inconvenientes, y no puede afirmarse que uno sea mejor que otro en general, sino en función del uso que quiera hacerse de su aplicación. Por ejemplo, el planteamiento diferencial es útil para revelar los detalles de un flujo, pero requiere la resolución de ecuaciones diferenciales, que, a veces, sólo pueden resolverse numéricamente y mediante ordenador. El método integral, en cambio, no proporciona detalles del flujo, pero sí aproximaciones válidas en muchas situaciones industriales, y lo hace, además, con relativa sencillez.

A continuación, se presentan los principios de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, en su forma integral.

### 2.1.1. Conservación de la masa

La masa de un volumen fluido no cambia con el tiempo. Utilizando la ecuación [1.48], con  $\rho = \phi$  y  $M = \Phi$ , esta condición se escribe:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad [2.1]$$

Aplicando el teorema de Reynolds a un volumen de control variable con el tiempo, esta ecuación es:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \rho dV + \int_{S_C} \rho((\mathbf{v} - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad [2.2]$$

Si el volumen de control no se mueve, esto es, no se deforma ni se desplaza, entonces  $\mathbf{v}_C = 0$  y se aplica [1.53]. Si, además, la densidad es constante, entonces:

$$\int_S \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad [2.3]$$

y el flujo a través de cualquier superficie cerrada fija es nulo: no se puede acumular masa en el interior del volumen, por lo que toda la masa que entra ha de salir en el mismo instante.

Si la densidad es constante, pero  $V_C$  se mueve, entonces [2.2] es:

$$0 = \frac{dV_C}{dt} + \int_{S_C} ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{n}) dS \quad [2.4]$$

Por ejemplo, el principio de conservación de la masa para el caso del depósito que se vacía de la izquierda de la figura 2.1, se escribe:

$$A \frac{dh}{dt} = - \int_{S_s} (v ds)_s = -Q_s(t) \quad [2.5]$$

donde  $Q_s$  es el caudal volumétrico que escapa del volumen. En esta ecuación, la integral se calcula sólo en la superficie de salida, porque la velocidad del fluido y la del volumen de control coinciden en la superficie libre.



Este principio, aplicado al volumen de control fijo de la derecha de la figura 2.1, que contiene un gas de densidad variable pero distribuida uniformemente, es:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{S_s}{V_c} v(t) dt \quad [2.6]$$

En este caso, se puede suponer que la densidad del gas es uniforme en el interior del volumen, salvo en la región próxima a la pared y en las cercanías del orificio de escape. Esta aproximación es válida en muchas ocasiones porque la longitud de penetración de estos efectos es inferior a  $V^{1/3}$  y puede despreciarse en el cálculo de la densidad media. En el apartado 5.2.2, se hace un análisis más detallado de este tipo de procesos.

En general, la elección del volumen de control en esta clase de problemas es subjetiva y sólo exige que se represente adecuadamente el problema que se está tratando en la determinación de una variable (en estos casos, se trata de encontrar el caudal de escape o la evolución del nivel o de la densidad).<sup>65</sup> Por ejemplo, si el depósito de [2.5] descargara sobre otro a través de un conducto (v. la misma figura) y, en este último, se escogiera un volumen de control que empezara donde acaba el primero y se extendiera hasta su superficie libre, la aplicación de este principio a ambos volúmenes de control conduce a:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dh_1}{dt} &= -Q_s \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} &= Q_e \end{aligned} \quad [2.7]$$

El distinto signo de estas ecuaciones responde al criterio adoptado: el versor  $\mathbf{n}$  se orienta hacia el exterior del volumen y el caudal  $Q$  es definido positivo cuando sale del primer depósito y cuando entra en el segundo. Es evidente que  $Q_s = Q_e$ , de donde:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} + A_2 \frac{dh_2}{dt} = 0 \quad [2.8]$$

que es el resultado al que se habría llegado si se hubiera tomado un único volumen de control que incluyera ambos depósitos desde sus superficies libres respectivas. Esta otra forma de operar no necesita calcular el caudal para determinar la evolución del nivel del segundo depósito conocida la del primero, pero tiene el inconveniente de que no permite resolver el problema dinámico real, para lo cual es necesario relacionar el caudal con la diferencia  $h_1 - h_2$ , las pérdidas de energía en el conducto y los efectos inerciales.

En general, para poder resolver numéricamente las ecuaciones [2.5] y [2.6], es necesario obtener la dependencia del caudal de salida con la altura o la presión, lo que se resuelve aplicando la ecuación de la energía.

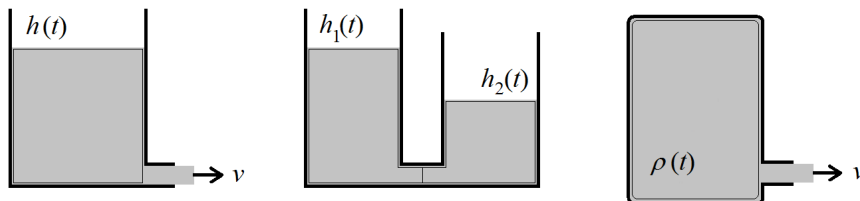


Figura 2.1. Casos especiales de volúmenes de control. A la izquierda, un volumen de control variable con el tiempo que contiene un fluido incompresible. A la derecha, un volumen constante lleno de gas a presión. El fluido que ha escapado del volumen de control aún forma parte del volumen fluido y se evalúa con el término convectivo de la ecuación [1.54].



### 2.1.2. Conservación de la cantidad de movimiento

El principio de conservación de la cantidad de movimiento enuncia que la variación de la cantidad de movimiento asociada a un volumen fluido es igual a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre él.

La forma integral del principio de conservación de la cantidad de movimiento es:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_F} \rho \mathbf{f}_m dV + \mathbf{F}_S \quad [2.9]$$

La aplicación integral de este principio es útil porque permite calcular la fuerza que realiza el fluido sobre un contorno fijo o móvil mediante un sencillo balance de términos. Así, aplicando el teorema de Reynolds a la ecuación [2.9] y recordando la definición de  $\mathbf{F}_S$  [1.57], se obtiene, para un volumen de control fijo e indeformable:

$$\int_{V_c} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{V_c} \rho \mathbf{f}_m dV + \int_{S_c} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} dS \quad [2.10]$$

La integral convectiva de esta ecuación puede evaluarse por separado para cada una de las superficies que encierran el volumen de control. En general, para un tubo de corriente por cuyo interior fluye el fluido, estas superficies incluyen las de entrada y salida,  $S_e$  y  $S_s$ , donde hay flujo, y su superficie interna lateral,  $S_L$  (figura 2.2). Si las superficies elementales de entrada y salida del volumen de control se escogen de modo que sean normales a la velocidad en cada punto, es decir,  $-\mathbf{n}_e = \mathbf{e} = \mathbf{v}_e/v_e$  y  $\mathbf{n}_s = \mathbf{s} = \mathbf{v}_s/v_s$ , entonces, para las integrales en  $S_e$  y  $S_s$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{S_e} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_e} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e) dS = - \int_{S_e} \rho v^2 \mathbf{e} dS \\ \int_{S_s} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_s} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s) dS = \int_{S_s} \rho v^2 \mathbf{s} dS \end{aligned} \quad [2.11]$$

Como la pared lateral de un tubo de corriente es impermeable, entonces:

$$\int_{S_L} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad [2.12]$$

La última integral de la ecuación [2.10] también puede descomponerse con [1.76] para incluir por separado la contribución de los términos normal y tangencial en cada una de las superficies:

$$\int_{S_c} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} dS = - \int_{S_c} p \mathbf{n} dS + \int_{S_c} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} dS \quad [2.13]$$

donde:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} p \mathbf{n} dS &= - \int_{S_e} p \mathbf{e} dS + \int_{S_s} p \mathbf{s} dS + \int_{S_L} p \mathbf{n} dS \\ \int_{S_c} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} dS &= - \int_{S_e} \mathbf{e} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} dS + \int_{S_s} \mathbf{s} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} dS + \int_{S_L} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} dS \end{aligned} \quad [2.14]$$

Con la elección de versores,  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{s}$ , los esfuerzos en  $S_e$  y  $S_s$  son sólo debidos a la presión porque los esfuerzos viscosos normales a la superficie son muy pequeños,<sup>66</sup> y:



$$-\int_{S_c} \mathbf{e} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} ds = \int_{S_s} \mathbf{s} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} ds = 0 \quad [2.15]$$

Por otro lado, la fuerza que el contorno lateral realiza contra el fluido contenido en el tubo de corriente es:

$$\mathbf{F}_{cf} = -\int_{S_L} \rho \mathbf{n} dS + \int_{S_L} \mathbf{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} dS \quad [2.16]$$

La fuerza que el fluido hace contra el contorno es la reacción  $\mathbf{F}_{fc} = -\mathbf{F}_{cf}$ .

En definitiva, combinando y arreglando las ecuaciones anteriores, el principio para el campo gravitacional  $U = gz$  se expresa mediante la igualdad:

$$\mathbf{F}_{cf} = \int_{V_c} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \mathbf{k} \int_{V_c} \rho g dV + \mathbf{s} \int_{S_s} (\rho v^2 + p)_s dS - \mathbf{e} \int_{S_e} (\rho v^2 + p)_e dS \quad [2.17]$$

Así pues, la fuerza que el contorno realiza sobre el fluido contenido en el volumen de control fijo considerado es la suma vectorial de la variación de la cantidad de movimiento del fluido contenido, su peso propio y el balance neto del flujo de impulsión  $\{\rho v^2 + p\}$ .<sup>67</sup>

Si el volumen de control es fijo pero deformable o móvil con velocidad uniforme, la ecuación [2.10], con [1.52], es:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} (\rho \mathbf{v}) dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{k} \int_{V_c} \rho g dV + \int_{S_c} \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{T}} dS \quad [2.18]$$

donde  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}_r$  son las velocidades absoluta y relativa del fluido respecto del referencial fijo y del volumen de control, respectivamente. Es evidente que el término convectivo de esta ecuación desaparece si la velocidad relativa del fluido a la superficie de control es nula. Un desarrollo paralelo al anterior permitiría deducir la fuerza que ejerce el contorno sobre el fluido en  $V_C$ .

La segunda ley de Newton aplicada a un volumen de control variable y no inercial se deriva de la anterior añadiendo la fuerza de inercia asociada:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{v} dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{v} ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \rho (\mathbf{f}_m + \mathbf{a}_i) dV + \int_S \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{T}} dS \quad [2.19]$$

donde ahora  $\mathbf{v}$  es la velocidad del flujo respecto de la referencia no inercial;  $\mathbf{v}_c$  es la velocidad de deformación o desplazamiento de la superficie de control respecto del mismo referencial,<sup>68</sup> y  $\mathbf{a}_i$  es la aceleración de inercia asociada al sistema de referencia no inercial de la ecuación [1.55].

Los principios de conservación del momento cinético y de la cantidad de movimiento responden al mismo principio fundamental de la mecánica, y su formulación combinada permite determinar el punto de aplicación de la resultante. En el caso del momento cinético, se sabe que su variación en un sistema es igual al momento de las fuerzas que actúan sobre el mismo, y que su conservación se verifica desde cualquier eje. Para una masa fluida, este principio es:



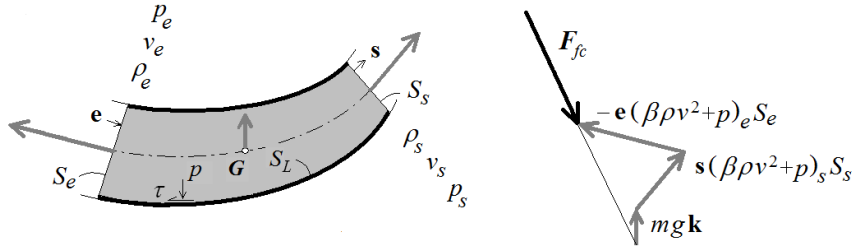
$$\frac{d}{dt} \int_{V_F} (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{v}) dV = \int_V (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{f}_m) dV + \int_S (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{T}}) dS \quad [2.20]$$

Refiriendo el volumen fluido a un volumen de control variable con el tiempo, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \frac{d}{dt} \int_{V_c} (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{v}) dV + \int_{S_c} (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{v}) ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n}) dS = \\ &= \int_V (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{f}_m) dV + \int_S (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{T}}) dS = \mathbf{M}_m + \mathbf{M}_s = \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{F} \end{aligned} \quad [2.21]$$

que señala que el momento de la resultante respecto de un punto cualquiera es la suma vectorial de los momentos de las fuerzas másicas y de superficie respecto del mismo punto. Estas expresiones se transforman de la misma manera que las de la cantidad de movimiento en el caso de tratar con referencias no inerciales.

Figura 2.2. Fuerza que el contorno de un tubo de corriente realiza sobre el fluido que fluye por su interior en régimen permanente y reacción correspondiente  $F_{fc}$ , evaluada mediante el principio de conservación [2.17]. El resultado que se muestra a la derecha utiliza las magnitudes medias de la presión, la velocidad y la densidad en cada una de las secciones, y el factor corrector del impulso  $\beta$ , pero no implica que dichas magnitudes sean iguales en ambas (este principio se puede utilizar en flujo compresible). Las velocidades están relacionadas entre sí y con las densidades por la ecuación de continuidad, y con las presiones por la de la energía.



### 2.1.3. Conservación de la energía

El principio de conservación de la energía afirma que la variación de la energía total (interna más cinética)<sup>69</sup> de un volumen fluido es igual al trabajo por unidad de tiempo de las fuerzas exteriores (másicas y de superficie) que actúan sobre el mismo, más el calor recibido del exterior por unidad de tiempo, y se escribe:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_V \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} dV + \int_S (\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{v} dS - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V (q_r + q_q) dV \quad [2.22]$$

donde  $u$  es la energía interna intrínseca por unidad de masa;  $\mathbf{q}$  es el vector flujo de calor por conducción que atraviesa  $S$ ;  $q_r$  es el calor recibido por radiación por unidad de tiempo y volumen, y  $q_q$  es el calor generado en el interior del volumen por transformación química en las mismas unidades.<sup>70</sup>

Cuando las fuerzas másicas derivan de un potencial escalar  $U$  permanente, el trabajo realizado por estas puede englobarse junto a la variación de las energías interna intrínseca y cinética. Como:<sup>71</sup>

$$\int_{V_F} \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} dV = - \int_{V_F} \left( U \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \mathbf{v}) \right) dV = - \frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho U dV \quad [2.23]$$

se obtiene:





$$\frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho \left( u + \frac{1}{2} v^2 + U \right) dV = \int_S (\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{v} dS - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int V (q_r + q_q) dV \quad [2.24]$$

que expresa que la variación de las energías interna, cinética y potencial de un sistema material se debe al trabajo de las fuerzas de superficie y al calor suministrado por unidad de tiempo.

Para referir este principio a un volumen de control variable con el tiempo que coincida en un instante con el volumen fluido, basta aplicar [1.52] a la primera integral y resulta:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho \left( u + \frac{1}{2} v^2 + U \right) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \rho e dV + \int_{S_C} \rho e (\mathbf{v} - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{n} dS \quad [2.25]$$

donde se ha utilizado, momentáneamente y por conveniencia, la energía total específica,  $e$  (definida como la suma de las energías interna, cinética y potencial del primer término), y  $\mathbf{v}_C$  es la velocidad de deformación o desplazamiento de la superficie de control en el mismo referencial en que está definido  $\mathbf{v}$ .

Estas ecuaciones pueden arreglarse convenientemente para describir la transferencia de energía que se produce en una turbomáquina, en función de las variables del flujo a su entrada y salida, o en cualquier tubo de corriente. Al aplicar este principio a una turbomáquina, se ha de tener presente que, si bien el volumen de control es constante y se aplica [1.51], su superficie interna contiene ahora una parte móvil, formada por el rotor o los rotores en movimiento. Por otro lado, al ser fijas las superficies de control de entrada y salida, el término convectivo de [2.25] se escribe, utilizando de nuevo los versores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{s}$ , y teniendo en cuenta que  $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ , de la forma siguiente:

$$\int_{S_C} \rho \left( u + \frac{1}{2} v^2 + U \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_e} \rho e \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{e} dS + \int_{S_s} \rho e \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{s} dS \quad [2.26]$$

El trabajo de las fuerzas de superficie de la ecuación [2.24] puede descomponerse como se hizo con el principio de la cantidad de movimiento, para incluir por separado la contribución de los términos normal y tangencial en cada una de las superficies. Evidentemente, se sigue cumpliendo [2.15], pero como ahora las integrales sobre la superficie lateral también se anulan porque es fija ( $\mathbf{v}_L = \mathbf{0}$ ), resulta:

$$\begin{aligned} \int_{S_C} (\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{v} dS &= - \int_{S_C} (\rho \mathbf{n} dS) \cdot \mathbf{v} + \int_{S_C} (\mathbf{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \mathbf{v} dS \\ \int_{S_C} (\rho \mathbf{n} dS) \cdot \mathbf{v} &= - \int_{S_e} (\rho e dS) \cdot \mathbf{v}_e + \int_{S_s} (\rho s dS) \cdot \mathbf{v}_s + \int_{S_m} (\rho \mathbf{n} dS) \cdot \mathbf{v}_m \\ \int_{S_C} (\mathbf{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \mathbf{v} dS &= \int_{S_m} (\mathbf{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \mathbf{v}_m dS \end{aligned} \quad [2.27]$$

Las integrales sobre la superficie móvil,  $S_m$ , se han retenido porque  $\mathbf{v}_m$  no tiene por qué ser tangente o normal en toda ella o compensarse su efecto. De hecho, la contribución de los esfuerzos respectivos sobre cada elemento de superficie por su velocidad es la potencia comunicada por el fluido en contacto, es decir:

$$\dot{W} = \int_{S_m} (\rho \mathbf{n} dS) \cdot \mathbf{v}_m - \int_{S_m} (\mathbf{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \mathbf{v}_m dS \quad [2.28]$$



que es negativa cuando la energía es entregada al fluido.

El trabajo total realizado por unidad de tiempo sobre el fluido,  $\dot{W}$ , obtenido del mismo, depende del resultado de la integral extendida a toda la  $S_m$ , y es negativo en el primer caso (un compresor) y positivo en el segundo (una turbina), según el criterio de signos adoptado (se recuerda que el versor  $\mathbf{n}$  se dirige hacia fuera del volumen de control, es decir, en este caso, hacia el interior de la pared móvil). El producto  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_m$  es positivo en aquellas superficies o porciones de superficie móvil que reculan en contacto con el fluido. El término de presión de esta ecuación es importante, por ejemplo, en el movimiento lineal de un pistón, en cuyo caso el trabajo frontera por unidad de tiempo es  $pSv_m$ , o bien  $pdV/dt$ , que será negativo si el pistón reduce el volumen de control comprimiendo el fluido, al ser  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_m = -1$ . El término viscoso aparece en discos frotantes y también da cuenta de las pérdidas por fricción en el disco de una bomba centrífuga.

Para concluir con la deducción de la ecuación de la energía aplicada a una turbomáquina, se introducen estos resultados en [2.24] y se agrupa todo el calor recibido por el fluido en el volumen de control por unidad de tiempo, ya sea a través de su superficie o bien generado en el interior por reacción. El resultado es:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) dV - \int_{S_e} (\rho e + p) v_e dS + \int_{S_s} (\rho e + p) v_s dS = -\dot{W} + \dot{Q} \quad [2.29]$$

Con la máquina trabajando en régimen permanente, impulsando un caudal en masa  $G$  constante y estable, no hay motivo para pensar que cualquiera de estos términos haya de ser cero, ni siquiera el primero, pues el movimiento de las paredes móviles hace que el campo de velocidades sea variable en el interior del volumen de control. Sin embargo, en régimen permanente, se observa que el valor medio temporal de toda la energía  $e$  contenida en el volumen no cambia con el tiempo y, por tanto, se puede suponer que este término se anula. De manera similar, cuando el tiempo de residencia del fluido en la máquina sea muy inferior al tiempo térmico de la transferencia de calor (que, normalmente, es del orden de segundos), se puede suponer que el proceso es adiabático, aunque no sea estrictamente isentrópico.

Si las condiciones del flujo permanente son uniformes a la entrada y a la salida, y éstas son únicas, la ecuación anterior puede escribirse introduciendo la variable entalpía como:

$$(h_s - h_e) + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) = \frac{-\dot{W} + \dot{Q}}{G} = -w + q \quad [2.30]$$

que expresa que la variación de la entalpía y de las energías cinética y potencial por unidad de masa entre la entrada y la salida de una máquina es igual a la suma del trabajo que ésta intercambia con el fluido a su paso y el calor que recibe del exterior, sea por radiación, conducción o reacción, ambos por unidad de masa.

El calor generado internamente por la ocurrencia de irreversibilidades no aparece de forma explícita en esta ecuación, aunque es evidente que el valor de sus términos y el trabajo útil que puede extraerse o comunicarse con una máquina cambian con su presencia. En general, los signos de  $w$  y  $q$  pueden ser positivos o negativos en función del cometido de la máquina pero, para un mismo balance  $\{-w + q\}$ , esta ecuación afirma que la diferencia de los términos de la izquierda es unívoca e independiente de las pérdidas irreversibles.



También es conveniente indicar que no se ha impuesto, para la obtención de [2.30], que el fluido haya de ser incompresible, sólo que el flujo en las secciones de entrada y salida sea uniforme para poder integrar [2.29]. Ni siquiera la elección subjetiva, pero apropiada, de los versores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{s}$  afecta su resultado en términos del caudal másico circulante, ni suscita la aparición de esfuerzos viscosos que pudieran depender de su dirección. Por lo demás, esta ecuación, llevada al límite diferencial, es la segunda de [1.120].

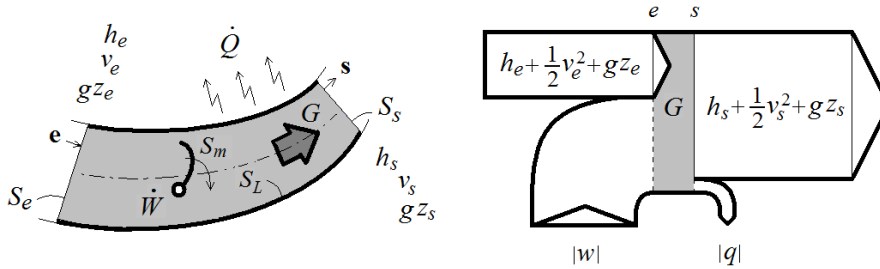


Figura 2.3. Balance energético en una máquina. Según el criterio de signos empleado, tanto  $w$  como  $q$  son negativos en este gráfico.

## 2.2. Ecuaciones en forma diferencial

La resolución de un problema de mecánica de fluidos implica la determinación de seis incógnitas, a saber: las tres componentes de la velocidad, la presión, la densidad y la temperatura. Para ello, se dispone de seis ecuaciones: la ecuación de continuidad, obtenida del principio de conservación de la masa; las tres ecuaciones del movimiento, derivadas del principio vectorial de conservación de la cantidad de movimiento; la ecuación de conservación de la energía, como resultado de aplicar el primer principio de la termodinámica, y la ecuación de estado termodinámico, que en general implica una relación  $\rho = \rho(p, T)$  o  $\rho = \rho(p, s)$ .

Se dispone, por tanto, del marco teórico pertinente que permite resolver cualquier problema. No obstante, la resolución del sistema de ecuaciones descrito no suele ser fácil, y en contadas ocasiones se dispone de la solución analítica correspondiente. En este sentido, cabe añadir que apenas se conocen una decena de soluciones exactas de las denominadas *ecuaciones de Navier-Stokes*, por lo que se tiene que acudir a la experiencia o al empleo de métodos de reducción de la magnitud y de la complejidad de las ecuaciones para obtener soluciones analíticas aproximadas.

Poco se sabe de la existencia, unicidad y continuidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. En general, es más fácil hallar una solución si los términos convectivos desaparecen, lo que es posible si el movimiento es unidireccional e incompresible. Se ha demostrado que existe una solución única al movimiento no estacionario de un fluido incompresible en presencia de fuerzas másicas potenciales, y también que la solución no estacionaria tiende a ser estacionaria si el contorno no se mueve y el flujo es laminar (aunque no está garantizado que la solución estacionaria sea única ni estable si el número de Reynolds no es pequeño o el contorno permeable). Cuando el movimiento puede convertirse en turbulento, además de las condiciones iniciales y de contorno, estas ecuaciones necesitan algunas hipótesis estadísticas para resolver el problema. La existencia y la unicidad de soluciones regulares de las ecuaciones de Navier-Stokes son uno de los grandes problemas abiertos de las matemáticas.



En el apartado 3.4.2, se describen algunas de las soluciones exactas conocidas de las ecuaciones de Navier-Stokes por su interés práctico y se explica alguno de los procedimientos analítico-matemáticos que permiten simplificarlas. En este apartado se desarrolla el marco teórico de los principios de conservación y de otras ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos, cuyo uso permite interpretar mejor los fenómenos fluidodinámicos desde la perspectiva diferencial.

### 2.2.1. Principios de conservación

La forma diferencial del principio de conservación de la masa se obtiene, por ejemplo, aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradskii a la forma integral [2.1]:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0 \quad [2.31]$$

donde  $V$  puede ser cualquier volumen, ya que la integral está tomada en un instante y cualquier volumen puede ser un volumen fluido. Como las magnitudes dentro del volumen son continuas, para que la integral sea nula debe serlo el integrando, y:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad [2.32]$$

que también se puede escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad [2.33]$$

La última ecuación muestra que la densidad de la partícula fluida es constante si  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .<sup>72</sup> Las ecuaciones [2.32] y [2.33] se denominan *ecuaciones de continuidad*.

Una extensión interesante de este principio resulta de su aplicación a la conservación de una especie en una mezcla cuando el fluido tiene una velocidad de desplazamiento  $\mathbf{v}$  no nula. Se obtiene, entonces, una forma más general de la ecuación de difusión de Fick, que indica que la variación temporal de la fracción másica de una especie es:

$$\frac{Dc_q}{Dt} = \frac{\partial c_q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_q = \frac{\chi_q}{\rho} + D_q \nabla^2 c_q \quad [2.34]$$

donde  $\chi_q$  es la velocidad de producción o destrucción de dicha especie por reacción química y en la que se ha supuesto que el producto  $\rho D_q$  es constante. Cuando son sólo dos las especies implicadas, no se produce reacción química y el medio fluido no se mueve, esta ecuación coincide con [1.91].

La forma diferencial general del principio de conservación de la cantidad de movimiento es la ecuación de Cauchy [1.83], la cual conduce a la de Navier-Stokes [1.85] cuando se particulariza para fluidos newtonianos de viscosidad constante. Si se introduce la viscosidad volumétrica en la ecuación [1.86], la ecuación de Navier-Stokes se convierte en:



$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_{m,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \left(\mu_v + \frac{1}{3}\mu\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad [2.35]$$

Si  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , esta ecuación se reduce a:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f}_m - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad [2.36]$$

Cuando las fuerzas másicas derivan de un potencial  $U$ , tal que  $\mathbf{f}_m = -\nabla U$ , entonces:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla(p + \rho U) + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad [2.37]$$

Por otro lado, si el campo potencial es el gravitacional,  $U = gz$ , y el fluido incompresible se puede escribir:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) = \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad [2.38]$$

Esta ecuación indica que las fuerzas de inercia, las de presión y las gravitatorias equilibran las viscosas por unidad de volumen. En otras palabras, en un volumen elemental de fluido incompresible y viscoso, el gradiente de  $\{p/\rho + gz\}$  ha de ser mayor para provocar la misma aceleración. Es importante observar que la presión no aparece en la ecuación de continuidad y que aquí lo hace por medio de sus derivadas. Esto quiere decir que la adición de cualquier cantidad a la presión no afecta el resultado [2.38] y, en general, puede trabajarse con presiones manométricas,  $p - p_a$ .<sup>73</sup>

Si el fluido es ideal,  $\mu = 0$ , entonces:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad [2.39]$$

y la aceleración de la partícula deriva de un potencial. Esta es la ecuación de Euler para la cantidad de movimiento en coordenadas cartesianas, que, con [1.7] y [1.41], también puede generalizarse a cualesquiera coordenadas, como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad [2.40]$$

Evidentemente, si el movimiento es permanente e irrotacional, esta ecuación es:

$$\nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} v^2 \right) = 0 \quad [2.41]$$

que, integrada a lo largo de una línea de corriente, es la ecuación de Bernoulli ( $v$  también [3.94]).

La relación [1.41] también puede utilizarse para escribir [2.37] en función de la vorticidad. Cuando se toma el rotacional de la ecuación resultante, se obtiene, tras una serie de pasos que se omiten para no perder continuidad en el desarrollo:



$$\frac{D\Omega}{Dt} = \Omega \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \Omega \quad [2.42]$$

Esta ecuación sugiere que el cambio de la vorticidad en un fluido incompresible se debe a dos efectos. El primer término de la derecha significa que la velocidad de deformación del fluido induce un cambio en el módulo y la dirección del vector vorticidad, que puede interpretarse como una fuente o un sumidero. Este fenómeno es análogo al principio de conservación del momento cinético en los sólidos, según el cual la reducción o el aumento del momento de inercia inducen un aumento o una disminución de la velocidad angular en ausencia de pares externos. Este término desaparece en los movimientos bidimensionales puesto que  $\mathbf{v}$  y  $\Omega$  son perpendiculares, y resulta.<sup>74</sup>

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \Omega \quad [2.43]$$

que indica que la vorticidad se difunde como el calor. Se concluye que en los fluidos ideales e incompresibles sometidos a fuerzas másicas conservativas, si el movimiento era irrotacional lo seguirá siendo. Si se combinan la ecuación [2.38] y el teorema de Bjerknæs, se obtiene:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \nu \int_S \nabla^2 \Omega \cdot \mathbf{n} dS \quad [2.44]$$

que indica que, para un fluido viscoso e incompresible sometido a la acción de fuerzas másicas conservativas, el efecto de la viscosidad sobre la variación temporal de la circulación está asociado a la difusión de la vorticidad.

La forma diferencial del principio de conservación de la energía se obtiene aplicando los teoremas de transporte de Reynolds y de Gauss-Ostrogradskii a la ecuación [2.22]. Como todas las magnitudes están definidas en el continuo, se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} \right\} = \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q \quad [2.45]$$

El desarrollo de los términos de la izquierda permite simplificar alguno de ellos mediante la ecuación de continuidad. El resultado final de la simplificación es:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q \quad [2.46]$$

Como, por otro lado, la ecuación [1.76] puede escribirse de la forma:

$$\nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}}) = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}}}) \quad [2.47]$$

y la entalpía es  $h = u + p/\rho$ , la combinación de [2.45] y [2.47] cuando las fuerzas másicas derivan de un potencial  $U = U(x, t)$  conduce a la expresión:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( h + \frac{1}{2} v^2 + U \right) = \nabla \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}}}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q + \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial U}{\partial t} \quad [2.48]$$

Esta ecuación indica que la suma  $\{h + v^2/2 + U\}$  se mantiene constante en una partícula fluida en los procesos estacionarios en los que las aportaciones de calor y los esfuerzos de origen viscoso sean despreciables. Esta suma no es constante en la mayoría de ca-



sos, aun siendo el campo exterior  $U$  permanente, pues, o bien las tensiones viscosas realizan algún tipo de trabajo superficial en torno al elemento fluido al acelerarlo (variando su energía cinética) o deformarlo (variando su energía interna), o bien éste intercambia calor con su entorno, o el campo de presiones a su alrededor no es permanente (lo que es necesario para poder comunicar trabajo).

Aplicando el operador derivada sustancial al primer término de [2.48], se llega a:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( h + \frac{1}{2} v^2 \right) = \nabla \cdot (\bar{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q + \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \nabla U \cdot \mathbf{v} \quad [2.49]$$

Es decir, cuando  $U$  es despreciable respecto a los otros términos de la derecha de esta ecuación, las mismas condiciones expuestas en el párrafo anterior implican la conservación de la entalpía de remanso,  $\{h + v^2/2\}$ .

### 2.2.2. Generación y transporte de vorticidad

Un flujo puede ser o no rotacional, pero la parte más delicada y difícil para un analista no es tanto estudiar el flujo rotacional o irrotacional cuya formulación está bien establecida, sino más bien comprender cuándo se produce vorticidad y cómo se propaga. La mayoría de las causas que generan un cambio en la vorticidad ya se han presentado en el texto y van normalmente asociadas a la ecuación [2.42] y al teorema de Crocco (v. [3.15]). En este apartado, se analizan las leyes básicas que explican la generación y el transporte de la vorticidad y su relación con el cambio de la circulación de la velocidad.

Ha de quedar claro, de antemano, que el flujo puede ser rotacional aunque las líneas de corriente sean líneas rectas y el fluido no parezca girar en torno a un punto. El movimiento de Hagen-Poiseuille descrito por la ecuación [3.106], por ejemplo, es un movimiento con vorticidad no nula en todos sus puntos salvo en el centro del conducto, donde la velocidad es máxima.<sup>75</sup> De la misma manera, un flujo puede ser irrotacional aunque las líneas de corriente sean curvas y se cierren sobre sí mismas. Uno de los ejemplos más sencillos de movimiento potencial es el vórtice libre de [3.33], en el que la velocidad disminuye con el radio y su circulación es una constante no nula. La vorticidad implica la rotación de las partículas fluidas y, por tanto, va asociada a la deformación del campo de velocidades. En un fluido real, viscoso y homogéneo, su existencia está íntimamente ligada a las tensiones tangenciales presentes en el flujo, se origina en los contornos sólidos donde el fluido ha de verificar la condición de no deslizamiento y se propaga después siguiendo una ley de la difusión.

El término más interesante de la ecuación de la vorticidad [2.42] es el que hace referencia a la ampliación y a la rotación del vector vorticidad como consecuencia de la deformación del fluido,  $e_{ij}$ . Esto último se entiende mejor si se presenta esta ecuación en componentes:

$$\frac{D\Omega_i}{Dt} = \Omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad [2.50]$$

El primer término del segundo miembro implica el sumatorio del producto de cada componente del vector vorticidad por las tres componentes del tensor gradiente de



velocidad [1.71] asociadas a  $v_i$ . El desarrollo de esta operación, teniendo en cuenta que la vorticidad está asociada a la parte antisimétrica de este tensor, conduce a:

$$\frac{D\Omega_i}{Dt} = \frac{\partial\Omega_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial\Omega_i}{\partial x_j} = \Omega_j e_{ij} + v \frac{\partial^2\Omega_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad [2.51]$$

según la cual la vorticidad es ampliada si el movimiento es tal que la componente  $e_{ij}$  de la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad es positivo y reducida en caso contrario. En consecuencia, el movimiento de un campo de vorticidad puede comprenderse a partir de la interacción espacio-tiempo entre la vorticidad y la deformación del fluido o, dicho de otro modo, entre las partes antisimétrica y simétrica del tensor gradiente de velocidad.

El segundo término del segundo miembro de la ecuación [2.51] representa la variación de la vorticidad debida a la difusión molecular de vorticidad. La vorticidad se difunde como el calor o cualquier otra propiedad de transporte,<sup>76</sup> de modo que las partículas que no giran, adquieren vorticidad de sus contiguas a las que frenan. Este término es el responsable del transporte de la vorticidad lejos de las zonas donde ésta es creada, y está asociado a los gradientes de velocidad y de presión causados por el contorno, de modo tal que su inversión causa la inversión del sentido de la vorticidad generada. Por ejemplo, para un fluido incompresible en movimiento estacionario y unidireccional en torno a un contorno plano (o de pequeña curvatura) para el que  $\mathbf{v} = v_x(y)\mathbf{i}$ , la ecuación de Navier-Stokes puede reescribirse como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = -\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} \quad [2.52]$$

De este resultado se interpreta que existen fuentes de vorticidad en las regiones donde la presión decrece a lo largo del contorno y coladores de vorticidad donde el gradiente de presión es adverso (v. [4.117] y [4.168]). En cualquier caso, este hecho no está en conflicto con la posible variación de la vorticidad local debida a la convección de fluido,  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\Omega$ , en un movimiento estacionario.

Pero la ecuación [2.42] no incluye todos los términos que inducen producción de vorticidad, pues se había encontrado en el supuesto de fluidos incompresibles y campos de fuerzas conservativos. Un análisis más riguroso parte, por ejemplo, de la ecuación de Navier-Stokes siguiente:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \wedge \Omega = \mathbf{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad [2.53]$$

y conduce al resultado:<sup>77</sup>

$$\frac{D\Omega}{Dt} = -\Omega (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Omega \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \wedge \mathbf{f}_m + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \wedge \nabla p + \nu \nabla^2 \Omega \quad [2.54]$$

Como se puede observar de esta ecuación, surgen tres términos de generación (cambio) de vorticidad de la partícula que no aparecían en la ecuación [2.42] y que van asociados a la compresibilidad, a la existencia de fuerzas másicas no conservativas y a la no barotropía del fluido. A una conclusión semejante también se llega mediante el teorema de la circulación,<sup>78</sup> según el cual:





$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint f_m s dl - \oint \frac{\nabla p}{\rho} s dl + \nu \oint (\nabla^2 \mathbf{v}) s dl + \frac{1}{3} \nu \oint d(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad [2.55]$$

Debe tenerse presente que, mientras la ecuación [2.54] hace referencia a la generación de vorticidad en la partícula, la [2.55] muestra las causas de variación temporal de la circulación de la velocidad alrededor de una línea fluida cerrada. Ambos resultados, evidentemente, están relacionados entre sí: por un lado, el teorema de Stokes y el hecho que el flujo de vorticidad en un tubo de remolino es constante en un instante de tiempo determinado (porque  $\mathbf{\Omega}$  es solenoidal), garantizan que la circulación de la velocidad sea constante en cualquier línea cerrada y perimetral al tubo de corriente en dicho instante; por otro lado, la ecuación [2.55] indica cómo variará ésta con el tiempo y debido a qué causas. Queda claro que, si bien la circulación es constante en un instante a lo largo del tubo de remolino, la vorticidad puede cambiar en secciones diferentes para mantener su flujo constante en él, y que este flujo puede cambiar en el tiempo si se dan las condiciones que inducen un cambio temporal de la circulación.

En lo referente a las causas de variación de la circulación mostradas en la ecuación [2.55], cabe explicar con algo más de detalle la influencia de los términos asociados a los campos de fuerzas másicas y volumétricas no conservativas, y el efecto de la no barotropía. Se sabe que tanto las fuerzas de Coriolis como las magnetohidrodinámicas inducen rotación en el fluido.<sup>79</sup> Las primeras aparecen cuando se estudia el movimiento de un fluido en un referencial que rota con velocidad angular,  $\boldsymbol{\omega}$ , y tienen la forma  $-2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$ . La importancia del efecto de Coriolis es, sin embargo, muy pequeña, salvo a escalas grandes, si se compara en magnitud a la aceleración convectiva, tal como muestra el número de Rossby:

$$\text{Ro} = \frac{v}{\omega l} = \frac{v^2 / l}{\omega v} = \frac{O(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})}{O(2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v})} \quad [2.56]$$

Las fuerzas de Coriolis prevalecen cuando este número adimensional es muy pequeño, lo que sólo ocurre en movimientos atmosféricos u oceánicos de gran escala.<sup>80</sup>

Cuando el fluido no es barotrópico, los gradientes de presión y densidad no son paralelos. Esto implica la aparición de un par descompensado porque los centros de gravedad y de empuje sobre el elemento fluido no coinciden. Un ejemplo de esta circunstancia que ayudará a su interpretación es el flujo convectivo que aparece entre dos placas planas y verticales a diferente temperatura. El aire situado al lado de la placa caliente asciende, mientras que el frío desciende, y se genera así una capa intermedia en rotación. Los movimientos atmosféricos también son una buena muestra de esta circunstancia cuando entran en contacto capas de aire con diferente estratificación térmica.

Volviendo de nuevo a la ecuación [2.54], el primero de sus términos puede ser incluido a la izquierda de la ecuación mediante una sencilla operación algebraica. Como, según la ecuación de continuidad, este término también es  $(\mathbf{\Omega}/\rho)D\rho/Dt$ , el resultado de la operación es:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\mathbf{\Omega}}{\rho} \right) &= \frac{1}{\rho} \frac{D\mathbf{\Omega}}{Dt} - \frac{\mathbf{\Omega}}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \wedge \mathbf{f}_m + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \wedge \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{\Omega} \right) \end{aligned} \quad [2.57]$$



En el caso de que las fuerzas másicas deriven de un potencial y los fluidos sean ideales y barotrópicos (aunque no necesariamente incompresibles), esta ecuación conduce a:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\rho} \right) = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad [2.58]$$

que es la conocida *ecuación de Helmholtz* para los vórtices. Esta ecuación indica que el cambio del vector  $\boldsymbol{\Omega}/\rho$  asociado a un elemento fluido es proporcional al de un elemento material de longitud infinitesimal paralelo a  $\boldsymbol{\Omega}/\rho$ .<sup>81</sup> Es decir, las líneas de vórtices se mueven con el fluido si éste es ideal, barotrópico, y el campo de fuerzas es conservativo. En estas condiciones, la aceleración deriva de un potencial y, en aplicación del teorema de Kelvin, la circulación se mantendrá constante a lo largo de una línea cerrada.

Si bien el cambio en la vorticidad por estiramiento o acortamiento del vórtice descrito por el primer término de [2.50], o de [2.42], es una consecuencia del principio de conservación del momento cinético en ausencia de efectos viscosos, que la ecuación de Helmholtz extiende a los fluidos compresibles, este fenómeno también se presenta en los fluidos viscosos, en los que además se produce difusión de vorticidad. Un ejemplo clásico que pone de manifiesto las implicaciones de esta ecuación, es la intensificación de la vorticidad local en una tormenta como consecuencia del desplazamiento del fluido (v. figura 1.2). Este desplazamiento estira y estrecha los tubos de remolino, en los que aumenta la vorticidad porque la circulación se mantiene constante, y produce tornados en forma de embudo que han de terminar en una superficie sólida o en una libre.

La variación de la vorticidad por deformación del vórtice desaparece cuando el movimiento es plano (es como si se observara sólo una sección recta del tornado anterior). En este último caso, la ecuación de Helmholtz toma una forma más sencilla, ya que entonces  $\boldsymbol{\Omega}/\rho$  es constante por ser  $\boldsymbol{\Omega}$  y  $\mathbf{v}$  perpendiculares, y la vorticidad de una partícula material varía en proporción a su densidad. Evidentemente, si el fluido es incompresible, esta ecuación dice que la vorticidad está congelada sobre el fluido y es arrastrada por éste en su movimiento.

### 2.2.3. Otras ecuaciones en forma diferencial

La ecuación de la energía mecánica o de conservación de la energía cinética se obtiene multiplicando escalarmente la ecuación de Cauchy del movimiento por la velocidad:

$$\mathbf{v} \cdot \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f}_m + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{T} \quad [2.59]$$

Usando [1.41] esta ecuación se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \frac{Dv^2}{Dt} &= \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f}_m + (-\mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\tau}) = \\ &= \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f}_m - \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\tau} \end{aligned} \quad [2.60]$$

que expresa que la variación de la energía cinética baricéntrica de un volumen elemental y unitario de fluido está asociada al trabajo de las fuerzas exteriores que actúan sobre el centro de gravedad del mismo por unidad de tiempo. Como esta ecuación se



obtiene a partir de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento y, por tanto, tiene en cuenta sólo términos mecánicos, no incluye los términos asociados a la deformación de la partícula. Es decir, éste sería el trabajo total de las fuerzas exteriores si toda la masa del volumen unitario considerado se moviese a la misma velocidad. Evidentemente, existe un trabajo adicional asociado a la deformación del elemento fluido que, junto con el calor que recibe del exterior, se compensa con la variación de su energía interna.

La ecuación de la energía interna se obtiene a partir de [2.46] haciendo uso de la ecuación de la energía mecánica [2.59]. Sustituyendo, resulta:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\bar{T}} - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q \quad [2.61]$$

Los dos primeros términos del segundo miembro representan el trabajo ejercido por las fuerzas de superficie al deformar la partícula. Puesto que una forma alternativa a [2.47] de escribir la ecuación [1.76] es:<sup>82</sup>

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\bar{T}} + \bar{\bar{T}} : \nabla \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\bar{T}} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \tau : \nabla \mathbf{v} \quad [2.62]$$

y, en mecánica de fluidos se define la *función de disipación* de Rayleigh:

$$\Phi_v = \tau : \nabla \mathbf{v} \geq 0 \quad [2.63]$$

la ecuación [2.62] puede escribirse como:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q + \Phi_v \quad [2.64]$$

El término  $-p \nabla \cdot \mathbf{v}$  es el trabajo de compresión de las fuerzas de presión al comprimir la partícula fluida y es nulo si el fluido es incompresible, mientras que  $\Phi_v$  es el trabajo de las fuerzas de viscosidad al deformar la partícula y es siempre positivo.<sup>83</sup> Este término, para un fluido newtoniano incompresible en un movimiento unidireccional en el que exista gradiente de deformación sólo en una dirección perpendicular, sería:

$$\Phi_v = \tau \dot{\gamma} = \mu \dot{\gamma}^2 \quad [2.65]$$

La ecuación [2.64] expresa que la variación de la energía interna de una partícula fluida es debida al trabajo de las fuerzas de presión al deformar la partícula, más el trabajo de las fuerzas viscosas y el calor que recibe por conducción, radiación y reacción química. Ésta es la ecuación de la energía para un observador que se moviera con la partícula.

De la interconexión entre las energías interna y cinética de las ecuaciones anteriores, se entiende que un flujo adiabático nunca podrá ser estrictamente isoterma. Sin embargo, el trabajo de compresión sólo motiva variaciones apreciables de temperatura en el flujo de gases sujetos a expansiones o a compresiones bruscas, y la función de disipación necesita grandes gradientes de velocidad para tener un efecto sensible en la temperatura del fluido, por lo que los flujos pueden considerarse, en muchas ocasiones y a efectos prácticos, isotérmicos y adiabáticos simultáneamente.<sup>84</sup>

La ecuación de la entalpía se deduce fácilmente de la ecuación de la energía interna y la de continuidad [2.33], habida cuenta que:



$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left( u + \frac{p}{\rho} \right) = \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad [2.66]$$

y es:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q + \Phi_v \quad [2.67]$$

Utilizando las relaciones de [1.115], esta ecuación se puede escribir en función de la temperatura de la forma:<sup>85</sup>

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial(\ln \rho)}{\partial(\ln T)} \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q + \Phi_v \quad [2.68]$$

La ecuación de la entropía se obtiene también de la ecuación de la energía interna en forma diferencial. Utilizando la ecuación de Gibbs de la energía interna [1.114] para fluidos monocomponente, y puesto que:

$$p \nabla \cdot \mathbf{v} = - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad [2.69]$$

resulta:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q + \Phi_v \quad [2.70]$$

Esta expresión indica que la entropía de una partícula fluida aumenta al recibir calor y trabajo de deformación por parte de las fuerzas viscosas.

La importancia de la entropía estriba en el hecho que es la única magnitud fluida que mantiene su valor en un movimiento adiabático de fuerzas viscosas despreciables. La función de disipación es el único término explícitamente positivo de la ecuación [2.70] y responde al carácter irreversible del fenómeno de transporte de cantidad de movimiento.

En un sistema material, cualquier desviación espacial del equilibrio termodinámico en temperatura, composición o velocidad, para cada uno de los fenómenos de transporte, en definitiva, lleva asociada una irreversibilidad que hace aumentar su entropía. Cuando se establece la ecuación de la entropía, aparece un término de generación, debido al desarrollo de los distintos fenómenos de transporte en el sistema en su evolución hacia el equilibrio, donde la entropía es máxima. Si los flujos y los esfuerzos de cada fenómeno de transporte se escogen de modo que su producto represente el caudal de producción de entropía,  $\sigma$ , debido al fenómeno en cuestión, se deduce con [1.99] que:

$$T \sigma = f_i e_i = \alpha_{ij} e_j e_i \quad [2.71]$$

siendo  $T$  la temperatura local donde acontece el fenómeno.<sup>86</sup>

Los esfuerzos y los flujos pueden ser tensores de diferente orden, pero su producto siempre será un escalar positivo, como corresponde a la uniformidad dimensional. Por ejemplo, para un sistema monocomponente donde sólo haya aportación de calor por conducción, se tiene:

$$\sigma = \frac{1}{T} \left( - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T + \bar{\tau} : \nabla \mathbf{v} \right) \geq 0 \quad [2.72]$$



que resulta de dos productos del tipo  $f_i e_i \geq 0$ .

El calor recibido (o cedido) por la partícula incrementa (o disminuye) su entropía, y es nulo en un proceso adiabático o si la partícula está aislada. La entropía total de un volumen fluido,  $S$ , aumenta igualmente debido a su producción interna,  $S_i$ , y se puede escribir:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho s dV = \frac{dS_e}{dt} + \frac{dS_i}{dt} \quad [2.73]$$

Según el teorema de Carnot-Clausius, el aporte reversible de entropía por parte del entorno del volumen fluido cuando sólo hay calor por conducción es:

$$\frac{dS_e}{dt} = \frac{1}{T} \frac{\delta Q}{dt} = - \int_{S_f} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{V_f} \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} dV \quad [2.74]$$

mientras que la producción interna es:

$$\frac{dS_i}{dt} = \int_{V_f} \sigma dV \geq 0 \quad [2.75]$$

Combinando estas últimas ecuaciones y aplicando los teoremas de arrastre de Reynolds y de Gauss-Ostrogradskii, como se ha hecho otras veces, junto con la ecuación de conservación de la masa en forma diferencial, resulta:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \sigma \quad [2.76]$$

Esta ecuación, sustituida en [2.70] cuando no hay reacción química o radiación, conduce a:

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi_v = -T \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + T \sigma \quad [2.77]$$

y, como el primer término de la derecha se puede escribir de la forma:

$$T \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} = \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T \quad [2.78]$$

la ecuación [2.70] se escribe:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -T \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \left( -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T + \Phi_v \right) = -T \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + T \sigma \quad [2.79]$$

de donde se ha deducido [2.72].

Como consecuencia de lo anterior, la entropía del sistema material aumenta aunque el sistema sea adiabático y no haya efectos de radiación o reacción química presentes. El principio de conservación de la energía se extiende en la dinámica de fluidos a estados fuera del equilibrio. Esta generalización incluye simultáneamente el primer y el segundo principios de la termodinámica, y además identifica el origen de las irreversibilidades que dan lugar al aumento de la entropía.



### 2.3. Análisis dimensional y de magnitud

A pesar de que es posible formular la mayor parte de los problemas dinámicos de la mecánica de fluidos con los principios básicos y las ecuaciones de este tema, las soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes son pocas y corresponden a casos sencillos o para los que se han asumido una serie de hipótesis que, en muchos casos, no reflejan exactamente el movimiento real.

Los obstáculos que dificultan más la obtención de resultados válidos son, a parte de la propia naturaleza matemática de las ecuaciones no lineales y en derivadas parciales, las condiciones de contorno y la geometría; la viscosidad y la generación turbulenta, y la descripción de una ecuación constitutiva para el fluido que, a menudo, es desconocida o extremadamente simplificada. A estos obstáculos, cabe añadir una dificultad adicional, pues en muchas ocasiones han de resolverse simultáneamente diversas ecuaciones, todas ellas válidas por separado en regiones limitadas del campo fluido, de forma que la solución global ha de ser compatible en las fronteras comunes de separación de cada una de dichas regiones.

La ingeniería hace frente a estas dificultades mediante la combinación de dos estrategias: la simplificación de los problemas mediante modelos sencillos del sistema real en base al orden de magnitud observado o esperado de determinadas magnitudes físicas, y la experimentación, sin la cual es imposible cuantificar la magnitud real de muchos fenómenos o estimar los parámetros que intervienen en las ecuaciones resolutorias. Esta metodología mixta, basada en el análisis y la experimentación, más el marco teórico que supone el análisis dimensional y la semejanza física, permiten, cuando el problema está bien planteado, dar solución a muchas situaciones que se presentan en la ingeniería, e incluso extrapolar los resultados experimentales a otros casos no ensayados o respecto a los cuales han cambiado algunas condiciones de funcionamiento.

No obstante, la mecánica de fluidos progresa en la actualidad por diferentes vías: a los métodos tradicionales –experimentación y teoría–, ha de añadirse hoy día la simulación por ordenador, área denominada *computational fluid dynamics* (CFD) en inglés, para cuyo estudio se anima al lector a que consulte alguna obra especializada.<sup>87</sup> Son muchas las razones que han incentivado el empleo de software específico en las fases previas de cualquier diseño industrial. Por un lado, el coste efectivo de las pruebas en laboratorio puede resultar, en muchas ocasiones y aunque el problema se simplifique mediante el análisis dimensional, prohibitivo, si se tienen en cuenta el tiempo y el material necesario para llevarlas a cabo. Por otro, el incremento en velocidad de los ordenadores y la gran memoria disponible en la actualidad han acortado el tiempo de cálculo y aumentado la precisión de los resultados (actualmente, se acude a la experimentación sólo para verificar los resultados finales de un número reducido de prototipos). De todas formas, y aunque la CFD ha pasado a ser una rama más de la fluidodinámica y uno de los medios preferidos para el cotejo de diseños alternativos, no reemplaza los métodos tradicionales, pues se sirve de ellos a la vez que los complementa, y es sólo una herramienta más para aunar esfuerzos en el desarrollo de la ciencia y la ingeniería.

#### 2.3.1. Homogeneidad dimensional y semejanza física

El análisis dimensional constituye un método de tratamiento de las ecuaciones generales que permite reconocer las variables fuertes de un fenómeno e identifica las depen-



dencias funcionales entre las variables definidas como dependientes e independientes. La magnitud de los problemas puede reducirse con el análisis dimensional, formando un conjunto limitado de grupos adimensionales mediante la combinación completa de las variables y los parámetros del fenómeno.

Para empezar, sea  $f$  una función de  $n$  variables en un sistema básico<sup>88</sup> de unidades  $[u]$  tal que:

$$f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0 \quad [2.80]$$

Las magnitudes medibles del problema,  $Q_i$ , pueden describirse dimensionalmente mediante una forma del tipo:

$$[Q_i] = \prod_{j=1}^p u_j^{a_{ij}} \quad [2.81]$$

donde las  $u_j$  son las unidades fundamentales.<sup>89</sup> Evidentemente, las mediciones  $Q_i$  pueden hacerse en otras unidades  $u_j'$ , proporcionales a las anteriores, de modo que:

$$[Q_i'] = \prod_{j=1}^p (u_j')^{a_{ij}} \equiv \prod_{j=1}^p (u_j k_j)^{a_{ij}} = \prod_{j=1}^p k_j^{a_{ij}} \cdot [Q_i] \quad [2.82]$$

Una magnitud física se admite que está compuesta de dos partes: una numérica, que cuantifica su valor, y otra que representa la unidad empleada a efectos de comparación. Como la magnitud física a la que se hace referencia es la misma, independientemente del sistema de unidades empleado, se cumple  $Q_i'[Q_i'] \equiv Q_i[Q_i]$ , es decir:

$$Q_i'[Q_i'] = Q_i' \prod_{j=1}^p k_j^{a_{ij}} \cdot [Q_i] \equiv Q_i[Q_i] \quad [2.83]$$

y el valor numérico  $Q_i'$  en las unidades  $[Q_i']$  es:

$$Q_i' = \frac{Q_i}{\prod_{j=1}^p k_j^{a_{ij}}} \quad [2.84]$$

Se dice que la relación  $f$  es invariante respecto a los cambios de las unidades fundamentales cuando el cambio de  $u_j$  conduce a una relación transformada de  $f, f'$ , que define el mismo lugar geométrico en el espacio de dimensiones  $n$   $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ . La relación [2.80] es dimensionalmente homogénea cuando la transformada de  $f$  al variar el sistema de unidades verifica:<sup>90</sup>

$$f'(Q_1', Q_2', \dots, Q_n') = f(Q_1', Q_2', \dots, Q_n') = 0 \quad [2.85]$$

es decir,  $f'$  es el mismo operador que el de la transformación [2.80]. Este es el punto de partida del análisis dimensional: toda ecuación que liga los valores numéricos de las magnitudes físicas es invariante ante un cambio del sistema de unidades y es dimensionalmente homogénea.

El *teorema de Vaschy-Buckingham* establece que la ecuación [2.80] se puede reducir a una relación monomía de las  $Q_i$  mediante un conjunto de productos de potencias adimensionales e independientes entre sí. Si  $m$  es el rango de la matriz formada por los coeficientes  $a_{ij}$ , entonces, con  $p \leq m < n$ :



$$\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad [2.86]$$

En la matriz  $a_{ij}$ , las filas representan las magnitudes ( $i=1..n$ ) y en las columnas se encuentran las unidades fundamentales ( $j=1..p$ ).

El teorema de  $\pi$  demuestra que  $n-m$  es el número máximo de combinaciones adimensionales que se pueden formar con las  $n$  magnitudes físicas  $Q_i$ , pues  $m$  es el orden del mayor determinante distinto de cero posible con la matriz  $a_{ij}$ . Generalmente,  $m$  es igual a  $p$ , es decir, igual a 1 en problemas geométricos, a 2 en cinemáticos, a 3 en mecánicos, a 4 en termodinámicos, etc., y el rango de la matriz viene determinado por el número de columnas,  $p$ .

Como, evidentemente,  $\phi$  es invariante, en la práctica el problema consiste en llevar la ecuación  $f$ , dimensionalmente homogénea, a una forma adimensional  $\phi$  que reduzca el número de variables  $Q_i$ . La elección adecuada de las  $Q_i$  conduce a la obtención de un grupo de variables adimensionales,  $\pi$ , mutuamente independientes,<sup>91</sup> que representan el fenómeno y permiten dilucidar cuándo existe semejanza física ente ambos.

Supóngase, por ejemplo, que el conocimiento de un fenómeno físico viene determinado por un conjunto  $n$  de ecuaciones diferenciales dimensionalmente homogéneas,  $L$ , que son, a la vez, función de  $n$  magnitudes  $Q$  que intervienen en  $m$  funciones  $f$ , que las describen en función del tiempo y del espacio para unas condiciones de contorno e iniciales determinadas. En este caso, se escribe:

$$L_i(Q_i, f_j; \mathbf{x}, t) = 0 \quad [2.87]$$

El sistema anterior se transforma a otro del tipo:

$$L_i^*(Q_i^*, f_j^*; \mathbf{x}^*, t^*; l_0, t_0, Q_{i0}, f_{j0}) = 0 \quad [2.88]$$

si se define un cambio de variables tal que las variables asterisco sean adimensionales y, por tanto, independientes del sistema de unidades. Este cambio de variables podría ser del tipo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= l_0 \mathbf{x}^* \\ t &= t_0 t^* \\ Q_i &= Q_{i0} Q_i^* \\ f_j &= f_{j0} f_j^* \end{aligned} \quad [2.89]$$

donde  $l_0$  y  $t_0$  son, respectivamente, una longitud y un tiempo característicos del fenómeno, y  $Q_{i0}$  y  $f_{j0}$  son valores finitos no nulos de referencia de las magnitudes correspondientes. Estos valores característicos o de referencia aparecen agrupados en la ecuación [2.88] en forma de coeficientes  $\pi_0$  independientes entre sí.

Pues bien, la condición necesaria y suficiente para que dos fenómenos sean físicamente semejantes es que dichos parámetros característicos sean iguales. Es decir, conocidos los valores  $Q_{iA}$  que verifican la función  $L$  para un caso particular A, y elegidos los valores característicos  $l_{0A}$ ,  $t_{0A}$ ,  $Q_{i0A}$  y  $f_{j0A}$  correspondientes, los valores de tales funciones para un caso B, con valores característicos  $l_{0B}$ ,  $t_{0B}$ ,  $Q_{i0B}$  y  $f_{j0B}$ , que den idénticos valores a los coeficientes  $\pi_0$ , se deducen de los correspondientes a A haciendo:





$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}_B}{l_{0B}} = \frac{\mathbf{x}_A}{l_{0A}} \\
 t^* &= \frac{t_B}{t_{0B}} = \frac{t_A}{t_{0A}} \\
 Q_i^* &= \frac{Q_{iB}}{Q_{i0B}} = \frac{Q_{iA}}{Q_{i0A}}
 \end{aligned}
 \tag{2.90}$$

El recíproco también es cierto. Por ejemplo, en dos fenómenos descritos por variables que se representen en un sistema genérico de unidades [MLT], entre los que se observe semejanza geométrica, cinemática<sup>92</sup> y dinámica, las variables adimensionales de [2.90] toman el mismo valor en ambos y además son físicamente semejantes.

### 2.3.2. Semejanza física en mecánica de fluidos

Se ha visto que la formación de los factores  $\pi$  reduce el número de variables de un problema de  $n$  a  $n-m$ , lo que facilita el estudio de un proceso y simplifica la planificación de experiencias. El método más completo de obtención de los grupos adimensionales para un fenómeno determinado consiste en la normalización de las ecuaciones diferenciales que lo definen y establecen las relaciones de semejanza física.<sup>93</sup>

En el movimiento de fluidos, el grupo de ecuaciones [2.87] está formado por las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, con [1.93], en forma diferencial:<sup>94</sup>

$$\begin{aligned}
 \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho\nabla \cdot \mathbf{v} \\
 \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla(p + \rho U) + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \\
 \rho \frac{Du}{Dt} &= -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (k\nabla T) + \Phi_v
 \end{aligned}
 \tag{2.91}$$

a las que hay que añadir la ecuación de estado correspondiente.

El cambio de variables que permita escribir estas ecuaciones en la forma [2.88] es crucial a la hora de aplicar el análisis dimensional. Como la elección es subjetiva y, por tanto, no única, será la pericia del analista la que, a partir de su experiencia y su conocimiento del proceso estudiado, definirá la importancia de una variable determinada. Ha de tenerse presente que la homogeneidad dimensional puede quedar en entredicho y dejar sin significación las ecuaciones físicas si no se toma en consideración alguna variable relevante. Del mismo modo, los resultados experimentales realizados para la descripción de un fenómeno físico difieren de los ideales cuando se han llevado a cabo sin tener en cuenta una variable importante. En cambio, la inclusión de una variable marginal no afecta el resultado final, el cual revelará entonces que su inclusión era innecesaria y que sólo introdujo una complicación innecesaria en el estudio del caso.

En la elección de las variables características, conviene partir de la velocidad característica, seguida del tiempo y de la longitud. La temperatura y la presión características pueden ser valores absolutos y de remanso, o sus incrementos, pero su elección ha de ser significativa y representativa de las variaciones de la temperatura y presión en el



medio. Una buena práctica consiste en hacer que el orden de magnitud del término adimensional correspondiente sea semejante a los restantes términos, por ejemplo del orden de la unidad, de forma que los parámetros adimensionales midan su importancia relativa.

Las ecuaciones [2.91] se escriben:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 v_0}{l_0} \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) &= 0 \\ \rho^* \left( \frac{\rho_0 v_0}{t_0} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 v_0^2}{l_0} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* \right) &= -\frac{p_0}{l_0} \nabla^* p^* - \rho_0 g \rho^* \nabla^* U^* + \frac{\mu_0 v_0}{l_0^2} \nabla^* \bar{\tau}^* \\ \rho^* \left( \frac{\rho_0 \mu_0}{t_0} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 v_0 \mu_0}{l_0} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* u^* \right) &= -\frac{p_0 v_0}{l_0} p^* \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* + \frac{k_0 T_0}{l_0^2} \nabla^* \cdot (k^* \nabla T^*) + \frac{\mu_0 v_0^2}{l_0^2} \Phi_v^* \end{aligned} \quad [2.92]$$

cuando se realiza el cambio de variables [2.89], para el que se han escogido las siguientes magnitudes representativas:  $v_0, t_0, l_0, \rho_0, U_0 = gl_0, u_0, T_0, \rho_0, \mu_0, k_0$ , y para el operador vectorial gradiente:  $l_0 \nabla = \nabla^*$ .

Los coeficientes de cada una de las ecuaciones [2.92] tienen las mismas dimensiones y muestran las magnitudes de las que depende dicho término. Si se dividen dos de ellos, se obtiene un número adimensional que representa su importancia relativa. Por ejemplo, al dividirlos por el término convectivo respectivo, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{l_0}{v_0 t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) &= 0 \\ \rho^* \left( \frac{l_0}{v_0 t_0} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* \right) &= -\frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \nabla^* p^* - \frac{gl_0}{v_0^2} \rho^* \nabla^* U^* + \frac{\mu_0}{\rho_0 v_0 l_0} \nabla^* \bar{\tau}^* \\ \rho^* \left( \frac{l_0}{v_0 t_0} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* u^* \right) &= -\frac{p_0}{\rho_0 \mu_0} p^* \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* + \frac{k_0 T_0}{\rho_0 v_0 l_0 \mu_0} \nabla^* \cdot (k^* \nabla T^*) + \frac{\mu_0 v_0}{\rho_0 l_0 \mu_0} \Phi_v^* \end{aligned} \quad [2.93]$$

En resumen, las condiciones necesarias y suficientes de semejanza física del movimiento de los fluidos son la semejanza geométrica y la igualdad de los siete grupos adimensionales de la ecuación [2.93], de las funciones de estado y de las condiciones iniciales, de contorno y en los límites, todas ellas escritas en forma adimensional.

La semejanza física completa aplicada al movimiento de los fluidos es muy difícil de conseguir, porque no siempre es posible la igualdad simultánea de todos los coeficientes adimensionales que aparecen en estas ecuaciones. Por ello, en general, se limitará el análisis a aquellos que se considere son más influyentes en el fenómeno estudiado para obtener diversos tipos de semejanza física parcial.

En el caso de un fluido newtoniano de  $\mu$  y  $\rho$  constantes, la forma adimensional de la ecuación general de Navier-Stokes de la cantidad de movimiento es:

$$\frac{l_0}{v_0 t_0} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{p_0}{\rho v_0^2} \nabla^* p^* - \frac{gl_0}{v_0^2} \nabla^* U^* + \frac{\mu}{\rho v_0 l_0} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad [2.94]$$

La ecuación de la energía, si  $k$  y  $c_v$  son también constantes, y haciendo  $u = c_v T$ , toma la forma:



$$\frac{l_0}{v_0 t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* = \frac{k}{\rho v_0 l_0 c_p} \nabla^{*2} T^* + \frac{\mu v_0}{\rho l_0 c_p T_0} \Phi_v^* \quad [2.95]$$

No obstante, el número de variables ha de aumentarse en ocasiones introduciendo una o más magnitudes básicas adicionales, sobre todo cuando la variable tiene carácter vectorial y quieren tenerse en cuenta sus propiedades direccionales. Por ejemplo, en el caso del transporte de calor en un entorno en el que la presión sea constante y el movimiento, unidireccional,<sup>95</sup> la contribución de los distintos términos térmicos en función de los diferentes gradientes de temperatura observados se valora mediante la ecuación de la entropía [2.70]. En dicho supuesto, esta ecuación se escribe en coordenadas rectangulares como:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} = \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + q_a + \Phi_v \quad [2.96]$$

donde se han agrupado los términos de radiación y reacción en  $q_a$ . Si se admite que  $k$ ,  $c_p$  y  $\rho$  son constantes, la ecuación [2.96] puede escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{T_0 \Delta s}{t_c} \frac{Ds^*}{Dt^*} &= \frac{c_p \Delta T_0}{t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{c_p v_0 \Delta T_0}{l_{0s}} v_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \\ &= \frac{k \Delta T_0}{\rho l_{0n}^2} \left( \frac{l_{0n}^2}{l_{0s}^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right) + q_0 q_a^* + \frac{\mu v_0^2}{\rho l_{0n}^2} \Phi_v^* \end{aligned} \quad [2.97]$$

para lo que se han definido también las magnitudes características siguientes:

- $v_0$ , la velocidad típica del fluido, de forma que  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i}$  y  $v_x = v_0 v^*$ .
- $t_c$ , el tiempo durante el cual el fluido experimenta un cambio  $\Delta T_0$  de su temperatura media  $T_0$ , que se escogerá como el menor entre el tiempo característico local,  $t_0$ , y el tiempo de residencia,  $t_r$ .
- $l_{0s}$ , la longitud recorrida por el fluido a la velocidad  $v_0$  en el tiempo  $t_r$  en la dirección de su movimiento, es decir,  $l_{0s} = v_0 t_r$ . Se admite que la temperatura del fluido experimenta un cambio del orden de  $\Delta T_0$  al recorrer esta distancia, por lo que este parámetro está asociado al gradiente longitudinal de la temperatura.
- $l_{0n}$ , la longitud perpendicular a  $l_{0s}$ , en la que se observa el mismo cambio  $\Delta T_0$  de su temperatura. Este parámetro proporciona el gradiente transversal de la temperatura.
- $q_0$ , el flujo de calor por unidad de masa y tiempo por radiación o reacción. El calor aportado a la unidad de masa será tanto mayor cuanto mayor sea  $t_r$ .
- $\Delta s$ , el incremento típico de entropía que experimenta la partícula fluida como consecuencia de los diferentes términos térmicos de la ecuación [2.96].

Dividiendo de nuevo por el término convectivo, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{t_r}{t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} &= \frac{k l_{0s}}{\rho c_p v_0 l_{0n}^2} \left( \frac{l_{0n}^2}{l_{0s}^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right) + \frac{q_0 t_r}{c_p \Delta T_0} q_a^* + \\ &+ \frac{\mu v_0 l_{0s}}{\rho c_p \Delta T_0 l_{0n}^2} \Phi_v^* \end{aligned} \quad [2.98]$$



donde aparecen cinco grupos adimensionales, de los que tres derivan de los anteriores y dos son nuevos. La relación de longitudes características,  $l_{0n}/l_{0s}$ , aparece en el interior del paréntesis del segundo miembro para indicar que el gradiente longitudinal de temperatura es inferior al transversal cuando  $l_{0n} < l_{0s}$ , lo que ratifica el carácter direccional del fenómeno. El último grupo aparece en el segundo sumando de la derecha y depende del aporte de calor por unidad de masa,  $q_0 t_r$ , que antes no se había considerado.

Otro caso en el que han de añadirse variables adicionales a una misma dimensión básica es el flujo conducido por contornos de longitud transversal  $D$ , cuya longitud característica sea  $L$ . Si  $\Delta p_0$  es la caída de presión observada en  $L$ , la ecuación de Navier-Stokes en dirección longitudinal, para un fluido de propiedades constantes, es:

$$\frac{\rho v_{0x}}{t_0} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + \frac{\rho v_0^2}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{\Delta p_0}{L} \nabla^* p^* - \rho g \nabla^* U^* + \frac{\mu v_0}{D^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad [2.99]$$

La ecuación [2.94] se utiliza para representar, por ejemplo, el movimiento del fluido libre o en torno a cuerpos sumergidos, siendo  $l_0=L$  la dimensión característica del cuerpo, mientras que [2.99] se aplica al movimiento guiado por un conducto de longitud  $L$  y diámetro hidráulico  $D$ , para el que el cociente  $L/D$  es su relación de aspecto. La componente en dirección  $\{x\}$  de esta ecuación para un conducto horizontal es:

$$\begin{aligned} \frac{\rho v_{0x}}{t_0} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + \frac{\rho v_{0x}^2}{L} \left( v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \frac{L}{D} v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \frac{L}{D} v_z^* \frac{\partial v_x^*}{\partial z^*} \right) = \\ = -\frac{\Delta p_0}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu v_{0x}}{D^2} \left( \frac{D^2}{L^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial z^{*2}} \right) \end{aligned} \quad [2.100]$$

donde  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  y  $v_{0z}$  son las velocidades características en las tres direcciones ortogonales, cuya magnitud relativa depende de las condiciones de unidireccionalidad del movimiento en el conducto. Compárese esta ecuación con [2.97].

### 2.3.3. Grupos adimensionales característicos

En el apartado anterior, han aparecido una serie de grupos adimensionales que merece la pena examinar con más atención.

El grupo que multiplica el término local de las ecuaciones [2.93] y siguientes es el número de inercia o número de Strouhal:

$$St = \frac{l_0}{v_0 t_0} \quad [2.101]$$

que representa el cociente entre la aceleración local asociada a un tiempo  $t_0$  y la convectiva, de forma que el proceso puede considerarse cuasiestacionario cuando es mucho menor que uno, es decir, cuando el tiempo de residencia es mucho menor que el de cambio local. El tiempo característico del número de Strouhal se sustituye por la inversa de la frecuencia en movimientos periódicos.

El grupo siguiente que aparece en las ecuaciones [2.93] es el número de Euler:



$$Eu = \frac{P_0}{\rho_0 v_0^2} \quad [2.102]$$

Este parámetro es característico de cualquier proceso de transformación de la energía de presión en energía cinética, y marca la influencia de los efectos de compresibilidad en los gases y de la cavitación en los líquidos. En este último caso,  $p_0$  se define como la diferencia entre la presión absoluta y la de vapor del líquido a la temperatura de trabajo (el peligro de aparición de cavitación aumenta cuanto menor es este número).

El tercer grupo es el recíproco del número de Froude:

$$Fr = \frac{v_0^2}{g l_0} \quad [2.103]$$

que indica el efecto de la acción gravitatoria. Se puede definir un número de Froude para cada tipo de fuerza másica: así, para las fuerzas gravitatorias, centrífugas y de Coriolis, se definen los números  $v_0/(g l_0)^{1/2}$ ,  $v_0/\omega l_0$  y  $v_0/(\omega v_0 l_0)^{1/2}$ , respectivamente.

El último término de la ecuación de cantidad de movimiento es el recíproco del número de Reynolds, que representa la relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas:

$$Re = \frac{\rho_0 v_0 l_0}{\mu_0} \quad [2.104]$$

El quinto término es  $p_0/\rho_0 u_0$  y depende de la naturaleza del fluido. Por ejemplo, en los gases perfectos, es:

$$\frac{p_0}{\rho_0 u_0} = \frac{R}{c_v} = \gamma - 1 \quad [2.105]$$

Cuando se combina este número con el número de Euler, resulta el número de Mach:

$$M = \frac{v_0}{c_0} \quad [2.106]$$

donde  $c_0 = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$  es la velocidad del sonido en el gas ideal.<sup>96</sup> El número de Mach es una relación entre términos cinéticos y térmicos, y representa el cociente entre las variaciones de la presión debidas a las fuerzas de inercia y la presión misma. El movimiento isentrópico estacionario del fluido puede ser considerado incompresible a números de Mach bajos, pues se demuestra que las variaciones relativas de densidad en esta clase de movimientos son pequeñas y que las variaciones de presión correspondientes son del orden de  $\rho_0 v_0^2$ . Más adelante, se explican las condiciones de isentropía para un movimiento en función del orden de magnitud de los grupos adimensionales, y también las condiciones de incompresibilidad asociadas al flujo.

El penúltimo término es una forma del número de Péclet:<sup>97</sup>

$$Pe = \frac{\rho_0 v_0 l_0 c_v}{k_0} \quad [2.107]$$

que puede combinarse con el número de Reynolds para proporcionar el número de Prandtl:



$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu_0}{k_0} \quad [2.108]$$

Tabla 2.1.  
Grupos adimensionales  
utilizados en mecánica  
de fluidos.

Número	Símbolo	Fórmula	Definición
Bond	Bo	$\frac{\rho g \lambda^2}{\sigma}$	Formación de ondas gravitacionales Formación de ondas capilares
Brinkman	Br	$\frac{\mu v^2}{kT}$	Calor por disipación Calor por conducción
Damköhler	Da	$\frac{ql}{vc_p T}$	Calor por reacción Calor por convección
Deborah	De	$\frac{\tau}{t}$	Tiempo de relajación Tiempo de observación
Euler	Eu	$\frac{p}{\rho v^2}$	Fuerza de presión Fuerza de inercia
Fourier	Fo	$\frac{\rho c_p l^2}{kt}$	Variación local de la temperatura Variación de la temperatura por difusión
Froude	Fr	$\frac{v^2}{gl}$	Fuerza de inercia Fuerza de gravedad
Grashof	Gr	$\frac{g \beta l^3 \Delta T}{v^2}$	Fuerza por convección e inercia Fuerza de rozamiento
Knudsen	Kn	$\frac{\lambda}{l}$	Recorrido libre medio Longitud característica
Lewis	Le	$\frac{\rho c_p D}{k}$	Difusión de masa Difusión de calor por conducción
Mach	M	$\frac{v}{c}$	Velocidad del fluido Velocidad del sonido
Péclet	Pe	$\frac{\rho v l c_p}{k}$	Calor por convección Calor por conducción
Prandtl	Pr	$\frac{c_p \mu}{k}$	Difusión de cantidad de movimiento Difusión de calor por conducción
Reynolds	Re	$\frac{\rho v l}{\mu}$	Fuerza de inercia Fuerza de rozamiento
Rossby	Ro	$\text{Ro} = \frac{v}{\omega l}$	Aceleración convectiva Aceleración de Coriolis
Schmidt	Sc	$\frac{\mu}{\rho D}$	Difusión de cantidad de movimiento Difusión de masa
Strouhal	St	$\frac{l}{vt}$	Tiempo de residencia Tiempo característico local
Weber	We	$\frac{\sigma}{\rho v^2 l}$	Fuerza de tensión superficial Fuerza de inercia



El producto  $RePr$  da la relación entre los transportes de calor por convección y difusión. El número de Péclet se puede interpretar como la relación entre el transporte de calor por conducción y convección. El último término de [2.93] es una combinación de los anteriores.

Otros grupos adimensionales utilizados en la mecánica de fluidos son los números de Weber, Brinkman, Damköhler, Eckert, Rossby, los ya explicados de Lewis y Schmidt, y otros como el número de Nusselt, Grashof, Stanton y Rayleigh. La cantidad de grupos adimensionales existentes es enorme, pero los más utilizados por su importancia son los que se incluyen en la tabla 2.1.

### 2.3.4. Análisis por órdenes de magnitud

Las ecuaciones [2.93] se escriben en función de los grupos adimensionales definidos en el apartado anterior, para  $\mu$ ,  $k$  y  $c_v$  constantes, de la forma:

$$\begin{aligned} St \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) &= 0 \\ \rho^* \left( St \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* \right) &= -Eu \nabla^* p^* - \frac{1}{Fr} \rho^* \nabla^* U^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \\ \rho^* \left( St \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* \right) &= -\frac{p_0}{\rho_0 c_v T_0} \rho^* \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* + \frac{1}{Re Pr} \frac{c_p}{c_v} \nabla^{*2} T^* + \frac{1}{Re Eu} \frac{p_0}{\rho_0 c_v T_0} \Phi_v^* \end{aligned} \quad [2.109]$$

Si la presión característica se escoge igual a  $\rho v^2$ , entonces el número de Euler es la unidad.<sup>98</sup> Si, además, se trata de un gas perfecto, entonces la ecuación de la energía pasa a ser, según [2.103]:

$$\rho^* \left( St \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* \right) = -(\gamma - 1) p^* \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* + \frac{\gamma}{Re Pr} \nabla^{*2} T^* + \frac{(\gamma - 1)}{Re} \Phi_v^* \quad [2.110]$$

La ecuación de transmisión de calor [2.98] se escribe, en general, haciendo uso de los grupos adimensionales, como:

$$St \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* = \frac{1}{Re Pr} \frac{l_{0s}^2}{l_{0n}^2} \nabla^{*2} T^* + Da q_a^* + \frac{1}{Re} \frac{v_0^2}{c_p \Delta T_0} \frac{l_{0s}^2}{l_{0n}^2} \Phi_v^* \quad [2.111]$$

o también:

$$St \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* = \frac{1}{Re Pr} \frac{l_{0s}^2}{l_{0n}^2} (\nabla^{*2} T^* + Br \Phi_v^*) + Da q_a^* \quad [2.112]$$

En vista de estos resultados, y para todas las formas anteriores de las ecuaciones básicas, se pueden extraer conclusiones importantes, basadas en el orden de magnitud de los números adimensionales  $St$ ,  $Re$  y  $Pr$ .

Para empezar, cualquier proceso resulta cuasiestacionario si el número de Strouhal es pequeño, pues entonces las variaciones locales de todas las variables son despreciables frente a las convectivas, que serán las que equilibren cada una de las ecuaciones por ser el término dominante a la izquierda de la igualdad.<sup>99</sup> Por otro lado, como la relación de calores específicos es próxima a la unidad y el número Prandtl es de orden uno en la



mayoría de los gases y de los líquidos poco viscosos,<sup>100</sup> resulta que, si el número de Reynolds es muy grande o, al menos superior a la unidad, las condiciones del movimiento del fluido serán tales que se podrán despreciar los efectos de la viscosidad y de la conducción de calor en la mayor parte del campo fluido.

Aunque el número de Reynolds definido en función de los parámetros de la corriente principal sea mucho mayor que la unidad, los efectos viscosos y conductivos no pueden despreciarse allí donde las variaciones de velocidad sean del orden de  $v_0$ , lo que ocurre en concreto en el interior de la capa límite, en estelas y en ondas de choque (donde, además, la longitud característica con la que ha de definirse el número de Reynolds local es mucho menor). Ello obliga a plantear el estudio del movimiento a grandes números de Reynolds, dividiendo el campo fluido en varias regiones: una externa, donde se despreciarán los términos viscosos y de conducción de calor de las ecuaciones gobernantes, y otra interna, donde el movimiento será viscoso y en la que las ecuaciones podrán simplificarse al ser su longitud transversal inferior a la longitudinal. Entre las regiones anteriores, aparecen superficies de discontinuidad en las que las magnitudes fluidas y sus derivadas pueden experimentar saltos finitos no arbitrarios, sujetos a las relaciones de compatibilidad, que básicamente obedecen a la conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía a través de la superficie (v. apartados 4.2 y 5.8).

De todas formas, como muestra por ejemplo el caso descrito por la ecuación [2.99], la condición de  $Re$  elevado no siempre elimina todo el efecto de la viscosidad de la corriente principal. Esto se entiende mejor al ver el resultado de dividir dicha ecuación por su término convectivo:

$$St \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -Eu \nabla^* p^* - \frac{1}{Fr} \nabla^* U^* + \frac{\mu}{\rho v_0 D} \frac{L}{D} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad [2.113]$$

El último término de esta ecuación sugiere que el efecto de la viscosidad es importante en conductos en los que el factor de forma  $L/D$  es grande, a pesar de que el número de Reynolds definido en función del diámetro,  $Re_D$ , pueda ser mayor que la unidad (y a no ser que aparezca turbulencia en el flujo). Este término también indica –como, por otro lado, demuestra la experiencia– que existe una zona a la entrada del conducto, de longitud característica  $L_e$ , en la que los efectos convectivos y los viscosos son semejantes, como consecuencia de la no unidireccionalidad del movimiento. En esta región, el fluido pierde memoria de su condición de entrada a medida que el efecto de las paredes se difunde por la viscosidad, de forma que, a partir de esta distancia, el efecto viscoso domina en el conducto y la unidireccionalidad del movimiento elimina todo rastro del término convectivo. El orden de magnitud de esta longitud es, en principio:

$$O(L_e) = \frac{\rho v_0 D^2}{\mu} = Re_D D \quad [2.114]$$

aunque esta estimación no es suficientemente precisa en la práctica, pues conduce a valores de  $L_e$  excesivamente grandes. En el apartado 5.2.1, se hace un análisis más detallado del flujo en esta región.

En general, los efectos viscosos son importantes y no pueden omitirse al resolver las ecuaciones características cuando el número de Reynolds es pequeño, bastante menor que la unidad en movimientos en torno a objetos, o inferior a un valor aproximado de 2.300 en movimientos guiados por conductos para cualquier valor de la relación  $L/D$ .





No obstante, y aun con  $Re$  pequeños, los efectos viscosos también son despreciables si el movimiento es muy no estacionario y la aceleración local domina. En efecto, al dividir el término viscoso de la ecuación de cantidad de movimiento de [2.92] por su término no estacionario, en lugar de por el convectivo, aparece el factor  $\mu t_0 / \rho l^2$ , que si es muy pequeño puede despreciarse con respecto a los demás.<sup>101</sup> La inversa de este factor es  $ReSt$ , de forma que la condición completa para que no haya fuerzas viscosas apreciables en un flujo externo es que al menos uno de los números,  $Re$  o  $ReSt$ , sea suficientemente grande frente a la unidad, y, si el flujo es interno (conducido), entonces la condición dada por  $Re$  debe substituirse por  $ReD/L$ , que es mucho más restrictiva en conductos largos.

De forma análoga, también se demuestra que la variación de la entropía debida a la contribución de la viscosidad y de la conducción de calor es despreciable siempre que el número de Reynolds sea lo suficientemente grande. Por ejemplo, en el supuesto [2.96], el incremento de entropía de la partícula fluida asociado a la conducción de calor en un campo fluido donde la temperatura media sea  $T_0$  es (v. [2.111]):

$$O\left(\frac{\Delta s}{c_p}\right) = \frac{1}{Re Pr} \frac{l_{0s}^2 t_c \Delta T_0}{l_{0n}^2 t_r T_0} \quad [2.115]$$

mientras que la contribución debida a la disipación viscosa es:

$$O\left(\frac{\Delta s}{c_p}\right) = \frac{1}{Re} \frac{l_{0s}^2 t_c v_0^2}{l_{0n}^2 t_r c_p T_0} \quad [2.116]$$

donde todos los términos de la derecha son, como máximo, la unidad.<sup>102</sup>

A la vista de estos resultados, la ecuación de la entropía de una partícula se simplifica, para  $Re$  elevados, a:

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{q_a}{\rho T} \quad [2.117]$$

para aquellas partículas del campo fluido que no se encuentren en regiones en las que la relación cuadrática de las longitudes características sea del orden del número de Reynolds. Las ecuaciones [2.115] y [2.116] muestran que el incremento de entropía por conducción y disipación viscosa en estas regiones puede ser importante y proporcional a  $\Delta T_0$  y  $v^2$ , respectivamente, y que, fuera de ellas, el orden de magnitud para los cambios de la entropía es:

$$O\left(\frac{\Delta s}{c_p}\right) = \frac{q_0 t_c}{c_p T_0} = Da \quad [2.118]$$

Evidentemente, cuando el segundo miembro es mucho menor que la unidad, se puede considerar que la entropía de la partícula permanece constante y que el movimiento es *isentrópico* en una primera aproximación.

En un movimiento isentrópico, la entropía puede no ser la misma en partículas diferentes de una misma línea de corriente pero, si todas las partículas en el instante inicial tienen la misma entropía,  $s_0$ , y el movimiento es isentrópico, entonces se verifica que el gradiente de la entropía es nulo en cualquier dirección y se dice que el movimiento es *homentrópico*. Por definición, un movimiento homentrópico es tal que todas las partí-



culas del campo fluido tienen la misma entropía en un instante, aunque pueda cambiar con el tiempo, es decir:  $s = s_0(t)$ ; por tanto, para que un movimiento sea homentrópico, basta que sea isentrópico y que en el instante inicial la entropía sea la misma para todas las partículas.

Por otro lado, un movimiento isentrópico que además sea cuasiestacionario, es decir, con  $t_0 > t_r$ , será tal que:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \approx \mathbf{v} \cdot \nabla s \quad [2.119]$$

que dice que la entropía es constante en toda la línea de corriente.<sup>103</sup> En estas condiciones, según [2.48] también se conserva la suma  $\{h + v^2/2 + U\}$  a lo largo de la línea, y si, además, el número de Froude es grande, es decir, el trabajo de las fuerzas másicas es despreciable, entonces también lo será la cantidad  $\{h + v^2/2\}$ .<sup>104</sup> Esta suma se denomina *entalpía de remanso*,  $h_0$ , y, por extensión, cualquier magnitud de remanso se define como la magnitud termodinámica que se obtiene desacelerando de forma estacionaria la partícula de fluido hasta la velocidad nula, sin adición de calor y sin efecto apreciable de las fuerzas másicas ni de las viscosas.

En definitiva, es suficiente que el número de Reynolds sea muy elevado y que no haya aportación externa de calor para poder admitir que el fluido en el exterior de las capas límite, estelas u ondas de choque es ideal, es decir, no viscoso, y será de aplicación la ecuación de Euler [2.39]. Esta condición también implica que cada partícula conserva su entropía y que si, además, el movimiento es cuasiestacionario y el efecto de las fuerzas másicas se puede despreciar, todas las partículas de una misma línea de corriente comparten la entalpía de remanso. Con estas condiciones, las magnitudes de remanso son las mismas en todo el campo fluido exterior si todas las líneas de corriente provienen de una región uniforme.

Partiendo de la definición de  $h_0$  y  $s_0$ , se puede definir cualquier otra magnitud de remanso, que también se mantendrá si lo hacen  $h_0$  y  $s_0$ . La conservación de las propiedades de remanso permite calcular todas las propiedades del campo fluido y el módulo de la velocidad, una vez conocidas cualquier otra propiedad termodinámica y las ecuaciones de estado.<sup>105</sup> En cualquier caso, las magnitudes de remanso así definidas pueden aplicarse a cualquier tipo de movimiento aunque no sea estacionario, ni ideal, etc., pero entonces su uso será más restringido.

### 2.3.5. Condiciones de incompresibilidad

Si bien se acepta de forma tácita, casi coloquial, que los líquidos se comportan de forma incompresible y los gases no, esto no es así en cualquier circunstancia, pues hay flujos y situaciones de trabajo que obligan a tener en cuenta los efectos de la compresibilidad en los líquidos y otras en las que los gases pueden admitirse incompresibles.

Las condiciones de incompresibilidad de un fluido van asociadas al cambio unitario de la densidad durante el proceso y son subyacentes a la propia ecuación de Bernoulli. Si el fluido es incompresible, o casi, los cambios de presión en el flujo estacionario son del orden de  $\rho v^2$ , de modo que el cambio de densidad consiguiente es, según la ecuación [3.173], del orden de  $\rho v^2/c^2$ . Por tanto, se puede aplicar la ecuación de Bernoulli siempre que el número de Mach,  $M$ , sea pequeño, al menos inferior a 0,3.<sup>106</sup>



La condición cinemática para que un fluido pueda considerarse incompresible, en un campo de velocidad tal que  $v_0$  sea su velocidad típica y  $l_0$  su longitud característica, es:

$$O(\nabla \cdot \mathbf{v}) \ll \frac{v_0}{l_0} \quad [2.120]$$

es decir, las variaciones espaciales de la velocidad sobre la escala  $l_0$  se han de compensar entre sí de forma que el campo de velocidad sea solenoidal en buena aproximación. Según la ecuación de continuidad, esta condición equivale a:

$$O\left(\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}\right) \ll \frac{v_0}{l_0} \quad [2.121]$$

y, puesto que en un fluido homogéneo, la presión, la densidad y la entropía están relacionadas por la ecuación de estado, la condición anterior se puede escribir como:

$$O\left(\frac{1}{\rho c^2} \left\{ \frac{Dp}{Dt} - \left[ \frac{\partial p}{\partial s} \right]_p \frac{Ds}{Dt} \right\}\right) \ll \frac{v_0}{l_0} \quad [2.122]$$

donde se ha utilizado la forma completa de [3.173].<sup>107</sup> En adelante, se supondrá que los términos del corchete interior de esta ecuación no se cancelan entre sí, aunque se prevé que, si lo hicieran, se fortalecería la incompresibilidad.<sup>108</sup>

Evidentemente, el segundo término de la izquierda se anula si el flujo es isentrópico. Cuando no lo hace, los cambios de densidad debidos a la variación entrópica han de ir asociados al calor aportado al fluido, ya sea por conducción, por reacción o radiación, o por disipación viscosa. Para verlo mejor, téngase presente la igualdad:

$$\frac{1}{\rho c^2} \left[ \frac{\partial p}{\partial s} \right]_p = -\frac{1}{\rho c^2} \left[ \frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_s \left[ \frac{\partial \rho}{\partial s} \right]_p = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_p \left[ \frac{\partial T}{\partial s} \right]_p = \frac{\alpha T}{c_p} \quad [2.123]$$

que resulta de aplicar la relación de Maxwell y la definición [1.127] del coeficiente de expansión térmica a presión constante,  $\alpha$ . Esta ecuación, junto a la de la entropía [2.70] o la [2.96], y la [2.121], conduce al siguiente resultado adimensional:

$$O\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) = \frac{\alpha T_0}{c_p} \frac{l_0}{v_0} \frac{\Delta s}{t_c} \frac{Ds^*}{Dt^*} = \frac{\alpha k}{\rho c_p v_0} \frac{\Delta T_0}{l_0} \nabla^{*2} T^* + \frac{\alpha q_0}{c_p} \frac{l_0}{v_0} q_a^* + \frac{\alpha \mu}{\rho c_p} \frac{v_0}{l_0} \Phi_v^* \quad [2.124]$$

Arreglando esta expresión en función de los grupos adimensionales comunes, se llega a la conclusión de que el cambio unitario de densidad por variación de la entropía de la partícula ha de ser del orden mayor de:

$$O\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) = O_{\max} \left( \frac{1}{\text{Re}}, \frac{1}{\text{Pr}}, \alpha \Delta T_0, \text{Da} \alpha T_0, \frac{1}{\text{Re}} \frac{\alpha v_0^2}{c_p} \right) \quad [2.125]$$

que puede despreciarse siempre que sea inferior a la unidad, es decir, siempre que el número de Reynolds sea grande y el aporte de calor por reacción o radiación sea despreciable. Obsérvese que, como era de esperar, estas condiciones coinciden con las que hacen el flujo isentrópico: [2.115], [2.116] y [2.118], al ser  $\alpha$  del orden de la inversa de la temperatura absoluta.



La última condición de [2.125] parece introducir una contradicción, pues, para un fluido dado y a unas condiciones determinadas, el aumento del número de Reynolds conlleva un aumento de su velocidad, lo que acabaría por violar esta condición de incompresibilidad. Aunque esto es cierto en principio, un análisis más detallado muestra que no es así. En un gas perfecto, este término se puede escribir también de la forma:  $(\gamma-1)\alpha T_0 M^2/\text{Re}$ , o, aproximadamente,  $M^2/\text{Re}$ , de lo que se colige que la influencia del número de Reynolds es mayor, salvo para números de Mach muy elevados.

En lo referente al primer término de [2.122], sin duda el más trascendente en la práctica para que el fluido sea considerado incompresible, es fácil ver que puede escribirse:

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial v^2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v^2 \right) + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_m \quad [2.126]$$

puesto que:

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \frac{Dv^2}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f}_m \quad [2.127]$$

de la ecuación de la energía mecánica [2.60] sin términos viscosos. El orden de magnitud de cada uno de los términos de la derecha de la ecuación [2.126] es, respectivamente:

$$\begin{aligned} O\left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t}\right) &= \frac{1}{\rho c^2} \frac{\Delta p_0}{t_0} \approx \frac{1}{c^2} \frac{l_0 v_0}{t_0^2} \\ O\left(\frac{1}{2c^2} \frac{\partial v^2}{\partial t}\right) &= \frac{1}{c^2} \frac{v_0^2}{t_0} \\ O\left(\frac{1}{2c^2} \mathbf{v} \cdot \nabla v^2\right) &= \frac{v_0}{c^2} \frac{v_0^2}{l_0} \\ O\left(\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_m\right) &= \frac{v_0 g}{c^2} \end{aligned} \quad [2.128]$$

Las dos primeras condiciones hacen referencia al efecto que tiene la no estacionariedad del movimiento sobre la compresibilidad,<sup>109</sup> y la cuarta se ha escrito para el campo gravitatorio terrestre. Multiplicando cada término por  $l_0/v_0$ , y con [2.121], se obtiene que el cambio unitario de la densidad por variación de la presión de la partícula es del orden mayor de:

$$O\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right) = O_{\text{máx}} \left( \frac{l_0^2}{c^2 t_0^2}, \frac{l_0 v_0}{c^2 t_0}, \frac{v_0^2}{c^2}, \frac{l_0 g}{c^2} \right) \quad [2.129]$$

que es, en función de los grupos adimensionales:

$$O\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right) = O_{\text{máx}} \left( \text{St}^2 \text{M}^2, \text{StM}^2, \text{M}^2, \frac{\text{M}^2}{\text{Fr}} \right) \quad [2.130]$$

y también puede despreciarse siempre que sea inferior a la unidad.

De estas condiciones, se observa que el flujo no permanente –por ejemplo, oscilatorio, aunque no necesariamente periódico– puede condicionar la incompresibilidad. Si la frecuencia típica de las variaciones temporales de la presión o la velocidad<sup>110</sup> es del



orden de  $f_0 \approx 1/t_0 \approx v_0/l_0$ , entonces la no estacionariedad del flujo supone una condición de incompresibilidad que coincide con la ofrecida por el número de Mach en el tercer grupo:  $M^2 \ll 1$ . En cambio, si la frecuencia de las oscilaciones es mayor que  $v_0/l_0$ , es decir,  $t_0$  es inferior a  $l_0/v_0$ , entonces la condición de no estacionariedad es más restrictiva que  $M^2 \ll 1$ .

También se deduce del orden de magnitud de las dos condiciones no estacionarias que la primera, la debida a los cambios de la presión local, es más restrictiva que la de  $v^2$  y que, por tanto, esta última puede obviarse. Es evidente que, si  $t_0$  es superior a  $l_0/v_0$ , no se está ante un movimiento no permanente, al ser  $St \ll 1$  y que, a medida que  $t_0$  disminuye, su influencia es mayor en el término que acompaña el primer miembro de [2.129] que en el segundo. Por ejemplo, si  $l_0$  es la longitud de onda de una onda sonora, entonces  $l_0 = c/f_0$  y la primera condición no se cumple porque  $l_0 f_0 / c$  es igual a la unidad, es decir,  $St^2 M^2 = (l_0 f_0 M / v_0)^2 = 1$ . En este mismo caso, la segunda condición se sigue cumpliendo, al ser  $(l_0 f_0 / v_0) M^2 = M \ll 1$ , por lo que queda comprobado que es menos restrictiva que la primera.

En conclusión, el flujo isentrópico puede considerarse incompresible cuando se verifica la condición:

$$O\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) = O_{\max}\left(\frac{l_0^2 f_0^2}{c^2}, M^2, \frac{l_0 g}{c^2}\right) \ll 1 \quad [2.131]$$

La acústica, la dinámica de gases y la meteorología dinámica<sup>111</sup> se ocupan de cada una de estas condiciones por separado, pero la más importante de todas ellas es, sin duda, la debida al número de Mach.

Para cuantificar la influencia del número de Mach en el flujo compresible estacionario, se suele utilizar en la literatura especializada el coeficiente de presión de remanso de la figura 2.4. Este coeficiente se define como:

$$c_{p,0} = \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2}\rho v^2} \quad [2.132]$$

y mide la desviación de la diferencia entre las presiones de remanso y estática en una condición de flujo determinada con respecto a la incompresible. Evidentemente, en el caso incompresible es la unidad y crece al hacerlo el número de Mach, en función del cual se escribe, con [3.182]:

$$c_{p,0} = \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2}\rho c^2 M^2} = \frac{2}{\gamma M^2} \left( \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right) \quad [2.133]$$

La expansión binomial de esta expresión es la siguiente:

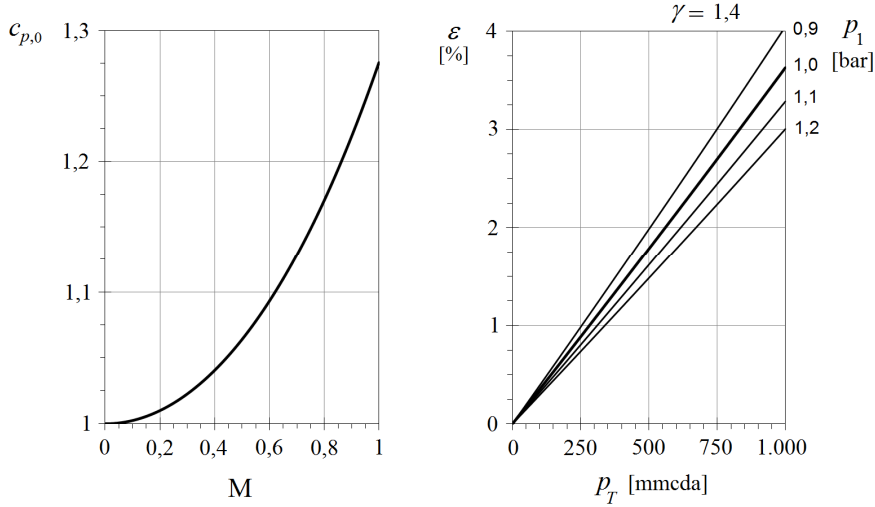
$$c_{p,0} = \frac{2}{\gamma M^2} \left( \left(1 + \frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \dots\right) - 1 \right) \quad [2.134]$$

y, para  $\gamma=1,4$ :

$$c_{p,0} = 1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{1}{40} M^4 + \frac{1}{1600} M^6 + \dots \quad [2.135]$$



Figura 2.4. Influencia del número de Mach en la compresibilidad de un flujo estacionario. A la izquierda, se ha representado la ecuación [2.134] para  $\gamma = 1,4$ . El error cometido al asumir un flujo como incompresible es inferior al 2,5 % para  $M < 0,3$ . A la derecha, se muestra el error que se comete al calcular el trabajo de compresión de un ventilador en el supuesto incompresible para diferentes valores de  $\gamma$ , incrementos de presión total,  $p_T$ , y presiones de entrada,  $p_1$ .



### 2.3.6. Semejanza física en las turbomáquinas

Una turbomáquina es una máquina rotodinámica que intercambia energía con el fluido que la atraviesa por medio de uno o varios rotores, rodetes o impulsores, incrementando su cantidad de movimiento. Una bomba rotodinámica es una turbomáquina generadora en la que el intercambio de energía se realiza sin un cambio apreciable de la densidad del fluido.

Los datos de partida que se necesitan para determinar el funcionamiento de una bomba rotodinámica son:

- La forma geométrica, que incluye la rugosidad de la máquina,  $\varepsilon$ .
- El tamaño, en términos de su diámetro,  $D$ , que en las máquinas radiales se asimila al diámetro exterior del impulsor y en las axiales, al diámetro a la altura de la cabeza de los álabes.
- La velocidad angular de giro en rpm,  $n$ , o en rad/s,  $\omega$ .
- Las propiedades físicas del fluido. En un problema mecánico, estas propiedades son la densidad,  $\rho$ , y la viscosidad,  $\mu$ . La tensión superficial no interviene, ya que, en condiciones normales de operación, no hay superficie libre en el interior de las bombas.

Si en una máquina están definidas todas las magnitudes anteriores y, además, se conoce el campo de presiones y velocidades a su entrada, entonces el resto de las propiedades fluidas también serán conocidas en el resto de la máquina y, en particular, a su salida. Se ha de tener en cuenta, además, que:

- El gasto volumétrico,  $Q$ , describe el campo de velocidades a unas revoluciones  $n$ .
- Las fuerzas másicas que derivan de un potencial se pueden agrupar con la presión y así trabajar con presiones reducidas:  $p_r = p + \rho g z$ .



- El valor absoluto de la presión a la entrada no es necesario, a menos que haya cavitación o presiones tan elevadas que el líquido se pueda comprimir sustancialmente.
- Al potencial de fuerzas másicas se le puede sumar una constante arbitraria, es decir, se puede suponer, por ejemplo, que  $z$  es cero a la entrada de la máquina.

Cualquier otra variable de funcionamiento (la altura de elevación,  $H_B$ ; la potencia,  $N$ ; el par,  $M$ , o el rendimiento,  $\eta$ , etc.) viene determinada en función de estos datos. Por ejemplo, para una forma de bomba dada y sin cambiar de fluido, las variables de salida,  $H_B$ , y la potencia al freno dependerán, por lo menos, del caudal,  $Q$ ; del diámetro del rotor,  $D$ , y de la velocidad del eje,  $\omega$ . Las relaciones funcionales que aparecen en este caso son:

$$\begin{aligned} Y &= Y(Q, D, \omega, \rho, \mu, \varepsilon) \\ N &= N(Q, D, \omega, \rho, \mu, \varepsilon) \\ M &= M(Q, D, \omega, \rho, \mu, \varepsilon) \end{aligned} \quad [2.136]$$

donde  $Y = gH_B$  es la energía comunicada por unidad de masa (v. apartado 5.3.2).

En cada función de las relaciones anteriores,  $Y$ ,  $N$  y  $M$ , hay siete variables y tres dimensiones primarias (M, L y T). Por tanto, según el teorema de  $\pi$  de Vaschy-Buckingham, se espera obtener cuatro parámetros adimensionales en cada una de ellas, y éste es el caso:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{\omega^2 D^2} &= \Psi \left( \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \\ \frac{N}{\rho \omega^3 D^5} &= \mathcal{N} \left( \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \\ \frac{M}{\rho \omega^2 D^5} &= \mathcal{M} \left( \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \end{aligned} \quad [2.137]$$

Estas son las condiciones de semejanza en las bombas rotodinámicas. Por supuesto, la elección de los datos y las incógnitas no es rígida, sino que pueden intercambiarse unos con otros siempre que se mantenga fijo el número de datos de partida.<sup>112</sup>

Además de las cantidades  $\rho \omega D^2 / \mu$ , que es una forma del número de Reynolds, y de la rugosidad relativa,  $\varepsilon / D$ , aparecen tres nuevos parámetros adimensionales. La variable  $\Psi$  se denomina *cifra adimensional de energía* y se define:

$$\Psi = \frac{Y}{\omega^2 D^2} = \frac{gH_B}{\omega^2 D^2} = \frac{P_{TOT}}{\rho \omega^2 D^2} \quad [2.138]$$

La cantidad:

$$\Phi = \frac{Q}{\omega D^3} \quad [2.139]$$

es la *cifra adimensional de caudal*. La tercera variable es la cifra de potencia,  $N$ , que es función del producto  $\Psi \Phi$  y del rendimiento de la bomba. La cifra de par está relacionada directamente con la de potencia porque entre el par y las revoluciones del accionamiento se verifica la relación  $N = M \omega$ .

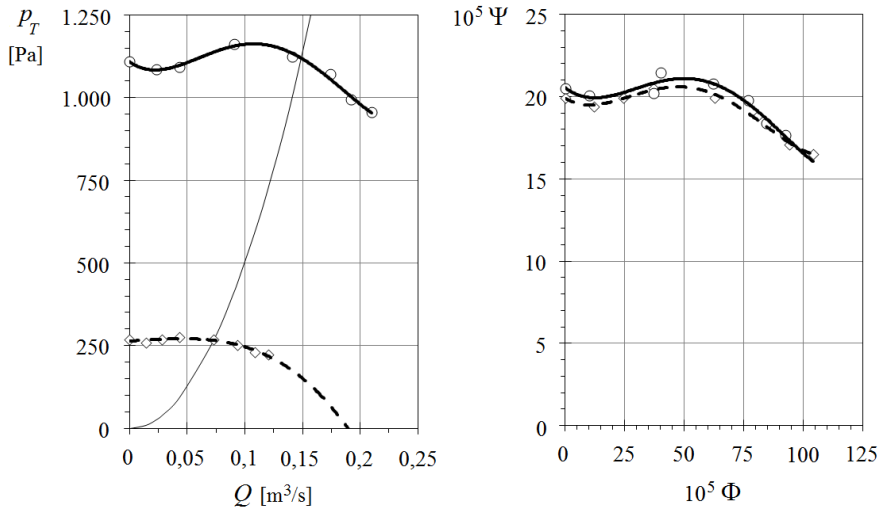
La influencia del número de Reynolds y de la rugosidad relativa es despreciable en las condiciones habituales de trabajo y con los márgenes de error admisibles en la práctica. A altos números de Reynolds, el efecto de la rugosidad es similar en todas las bombas, por lo que es común suponer que las ecuaciones anteriores se aproximan a:

$$\frac{Y}{\omega^2 D^2} \approx \Psi\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right) \quad [2.140]$$

$$\frac{N}{\rho \omega^3 D^5} \approx N\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)$$

es decir, para bombas semejantes,<sup>113</sup> se espera que las cifras adimensionales de altura y potencia sean funciones únicas de la cifra adimensional o del coeficiente de caudal. La figura 5.6 muestra una forma posible de estas relaciones y la 2.5, su validación experimental para un ventilador centrífugo.

Figura 2.5. Verificación experimental de la ley de la semejanza en un ventilador centrífugo ( $n_2/m_1=2$ ). Las curvas adimensionales de la derecha se han obtenido dividiendo la presión y el caudal por  $n^2$  y  $n$ , respectivamente. La curva parabólica de la izquierda es una curva de afinidad, que indica qué puntos del cuadrante  $(p, Q)$  comparten cifras adimensionales y, por tanto, son semejantes. Estas curvas son de forma que  $Y=AQ^2$  en una turbomáquina dada y muestran el sentido de la transformación de los ejes  $(p, Q)$  a  $(\psi, \Phi)$ .



Los anteriores no son los únicos grupos adimensionales que pueden formarse con las variables de trabajo [2.136]. En concreto, dos grupos muy útiles, desde el punto de vista del diseñador, son los siguientes:

$$\Omega = \omega \frac{Q^{1/2}}{Y^{3/4}} \quad [2.141]$$

$$\Delta = D \frac{Y^{1/4}}{Q^{1/2}}$$

La *velocidad específica adimensional*,  $\Omega$ , es independiente de la dimensión,  $D$ , de la turbomáquina y, por tanto, es sólo función de su forma o geometría. De hecho, la cifra  $\Omega$  también se denomina *factor de forma*, pues está íntimamente relacionada con el tipo de rodete más adecuado para unas condiciones de trabajo determinadas. Es decir, la máquina de forma  $\Omega$ , definida en términos de  $\omega$ ,  $Q$  e  $Y$  de una aplicación, será la que





posea mayor rendimiento fluidodinámico en dichas condiciones. Esto establece una base común sobre la que pueden compararse los diversos tipos de bombas o turbinas, con independencia de sus dimensiones.

En la literatura, se recogen diferentes gráficos o relaciones que muestran la experiencia acumulada en el diseño óptimo de turbomáquinas en función de las cifras adimensionales [2.141], evaluadas en el punto de rendimiento máximo. Acaso el más representativo de estos diagramas sea el de Cordier de la figura 2.6, aunque no es el único.

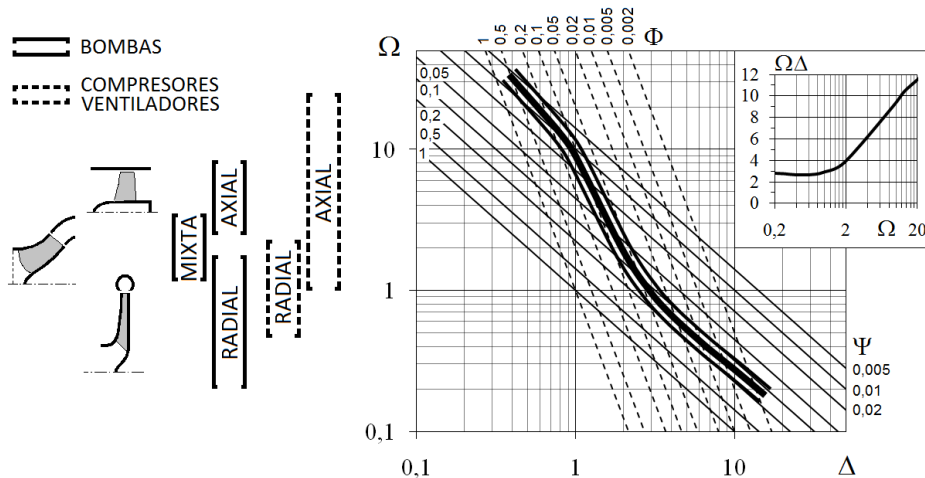


Figura 2.6. Diagrama de Cordier para la relación entre la velocidad específica y el diámetro específico correspondiente al diseño a rendimiento óptimo. Este diagrama es especialmente útil en el diseño de bombas hidráulicas.

A diferencia de las bombas cuya geometría es fija, las turbinas (turbomáquinas motoras) suelen tener a su entrada un distribuidor de geometría variable que les da más versatilidad y permite controlar su gasto. Ello resulta necesario, pues la instalación condiciona las variables que se utilizan en el análisis adimensional (por ejemplo, las revoluciones dependen de la frecuencia eléctrica y de la altura de elevación del embalse) y, como las demás variables no pueden cambiarse sin las primeras, el régimen de funcionamiento de una turbina resulta demasiado rígido, a menos que se pueda cambiar su geometría.

El grupo de ecuaciones [2.136] en una turbina debe incluir la geometría del distribuidor, su posición, o bien el ángulo de sus palas respecto a una dirección  $\alpha$  cualquiera. Obviando el efecto del número de Reynolds y de la rugosidad, resultan los siguientes grupos característicos:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{D^2 Y^{1/2}} &\approx \varphi_1 \left( \frac{\omega D}{Y^{1/2}}, \alpha \right) \\ \frac{N}{\rho D^2 Y^{3/2}} &\approx \varphi_2 \left( \frac{\omega D}{Y^{1/2}}, \alpha \right) \\ \frac{M}{\rho Y D^3} &\approx \varphi_3 \left( \frac{\omega D}{Y^{1/2}}, \alpha \right) \end{aligned} \quad [2.142]$$



También se necesitan más parámetros para describir el funcionamiento de la turbomáquina cuando el fluido experimenta un cambio notable en la densidad a su paso, como por ejemplo en un compresor.<sup>114</sup> En general, además de los datos anteriores, ahora es preciso conocer:

- Las viscosidades, tanto la dinámica como la volumétrica (aunque la influencia de esta última es normalmente despreciable) y la conductividad térmica,  $k$ .
- La ecuación de estado. Si el gas se comporta como perfecto, es suficiente con dos de las cantidades siguientes:  $R$ ,  $c_v$ ,  $c_p$  o  $\gamma$ .
- Las condiciones del fluido a la entrada, dadas por su velocidad,  $v_e$ , o su caudal másico,  $G$ , y por dos variables de estado, normalmente la presión,  $p_e$ , y la densidad,  $\rho_e$ , o la temperatura,  $T_e$ .<sup>115</sup>
- Las condiciones de contorno para la temperatura en el interior de la máquina con las que poder estimar la transferencia térmica con la pared. No obstante, dado que los tiempos de residencia son muy pequeños, se suele admitir que el proceso es adiabático.

La presión de salida del compresor responde, en este caso, a una relación funcional del tipo:

$$p_s = p_s(G, D, \omega, p_e, \rho_e, \mu, k, c_p, \gamma, \varepsilon) \quad [2.143]$$

donde hay once variables y cuatro dimensiones primarias, al tratarse de un problema termodinámico (M, L, T y  $\theta$ ). Tomando como variables dimensionalmente independientes  $p_e$ ,  $\rho_e$ ,  $c_p$  y  $D$ , tres de las cuales están relacionadas entre sí para un gas perfecto con la velocidad del sonido a la entrada,  $c_e = (\gamma p_e / \rho_e)^{1/2}$ , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{p_s}{p_e} &= r \left( \frac{G}{(\rho_e \rho_e)^{1/2} D^2}, \frac{\rho_e^{1/2} \omega D}{p_e^{1/2}}, \frac{(\rho_e \rho_e)^{1/2} D}{\mu}, \frac{c_p (\rho_e \rho_e)^{1/2} D}{k}, \gamma, \frac{\varepsilon}{D} \right) \\ &= r \left( \frac{\gamma^{1/2} G}{\rho_e c_e D^2}, \frac{\gamma^{1/2} \omega D}{c_e}, \frac{\rho_e c_e D}{\gamma^{1/2} \mu}, \frac{c_p \rho_e c_e D}{\gamma^{1/2} k}, \gamma, \frac{\varepsilon}{D} \right) \end{aligned} \quad [2.144]$$

Evidentemente, el primer término es la relación de compresión del compresor,  $r$ . El primero de la derecha es una forma del número de Mach, si se admite que el gasto másico a la entrada es proporcional a  $\rho_e v_e D^2$ . El segundo proporciona la relación entre la velocidad periférica de la máquina y la velocidad del sonido. El tercero es una forma de número de Reynolds, definido en función de la velocidad del sonido, que toma valores muy grandes en los compresores, e indica que la influencia de la viscosidad es muy pequeña. El cuarto es un número de Péclet que, combinado con el anterior, proporciona el número de Prandtl.

En general, la influencia de los cuatro últimos términos de la ecuación [2.144] es pequeña en los gases, y más si no se cambia de gas o de máquina, y entonces esta ecuación puede escribirse de cualquiera de las formas aproximadas siguientes:

$$\frac{p_s}{p_e} \approx r \left( \frac{G(RT_e)^{1/2}}{p_e D^2}, \frac{\omega D}{c_e} \right) \approx r \left( M_e, \frac{\omega D}{c_e} \right) \quad [2.145]$$



Se observa que, a diferencia de las bombas hidráulicas, las máquinas de flujo compresible se caracterizan por la necesidad de tener que determinar dos parámetros adimensionales para describirlas, lo que conduce a una familia completa de curvas y no a una única dependencia funcional del tipo [2.140].

### 2.3.7. Leyes de semejanza y teoría de modelos

El comportamiento físico de un sistema se puede investigar en su totalidad o en alguna de sus partes mediante técnicas experimentales. Los ensayos experimentales pueden realizarse sobre modelos a escala que permitan dar respuesta a problemas específicos del sistema real mediante la programación de una serie de experiencias. La escala del modelo puede ampliarse o reducirse en comparación con la magnitud real del sistema original o prototipo, como también puede extrapolarse la escala temporal para reducir el tiempo de observación de un fenómeno particular.

En el sentido más amplio del término, la semejanza trata de las relaciones únicas existentes entre el modelo y el prototipo objeto de investigación. Ello no implica necesariamente la identidad de apariencia entre ambos, pero sí es conveniente que las características geométricas y físicas esenciales del prototipo queden reflejadas unívocamente en el modelo. Otra condición necesaria para la aplicación de las teorías de modelos en la experimentación es que exista algún grado de semejanza física, es decir, que tanto el modelo como el prototipo compartan las mismas leyes fundamentales.<sup>116</sup>

En la experimentación con modelos, se trata de reproducir aquellas características del prototipo que definen la respuesta del sistema, teniendo en cuenta que los resultados sobre el modelo no tienen por qué revelar las leyes físicas subyacentes, sino sólo relacionar empíricamente la relación existente entre las diferentes magnitudes analizadas. La técnica experimental utilizada es, por tanto, crucial a la hora de juzgar los resultados, y ésta depende básicamente de la habilidad, de la capacidad de percepción y del buen juicio de quien la concibe.

Hay que tener presente también que la experimentación con un modelo puede conducir a una interpretación errónea del fenómeno que se quiere estudiar como consecuencia del efecto de la escala. Estos efectos aparecen, por ejemplo, como consecuencia de un distinto acabado superficial y su incidencia sobre la capa límite, o por la ocurrencia de fuerzas de tensión superficial en un modelo muy reducido. Si estos efectos fuesen conocidos de antemano, se podría seleccionar la escala más adecuada para evitar errores e incluso falsear, de alguna manera, la semejanza geométrica con el fin de compensar dicho efecto. No obstante, y como generalmente no es así, a menudo es necesario repetir los ensayos a escalas distintas para cuantificarlos y separar su influencia.

La semejanza entre el modelo y el prototipo sigue siendo útil aun cuando no sea completa. Esta falta parcial de semejanza física se denomina *distorsión* y causa (o es consecuencia de) que alguno de los grupos  $\pi_i$  de la ecuación [2.86] no mantenga el mismo valor en modelo y prototipo. Las causas por las que, a veces, es necesario usar modelos distorsionados del prototipo son varias, pero a menudo son consecuencia de un conflicto de compatibilidad en la elección de los factores de escala o de la imposibilidad tecnológica de satisfacer alguna de las relaciones de semejanza.

La utilización correcta de estos modelos requiere una comprensión aun más profunda del caso que cuando la semejanza es completa. Es evidente que no hay que servirse sólo de



la intuición a la hora de planificar un experimento, sino que es útil y muy recomendable elaborar una lista completa de las variables, tanto dimensionales como funcionales, que se suponen más relevantes del problema. Con el valor de dichas variables sobre el prototipo, se puede analizar el orden de magnitud de los diferentes grupos adimensionales implicados y así cuantificar su importancia relativa.

En el caso más general de un proceso permanente sin aporte de calor del exterior, es suficiente valorar los números de Reynolds, Froude, Mach y Weber para tener una idea inicial del tipo de semejanza parcial a utilizar. Por ejemplo, cuando el campo de velocidades es subsónico, no existen superficies libres y las fuerzas másicas son despreciables; la más importante de las relaciones funcionales entre el modelo y el prototipo viene dada por la semejanza de Reynolds y, entonces,  $Re_m = Re_p$ . Esta igualdad definirá, por sí sola, la relación existente entre las velocidades, las aceleraciones, las fuerzas, etc., entre el modelo y el prototipo, y la escala seleccionada para los ensayos.

Si  $l_p$  y  $l_m$  son las longitudes características del prototipo y el modelo, respectivamente, se define el factor de escala de la forma siguiente:

$$\lambda = \frac{l_p}{l_m} \quad [2.146]$$

Para que la semejanza sea geométrica, es necesario que las longitudes, las áreas y los volúmenes del modelo y del prototipo guarden relación con  $\lambda$  de la forma:  $\lambda$ ,  $\lambda^2$ ,  $\lambda^3$ . En un sistema [MLT], cabe definir del mismo modo los factores de escala temporal y másica, que permitan comparar el ritmo en el que los procesos tienen lugar en el modelo y en el prototipo y también el resto de variables, entre ellas las fuerzas y las energías implicadas.

Estos factores de escala temporal y másica están relacionados con la escala longitudinal, una vez seleccionado el fluido a utilizar en los ensayos. Por ejemplo, para la semejanza de Reynolds, se cumple:

$$Re_p = \frac{\rho_p l_p v_p}{\mu_p} \equiv \frac{\rho_m l_m v_m}{\mu_m} = Re_m \quad [2.147]$$

que conduce a:

$$\lambda = \frac{\rho_m \mu_p v_m}{\rho_p \mu_m v_p} \quad [2.148]$$

Si  $t_p$  y  $t_m$  son los tiempos característicos del prototipo y del modelo cuyo cociente define el factor temporal  $\lambda_t$ , entonces la relación entre las velocidades es:

$$\frac{v_p}{v_m} = \frac{l_p t_m}{l_m t_p} = \frac{\lambda}{\lambda_t} \quad [2.149]$$

y, aplicando [2.148], resulta, como cabría esperar:

$$\lambda_t = \frac{\lambda^2}{\nu^*} \quad [2.150]$$

donde se ha definido como  $\nu^*$  la relación de viscosidades cinemáticas de ambos fluidos. La elección del fluido con el que realizar los ensayos, aunque está sujeta a otros condi-



cionantes cuando no es el mismo que en el prototipo, no puede ser arbitraria por cuanto la elección de un  $\lambda$ , determinado impone la relación  $v^*$  para una escala  $\lambda$  preestablecida. Del mismo modo, condicionada la relación de densidades,  $\rho^*$ , el factor de escala másico viene impuesto por la relación:

$$\rho^* = \frac{\lambda_m}{\lambda^3} \quad [2.151]$$

Curiosamente, en la semejanza de Reynolds, la relación entre las fuerzas implicadas entre el modelo y el prototipo no está relacionada con la escala. En efecto, como la expresión dimensional de la fuerza es  $[MLT^{-2}]$ , resulta:

$$F^* = \frac{\lambda_m \lambda}{\lambda_l^2} = \frac{(\rho^* \lambda^3) \lambda}{(\lambda^2 / v^*)^2} = \rho^* (v^*)^2 \quad [2.152]$$

Operando de forma análoga con el resto de magnitudes para los distintos tipos de semejanza parcial, se obtiene la tabla 2.2. El lector podrá simplificar fácilmente esta tabla cuando utilice el mismo fluido ( $\sigma^* = \rho^* = v^* = 1$ ) y las experiencias se realicen en el campo gravitatorio en ausencia de otras fuerzas másicas ( $g^* = 1$ ), y entonces observará que las relaciones sólo dependen del factor  $\lambda$  o son la unidad.

Tipo de semejanza / Factores de escala					
Magnitud	Unidades	Fr	Re	We	M
Longitud	L	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$
Tiempo	T	$(g^*)^{-1/2} \lambda^{1/2}$	$(v^*)^{-1} \lambda^2$	$(\sigma^*/\rho^*)^{-1/2} \lambda^{3/2}$	$(c^*)^{-1} \lambda$
Masa	M	$\rho^* \lambda^3$	$\rho^* \lambda^3$	$\rho^* \lambda^3$	$\rho^* \lambda^3$
Velocidad	$LT^{-1}$	$(g^*)^{1/2} \lambda^{1/2}$	$v^* \lambda^{-1}$	$(\sigma^*/\rho^*)^{1/2} \lambda^{-1/2}$	$c^*$
Aceleración	$LT^{-2}$	$g^*$	$(v^*)^2 \lambda^{-3}$	$(\sigma^*/\rho^*) \lambda^{-2}$	$(c^*)^2 \lambda^{-1}$
Caudal	$L^3 T^{-1}$	$(g^*)^{1/2} \lambda^{5/2}$	$v^* \lambda^2$	$(\sigma^*/\rho^*)^{1/2} \lambda^{3/2}$	$c^* \lambda^3$
Fuerza	$MLT^{-2}$	$\rho^* g^* \lambda^3$	$\rho^* (v^*)^2$	$\sigma^* \lambda$	$\rho^* (c^*)^2 \lambda^2$
Presión	$ML^{-1} T^{-2}$	$\rho^* g^* \lambda$	$\rho^* (v^*)^2 \lambda^{-2}$	$\sigma^* \lambda^{-1}$	$\rho^* (c^*)^2$
Energía	$ML^2 T^{-2}$	$\rho^* g^* \lambda^4$	$\rho^* (v^*)^2 \lambda$	$\sigma^* \lambda^2$	$\rho^* (c^*)^2 \lambda^3$

Tabla 2.2. Relaciones de semejanza parcial y factores de escala correspondientes. Obsérvese que es bastante difícil que se produzcan varias de ellas a la vez, a no ser que  $\lambda$  sea la unidad y se utilice el mismo fluido en los ensayos, es decir, se ensaye directamente el prototipo en condiciones de autosemejanza. Las variables con asterisco indican la relación p/m que existe entre una determinada propiedad en el fluido real y en el utilizado en el modelo. La semejanza de Froude puede extenderse a los distintos tipos de fuerzas másicas.

<sup>65</sup> Esto es especialmente conflictivo en problemas de conservación de la cantidad de movimiento, en los que la elección de un volumen de control inadecuado puede inducir un cálculo erróneo de la fuerza que el fluido realiza sobre un contorno. En estos problemas, la elección del volumen de control debe hacerse teniendo en cuenta qué es lo que se pretende calcular y de qué variables se dispone para ello.

<sup>66</sup> Salvo raras excepciones, como el caso hipotético de que en una de estas superficies se produjera una onda de choque, por ejemplo.



<sup>67</sup> Si bien es admisible que la presión sea constante en las secciones de entrada y salida, no suele ser así para la velocidad, por lo que se introduce el factor corrector de la cantidad de movimiento o impulso,  $\beta$ , definido como:

$$\beta = \frac{1}{S} \int_S \left( \frac{v}{\bar{v}} \right)^2 dS$$

y que se puede calcular cuando es conocida o supuesta la distribución de velocidad en  $S$ .

<sup>68</sup> Evidentemente, continúa siendo  $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_C$ , pero referidas al sistema de referencia no inercial.

<sup>69</sup> La energía interna  $u$  está asociada a la temperatura del fluido y es toda aquella energía que no está representada por la velocidad media de la partícula,  $v$ , y está formada por la energía cinética interna, debida a la agitación de las moléculas alrededor de dicha velocidad, a su vibración y rotación, etc., y la energía potencial interna, debida a las fuerzas de interacción molecular e intermolecular.

<sup>70</sup> Obsérvese que ésta es una ecuación escalar. El calor aportado por las reacciones químicas en el interior del fluido se incluye a la derecha de la ecuación, pues se admite que el fluido se mantiene homogéneo en composición y no es necesario introducir la energía de formación al calcular la energía interna  $u$ . La energía térmica que aparece por transformación de la energía química se supone, por tanto, una aportación de calor del exterior.

<sup>71</sup> El lector interesado puede deducir fácilmente esta relación haciendo uso de la ecuación de continuidad y teniendo en cuenta que  $U$  es permanente.

<sup>72</sup> La condición  $D\rho/Dt=0$  revela que la densidad de la partícula es constante en su movimiento, pero no que la densidad sea uniforme en un volumen fluido.  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  es la ecuación de la plastilina:  $\partial v_x/\partial x = -\partial v_y/\partial y$  si  $v_z=0$ .

<sup>73</sup> Así lo corrobora la experiencia. El término  $\{p + \rho gz\}$  hace las veces de la presión estática en ausencia de fuerzas másicas y se denomina *presión reducida*,  $p_r$ .

<sup>74</sup> El segundo término de [2.42] es una ecuación lineal de difusión. Se omite el carácter vectorial de [2.43] porque  $\Omega$  es un escalar en movimiento plano. Obsérvese que, a pesar de la semejanza entre esta ecuación y [2.38] cuando  $\{p + \rho gz\}$  es constante, ésta no determina el campo de velocidad sino sólo su rotor. A continuación, se discuten la generación y el transporte de vorticidad con más detalle.

<sup>75</sup> La vorticidad axial sí es nula.

<sup>76</sup> La difusión de la vorticidad está asociada a la difusión de la cantidad de movimiento, con la que comparte difusividad,  $\nu$ .

<sup>77</sup> No se muestra la demostración completa. El lector interesado puede deducirla él mismo teniendo presente la identidad vectorial:  $\nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{v} \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v})$ , que  $\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$  y el operador derivada sustancial [1.38].

<sup>78</sup> Esta ecuación se deduce del teorema de Kelvin, combinado con la ecuación de Navier-Stokes [2.53], y para un fluido incompresible, viscoso y en un campo de fuerzas másicas conservativo, se reduce a [2.44].

<sup>79</sup> Estas últimas sólo si el fluido es conductor. Existe acoplamiento entre el movimiento del fluido y el campo magnético creado por el movimiento. En el caso del núcleo terrestre, la circulación inducida por los movimientos convectivos radiales da lugar al campo magnético de la Tierra.

<sup>80</sup> Un caso típico de este movimiento es el de los flujos atmosféricos que generan movimientos ciclónicos, cuyo sentido de giro depende del hemisferio considerado. La velocidad de rotación terrestre es del orden de  $\omega \approx 0,000072$  rad/s, por lo que, para movimientos atmosféricos del orden de los 10 m/s, la escala afectada por el efecto de Coriolis es de  $10^3$  km, aproximadamente.

<sup>81</sup> Recuérdesse el significado del operador " $\mathbf{n} \cdot \nabla$ " explicado al final del apartado 1.1.1.

<sup>82</sup> El producto escalar entre tensores de orden dos se escribe con el símbolo "·". Este operador se utiliza para producir una doble contracción de los tensores. Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son dos tensores de segundo orden, la operación  $\mathbf{a}:\mathbf{b}$  es la traza del producto  $\mathbf{b}^T \mathbf{a}$ . Por componentes es:



$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{ij}$$

y, en notación indicial,  $a_{ij}b_{ij}$ . Este operador también permite definir la norma de un tensor, de la forma  $\|\mathbf{a}\|=(\mathbf{a}:\mathbf{a})^{1/2}$ .

<sup>83</sup> La función de disipación de Rayleigh, por componentes en cartesianas, es:

$$\begin{aligned} \Phi_v &= \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma'_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma'_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma'_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau'_{xy} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \tau'_{xz} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \tau'_{yz} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \\ &= 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \end{aligned}$$

<sup>84</sup> Esto no es cierto, precisamente, en los casos de flujo en turbomáquinas de flujo compresible, flujo externo supersónico, lubricación y extrusión a alta velocidad.

<sup>85</sup> Otra forma de esta ecuación utiliza la igualdad:  $\partial(\ln p)/\partial(\ln T) = \alpha T$ .

<sup>86</sup> Una forma simplificada de [2.71] se ha visto en [2.65].

<sup>87</sup> El primer paso de la CFD requiere la generación de una malla, que servirá de base para discretizar el medio continuo. A cada nodo de la malla, se le asocian entre 3 y 20 variables (la presión, las tres componentes de la velocidad, la densidad, la temperatura, las propiedades del fluido, etc.), y se genera así un sistema enorme de ecuaciones no lineales. El mayor problema es que, para captar físicamente la turbulencia, se requieren mallas muy finas y, con tal número de incógnitas, los métodos de resolución directos o matriciales necesitan demasiada capacidad de almacenamiento, mientras que los métodos iterativos pueden ser poco robustos y divergir. Se trata de un problema matemático NP.

<sup>88</sup> Básico o también primitivo. Es frecuente denominar el sistema de unidades como *primitivo* o *derivado*. Por ejemplo, el tiempo y el espacio son magnitudes primitivas en mecánica, mientras que la velocidad es derivada. Evidentemente, esta definición puede invertirse.

<sup>89</sup> Por ejemplo, el caudal volumétrico sería  $[Q] = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Las magnitudes  $Q$  pueden ser escalares o vectoriales.

<sup>90</sup> Estas propiedades son de índole matemática y se verifican en función de cómo se hallen agrupadas las variables en  $f$ . No todas las ecuaciones físicamente correctas e independientes del tamaño de las unidades son invariantes a los cambios de las unidades de medida. No obstante, se demuestra que toda relación dimensionalmente homogénea es invariante y que, para ello, basta que, al aplicar el cambio de variables [2.84] a la ecuación [2.80], se cumpla:

$$k_j \frac{\partial}{\partial k_j} f \left( \prod_{j=1}^p k_j^{a_{1j}} Q'_1, \prod_{j=1}^p k_j^{a_{2j}} Q'_2, \dots, \prod_{j=1}^p k_j^{a_{nj}} Q'_n \right) \propto f(Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n)$$

<sup>91</sup> Las variables  $\pi$  son adimensionales y su obtención se halla bien documentada en muchas referencias.

<sup>92</sup> Las dos primeras ecuaciones de [2.89] implican que la semejanza física es una generalización de la semejanza geométrica y cinemática.

<sup>93</sup> Cuando se dispone de ellas. También se pueden deducir por análisis inspeccional.

<sup>94</sup> En la ecuación de la energía, se han omitido los términos de radiación y reacción sin que, por ello, el método que se presenta pierda generalidad. Sí se incluyen en la ecuación de la entropía [2.96], con la que se discute su influencia más adelante (v. [2.97]).

<sup>95</sup> Las condiciones para que el movimiento pueda ser considerado unidireccional se analizan en el apartado 3.4.1. Aquí se introduce esta condición para reducir la extensión de la ecuación resultante sin que, por ello, se pierda generalidad en el desarrollo.

<sup>96</sup> En general,  $c_0^2 = [\partial p / \partial \rho]$ , y es una propiedad termodinámica del fluido.

<sup>97</sup> En la práctica, se suele sustituir el calor específico a volumen constante por el de presión constante.



<sup>98</sup> Cuando conviene escoger como presión característica las variaciones de la presión, su gradiente en [2.91] ha de ser del mismo orden que el término más importante de la ecuación de cantidad de movimiento. Si el movimiento es estacionario y transcurre a un número de Reynolds elevado, esta condición implica que  $p_0 \approx \rho v^2$ . El término de presión desaparece de las ecuaciones adimensionales sólo en contados casos triviales.

<sup>99</sup> El término convectivo puede, asimismo, ser despreciable si predominan al menos dos de los términos de la derecha, e incluso completamente nulo si el contorno o las condiciones del flujo inhiben su aparición. Todos los resultados de esta sección pueden ampliarse comparando los términos de cada una de las ecuaciones entre sí y no sólo con el convectivo. Se anima al lector a que extraiga sus propias conclusiones siguiendo la guía ofrecida en este apartado y en el 1.3.1.

<sup>100</sup> El número de Prandtl es 0,73 para el aire y aproximadamente 7,1 para el agua. Pr es inferior a la unidad en los metales líquidos. Por ejemplo, para el mercurio es 0,024 y para el sodio, 0,007.

<sup>101</sup> El estudio de la propagación del sonido puede hacerse con la teoría de los fluidos ideales. En estos casos,  $t_0$  es la inversa de la frecuencia acústica.

<sup>102</sup> Salvo el término  $v^2/c_p T$ , que es proporcional a  $M^2$  en los gases y puede ser mayor que 1 en los flujos supersónicos.

<sup>103</sup> La entropía puede cambiar en un tiempo del orden de  $t_0$  y entre líneas de corriente si no partían todas de  $s_0$ .

<sup>104</sup> Obsérvese la ecuación [2.48] de nuevo. La entropía de una partícula se mantiene constante en su desplazamiento a lo largo de la línea de corriente aunque el proceso no pueda ser considerado estacionario, pero, si lo es, será la misma para todas las partículas de la línea. En cambio, la suma  $\{h + v^2/2\}$  de la partícula no se mantiene si el proceso no es estacionario aunque se verifiquen las demás condiciones anteriores, debido al cambio local de la presión (supuesto  $U$  constante). Este efecto es el que permite a las turbomáquinas intercambiar trabajo con el fluido (también de forma isentrópica, en teoría).

<sup>105</sup> El cálculo de las magnitudes fluidas de remanso a partir de las estáticas, o viceversa, se puede acometer, por ejemplo, mediante el diagrama de Mollier ( $h,s$ ) del fluido. Las condiciones de conservación de las magnitudes de remanso son: efectos de la viscosidad y de la conductividad térmica despreciables, en un movimiento permanente, sin adición de calor, en que las fuerzas másicas sean mínimas. En resumen: movimientos permanentes a altos números de Reynolds, sin adición de calor y con fuerzas másicas despreciables.

<sup>106</sup> Teniendo presente que la velocidad del sonido, en condiciones normales, es del orden de 340 y 1.400 metros por segundo en el aire y en el agua, respectivamente, se entiende que los flujos estacionarios más comunes puedan considerarse incompresibles.

<sup>107</sup> Es diferencial exacta:  $dp = [\partial p/\partial \rho]_s d\rho + [\partial p/\partial \rho]_s ds$ . Si se utiliza la relación [1.126] para evaluar los cambios de densidad, se llega a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \beta_t \frac{Dp}{Dt} - \alpha \frac{DT}{Dt} = \frac{\beta_t}{\gamma} \frac{Dp}{Dt} - \frac{\alpha T}{c_p} \frac{Ds}{Dt}$$

que coincide con el interior de [2.122].

<sup>108</sup> El signo menos del interior del corchete indica que existe cierta compensación, pues en condiciones normales el aumento de la presión induce un aumento de la densidad, mientras que el incremento de la entropía supone, en general, una dilatación del fluido.

<sup>109</sup> El orden de magnitud del cambio local de la presión,  $\Delta p_0$ , está asociado a la variación de la cantidad de movimiento de la partícula fluida por unidad de área normal a  $l_0$ , que es  $\rho l_0 v_0/t_0$ .

<sup>110</sup> Se entiende aquí que  $v_0$  hace referencia a la magnitud de la fluctuación de la velocidad en la región  $l_0$  en la que se produce el cambio de signo de la velocidad debida a la oscilación (es decir, son las magnitudes  $v'$  y  $l'$  del tema 3.7). El número de Mach de [2.130] está definido entonces con dicha fluctuación, independientemente de que exista un flujo medio no nulo para el que haya definida una velocidad media, distinta a  $v'$ , que daría lugar a otro número de Mach para el que tendría que verificarse  $M^2 \ll 1$ , indistintamente.

<sup>111</sup> La última ecuación de [2.131] sólo se puede incumplir a escala terrestre para el aire atmosférico, si:





---

$$O\left(\frac{\rho g l_0}{\gamma p_0}\right) \gg 1$$

donde  $l_0$  es la distancia vertical y  $p_0$ , la presión atmosférica.

<sup>112</sup> Por ejemplo, en las turbinas hidráulicas, resulta más apropiado suponer que el dato es  $Y$  y la variable dependiente,  $Q$ .

<sup>113</sup> Es importante observar en la práctica si las bombas son, en realidad, geoméricamente semejantes, porque los constructores suelen colocar rotores de diferente tamaño en una misma carcasa. La semejanza tampoco es completa en bombas a escala porque, a causa de su diferente tamaño, la relación  $\nu/D$  es más pequeña en las bombas grandes que en las de menor tamaño.

<sup>114</sup> Esto es consecuencia del acoplamiento entre las ecuaciones de la energía, de continuidad y de la cantidad de movimiento: si parte de la energía comunicada se dedica a cambiar la densidad, la ecuación de continuidad afecta a la distribución de velocidades y éstas, a la cantidad de movimiento resultante.

<sup>115</sup> Las fuerzas másicas que derivan de un potencial podrían agruparse también con la presión y trabajar con presiones reducidas pero, como ahora se trata básicamente de gases, su efecto puede despreciarse.

<sup>116</sup> Desde una perspectiva general, pues también es posible experimentar con modelos mediante las técnicas de la analogía hidráulica, eléctrica, térmica, etc.

→ 3



## Flujos característicos y dinámica de fluidos

Hasta el momento, se han descrito el campo fluido, sus propiedades, y el conjunto completo de ecuaciones que rigen el movimiento y los procesos termodinámicos asociados. También se ha visto cómo, atendiendo a los criterios del capítulo anterior, es posible simplificar el tratamiento analizando la magnitud relativa de los diferentes términos que aparecen en dichas ecuaciones mediante, por ejemplo, los grupos adimensionales característicos.

El objetivo básico de la simplificación es conseguir un grupo de ecuaciones que tome forma en función de las condiciones del flujo y que, junto con algunas consideraciones de simetría y otras impuestas por el contorno, permita resolverlas analíticamente. Esta metodología es muy utilizada en mecánica de fluidos y permite hacer frente a la gran variedad de flujos que pueden presentarse en la realidad.<sup>117</sup> El dominio del orden de magnitud de las variables implicadas en un fenómeno es fundamental para un ingeniero que trate con fluidos y sus procesos.

Los flujos pueden clasificarse según si son rotacionales o irrotacionales, en función de si tienen algún tipo de simetría (por ejemplo, axial, plana, etc.), o si son básicamente unidireccionales. Evidentemente, el fluido también condiciona el flujo, de forma que éste puede ser viscoso o no, compresible o incompresible, o barotrópico. Existen decenas de variaciones posibles, las cuales, afortunadamente, y dado que algunos criterios no son independientes entre sí, a menudo conducen a un mismo tipo de solución.<sup>118</sup>

Se sabe que la compresibilidad del flujo es importante cuando la velocidad del fluido es elevada, pues entonces las variaciones de la presión son del orden de ella misma, y en movimientos no estacionarios bajo determinadas condiciones. En cambio, para que el movimiento de un fluido que parte del reposo deje de ser irrotacional, es necesario que se den las circunstancias que inducen la aparición de vorticidad, las cuales van asociadas al perfil de la distribución de la velocidad resultante, y no a su valor, y a la aparición de deformación en el seno fluido por la ocurrencia de fuerzas viscosas o de otro tipo.



### 3.1. Ecuaciones de Euler y Bernoulli

Se ha visto que en las ecuaciones de Navier-Stokes desaparecen los términos de conducción de calor y viscosos cuando el número de Reynolds es suficientemente elevado. Esta simplificación hace perder el carácter parabólico a estas ecuaciones (en las que las derivadas espaciales eran de mayor orden que las temporales) y conduce al grupo de ecuaciones denominado *de Euler*. Estas ecuaciones se simplifican aún más si las partículas conservan su entropía y el proceso es cuasiestacionario, o unidireccional, o ambas cosas.

El grupo de ecuaciones de Euler está formado por la combinación de [2.33], [2.36] y [2.117] y las ecuaciones de estado, o bien las dos primeras, las de estado, y cualquiera de las siguientes, todas ellas escalares, en las que no aparezcan los términos viscosos: energía mecánica, energía interna o entalpía, o entropía. Este grupo de ecuaciones forma un conjunto de cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

En resumen, si el campo de fuerzas másicas es conservativo y estático, las ecuaciones de Euler son: la ecuación de continuidad,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad [3.1]$$

la ecuación de la cantidad de movimiento,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla U = 0 \quad [3.2]$$

y cualquiera de las siguientes,

$$\begin{aligned} \rho T \frac{Ds}{Dt} &= q_a \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= q_a - \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \rho \frac{Dh}{Dt} &= q_a + \frac{Dp}{Dt} \end{aligned} \quad [3.3]$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) = q_a - \rho \nabla U \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (p\mathbf{v})$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( h + \frac{1}{2} v^2 \right) = q_a - \rho \nabla U \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

A estas ecuaciones, han de añadirse las de estado:  $\rho = \rho(p, T)$  y  $s = s(p, T)$ .

Si el fluido es incompresible, entonces la ecuación de continuidad se reduce a  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . La ecuación de Euler de la cantidad de movimiento [3.2] ya se introdujo en [2.39], pero ahora no es necesario que el fluido sea ideal por hipótesis, sino que se comporte como tal, para lo cual es suficiente que el número de Reynolds sea mayor a cualquiera de los números:  $St$ ,  $1$  y  $1/Fr$ . Esta ecuación puede sustituirse por la [2.40] en el campo gravitatorio para el que  $U = gz$ .

En general, no existe solución continua al sistema completo planteado por las ecuaciones anteriores en todo el campo fluido. Estas ecuaciones no son capaces de describir el movimiento real de un fluido viscoso en la región próxima al contorno sólido<sup>119</sup> y, por



tanto, no pueden explicar muchos fenómenos importantes de la mecánica de fluidos, como la fricción o la transferencia de calor. La estructura interna de las regiones del campo fluido donde las fuerzas viscosas no pueden despreciarse se describe en el capítulo 4. Basta con aceptar, de momento, que su espesor decrece al aumentar el número de Reynolds y que la presión en su interior apenas experimenta cambios en la dirección normal a la superficie del contorno. Por tanto, se puede interpretar que su espesor es nulo al analizar la corriente exterior, donde el fluido puede ser considerado ideal en una primera aproximación.

Es importante observar que las condiciones de flujo incompresible e irrotacional también conducen a la ecuación de Euler [3.2], aunque el fluido sea viscoso. La demostración es sencilla y parte, por ejemplo, de la ecuación de Navier-Stokes [1.85], en la que se sustituye la laplaciana de la velocidad por su forma en función de la divergencia y el rotacional [1.19]. El resultado es:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla p + \rho \nabla U = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mu(\nabla \wedge \boldsymbol{\Omega}) \quad [3.4]$$

No obstante, se sabe que la condición de irrotacionalidad del flujo viscoso incompresible no se mantiene en presencia de contornos que ocasionen gradientes de velocidad y vorticidad, aunque el número de Reynolds de la corriente principal no perturbada sea muy elevado.

Para que el término  $\nabla p/\rho$  de [3.2] se pueda escribir como el gradiente  $\nabla(p/\rho)$ , se ha de cumplir la condición  $\nabla \wedge (\nabla p/\rho) = 0$ , que también es  $-(1/\rho^2) \nabla \rho \wedge \nabla p = 0$ ; es decir, los gradientes de  $p$  y  $\rho$  han de ser paralelos en todo el campo fluido. Un flujo en el que se cumpla esto se denomina *barotrópico*, y se puede asegurar que existe una relación de barotropía entre la presión y la densidad cuando alguna variable de estado se mantiene constante. Por ejemplo, en los movimientos isentrópicos de entropía  $s_0$ , la ecuación de estado es  $\rho = \rho(p, s_0)$ , y  $\rho$  es una función única de  $p$ . La ecuación de cantidad de movimiento [3.2] para un fluido barotrópico implica que la aceleración de la partícula deriva de un potencial  $y$ , por tanto, se puede aplicar el teorema de Kelvin, según el cual la circulación de la velocidad se mantendrá constante.

Cuando el fluido ideal no es barotrópico, la ecuación de Euler [2.40] se escribe:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla U = 0 \quad [3.5]$$

que, de hecho, es otra forma de escribir [3.2]. Aunque el tratamiento de esta ecuación no es sencillo debido a la presencia del término rotacional, su carácter vectorial hace que sólo participe en algunas direcciones particulares y que pueda ser nulo en determinadas condiciones (entre ellas, las obvias:  $\mathbf{v} = 0$  o  $\boldsymbol{\Omega} = 0$ ). Por ejemplo, la contribución de la vorticidad es nula en cualquier dirección perpendicular al vector  $\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega}$ , lo que ocurre a lo largo de la línea de corriente, al ser ésta paralela al vector velocidad, y en el flujo de Beltrami, para el que  $\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega} = 0$ .

En un sistema de referencia relativo a un eje móvil cuyo origen carezca de aceleración y que gire a velocidad  $\boldsymbol{\omega}$  constante, esta ecuación es:

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla(U - (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})^2) = \mathbf{v} \wedge (\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}) \quad [3.6]$$



donde ahora  $\mathbf{v}$  es la velocidad relativa de la partícula de fluido situada en  $\mathbf{r}$  respecto del referencial móvil. Obsérvese que esta ecuación tiene la misma forma que [3.5] si se añaden las fuerzas másicas de inercia, de las cuales la centrífuga es conservativa pero la de Coriolis, no.

### 3.1.1. Ecuaciones de Euler en coordenadas intrínsecas

Cuando se escribe la ecuación [3.5] por componentes en un triedro de referencia de Frenet  $\{snb\}$  como el de la figura 1.4, que siga el movimiento de una línea de corriente tal que  $\mathbf{v} = v\mathbf{s}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} + \rho \frac{\partial U}{\partial s} &= 0 \\ \rho \frac{v^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial n} + \rho \frac{\partial U}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial b} + \rho \frac{\partial U}{\partial b} &= 0 \end{aligned} \quad [3.7]$$

La última ecuación indica que la presión reducida es constante en la dirección perpendicular al plano del movimiento (plano osculador).

Las otras dos ecuaciones, para un fluido barotrópico en el que esté definido el potencial de presiones [1.169], se convierten en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} + P + U \right) &= 0 \\ \frac{v^2}{r} + \frac{\partial}{\partial n} (P + U) &= 0 \end{aligned} \quad [3.8]$$

Estas ecuaciones, para un fluido incompresible en el campo gravitatorio y en movimiento estacionario, son:<sup>120</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) &= 0 \\ \frac{v^2}{r} + \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) &= 0 \end{aligned} \quad [3.9]$$

La ecuación en dirección  $\{s\}$  integrada a lo largo de una línea de corriente es la *ecuación de Bernoulli*:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C \quad [3.10]$$

Es decir, cuando el movimiento de un fluido incompresible en el campo gravitatorio es permanente y los efectos viscosos son despreciables, se puede afirmar que la suma de las energías cinética, de presión y potencial del fluido se mantiene constante a lo largo de una línea de corriente. La constante se determina siguiendo la línea de corriente aguas arriba o abajo, hasta llegar a una región donde las condiciones de contorno impongan su valor. Si, dado el caso, el movimiento parte de una región donde el estado es uniforme y se cumplen las condiciones de la fluidostática, o bien es irrotacional,<sup>121</sup> la



constante de integración de [3.10] es la misma para todo el campo fluido y para todas las líneas de corriente, según [2.41].

La ecuación de Bernoulli no puede aplicarse a gases o a fluidos compresibles, pues la densidad varía con la presión y con otra variable de estado, por ejemplo  $\rho = \rho(p, s)$ , y no puede resolverse la integral de  $dp/\rho$  de [3.8]. Afortunadamente, si el movimiento es homentrópico se verifica que el fluido es barotrópico y que  $dh = dp/\rho$ , y la ecuación de Euler-Bernoulli puede escribirse a la forma:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} + h + U \right) = 0 \quad [3.11]$$

Esta ecuación indica que, en los procesos estacionarios que involucren gases, la entalpía de remanso es constante a lo largo de una línea de corriente (porque los gases son muy ligeros y  $\partial U/\partial s \approx 0$ ). Se comprueba que esta ecuación también es válida en líquidos a entropía constante porque, al ser  $du = 0 = Tds - pdv$ , se cumple que  $dh = dp/\rho$ .<sup>122</sup>

La segunda ecuación de [3.9] muestra que la suma  $\{p + \rho gz\}$  es constante en la dirección normal a la línea de corriente cuando éstas son rectas ( $r = \infty$ ). Si las líneas de corriente son curvas y se conoce la distribución de la velocidad en dirección normal, con  $-\mathbf{r} = \mathbf{n}$ , dicha ecuación puede ser integrada para conocer la distribución de la presión. Como  $v^2/r > 0$ , se deduce que la presión reducida aumenta con el radio de curvatura de la corriente.

Asimismo, cabe preguntarse por la evolución de las otras magnitudes al cambiar de línea de corriente. Para ello, téngase presente la ecuación de Gibbs en función de la entalpía de remanso:

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} = dh_0 - \left( vdv + \frac{dp}{\rho} \right) \quad [3.12]$$

A lo largo de la línea de corriente, la entropía es constante si el movimiento es isentrópico y permanente. Si, además, se pueden despreciar las fuerzas másicas, entonces también lo es la entalpía de remanso, y la ecuación anterior es una identidad nula en  $\{s\}$ , al serlo todos sus términos.<sup>123</sup>

En dirección normal a la línea de corriente  $\{n\}$ , utilizando [3.7] se cumple:

$$T \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial h_0}{\partial n} - \left( v \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right) = \frac{\partial h_0}{\partial n} - \left( v \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{v^2}{r} \right) \quad [3.13]$$

Como el rotacional de la velocidad en coordenadas naturales para movimientos no anómalos y sin vorticidad en dirección de la línea de corriente es  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_b \mathbf{b}$ , siendo  $\Omega_b$ :

$$\Omega_b = \frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad [3.14]$$

se verifica:

$$-v\Omega_b = T \frac{\partial s}{\partial r} - \frac{\partial h_0}{\partial r} \quad [3.15]$$

que muestra cómo varía la entropía en dirección radial a la línea de corriente y qué relación mantiene con la vorticidad del movimiento y los cambios de la entalpía de



remanso. Se concluye que un movimiento homentrópico permanente ha de ser irrotacional si la entalpía de remanso es uniforme y que, si es rotacional y permanente, han de existir gradientes de entropía y de entalpía de remanso en el campo fluido. Éste es el enunciado básico del *teorema de Crocco*.<sup>124</sup>

La ecuación [3.10] también tiene una interpretación topológica, que merece comentarse brevemente en este texto. La familia de superficies en las que se mantiene la constante  $C$  de la ecuación de Bernoulli (aunque distinta en cada una de ellas) consiste en líneas de corriente y de remolino para las que se verifica la condición:

$$\frac{\partial C}{\partial q} = v\Omega \sin \beta \quad [3.16]$$

donde  $\partial C/\partial q$  denota el cambio de  $C$  con respecto a la dirección normal a la superficie, en general definida por un versor  $\mathbf{q}$ , y  $\beta$  es el ángulo formado entre los vectores velocidad y vorticidad.<sup>125</sup> Es evidente que la constante es la misma en todo el campo fluido si las líneas de corriente y remolino son paralelas (flujo de Beltrami) o si el movimiento es irrotacional. Utilizando ahora la definición intrínseca de la vorticidad [1.35] y resolviendo el producto vectorial [3.16], se llega a la expresión:

$$\frac{\partial C}{\partial q} = v \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial b} \right)^2 + \left( \frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial n} \right)^2 \right]^{1/2} = v(\Omega_n^2 + \Omega_b^2)^{1/2} \quad [3.17]$$

Como, por definición,  $\mathbf{q}$  es constante entre dos superficies de flujo paralelas (no necesariamente planas), se deduce que la condición necesaria y suficiente para que las superficies de corriente sean paralelas es que  $\partial C/\partial q$  también sea constante a lo largo de cada superficie de la familia. En movimientos no anómalos, es decir, cuando  $\Omega_n=0$ , el vector  $\mathbf{n}$  es normal a la superficie; entonces,  $\mathbf{n} = \mathbf{q} = -\mathbf{r}$  (v. figura 1.7), y:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = -v\Omega_b \quad [3.18]$$

en dirección radial, que será constante, y las superficies de flujo, paralelas, si se cumplen las condiciones de [3.15] y no hay difusión de vorticidad.

### 3.1.2. Energía mecánica y potencia de un flujo

La primera de las ecuaciones [3.9] permite definir la energía mecánica por unidad de masa de un fluido incompresible como:

$$e_m = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \quad [3.19]$$

El flujo en el interior de un tubo de corriente de sección ortogonal,  $S$ , está formado por infinidad de líneas de corriente en las que el fluido tiene, o puede tener, una energía mecánica distinta en dirección transversal. Se ha visto que la energía mecánica es constante en  $S$ , si el movimiento es irrotacional, pero, si el flujo es rotacional o no uniforme, entonces la constante de [3.10] cambia entre líneas de corriente.

Se define como potencia de la corriente la integral:





$$\dot{W} = \int_S e_m \rho \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS \quad [3.20]$$

En el caso más general, la integración de la ecuación anterior es complicada aun cuando sea conocida la distribución de la presión y de la velocidad en  $S$ . Por ello, es preferible definir la energía específica en función de la velocidad y de la presión medias, e introducir sendos coeficientes correctores,  $\alpha$  y  $\alpha_p$ , de la energía cinética y de la presión reducida, respectivamente, de la forma:

$$\bar{e}_m = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2} + \alpha_p \left( \frac{\bar{p}}{\rho} + g\bar{z} \right) = \frac{\dot{W}}{\rho Q} \quad [3.21]$$

Estos coeficientes suponen una formulación aproximada del problema y son desconocidos a priori, pero tienen la ventaja de que pueden ser tabulados para diferentes distribuciones presupuestas de velocidad y presión.

El coeficiente  $\alpha_p$  es muy cercano a la unidad en movimientos que tienen una dirección predominante y son cuasiunidireccionales (v. 3.4.1). En estos casos, es frecuente sustituir el movimiento general por el uniforme equivalente, descrito en términos de la velocidad media en  $S$ , y suponer que:

$$\bar{e}_m = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \quad [3.22]$$

El valor de  $\alpha$  es siempre mayor que la unidad y aumenta al hacerlo la no uniformidad de la velocidad en el movimiento unidireccional: es 1,06 en régimen turbulento y 2 en flujo laminar.<sup>126</sup>

En caso de que el movimiento no sea permanente, la ecuación [3.8] para un fluido incompresible indica que en la línea de corriente se ha de verificar:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial e_m}{\partial s} = 0 \quad [3.23]$$

Esa ecuación, integrada entre dos secciones que definan el volumen de control,  $V$ , indica:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v^2 dV + \rho Q (\bar{e}_{m,2} - \bar{e}_{m,1}) = 0 \quad [3.24]$$

es decir, la aceleración del movimiento implica que la potencia y la energía específica cambian entre secciones sucesivas en la cantidad necesaria para que el fluido contenido entre ellas pueda acelerarse.

### 3.1.3. Difusión de la energía cinética

Un difusor es un ensanchamiento gradual por aumento del área recta de un conducto cuya misión es recuperar la energía de presión de un flujo a base de reducir su energía cinética. En un difusor horizontal sin pérdidas, la ecuación de Bernoulli enseña que la suma:

$$p_0 = p + \rho \frac{v^2}{2} \quad [3.25]$$

denominada *presión de remanso, parada o estancamiento*,  $p_0$ , se mantiene constante. Ello quiere decir que los cambios de presión (reducida) y de velocidad están relacionados energéticamente entre sí, lo que da lugar a numerosos fenómenos en mecánica de fluidos (efectos de Venturi, de Magnus; fenómenos de adherencia a una pared, etc.), que pueden ser aprovechados técnicamente o evitarse, según convenga.

El parámetro básico de un difusor es el *coeficiente de recuperación*, definido como:

$$c_R = \frac{p_2 - p_1}{p_{01} - p_1} = \frac{2}{\rho} \frac{p_2 - p_1}{v_1^2} \quad [3.26]$$

donde (1) y (2) son los puntos de entrada y de salida del difusor, donde las secciones son  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente, con  $A_2 > A_1$ . En caso de flujo ideal cuasiunidireccional y sin fricción, se verifica:

$$c_{R,i} = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad [3.27]$$

Cuando la relación entre paréntesis tiende a cero, entonces  $c_{R,i}$  se hace la unidad y toda la energía cinética a la entrada es recuperable (es decir, la velocidad a la salida resulta nula). En realidad, el valor efectivo del coeficiente de recuperación de un difusor,  $c_R$ , es inferior al dado por [3.27], debido a las pérdidas de energía que se producen, y su relación es una medida de su eficiencia.

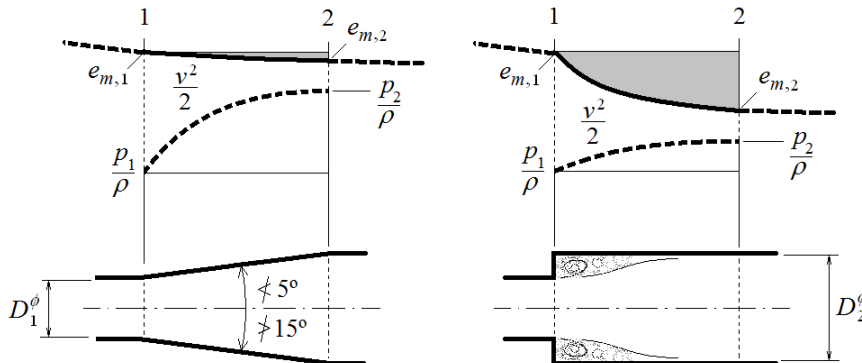
El rendimiento de un difusor se define como la relación entre la energía estática recuperada y la que podría haberse recuperado en condiciones ideales (sin pérdidas de energía mecánica), que coincide con el decremento de energía cinética experimentado,  $-\Delta v^2/2$ , es decir:<sup>127</sup>

$$\eta_{dif} = \frac{2}{\rho} \frac{p_2 - p_1}{v_1^2 - v_2^2} = 1 - 2 \frac{e_{m,1} - e_{m,2}}{v_1^2 - v_2^2} \quad [3.28]$$

Evidentemente, se verifica que  $\eta_{dif} = c_R/c_{R,i}$ .

El decremento de energía cinética media está relacionado con la relación de áreas del difusor y el caudal,  $Q$ , al cumplirse por continuidad que  $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$  en un fluido incompresible. Las pérdidas de energía mecánica son proporcionales a la energía cinética de entrada y pueden estimarse utilizando un coeficiente de pérdidas singulares.

Figura 3.1. Principio de difusión de la energía cinética en un fluido incompresible. A la izquierda, un difusor cónico "eficiente" y, a la derecha, uno que no lo es (en gris, la magnitud de las pérdidas de energía mecánica,  $e_m$ ). El ángulo de difusión ha de estar en el intervalo  $5^\circ < 2\alpha < 15^\circ$ . Por debajo de  $5^\circ$ , las pérdidas continuas por fricción aumentan y, por encima de  $15^\circ$ , se produce la separación del flujo y una escasa recuperación de presión. Para un difusor cónico de longitud  $L$ , las relaciones óptimas se encuentran para  $c_R \approx 0,75$  y  $L/D_1 \approx 20$ .





### 3.2. Flujo irrotacional o potencial

Se dice que un movimiento es irrotacional en una región del campo fluido cuando  $\nabla \wedge \mathbf{v} = 0$  en todos los puntos de dicha región. El teorema de Stokes [1.43] asegura que esta condición se cumple siempre que la circulación de la velocidad en torno a cualquier línea cerrada sea nula, y el de Kelvin [1.46] impone las condiciones necesarias para que lo siga siendo. Dicho esto, los movimientos de fluidos ideales descritos por las ecuaciones de Euler cumplen la condición de irrotacionalidad siempre que sean y se mantengan isentrópicos.<sup>128</sup>

#### 3.2.1. Dominios de irrotacionalidad

El teorema de Stokes no garantiza que la circulación sea nula en cualquier movimiento irrotacional, si la región donde se produce el movimiento es de conexión múltiple. Por ejemplo, el núcleo de un vórtice libre queda excluido del movimiento irrotacional y puede estar formado por una singularidad, un sólido o el mismo fluido en rotación, u otro fluido que no participe de la rotación, como es el caso de un torbellino de agua que gire en presencia de aire.

Un dominio es simplemente conexo cuando todas las líneas y cualquier superficie son reducibles unas a otras, por deformación continua, a un punto sin salir del dominio. Esto quiere decir que la región tridimensional ilimitada que rodea un cuerpo es simplemente conexa en ausencia de singularidades. En cambio, cuando se analiza el flujo bidimensional alrededor de cuerpos de sección plana finita, tengan éstos o no movimiento, se revela que no son posibles superficies que se cierren sobre sí mismas en torno al cuerpo (es imposible formar una cúpula tridimensional). Es decir, una curva cerrada que envuelva la sección del cuerpo no puede reducirse a un punto, ni puede ser la base de una superficie continua en la región bidimensional. Esta situación analítica genera una región doblemente conexa, en la que se pueden trazar curvas cerradas reducibles (las que no abrazan la sección plana del cuerpo) y no reducibles (las que sí lo hacen), que, combinadas, constituyen el fundamento de la teoría de la sustentación, tal como se verá en este tema.

Si el dominio de irrotacionalidad es simplemente conexo, entonces la circulación entre dos puntos cualesquiera es independiente del camino de integración y se verifica que la velocidad deriva de un potencial unívoco tal que:<sup>129</sup>

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0) + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} dl \quad [3.29]$$

es decir:

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \nabla \wedge \nabla \varphi = 0 \quad [3.30]$$

En un dominio simplemente conexo, el potencial  $\varphi$  se puede definir sin ambigüedad, pues depende sólo de la posición y de una función del tiempo  $\varphi(\mathbf{x}_0)$  que no afecta a  $\mathbf{v}$  al actuar como parámetro. En este caso, existe un solo campo de velocidad que satisfaga [3.30] y las condiciones de contorno. Se demuestra que el movimiento irrotacional de un fluido incompresible en una región cerrada simplemente conexa tiene menos energía cinética que otro movimiento cualquiera que tenga la misma velocidad normal en la superficie del contorno.



El potencial de velocidad es multiforme si el dominio de irrotacionalidad es múltiplemente conexo. En este caso, no se cumple que cualquier par de caminos entre dos puntos determine una curva cerrada reducible a un punto y puede ser que la circulación en ella no se anule. En un dominio doblemente conexo como el de la figura 3.2, existen caminos conciliables,  $a$  y  $b$ , para los que:

$$\int_a \mathbf{v} \cdot s dl_a = \int_b \mathbf{v} \cdot s dl_b \quad [3.31]$$

y otros no conciliables con los anteriores,  $c$  y  $d$ , para los que se verifica una igualdad distinta a la anterior. La diferencia entre las integrales de ambas familias recibe el nombre de *constante cíclica*,  $\Gamma_0$ , y se demuestra que es igual a la circulación a lo largo de una curva cerrada que envuelva la región excluida:

$$\Gamma_0 = \oint_L \mathbf{v} \cdot s dl = \int_{x_0}^x \mathbf{v} \cdot s dl_a + \int_x^{x_0} \mathbf{v} \cdot s dl_c = \int_a \mathbf{v} \cdot s dl_a - \int_c \mathbf{v} \cdot s dl_c \quad [3.32]$$

es decir, todas las curvas que envuelven la región excluida una sola vez proporcionan una circulación de valor  $\Gamma_0$ , lo que significa que el potencial  $\varphi$  no es univaluado, sino que está definido a menos de múltiplos enteros de  $\Gamma_0$ . La diferencia entre los posibles valores del potencial en un mismo punto es una integral múltiple de  $\Gamma_0$ , es decir,  $n\Gamma_0$ , donde  $n$  es el número de vueltas que da la curva alrededor de la región excluida al realizar la operación [3.29]. Esta circunstancia no afecta la velocidad, pues ésta es única en cada punto e instante (y  $\nabla\varphi$  es univaluado).

Un movimiento irrotacional de una región doblemente conexa se denomina *cíclico* cuando  $\Gamma_0$  es diferente de cero, y *acíclico* en caso contrario.<sup>130</sup> La introducción de una barrera virtual en el dominio doblemente conexo lo convierte en simplemente conexo y hace que el potencial sea de nuevo unívoco, siempre que el camino de integración de [3.29] no la cruce (el potencial es entonces discontinuo a través de la barrera en un valor múltiplo de la constante cíclica,  $\Gamma_0$ ). El grado de conectividad de un dominio múltiplemente conexo se define como  $g = b + 1$ , donde  $b$  es el número de barreras necesarias para transformarlo en simplemente conexo.

El ejemplo más sencillo de movimiento potencial cíclico es el vórtice libre referido anteriormente, para el que el potencial de velocidades es:

$$\varphi = k\theta \quad [3.33]$$

Este potencial se incrementa en  $2\pi k$  cada vez que la circulación da una vuelta en sentido antihorario alrededor del origen. La velocidad definida por este potencial en coordenadas cilíndricas es:<sup>131</sup>

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{k}{r} \end{aligned} \quad [3.34]$$

por lo que  $v_\theta$  es constante para cada radio. Evidentemente, la circulación es la misma para cualquier circunferencia centrada en  $r = 0$  o que encierre dicho punto una vez:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot s dl = 2\pi r v_\theta = 2\pi k \quad [3.35]$$

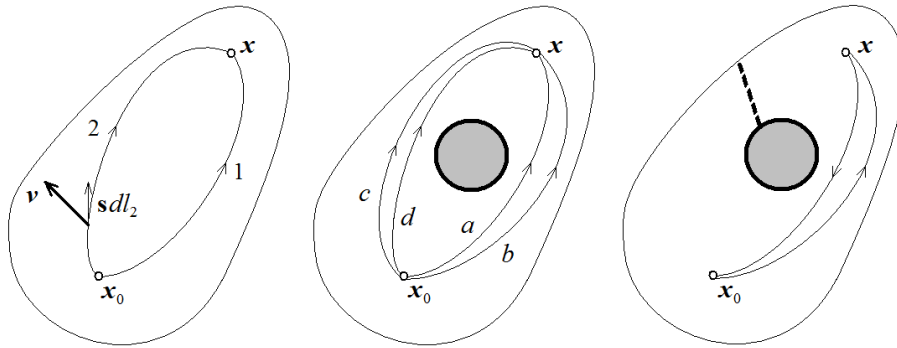


Figura 3.2. Dominios irrotacionales. A la izquierda, un dominio simplemente conexo en el que la circulación entre dos puntos es independiente del camino de integración. A la derecha, sendos dominios doblemente conexos que muestran familias de curvas conciliables (*a* y *b*) y no conciliables con las anteriores (*c* y *d*).

### 3.2.2. Características del movimiento irrotacional

Del desarrollo anterior, queda claro que una de las ventajas más importantes de los movimientos irrotacionales es que son también potenciales. En estos movimientos, el campo de velocidades queda definido simplemente especificando el valor del potencial en cada punto, lo que comporta, a su vez, que las ecuaciones del movimiento adopten una forma mucho más simple. Se recuerda que, para que exista el potencial de aceleraciones, es preciso que las fuerzas viscosas sean despreciables y que las máscas y las de presión deriven de un potencial. Este último caso se da cuando el movimiento es barotrópico, lo que ocurre en el movimiento de fluidos incompresibles y, en gases, cuando es homentrópico.

Las ecuaciones de continuidad para un fluido incompresible y un gas calóricamente perfecto en movimiento homentrópico son, respectivamente:<sup>132</sup>

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \Delta \varphi = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \Delta \varphi = -\frac{1}{(\gamma-1)} \frac{1}{h} \frac{Dh}{Dt} \end{aligned} \quad [3.36]$$

y las de cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + U &= C(t) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + h + U &= C(t) \end{aligned} \quad [3.37]$$

Obsérvese que la ecuación de continuidad en los gases no verifica la ecuación de Laplace,  $\Delta \varphi = 0$ , al aparecer derivadas temporales de  $\varphi$ .

Las ecuaciones [3.37] son las ecuaciones de Euler-Bernoulli generalizadas. La constante  $C(t)$  aún puede depender del tiempo, pero ahora es la misma para todo el campo fluido, por lo que aumenta la importancia de la ecuación de Bernoulli en el estudio del flujo potencial incompresible.

Este sistema de ecuaciones debe completarse con las condiciones de contorno y valor inicial, que básicamente coinciden con las de los fluidos ideales, más las restricciones que hagan posible este movimiento. Si se trata del movimiento irrotacional de líquidos,



al no haber en la ecuación [3.36] derivadas temporales, no pueden imponerse ni el campo inicial del potencial de velocidades ni el de la presión, y tampoco es necesaria la uniformidad de la entropía para que el movimiento sea irrotacional. No obstante, si el fluido no está limitado por un sólido o por una superficie libre, la corriente en el infinito ha de ser irrotacional y, en el caso de los gases, también homentrópica. El fluido limitado interna o externamente por un sólido u otro fluido tendrá, en los puntos de contacto, su misma velocidad normal, y, si éste está en reposo, velocidad normal nula.<sup>133</sup>

En un fluido incompresible, se demuestra que el campo de velocidades irrotacional queda completamente determinado especificando sólo la componente normal de la velocidad en el contorno, y esta condición es equivalente a asignar  $\varphi$  en todo el campo fluido. Esto es así porque la ecuación de Laplace establece que la solución sobre  $v$  está determinada si se conoce  $\varphi$  sobre toda una superficie cerrada. Como se cumple que  $\nabla(\varphi v) = \varphi \nabla \cdot v + v \nabla \varphi = v \cdot v = v^2$  en un fluido incompresible en flujo irrotacional, si  $\varphi v$  es una función unívoca de la posición, entonces:

$$\int_V v^2 dV = \int_V \nabla(\varphi v) dV = \int_S \varphi(v \cdot n) dS \quad [3.38]$$

y resulta que, si  $v \cdot n$  es cero en todos los puntos de la frontera del dominio irrotacional simplemente conexo,  $S$ , entonces  $v$  ha de serlo también en su interior. Es decir, no se puede dar un movimiento irrotacional de un fluido incompresible contenido en una región simplemente conexa limitada por contornos impermeables, salvo que al menos parte del contorno se mueva con una componente normal no nula. Por otro lado, si el contorno está en movimiento y se detiene, el movimiento del fluido cesará instantáneamente.<sup>134</sup>

Como consecuencia de lo anterior, si el fluido ocupa una extensión amplia en el espacio tridimensional en comparación con la región en la que se encuentra un sólido en movimiento, de modo que se pueda suponer que está en reposo en el infinito y que también lo estaría en su totalidad si el sólido no se moviera, entonces el campo de movimiento está determinado sólo por la velocidad normal instantánea del cuerpo y su geometría, y no son relevantes ni su aceleración ni el movimiento pasado. Si la extensión infinita es bidimensional y, por tanto, el recinto es doblemente conexo, se puede demostrar entonces que es suficiente añadir al problema la constante cíclica para que el movimiento irrotacional quede determinado en todos los puntos.<sup>135</sup>

Una característica esencial del tipo de movimiento irrotacional que se establece en un fluido incompresible, ilimitado y en reposo en el infinito, por la presencia de un cuerpo de extensión limitada y en movimiento en su seno, es que el campo de velocidad inducido tiende a cero, al menos en un orden tan rápido como la inversa del cuadrado de la distancia al objeto. El campo irrotacional puede generarse por el cambio de volumen del objeto (por ejemplo, en la implosión de una burbuja), por el desplazamiento del objeto (como en el caso del movimiento de una pelota) o por la combinación de ambos. En el primer caso, el cambio de volumen se admite representado por una fuente o un colador puntual en la ubicación del objeto, y conlleva una disminución de la velocidad con la distancia del orden de  $r^{-2}$ . En el segundo caso, el movimiento puede representarse por un dipolo y la velocidad disminuye como  $r^{-3}$ .

Puesto que la velocidad del fluido viene determinada sólo por la velocidad normal instantánea del cuerpo, resulta que su energía cinética es una expresión cuadrática de las componentes de la velocidad de éste. Por otro lado, la variación de su cantidad de



movimiento también está asociada a los cambios de movimiento en el objeto, de tal modo que, cuando el objeto experimenta una aceleración, se induce la misma aceleración en el fluido incompresible desplazado. Este efecto, de naturaleza puramente inercial, conduce a un resultado muy interesante: los objetos acelerados en el seno de un fluido irrotacional de extensión ilimitada lo hacen con una masa efectiva mayor que la real, y la masa inducida por el fluido colindante en movimiento es una función de la densidad del fluido, y del volumen y la forma del objeto.<sup>136</sup>

En el caso de formas esféricas, se deduce que la masa inducida es la mitad de la masa desplazada cuando el impulso está alineado con la dirección del movimiento. Este efecto es despreciable cuando un sólido se desplaza en el aire, pero no lo es cuando, por ejemplo, una burbuja de gas asciende en un líquido. Sin este efecto, la aceleración ascendente de la burbuja sería del orden de  $g(\rho_L - \rho_G)/\rho_G \approx 10^3 g$ . En cambio, la observación está de acuerdo con una aceleración del orden de  $g(\rho_L - \rho_G)/(\rho_G + \rho_L/2) \approx 2g$ .

Siempre que el fluido sea incompresible, está definido un campo vectorial  $\mathbf{w}$ , tal que  $\mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{w}$ , con un potencial vectorial asociado análogo a  $\varphi$ . El interés práctico de este campo vectorial es limitado, salvo en el caso bidimensional, en el que, por ser una de las tres coordenadas espaciales ignorable, su única componente no nula es la normal al plano del movimiento,  $w_z$ . Se define entonces la función de corriente,  $\psi$ , que cumple:<sup>137</sup>

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad [3.39]$$

en movimiento plano. Si, además, el movimiento es irrotacional, entonces, en virtud de la definición de  $\varphi$  y  $\psi$ , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad [3.40]$$

por lo que ambos potenciales cumplen la condición de Cauchy-Riemann para las componentes de una función analítica de la variable compleja,  $z = x + yj$ , que sirve para introducir el potencial complejo del movimiento como:

$$F(z) = \varphi + \psi j \quad [3.41]$$

y una velocidad compleja del tipo:

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{\partial F(z)}{\partial x} = v_x - v_y j \quad [3.42]$$

como puede deducirse fácilmente con las ecuaciones anteriores.

Es posible definir la función de corriente para cualquier movimiento bidimensional, sea o no viscoso o irrotacional; basta que se cumpla que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . En cambio, el potencial  $\varphi$  sólo se puede definir en el caso irrotacional, y, por tanto, ha de ser invíscido, barotrópico y de fuerzas másicas conservativas, aunque no está limitado al caso bidimensional.



Tabla 3.1. Ejemplos de flujos potenciales, incompresibles y bidimensionales. El interés práctico de estas soluciones es evidente, aunque la importancia de la formulación de los problemas mediante la ecuación de Laplace bidimensional cada día es menos importante por el desarrollo creciente de algoritmos de cálculo por ordenador que permiten la resolución tridimensional.

Definiciones	Campos descritos
<p>Flujo uniforme que forma un ángulo <math>\alpha</math> con el eje <math>\{x\}</math></p> $\mathbf{v}_\infty = v_\infty \mathbf{s}$ $\varphi = v_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ $\psi = v_\infty (y \cos \alpha - x \sin \alpha)$ $F(z) = v_\infty e^{j\alpha} z$	
<p>Fuente (<math>q+</math>) y colador (<math>q-</math>) puntuiformes en <math>\mathbf{r}_0</math></p> $\mathbf{v} = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 } \mathbf{r}$ $\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln( \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 )$ $\psi = \frac{q}{2\pi} \theta$ $F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z)$	
<p>Vórtice libre con centro en <math>\mathbf{r}_0</math> e intensidad <math>\Gamma</math></p> $\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 } \boldsymbol{\theta}$ $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ $\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln( \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 )$ $F(z) = -j \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z)$	
<p>Dipolo de momento <math>p</math> con fuente y colador simétricos a <math>\mathbf{r}_0</math></p> $v_r = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{( \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 )^2} \cos \theta$ $v_\theta = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{( \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 )^2} \sin \theta$ $\varphi = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 } \cos \theta$ $\psi = -\frac{p}{2\pi} \frac{1}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 } \sin \theta$ $F(z) = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z}$	





La utilidad de la función de corriente se desprende de dos de sus propiedades: por un lado, las líneas de  $\psi$  constante son líneas de corriente y, por tanto, ortogonales a las líneas equipotenciales de  $\phi$  en movimiento irrotacional; por otro lado, la diferencia de  $\psi$  entre dos líneas de corriente representa el caudal volumétrico por unidad de ancho que atraviesa el tubo de corriente comprendido entre ellas. El uso del potencial complejo permite simplificar la descripción del movimiento incompresible bidimensional y determinar el campo de velocidad mediante transformaciones conformes.<sup>138</sup>

Es importante destacar que los flujos ideales de la tabla 3.1 en ocasiones contravienen la experiencia y son, por tanto, irreales. Por ejemplo, si bien el flujo radial que se deduce de un colador puede observarse en el desagüe de una capa delgada de agua de un depósito de grandes dimensiones a través de un orificio central, el caso contrario no es realizable, salvo en casos forzados, para números de Reynolds extremadamente bajos y con fuerzas másicas despreciables. Es decir, el fluido que sale libremente por dicho orificio no muestra ninguna tendencia a seguir las líneas de corriente radiales de una fuente. Ambos flujos potenciales difieren sólo por el signo de una constante, pero uno es posible y el otro no. La diferencia está en la persistencia del flujo potencial ante la presencia del contorno: en el primer caso, la capa límite no se desprende porque el movimiento es acelerado; en el segundo, se experimenta un fenómeno de separación en el orificio que genera un sembrado de remolinos turbulentos que sólo pueden ensanchar el chorro emergente progresivamente y en una delgada capa de mezcla.

Tanto  $\phi$  como  $\psi$  siguen la ecuación de Laplace en un movimiento potencial, incompresible y bidimensional.<sup>139</sup> Como esta ecuación es lineal y homogénea, cabe aplicar el principio de superposición a sus soluciones, de forma que, en general, se verifica que si, por ejemplo,  $\phi_a$  y  $\phi_b$  son soluciones de la ecuación de Laplace, entonces:

$$\begin{aligned}\phi &= a\phi_a + b\phi_b \\ \mathbf{v} &= a\mathbf{v}_a + b\mathbf{v}_b\end{aligned}\quad [3.43]$$

también es solución, donde  $a$  y  $b$  son dos constantes que pueden depender del tiempo.

### 3.2.3. Movimiento bidimensional en torno a un cilindro

Un ejercicio interesante resulta de aplicar el principio de superposición al movimiento permanente bidimensional del fluido en torno a un cilindro en rotación. Como puede verse en la figura 3.3, el movimiento resulta de la superposición de un flujo uniforme a velocidad  $v_\infty$ , perturbado por la presencia del cilindro de radio  $R$ , al que se asocia un dipolo y un vórtice lineal, cuya circulación  $\Gamma$  es generada por la propia rotación del cilindro. Se avanza que la solución de este flujo no es capaz de representar el movimiento real del fluido en torno a un obstáculo porque conjetura, entre otras cosas, que no hay resistencia al avance.<sup>140</sup> En cambio, acierta al predecir la existencia de una fuerza normal al movimiento uniforme incidente, lo que constituyó el origen de la teoría de la sustentación de los cuerpos y motivó el desarrollo de perfiles aerodinámicos.

El potencial de velocidad que resulta del flujo bidimensional descrito en torno a un cilindro en rotación es el siguiente:<sup>141</sup>



$$\varphi = v_{\infty} r \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad [3.44]$$

y su función de corriente:

$$\psi = v_{\infty} r \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left( \frac{r}{R} \right) \quad [3.45]$$

El ángulo  $\theta$  se mide desde el punto “i” de la figura 3.3, y es positivo en sentido levógiro, que también es el sentido positivo de la circulación.

Las componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas también se obtienen por superposición, y resultan ser:

$$\begin{aligned} v_r &= v_{\infty} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_{\theta} &= -v_{\infty} \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \end{aligned} \quad [3.46]$$

de donde se deduce que hay dos puntos de estancamiento sobre el cilindro ( $v_{\theta}=0$ ,  $r=R$ ) que se encuentran en:

$$\sin \theta_0 = \frac{\Gamma}{4\pi R v_{\infty}} \quad [3.47]$$

Si el cilindro no gira,  $\Gamma=0$ , los puntos de estancamiento (de hecho, líneas) se encuentran en  $\theta=0$  y  $\theta=\pi$ . Estos puntos se van acercando entre sí a medida que el valor absoluto de la circulación aumenta. Cuando  $|\Gamma|=4\pi R|v_{\infty}|$ , las líneas de estancamiento se encuentran en  $\theta=\pi/2$  o  $\theta=-\pi/2$ , según si  $\Gamma$  y  $v_{\infty}$  tienen el mismo signo o no lo tienen. Si  $|\Gamma|>4\pi R|v_{\infty}|$ , no hay puntos de estancamiento sobre el cilindro, pero sí un único punto de estancamiento en el flujo, situado sobre la semirrecta  $\theta=\pi/2$  o la  $\theta=-\pi/2$ .

La distribución de la presión sobre la superficie del cilindro se puede calcular utilizando la ecuación de Bernoulli entre un punto de la corriente no perturbada, en el que las condiciones de presión y velocidad son  $p_{\infty}$  y  $\mathbf{v}_{\infty} = v_{\infty}\mathbf{s}$ , y otro cualquiera de la superficie del cilindro, para el que las componentes de la velocidad resultan de [3.46] para  $r=R$ . El resultado es:

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 \left[ 1 - \left( \frac{\Gamma}{2\pi R v_{\infty}} - 2 \sin \theta \right)^2 \right] \quad [3.48]$$

La distribución de la presión sobre el cilindro de la figura 3.3 se ha representado mediante una línea continua. Obsérvese que la presión es máxima en las líneas  $\psi=0$  sobre los puntos de estancamiento (en este caso,  $\sin \theta_0 = -1/2$ ). El círculo concéntrico exterior (a trazos) representa la solución cuando la circulación es nula y la distribución de la presión sobre el cilindro no es perturbada por su rotación.

De la ecuación [3.48] es fácil deducir, con [1.190], que la fuerza resultante sobre el cilindro por unidad de ancho es:

$$\mathbf{F}_{fc} = \int_0^{2\pi} p \mathbf{n} R d\theta = \mathbf{i} \int_0^{2\pi} p \cos \theta R d\theta + \mathbf{j} \int_0^{2\pi} p \sin \theta R d\theta = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad [3.49]$$



Obsérvese que, según  $\{x\}$ , la componente es nula y, según  $\{y\}$ , el resultado se puede escribir de la forma:

$$F_y = -\rho v_\infty \Gamma \quad [3.50]$$

que es la denominada *fuerza de Magnus*.<sup>142</sup> Este resultado fue demostrado por Kutta y Joukowski para cualquier tipo de cuerpo aislado, aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

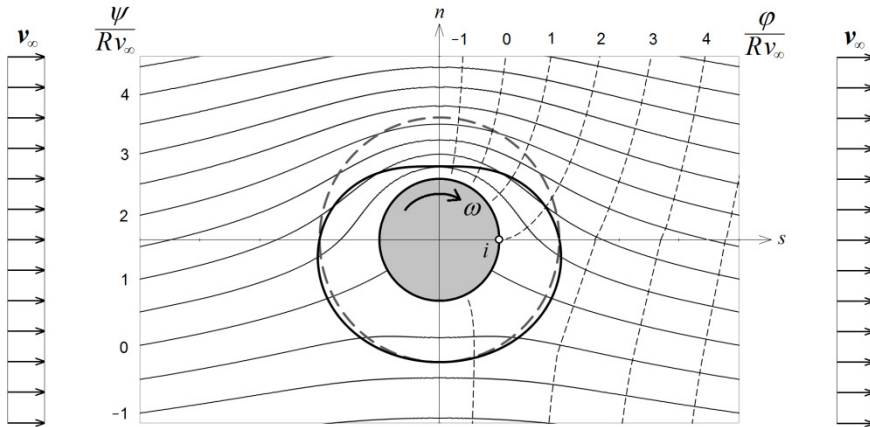


Figura 3.3. Flujo bidimensional incompresible alrededor de un cilindro en rotación (círculo interior, en gris). Se ha utilizado una circulación ( $\Gamma = -2\pi Rv_\infty = -\pi/2$ ) negativa, de modo que refuerza la velocidad incidente en la parte superior del cilindro (donde la presión es menor). Cuando se omite la rotación del análisis, se obtiene una solución simétrica respecto al eje  $\{s\}$  y desaparece la sustentación. En cambio, la simetría en torno a  $\{n\}$  se mantiene, por lo que la distribución de presiones supone un arrastre nulo en cualquier caso.

### 3.2.4. Generación de sustentación en un perfil alar

El resultado final del apartado anterior suscita cierta controversia: la teoría potencial presentada estima una fuerza de sustentación acorde con la experiencia, pero, en cambio, fracasa al predecir un arrastre nulo. De acuerdo con los teoremas de la circulación, si el objeto y el fluido parten del reposo en un flujo potencial, la circulación total debería ser nula y no habría sustentación una vez iniciado el movimiento, ni siquiera en entornos múltiplemente conexos. Por tanto, falta explicar cuál el origen de la circulación en objetos que no giran y cómo se puede actuar sobre su magnitud y sentido para generar la sustentación deseada.

Supóngase el perfil alar aislado de la figura 3.4 inmerso en un flujo potencial bidimensional que partiera del reposo. Como se ha mencionado, el teorema de Kelvin indica que el movimiento resultante ha de tener circulación nula alrededor del perfil (circuito ACDF de la figura), siempre que el efecto de la viscosidad sea nulo. Cuando el perfil induce en la corriente potencial  $v_\infty$  un cierto ángulo de ataque,  $\alpha$ , por su parte inferior, sobre la parte superior del perfil aparece un punto de remanso antes del punto de fuga que forzaría al fluido a bordear el borde afilado posterior. Como esta situación de reflujo en el borde de fuga no es sostenible en presencia de viscosidad, la capa límite que progresa sobre la parte inferior del perfil se desprende de éste justo en el borde de fuga, y produce un vórtice que interacciona con el flujo potencial superior y arrastra consigo el punto de estancamiento hacia delante (este arrastre del punto de estancamiento hasta el punto de fuga recuerda el despla-

zamiento dextrógiro del punto de remanso posterior del cilindro rotativo visto en el apartado anterior). El nuevo flujo en la región potencial tiene ahora una circulación cuya magnitud depende de la forma del perfil, del ángulo de ataque y de la velocidad no perturbada, con la condición de que se alcance una situación en la que el punto de estancamiento superior coincida con el punto de fuga (condición de Kutta-Joukowski).<sup>143</sup>

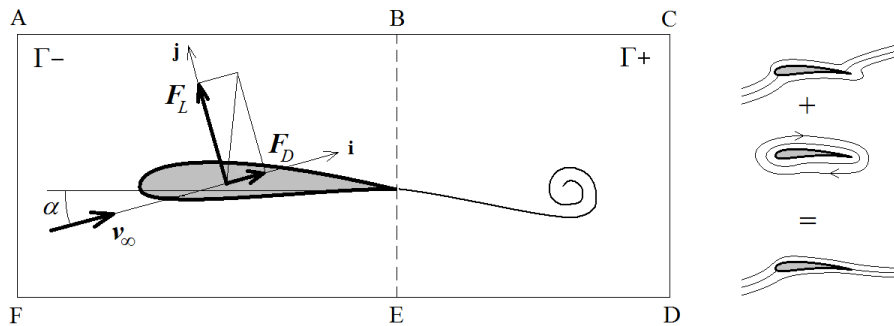
La circulación recogida en el cuadrante ABEF coincide con la proporcionada por la teoría ideal cuando se verifica la condición de Kutta-Joukowski. En consecuencia, el proceso por el que se genera circulación está relacionado con la descarga de vorticidad en el fluido que se aleja del perfil y, como el diseño del perfil hace que ésta sea positiva, la circulación residente sobre el perfil es negativa para que ambas se compensen. Éste es el fundamento de la generación de sustentación.

El módulo de la fuerza de sustentación sobre el perfil se obtiene de la teoría de Kutta-Joukowski y tiene como valor:

$$F_L = \rho v_\infty \Gamma \quad [3.51]$$

por unidad de envergadura o ancho de perfil. Se demuestra que  $F_L \cdot v_\infty = 0$ , por lo que esta fuerza es perpendicular a la dirección de la velocidad incidente no perturbada por el perfil, y su sentido viene determinado por la forma vectorial de la ecuación [3.51]:  $F_L = \rho v_\infty \wedge \Gamma$ , en la que se ha de recordar que la circulación es definida positiva en sentido levógiro (la circulación negativa del perfil de la figura 3.4 implica, por tanto, una fuerza sustentadora ascendente cuando  $v_\infty$  se dirige a la derecha).

Figura 3.4. Generación de circulación alrededor de un perfil alar bidimensional. De acuerdo con el teorema de Kelvin, la circulación alrededor del circuito BCDE que rodea la estela (positiva) se compensa exactamente por la circulación alrededor del circuito ABEF que rodea el ala (negativa). El movimiento del fluido alrededor del perfil es la superposición de dos: un flujo potencial con un punto de remanso sobre la superficie superior del perfil y anterior al borde de fuga, y una circulación neta negativa alrededor de éste.



La clave para conseguir una sustentación adecuada es diseñar el perfil de forma que se evite la separación de la capa límite superior antes del borde de fuga, para lo cual se reduce el gradiente adverso de presión mediante perfiles alargados. La estela que se genera para ángulos de ataque pequeños es muy delgada pero, para ángulos mayores a uno crítico, el perfil entra en pérdida porque se produce la separación de la capa límite. De hecho, aunque la teoría ideal suponga una resistencia nula al avance y esta condición se verifique, aproximadamente, cuando las capas límites son estrechas alrededor del perfil, la verdad es que siempre se produce cierta resistencia en la dirección de  $v_\infty$ . La magnitud de esta resistencia puede ser del mismo orden que la sustentación cuando la capa límite superior se desprende del perfil antes del borde de fuga.



La fuerza total que actúa sobre el perfil en presencia de resistencias al avance resulta de la suma vectorial siguiente:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_D \quad [3.52]$$

donde  $\mathbf{F}_D$  es perpendicular a  $\mathbf{F}_L$  y tiene la dirección de  $\mathbf{v}_\infty$ . Los módulos de estas fuerzas,  $F_L$  y  $F_D$ , se calculan, en la práctica, mediante sendos coeficientes adimensionales,  $C_L$  y  $C_D$ , de sustentación (*lift*) y arrastre (*drag*), respectivamente, definidos a partir de:

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho l v_\infty^2$$

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho l v_\infty^2 \quad [3.53]$$

donde  $l$  es la cuerda del perfil. Estos coeficientes se pueden definir para otros cuerpos, aerodinámicos o no, en los que  $l$  sería su longitud característica en la dirección del flujo (por ejemplo, en el cilindro de la figura 4.11,  $l$  es el diámetro del cilindro).

En general, estos coeficientes son una función  $C_i(\mathcal{S}/l, \rho l v_\infty / \mu, \alpha)$ , que se reduce en la práctica a la forma  $C_i(\alpha)$  porque, en las condiciones normales de trabajo, el número de Reynolds es muy elevado y el acabado superficial es suficientemente liso. En la figura 3.5 se muestran las funciones  $C_i(\alpha)$  de un perfil aerodinámico y su curva polar. Se observa que existe un ángulo de ataque óptimo que hace máximo el cociente  $C_L/C_D$  y con el que se consigue una mejor relación entre sustentación y empuje. Este ángulo se denomina *ángulo de planeo*,<sup>144</sup>  $\lambda^* = \text{tg}^{-1}(C_D/C_L)_{\text{mín}} \approx (C_D/C_L)_{\text{mín}}$ , pues, en realidad, es el ángulo que forman  $\mathbf{F}_L$  y  $\mathbf{F}$  en condiciones ideales de vuelo.

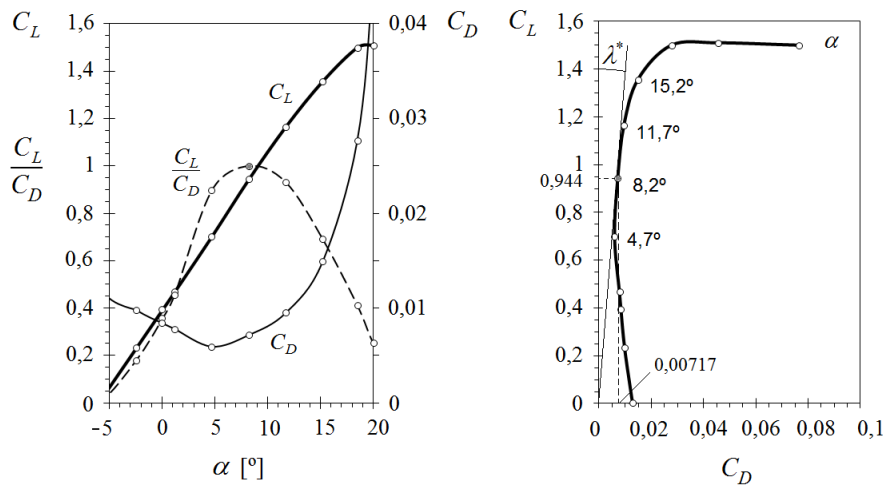


Figura 3.5. Curvas  $C_L$ ,  $C_D$  y polar típicas de un perfil alar aislado. La relación  $C_L/C_D$  se ha normalizado con su máximo. Valores de referencia para el perfil Göttingen 682.

El desarrollo anterior ofrece valores de sustentación bastante aproximados a la experiencia si las alas son suficientemente largas y están aisladas. No obstante, cuando se toma en consideración el movimiento tridimensional completo alrededor de una hélice o una cascada de álabes, no pueden obviarse ni la influencia del resto de álabes ni la posible variación de la circulación generada en secciones diferentes. Este último efecto



puede ser consecuencia del cambio gradual de la forma y el tamaño del perfil (y, por tanto, dominable en la fase de diseño de un rotor) o de las características del flujo incidente (en especial, para condiciones de trabajo variables o fuera de diseño), y hace que la circulación evolucione desde el valor máximo hasta el mínimo, que es cero y se encuentra en el extremo en que la sección es nula. Resulta, entonces, que el gradiente de la circulación a lo largo del álabe origina el desprendimiento local de torbellinos, de modo que su intensidad iguala la diferencia de circulación entre secciones adyacentes. La presencia de estos torbellinos induce la aparición de una velocidad relativa al perfil que modifica la dirección de la velocidad incidente y cambia el valor de la circulación obtenida mediante la teoría bidimensional. Además, como la fuerza de sustentación generada por el flujo potencial es perpendicular a la dirección de la velocidad incidente y ésta ha cambiado, resulta que aparece sobre el perfil una componente de arrastre que aumenta su resistencia y consume más potencia.

La energía de estos torbellinos se disipa aguas abajo del perfil y repercute en el funcionamiento de las turbomáquinas al disminuir su rendimiento y variar el campo de presiones y velocidades. Esto hace que el diseño de muchas máquinas se acometa de forma que la circulación generada sobre el perfil, en condiciones nominales, sea constante a lo largo de los álabes, de modo que toda la vorticidad de estos remolinos se concentre en el extremo y no afecte el flujo principal. La circulación que se produce en el torbellino de salida es, pues, la misma que la que existe sobre cualquier sección del perfil, y su núcleo es una región rotacional donde la viscosidad es importante.

### 3.3. Movimiento en medios permeables

Los medios permeables que se consideran en este apartado están constituidos por un material sólido, de naturaleza granular o fibrosa, por cuyos intersticios puede moverse el fluido. La matriz sólida formada por el material deja huecos, o poros, cuyo diámetro característico,  $d$ , puede ser de micras (en arcillas) o de centímetros (en gravas, piedras, etc.) y que, en cualquier caso, es muy inferior a la longitud característica del medio poroso,  $L$ .

En este análisis, se considera que el medio poroso está empapado plenamente por un sólo fluido y, en caso de que coexistan dos fluidos o fases distintas en contacto, se supone que cada uno ocupa una región separada de la contigua por una superficie que impide que ambos fluidos puedan mezclarse. Asimismo, el efecto de la tensión superficial se supone nulo, puesto que se admite que las diferencias de presión asociadas, del orden  $\sigma/d$ , son pequeñas frente a las impuestas al medio desde el exterior.

Con estas hipótesis, es posible realizar una descripción macroscópica del medio poroso en la distancia de observación  $L$ , en la que el medio aparenta un continuo a través del cual el flujo está sujeto a unas leyes de conservación que, en cierta manera, se pueden relacionar experimentalmente con sus características microscópicas.

#### 3.3.1. Descripción macroscópica del movimiento

La descripción macroscópica del movimiento en un medio poroso utiliza variables que se obtienen promediando las magnitudes fluidas en volúmenes,  $V$ , suficientemente



grandes respecto al volumen del poro medio,  $d^3$ , pero, a su vez, pequeñas respecto a la dimensión,  $L$ . Es decir, se supone que  $d \ll V^{1/3} \ll L$ .

La proporción de huecos local,  $e$ , se define como la relación entre el volumen ocupado por los poros,  $V_p$ , y el ocupado por el sólido,  $V_s$ , dentro del volumen en  $V$ . La porosidad local se define como el cociente entre el volumen de huecos (espacio de poros ocupado por el fluido) y el volumen  $V$  (siendo  $V = V_p + V_s$ ). Esta porosidad puede ser variable en  $L$ , y se relaciona con la proporción de huecos local mediante la expresión:

$$\Phi = \frac{V_p}{V} = \frac{V_p}{V_s + V_p} = \frac{e}{1 + e} \quad [3.54]$$

La densidad media local es el cociente entre la masa contenida en  $V_p$  y  $V$ . La velocidad aparente del fluido en el medio se calcula de la expresión:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{A} \int_{A_p} \rho (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) dA_p \quad [3.55]$$

donde  $A_p$  es el área característica de poros por donde se produce el flujo real a la velocidad  $\mathbf{v}_p$ , y  $A$  es la superficie plana, de normal  $\mathbf{n}$ , situada en el punto en cuestión. Se demuestra que la porosidad también es el cociente,  $A_p/A$ , con  $d^2 \ll A \ll L^2$  y  $A \approx V^{2/3}$ , de modo que los valores medios de esta expresión conducen a  $\mathbf{v} = \Phi \mathbf{v}_p$ , que es la denominada *velocidad de Darcy*. De forma análoga, pueden definirse la presión, la temperatura, etc., teniendo en cuenta que los valores medios locales así calculados no tienen por qué cumplir las ecuaciones termodinámicas de estado, salvo que sus fluctuaciones con respecto a dichos valores medios en  $V_p$  sean pequeñas (lo que suele darse en la práctica).

La definición macroscópica de la densidad y de la velocidad a través del medio poroso permite escribir la ecuación de continuidad del movimiento macroscópico de la forma:

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad [3.56]$$

que expresa que la variación de la masa de fluido contenido en la unidad de volumen de medio poroso es igual a la masa neta que recibe por unidad de tiempo y volumen. Si el medio es incompresible e indeformable, esta ecuación es, evidentemente,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , pero si el fluido es compresible y el medio deformable, entonces:

$$\Phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad [3.57]$$

En general, el movimiento que se establece a través de la matriz porosa transcurre a números de Reynolds bajos, muy inferiores a la unidad, ya que se cumple la condición de que  $v_p d$  es muy pequeño. Por ello, se puede esperar que exista una relación de proporcionalidad entre la velocidad  $\mathbf{v}$  y las fuerzas de presión y másicas actuantes.<sup>145</sup> Esta relación es la conocida ecuación de Darcy, que, si las fuerzas másicas derivan de un potencial  $U$ , se escribe:

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho \nabla U) \quad [3.58]$$



El coeficiente  $k$ , de Darcy, tiene dimensiones de superficie (es proporcional a  $d^2$ ) y depende sólo del medio poroso, no del fluido, y por ello se habla también de *permeabilidad intrínseca* del medio.

Cuando las únicas fuerzas másicas son las gravitatorias y el fluido es incompresible, se puede escribir la ecuación [3.58] en función de la cota piezométrica  $h$ , como:

$$\mathbf{v} = -k \frac{\rho g}{\mu} \nabla h \quad [3.59]$$

donde:

$$h = \frac{P}{\rho g} + z \quad [3.60]$$

La relación  $K = k\rho g/\mu$  se denomina *coeficiente de permeabilidad* o conductividad hidráulica del medio poroso. Este coeficiente depende de la orientación del flujo si el medio no es isótropo, aunque se demuestra que, en medios no isótropos, siempre es posible realizar una elección arbitraria y conveniente de los ejes coordenados y de sus escalas longitudinales para convertir cualquier medio anisótropo en isótropo.<sup>146</sup>

Tabla 3.2.  
Coeficientes de permeabilidad típicos (por intervalos) de diferentes medios porosos en agua.

Medio	$K$ [cm/s]
Gravas	$1-10^2$
Arenas limpias	$10^{-3}-1$
Arenas arcillosas	$10^{-6}-10^{-3}$

La ecuación [3.59] pone de manifiesto que, en medios incompresibles ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ) en los que  $k/\mu$  sea constante y el movimiento permanente, se ha de cumplir:

$$\Delta(p + \rho U) = 0 \quad [3.61]$$

y el movimiento resultante es irrotacional. Si el movimiento fuera, además, plano, esta conclusión indica que se pueden definir la función de corriente y el potencial complejo, lo que facilita la resolución de muchos problemas y la visualización de las líneas equipotenciales y de las líneas de corriente.

Si el fluido es un gas, se puede admitir que el movimiento es isoterma en virtud de la gran conductividad e inercia térmica de la matriz sólida. Como, en los gases, las fuerzas másicas son despreciables, la ecuación [3.56] en un medio indeformable se puede escribir:

$$\Phi \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{k}{\mu} \Delta(p^2) = 0 \quad [3.62]$$

Si el movimiento de un líquido no es permanente y existe ganancia de masa en  $V_p$  (como consecuencia de la deformación del medio y de la compresibilidad del líquido), la ecuación de continuidad se escribe, en función de la variación local de la presión  $\partial p/\partial t$ :

$$\rho(\beta_p + \Phi\beta_t) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad [3.63]$$





donde  $\beta_l$  y  $\beta_p$  son, respectivamente, los coeficientes de compresibilidad isoterma del líquido y de la estructura porosa.<sup>147</sup> El coeficiente  $S = \rho g(\beta_p + \Phi\beta_l)$  tiene por dimensión  $L^{-1}$  y se denomina *almacenamiento específico* del medio.

La demostración de esta última ecuación no es complicada y parte de [3.57]. Por ejemplo, para dar cuenta del efecto de la compresibilidad del fluido, se sigue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \rho \beta_l \frac{\partial p}{\partial t} \quad [3.64]$$

y, si la estructura es indeformable:

$$\rho \Phi \beta_l \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad [3.65]$$

Si se prescinde de  $\beta_l$  y se utiliza la cota piezométrica  $h$ , siendo  $z$  independiente de  $t$ , la ecuación [3.63] resulta:

$$\rho g \beta_p \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad [3.66]$$

En general, si el medio es homogéneo ( $K$  constante), la combinación de las ecuaciones [3.61] y [3.63] conduce, en una primera aproximación, a:<sup>148</sup>

$$\Delta h = \frac{S}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad [3.67]$$

y, si el movimiento es permanente, entonces  $\Delta h = 0$ .

Las ecuaciones [3.62], [3.67] y  $\Delta h = 0$  pueden resolverse teniendo en cuenta las condiciones iniciales y las de contorno. En lo que sigue, se supondrá que el fluido es incompresible y el medio poroso, indeformable y de  $\Phi$  constante.

### 3.3.2. Condiciones de contorno y ley de la refracción

En el caso más general en que los cambios de la presión no afectan la densidad del fluido ni la forma de la estructura porosa, la ecuación que rige el movimiento en el medio es la ecuación de Laplace,  $\Delta h = 0$ , y las condiciones iniciales y de contorno se corresponden, entonces, con el caso irrotacional de líquidos que se ha analizado en el tema anterior. En consecuencia, al no aparecer derivadas temporales en las ecuaciones, no se pueden imponer condiciones iniciales al movimiento.

En cuanto a las condiciones de contorno, se supone conocido el valor de la presión o de la cota piezométrica en el contorno exterior donde el medio está limitado por fluido libre. Si existe una región en el medio poroso ocupada por un gas en reposo, se puede suponer, a la hora de determinar el movimiento del líquido, que la presión sobre su superficie libre es la del gas y que en éste la presión es constante e igual a la del entorno externo del medio poroso. Asimismo, en la superficie libre y estacionaria del líquido en contacto con el gas, la velocidad ha de ser tangente a la superficie y  $dh/dn = 0$ , aunque, por norma general, la forma de la superficie es desconocida a priori y ha de ser determinada como parte de la solución.



Allí donde el medio poroso esté limitado por una pared impermeable estática, se cumple que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , es decir, la velocidad sólo puede ser tangente al contorno, por lo que esta condición equivale a  $dh/dn = 0$  en líquidos. Si la pared es permeable, como pudiera ser el caso en que dos estratos de diferente origen geológico en contacto son atravesados por el mismo líquido, la condición que se ha de cumplir en el salto a través de la superficie viene dada por la continuidad integral y es:

$$\rho A(\mathbf{v} - \Phi \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n} = Q \quad [3.68]$$

donde  $\mathbf{v}_s$  es la velocidad de la superficie. Si  $\mathbf{v}_s = 0$ , la continuidad de  $h$  y  $\rho$  exige que la velocidad de Darcy se mantenga en dirección normal a la superficie y sea continua en ella. Sin embargo, esta misma condición implica que la componente normal de la velocidad  $v_p$  experimenta un salto brusco si la porosidad es diferente a ambos lados de la superficie.

La condición  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  constante conduce a un resultado interesante cuando el movimiento se desarrolla entre dos medios homogéneos e isotrópicos de permeabilidades diferentes,  $K_1$  y  $K_2$ . Al cruzar la superficie de separación y cambiar de medio, se produce una refracción de las líneas de corriente análoga a la de los rayos de luz,<sup>149</sup> como consecuencia de la continuidad de las líneas equipotenciales y de la conservación de la masa a su través. En efecto, por continuidad, se cumple:

$$v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2 \quad [3.69]$$

y, como cada una de las velocidades sigue la ley de Darcy, resulta:

$$K_1 \frac{dh}{dx_1} \cos \alpha_1 = K_2 \frac{dh}{dx_2} \cos \alpha_2 \quad [3.70]$$

de donde, tal como se puede apreciar en la figura 3.6, se deduce:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} \quad [3.71]$$

que es la *ley de la refracción* en medios porosos, según la cual las líneas de corriente atraviesan el medio más permeable de forma más sesgada. Evidentemente, si la incidencia es normal a la superficie, no hay refracción.

Aplicando las condiciones anteriores al caso que se muestra en la figura 3.6, se resuelve que se ha de cumplir:

- En las secciones AB y DE, la carga  $h$  es la de las masas líquidas contiguas, y  $h = H_1$  en un lado y  $h = H_2$  en el otro.
- En la sección CD, la presión es la atmosférica y, por tanto, la condición de contorno es  $h = z$ . En esta región, denominada *zona de escurrimiento*, se verifica que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ .
- La sección AE es impermeable y  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ .
- La sección BC es la superficie libre del líquido y también es  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  si es estacionaria, luego  $dh/dn = 0$ . Sobre ella reina la presión atmosférica y  $h = z$ , donde  $z$  es la ecuación de la superficie libre.
- En la sección GF, que separa dos medios de permeabilidad distinta, se cumplen [3.69] y [3.71].

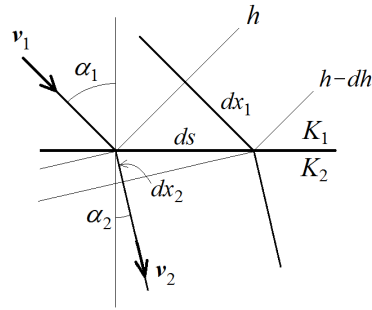
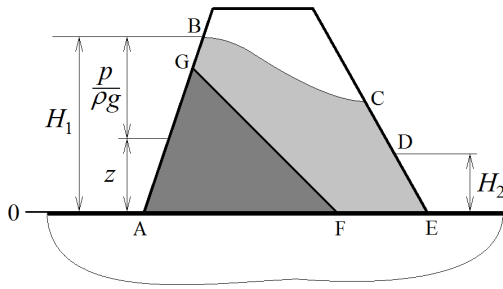


Figura 3.6. Condiciones de contorno en una presa porosa que separa dos masas líquidas de alturas  $H_1$  y  $H_2$ . A la derecha, se muestra la incidencia de la ley de la refracción. Obsérvese que la componente tangencial de la velocidad de Darcy ( $v \sin \alpha$ ) experimenta un salto finito a través de la superficie.

### 3.3.3. Movimiento de líquidos en capas freáticas

Se denomina movimiento en capa freática el movimiento de filtración que se produce en un medio poroso confinado por una capa impermeable inferior, pero permeable hasta su superficie. Este movimiento se presenta, en la práctica, en las capas permeables contiguas a pozos, galerías o drenajes, y da lugar al *abatimiento* de la línea de carga hidráulica respecto a la inicial.

Para estudiar el movimiento permanente en estas capas y analizar el abatimiento de la superficie libre formada, Dupuit supuso que la velocidad en la capa era paralela a la superficie impermeable (en principio, horizontal) y que la presión en ella seguía una distribución hidrostática. Con estas condiciones, el calado  $H$  es igual a la cota piezométrica [3.60] en todo punto, y el caudal que entra en el volumen diferencial de la figura 3.7 por una de las caras resulta ser:

$$\delta q_x = -K \frac{\partial H}{\partial x} H dy = -\frac{1}{2} K \frac{\partial H^2}{\partial x} dy \quad [3.72]$$

La diferencia entre el caudal que sale y el que entra por dos caras opuestas es:

$$\delta q_{x+dx} - \delta q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = -\frac{1}{2} K \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} dx dy \quad [3.73]$$

En régimen permanente, el caudal neto acumulado en el prisma diferencial ha de ser nulo, pues se mantiene  $H$  constante, y entonces:

$$\frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} = 0 \quad [3.74]$$

Esta es la ecuación que satisface la superficie libre de un movimiento freático, pero es sólo válida cuando la pendiente de la superficie no es muy pronunciada y  $h = H$ , en una primera aproximación. Para determinar los caudales y la situación de la superficie en otros casos, es conveniente introducir la función:

$$I = \int_0^H h dz - \frac{1}{2} H^2 \quad [3.75]$$



de modo que el caudal  $\delta q_x$  se calcule haciendo:

$$\delta q_x = -K \int_0^H \frac{\partial h}{\partial x} dz dy = -K \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H h dz - H \frac{\partial H}{\partial x} \right) dy = -K \frac{\partial I}{\partial x} dy \quad [3.76]$$

y el que escapa por la opuesta:

$$\delta q_{x+dx} = -K \left( \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} dx \right) dy \quad [3.77]$$

El balance de los caudales que entran y salen del prisma ha de ser igual al que se almacena, que resulta en un cambio del calado en el volumen diferencial de porosidad  $\Phi$ . Por tanto:

$$\Phi \frac{\partial H}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right) \quad [3.78]$$

y, en régimen permanente:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = 0 \quad [3.79]$$

Evidentemente, si  $h = H$ , constante en  $z$ , esta ecuación coincide con [3.74] e  $I = H^2/2$ .<sup>150</sup>

A continuación, se analiza la forma que adquiere la superficie freática en la vecindad de un pozo del que se extrae un caudal  $Q$  en régimen permanente y donde el nivel es  $h_0$ . La ecuación [3.74] en coordenadas cilíndricas se escribe, con  $h = H$ :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial h^2}{\partial r} \right) = 0 \quad [3.80]$$

de donde:

$$r \frac{\partial h^2}{\partial r} = C \quad [3.81]$$

y, por tanto:

$$h^2 - h_0^2 = C \ln \frac{r}{R_0} \quad [3.82]$$

Para evaluar la constante de integración, se ha de tener en cuenta que el caudal  $Q$  es constante, por continuidad, a cualquier distancia del pozo. Esto es:

$$Q = 2\pi r h K \frac{dh}{dr} = \pi r C \quad [3.83]$$

por lo que, finalmente:

$$h^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{r}{R_0} \quad [3.84]$$

Obsérvese que esta expresión indica que el nivel  $h$  crece indefinidamente hacia el infinito. Para salvar esta situación y dar compatibilidad a la solución con una condición de alimentación finita a un radio  $R_\infty$  suficientemente grande, se admite que el caudal perimetral tiene su origen en  $R_\infty$ , donde la altura de la superficie es  $h_\infty$  y constante para radios mayores. En resumen, la solución se expresa de la forma:



$$h_{\infty}^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{R_{\infty}}{r} \quad [3.85]$$

El desnivel observado en el pozo con respecto al nivel freático no perturbado es  $h_{\infty} - h_0$ , y viene dado por:

$$h_{\infty}^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{R_{\infty}}{R_0} \quad [3.86]$$

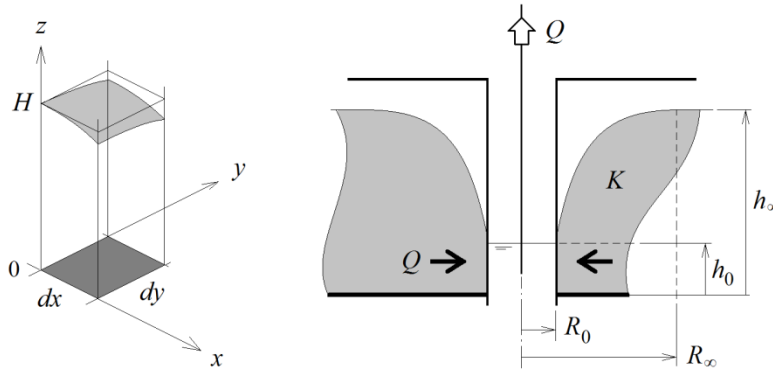


Figura 3.7. Prisma para el análisis del movimiento en capas freáticas (izquierda) y abatimiento de las líneas de carga en un pozo perforado en una capa freática de permeabilidad  $K$ .

### 3.4. Flujo unidireccional incompresible

Un flujo es unidireccional cuando el fluido se mueve en una única dirección.<sup>151</sup> Para que sea cuasiunidireccional, es suficiente que el orden de magnitud de la velocidad transversal sea muy inferior a la longitudinal, lo que implica, a su vez, que el gradiente transversal de la presión reducida también sea inferior al longitudinal. Esta situación se produce con frecuencia en la práctica, y normalmente es inducida por la presencia de un contorno plano o de una geometría tal que impide el desarrollo de la velocidad en cualquier otra dirección.

La condición de unidireccionalidad de un movimiento incompresible es útil porque permite eliminar el término convectivo no lineal de la ecuación de la cantidad de movimiento.<sup>152</sup> Esta simplificación es posible aunque el movimiento no sea estacionario y conduce a un tipo de flujo en el que todas las magnitudes fluidas varían sólo con la coordenada  $s$  y el tiempo.

#### 3.4.1. Condiciones de unidireccionalidad

Si bien es el contorno el que impone la unidireccionalidad al movimiento, no es cierto que esta condición se pueda admitir en toda su extensión, salvo que ésta sea infinita. Por ejemplo, en la región de entrada a un conducto, los términos convectivos son del orden de los viscosos (v. [2.114]) y la velocidad transversal disminuye a medida que aparece el movimiento unidireccional. El orden de magnitud de la velocidad transversal fuera de la región de entrada a un conducto se puede estimar a partir de la ecuación de continuidad, que en forma adimensional es:



$$\frac{v_{0x}}{L} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{v_{0y}}{D} \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + \frac{v_{0z}}{D} \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = 0 \quad [3.87]$$

de donde:

$$O(v_{0y}) = O(v_{0z}) = \frac{D}{L} O(v_{0x}) \quad [3.88]$$

Evidentemente, la velocidad transversal es despreciable frente a la longitudinal cuando  $L$  es mucho mayor que  $D$ . Se puede considerar que el movimiento es cuasiunidireccional con viscosidad dominante (o apreciable) si, además, los términos convectivos de [2.100] son inferiores a los viscosos, es decir, si se cumple la condición:

$$O\left(\frac{\rho v_{0x}^2 / L}{\mu v_{0x} / D^2}\right) = O\left(\frac{\rho v_{0x} D}{\mu} \frac{D}{L}\right) = O\left(\text{Re}_D \frac{D}{L}\right) \ll 1 \quad [3.89]$$

En caso contrario, el movimiento en el conducto (supuesto suficientemente largo para que  $L \gg D$  y el movimiento sea guiado pero, a la vez, lo bastante corto para que no se cumpla [3.89]) se puede suponer ideal y los efectos viscosos, despreciables.

El orden de magnitud de los gradientes longitudinal y transversal de la presión reducida en movimientos cuasiunidireccionales se puede deducir de la ecuación de cantidad de movimiento correspondiente. En dirección longitudinal  $\{x\}$ , la ecuación [2.99] indica que la variación de la presión ha de ser del orden mayor entre los siguientes:

$$O(\Delta p_{0x}) = O_{\text{máx}} \left( \frac{\rho v_{0x} L}{t_0}, \rho v_{0x}^2, \frac{\mu v_{0x}}{D} \frac{L}{D} \right) \quad [3.90]$$

Como, en dirección transversal  $\{y\}$ , se cumple:

$$\frac{\rho v_{0y}}{t_0} \frac{\partial v_y^*}{\partial t^*} + \frac{\rho v_{0x} v_{0y}}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{\Delta p_{0y}}{D} \nabla^* p^* + \frac{\mu v_{0y}}{D^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad [3.91]$$

la variación transversal de la presión reducida será del orden mayor de:

$$O(\Delta p_{0y}) = O_{\text{máx}} \left( \frac{\rho v_{0y} D}{t_0}, \rho v_{0x} v_{0y} \frac{D}{L}, \frac{\mu v_{0y}}{D} \right) \quad [3.92]$$

de donde, con [3.88], es en cualquier caso:

$$O(\Delta p_{0y}) = O_{\text{máx}} \left( \frac{\rho v_{0x} D}{t_0} \frac{D}{L}, \rho v_{0x}^2 \frac{D^2}{L^2}, \frac{\mu v_{0x}}{L} \right) = \left( \frac{D}{L} \right)^2 O(\Delta p_{0x}) \quad [3.93]$$

Tal como se ha avanzado, se desprende que el orden de la variación transversal de la presión reducida es muy inferior a la longitudinal en condiciones de cuasiunidireccionalidad.

Por tanto, supuesto el movimiento unidireccional de un fluido de densidad constante para el que se cumple  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i}$ , con  $v_y$  y  $v_z$  nulas, la ecuación de continuidad dice que:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad [3.94]$$



lo que implica que  $v_x = v_x(y, z, t)$ . En estas condiciones, además,  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$ , ya que:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= 0\mathbf{i} \\ \mathbf{j} \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= 0\mathbf{j} \\ \mathbf{k} \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0\mathbf{k} \end{aligned} \quad [3.95]$$

y las ecuaciones de cantidad de movimiento en los ejes  $\{xyz\}$  quedan de la forma:<sup>153</sup>

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ 0 &= -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial z} \end{aligned} \quad [3.96]$$

Las dos últimas ecuaciones de [3.96] confirman que el movimiento es unidireccional según [3.93], mientras que la primera muestra que el gradiente longitudinal de la presión reducida sólo puede depender del tiempo, al ser la presión constante en  $\{yz\}$  y no depender  $v_x$  de  $\{x\}$ . En consecuencia, esta ecuación puede escribirse como:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \Delta p_L(t) + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad [3.97]$$

### 3.4.2. Algunas soluciones laminares

Son conocidas diversas soluciones exactas de la ecuación [3.97]: corrientes no estacionarias de Rayleigh y Stokes, y estacionarias de Couette, Hagen-Poiseuille, o particulares para el movimiento por un plano inclinado o en círculos concéntricos, conocidas como soluciones al movimiento con fuerzas de viscosidad dominantes o corrientes laminares.

Los flujos unidireccionales estacionarios que resultan ser soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes, son estables, en general, para valores lo bastante pequeños del número de Reynolds. Para flujos con  $Re$  superiores a uno crítico, la corriente es inestable y la presión reducida varía a través de la sección aunque el contorno sea unidireccional (v. [4.55]).<sup>154</sup>

Estas soluciones analíticas tienen un interés académico evidente, pero también práctico, pues son muchas las situaciones en las que se cumplen las condiciones de unidireccionalidad en la mayor parte del campo fluido. Además, el carácter lineal de dicha ecuación y de sus condiciones iniciales y de contorno hace válido el principio de superposición, de forma que la solución final puede obtenerse como la suma de las soluciones conocidas a distintas condiciones ya resueltas. Por otro lado, el contorno también im-

pone condiciones de simetría en el movimiento y permite calcular el gradiente de presión reducida, conocida ésta en dos puntos en un instante dado:  $\Delta p_L = (p_1 - p_2)/L$ .

Cuando las condiciones iniciales y las de contorno no dependen de  $z$ , es posible encontrar una solución de [3.97], de forma que  $v_x$  no dependa de  $x$  y el movimiento resultante sea unidireccional y bidimensional. Por ejemplo, el movimiento de un fluido viscoso e incompresible, que ocupa el semiespacio superior limitado por una placa plana infinita y horizontal que oscila de forma armónica y paralela a sí misma, viene descrito por la ecuación:

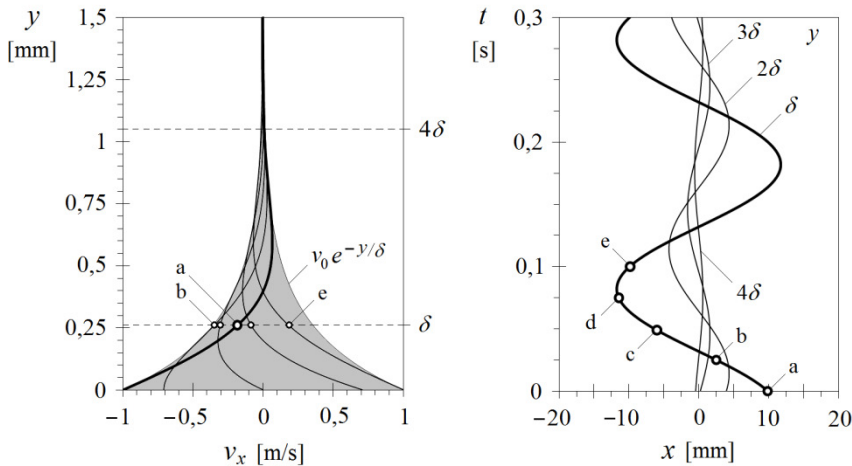
$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad [3.98]$$

La solución de esta ecuación, con  $\Delta p_L = 0$ , cuando las condiciones de contorno son ( $y = 0, v_x = v_0 \cos(\omega t)$ ;  $y = \infty, v_x = 0$ ), es:

$$v_x = v_0 e^{-y/\delta} \cos(\omega t - y/\delta) \quad [3.99]$$

que se corresponde con un movimiento ondulatorio amortiguado, con una velocidad de fase<sup>155</sup>  $(2\nu\omega)^{1/2}$ . La amplitud de este movimiento es imperceptible a distancias de la placa superiores a  $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$ , que es la distancia de penetración de los efectos viscosos, denominada *capa de Stokes*. El orden de magnitud de esta distancia podría haberse deducido del hecho de que en este movimiento los términos viscosos y locales han de ser del mismo orden, es decir,  $O(v_0\omega) = O(\nu\omega/\delta^2)$ .

Figura 3.8. Representación gráfica de la corriente de Stokes. Se muestra la solución para agua fría, con  $\omega = 10\pi$  rad/s y  $v_0 = 1$  m/s, en cinco instantes (a, b, c, d y e) de un semiciclo de 0,1 s.



En cuanto a las soluciones estacionarias de la ecuación [3.97], destacan las corrientes de Couette y de Hagen-Poiseuille por su interés práctico. Estas soluciones implican el movimiento unidireccional de un fluido incompresible viscoso en contornos bidimensionales, con un valor  $\Delta p_L$  que puede ser no nulo. En estos casos, la ecuación de Navier-Stokes toma la forma:<sup>156</sup>





$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\Delta p_L \quad [3.100]$$

La ecuación anterior se integra fácilmente entre dos placas infinitas paralelas cuando  $\Delta p_L$  es nulo (corriente de Couette) y una de las placas se mueve a una velocidad  $v_0$  arrastrando con ella el fluido por el huelgo  $h$  existente entre ambas placas. Si la otra placa no se mueve, las condiciones de contorno son ( $y=0, v_x=0; y=h, v_x=v_0$ ) y su solución:

$$v_x = v_0 \frac{y}{h} \quad [3.101]$$

Si ambas placas no se mueven y existe un  $\Delta p_L$  no nulo, entonces la solución al movimiento es (corriente de Hagen-Poiseuille):

$$v_x = \frac{\Delta p_L}{2\mu} y(h-y) \quad [3.102]$$

con un máximo en  $y=h/2$ . El caudal volumétrico de fluido entre ambas placas por unidad de ancho es:

$$q = \int_0^h v_x dy = \frac{h^3}{12\mu} \Delta p_L \quad [3.103]$$

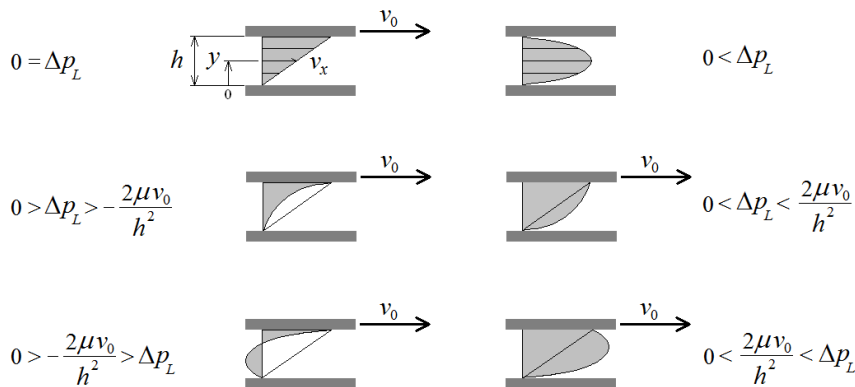


Figura 3.9. Distintas soluciones de la corriente entre placas planas infinitas de ancho infinito.

Si se presentan ambos efectos, es decir, además de existir un gradiente de presiones, la placa superior se moviese a  $v_0$ , se sumarían los campos de velocidades correspondientes y el caudal volumétrico total sería:

$$q = \frac{h}{2} v_0 + \frac{h^3}{12\mu} \Delta p_L \quad [3.104]$$

Estos resultados son fácilmente generalizables al caso del flujo de fuga por intersticios planos o circulares, y a los problemas de lubricación fluidodinámica.

La solución de Hagen-Poiseuille se puede aplicar a conductos bidimensionales circulares en los que, por simetría, se puede admitir que la velocidad,  $v_x$ , sólo depende de su

distancia al centro del tubo,  $r$ . La ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_x}{dr} \right) = \frac{d^2 v_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_x}{dr} = -\frac{\Delta p_L}{\mu} \quad [3.105]$$

que, para la condición de contorno ( $r=R=D/2$ ,  $v_x=0$ ), proporciona la solución general:

$$v_x = \frac{\Delta p_L}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad [3.106]$$

que corresponde a una distribución parabólica de velocidades. Nótese que, aunque éste sea un movimiento con viscosidad dominante, el perfil de la velocidad depende de la viscosidad y del gradiente de la presión a través de un término constante. Por tanto, la viscosidad no determina la forma que adopta el perfil de la velocidad, que siempre es parabólica, sino que establece qué gradiente de presión es compatible con el campo de velocidades. Esto es, la viscosidad determina cuándo y dónde se alcanza el régimen estacionario y unidireccional, a partir de un campo de velocidades arbitrario a la entrada del conducto.

El caudal transportado por el conducto en estas condiciones es:

$$Q = \int_0^R v_x 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \Delta p_L = \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad [3.107]$$

para una velocidad media:

$$\bar{v}_x = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{D^2}{32\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad [3.108]$$

que es la mitad de la máxima a  $r=0$ , como es fácil comprobar.

El esfuerzo cortante presente en el flujo se puede obtener simplemente haciendo:

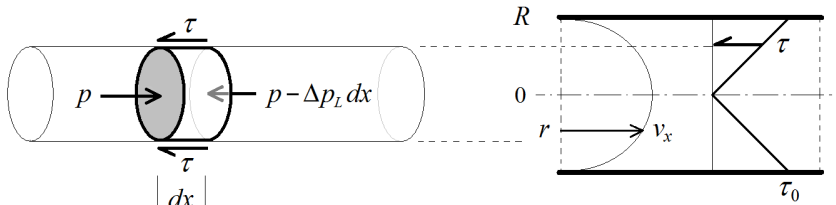
$$\tau = -\mu \frac{dv_x}{dr} = \frac{r}{2} \Delta p_L \quad [3.109]$$

y es mínimo en el centro del tubo (el signo indica que la fuerza cortante se opone al movimiento). En la pared, se cumple:

$$2\pi R \tau_0 - \pi R^2 \Delta p_L = 0 \quad [3.110]$$

lo que pone de manifiesto el equilibrio axial del movimiento según el balance de fuerzas sobre el elemento diferencial de la figura 3.10.

Figura 3.10. Equilibrio de fuerzas diferenciales en un conducto de radio  $R$ . Este equilibrio es válido aun en presencia de turbulencia por consideraciones de simetría. Para otras secciones no circulares, aparecen velocidades medias en dirección transversal debidas a que los esfuerzos turbulentos no se equilibran con el gradiente de presiones.





Se obtiene un resultado interesante cuando se expresa la pérdida de presión reducida en función de la energía cinética media del flujo de Hagen-Poiseuille en un conducto. En efecto, utilizando la ecuación [3.108] se deduce:

$$\Delta p = \frac{32\mu L}{D^2} \bar{v}_x = \frac{64\mu}{\rho D \bar{v}_x} \frac{L}{2} \frac{\rho \bar{v}_x^2}{2} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D} \frac{\rho \bar{v}_x^2}{2} \quad [3.111]$$

y la pérdida de presión reducida es proporcional a la relación de aspecto del conducto,  $L/D$ , y a la energía cinética media, siendo el factor de proporcionalidad una función inversa del número de Reynolds.<sup>157</sup>

El flujo laminar que transcurre entre dos cilindros coaxiales también se resuelve integrando [3.105]. En este caso, la condición de contorno es ( $r = r_2 = r_1$ ,  $v_x = 0$ ), y la distribución de velocidades viene dada por la expresión:

$$v_x = \frac{\Delta p_L}{4\mu} \left( (r_2^2 - r^2) - (r_2^2 - r_1^2) \frac{\ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right) \quad [3.112]$$

El caudal resulta ser:

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} v_x 2\pi r dr = \pi \left( (r_2^4 - r_1^4) - (r_2^2 - r_1^2)^2 \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right) \frac{\Delta p_L}{8\mu} \quad [3.113]$$

y, en función de la velocidad media en la sección anular:

$$Q = \pi (r_2^2 - r_1^2) \left( (r_2^2 + r_1^2) - (r_2^2 - r_1^2) \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right) \frac{\Delta p_L}{8\mu} \quad [3.114]$$

$$\bar{v}_x = \left( (r_2^2 + r_1^2) - (r_2^2 - r_1^2) \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right) \frac{\Delta p_L}{8\mu}$$

La caída de presión en una distancia  $L$  es, evidentemente:

$$\Delta p = \frac{8\mu L}{(r_2^2 + r_1^2) - (r_2^2 - r_1^2) \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}} \bar{v}_x \quad [3.115]$$

Compruebe el lector que estas ecuaciones coinciden, de forma aproximada, con las que resultan del análisis entre dos placas paralelas, siempre que el huelgo,  $h$ , sea del orden de la diferencia de radios,  $r_2 - r_1$ , y muy inferior a  $r_1$ , y se tome como ancho de las placas el perímetro medio de la sección anular.



### 3.4.3. Movimiento en conductos de sección lentamente variable

Si el movimiento anterior se produce en un conducto de sección recta lentamente variable y de curvatura mínima en su línea media, en el que los cambios de sección son del orden de ella misma a lo largo de la longitud, entonces se puede aplicar la misma solución al movimiento, siempre que el ritmo de variación de la sección sea suficientemente pequeño para que el término  $|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}|$  sea muy inferior al viscoso. En este caso, el gradiente de la presión no es constante en  $x$ , pero sus variaciones son pequeñas, de forma que se puede admitir en una sección  $A_x$  determinada, con [3.107], que:

$$A_x^2 \frac{dp}{dx} = -8\pi\mu Q \quad [3.116]$$

Como el caudal en volumen no cambia en  $x$ , el gradiente de la presión está sujeto a los cambios de la sección: si la sección aumenta, el gradiente disminuye en magnitud, y viceversa.

Esta ecuación puede integrarse para conocer la relación entre el caudal y una diferencia de presiones reducidas determinada entre la entrada y la salida del conducto. El resultado se presenta de la forma:

$$p_0 - p_L = 8\pi\mu Q \int_0^L A_x^{-2} dx \quad [3.117]$$

Cuando, por ejemplo, el conducto es circular de radio variable  $r$ , con un ángulo de conicidad,  $\alpha = dr/dx$ , pequeño y constante, tal que  $r = R_0 + \alpha x$ , entonces el caudal resulta ser:

$$Q = \frac{3\pi}{8\mu} \frac{\alpha}{\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{R_L^3}} (p_0 - p_L) \quad [3.118]$$

Es evidente que el movimiento no es estrictamente unidireccional en este caso, ya que, junto a la componente axial de la velocidad, aparece una componente radial de valor aproximado  $v_r \approx \alpha v_x$ . Los términos convectivos asociados,  $\rho v_x \partial v_x / \partial x$  y  $\rho v_r \partial v_x / \partial r$ , son del orden de  $\alpha \rho v_x^2 / R_0$ , que pueden ser despreciados, siempre que:

$$\alpha \frac{\rho R_0 v_x}{\mu} \ll 1 \quad [3.119]$$

Esta condición es equivalente a la [3.89] para el flujo en una sección cónica.

La relación entre el gradiente de la presión y el área no siempre es cuadrática, como resultaba en [3.116], sino que depende de las características de la sección y de sus dimensiones sujetas a cambio. Como ejemplo que pone de manifiesto esta circunstancia, para secciones anulares en las que se mantenga el huelgo  $h$  constante, como podría ser la formada entre dos conos concéntricos de idéntico ángulo, tal que  $h \ll R$ , la relación entre el gradiente de la presión y el área  $A_x$  viene dada por [3.103], mejor que por [3.107], y resulta ser:

$$A_x \frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu}{h^2} Q \quad [3.120]$$

A continuación se analiza el caso en que el huelgo es variable.



### 3.5. Lubricación por película líquida

La conclusión que se deriva de los casos expuestos al final del apartado anterior, según la cual en movimientos cuasiunidireccionales se puede conseguir un gradiente de presiones variable cuando se cambia lentamente el área de flujo, tiene numerosas aplicaciones prácticas en ingeniería, entre las que destaca significativamente la lubricación fluidodinámica. La esencia del fenómeno consiste en el desarrollo de películas fluidas en las que la velocidad de deformación es muy elevada y creciente, lo que se consigue mediante canales de flujo convergentes en la dirección del movimiento, de espesor transversal pequeño frente a su dimensión longitudinal.

En estos casos, el movimiento del fluido puede ser debido a la acción de fuerzas máxicas, a la existencia de una diferencia de presión impuesta a ambos lados del contorno, o bien al movimiento de una de las superficies sólidas. Este tema se centra básicamente en este último caso. En primer lugar se explica el movimiento estacionario de una película líquida bidimensional entre dos superficies sólidas en movimiento relativo (v. figura 3.11) y, a continuación, se generaliza el caso al movimiento de capas líquidas tridimensionales, sobre cualquier superficie en la que pueda asentarse un sistema coordenado ortogonal. Este desarrollo conduce a las conocidas ecuaciones de Reynolds, que permiten generalizar el problema a geometrías de dimensiones finitas. Para concluir el apartado, se explicarán las bases de la lubricación fluidostática mediante un ejemplo.

#### 3.5.1. Movimiento estacionario bidimensional

La experiencia muestra que dos superficies sólidas pueden deslizarse con facilidad una sobre otra cuando existe una pequeña capa de fluido entre ellas. Esta capa ofrece una gran resistencia a ser exprimida y permanece como una película lubricante, que separa las superficies y sustituye la fricción entre sólidos por la fricción sólido-líquido, que es mucho más pequeña. Además, esta capa de lubricación es capaz de generar sobrepresiones internas suficientemente grandes para dar lugar a fuerzas que permitan soportar cargas en dirección normal a la superficie. Este es el principio básico de la lubricación fluidodinámica perfecta.

Para analizar el principio de este fenómeno, supóngase que se tiene una configuración como la de la figura 3.11 (izquierda), formada por dos superficies, una de ellas plana, que se desliza paralela a sí misma a la velocidad  $v_0$ . La longitud de las superficies en la dirección del movimiento,  $L$ , es mucho mayor que la distancia que las separa,  $h_1$  o  $h_2$ , siendo  $h_1$  mayor que  $h_2$  y su diferencia del mismo orden. Se supone que el movimiento es bidimensional, es decir, que la dimensión de la superficie perpendicular al papel es suficientemente grande para admitir que la solución no depende de  $z$  y que cualquier derivada en esa dirección es nula. Utilizando un sistema de referencia ligado a la superficie estática superior, se definen:  $y$ , la coordenada vertical medida desde la móvil, para que la solución resulte estacionaria;  $x$ , la distancia a lo largo de la superficie móvil desde el origen de la película y que, en una primera aproximación, es también la distancia sobre la superficie fija, al ser  $h/L \ll 1$ , y  $h$ , la separación de las superficies en  $x$ .

La cuasiunidireccionalidad del movimiento está asegurada siempre que la velocidad del fluido en cualquier sección de la capa sea del orden de  $v_0$  y, por tanto, el gradiente de presión en dirección  $\{y\}$  será despreciable respecto al longitudinal (también se dan las condiciones que condujeron a [3.93]). El gradiente de presión en dirección longitudinal

viene dado por [3.90] y es del orden del segundo término si el número de Reynolds, definido como  $\rho v_0 h_1 / \mu$ , es muy superior a la unidad, y del tercero en caso contrario. Los resultados de este apartado son válidos aunque  $v_0$  cambie con el tiempo, siempre que el tiempo característico de esta variación,  $t_0$ , verifique la condición:

$$O\left(\frac{\rho h_1^2}{t_0 \mu}\right) \ll 1 \quad [3.121]$$

que es el cociente entre el primer término y el último de [3.90].

Con estas consideraciones, si se cumple además [3.89], que en este caso es:

$$O\left(\frac{\rho v_0 h_1^2}{\mu L}\right) = O\left(\text{Re}_h \frac{h_1}{L}\right) \ll 1 \quad [3.122]$$

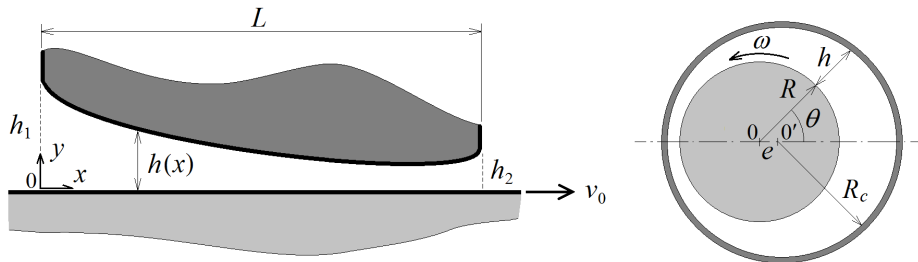
puede aplicarse la ecuación [3.97] de la teoría unidireccional. En la práctica, al ser  $h/L \ll 1$ , resulta que los términos de viscosidad asociados a los gradientes longitudinales de la velocidad son despreciables frente a los asociados a los gradientes transversales, y las fuerzas de inercia son muy pequeñas respecto a las viscosas. Además, en estas condiciones, y tal como se demuestra en [5.30], las variaciones de presión reducida a la entrada y a la salida de la cuña son del orden de  $\mu v_0 / h_1$ , pequeñas respecto a las que se producen a lo largo de la película, de valor aproximado  $\mu v_0 L / h_1^2$ .

La superposición de las soluciones [3.101] y [3.102] de la ecuación [3.97], para las condiciones de contorno ( $y=0, v=v_0; y=h, v=0$ ) en el sistema de referencia escogido, conduce a:

$$v = v_0 \frac{h-y}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h) \quad [3.123]$$

que muestra cómo la distribución de velocidades resulta de superponer, a la corriente de Couette asociada a  $v_0$ , una corriente de Poiseuille proporcional al gradiente local de la presión. Este gradiente se origina entre las placas por la necesidad de mantener el caudal constante ya que, en principio, no se impone diferencia de presión alguna entre la entrada y la salida, y su pérdida local es despreciable. Evidentemente, si  $h$  fuera constante, el gradiente de la presión sería constante o nulo, tal como se ha deducido en el tema anterior.

Figura 3.11. Capa de lubricación entre dos superficies en movimiento relativo. A la izquierda, el caso de dos superficies que forman una cuña bidimensional. A la derecha, el caso de un cojinete cilíndrico en el que la película de fluido se cierra sobre sí misma.





El caudal por unidad de ancho que atraviesa la película es independiente de  $x$  y se obtiene integrando esta ecuación entre 0 y  $h$ . El resultado es:

$$q = \int_0^h v dy = \frac{h}{2} v_0 - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad [3.124]$$

Esta ecuación muestra el principio de la cuña fluidodinámica: la aportación en caudal de la corriente de Couette es mayor en las zonas anchas que en las estrechas, de modo que, para mantener un caudal constante, si  $h$  disminuye en el sentido de  $v_0$ , se ha de crear en la cuña un gradiente de presiones que empuje el fluido en las zonas estrechas, donde  $dp/dx$  será negativo, y lo frene en las anchas, donde  $dp/dx$  será positivo. Si, por el contrario, el espesor de la película crece en  $x$ , los gradientes sobre la superficie intercambian su posición y su efecto se invierte (los gradientes de presión generados en ambos casos han de ser compatibles con la condición de presión existente fuera de la cuña). En definitiva, el efecto de la cuña fluidodinámica es que, cuando el espesor crece en la dirección del movimiento, las superficies tienden a juntarse, mientras que, cuando decrece, se crean sobrepresiones en la película que tienden a separar ambas superficies y pueden ser utilizadas para sostener una carga.

La distribución de la presión en el interior de la cuña viene dada por la integración de [3.124], con las condiciones ( $x=0, p=p_1; x, p$ ):

$$p = p_1 + \int_0^x \frac{12\mu}{h^3} \left( \frac{h}{2} v_0 - q \right) dx \quad [3.125]$$

Para una presión  $p_2$  en  $x=L$ , se cumple:

$$p_2 = p_1 + \int_0^L \frac{12\mu}{h^3} \left( \frac{h}{2} v_0 - q \right) dx \quad [3.126]$$

de donde, al ser  $q$  constante, pero  $h$  no:

$$q = \frac{v_0}{2} \frac{\int_0^L h^{-2} dx}{\int_0^L h^{-3} dx} + \frac{p_1 - p_2}{12\mu} \frac{1}{\int_0^L h^{-3} dx} \quad [3.127]$$

Si  $p_1$  y  $p_2$  coinciden y la cuña es angular, tal que  $h = h_1 - (h_1 - h_2)(x/L)$ , el caudal anterior toma la forma simplificada (independiente de la viscosidad):

$$q = v_0 \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad [3.128]$$

y la presión:

$$p = p_1 + 6\mu v_0 L \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \frac{\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L}}{\left(h_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + h_2 \frac{x}{L}\right)^2} \quad [3.129]$$

o bien:



$$p^* = \frac{p - p_1}{\frac{6\mu v_0 L}{h_2^2}} = \frac{\frac{h_1}{h_2} - 1}{\frac{h_1}{h_2} + 1} \frac{\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L}}{\left(\frac{h_1}{h_2} + \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) \frac{x}{L}\right)^2} \quad [3.130]$$

Esta distribución de presiones se ha representado en la figura 3.13, donde se observa que tiene una forma parabólica, con un máximo intermedio en  $x_p/L = 1/(1+h_2/h_1)$ .

Con estos resultados, es fácil deducir la carga que aguanta la cuña angular y la fricción sobre la placa móvil, ambas por unidad de ancho. Si la presión externa es la atmosférica,  $p_a$ , y  $p_1 = p_2 = p_a$ , la carga es:

$$F_N = \int_0^L (p - p_a) dx \quad [3.131]$$

de donde, con [3.129], resulta:

$$F_N = 6\mu v_0 \left(\frac{L}{h_1 - h_2}\right)^2 \left(\ln \frac{h_1}{h_2} - 2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}\right) \quad [3.132]$$

y, también:

$$F_N^* = \frac{F_N}{\frac{6\mu v_0 L^2}{h_2^2}} = \frac{1}{\left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right)^2} \left(\ln \frac{h_1}{h_2} - 2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}\right) \quad [3.133]$$

El esfuerzo tangencial en la pared móvil horizontal se obtiene de la expresión:

$$\tau_0 = \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{y=0} = -\mu \frac{v_0}{h} - \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \quad [3.134]$$

y, por tanto, la fuerza de fricción tangencial sobre la superficie plana inferior es:<sup>158</sup>

$$F_T = \int_0^L \tau_0 dx = 2\mu v_0 \frac{L}{h_1 - h_2} \left(3 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} - 2 \ln \frac{h_1}{h_2}\right) \quad [3.135]$$

que también se puede escribir:

$$F_T^* = \frac{F_T}{\frac{2\mu v_0 L}{h_2}} = \frac{1}{\frac{h_1}{h_2} - 1} \left(3 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} - 2 \ln \frac{h_1}{h_2}\right) \quad [3.136]$$

Obsérvese, de las expresiones de  $F_N$  y  $F_T$ , que su cociente es independiente de la viscosidad del fluido y de la velocidad  $v_0$ . La relación  $F_T/F_N$  puede interpretarse como un coeficiente de rozamiento efectivo,  $f$ , que disminuye al hacerlo  $h_2$  para una razón  $h_2/h_1$  constante, es decir, cuanto más juntas se hallan las superficies. Por otro lado, siendo  $\alpha \approx (h_1 - h_2)/L$  el ángulo de la cuña, la carga aumenta al disminuir  $\alpha$  para una  $h_2$  dada, pero sólo hasta el punto en que la cuña es demasiado plana y desaparece su efecto. En consecuencia, ha de haber un valor óptimo para el ángulo de la cuña en función de la carga aplicada y las dimensiones de las superficies. Estas cuestiones y otras relativas al uso práctico de este fenómeno se describen más adelante, en el apartado 5.6.1.



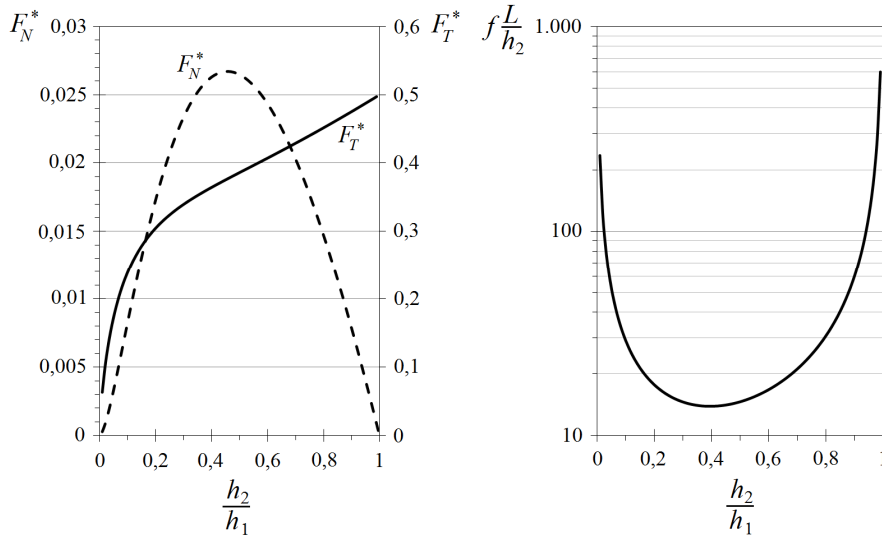


Figura 3.12. Fuerza de sustentación,  $F_N^*$ , y módulo de la fuerza tangencial,  $F_T^*$  (izquierda), y factor de rozamiento,  $fL/h_2$  (derecha), en función de la relación  $h_2/h_1$ . El valor óptimo (de diseño) de esta relación se encuentra en torno a  $h_2/h_1 = 0,45$ .

A la derecha de la figura 3.11, se muestra el esquema de un cojinete cilíndrico y un eje colocados excéntricamente una distancia  $e$ , en general pequeña, comparada con los radios respectivos y su diferencia. Esta configuración también puede analizarse con la teoría anterior, en el supuesto bidimensional, identificando  $x$  con la coordenada curvilínea  $R\theta$  a lo largo del perímetro del eje y teniendo en cuenta ciertos condicionantes impuestos por la geometría y la simetría del problema. En este caso, la cuña curva que se genera se cierra sobre sí misma y presenta una región donde se estrecha y otra donde se ensancha, lo que conduce a una pareja de gradientes de presión, crecientes y decrecientes, que tienden a aproximar el eje y el cojinete en una zona y a alejarlo en la otra. Ambos efectos sumados permiten resistir una carga perpendicular al eje cuando éste está en movimiento.

Siendo  $R$  el radio del eje y  $R_c$  el del cojinete, se puede ver en la figura 3.11 que el huelgo a un ángulo  $\theta$  cumple la condición:

$$(R + h)^2 + e^2 - 2e(R + h)\cos\theta = R_c^2 \quad [3.137]$$

o, de forma aproximada,<sup>159</sup>  $h \approx j(1 + \varepsilon \cos\theta)$ , donde se han definido la excentricidad unitaria  $\varepsilon = e/j$  y el juego radial  $j = R_c - R$ . Sustituyendo  $v_0$  por  $\omega R$ ,  $dx$  por  $Rd\theta$ , y utilizando la expresión simplificada de  $h$  en [3.124], un desarrollo paralelo anterior conduce a las expresiones que permiten calcular la carga y el par del eje necesario, en función de la excentricidad y de la geometría del problema. Sin entrar en más detalles que los estrictamente necesarios, ya que la resolución analítica de este caso es bastante complicada, se obtienen las expresiones que se presentan a continuación.

El caudal [3.124], en función del ángulo  $\theta$ , es:

$$q = \frac{j(1 + \varepsilon \cos\theta)}{2} \omega R - \frac{j^3(1 + \varepsilon \cos\theta)^3}{12\mu R} \frac{dp}{d\theta} \quad [3.138]$$



Como, en este caso,  $p_0 = p_{2\pi}$ , tras sustituir e integrar como se hizo en [3.128], se deduce que el caudal es:

$$q = \frac{\omega R}{2} \frac{\int_0^{2\pi} (j(1 + \varepsilon \cos \theta))^{-2} d\theta}{\int_0^{2\pi} (j(1 + \varepsilon \cos \theta))^{-3} d\theta} = \omega R j \frac{1 - \varepsilon^2}{2 + \varepsilon^2} \quad [3.139]$$

y la distribución de presiones:

$$p = p_0 + 6\mu \frac{\omega R^2}{j^2} \frac{\varepsilon(2 - \varepsilon \cos \theta) \sin \theta}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \quad [3.140]$$

o bien:

$$p^* = \frac{p - p_0}{6\mu \frac{\omega R^2}{j^2}} = \frac{\varepsilon(2 - \varepsilon \cos \theta) \sin \theta}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \quad [3.141]$$

A partir de este punto, es posible calcular la fuerza que el cojinete será capaz de aguantar y el par que ejerce el fluido sobre el eje. Téngase presente que la presión  $p_0$  es constante y, por tanto, su resultante es nula. Además, dada la antisimetría de la distribución de presiones [3.140] (v. figura 3.13, cuando no hay cavitación), la dirección de la resultante de la presión es perpendicular a la línea de centros  $00'$ , pues las componentes paralelas se cancelan por simetría. Con todo, la fuerza por unidad de longitud sobre el cojinete se calcula haciendo:<sup>160</sup>

$$F = R \int_0^{2\pi} (p - p_0) \sin \theta d\theta \quad [3.142]$$

La fuerza sobre el eje es de igual módulo pero opuesta a la anterior. Tras integrar, con [3.140]:

$$F = 12\pi \frac{\mu \omega R^3}{j^2} \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2} (2 + \varepsilon^2)} \quad [3.143]$$

Se observa que, sin carga, la excentricidad es nula, y que ésta aumenta al hacerlo la carga. El caso límite correspondiente a una carga muy grande, en que el eje y el cojinete entrarían en contacto y  $\varepsilon = 1$ , no se contempla en esta exposición, pues da lugar a la pérdida de la capacidad de lubricación perfecta del cojinete.<sup>161</sup>

El momento que ejerce el fluido sobre el eje se obtiene de la expresión (el par necesario para mover el eje será de signo contrario):

$$M = \int_0^{2\pi} \tau_\theta R^2 d\theta \quad [3.144]$$

siendo  $\tau_\theta$  de [3.134], y en este caso:

$$\tau_\theta = \mu \frac{\omega R}{j(1 + \varepsilon \cos \theta)} + \frac{j(1 + \varepsilon \cos \theta)}{2R} \frac{dp}{d\theta} \quad [3.145]$$

Por tanto:



$$M = 4\pi \frac{\mu\omega R^3}{j} \frac{1+2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}(2+\varepsilon^2)} \quad [3.146]$$

Dado que tanto el par como la carga son función de la excentricidad, el par es función de la carga y su relación:

$$\frac{M}{F} = \frac{1+2\varepsilon^2}{3\varepsilon} j \quad [3.147]$$

función sólo del juego radial y de la excentricidad, pero no de la viscosidad ni de la velocidad de rotación.

El coeficiente de rozamiento equivalente del cojinete se define como:

$$f = \frac{M}{RF} = \frac{1+2\varepsilon^2}{3\varepsilon} \frac{j}{R} \quad [3.148]$$

de donde se sigue que el factor adimensional  $fR/j$  es sólo función de la excentricidad.

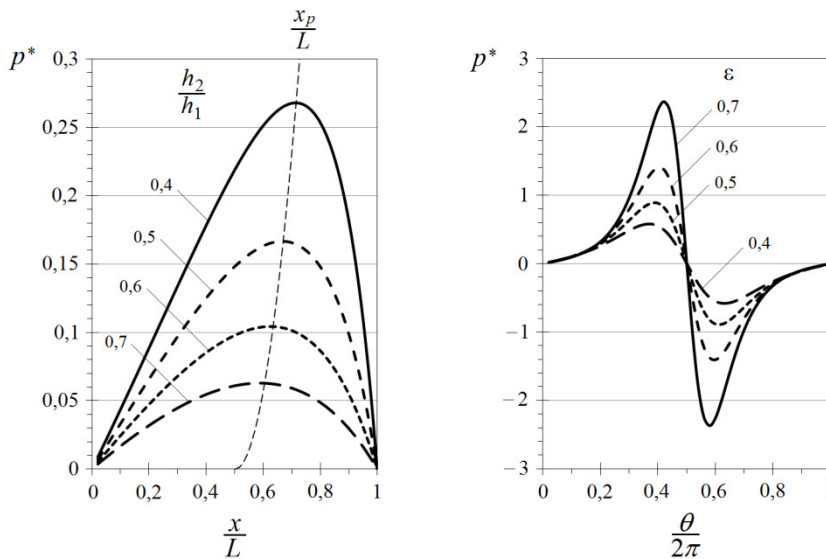


Figura 3.13. Distribución de la presión  $p^*$  en una cuña angular [3.130] con  $p_1 = p_a$  (izquierda) y en un cojinete cilíndrico [3.141] (derecha). En este último caso, conocido como solución completa de Sommerfeld, la zona de presión negativa puede dar lugar a la cavitación de la película fluida. Esto puede evitarse aumentando  $p_0$ , pero a expensas de generar sobrepresiones excesivamente elevadas en el resto de la película y desviar la dirección de la resultante.

Las relaciones [3.143] y [3.146] pueden escribirse de la forma adimensional:<sup>162</sup>

$$F^* = \frac{Fj^2}{\mu\omega R^3} = 12\pi \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}(2+\varepsilon^2)} = f(\varepsilon) \quad [3.149]$$

$$M^* = \frac{Mj}{\mu\omega R^3} = 4\pi \frac{1+2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}(2+\varepsilon^2)} = g(\varepsilon)$$

La inversa de la fuerza adimensional,  $1/F^*$ , se denomina *parámetro de Sommerfeld*,  $S$ . En la práctica, la forma usual de este parámetro introduce el número  $\pi$  y reemplaza el término  $F/R$  (recuérdese que la fuerza está dada por unidad de longitud) por una pre-



sión característica,  $P$ , correspondiente a la carga por unidad de área proyectada del cojinete (útil en cojinetes de envergadura no infinita, con  $F = 2RP$ ). El parámetro de Sommerfeld resulta, entonces:

$$S = \frac{\mu\omega}{2\pi P} \left(\frac{R}{j}\right)^2 = \frac{\mu n}{P} \left(\frac{R}{j}\right)^2 \quad [3.150]$$

y, teniendo en cuenta [3.147]:

$$M^* = m(S) \quad [3.151]$$

En conclusión, de las ecuaciones anteriores se aprecia que hay dos parámetros que rigen el comportamiento del sistema: la cifra  $S$  e, indirectamente, la excentricidad  $\varepsilon$ . Está ampliamente asumido que la excentricidad óptima se encuentra en torno a  $\varepsilon = 0,7$ . Valores más grandes de  $\varepsilon$  dificultan la alineación del eje y del cojinete y valores menores son propensos a causar vibraciones y producen aumentos importantes de la temperatura del lubricante.

En los cojinetes reales, se ha de tener en cuenta también la relación entre el radio y su ancho,  $R/b$ . En el apartado 5.6.2, se introducen algunos de los efectos que no se han tenido en cuenta en la teoría bidimensional desarrollada aquí y también la influencia de este factor.

### 3.5.2. Generalización tridimensional. Ecuaciones de Reynolds

El desplazamiento tridimensional de un fluido newtoniano en régimen laminar está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones se simplifican en base a diferentes causas, las más importantes de las cuales son la simetría y la existencia de dimensiones preferentes, ya sea porque su extensión es excesivamente grande o demasiado pequeña. El movimiento es bidimensional cuando la distribución de velocidades forma un ángulo recto en todos los puntos con alguna dirección, de forma que los desplazamientos en esa dirección son despreciables y su velocidad, nula. Cuando, en el movimiento, hay una dirección de pequeña extensión en comparación con las otras dos, la continuidad del movimiento garantiza que la velocidad en esa dirección será pequeña, salvo por el cambio en magnitud de la propia extensión, y aun así despreciable respecto a las otras dos o respecto a los cambios que la propia variación de la extensión induce en ellas.

En el apartado anterior, se ha analizado el movimiento estacionario bidimensional y cuasiunidireccional de películas líquidas en las que el ancho permanecía constante en el tiempo. A continuación, se formula la teoría que generaliza el tratamiento a casos tridimensionales en los que el ancho puede ser variable. En el desarrollo que sigue, se supone que son aplicables las condiciones [3.121] y [3.122], evaluadas para las velocidades y los tiempos característicos actuales. Se recuerda que la primera indica que los términos de aceleración local son despreciables respecto a los viscosos, condición de movimiento cuasiestacionario, y la segunda implica que lo son los de la aceleración convectiva.

Sean dos superficies sólidas, impermeables y curvas en movimiento relativo, separadas por una capa fluida delgada de espesor  $h$ , muy inferior a la longitud característica de cada una de las superficies. Tómesese un sistema de referencia ligado a una de ellas, por



ejemplo la inferior, en un sistema de coordenadas ortogonal,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $y$ , en el que  $y$  es la distancia medida a la superficie fija.<sup>163</sup> La superficie móvil respecto al sistema de referencia tiene por ecuación  $y_m = h(\alpha, \beta, t)$ , y el espacio ocupado por la película,  $0 < y < h$ , es variable, con  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $t$ . Las componentes de la velocidad de la superficie móvil en un punto  $(\alpha, \beta)$  y en un instante  $t$  son  $v_{m,\alpha}$ ,  $v_{m,\beta}$  y  $\partial h / \partial t$ , todas ellas, en principio, del mismo orden y significativas.

Al ser la capa muy delgada, los términos de variación de la presión reducida en dirección transversal son muy inferiores a los longitudinales, condición de movimiento cuasiunidireccional. Por tanto, la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección  $\alpha$  es:

$$\frac{1}{L_\alpha} \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \mu \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial y^2} \quad [3.152]$$

con  $p$  independiente de  $y$ . En esta ecuación,  $L_\alpha$  es un coeficiente métrico que permite transformar la variación  $d\alpha$  en un elemento diferencial de longitud.<sup>164</sup>

La integración de las ecuaciones [3.152] utiliza las condiciones de contorno ( $v_\alpha = v_\beta = 0$ ,  $y = 0$ ;  $v_\alpha = v_{m,\alpha}$ ,  $v_\beta = v_{m,\beta}$ ,  $y = h$ ), de donde resultan sendas ecuaciones análogas a [3.123].

$$v_\alpha = v_{m,\alpha} \frac{y}{h} + \frac{1}{2\mu L_\alpha} \frac{dp}{d\alpha} y(y-h) \quad [3.153]$$

El flujo volumétrico a través de la película en la dirección  $\alpha$  por unidad de longitud en dirección  $\beta$  es:

$$q_\alpha = \int_0^h v_\alpha dy = \frac{h}{2} v_{m,\alpha} - \frac{h^3}{12\mu L_\alpha} \frac{dp}{d\alpha} \quad [3.154]$$

que es también análoga a [3.124].

Los flujos en  $\alpha$  y  $\beta$  están relacionados entres sí por la ecuación de conservación de la masa aplicada al volumen de control correspondiente al volumen de película situado sobre el elemento rectangular de área diferencial  $L_\alpha L_\beta d\alpha d\beta$  de la figura 3.14. Conviene indicar que el volumen de fluido correspondiente es  $h L_\alpha L_\beta d\alpha d\beta$  porque la geometría de estos problemas es de forma que  $dh \ll L_\alpha d\alpha$  y, en consecuencia, en una longitud diferencial  $L_\alpha d\alpha$ ,  $h$  se puede suponer constante. El planteamiento integral de este principio indica que el flujo de masa a través de las superficies no impermeables de este volumen ha de ser igual a la variación de la masa contenida.<sup>165</sup>

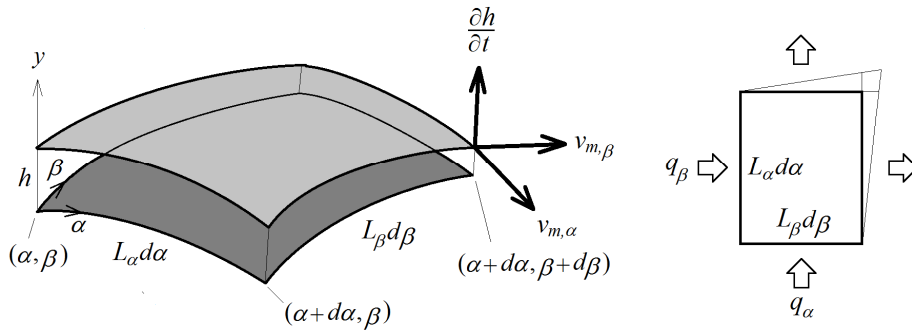
La ecuación resultante para fluido incompresible en función de los caudales [3.154], dividida por el término  $\rho d\alpha d\beta$ , es:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h L_\alpha L_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (L_\beta q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (L_\alpha q_\beta) = 0 \quad [3.155]$$

Esta ecuación, con [3.154], es la *ecuación de Reynolds*, que determina la variación de la presión reducida en la película en función de  $\alpha$  y  $\beta$ . Como, en esta ecuación, no aparecen derivadas temporales de  $p$ , el tiempo actúa como un parámetro y no se precisan condiciones iniciales, aunque sí de contorno.



Figura 3.14. Superficies generalizadas y volumen de control utilizados en la deducción de la ecuación de Reynolds de la lubricación fluidodinámica por películas delgadas.



En general, la resolución de la ecuación de Reynolds en un problema real es abordable sólo por medios numéricos, pero permite extender a otras configuraciones los principios generales descritos al principio de este tema. Esta ecuación, para una cuña de ancho finito, se escribe:

$$12 \frac{\partial h}{\partial t} + 6 \left( v_{m,x} \frac{\partial h}{\partial x} + v_{m,z} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dz} \right) \quad [3.156]$$

Para el caso de un cojinete cilíndrico de profundidad  $b$ , son:  $\alpha = \theta$ ,  $\beta = z$ ,  $L_\alpha = R$ ,  $L_\beta = 1$ ,  $v_{m,\alpha} = \omega R$ ,  $v_{m,\beta} = 0$  y:

$$q_\alpha = \frac{h}{2} \omega R - \frac{h^3}{12\mu R} \frac{dp}{d\theta} \quad [3.157]$$

$$q_\beta = - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dz}$$

La primera de estas ecuaciones es [3.138]. Sustituidas en [3.155] en el caso en que  $h$  es constante en  $t$ , conducen a:

$$6\omega R \frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu R} \frac{dp}{d\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{Rh^3}{\mu} \frac{dp}{dz} \right) \quad [3.158]$$

o bien, con  $h = j(1 + \varepsilon \cos \theta)$  y suponiendo  $\mu$  constante:

$$6\mu \frac{\omega}{j^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (1 + \varepsilon \cos \theta)^3 \frac{dp}{d\theta} \right) + (1 + \varepsilon \cos \theta)^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad [3.159]$$

La ecuación de Reynolds [3.158] en forma adimensional es:

$$12S \frac{\partial h^*}{\partial \theta^*} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left( h^{*3} \frac{dp^*}{d\theta^*} \right) + \left( \frac{R}{b} \right)^2 h^{*3} \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^{*2}} \quad [3.160]$$

donde se ha utilizado el parámetro de Sommerfeld [3.150] y se han definido las variables adimensionales:  $p^* = p/P$ ,  $\theta^* = \theta/\pi$ ,  $z^* = z/b$ ,  $h^* = h/j = 1 + \varepsilon \cos(\pi\theta^*)$ . Dependiendo del valor del parámetro  $(R/b)^2$ , esta ecuación conduce a la solución de Sommerfeld, correspondiente al caso bidimensional, cuando  $R/b$  es muy pequeño, o a la solución de Ocvirk, cuando es muy grande.



En este último caso, el segundo término del segundo miembro de [3.160] domina el primero y la solución se corresponde con geometrías de cojinetes cortos, para los que el gradiente de presión es mayor en dirección transversal  $\{z\}$  que en dirección longitudinal  $\{\theta\}$  o, al menos, del mismo orden (pues su relación depende de  $z$  y  $\theta$ ). Se demuestra entonces que, si el origen de  $z$  se toma en el centro del cojinete y se supone que la presión a ambos lados es la atmosférica, la distribución de la presión en  $z$  es:

$$p = p_a + 3\mu \frac{\omega}{j^2} \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right) \quad [3.161]$$

En la práctica, el valor de  $R/b$  suele ubicarse en el intervalo entre 0,25 y 2, pero la tendencia actual se orienta a la fabricación de cojinetes cada vez más cortos, que no presentan los problemas de alineación de los cojinetes largos y en que es más fácil la alimentación del fluido fresco y también su drenaje. Por estos motivos, el estudio de la solución de Ocvirk cobra importancia para la estimación de las propiedades de los cojinetes, ya que la solución final es una combinación aproximadamente lineal de ambos resultados<sup>166</sup> y es suficientemente precisa cuando se cumple que  $R/b$  es mayor que 1,5.

El término asociado a la variación temporal de  $h$  de la ecuación de Reynolds debe retenerse en los denominados *fenómenos dinámicos de aplastamiento* y durante la puesta en marcha del cojinete desde la posición de reposo. Observando el orden de magnitud de los términos correspondientes de las ecuaciones [3.154] y [3.155], se deduce que un movimiento relativo de la superficie normal a la película de velocidad  $\partial h/\partial t$  produce en dirección longitudinal uno mucho mayor. Como, en principio:

$$O\left(\frac{\partial}{\partial t}(hL_\alpha L_\beta)\right) = O(L_\beta q_\alpha) = O(L_\beta v_\alpha h) \quad [3.162]$$

el orden de la variación longitudinal de la velocidad resulta ser:

$$O(v_\alpha) = O\left(\frac{L_\alpha}{h} \frac{\partial h}{\partial t}\right) \gg O\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right) \quad [3.163]$$

Ello indica que no es necesario retener, en las ecuaciones [3.154], velocidades de superficie  $v_m$  pequeñas frente al término  $(L/h)\partial h/\partial t$  y, por tanto, pequeños movimientos axiales del cojinete pueden despreciarse respecto a los radiales del mismo orden.

Para mostrar cómo se opera con el término no estacionario  $\partial h/\partial t$ , se analiza el flujo que resulta del aplastamiento (uniforme) de una película por acercamiento de dos placas circulares de radio  $R$ . En este caso, la ecuación de Reynolds es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(hr) + \frac{\partial}{\partial r}(rq_r) = 0 \quad [3.164]$$

con  $\alpha=r$ ,  $\beta=\theta$ ,  $L_\alpha=1$ ,  $L_\beta=r$ , y  $q_r$  de [3.154], con  $v_m=0$ . Esta ecuación, integrada dos veces con las condiciones de contorno ( $r=0$ ,  $\partial p/\partial r=0$ ;  $r=R$ ,  $p=p_a$ ), conduce a:

$$p = p_a - \frac{3\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (R^2 - r^2) \quad [3.165]$$

de donde:



$$q_r = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dr} = -\frac{r}{2} \frac{dh}{dt} \quad [3.166]$$

Nótese que éste es el caudal por unidad de perímetro que se tiene a un radio  $r$ , por el cambio del volumen contenido en  $r$ ,  $\pi r^2 dh/dt$ . La velocidad asociada es  $v_r = q_r/h$ , mucho mayor que  $dh/dt$ , salvo en el centro del disco, donde  $r \approx h$ .

La fuerza necesaria para acercar ambas superficies se calcula mediante la expresión:

$$F = 2\pi \int_0^R (p - p_a) r dr = -\frac{3}{2} \pi \mu \frac{R^4}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad [3.167]$$

y es positiva, es decir, de compresión, cuando  $dh/dt$  es negativo y ambas placas se acercan. Esta ecuación demuestra que el fluido tiende a repeler, con una fuerza inversamente proporcional a  $h^3$ , la acción que trata de aplastarlo. Evidentemente, este efecto amortiguador<sup>167</sup> perdura mientras exista película y  $h$  no interfiera con la rugosidad superficial, y ha de sumarse a la disipación viscosa inherente, incluida la del flujo desplazado [3.166] o a la asociada al posible impacto.

### 3.5.3. Lubricación fluidostática

Cuando el movimiento relativo  $v_m$  entre las superficies es tan lento que no es capaz de generar las sobrepresiones internas necesarias para mantenerlas separadas ante una carga determinada, es necesario recurrir a la inyección mecánica de líquido a presión. Los cojinetes basados en este principio pueden funcionar igualmente con velocidad relativa, pero sobre todo se muestran adecuados cuando la carga es muy grande y la velocidad relativa, pequeña o nula, o durante el arranque de algunas máquinas o de sus ejes.

La película de lubricante correspondiente a un huelgo y a una carga determinados necesita una presión de inyección y consume un caudal, que han de ser abastecidos por un sistema externo al cojinete. La fiabilidad de este sistema es crucial para el mantenimiento de la carga y del grueso mínimo de película, y no sólo porque ha de ser capaz de comunicar una potencia hidráulica determinada sin interrupciones, sino porque ha de hacerlo con un fluido en buenas condiciones, filtrado y acondicionado, según las características de la instalación. En la figura 3.15, se muestra una disposición típica de estos cojinetes.

Supóngase que se trata de mantener dos piezas circulares, de radios  $R_1$  y  $R_2$ , separadas una distancia  $h$ , en principio variable con el tiempo. En este caso, la ecuación de Reynolds es [3.164], donde, como antes, dadas la simetría del problema y la ausencia de rotación relativa entre las superficies, se entiende que  $p$  es independiente de  $\theta$ . Integrando esta ecuación, con las condiciones de contorno ( $r=R_1$ ,  $p=p_0$ ;  $r=R_2$ ,  $p=p_a$ ), se obtiene:

$$p = p_a - \frac{3\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (R_2^2 - r^2) + \left( (p_0 - p_a) + \frac{3\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (R_2^2 - R_1^2) \right) \frac{\ln \frac{r}{R_2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad [3.168]$$





Si  $dh/dt=0$ , es decir, ya se ha alcanzado el grueso de película estacionario,  $h_0$ , la carga que soporta el cojinete es:

$$F = \pi R_1^2 (p_0 - p_a) + 2\pi \int_{R_1}^{R_2} (p - p_a) r dr = \frac{1}{2} \pi (R_2^2 - R_1^2) \frac{(p_0 - p_a)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad [3.169]$$

y el caudal total que consume:

$$Q = 2\pi r q_r = -2\pi r \frac{h_0^3}{12\mu} \frac{dp}{dr} = \pi \frac{h_0^3}{6\mu} \frac{(p_0 - p_a)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad [3.170]$$

De las expresiones anteriores, se deduce que el equilibrio se consigue a un grueso de película que depende del caudal inyectado y de la carga:

$$h_0 = \left( 3\mu (R_2^2 - R_1^2) \frac{Q}{F} \right)^{1/3} \quad [3.171]$$

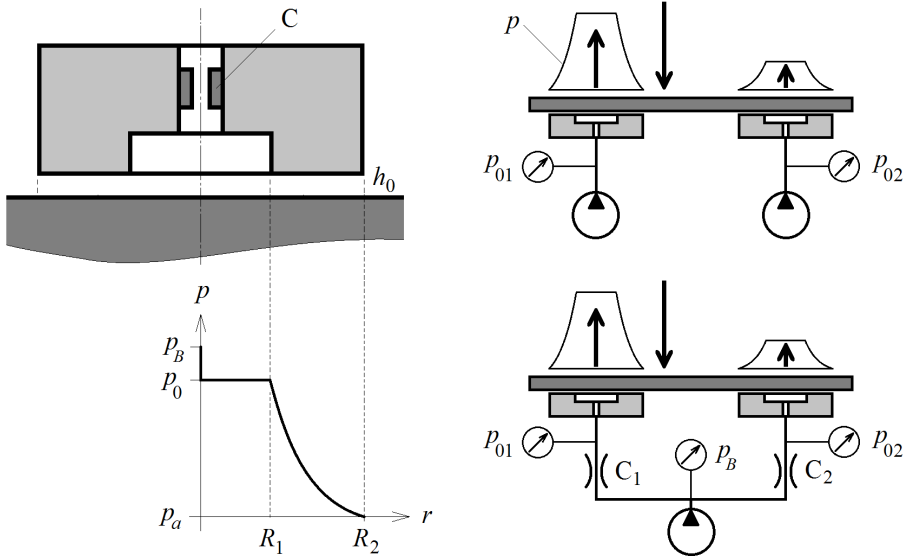


Figura 3.15. A la izquierda, un cojinete hidrostático para carga vertical y distribución de presiones correspondiente [3.168] cuando  $dh/dt=0$ . En el sistema representado, la presión de bombeo,  $p_B$ , se reduce a la existente en la cavidad interna del cojinete,  $p_0$ , mediante un compensador (C). El espesor típico  $h_0$  se encuentra en el intervalo  $[20, 80] \mu\text{m}$ . A la derecha, se presenta la disposición de varios de estos cojinetes alimentados a diferentes  $p_B$  o con diferentes compensadores, para habilitar el soporte de cargas excéntricas ( $p_{01} > p_{02}$ ).

Por otro lado, la expresión [3.169] sugiere que la fuerza que puede realizar el cojinete es independiente de  $h_0$ , si  $p_0$  se mantiene constante. En la práctica, cualquier cambio en la carga aplicada sobre el cojinete puede inducir cambios en el espesor de la película, que pueden colapsarla cuando la carga aumenta y el espesor disminuye, o volverlo inestable si la carga disminuye y el espesor aumenta. Esta ecuación confirma que, si no cambian ni la geometría ni la viscosidad del fluido, el control del caudal que alimenta el cojinete permite compensar las variaciones de la carga y mantener el espesor dentro del margen operativo.



En esta clase de problemas dinámicos, es conveniente definir la rigidez asociada a los cambios de carga cuando el sistema es alimentado a caudal constante.<sup>168</sup> Es fácil deducir que dicha rigidez es:

$$k = -\frac{dF}{dh} = 9\mu(R_2^2 - R_1^2) \frac{Q}{h^4} = \frac{3F}{h} \quad [3.172]$$

Este análisis muestra que la rigidez es proporcional a la viscosidad del fluido y, por tanto, función de la temperatura y variable durante el trabajo del cojinete. Esta circunstancia puede evitarse utilizando compensadores capilares (v. figura 3.15), en los que la caída de presión es también proporcional a la viscosidad y con los que  $k$  se hace prácticamente independiente de  $\mu$ , al compensarse ambos efectos.

### 3.6. Flujo compresible estacionario

Este tema trata del movimiento homentrópico unidimensional y cuasiunidireccional de los gases ideales en conductos de sección lentamente variable en que las variaciones de la presión son suficientemente importantes para que el gas varíe su densidad y tenga que ser considerado compresible.

Como la entropía de la partícula se mantiene constante en esta clase de movimientos, existe una ecuación de estado del tipo:  $s = s(p, \rho) = s_0$ , de la que resulta que la presión es una función de la densidad:  $p = p(\rho)$ ,<sup>169</sup> y sus cambios están asociados a la ecuación:

$$dp = \left[ \frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_{s_0} d\rho \quad [3.173]$$

siendo la parcial una variable termodinámica de estado, cuadrado de la velocidad del sonido,  $c$ , relacionada con el número de Mach,  $M$ .

#### 3.6.1. Efecto de una perturbación y número de Mach

La definición [3.173] se entiende mejor al analizar el efecto que una perturbación tiene en un fluido estacionario. Para el volumen de control de la figura 3.16, es fácil ver que las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento conducen a:

$$\begin{aligned} (\rho + \rho')v' &= \rho'c \\ \rho cv' &= p' \end{aligned} \quad [3.174]$$

donde la magnitud de la perturbación se indica con las variables prima y su velocidad de propagación, con  $c$ . De [3.174], se despeja:

$$c^2 = \frac{p'}{\rho'} \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho} \right) \quad [3.175]$$

Es decir, para perturbaciones acústicas o de pequeña magnitud e isentrópicas, resulta:

$$c^2 = \frac{p'}{\rho'} = \left[ \frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_{s_0} \quad [3.176]$$



Esta ecuación es conocida como la *ecuación de Laplace del sonido* o velocidad del sonido a frecuencia nula.<sup>170</sup> Por su parte, la ecuación [3.175] indica que la velocidad de una perturbación aumenta con su intensidad, de modo que las ondas de una explosión se desplazan a más velocidad que la del sonido.

El número de Mach definido en función de la velocidad del sonido anterior puede ser inferior, igual o superior a la unidad, y se utiliza para identificar las características de las diferentes condiciones de flujo que se pueden dar en un fluido compresible. Así, se sabe que el efecto que produce el aporte de calor o de trabajo sobre el flujo es distinto, dependiendo de si éste es subsónico o supersónico (y resulta de aplicación la denominada *ley de inversión*). Además, la naturaleza misma del flujo es completamente diferente en ambos casos: por un lado, en un flujo subsónico, nunca aparecen ondas de choque, salvo en aquellas regiones en las que, localmente, el número de Mach es mayor que 1;<sup>171</sup> por otro lado, si bien la presencia de un obstáculo aguas abajo en un flujo subsónico afecta el campo de presiones y la distribución de las líneas de corriente aguas arriba, en un flujo supersónico el fluido aguas arriba fluye como si el obstáculo no existiera hasta justo delante del mismo, donde precisamente se forma una onda de choque.

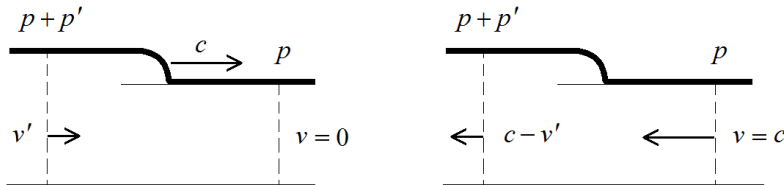


Figura 3.16. A la izquierda, el efecto que una perturbación tiene al moverse a la velocidad  $c$  en el seno de un fluido estacionario. A la derecha, el volumen de control que representa el modelo relativo a la onda para su análisis y que puede considerarse un flujo isentrópico unidimensional en un conducto de área constante. Se supone que la perturbación es una onda de pequeña amplitud, carente de masa, cuyo efecto sobre las partículas de fluido puede analizarse mediante las ecuaciones generales del movimiento, si se supone que es estática y que es el fluido el que se mueve relativo a ella.

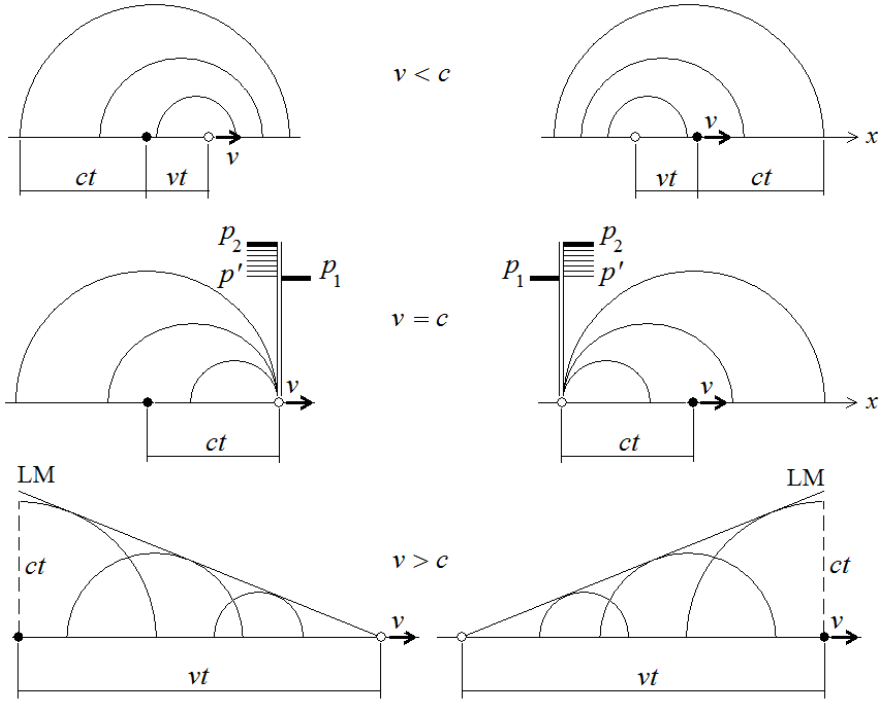
Para entender mejor por qué la naturaleza del flujo cambia a ambos lados de la condición  $M = 1$ , es necesario comprender una característica básica de las ondas: cualquier pequeña perturbación en forma de onda<sup>172</sup> se propaga a la velocidad  $c$  respecto del fluido; es decir, la perturbación es transportada por el fluido en su movimiento. En un sistema de coordenadas absoluto y con el fluido en movimiento estacionario a velocidad  $v$  respecto del mismo, la perturbación generada en un punto fijo tiene una velocidad absoluta que depende de la velocidad del fluido y de su dirección.

Cuando  $v < c$ , la perturbación alcanza toda la región considerada antes que el fluido, tanto aguas arriba como aguas abajo de éste, aunque recorre más distancia aguas abajo por unidad de tiempo.<sup>173</sup> En cambio, si  $v > c$ , la perturbación sólo se propaga aguas abajo y lo hace dentro de un cono cuya apertura es tanto más pequeña cuanto mayor sea el cociente  $v/c$ . El resultado es semejante si el fluido está en reposo y es el origen de la perturbación el que se desplaza a la velocidad  $v$ , por ejemplo cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido en calma, aunque entonces el cono característico se genera por detrás del cuerpo, tal como se observa en la figura 3.17. En cualquier caso, a partir de la condición  $v = c$ , las ondas sólo se propagan en un semiespacio a un lado del origen de la perturbación, de modo que el observador o el fluido en movimiento permanecen insensibles a lo que ocurre al otro lado de la barrera sónica.<sup>174</sup>



Figura 3.17.

Impronta de una perturbación que se propaga por un fluido (sólo se muestra la parte superior por simetría). A la izquierda, el fluido (●) está en reposo y es el origen de la perturbación (○) el que se mueve a la velocidad  $v$ . A la derecha, el fluido se mueve a velocidad constante y es el origen de la perturbación el que está en reposo. Arriba, el caso subsónico ( $M < 1$ ,  $v < c$ ) de ambos escenarios: a la izquierda, se observa que la onda generada se mueve por delante del objeto que la causa y hace que el observador perciba su existencia antes de que el objeto alcance su posición. En el centro, el caso crítico en que  $M = 1$ , para el que se forma una onda de amplitud finita en la perturbación por acumulación de las ondas elementales generadas. Abajo, el caso supersónico ( $M > 1$ ) en el que las ondas generan una superficie cónica que las envuelve y cuyo ángulo cumple la condición  $\sin \alpha = c/v = 1/M$ . En este caso, se desarrolla una onda de choque delante del objeto. Las líneas generatrices de las superficies cónicas se denominan líneas de Mach, LM.



### 3.6.2. Flujo homentrópico unidimensional

Una vez explicadas algunas particularidades de las ondas y su modo de propagación, se está en condiciones de analizar, en más detalle, el movimiento homentrópico unidimensional de un fluido compresible. Para empezar, la supuesta unidireccionalidad del movimiento impone que los gradientes de presión sean despreciables en dirección transversal, y así resulta que tanto la velocidad como la densidad y la misma presión son sólo función de la coordenada longitudinal  $x$  y del tiempo. En estas condiciones, las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad [3.177]$$

donde se han omitido las fuerzas másicas al tratarse de gases.<sup>175</sup> La última de estas ecuaciones puede escribirse con [3.173] como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad [3.178]$$

Es posible resolver este sistema de ecuaciones para diversas situaciones prácticas, como el flujo compresible estacionario unidimensional, cuasiunidireccional y homentrópico.



pico de esta sección, y la propagación de ondas en el seno del fluido, que se analizará más adelante al final de este capítulo.

La conservación de las magnitudes de remanso,  $h_0$ ,  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $c_0$ , etc., en el movimiento homentrópico estacionario impone la siguiente relación entre las variaciones de la velocidad, la presión, la entalpía y la densidad a lo largo de la línea de corriente:

$$\frac{dh}{\partial x} = -v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad [3.179]$$

Obsérvese que el incremento de la velocidad en el fluido conlleva la disminución de todas las magnitudes estáticas.

Introduciendo el gasto másico específico,  $j = \rho v$ , y teniendo presente que  $dj = v d\rho + \rho dv$ , se deduce la expresión:

$$\frac{dj}{dv} = \rho(1 - M^2) \quad [3.180]$$

que muestra que la densidad de flujo crece en el flujo subsónico cuando la velocidad aumenta a lo largo de una línea de corriente, y que alcanza un máximo en la condición  $M = 1$ . Esta ecuación y las [3.179] son válidas tanto para el flujo subsónico como para el supersónico.

Como, para un gas calóricamente perfecto, se cumple que  $c^2 = \gamma RT = (\gamma - 1)h$ , y, para la entalpía:

$$\frac{h_0}{h} = 1 + \frac{v^2}{2h} \quad [3.181]$$

se deduce fácilmente, con [3.179]:

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{c} &= \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1/2} = \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1/2} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/2} \\ \frac{p_0}{p} &= \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \end{aligned} \quad [3.182]$$

La condición  $M = 1$  define las condiciones críticas del flujo isentrópico, que son, para  $\gamma = 1,4$ :

$$\begin{aligned} \frac{c^*}{c_0} &= \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right)^{-1/2} = 0,9129 \\ \frac{T^*}{T_0} &= \left( \frac{c^*}{c_0} \right)^2 = \frac{2}{\gamma + 1} = 0,8333 \\ \frac{p^*}{p_0} &= \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0,5283 \\ \frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left( \frac{p^*}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = 0,6339 \end{aligned} \quad [3.183]$$



### 3.6.3. Movimiento en conductos de sección lentamente variable

Para el caso del movimiento que tiene lugar en un conducto de área lentamente variable, en el que el gasto másico  $G$  sea constante, el principio de conservación de la masa en forma diferencial es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0 \quad [3.184]$$

Combinando esta ecuación y [3.179], se obtienen las siguientes variaciones de la velocidad, la densidad y la presión con el área  $A$  del conducto, cuya relación con [3.180] es evidente:

$$\frac{dA}{A} = -(1 - M^2) \frac{dv}{v} = \frac{1 - M^2}{M^2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} \quad [3.185]$$

De esta expresión, se deduce que, en movimientos subsónicos ( $M < 1$ ), el aumento del área del conducto disminuye la velocidad y aumenta la presión, pero que, en movimientos supersónicos ( $M > 1$ ), esta relación se invierte y el fluido va más rápido en las zonas anchas que en las estrechas. Se denomina *tobera* un conducto en el que el fluido se acelera y se expande, el cual es convergente en el flujo subsónico y divergente, en el supersónico. A la inversa, un *difusor* es un conducto en el que el fluido se decelera y se comprime, el cual es divergente en el flujo subsónico y convergente, en el supersónico.<sup>176</sup>

La razón por la que la velocidad aumenta cuando lo hace el área en flujos supersónicos se debe a que el decremento de la densidad con el aumento del área es más rápido que el correspondiente a la velocidad para un gasto másico determinado (en razón de  $M^2$ ). La condición  $M = 1$  sólo se cumple cuando  $dA/dx = 0$ , el área es mínima y  $j$  es máximo.

Las relaciones [3.182] combinadas entre sí y la ecuación del gasto,  $G = jA$ , conducen a:

$$A = \frac{G}{\rho_0 c_0 M} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad [3.186]$$

que permite definir el número adimensional del gasto másico local como:

$$\Lambda = j \frac{c_0}{p_0} = \gamma M \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad [3.187]$$

Esta ecuación revela que, para un número de Mach determinado, el gasto másico por unidad de área,  $j$ , es función de las condiciones de remanso  $p_0$  y  $c_0$ , o las equivalentes  $p_0$  y  $h_0$ , o  $p_0$  y  $T_0$ .

Entre dos secciones de la tobera entre las que el flujo se mantenga isentrópico, se ha de cumplir:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{M_2}{M_1} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad [3.188]$$

Si se alcanzara la condición crítica  $M = 1$  en algún punto de un movimiento que partiera del reposo, el área y el número adimensional de gasto correspondientes serían:



$$A^* = \frac{G}{\rho_0 c_0} \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad [3.189]$$

$$\Lambda^* = \frac{G c_0}{A^* p_0} = \gamma \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

siendo la primera un mínimo, pues  $j$  es máximo para  $M=1$  y  $G$  es constante, y el segundo un máximo, por la misma razón. En la sección de área mínima, quedan definidas las condiciones críticas del flujo:  $c^*$ ,  $h^*$ ,  $T^*$ ,  $p^*$ , etc., para  $M=M^*=1$  en [3.182] y el valor máximo de la densidad de flujo másico, que es  $j^* = \rho^* c^*$ , para un gasto  $G=A^* j^*$ , que no podrá ser superado si no cambian las condiciones de remanso.

Combinando esta última ecuación y [3.186], se obtiene la siguiente relación geométrica para el número de Mach de la corriente:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad [3.190]$$

En definitiva, como en este movimiento se conservan todas las propiedades de remanso, resulta que cualquier magnitud se puede expresar en función del número de Mach del movimiento, el cual, a su vez, puede describirse en función de la sección del conducto y su relación con la crítica,  $A^*$ . Esta área puede no existir en el movimiento, pero permite definir una referencia respecto a la cual presentar el resto de magnitudes del flujo, tal como se ha hecho en la figura 3.18 con la presión y la temperatura.

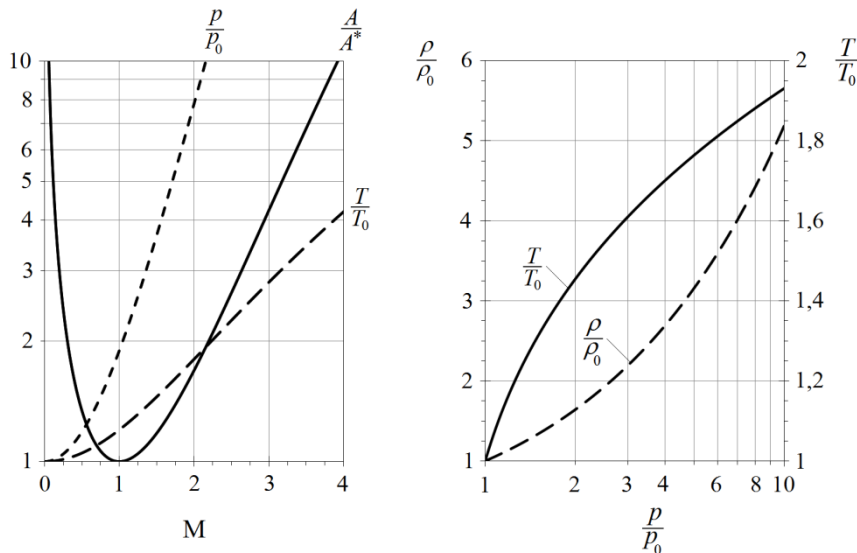


Figura 3.18. Magnitudes en el flujo isentrópico estacionario a través de un conducto de área lentamente variable respecto a las de remanso. Obsérvese que una relación de áreas [3.190] determinada se satisface para dos números de Mach y que es mínima en la condición crítica, donde, en cambio,  $\Lambda$  es máximo. Se muestra el valor de las magnitudes para  $\gamma=7/5$ .

Es evidente que la solución del movimiento compresible expuesta exige que éste sea isentrópico en todo el campo fluido, lo cual en realidad sólo es posible para unas determinadas condiciones de presión a lo largo del conducto. Debe apuntarse también que es imposible obtener velocidades supersónicas en una tobera que se estreche continuamente hasta una sección mínima. Ello es así porque sólo se puede conseguir una velo-



cidad igual a la local del sonido en el extremo de salida de la tobera convergente. Si se pretende que se produzca la transición de subsónico a supersónico en una tobera, es necesario que ésta se ensanche a partir de su área crítica, donde deben darse las condiciones críticas, y, para que el flujo sea isentrópico en ella, su diseño debe acometerse conforme a las condiciones de presión reinantes a la salida.

Por ejemplo, para la tobera convergente-divergente de Laval de la figura 3.19, en la que se ha establecido un gasto concreto para una presión a la salida,  $p_s$ , siendo  $p_s < p_0$ , el número de Mach del flujo a la salida debería ser, según [3.182]:

$$M_s = \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_0}{p_s} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad [3.191]$$

que puede ser superior o inferior a la unidad, pero que impone, en cualquier caso, un área de salida de la tobera,  $A_s$ , y un parámetro,  $\Lambda$ , muy concretos. En particular, para un  $M_s > 1$  y un área a la salida  $A_s$  determinados, se podría calcular el gasto correspondiente<sup>177</sup> mediante [3.186] y el área crítica pertinente con [3.189].

Si no se cumplieran estas condiciones, no se podría garantizar que se produjera la transición a supersónico o que el flujo fuera isentrópico en toda la tobera. En el primer caso, no se produciría la transición porque el gasto sería inferior al necesario para producir la situación crítica, bien porque el área mínima sería excesivamente grande o porque la presión a la salida sería demasiado alta. En este caso, el flujo sería subsónico, isentrópico e irrotacional en toda la tobera, salvo en el interior de las capas límites. En el segundo caso, aun alcanzándose la condición crítica en el cuello de la tobera para el gasto circulante, al no estar la presión a la salida en consonancia con [3.191] para el Mach de diseño, se presentaría un cambio de entropía abrupto en una o en varias ondas de choque, dentro o fuera de la tobera, a través de las cuales la presión se adaptaría a las condiciones externas.

#### 3.6.4. Flujo en una tobera convergente-divergente

La condición de flujo compresible isentrópico en una tobera convergente-divergente no se puede garantizar en toda su extensión y para cualquier presión externa,  $p_s$ , dadas unas condiciones de remanso y geométricas determinadas. El tipo de flujo resultante depende del valor de dicha presión, tal como se recoge en la figura 3.19 y se explica a continuación.

Para una presión a la salida,  $p_A$ , algo inferior a la presión de alimentación,  $p_0$ , el flujo es siempre subsónico e isentrópico mientras no se alcance la condición crítica en el cuello de la tobera, y se acelera hasta el cuello y se decelera después. Cuando la presión a la salida desciende hasta el valor  $p_B$  mostrado en la figura, se presenta un bloqueo sónico en el área mínima pero el flujo sigue siendo subsónico aguas abajo. A partir de esta condición, el gasto másico no puede aumentarse disminuyendo  $p_s$ , pero sí aumentando  $p_0$ . Con la tobera en bloqueo, existe una única presión,  $p_D$ , inferior a  $p_B$ , para la que el flujo isentrópico tiene solución y que se corresponde con la situación de flujo supersónico aguas abajo del área mínima. El valor de estas dos presiones se deduce de [3.182] para los dos números de Mach,  $M_s$ , que resultan de la relación de áreas  $A_s/A^*$  de [3.190].





Para presiones situadas entre  $p_B$  y  $p_D$ , el flujo se complica por la ocurrencia de una o diversas ondas de choque estacionarias, que se desplazan hacia adelante a medida que disminuye  $p_s$ . Si la onda de choque se produce en el interior de la tobera, será en la parte divergente y, por lo general, en un plano normal al movimiento,  $A_{12}$ , que se extiende hasta el interior de la capa límite (en la cual ha de haber una parte subsónica que la onda no puede atravesar). Antes de la onda, el flujo supone una expansión isentrópica supersónica mientras que, después de ella, se convierte en una compresión subsónica compatible con la presión de salida. La situación de la onda de choque permite que el flujo sea subsónico el resto del conducto divergente hasta la salida de la tobera, y se sitúa en  $A_s$  cuando la presión a la salida es  $p_C$ , que es algo mayor que  $p_D$ .

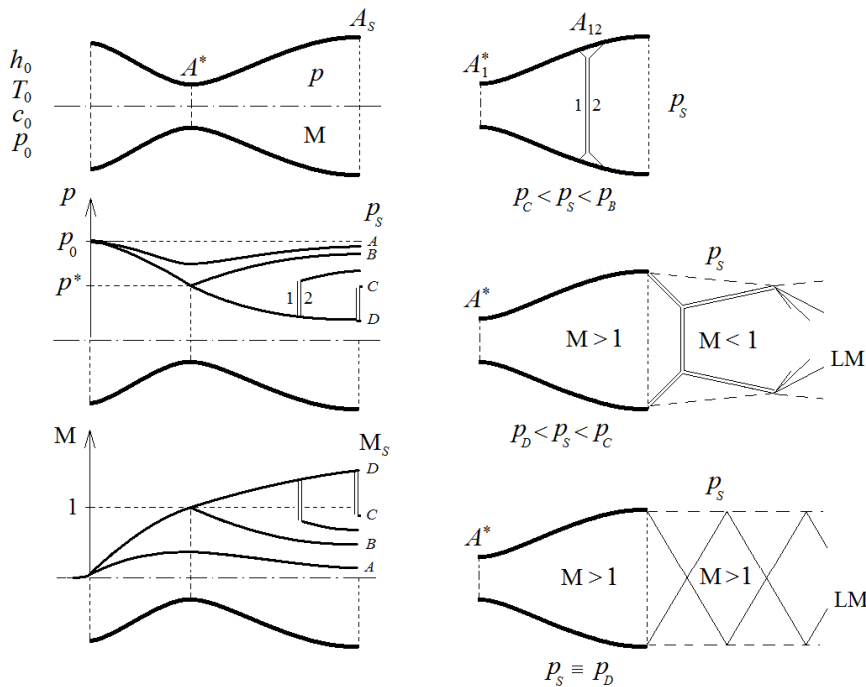


Figura 3.19. Distribución de presiones y número de Mach en una tobera convergente-divergente de Laval para diversos escenarios de presión a la salida. A la derecha, la configuración de las ondas generadas (LM son líneas de Mach). Obsérvese que la onda de choque en  $A_{12}$  no se ha representado en contacto con la superficie porque sobre ésta se desarrolla la capa límite. La onda de choque normal del segundo caso se desplaza hacia delante, fuera de la tobera, a medida que  $p_s$  disminuye, hasta que desaparece y las dos oblicuas, primero, se encuentran y, después, se vuelven horizontales.

Las ondas de choque no son más que el mecanismo de autoajuste que dispone el flujo supersónico para adaptarse a las condiciones de presión reinantes aguas abajo. El análisis detallado del salto de las magnitudes fluidas a través de una onda de choque normal se realiza en 5.8.4, donde se muestra la correspondencia existente entre las magnitudes fluidas antes y después de la onda, denominadas por los subíndices (1) y (2), respectivamente. En general, se acepta que, como discontinuidad finita, una onda de choque es una superficie geométrica de espesor casi nulo, lo que quiere decir que la superficie de la tobera justo antes y después de la onda es idéntica ( $A_1 = A_2 = A_{12}$ ).

Para presiones inferiores a  $p_C$ , las ondas de choque se producen fuera de la tobera y pasan a ser oblicuas (es como si la onda normal se abriera y se convirtiera en dos). En este caso, el flujo supersónico se extiende aguas abajo de la tobera y las ondas de choque deflecan la corriente hacia el interior del chorro de salida, estrechándolo primero y abriéndolo después. A medida que la presión de salida se acerca a la condición de dise-

ño isentrópico y supersónico de la tobera,  $p_D$ , las ondas oblicuas se van abriendo hasta hacerse paralelas y perder toda su intensidad.

Cuando la presión externa es exactamente  $p_D$ , el chorro sale al ambiente sin necesidad de ningún mecanismo de adaptación y a la presión de diseño: se dice que la tobera supersónica está *adaptada* a la presión ambiental  $p_D$ . Si la presión ambiental es inferior a  $p_D$ , su ajuste no puede conseguirse mediante ondas de choque, pues éstas sólo pueden aumentarla, sino que se realiza mediante el sistema de ondas expansivo de anchura finita de Prandtl-Mayer explicado en 5.8.2, a través del cual se mantiene la entropía del fluido y el movimiento continúa siendo potencial.

La explicación anterior ha pasado por alto una cuestión interesante que tiene que ver con la disminución de la presión de remanso a través de la onda de choque (v. [5.239]). Como se verifica que  $A_1 = A_2 = A_{12}$  y  $c_0$  no cambia (el choque es adiabático), resulta que el número adimensional de gasto másico local evaluado para  $M_1 > 1$ ,  $\Lambda_1$ , se incrementa tras el salto al valor  $\Lambda_2$ , al que le corresponde, según la ecuación [3.187], el número de Mach después del choque  $M_2 < 1$ , es decir:

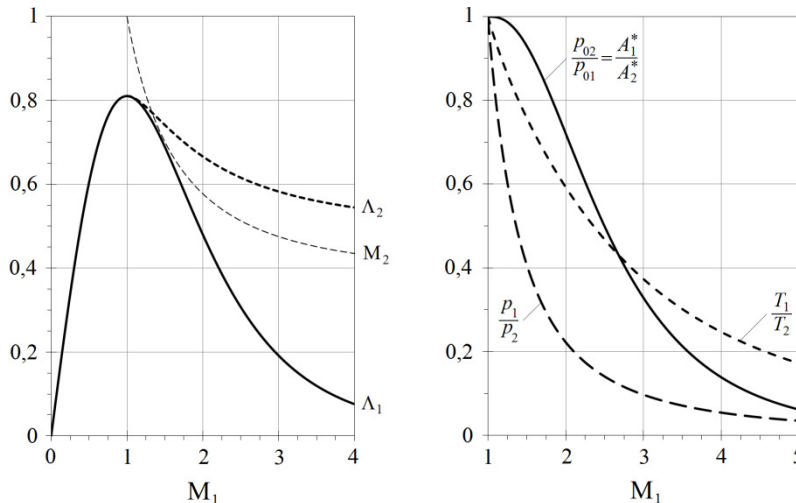
$$\Lambda_2 = j_{12} \frac{c_0}{p_{02}} = \Lambda_1 \frac{p_{01}}{p_{02}} = \gamma M_2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad [3.192]$$

Esta situación es incongruente con el área crítica antes del choque, a la que correspondería, según [3.190], un número de Mach subsónico distinto de  $M_2$  en la ubicación de la onda. De ello se desprende que el área crítica ha de ser distinta a ambos lados de la onda de choque. Como el gasto másico no cambia y, además, la tobera continúa bloqueada, se ha de conservar  $\Lambda^*$ , y de [3.189] se deriva:

$$A_1^* p_{01} = A_2^* p_{02} \quad [3.193]$$

Es decir, el flujo subsónico después del choque se comporta como si hubiera pasado por un área crítica imaginaria mayor que la real, desde la cual la relación de presiones  $p_{02}/p_s$ , inferior a  $p_{01}/p_s$ , implicaría la solución isentrópica completa para el flujo bloqueado y subsónico correspondiente a la situación  $p_{02}/p_B$ .

Figura 3.20. A la izquierda, se muestra el número de Mach a la salida de una onda de choque en función del número de Mach de entrada y el incremento de la cifra adimensional de gasto másico local. A la derecha, se ha representado la variación de las magnitudes fluidas a través de una onda de choque normal ( $\gamma=7/5$ ).





Falta aún por concretar la ubicación de la onda de choque cuando ésta se produce en el interior de la parte divergente de la tobera. La resolución analítica de este problema se realiza mediante las ecuaciones anteriores y es complicada porque algunas de ellas no aparecen de forma explícita en términos de las variables de partida, por lo que se ha optado por discutir el planteamiento general y presentar el resultado final de forma gráfica.

Se sabe que la presión del entorno a la salida,  $p_s$ , ha de estar comprendida, en este caso, entre  $p_B$  y  $p_C$  para un  $p_{01}$  determinado, y la onda de choque se sitúa, para la primera, en el cuello de la tobera y, para la segunda, en el área de salida. Esta área sólo es compatible con los dos números de Mach que resultan de la ecuación [3.190] para  $A_S$ :

$$\frac{A_S}{A_1^*} = \frac{1}{M_S} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_S^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad [3.194]$$

uno de los cuales es subsónico,  $M_B < 1$ , correspondiente a  $p_{01}/p_B$ :

$$\frac{p_{01}}{p_B} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_B^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad [3.195]$$

y otro, supersónico,  $M_D > 1$ , que determina la relación de presiones de diseño para que la tobera esté adaptada,  $p_{01}/p_D$ . Como, en este último caso, se supone que se produce una onda de choque en  $A_S$ , utilizando [5.236] se deduce:

$$\frac{p_{01}}{p_C} = \frac{p_{01}}{p_D} \frac{p_D}{p_C} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_D^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left( 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_D^2 - 1) \right)^{-1} \quad [3.196]$$

Para cualquier otra presión intermedia,  $p_s$ , el flujo a la salida es subsónico tras la onda, y entre  $p_S$  y  $M_S$  se verifica la relación:

$$\frac{p_{02}}{p_s} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_S^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \frac{p_{01}}{p_s} \quad [3.197]$$

y para el área, con [3.193]:

$$\frac{A_S}{A_2^*} = \frac{1}{M_S} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_S^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \frac{A_S}{A_1^*} \quad [3.198]$$

De estas últimas ecuaciones, se obtiene, por sustitución, la relación de presiones de remanso a través de la onda y el número de Mach a la salida, en función de la relación de áreas y de presiones:

$$\left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{2} \left( \frac{p_s}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left\{ 1 + \left[ 1 + 2(\gamma-1) \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left( \frac{A_1^*}{A_S} \frac{p_{01}}{p_s} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad [3.199]$$

$$M_S^2 = \frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left[ 1 + 2(\gamma-1) \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left( \frac{A_1^*}{A_S} \frac{p_{01}}{p_s} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}$$



Conocido el salto de presiones de remanso a través de la onda, la ecuación [5.238] proporciona el número de Mach aguas arriba y, con éste, se obtiene la relación de áreas buscada mediante [3.190].

Las figuras 3.21 y 3.22 muestran, de forma gráfica, todos estos resultados. Las gráficas de la figura 3.21 están limitadas por arriba por  $p_C$  [3.196], y, por abajo por  $p_B$  [3.195]. Ambas líneas se encuentran en el origen ordenado con el valor de la relación crítica de presiones,  $p_0/p^* = 1,893$  y  $M_S = 1$ . En la figura de la derecha de 3.21 se han representado (a trazos) también las líneas de  $p_{02}/p_S$  constante.

Figura 3.21. Número de Mach a la salida (izquierda) y salto de presión de remanso (derecha), en función de la relación de áreas y presiones a través de la tobera cuando, en su parte divergente, tiene lugar una onda de choque normal ( $\gamma = 7/5$ ).

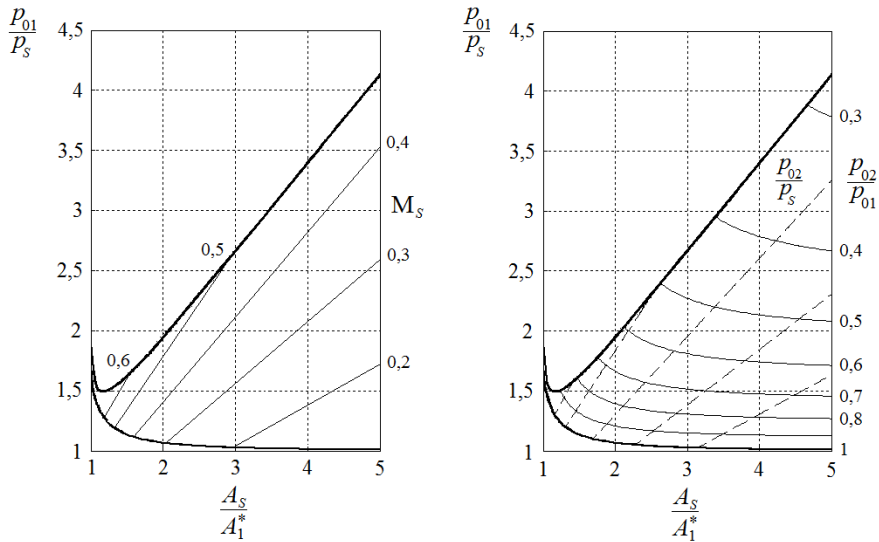
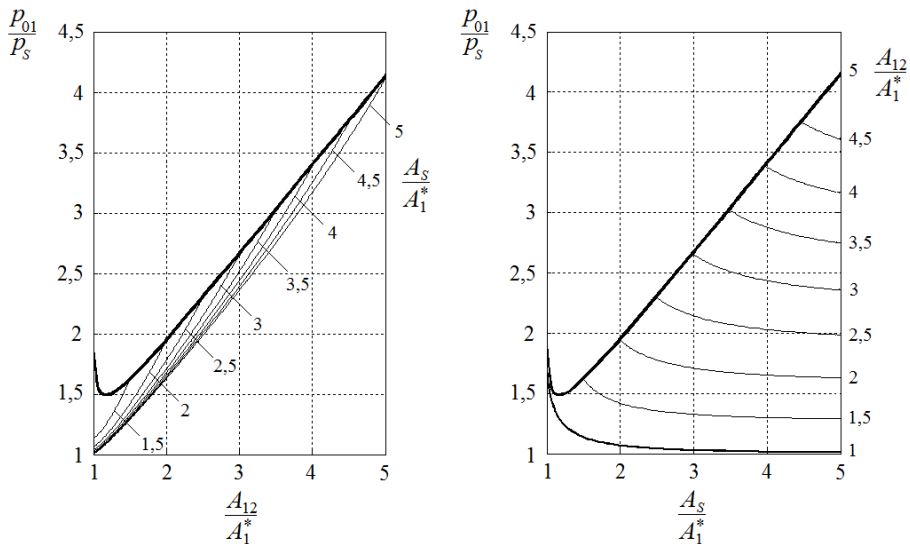


Figura 3.22. Gráficos para el cálculo de la sección donde se ubica una onda de choque normal en una tobera de Laval en función de la relación de áreas y presiones. Obsérvese, a la izquierda, que la relación entre el salto de presiones en la tobera y la relación de áreas es prácticamente lineal. Ambas gráficas están limitadas por arriba por [3.196] y, la de la derecha, por [3.195] por abajo ( $\gamma = 7/5$ ).





### 3.7. Ondas en el seno de un fluido

Cuando una perturbación se propaga en el seno de un fluido, se produce un cambio en su densidad que motiva la aparición de fuerzas internas restitutivas. Estas fuerzas son el origen de las ondas que se tratan en este tema y su magnitud es función del módulo de compresibilidad del fluido, el cual, a su vez, es una función del estado local y del tipo de proceso. Si la perturbación no causara cambio alguno en la densidad, estas fuerzas no aparecerían y las fuerzas restitutivas tendrían que ser, entonces, de origen externo al fluido, no de su seno.<sup>178</sup>

#### 3.7.1. Ondas sonoras respecto del reposo

Si  $l_0$  es la longitud típica del campo fluido inicialmente en reposo en el que se está propagando una perturbación de orden  $l'$ , el cambio del volumen en el sentido de la propagación indica que la variación de la densidad cumple la relación:

$$O\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) = \frac{l'}{l_0} \quad [3.200]$$

Cuando la perturbación es pequeña, tal que  $O(\rho') \ll O(\rho_0)$ , se ha visto en [3.175] que ésta se desplaza a la velocidad del sonido del medio no perturbado, por lo que se cumple:

$$O\left(\frac{p'}{\rho_0 c_0^2}\right) = \frac{l'}{l_0} \ll 1 \quad [3.201]$$

y como, según la ecuación de continuidad:  $O(D\rho'/Dt) \approx O(\rho \nabla \cdot \mathbf{v}')$ , se deduce:

$$O(v') = O\left(\frac{\rho' l_0}{t_0 \rho_0}\right) = \frac{l'}{l_0} O(c_0) \quad [3.202]$$

donde  $t_0$  es el tiempo característico del fenómeno, que es del orden  $l_0/c_0$ . Atendiendo a estas condiciones y a que se comprueba que el efecto de la gravedad es insignificante,<sup>179</sup> el orden de magnitud de los términos de la ecuación de Navier-Stokes [2.92] de la cantidad de movimiento será:

$$\frac{\rho_0 v'}{t_0} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 v'^2}{l_0} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{p'}{l_0} \nabla^* p^* + \frac{\mu v'}{l_0^2} \nabla^* \bar{\tau}^* \quad [3.203]$$

Dividiendo todos los términos por el local, y tras algunos pasos que se omiten pues no aportan nada nuevo al desarrollo, se llega a la condición:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{l'}{l_0} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = \nabla^* p^* + \frac{\mu}{\rho_0 l_0 c_0} \nabla^* \bar{\tau}^* \quad [3.204]$$

En consecuencia, siempre que los términos convectivos y el efecto de la viscosidad puedan despreciarse porque la perturbación sea pequeña y el número de Reynolds, calculado con la velocidad del sonido, superior a la unidad,<sup>180</sup> las ecuaciones del movimiento se reducirán a:



$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad [3.205]$$

A este resultado también se llega si se supone directamente que, en este caso, las variaciones de la velocidad, la presión y la densidad en un medio en reposo son pequeñas, de modo que el orden de magnitud de sus incrementos es tal que su producto es despreciable (por ejemplo,  $\rho'v' \approx 0$ ), que los incrementos de densidad y presión son mucho menores que la magnitud absoluta de equilibrio correspondiente ( $\rho_0, p_0$ ), y que  $v'$  es mucho menor que  $c_0$ . En definitiva, se sustituye  $v' = \delta v$ ,  $\rho' = \delta \rho$  y  $p' = \delta p$  en [3.177].

Al comprobarse que el movimiento es isentrópico y potencial, la última de estas ecuaciones puede escribirse de cualquiera de las formas siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p'}{\rho_0} &= 0 \end{aligned} \quad [3.206]$$

donde se ha usado el potencial de velocidades  $v' = \partial \varphi / \partial x$ . Esta definición pone de manifiesto que estas ondas son longitudinales.

Estas ecuaciones, derivadas alternativamente respecto a  $x$  y  $t$ , conducen a las ecuaciones de propagación de una onda sonora plana:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad [3.207]$$

y

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad [3.208]$$

cuyas soluciones dependen de las condiciones de contorno o en los límites.

Así, por ejemplo, cuando se trata de las vibraciones libres de un fluido confinado en el interior de un recipiente de dimensiones finitas, dichas ecuaciones sólo se satisfacen para algunas frecuencias características que dependen de la forma y el tamaño del recipiente.<sup>181</sup> La solución particular se obtiene mediante el procedimiento de separación de variables para  $\varphi(x,t)$  y conduce a soluciones del tipo:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= a_k \cos(2\pi f_k t) \cos(2\pi f_k x / c_0) \\ v_k' &= \partial \varphi_k / \partial x = -a_k (2\pi f_k / c_0) \cos(2\pi f_k t) \sin(2\pi f_k x / c_0) \\ p_k' &= -\rho_0 \partial \varphi_k / \partial t = \rho_0 2\pi f_k \sin(2\pi f_k t) \cos(2\pi f_k x / c_0) \end{aligned} \quad [3.209]$$

donde  $a_k$  es una constante que identifica la amplitud de la onda y puede deducirse por criterios energéticos combinados con las condiciones de contorno.



El resultado [3.209] es una onda plana estacionaria en la cual todas las magnitudes son funciones exclusivas de las coordenadas  $(x,t)$ . Esta onda no se propaga, sino que implica la oscilación longitudinal y en fase de todos los puntos del sistema en un instante cualquiera.

La solución final se obtiene por superposición lineal ( $k = 1 \dots \infty$ ), teniendo en cuenta que cualquier vibración de las partículas de un sistema respecto a sus posiciones de equilibrio puede descomponerse en sus modos naturales de vibración mediante series de Fourier. Se deduce también, observando la ecuación [3.209], que sólo son posibles aquellas frecuencias que cumplan las condiciones frontera, que en caso de ser  $(v_x(t) = 0$ , en  $x=0$  y  $x=L$ ), son:  $f_1 = 0,5c_0/L$ , y  $f_k = kf_1$ . La velocidad se anula, asimismo, en  $x = 0,5kc_0/f_k$ , que son puntos separados una distancia  $\lambda_k/2$  desde  $x=0$  hasta  $x=L$ , siendo  $\lambda_k$  la longitud de la onda de frecuencia  $f_k$ , de valor  $c_0/f_k$ . Los puntos de velocidad nula se denominan *nodos* y sus intermedios, donde la velocidad es máxima, *antinodos* o *vientres*. Las oscilaciones de la presión tienen nodos y vientres en posiciones inversas a las anteriores, por lo que los vientres de la presión son nodos de la velocidad, y viceversa.

Si la onda se propaga en un entorno infinito o semiinfinito, en el cual el fluido está inicialmente en reposo, como cuando es provocada por una pared plana que se desplaza en dirección a su normal, no hay motivo para que no puedan propagarse ondas de cualquier frecuencia.<sup>182</sup> La solución general del supuesto lineal<sup>183</sup> es debida a D'Alembert y conduce a funciones de onda invariantes que se propagan a la velocidad del sonido en ambos sentidos. Como, en el caso anterior, es suficiente encontrar una solución para  $\varphi$  para determinar todo el campo fluido.

Por simple observación de la ecuación [3.208], se deduce que puede ser factorizada de la forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi = 0 \quad [3.210]$$

y su solución es una determinada función arbitraria,  $\varphi$ , de las variables  $\xi_+ = x - c_0t$ ,  $\xi_- = x + c_0t$  que anulan cada uno de los factores. A este resultado intuitivo se llega también si se escribe la ecuación [3.208] en función de  $\xi_+$  y  $\xi_-$  mediante la regla de derivación en cadena y se integra respecto a  $\xi_+$  y  $\xi_-$ .<sup>184</sup> En definitiva, la solución general de la ecuación de onda es:

$$\varphi = F_+(\xi_+) + F_-(\xi_-) \quad [3.211]$$

donde  $\varphi$  es la función de onda, la forma de la onda en definitiva, compuesta por dos partes que se propagan sin distorsionarse en sentidos contrarios:  $F_+$  es la forma de la onda que se desplaza en el sentido positivo del eje  $\{x\}$  con la velocidad  $c_0$ , y  $F_-$  la que lo hace en el negativo (por convenio, hacia la izquierda).

La interpretación de esta solución es muy intuitiva y pone de manifiesto la constancia de la forma de la onda en su recorrido a lo largo de las líneas de  $\xi$  constante. Como las magnitudes fluidas están ligadas a  $\varphi$  y a sus primeras derivadas, seguirán todas funciones de la misma forma proporcionales entre sí. Es más, los cambios de densidad, presión o temperatura observados en el tiempo  $t_1$  y en la ubicación  $x_1$  se tendrán en el instante  $t_2$  y en la posición  $x_2$  que verifique, por ejemplo para una onda que se desplace a la derecha, la relación lineal:  $x_2 - x_1 = c_0(t_1 - t_2)$ .



Las variaciones de densidad, presión o temperatura en función de la velocidad se obtienen ahora fácilmente teniendo en cuenta [3.206] y la definición del potencial de velocidades. Por ejemplo, para una onda  $F_+$ , se tiene:

$$v' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{dF_+}{dx} = \frac{dF_+}{d\xi_+} = G_+(x - c_0 t) \quad [3.212]$$

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho_0 c_0 \frac{dF_+}{d\xi_+} = \rho_0 c_0 G_+(\xi_+)$$

de donde resulta:<sup>185</sup>

$$p' = \rho_0 c_0 v'$$

$$\rho' = \frac{p'}{c_0^2} = \frac{\rho_0}{c_0} v' \quad [3.213]$$

$$T' = \left[ \frac{\partial T}{\partial p} \right]_s p' = \frac{c_0 \alpha T}{c_p} v'$$

Se observa que todas las magnitudes de la perturbación tienen el mismo signo de  $v'$ , que es la velocidad inducida en el fluido, y que son positivas cuando tienen el sentido de la onda propagada (v. la figura 3.16). En cambio, para la onda viajera  $F_-$ , el procedimiento anterior conduce a  $p' = -\rho_0 c_0 v'$ , de forma que una perturbación en velocidad positiva (dirigida hacia la derecha) induce una perturbación negativa en presión (y en densidad).

Para centrar las ideas expuestas, considérese el movimiento alternativo del pistón de la figura 3.23 en un conducto donde el fluido está en calma. La perturbación en velocidad generada por el pistón responde a la ecuación:

$$v_p = 2\pi f_0 a \sin(2\pi f_0 t) = v_0 \sin(2\pi f_0 t) \quad [3.214]$$

Si se admite que la amplitud del movimiento del pistón es muy inferior a la longitud de la onda generada, es decir,  $a < \lambda$ ,<sup>186</sup> se puede considerar que el origen de la perturbación es puntual y que la ecuación [3.214] da la magnitud de  $v'$  en  $x=0$ . Entonces, la función de la onda será senoidal y las perturbaciones asociadas del tipo (para  $x > 0$ ):

$$v' = -v_0 \sin((2\pi / \lambda)(x - c_0 t)) =$$

$$= -v_0 \sin(2\pi f_0 (x / c_0 - t)) = G_+(x - c_0 t) \quad [3.215]$$

$$p' = \rho' c_0^2 = \rho_0 c_0 G_+(x - c_0 t)$$

Se observa que, en la dirección de propagación de la onda, todas las magnitudes son funciones exclusivas de  $\zeta$  y pueden expresarse unas en función de las otras sin que aparezca el desfase de [3.209].

A las líneas de  $\zeta$  constante se las denomina *características*, pues indican la dirección de propagación de las propiedades de las ondas positiva (para  $\xi_+$  constante) y negativa (para  $\xi_-$  constante). En términos de estas líneas, la superposición de las soluciones de [3.211] permite afirmar que la perturbación en un punto del plano  $\{x, t\}$  está dado por la suma de los valores  $F_+$  y  $F_-$  transportados por las características que se cruzan en dicho punto.



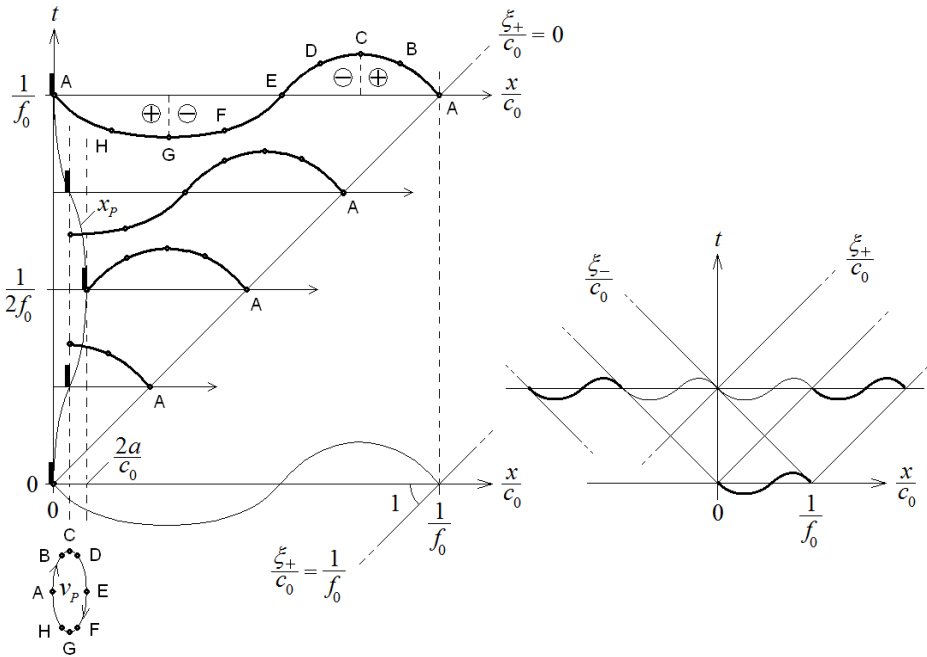


Figura 3.23. Onda plana longitudinal que se propaga por el interior de una tubería a velocidad  $c_0$  constante. Arriba se indican los cuartos de onda que son de compresión  $\oplus$  y expansión  $\ominus$ . Abajo se muestra el perfil de la perturbación en velocidad. Las líneas características de pendiente (1) son de  $\xi$  constante. La distorsión que se observa en la onda desaparece cuando  $O(f_p a/c_0) \ll 1$ . A un resultado semejante se llega si la perturbación es producida por la inyección y la extracción alternativa de fluido por el extremo del tubo.

La presión que ejerce el fluido sobre la pared frontal es  $\rho_0 c_0 v_p$  respecto a la ambiental y del mismo valor pero de signo opuesto sobre la pared dorsal. Cuando el pistón se acelera en el mismo sentido que la onda, la variación de la perturbación en velocidad con la distancia es negativa, esto es,  $\partial v_p / \partial x < 0$  y la onda es de compresión,<sup>187</sup> y la presión ante el pistón aumenta con el tiempo. En caso contrario, es decir cuando la pared se acelera en el sentido opuesto al de avance de la onda, ésta es de expansión,  $\partial v_p / \partial x > 0$ , y sus ondas se ralentizan y separan progresivamente. En ambos casos, el flujo neto generado es nulo puesto que el movimiento del pistón es alternativo, la perturbación es pequeña y los efectos viscosos son despreciables.

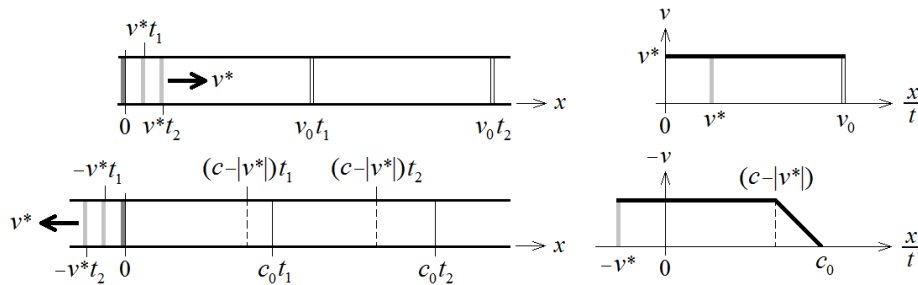
Si la onda se propaga en un medio en el que acaba apareciendo un flujo no nulo a  $v^*$ , como, por ejemplo, cuando el pistón anterior desplaza el fluido en el interior del conducto a velocidad constante, se deduce, por consideraciones de semejanza, que la distribución de todas las magnitudes sólo puede depender de las coordenadas y del tiempo a través del cociente  $x/t$ . Esto quiere decir que dicha distribución y el esquema del flujo resultante son invariantes con el tiempo, cuando se hace un cambio apropiado de escala en  $\{x\}$ , y que la onda mantiene su forma cuando se representa sobre un eje  $\{x/t\}$ .

Cuando el pistón de la figura 3.24 se mueve en dirección a la onda, se comprime el gas que hay ante él y aumenta la velocidad del sonido en el medio perturbado por la onda. Esta circunstancia acumula las ondas sucesivas que se van gestando desde el instante inicial y conduce a la formación de una onda de choque en su cara frontal. Con el tiempo, esta onda de choque se adelanta al pistón porque se mueve a una velocidad algo superior a la del sonido en el medio no perturbado,  $c_0$ .<sup>188</sup> Aguas abajo de la onda, el fluido continúa en calma y a la presión inicial, mientras que entre el pistón y el choque

existe una sobrepresión que puede conocerse de la relación de velocidades a ambos lados del mismo,  $v^*$  y 0, y que es constante siempre que  $v^*$  lo sea. En cambio, cuando el pistón se aleja de la onda, no puede presentarse nunca una onda de choque porque la onda que se forma es de expansión. Esta onda, también denominada de rarefacción, es cada vez más gradual y mantiene una forma triangular entre la velocidad  $v^*$  y 0. En este caso, el fluido sigue al pistón siempre que su velocidad no sobrepase un valor máximo, por encima del cual se genera entre ambos un vacío.<sup>189</sup> Todos estos fenómenos se observan en movimiento respecto a  $\{x\}$ , no respecto a  $\{x/t\}$ , y son un caso particular de las ondas simples no lineales que se presentan a continuación.<sup>190</sup>

Recuérdese que la perturbación se mueve respecto del fluido a la velocidad del sonido local y que, por tanto, lo hace respecto del sistema fijo de coordenadas a la velocidad  $q = c + v$ , donde  $v$  es la velocidad inducida en el fluido tras el paso de las sucesivas ondas gestadas. Para el pistón de la figura que se desplaza a la derecha comprimiendo el fluido, es  $v > 0$ , con una onda viajando a la velocidad,  $c > c_0 > 0$  (v., [3.175], [3.182] y [3.224], por ejemplo), y con una velocidad de propagación de valor  $q = c + v > c_0 > 0$ . Cuando el pistón se desplaza a la izquierda, es  $v < 0$ , y  $c < c_0$  por ser la onda de expansión, y la velocidad de propagación,  $q = c - |v| > 0$ , es inferior a la anterior, con  $q < c_0$ . Por norma general, no obstante, y siempre que  $v \ll c$ , ambas velocidades  $q$  son muy parecidas, y el ancho de la zona triangular que aparece en la rarefacción, reducido.

Figura 3.24. Ondas en movimiento de semejanza unidimensional generadas por el desplazamiento de un pistón (en gris) en una tubería. Arriba, el caso en que el pistón comprime el fluido al moverse hacia la derecha y genera una onda de choque que se desplaza a la velocidad  $v_0$  [5.240]. Abajo, el caso en que el desplazamiento es hacia la izquierda y se forma una onda de expansión. En este último caso, el frente de la onda se mueve a la velocidad  $c_0 > c - |v|$ , porque en él  $v = 0$ , y es una discontinuidad débil.



Para concluir el apartado, se presenta brevemente una cuestión interesante, desde el punto de vista práctico, que atañe a la interferencia de las ondas y a su interacción con el contorno. Las reglas básicas que describen todos estos fenómenos parten de la superposición de las soluciones y del *principio de Huygens*, según el cual cada punto de un frente de onda puede considerarse el origen de una nueva onda. Las funciones de onda de las ondas que se hallan en un punto determinado se suman momentáneamente y dan lugar a interferencias constructivas o destructivas. Así, cuando se encuentran dos ondas planas iguales de pequeña magnitud (por ejemplo, ambas de compresión) que viajan en sentido contrario, la velocidad inducida en la intersección es nula y su presión se dobla.<sup>191</sup> Si se encuentran dos ondas diferentes (una de compresión y la otra de expansión), entonces la velocidad se dobla y la presión en la intersección se cancela. Del mismo modo, se puede afirmar que la onda que topa contra un contorno sólido dobla su presión y anula la velocidad, y la onda rebotada es del mismo tipo y magnitud. En cambio, si la onda alcanza el extremo abierto de un conducto, entonces la reflejada es de tipo contrario y la presión en el extremo se iguala a la exterior.

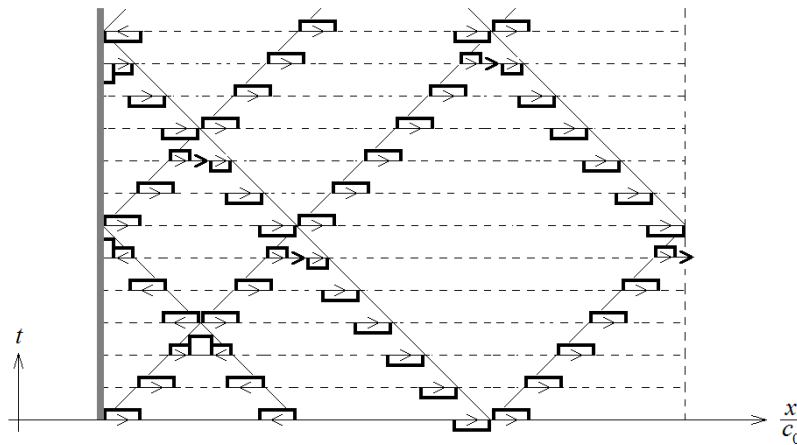


Figura 3.25. Divertimento con ondas simples de pequeña amplitud ( $v \ll c_0$ ). Los rectángulos representan la magnitud de la presión en la onda (positiva o negativa) y las flechas el sentido de la perturbación en velocidad correspondiente (hacia la derecha o hacia la izquierda). A la izquierda, una pared sólida donde se produce el efecto espejo y la onda se refleja. A la derecha, un entorno abierto en el que la onda se invierte.

### 3.7.2. Ondas simples no lineales

La característica principal de las ecuaciones de onda no lineales que resultan de considerar que la velocidad de propagación de una perturbación depende del valor local de alguna otra propiedad, como la velocidad o la densidad, es que se produce una distorsión del perfil de la onda que las puede agrupar o separar en función de si el fluido (el pistón) se acelera en su dirección o en la contraria. Se verá a continuación que la acumulación de las ondas elementales conduce a la ruptura del frente de onda y a la formación de una onda de choque sólo cuando la velocidad de un punto del perfil es superior a la de los precedentes, esto es,  $\partial v / \partial x < 0$ , y la onda es de compresión.

El perfil de la onda en la teoría lineal se mantiene en líneas de  $\xi$  constante, que son líneas características en las que  $dx/dt = \pm c_0$ , o bien  $d(x/c_0)/dt = \pm 1$ . La solución del caso no lineal, en el que la amplitud de la onda no es necesariamente pequeña, consiste en una generalización de este resultado haciendo  $dx/dt = v \pm c(v)$ , donde  $c$  es una función de la velocidad,  $v$ . Esto define unas líneas características cuya pendiente depende de  $v$  y que pueden converger, divergir e incluso cruzarse, lo que da lugar entonces a soluciones multivaluadas de  $v$  que son el origen de la discontinuidad finita u onda de choque. En todas las ecuaciones de este tema, el signo positivo de la pareja “ $\pm$ ” se utiliza para las ondas que se propagan en el sentido positivo del eje  $\{x\}$ .

Para concretar analíticamente el caso que se presenta, es necesario tener en cuenta que, en las ondas simples no lineales, la velocidad es una función exclusiva de la densidad si se conservan las condiciones de homentropía, de modo que  $v(\rho)$  y  $p(\rho)$ . Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento [3.177] pueden arreglarse, en este caso, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left( v + \frac{c^2}{\rho} \frac{d\rho}{dv} \right) \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{3.216}$$

donde se han mantenido los términos convectivos.



Como el valor de la densidad determina el de la velocidad, el sistema anterior se resuelve cuando los corchetes se igualan,<sup>192</sup> esto es:

$$\rho \frac{dv}{d\rho} = \frac{c^2}{\rho} \frac{d\rho}{dv} \quad [3.217]$$

de donde:

$$\frac{dv}{d\rho} = \pm \frac{c}{\rho} \quad [3.218]$$

Esta ecuación, sustituida en [3.216], conduce a las ecuaciones de onda:<sup>193</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (v \pm c) \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm c) \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad [3.219]$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} v &= G(x - (v \pm c)t) \\ \rho &= H(x - (v \pm c)t) \end{aligned} \quad [3.220]$$

Obsérvese que las ecuaciones [3.219] pueden escribirse en función de la derivada material como:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \pm c \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{D\rho}{Dt} \pm c \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \pm c \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{Dv}{Dt} \pm c \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad [3.221]$$

por lo que un observador que se moviera con una partícula de fluido siguiendo su trayectoria observaría a su alrededor dos ondas acústicas que se separarían de él a la velocidad del sonido,  $c$ . De acuerdo con esto, las perturbaciones que se propagan respecto del fluido con la velocidad del sonido en el sentido positivo o negativo del eje  $\{x\}$ , se mueven respecto del sistema coordenado fijo con la velocidad  $v \pm c$ . Las trayectorias de estas ondas son líneas materiales en el plano  $\{x, t\}$ , cuya pendiente es, evidentemente:

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_{\pm} = v \pm c \quad [3.222]$$

Por definición, se denomina  $C_+$  a la línea que se desplaza en el sentido positivo, y  $C_-$  a la que lo hace en el negativo. Estas líneas tienen la misma interpretación que las características definidas en el caso lineal, pero entonces su pendiente era  $\pm c_0$  e independiente de la perturbación.

Para hallar la relación entre la velocidad y la densidad (y la presión), es decir, la relación entre las funciones de onda  $G$  y  $H$ , ha de integrarse la ecuación [3.218] teniendo en cuenta que en la condición de homotropía todas las variables dependen de una sola. Como, para la velocidad del sonido en un gas perfecto se cumple [3.182], se tiene:



$$\frac{c}{c_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad [3.223]$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{dp}{p}$$

Integrando ahora [3.218] desde un punto de la onda donde la velocidad es nula y  $c = c_0$ , resulta:

$$c = c_0 \pm \frac{\gamma-1}{2} v \quad [3.224]$$

y finalmente:

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left( 1 \pm \frac{\gamma-1}{2} \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad [3.225]$$

Para una onda de compresión,  $p > p_0$ , que viaje a la derecha, la velocidad inducida es positiva y se suma en módulo a la velocidad del sonido en el sentido de la propagación, y entonces la velocidad de la onda es  $q = +v + c$  (se recuerda que el signo positivo de “±” implica el desplazamiento de la onda a la derecha y, el negativo, a la izquierda). Si la onda es de expansión, entonces  $v < 0$  y se resta en módulo a la del sonido. Para una onda que viaje a la izquierda, la velocidad inducida es negativa si es de compresión, es decir, se dirige a la izquierda siguiendo la propagación, y los signos de [3.225] se compensan para hacer  $p > p_0$ . En general, la velocidad de una onda de compresión es  $q = \pm |v| \pm c$  en cualquier sentido. Este resultado ya se había expuesto en [3.213] para el caso lineal.

La relación entre la velocidad de propagación de un punto de la onda,  $q$ , y la velocidad del sonido del medio no perturbado,  $c_0$ , sirve para discernir hasta qué punto la teoría lineal es válida y se puede considerar que la onda es acústica. Para este fin, también se pueden utilizar las relaciones  $v/c_0$  y  $|v|/c$ , siendo esta última el número de Mach del flujo inducido por la onda. Todas ellas pueden calcularse en función de la relación de presiones a través de la onda, combinando adecuadamente las ecuaciones [3.223] y [3.225], y teniendo en cuenta que  $q = v \pm c$ . El resultado es:

$$\frac{q}{c_0} = \frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{\gamma+1}{2} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right)$$

$$\frac{v}{c_0} = \frac{2}{\gamma-1} \left( \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) \quad [3.226]$$

$$\frac{|v|}{c} = \left| \frac{2}{\gamma-1} \left( 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) \right| = M$$

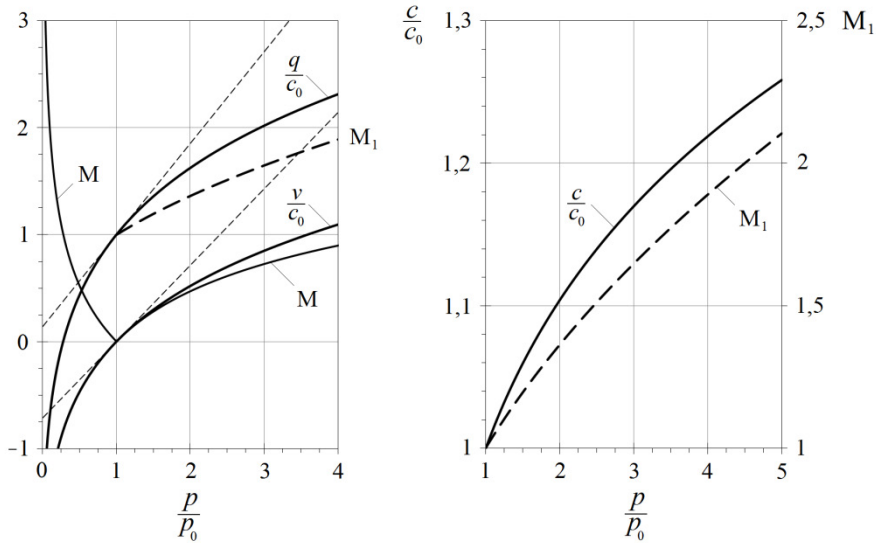
La ecuación de una onda simple que avanzara en el sentido positivo del eje  $\{x\}$ , se puede escribir en función de la velocidad inducida con [3.220] y [3.224]:



$$v = G \left( x - \left( c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v \right) t \right) = G \left( (x - c_0 t) - \frac{\gamma+1}{2} vt \right) = G \left( \xi_+ - \frac{\gamma+1}{2} vt \right) \quad [3.227]$$

que difieren del  $G_+$  de [3.212] por un término que depende del valor de la propia perturbación.<sup>194</sup> Este término modifica la onda a medida que se propaga: si la velocidad del fluido aumenta con el tiempo, también aumentan su densidad y la velocidad del sonido, de modo que las ondas sucesivas pueden alcanzarse unas a otras y hacer que el término  $\partial v / \partial x$  resulte infinito y aparezca una discontinuidad.

Figura 3.26. Relaciones de velocidad en las ondas simples. Las líneas delgadas discontinuas muestran la aproximación lineal de las ecuaciones [3.226]. El número de Mach,  $M_1$ , corresponde a una onda de choque normal que se desplazara a la velocidad  $q$  en un entorno en reposo con  $c_0$  (es dado por la expresión [5.236] combinada con [5.240]).  $\gamma = 1,4$ .



De la ecuación anterior, se deduce que las líneas de  $\xi$  constante sólo pueden ser ahora características en las que la velocidad sea nula, al estar entre dos frentes de onda o el fluido en reposo,<sup>195</sup> y que las líneas características  $C_+$  de velocidad constante tienen por pendiente:

$$m = \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{c_0} \right)_+ = \frac{v+c}{c_0} = 1 + \frac{\gamma+1}{2} \frac{v}{c_0} \quad [3.228]$$

y son todas ellas rectas de ecuación:

$$\frac{x}{c_0} = \frac{\xi_0}{c_0} + \left( 1 + \frac{\gamma+1}{2} \frac{v}{c_0} \right) t \quad [3.229]$$

En esta ecuación se ha indicado con  $\xi_0$  el valor de  $\xi$  cuando  $t=0$ , cuya relación con  $v$  puede determinarse fácilmente con  $G(t=0) = G_0$ .  $G_0$  representa entonces el patrón de la onda inicial en términos de  $\xi_0 = x_0(v)$  (v. figura 3.27).

Es inevitable la intersección de las líneas características de una onda simple cuando son convergentes. Puesto que cada característica tiene definida un valor constante de  $v$ , la solución en la intersección es multiforme y carece de significado físico.<sup>196</sup> Para estimar



el tiempo en que se producirá la rotura de la primera onda puede actuarse de diversas maneras. Un procedimiento simplemente toma la derivada respecto  $v$  de [3.229] y hace  $\partial x/\partial v=0$ , teniendo en cuenta que la rotura se visualiza cuando  $dG/dx$  se hace infinita. Por otro lado, en la intersección de dos características que se crucen después de la rotura se cumple:

$$\frac{\xi_0(v_1)}{c_0} + \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} \frac{v_1}{c_0}\right) t_i = \frac{\xi_0(v_2)}{c_0} + \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} \frac{v_2}{c_0}\right) t_i \quad [3.230]$$

de donde:

$$t_i = \frac{-2}{\gamma+1} \frac{\xi_0(v_2) - \xi_0(v_1)}{v_2 - v_1} > 0 \quad [3.231]$$

En el vértice de la envolvente de todas las intersecciones, confluye una única recta que define el tiempo mínimo o de rotura de la onda. Tomando el límite de la expresión anterior, se tiene:

$$t_R = \frac{-2}{\gamma+1} \frac{d\xi_0(v)}{dv} = \frac{-2}{\gamma+1} \frac{1}{[dG/d\xi]_0} > 0 \quad [3.232]$$

que, al ser mínimo, atribuye a  $D=[dG/d\xi]_0$  un valor máximo negativo,  $D_{\text{máx}}$ . Es decir, la característica sobre la cual se producirá la rotura es aquella que hace máximo el valor absoluto de la derivada del perfil de la onda en  $t=0$  y verifica que  $\partial v/\partial x < 0$ . Como  $t_R$  ha de ser positivo, esta ecuación confirma que la rotura sólo puede producirse en la parte de la onda que es de compresión ( $\oplus$ ).

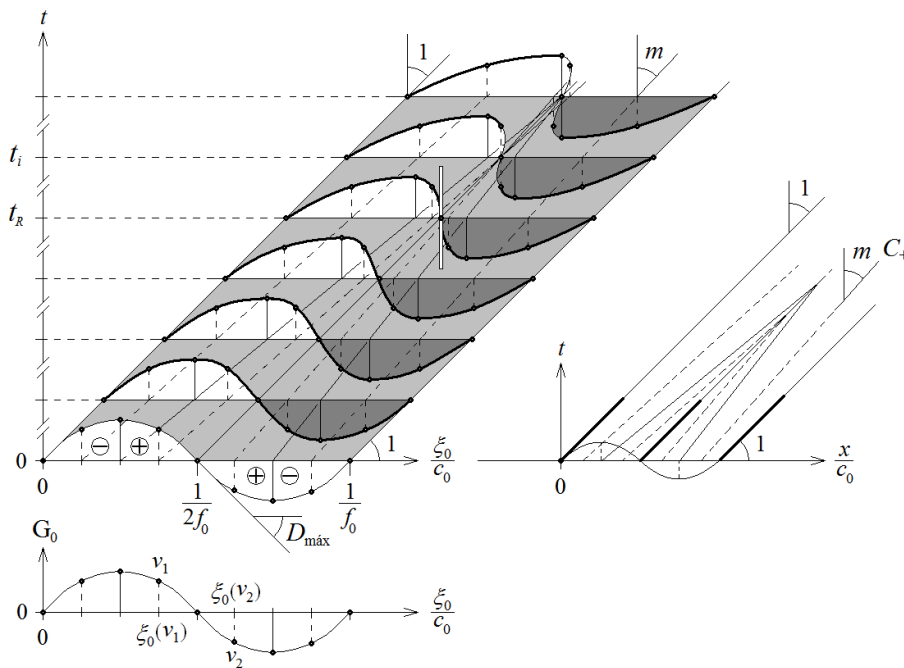
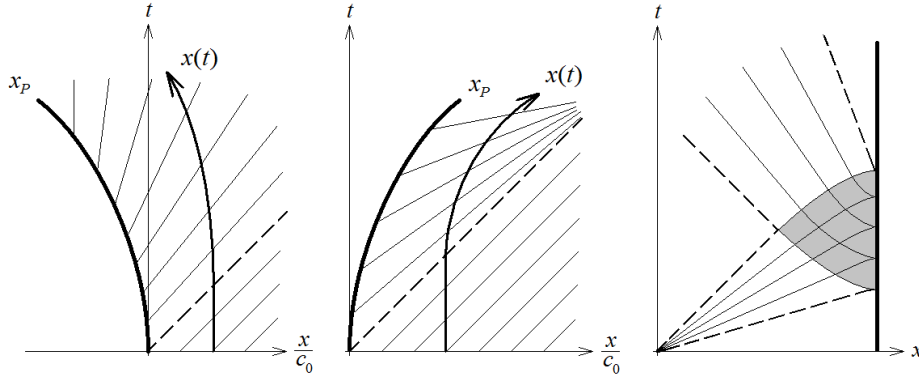


Figura 3.27. Onda plana longitudinal que se propaga por el interior de una tubería de sección recta constante y formación de choque en  $t_R$ . Las líneas características divergen en la parte de la onda que es de expansión, y convergen en la de compresión.



En la figura 3.27, se muestran estas cuestiones y cómo la distorsión conduce a la rotura de la onda. No obstante, cabe señalar que, como el tiempo necesario para que la distorsión sea significativa es del orden de  $l_0/v_0$ , y durante ese tiempo la onda se ha desplazado una distancia  $cl_0/v_0$  mucho mayor que  $l_0$ , los resultados de la teoría lineal pueden aplicarse a la mayoría de casos prácticos.<sup>197</sup>

Figura 3.28. Campo de características. A la izquierda, un pistón en una tubería que se acelera hacia el exterior. En el centro, el pistón se acelera hacia dentro (las ondas se dirigen hacia la derecha en ambos casos). A la derecha, se muestra la reflexión de una onda simple de expansión en una pared rígida. Las líneas discontinuas separan las regiones no influidas por la onda de las influidas.  $x(t)$  es la trayectoria de una partícula.



<sup>117</sup> Téngase presente, no obstante, que es probable que la solución resultante no sea válida en todo el campo fluido o en cualquier instante. Por otro lado, la experiencia enseña que, en un flujo cuasiestacionario, las magnitudes locales pueden fluctuar respecto de su valor medio en un tiempo superior que el mayor de los tiempos de proceso del flujo, lo que da lugar a lo que se conoce como *turbulencia*, que se tratará en el capítulo siguiente.

<sup>118</sup> Por ejemplo, un flujo irrotacional es invíscido y barotrópico en presencia de fuerzas másicas conservativas.

<sup>119</sup> Cuando se trata de dos fluidos no miscibles en contacto, las velocidades normales de avance de la superficie de separación han de ser iguales. En cambio, la presión puede no ser continua a ambos lados si la superficie no es plana y aparecen tensiones superficiales. Se demuestra que, a altos números de Reynolds, los líquidos miscibles se comportan como inmiscibles, pues entonces también es despreciable la difusión másica en la corriente exterior.

<sup>120</sup> Se entiende que se habla del campo gravitatorio terrestre a una escala a la que las fuerzas de Coriolis no tienen efecto. Se recuerda, no obstante, que la aceleración de Coriolis no tiene componente en la dirección de la línea de corriente, por lo que sólo afecta a las ecuaciones de Euler en las direcciones normal y binormal.

<sup>121</sup> En el flujo de Beltrami, se puede aplicar la ecuación de Bernoulli, pero cada línea de corriente tendrá una constante distinta.

<sup>122</sup> Las ecuaciones de Euler [3.7] son válidas en los líquidos, aunque cambie su entropía, como consecuencia del desacoplamiento de las ecuaciones térmicas y mecánicas.

<sup>123</sup> El término entre paréntesis es nulo según [3.9], al no considerar las fuerzas másicas. Si se tienen en cuenta, la ecuación en  $\{s\}$  resultante es, de nuevo, [3.11] para un movimiento permanente.

<sup>124</sup> La formulación analítica exacta del teorema de Crocco se aplica a la ecuación general de Euler en caso de que las fuerzas másicas sean despreciables. Combinando [2.40] y la ecuación de Gibbs de la entalpía, se sigue:





$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega} = T \nabla s - \nabla h_0$$

de donde se deduce, por un lado, que en un movimiento homentrópico irrotacional la entalpía de remanso sólo puede cambiar si el proceso no es estacionario y, por otro, que en un movimiento permanente todo fenómeno que genere gradientes de entropía o entalpía de remanso (capas límite, ondas de choque, estelas, combustión, reacción química, etc.) da lugar a la aparición de vorticidad en el campo fluido.

<sup>125</sup> Obsérvese que el término a la derecha de la ecuación [3.16] es el módulo del vector de Lamb.

<sup>126</sup> Se deduce que  $\alpha$  ha de ser:

$$\alpha = \frac{\int v^2 dQ}{\frac{S}{v^2} Q} = \frac{1}{S} \int_S \left( \frac{v}{v} \right)^3 dS$$

para que las expresiones [3.20] y [3.21] coincidan. Compárese esta ecuación con la definición del coeficiente corrector de la cantidad de movimiento,  $\beta$ .

<sup>127</sup> En estas ecuaciones, se supone que el difusor es horizontal, o bien el término de cota se ha incluido en la presión reducida. Aunque las definiciones del coeficiente de recuperación y del rendimiento de un difusor son semejantes, el primero se utiliza en su diseño (la relación de áreas y la esbeltez del difusor se escogen en tablas en función de la energía cinética de entrada), mientras que el segundo tiene un carácter más funcional cuando se combina con la ecuación de la energía.

<sup>128</sup> Por tanto, en [3.3], ha de ser  $q_n = 0$ . Recuérdese el teorema de Crocco. Como corolario, si el movimiento no es isentrópico, aparecerá vorticidad aunque haya sido isentrópico e irrotacional en algún momento pasado.

<sup>129</sup> Como el signo de la circulación se invierte al cambiar el sentido del movimiento, la circulación sobre cualquier línea cerrada en un campo irrotacional simplemente conexo es cero:

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot s dl = \int_{x_0}^x \mathbf{v} \cdot s dl_1 + \int_x^{x_0} \mathbf{v} \cdot s dl_2 = \int_{x_0}^x \mathbf{v} \cdot s dl_1 - \int_{x_0}^x \mathbf{v} \cdot s dl_2 = 0$$

Si el movimiento en el dominio simplemente conexo es rotacional, entonces la circulación entre dos puntos depende del camino y la circulación sobre la curva cerrada no se anula.

<sup>130</sup> Y su potencial es unívoco, como si la región fuera simplemente conexa.

<sup>131</sup> La componente en  $\{z\}$  se ha omitido, pero podría no ser nula si el vórtice libre fuera, por ejemplo, un torbellino de agua bajo la acción de la gravedad. El movimiento consiguiente sería el resultado de combinar ambos según el principio de superposición que se explica más adelante en este tema.

<sup>132</sup> La ecuación de continuidad en gases se obtiene teniendo en cuenta [2.33] y derivando la relación isentrópica:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{h}{h_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Los valores de referencia  $\rho_0$ ,  $h_0$  y  $p_0$  son las condiciones iniciales del movimiento en un punto cualquiera o en el infinito.

<sup>133</sup> Esta condición impone que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \partial \phi / \partial n$  ha de ser igual a la velocidad normal de avance del sólido y que tanto  $\phi$  como  $\mathbf{v}$  sean máximos sobre la superficie frontera del dominio irrotacional o constantes en su interior. Ésta es una propiedad general de las funciones armónicas de tres variables que verifican la ecuación de Laplace (condiciones débil y fuerte del máximo).

<sup>134</sup> Este resultado sólo es válido en los fluidos incompresibles porque la velocidad del sonido es infinita en ellos. La ecuación de Laplace no incluye derivadas temporales, por lo que el movimiento irrotacional de un fluido incompresible no necesita condiciones iniciales.



<sup>135</sup> En resumen, de existir una función armónica  $\varphi$  en un recinto simplemente conexo, ésta queda definida por sus valores en el contorno (problema de Dirichlet) o por los de su derivada normal (problema de Neumann) o por los primeros en una parte y los segundos en el resto. Si el recinto es múltiplemente conexo, también ha de fijarse el valor de las constantes cíclicas correspondientes.

<sup>136</sup> La masa inducida generalmente es mayor si el impulso no está alineado con la dirección del movimiento. Esta circunstancia también genera sobre el cuerpo un par que lo desestabiliza, y que daría lugar a un movimiento errático si no fuera compensado externamente. Por ello, se disponen aletas en la parte posterior de los cuerpos: las aletas o deflectores generan un par antagonista que ayuda y mantiene estable el movimiento del cuerpo asimétrico.

<sup>137</sup> Siendo  $\psi = w_z$ . También se cumple en el movimiento incompresible irrotacional que  $\Delta\psi = 0$  y:

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}_0) + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl$$

<sup>138</sup> El potencial complejo de la ecuación [3.41] puede considerarse la expresión analítica de una transformación del plano  $F(\varphi, \psi)$  en  $z(x, y)$ , de tal forma que la cuadrícula de  $\varphi$  y  $\psi$  constantes se transforma en la red de corriente a que corresponde el potencial complejo  $F$ . Es posible entonces transformar una forma arbitraria en un círculo y, por tanto, transformar el modelo del movimiento en torno a una forma arbitraria en el correspondiente a un círculo, para el cual la solución analítica es conocida. De esta forma, se puede encontrar, a partir del problema del cilindro con circulación que se verá a continuación, la solución del flujo potencial alrededor de un perfil alar.

<sup>139</sup> El principio de superposición se puede aplicar sólo a  $\varphi$  en movimiento tridimensional.

<sup>140</sup> Es la conocida paradoja de D'Alembert, que contradice la experiencia y que, en realidad, no lo es tal porque aquí el flujo es ideal. La presencia de un arrastre no nulo en el movimiento uniforme de un cuerpo implicaría la existencia de una fuerza externa que mantuviera su movimiento. El trabajo de esta fuerza externa debería disiparse en el fluido o convertirse en energía cinética que fluiría al infinito, pero como, por definición, no hay disipación de energía en un fluido ideal y la velocidad inducida en el fluido disminuye muy rápidamente con la distancia, dicha fuerza externa ha de ser nula. En consecuencia, la paradoja de D'Alembert es sólo la constatación teórica de que no puede haber disipación de energía en los flujos potenciales estacionarios en entornos ilimitados. Si el entorno no es infinito, como cuando un objeto se desplaza sumergido por debajo de una superficie libre, se produce un transporte de energía "hacia el infinito" que invalida este resultado y ocasiona una fuerza de arrastre, aun en el caso ideal. En el caso del cuerpo sumergido, este arrastre es consecuencia de la emisión de ondas a la superficie libre y también modifica el valor de la masa inducida en el cuerpo.

<sup>141</sup> En esta expresión se ha supuesto, por comodidad, que el momento del dipolo es  $p = 2\pi R^2 v_\infty$ .

<sup>142</sup> Esta fuerza es la base de la sustentación de muchos cuerpos en movimiento y de la propulsión de naves, y se fundamenta en la existencia de circulación atrapada alrededor de un cuerpo una de cuyas dimensiones es infinita. En teoría, esta fuerza desaparece en los cuerpos tridimensionales de extensión finita inmersos en un flujo potencial, pues entonces la circulación se anula al ser el dominio potencial simplemente conexo. No obstante, la experiencia enseña, por ejemplo, que los cuerpos esféricos en rotación también presentan una circulación no nula a su alrededor. Esta circulación es la causante del efecto que adquieren éstos y que les induce un cambio de trayectoria, pero es motivada por el arrastre viscoso del fluido cercano a su superficie en rotación, donde no se cumplen las condiciones de irrotacionalidad.

<sup>143</sup> Nótese que, en realidad, la velocidad en el borde de fuga no puede ser nula, aunque en él se encuentre el punto de remanso de la teoría potencial.

<sup>144</sup> Para los coeficientes  $C_D$  y  $C_L$  correspondientes al perfil aislado de la figura 3.5, el ángulo de planeo resulta ser:  $\lambda^* = \text{tg}^{-1}(7,17/944) = 0,00760$  radianes, y el error al suponer  $\lambda^* \approx (7,17/944)$  es tan sólo del 0,002%.

<sup>145</sup> Para valores más grandes del número de Reynolds,  $dv_p/v$ , la relación deja de ser lineal y tiende a ser cuadrática cuando  $Re$  es muy grande.

<sup>146</sup> Los coeficientes  $k$  y  $K$  pueden sustituirse por tensores en el caso anisótropo. Es práctica habitual suponer que dichos tensores son simétricos y definidos positivos, con un eje de simetría en la dirección vertical.



Esta definición se ajusta al papel singular que los procesos de sedimentación tienen en la formación de los sustratos geológicos. La ley de Darcy se expresa, generalmente, en términos de  $K$  o de su tensor.

<sup>147</sup> El término  $\beta_p$  incluye, a su vez, dos efectos que actúan en paralelo: la compresibilidad (o dilatación) total del medio poroso y la compresibilidad de la matriz sólida. El lector podrá visualizar ambos efectos si se imagina que aprieta una esponja.

<sup>148</sup> Debido a que se supone que el fluido es incompresible, pero se retiene la definición general de  $S$ .

<sup>149</sup> Esta analogía no es completa, porque los rayos de luz se refractan siguiendo una relación de senos, cuando aquí resulta de tangentes.

<sup>150</sup> Nótese que la evaluación de  $I$  en los contornos es fácil, pues de [3.75] resulta que  $I_1 = H_1^2/2$  e  $I_2 = H_2^2/2$ , para la figura 3.6. En el interior del dominio, es necesario conocer  $h = h(x, y, z)$ .

<sup>151</sup> No debe confundirse el movimiento unidireccional con el unidimensional. El movimiento de Couette que se verá a continuación es un movimiento unidireccional bidimensional. Los movimientos unidimensionales son casos particulares en los que, aun pudiendo existir fuerzas viscosas, el movimiento sigue siendo irrotacional porque es uniforme.

<sup>152</sup> Lo que la convierte en lineal y permite su resolución en algunos casos particulares. Los resultados de esta sección pueden aplicarse, evidentemente, a líquidos, pero también a gases en movimiento cuyo número de Mach sea inferior a 0,3.

<sup>153</sup> Compárense estas ecuaciones con las de Euler en coordenadas genéricas cuando las líneas de corriente son rectas.

<sup>154</sup> La aparición de esfuerzos turbulentos hace que, si el contorno unidireccional no es bidimensional, aparezcan flujos secundarios con velocidades medias no nulas en dirección transversal. Estas velocidades son, en general, pequeñas y despreciables frente a  $v_x$ , por lo que las condiciones [3.88] y [3.93] continúan siendo válidas. El flujo en un conducto circular es bidimensional.

<sup>155</sup> La velocidad de propagación normal a la pared es  $\omega\delta$ .

<sup>156</sup> Obsérvese que la densidad no aparece en esta ecuación, pues la aceleración de la partícula es nula en esta clase de movimientos.

<sup>157</sup> Si se tiene en cuenta el efecto de la longitud de entrada, donde el flujo no es unidireccional y existe una pérdida de energía adicional, la ecuación [3.111] se modifica de acuerdo con los resultados experimentales a:

$$\Delta p = \frac{32\mu L}{D^2} \bar{v}_x + 0,582\rho\bar{v}_x^2 = \left( \frac{64}{\text{Re } D} + 1,16 \right) \frac{\rho\bar{v}_x^2}{2}$$

En cualquier caso, este resultado sólo es válido cuando el régimen es laminar y se supone que la zona de entrada es suave y redondeada.

<sup>158</sup> El valor de  $F_T$  de esta fórmula es negativo para cualquier valor de la relación  $h_2/h_1$ . Esto quiere decir que la fuerza va dirigida en sentido contrario al movimiento (téngase en cuenta que  $\tau_0$  puede invertir su signo sobre la placa). Por otro lado, es interesante notar que la fuerza de fricción sobre la pared fija no coincide exactamente con este valor porque la fuerza normal sobre el plano inclinado tiene una pequeña componente paralela a la horizontal. La fuerza según  $\{x\}$  sobre la superficie curva viene dada por:

$$F_x = \int_0^L \left( \tau_h - (p - p_a) \frac{dh}{dx} \right) dx = - \int_0^L \left( \mu \left[ \frac{dv}{dy} \right]_{y=h} + (p - p_a) \frac{dh}{dx} \right) dx$$

<sup>159</sup> Se cumple que  $O(j) = O(h) = O(e) \ll O(R) = O(R_c)$ .

<sup>160</sup> Es necesario admitir también que la resultante de los esfuerzos viscosos sobre el eje es muy inferior a la de los de la presión. Los primeros son del orden de  $\mu\omega R/j$ , mientras que los segundos son de  $\mu\omega R^2/j^2$  (v. [3.140]), con  $j \ll R$ . Este resultado es, por tanto, una buena aproximación en ausencia de cavitación.



<sup>161</sup> El contacto puede producirse por la existencia de cargas dinámicas elevadas e imprevistas, la presencia de suciedad en el fluido, vibraciones estructurales, una mala alineación, etc., o porque se alcance una carga estacionaria tal que la excentricidad haga entrar en interferencia la rugosidad superficial de ambas superficies.

<sup>162</sup> El análisis dimensional demuestra que la fuerza puede describirse mediante una relación del tipo:  
 $F/(\mu\omega R) = f(R/j, \varepsilon)$ .

<sup>163</sup> Por ejemplo, en una rótula, el sistema de coordenadas podría ser esférico e y ser función del radio.

<sup>164</sup> Estos parámetros son los coeficientes de Lamé. V. [1.13].

<sup>165</sup> El caudal en volumen que entra por cada una de las caras es  $q_\beta L_\alpha d\alpha$ , y el saliente:

$$\left( q_\beta + \frac{\partial q_\beta}{\partial \beta} d\beta \right) \left( L_\alpha + \frac{\partial L_\alpha}{\partial \beta} d\beta \right) d\alpha \approx q_\beta L_\alpha d\alpha + \frac{\partial L_\alpha q_\beta}{\partial \beta} d\beta d\alpha$$

A este balance, se podría añadir el caudal que atravesara las superficies, si éstas fueran permeables.

<sup>166</sup> Obsérvese que la ecuación de Reynolds es lineal en derivadas parciales, con variables independientes  $\alpha$  y  $\beta$ , y variable dependiente  $p$ . Se dice que es una ecuación de tipo elíptico, lineal en la presión. De todas formas, los resultados de esta sección obvian algunos efectos que se presentan en la realidad y que, en parte, se analizan en el tema 5.6.2.

<sup>167</sup> La fuerza resultante es proporcional a la velocidad de aplastamiento y el coeficiente de amortiguación, inversamente proporcional a  $h^3$ .

<sup>168</sup> Este efecto, sumado a la amortiguación comentada anteriormente (correspondiente a  $dh/dt$ ) y la masa asociada al cojinete, permite plantear el problema dinámico desde una perspectiva mecánica tradicional.

<sup>169</sup> En concreto, para un gas caloríficamente perfecto,  $p/\rho^\gamma$  es constante y  $\rho dp = \gamma p d\rho$ . La condición  $s = s_0$  deja de ser válida en todo el campo fluido en presencia de ondas de choque. Las características básicas de las ondas de choque se presentarán en otro tema; de momento, basta decir que son superficies de discontinuidad de espesor prácticamente nulo en las que las magnitudes fluidas experimentan saltos discretos que han de respetar determinadas condiciones de compatibilidad y que siempre suponen el tránsito del flujo normal a la onda de supersónico a subsónico y un aumento de entropía.

<sup>170</sup> Cuando en un fluido se propagan ondas de frecuencia suficientemente elevada (es decir, con una longitud de onda muy pequeña), muy por encima del rango normal de trabajo, deja de ser correcta la hipótesis de isentropía y la velocidad del sonido depende, en parte, de la frecuencia.

<sup>171</sup> Esto ocurre cuando se produce un aumento significativo de la velocidad local o una disminución brusca de la temperatura. Esta circunstancia extiende la disertación en términos del número de Mach a flujos de tipo incompresible ( $M < 0,3$ ), subsónico ( $0,3 < M < 0,8$ ), transónico ( $0,8 < M < 1,2$ ), supersónico ( $1,2 < M < 3,0$ ) e hipersónico ( $M > 3,0$ ). En un flujo transónico, el flujo puede ser mixto, en el sentido que pueden haber zonas del flujo que sean subsónicas y otras, supersónicas. Evidentemente, los límites anteriores son sólo una referencia orientativa.

<sup>172</sup> En realidad, no existe una definición única del concepto de onda. Para abarcar todo el rango de fenómenos ondulatorios que pueden tratarse en mecánica de fluidos, y sin incluir algunas restricciones que a veces son convenientes, se respeta el concepto intuitivo de onda. Es decir, una onda es cualquier señal reconocible que se transfiere de un lugar a otro del medio de modo que puede identificarse su velocidad de propagación y puede reconocerse su posición en diferentes instantes. En esta presentación, se suponen ondas que se desplazan en el seno del fluido compresible.

<sup>173</sup> Este es el fundamento del efecto Doppler.

<sup>174</sup> Esta circunstancia impide que se sienta llegar un avión supersónico y causa el bloqueo másico en conductos y válvulas: se dice que las ondas de enrarecimiento no progresan aguas arriba, por lo que resulta imposible aumentar el caudal a través de un dispositivo disminuyendo la presión aguas abajo.

<sup>175</sup> Estas ecuaciones son válidas para cualquier fluido compresible, siempre que se verifiquen las condiciones de homotropía y unidireccionalidad. Si las fuerzas másicas no fueran despreciables pero sí conservativas,



se podría sustituir la presión estática por la reducida sin perder generalidad. En adelante, no obstante, se sigue el tratamiento suponiendo que se trata de un gas ideal.

<sup>176</sup> La ecuación [3.185] es una de las formas simplificadas en que se presenta la ley de inversión en una corriente. En términos de las variables de [1.125] y el coeficiente de expansión térmica, la forma completa de dicha ley en flujo estacionario es:

$$(1 - M^2) \frac{dv}{v} = -\frac{dA}{A} + \frac{\alpha}{c_p} \delta q + \frac{1}{c^2} \delta w^{ext} + \frac{g}{c^2} dz + \left( \frac{\alpha}{c_p} + \frac{1}{c^2} \right) |\delta q^{irrev}|$$

por lo que se puede acometer el diseño de toberas geométricas, térmicas, mecánicas o combinadas. La característica común de la inversión es que contradice la experiencia cotidiana, según la cual, usualmente,  $M < 1$ . Así, en flujo supersónico, el aporte de calor frena el fluido y, si es un gas ascendente, se retardará. También es posible acelerar o frenar una corriente subsónica añadiendo o sustrayendo masa por las paredes laterales de la tobera y, evidentemente, a la inversa si es supersónica. Para el caso de flujo adiabático, sin extracción de trabajo técnico, en un conducto horizontal de sección constante y sin rozamiento, se da la relación:

$$(1 - M^2) \frac{dv}{v} = \frac{dG}{G}$$

<sup>177</sup> Conocido el gasto másico, la ecuación [3.186] permitiría conocer el número de Mach en cualquier sección y, con éste, el resto de magnitudes con [3.182].

<sup>178</sup> Las fuerzas restitutivas externas pueden ser motivadas por la existencia de una superficie libre, en la que la acción combinada de la gravedad y la tensión superficial genera *ondas superficiales* tras la aparición de una perturbación. Este tipo de ondas no se tratarán en esta obra.

<sup>179</sup> El efecto gravedad implica un término del tipo  $g\rho'$ , cuya magnitud es despreciable en comparación con  $\rho' l_0$  siempre que  $l_0 g/c^2$  sea inferior a la unidad.

<sup>180</sup> En acústica,  $l_0$  es la longitud de onda del sonido,  $\lambda$ , y la condición impuesta por el número de Reynolds se escribe:  $\mu/(\rho c \lambda) \ll 1$ , o bien  $\mu f_0/(\rho c^2) \ll 1$ , al ser  $c = \lambda f_0$ , por lo que los efectos viscosos son despreciables, salvo para longitudes de onda en el rango de los ultrasonidos. Estas conclusiones también son válidas para la transferencia de calor, pues ésta se intensifica a distancias cortas.

<sup>181</sup> Se admite que la longitud transversal del recipiente es inferior a la menor longitud de onda considerada. Un caso interesante de vibraciones características es el de los resonadores, en los cuales aparecen frecuencias de vibración más pequeñas que las que corresponderían al tamaño del recipiente (del orden de  $c/L$ ) por el escape de gas por un orificio. Si el orificio es pequeño, las vibraciones ordinarias que se producen en el interior no se ven alteradas por la presencia del escape y la solución [3.209] es válida.

<sup>182</sup> De hecho, siempre posible una solución tipo [3.209] (para las condiciones de contorno e iniciales correspondientes) si se utilizan ondas monocromáticas, de modo que la onda final sea el resultado de la superposición de infinitas ondas planas armónicas mediante integrales de Fourier (el resultado es el espectro frecuencial de la onda).

<sup>183</sup> Las ecuaciones [3.207] y [3.208] son del tipo hiperbólico lineal, puesto que  $c_0$  es constante ante pequeñas perturbaciones. Si la amplitud de la onda es finita, la velocidad de propagación depende de la perturbación por [3.175] y estas ecuaciones se vuelven no lineales.

<sup>184</sup> Por ejemplo,  $\partial^2 \varphi / \partial x^2 = (\partial^2 \varphi / \partial \xi_+ \partial \xi_-) (\partial \xi_+ / \partial x) (\partial \xi_- / \partial x) = \partial^2 \varphi / \partial \xi_+ \partial \xi_-$ . Tras derivar  $\varphi$  respecto a  $t$  dos veces y sustituir en [3.208], se deduce que  $\partial^2 \varphi / \partial \xi_+ \partial \xi_- = 0$ .

<sup>185</sup> La perturbación en temperatura se obtiene combinando [1.115] y [1.127].

<sup>186</sup> Esta condición implica que  $O(a/\lambda) = O(l/l_0) \ll 1$ , y que  $O(a/\lambda) = O(f_0 a/c_0) = O(v'/c_0) \ll 1$ , siendo aplicación la teoría lineal. Para que la onda fuera plana, también tendría que ser  $\lambda$  mayor que el diámetro del conducto.

<sup>187</sup> Aunque está extendida la denominación de “onda de compresión” a la semionda generada cuando el pistón se mueve en el sentido de la onda (a la derecha en la figura 3.23), y la de “onda de expansión” en



caso contrario, lo cierto es que, desde el punto de vista del fluido, se produce compresión sólo cuando  $\partial v_p / \partial x < 0$ . Para verlo, se han de utilizar la derivada sustancial y el principio de continuidad combinados, y resulta que se produce compresión cuando:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v' \frac{\partial\rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v'}{\partial x} > 0$$

como se indica en el texto. El motivo de esta confusión es que el pistón siente una presión positiva cuando se desplaza hacia la derecha con  $v_p > 0$ .

<sup>188</sup> La onda de choque acostumbra a ser débil porque por norma general se cumplirá que  $v^* \ll c_0$ , aunque este no es el caso de un tren de alta velocidad en un túnel. La velocidad de propagación de esta onda es la  $v_0$  de [5.240], y la del fluido tras la onda  $v_1 = v^*$ .

<sup>189</sup> El valor límite es proporcionado por la ecuación [3.224] como consecuencia de que  $c$  ha de ser positiva. Por ejemplo, el valor máximo de la velocidad del fluido siguiendo a un pistón que se mueve a la izquierda, para una onda de expansión propagándose a la derecha, resulta de la condición:  $0 < -v < 2c_0/(\gamma - 1) = v_{\text{máx}}$ .

<sup>190</sup> En concreto, el caso en que se tiene que  $\xi_0 = 0$  en [3.229].

<sup>191</sup> Si las ondas son de magnitud finita, la presión en la intersección no es exactamente el doble y se demuestra que resulta de la expresión:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} + \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  son las presiones absolutas transportadas por cada una de las ondas en un entorno a presión  $p_0$ . Compruebe el lector que, cuando la perturbación es pequeña y  $p_i = p_0 + p'_i$ , se verifica que  $p' = p'_1 + p'_2$ .

<sup>192</sup> Por ejemplo, la ecuación de continuidad podría escribirse de la forma:

$$\frac{dv}{d\rho} \left( \frac{\partial\rho}{\partial t} + \left( v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right) \frac{\partial\rho}{\partial x} \right) = \frac{\partial v}{\partial t} + \left( v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

y una ecuación contiene la otra.

<sup>193</sup> Obsérvese que estas ecuaciones se corresponden, para cada signo, con cada uno de los factores de [3.210] pero, a diferencia de [3.207], son de primer orden, por lo que ahora la solución analítica no exige la existencia de dos funciones de onda  $F_+$  y  $F_-$ . Se dice que una ecuación diferencial que se pueda escribir de forma simple en función de un operador de derivación del tipo  $\{\partial/\partial t + (\alpha \pm \beta)\partial/\partial x\}$  es una ecuación en forma característica, y su solución es una función  $J$ , que no varía a lo largo de su característica respectiva (hay una por cada signo) en el plano  $\{x, t\}$ , denomina *invariante de Riemann*. En el caso más general, las líneas características son curvas desconocidas de antemano, pero en el movimiento isentrópico de un gas perfecto en un tubo de área constante se deduce que  $J = v \pm 2c/(\gamma - 1)$  y las líneas características son rectas. Si el flujo no fuera isentrópico o dejara de serlo (como cuando se produce una onda de choque), las líneas características dejarían de coincidir con los invariantes de Riemann anteriores y, si las ondas no fueran simples, sino el resultado de la interacción de varias en el plano  $\{x, t\}$ , las líneas serían curvas (v. la zona gris de la figura 3.28). Las características son líneas a lo largo de las cuales se propagan las perturbaciones de pequeña intensidad.

<sup>194</sup> La diferencia entre  $G$  y  $G_+$  sugiere que, en las ondas de amplitud arbitraria, no existe una velocidad de onda constante,  $c_0$ , sino que cada punto del perfil de la onda se mueve a una velocidad diferente, de valor  $v \pm c$ , resultado de la superposición del movimiento de la onda y del arrastre del fluido.

<sup>195</sup> Cuando el fluido está en reposo, se toma  $\xi_0(0) = 0$  en  $t = 0$  y las líneas características son del tipo  $x = c_0 t$ .

<sup>196</sup> Se ha estado utilizando hasta el momento los términos rotura de la onda y formación de una discontinuidad como si fueran equivalentes y no es así. La rotura se produce cuando la solución deja de ser univaluada, lo que no es posible en realidad por carecer de sentido físico. Cuando el valor del gradiente  $dv/dx$  se hace muy grande, toman importancia los efectos viscosos y de transferencia de calor, y la onda no llega a



---

romper, sino que desemboca en una onda de choque que supone una discontinuidad en la solución. Las ondas superficiales en cambio sí pueden romper físicamente, como se puede observar en las olas que se forman en la orilla del mar.

<sup>197</sup> Una excepción la constituye, precisamente, la rotura de las olas marinas cerca de la orilla. En este caso, la velocidad de propagación de una onda de longitud  $l_0$  es del orden  $(gh)^{1/2}$ , de modo la rotura se produce cuando la profundidad es  $h \approx v_0^2/g$ , y puede ocurrir en una distancia aproximada de una única longitud de onda.

→ 4





## Turbulencia y capa límite

El conjunto de ecuaciones diferenciales de la mecánica de los fluidos constituye un marco teórico adecuado, fiable y comprensible, basado en las leyes físicas, cinemáticas, mecánicas y termodinámicas fundamentales. El estudio del flujo de los fluidos se basa en estas ecuaciones y, de hecho, cualquier fenómeno puede explicarse e interpretarse con ellas, con las propiedades del fluido y con una ecuación constitutiva de estado.

No obstante, la realidad observada enseña que la dinámica de los fluidos es más compleja. En la mayoría de los casos, son muchas las configuraciones posibles del flujo que pueden ser coherentes con sus límites, las condiciones iniciales y la conservación de los principios básicos. En cambio, el campo fluido que se observa en la realidad sólo manifiesta una de estas configuraciones, o una combinación de ellas, por lo que la predicción de la configuración existente es una habilidad que requiere mucho más que el mero conocimiento de las ecuaciones gobernantes y sólo puede alcanzarse cuando se combinan entre sí y con la experiencia.

El esquema del movimiento del fluido depende de las circunstancias que lo originan y, salvo excepciones, sus propiedades sólo pueden intuirse de las ecuaciones fundamentales cuando se simplifican a partir de determinadas circunstancias particulares. Algunas de las simplificaciones más usuales se han presentado en el capítulo anterior para distintos tipos de flujos característicos. Las soluciones analíticas obtenidas ofrecen un conocimiento más o menos preciso de la naturaleza y de los efectos especiales contenidos en las ecuaciones, pero no son más que casos particulares en los que, además, pueden existir regiones en el campo fluido en las que las hipótesis que dieron lugar a la simplificación general no sean válidas.

Por ejemplo, la condición de no deslizamiento o de velocidad tangencial nula en el contorno no puede ser admitida en ausencia de efectos viscosos. En los fluidos ideales, el contorno fijo e impermeable sólo puede imponer que la velocidad normal sea nula y, por ello, las ecuaciones de Euler y Bernoulli no pueden explicar por sí solas muchos fenómenos importantes de la mecánica de fluidos, como son la fricción, la transferencia de calor o el desprendimiento del fluido de una pared. Algunos ejemplos en los que la mecánica de fluidos no encuentra explicación en los principios básicos (al menos, en la forma en que se han presentado las ecuaciones hasta el momento) son el incumplimien-



to del enunciado de Leonardo da Vinci para el movimiento relativo, que se ha expuesto en la introducción del primer capítulo, y la existencia de la resistencia aerodinámica, que resuelve la paradoja de D'Alembert.

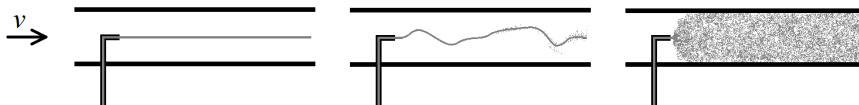
Estos y otros casos no pueden comprenderse del todo si no se incluyen los efectos de la turbulencia del flujo y de la capa límite. La teoría de la turbulencia está muy lejos de haberse completado, incluso en los casos más sencillos, y, aunque se ha progresado mucho en el estudio de sus magnitudes estadísticas, aún no se dispone de una teoría suficientemente precisa que permita calcular los flujos turbulentos de cantidad de movimiento, energía y materia, de forma práctica y general. Por su parte, el análisis de la capa límite resulta muy complicado cuando, por ejemplo, se acoplan los gradientes de velocidad, temperatura o concentración sobre una superficie que, además, puede tener cualquier forma, o cuando se quieren incluir los efectos de la turbulencia en el movimiento de gases a alta velocidad. En este capítulo, se describe la teoría clásica de ambos fenómenos para un fluido incompresible.

## 4.1. Turbulencia

La mayor parte de los flujos que se encuentran en la práctica de la ingeniería son turbulentos. Las investigaciones pioneras de Reynolds a finales del siglo XIX establecieron claramente que existen dos tipos de flujos, el laminar y el turbulento, y que el parámetro homónimo servía para delimitarlos. Aunque los mecanismos por los que una inestabilidad puede desembocar en turbulencia, así como su propia estructura, son bien entendidos hoy día, la turbulencia sigue siendo motivo de estudio y una fuente inagotable de nuevos retos físico-matemáticos.

Una característica esencial de la turbulencia es el aumento de las velocidades de transporte de cantidad de movimiento, de masa y de calor con respecto al flujo laminar equivalente.<sup>198</sup> Reynolds hizo también una importante aportación a la teoría de la turbulencia con la deducción de las ecuaciones del movimiento para el flujo medio, que, en particular, condujo a la introducción de las denominadas *tensiones de Reynolds*. Esta descripción de las ecuaciones en función de los términos medios de las magnitudes puede aplicarse al transporte de cualquier propiedad y conduce siempre a la aparición de unos términos adicionales, que son el valor medio del producto de la velocidad de fluctuación turbulenta y de la oscilación turbulenta de la magnitud transportada. La teoría del *camino libre de mezcla*, introducida por Prandtl, fue un gran avance en la estimación de estos términos a partir del campo medio de la velocidad, pero su aplicación está básicamente restringida a movimientos cuasiunidireccionales en conductos, canales y chorros. En otros casos, y aunque se han desarrollado numerosas teorías e hipótesis diferentes, en la actualidad todavía no existe ningún método de cálculo aproximado de dichos términos que no necesite datos experimentales.

Figura 4.1. Experimento de Reynolds para la visualización de la turbulencia mediante la inyección de un colorante en un flujo incoloro. Cuando la velocidad del fluido incoloro (agua) es pequeña, el chorro de colorante se mantiene bien definido a lo largo del tubo, sin mezclarse con el incoloro, y el régimen es laminar (izquierda). Se produce una rápida mezcla de ambos por intercambio de masa, cantidad de movimiento y energía cuando el flujo se convierte en turbulento (derecha).





Los flujos turbulentos son sumamente irregulares y aleatorios, con numerosos grados de libertad, lo que alienta su estudio utilizando medios estadísticos no deterministas. La justificación del empleo de métodos estadísticos se fundamenta en la extrema sensibilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, cuyas soluciones turbulentas pueden ser divergentes en el tiempo aunque partan de condiciones iniciales idénticas. La teoría estadística de la turbulencia se orientó, en un principio, al estudio de los flujos turbulentos homogéneos e isotrópicos, en los que las fluctuaciones turbulentas de la velocidad, la presión, la temperatura, etc., eran estadísticamente independientes de la posición y no manifestaban ninguna preferencia direccional. La condición de isotropía introduce una notable simplificación en el estudio estadístico de la turbulencia, porque presupone que las tensiones de Reynolds no están correlacionadas entre sí.

No obstante, enseguida se cayó en la cuenta de que la teoría estadística estándar que se utilizaba, por ejemplo, para describir el comportamiento macroscópico de muchos materiales, no podía aplicarse a los fluidos porque la turbulencia era muy disipativa. Incluso con altos números de Reynolds, para los cuales el efecto de la viscosidad debería ser despreciable, la experiencia muestra que la energía cinética de un flujo no se conserva en el tiempo porque la disipación turbulenta es importante. Matemáticamente, ello es consecuencia de que la viscosidad aparece en las ecuaciones del movimiento multiplicando el término de derivación más elevado y, por tanto, éste no puede ser suprimido sin cambiar el propio carácter de la ecuación. Esta paradoja fue resuelta por Kolmogorov, que introdujo el concepto de *cascada de energía* para explicar por qué la disipación turbulenta es finita en el límite invíscido (Reynolds infinito).

La turbulencia es rotacional y tridimensional por definición, y se caracteriza por unos niveles muy altos de fluctuación de la vorticidad. Otra característica esencial de la turbulencia es su riqueza de escalas de vorticidad: en un flujo turbulento completamente desarrollado, pueden encontrarse escalas de rotación muy grandes, compatibles con la dimensión del dominio en que tiene lugar el movimiento, y otras de escala mucho más pequeña, de tamaño limitado por la naturaleza de los procesos disipativos.<sup>199</sup> Los remolinos de mayor tamaño son asociados a fluctuaciones de baja frecuencia, mientras que los más pequeños lo son a las de alta frecuencia, y son los responsables de la gran disipación de energía que se produce en el flujo turbulento. Esta alta tasa de disipación implica que la turbulencia decaería rápidamente si no recibiera un suministro continuo de energía que compensara las pérdidas viscosas. El mayor éxito de la teoría de la cascada de energía de Kolmogorov es que explica la distribución y el reparto de la energía entre las diferentes escalas de remolinos: los remolinos grandes toman energía del flujo medio principal y la transfieren a remolinos cada vez más pequeños, hasta que las fuerzas viscosas la disipan cuando el remolino alcanza el tamaño mínimo adecuado, que se conoce como *microescala de Kolmogorov*.

A causa de la interacción de los remolinos de gran tamaño con el flujo medio, la turbulencia de gran escala está fuertemente influida por el contorno del problema y no es isotrópica (ni homogénea). En cambio, el proceso disipativo que tiene lugar a la escala de Kolmogorov es localmente isotrópico y, por tanto, se justifica la aplicación de las correlaciones deducidas artificialmente para la turbulencia isotrópica a la turbulencia no isotrópica real.<sup>200</sup> Además, como la menor escala a la que tienen lugar los fenómenos turbulentos es mayor que cualquier longitud molecular, se puede modelizar la turbulencia mediante teorías continuistas y seguir criterios de orden de magnitud en las ecuaciones fundamentales.



#### 4.1.1. Escalas características

Supóngase que la turbulencia es homogénea e isotrópica y que la cascada de energía es activa con la misma ratio de intercambio en todos los puntos del campo fluido. Si el flujo es alimentado de energía desde la escala  $l_0$ , correspondiente a la longitud característica del flujo medio, para la que existen vórtices en que la diferencia de velocidad es del orden  $v_0$ , el tiempo en que estos vórtices se vuelven inestables es  $t_0 = l_0/v_0$ . Estos vórtices transfieren su energía a vórtices más pequeños y éstos, a otros aún más pequeños, etc.

Si el sistema está en equilibrio, la ratio de transferencia de energía por unidad de masa y tiempo,  $\varepsilon$ , ha de ser la misma para todas las escalas de vórtices. El análisis dimensional indica que esta ratio es del orden

$$O(\varepsilon) = \frac{v_0^2}{t_0} \approx \frac{v^3}{l} \quad [4.1]$$

para vórtices de longitud  $l$  y velocidad característica  $v$ .<sup>201</sup> Esta ecuación indica que la velocidad a la cual los remolinos suministran energía a otros más pequeños es inversamente proporcional a la escala temporal de los remolinos grandes, y esta relación se repite sucesivamente con gradientes de velocidad,  $v/l$ , cada vez mayores, del orden  $(\varepsilon/l^2)^{1/3}$ .

No obstante, como los vórtices más pequeños tienden a tener escalas temporales también más pequeñas, su movimiento debe ser estadísticamente independiente de la turbulencia de gran escala, relativamente más lenta. Esto quiere decir, por un lado, que el movimiento de pequeña escala sólo puede depender de la velocidad a que el movimiento de gran escala suministra energía y de la viscosidad cinemática  $\nu$ , por otro, que los vórtices pequeños tienen tiempo suficiente para adaptarse a los cambios de gran escala para mantener el equilibrio.

El vórtice más pequeño que permanece activo el tiempo suficiente para ser identificado es aquel para el cual el número de Reynolds es aproximadamente la unidad:

$$Re = \frac{vl}{\nu} \approx 1 \quad [4.2]$$

Esta relación surge de la necesidad de suponer que la cascada de energía es invíscida hasta que los vórtices alcanzan un tamaño tal que su tiempo característico,  $l/v$ , es del mismo orden que el viscoso,  $l^2/\nu$ . Es decir, los vórtices cuyo tiempo característico es inferior al viscoso se rompen antes de que la viscosidad tenga tiempo de actuar. Combinando estas dos ecuaciones, se deduce que la escala de longitud Kolmogorov es

$$O(l_K) = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad [4.3]$$

y que las escalas de tiempo y velocidad respectivas son

$$O(t_K) = \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad [4.4]$$

$$O(v_K) = (\nu\varepsilon)^{1/4}$$



Como en esta escala se cumple que  $v_K l_K \approx \nu$ , la ratio de disipación de energía es<sup>202</sup>

$$O(\varepsilon) = \frac{v_K^3}{l_K} = \nu \left( \frac{v_K}{l_K} \right)^2 \quad [4.5]$$

Según este desarrollo, los vórtices se separan en dos clases: aquellos para los cuales  $l > l_K$  y las inestabilidades actúan más rápido que la viscosidad, y otros, más pequeños, para los cuales  $l < l_K$ . Los primeros se denominan *inerciales* y los segundos, *disipativos*. Esta denominación sirve para poner de manifiesto que los remolinos grandes determinan la parte más importante del transporte de cantidad de movimiento pero, en cambio, sólo pierden una fracción muy pequeña de su energía por efectos de disipación viscosa. En estos remolinos, la ratio  $\nu(v/l)^2$  es pequeña, comparada con  $v^3/l$ , si el número de Reynolds es grande y, por tanto, transfieren prácticamente toda la energía que reciben a otros más pequeños. El proceso continúa en forma de cascada hasta que se alcanza un tamaño tal que los vórtices disipan casi toda la energía que reciben y apenas transfieren nada. En consecuencia, la escala de Kolmogorov muestra el tamaño más pequeño de vórtices existentes, por debajo del cual el flujo ha de ser prácticamente liso.

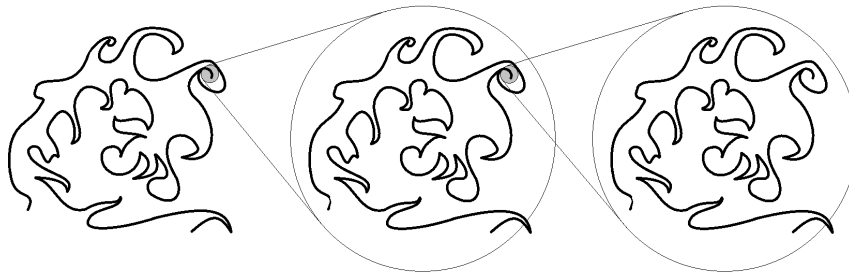


Figura 4.2. Representación esquemática de una cascada turbulenta. La energía es transferida hacia los vórtices más pequeños hasta que es disipada por la viscosidad.

El parámetro fundamental en la caracterización de la distribución de la velocidad turbulenta de diferentes flujos es el cociente entre las longitudes extremas de las diferentes escalas que pueden estar presentes. Esta relación define la extensión del rango inercial de la cascada de energía y es<sup>203</sup>

$$O\left(\frac{l_0}{l_K}\right) = O\left(l_0 \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}\right) = l_0 \left(\frac{v_0^3}{l_0 \nu^3}\right)^{1/4} = Re_0^{3/4} \quad [4.6]$$

donde el número de Reynolds está definido en función de los parámetros de la escala mayor. Los flujos turbulentos requieren  $Re_0$  superiores a  $10^3$ , y no se puede hablar de turbulencia real si es inferior a 50, porque las inestabilidades necesarias para dar lugar a la cascada de energía no se desarrollan en este caso. La mayoría de las aplicaciones industriales tienen regímenes para los que el número de  $Re_0$  anterior se encuentra en el intervalo  $[10^3-10^6]$ . Un hombre corriendo genera  $Re_0 \approx 10^4$ , mientras que, en la capa límite que se desarrolla en el ala de un avión comercial, el número de Reynolds es del orden de  $10^7$ .



#### 4.1.2. Movimiento turbulento medio

Sea  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  una magnitud fluida en un flujo turbulento. Se define el valor medio de  $\varphi$  como

$$\overline{\varphi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varphi(\mathbf{x}, t) dt \quad [4.7]$$

La existencia de estos valores medios se comprueba experimentalmente al existir un período de integración tal que, para tiempos de integración superiores a  $T$ , el valor medio no cambia. Este tiempo de integración se denomina *pseudoperíodo* de la turbulencia.

Se entiende que la fluctuación turbulenta de la magnitud  $\varphi$  es de las partículas de fluido, y, en este sentido, no se trata de una agitación molecular cuyo efecto macroscópico se mide con la viscosidad (que, por otro lado, es inevitable y siempre está presente). Esta fluctuación es desordenada y aleatoria en el espacio y en el tiempo. Es decir: en un mismo punto, la velocidad fluctúa aleatoriamente en torno al valor medio a lo largo del tiempo y, si el movimiento no es permanente, se admite que la variación de las propiedades medias es despreciable durante las fluctuaciones turbulentas. Esta hipótesis supone la existencia de una escala temporal, asociada a la turbulencia, muy inferior a la escala temporal de variación de las magnitudes medias.

A partir de aquí, cualquier magnitud  $\varphi$  se puede descomponer en sus partes media y fluctuante:

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi' \quad [4.8]$$

Por definición, el valor medio de la parte fluctuante es cero. Es decir,

$$\overline{\varphi'} = 0 \quad [4.9]$$

Las reglas que se cumplen cuando se trabaja con los valores medios de una magnitud son

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\varphi}} &= \overline{\varphi} \\ \overline{a\varphi} &= a\overline{\varphi} \\ \overline{\varphi\varphi'} &= \overline{\varphi}\overline{\varphi'} = 0 \\ \overline{\varphi_1 + \varphi_2} &= \overline{\varphi_1} + \overline{\varphi_2} \end{aligned} \quad [4.10]$$

donde  $a$  es una constante.

El valor medio del producto de dos magnitudes,  $\varphi$ , cada una con su parte media y fluctuante, es

$$\overline{\varphi_1\varphi_2} = \overline{\varphi_1}\overline{\varphi_2} + \overline{\varphi_1\varphi_2'} + \overline{\varphi_2\varphi_1'} + \overline{\varphi_1'\varphi_2'} = \overline{\varphi_1}\overline{\varphi_2} + \overline{\varphi_1'\varphi_2'} \quad [4.11]$$

porque el del producto de un valor medio por la media de uno fluctuante es nulo.

Para el seguimiento de las ecuaciones con estos operadores, es necesario postular que las operaciones de derivar y tomar valor medio son intercambiables:



$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} &= \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} \\ \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} &= \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t}\end{aligned}\quad [4.12]$$

y que las fluctuaciones correspondientes,  $\varphi$ , pueden estar correlacionadas:

$$\overline{\varphi'_1 \varphi'_2} \neq 0 \quad [4.13]$$

Para ilustrar el uso de estas ecuaciones, considérese la ecuación de continuidad de un fluido incompresible descrita por medio de [4.8]:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0 \quad [4.14]$$

Tomando valores medios de la ecuación, resulta, con [4.12], que

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_i} = 0 \quad [4.15]$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0 \quad [4.16]$$

Estas últimas ecuaciones ponen de manifiesto que, en el caso de un fluido incompresible, tanto el movimiento medio como el fluctuante verifican, independientemente, la ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

Llegados a este punto, conviene especificar qué se entiende por turbulencia homogénea y por turbulencia isotropa. Un flujo turbulento es *homogéneo* si las distribuciones estadísticas de las fluctuaciones son las mismas en cualquiera de sus puntos, es decir, son independientes de una traslación del sistema de referencia. Un flujo es *isotrópico* si dichas distribuciones no varían al hacerlo la orientación espacial de los ejes coordenados. La homogeneidad implica que los valores medios de las magnitudes fluidas no cambian con la posición en una dirección particular y, por tanto, el campo fluido medio es invariante frente a traslaciones a lo largo de esa dirección (si todo el campo es homogéneo, las propiedades medias son las mismas en todo el espacio). Como resultado evidente de la homogeneidad espacial en turbulencia, se sigue que los gradientes de las propiedades medias son nulos en alguna dirección (o en todas). La restricción de isotropía implica la independencia en dirección, es decir, se observa la misma característica en cualquier dirección y es invariante ante rotaciones de los ejes coordenados. Las fluctuaciones turbulentas no están correlacionadas si la turbulencia es isotrópica, esto es, no se cumple [4.13], pues, en caso contrario, habrían direcciones particulares preferentes (que serían principales).

En el estudio estadístico de la turbulencia, son fundamentales los conceptos de correlación y espectro. La correlación compara magnitudes fluidas análogas, por ejemplo, componentes de velocidad fluctuante en dos puntos distintos en un mismo instante, o en el mismo punto pero en instantes diferentes. El espectro sirve para describir la distribución de la energía del movimiento turbulento entre las diversas frecuencias de oscilación, efectuando un análisis armónico de las fluctuaciones turbulentas mediante,



por ejemplo, series de Fourier. Ambos métodos de análisis son equivalentes, pero uno es más adecuado que otro para el estudio de determinados aspectos del problema.

### 4.1.3. Tensiones y ecuaciones de Reynolds

La ecuación [1.84] de la cantidad de movimiento, descrita en términos de los valores medios y fluctuantes, se escribe:

$$\frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_j} = f_{m,i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij})}{\partial x_j} \quad [4.17]$$

donde ahora,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{ij} &= -\bar{p}\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \\ \tau'_{ij} &= -p'\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad [4.18]$$

La ecuación [4.17] en valor medio es

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = \bar{f}_{m,i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad [4.19]$$

Como, con [4.16], se tiene que

$$\overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial(\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j} \quad [4.20]$$

la ecuación [4.19] puede escribirse de la forma:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = \bar{f}_{m,i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{v'_i v'_j}) = \bar{f}_{m,i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij,T}}{\partial x_j} \quad [4.21]$$

y, para un fluido newtoniano,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} &= \bar{f}_{m,i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (-\bar{p}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \rho \overline{v'_i v'_j}) \\ &= \bar{f}_{m,i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{v}_i - \frac{\partial(\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j} \end{aligned} \quad [4.22]$$

Estas formas de la ecuación de la cantidad de movimiento difieren de [1.84] y [1.87] en el último sumando del segundo miembro. La aparición de este término hace posible redefinir un nuevo tensor de esfuerzos en el flujo turbulento, de componentes  $\tau_{ij,T}$ , formado por la combinación del tensor de tensiones y unas nuevas tensiones,  $\tau_{Re}$ , que tienen su origen en el término convectivo (no lineal) de la aceleración.

Las nuevas tensiones que aparecen en el flujo turbulento se denominan *tensiones de Reynolds*, y representan las velocidades medias de transferencia de la cantidad de movimiento por unidad de área del movimiento fluctuante. Como  $\rho v'_i$  es la parte fluctuante





del flujo másico específico que atraviesa una superficie normal en dirección  $\{x_i\}$ , y  $v'_j$  es la parte fluctuante de la componente en dirección  $\{x_j\}$  de la cantidad de movimiento, la tensión de Reynolds

$$\tau_{Re} = -\rho \overline{v'_i v'_j} \quad [4.23]$$

representa la velocidad media de la transferencia de la componente  $x_j$  de la cantidad de movimiento a través de un área unitaria normal a la dirección  $\{x_i\}$ .

Evidentemente, el tensor que se forma con estas tensiones es simétrico (tiene seis componentes independientes), lo que permite anular los términos no diagonales mediante una rotación del sistema coordenado y muestra la existencia de direcciones preferentes. Las tensiones no diagonales representan la transferencia turbulenta de cantidad de movimiento a lo largo de las líneas de corriente, y son no nulas si se cumple la condición [4.13] y la turbulencia no es isótropa. Las componentes de la diagonal se forman con tensiones normales y representan las intensidades de fluctuación en cada uno de los ejes coordenados. El valor de estas componentes cambia ante una rotación, pero no así su suma, que se mantiene invariante y es dos veces la energía cinética de la turbulencia por unidad de masa,  $q$ :

$$2\overline{q^2} = \overline{(v'_1)^2} + \overline{(v'_2)^2} + \overline{(v'_3)^2} \quad [4.24]$$

En virtud de la hipótesis de isotropía, las tensiones de Reynolds resultan ser

$$\rho \overline{v'_i v'_j} = \rho \overline{(v')^2} \delta_{ij} \quad [4.25]$$

y, entonces,

$$\frac{2}{3} \overline{q^2} = \overline{(v'_1)^2} = \overline{(v'_2)^2} = \overline{(v'_3)^2} \quad [4.26]$$

Es importante indicar que estas tensiones son aparentes pero reales, del mismo modo que son aparentes las tensiones viscosas derivadas de la agitación molecular. El observador del movimiento turbulento sólo puede percibir el movimiento medio, no la fluctuación, del mismo modo que tampoco observa el movimiento molecular, pero sí su efecto viscoso. Obsérvese, a su vez, que la forma adimensional de las componentes del tensor de tensiones total que ha aparecido en [4.22] es<sup>204</sup>

$$\tau_{ij,T}^* = -\overline{p}^* \delta_{ij} + \frac{2}{Re} \overline{e_{ij}^*} - \overline{(v'_i)^* (v'_j)^*} \quad [4.27]$$

por lo que los términos viscosos son despreciables frente a las tensiones de Reynolds [4.23] cuando el número de Reynolds es grande, lo que es confirmado por la experiencia.

Cuando el tratamiento utilizado hasta el momento, en función de los valores medios y fluctuantes, se aplica a los fenómenos de transporte de calor y masa, se llega a las expresiones:<sup>205</sup>

$$\begin{aligned} \rho c \left( \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \right) &= \Phi_v + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} - \rho c \overline{v'_i T'} \right) \\ \frac{\partial \overline{c}_q}{\partial t} + v_i \frac{\partial \overline{c}_q}{\partial x_i} &= \frac{\overline{\chi}_q}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_q \frac{\partial \overline{c}_q}{\partial x_i} - \overline{v'_i c'_q} \right) \end{aligned} \quad [4.28]$$



En definitiva, a los fenómenos de transporte basados en las magnitudes medias, cuyas ecuaciones fueron presentadas en el apartado 1.3.1 y que, ahora, pueden describirse como laminares, se ha de añadir la contribución turbulenta que, en cada caso y como se había avanzado en la introducción de este tema, resulta ser el valor medio del producto de la velocidad de la agitación turbulenta y de la agitación turbulenta de la magnitud transportada.

#### 4.1.4. Energía cinética y vorticidad

Desde un punto de vista relativo a la dinámica global de la turbulencia homogénea, se podrían dar dos posibilidades: la transmisión de energía al fluido es nula y el campo turbulento decrece con el tiempo y todas sus medias estadísticas se desvanecen, o existe algún mecanismo de aporte de energía por parte de las fuerzas externas que se equilibra exactamente con la disipación viscosa y mantiene la turbulencia en un equilibrio dinámico.

Las fuerzas externas habituales, sean reales o ficticias, suelen ser, a su vez, homogéneas e isótropas.<sup>206</sup> También es posible que estas fuerzas sean debidas a la presencia de cierto movimiento ondulatorio, de carácter más o menos aleatorio, que dé origen a la propagación de una perturbación. Si, en el campo homogéneo e isótropo, existen una serie de ondas características, asociadas a la turbulencia de gran escala por la acción del contorno o de una superficie libre, por ejemplo, estas ondas pueden dirigir las fluctuaciones de menor escala mediante la acción de las fuerzas aleatorias asociadas a la ondulación. Se puede hablar, entonces, de la existencia de un espectro de equilibrio que supone la transferencia de energía al sistema en cuestión y que implica claramente un aporte de energía externo al sistema particular que se estudia.

Para clarificar el efecto del trabajo realizado por las fuerzas externas, es necesario evaluar la variación de la energía cinética del fluido contenido en un determinado volumen,  $E_C$ , y su relación con la tasa de disipación,  $\varepsilon$ . Esta variación viene dada por la ecuación:

$$\frac{dE_C}{dt} = \rho \int_V v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} dV \quad [4.29]$$

Si el fluido, además de incompresible, es newtoniano de viscosidad constante, la ecuación de Navier-Stokes [1.86], multiplicada a ambos lados por  $v$ , permite escribir la ecuación anterior como

$$\frac{dE_C}{dt} = - \int_V \left( \rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dV + \rho \int_V v_i f_{m,i} dV + 2\mu \int_V v_i \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} dV \quad [4.30]$$

Otra forma de esta ecuación es<sup>207</sup>

$$\frac{dE_C}{dt} = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v_j \frac{1}{2} \rho v_i^2 + v_j p - 2\mu v_i e_{ij} \right) dV + \rho \int_V v_i f_{m,i} dV - 2\mu \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_j} e_{ij} dV \quad [4.31]$$

ya que se cumplen las identidades siguientes (la segunda es válida porque el fluido es incompresible):



$$\begin{aligned}
 \rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} v_j \rho \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \\
 v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{\partial(v_j p)}{\partial x_j} \\
 v_i \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial(v_i e_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} e_{ij}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

La primera integral del segundo término de la ecuación [4.31] se puede reescribir sobre la superficie que encierra el volumen utilizando el teorema de Gauss-Ostrogradsky (todos sus términos tienen la forma de una divergencia). Evidentemente, esta integral se anula si el volumen está limitado por el infinito, donde la velocidad se admite nula, o por un contorno sólido fijo. Por ello, esta ecuación se simplifica a

$$\frac{dE_C}{dt} = \rho \int_V v_i f_{m,i} dV - 2\mu \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_j} e_{ij} dV \tag{4.33}$$

es decir, el cambio de la energía cinética del fluido en  $V$  resulta de la diferencia entre el trabajo realizado por las fuerzas externas y las viscosas por unidad de tiempo. El segundo término es siempre positivo, pues el integrando resulta del sumatorio del producto de cada componente asociada a la velocidad  $v_i$  del tensor gradiente de velocidad, por las tres componentes  $e_{ij}$  del tensor gradiente de deformación. Este término se identifica con la tasa de disipación de energía debida a los efectos viscosos y puede escribirse de cualquiera de las formas siguientes:<sup>208</sup>

$$\rho \varepsilon = 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} e_{ij} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 = 2\mu e_{ij}^2 \tag{4.34}$$

Finalmente, se llega a

$$\frac{dE_C}{dt} = \rho \int_V (v_i f_{m,i} - \varepsilon) dV \tag{4.35}$$

Conviene destacar de este resultado que, cuando el régimen es estacionario y  $E_C$  es constante, se ha de cumplir  $v_i f_{m,i} = \varepsilon$ , y que, si  $f_{m,i} = 0$ , entonces la energía cinética sólo puede disminuir al ritmo marcado por  $\varepsilon$ .

En turbulencia, el término de disipación de la ecuación [4.34] puede descomponerse en sus partes media y fluctuante, de donde resulta<sup>209</sup>

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \nu \overline{\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2} + \frac{1}{2} \nu \overline{\left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)^2} \tag{4.36}$$

Si la turbulencia es homogénea o, simplemente, si se admite que la velocidad de deformación media es inferior a la fluctuación de la velocidad de deformación, se tiene que

$$\bar{\varepsilon} = 2\nu \overline{e'_{ij} e'_{ij}} \tag{4.37}$$



lo cual presupone que la ratio de degeneración de energía es independiente de la estructura del flujo medio. En realidad, la turbulencia a gran escala no puede ser estrictamente homogénea, porque el origen de la cascada de energía se encuentra, precisamente, en su no homogeneidad. Por tanto, el primer término de la derecha de la ecuación [4.36] no puede ser idénticamente nulo (salvo en algunos casos de turbulencia libre u otros más singulares), porque resulta del mantenimiento de la turbulencia no homogénea de gran escala, y es el responsable de la inyección de energía en forma de fluctuaciones hasta la escala de Kolmogorov. No obstante, la ecuación [4.37] es correcta en magnitud, porque aún se puede admitir que la velocidad de deformación media es inferior a la turbulenta.

En los flujos no homogéneos ni isótropos, los gradientes de las tensiones de Reynolds afectan el movimiento medio y las ecuaciones [4.22], y las [4.28] tienen carácter general.<sup>210</sup> La relación entre éstos y los mecanismos físicos para el transporte, la difusión y la disipación de la turbulencia aparece de forma explícita tras manipular adecuadamente la ecuación de Navier-Stokes. El tratamiento habitual multiplica cada una de las tres ecuaciones de Navier-Stokes, en dirección  $\{x_i\}$ , por la velocidad  $v_j$ , y toma el valor medio de la ecuación resultante. Este procedimiento conduce a seis ecuaciones, una para cada una de las seis tensiones de Reynolds [4.23], cuya forma general es

$$\begin{aligned} \frac{D(\overline{v'_i v'_j})}{Dt} &= \frac{\partial(\overline{v'_i v'_j})}{\partial t} + v_k \frac{\partial(\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_k} = - \left( \overline{v'_k v'_j} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} + \overline{v'_k v'_i} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k} \right) + \\ &+ \frac{\overline{p'}}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\overline{p' v'_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{p' v'_j})}{\partial x_i} \right) + \overline{f'_{m,i} v'_j} + \overline{f'_{m,j} v'_i} - \\ &- 2\nu \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{v'_i v'_j v'_k} - \nu \frac{\partial(\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad [4.38]$$

La interpretación de estos términos es la que se ofrece en la tabla 4.1.

La suma de las tres ecuaciones anteriores para las tensiones diagonales de Reynolds ( $i=j$ ) es, según [4.24], dos veces la energía cinética del movimiento turbulento por unidad de masa y tiempo. El resultado es la ecuación del transporte de la energía cinética turbulenta:

$$\begin{aligned} \frac{Dq^2}{Dt} &= \frac{\partial \overline{q^2}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_k} = - \overline{v'_k v'_i} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} + \\ &- \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{v'_k} \left( q^2 + \frac{\overline{p'}}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_k} - \nu \frac{\partial(\overline{v'_i v'_k})}{\partial x_i} \right) + \overline{f'_{m,i} v'_i} - \\ &- \nu \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v'_k}}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad [4.39]$$

Esta ecuación contiene, básicamente, los mismos aspectos que la anterior, a saber: los tres primeros términos (en la parte superior de la ecuación) se corresponden con los (1), (2) y (3) de la tabla 4.1, y son los términos de variación local, transporte de energía cinética y producción de tensiones de Reynolds por interacción con el movimiento



medio; el cuarto (el primero de la segunda línea) reúne los términos de difusión y se corresponde con (5), (8) y (9); el quinto es el término asociado a la fluctuación de las fuerzas másicas (6), y el último es la disipación viscosa de energía cinética turbulenta (7). El término (4) no tiene una contrapartida en la ecuación [4.39], porque la redistribución de la energía entre las componentes de la velocidad no afecta la energía cinética total.

	<b>Término</b>	<b>Interpretación</b>
(1)	$\frac{\partial(\overline{v'_i v'_j})}{\partial t}$	Tasa de variación local de la tensión de Reynolds con el tiempo. Este término es normalmente nulo o despreciable.
(2)	$v_k \frac{\partial(\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_k}$	Transporte de la tensión de Reynolds por el movimiento medio.
(3)	$\overline{v'_k v'_j} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} + \overline{v'_k v'_i} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k}$	Producción por la interacción del movimiento turbulento con el campo de velocidad de deformación medio. Este término es el principal responsable de mantener la turbulencia no homogénea.
(4)	$\frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_i} \right)$	Correlación presión-velocidad que distribuye la energía entre las diferentes componentes de la velocidad. Para $i \neq j$ , este término es el principal destructor de tensiones de Reynolds, pues representa su destrucción (o generación) mediante fluctuaciones de presión. Estas fluctuaciones tienden a convertir la turbulencia en isotrópica, aumentando las tensiones normales a costa de las no diagonales. Este término es nulo si la turbulencia es isotrópica.
(5)	$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\overline{p' v'_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{p' v'_j})}{\partial x_i} \right)$	Difusión por gradiente de presión.
(6)	$\overline{f'_{m,i} v'_j} + \overline{f'_{m,j} v'_i}$	Generación o destrucción de tensiones de Reynolds debida a la fluctuación de las fuerzas másicas. Este término no puede incluir la fuerza de Coriolis, porque su dirección es perpendicular a la línea de corriente y se anula al hacer el producto escalar. Se supone que la variación media del resto de fuerzas másicas es cero. En caso contrario, podrían incluirse en el término $D/Dt$ , tal como se hizo en [2.48].
(7)	$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k}$	Disipación viscosa. Este término siempre es positivo.
(8)	$\frac{\partial(\overline{v'_i v'_j v'_k})}{\partial x_k}$	Correlación triple de la velocidad fluctuante que representa la difusión turbulenta de tensiones de Reynolds. En esencia, representa un transporte de la tensión "ij" en la dirección $\{x_k\}$ .
(9)	$\nu \frac{\partial^2(\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_k \partial x_k}$	Difusión viscosa de las tensiones de Reynolds. Representa la destrucción (o generación) de tensiones de Reynolds por fluctuaciones de la tensión viscosa. Este término puede ser positivo durante la transición del flujo de laminar a turbulento, lo que aumenta las tensiones de Reynolds.

Tabla 4.1. Significado de los términos de la ecuación [4.38]. El sistema de seis ecuaciones [4.38] no está cerrado porque, si bien hay una ecuación por cada tensión de Reynolds, los términos (4-9) no pueden estimarse sin añadir hipótesis físicas adicionales.



Nótese dos circunstancias particulares de esta ecuación. La permuta entre los subíndices libres de los términos tercero y sexto, permite escribir:

$$\overline{v'_k v'_i \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k}} = \frac{1}{2} \overline{v'_k v'_i \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_i} \right)} = \overline{v'_k v'_i e_{ik}} \quad [4.40]$$

y

$$v \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right)} = \frac{1}{2} v \overline{\left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right)} = 2v \overline{e'_{ik} e'_{ik}} \quad [4.41]$$

La primera ecuación representa un intercambio medio de energía entre la parte fluctuante y la no fluctuante de la energía cinética. El signo de este término depende de si las tensiones de Reynolds cambian de signo en los mismos lugares en que lo hace el gradiente de deformación medio, o no. Por norma general, no es negativo en los flujos más comunes (capas límite, chorros, movimiento en conductos), y representa una producción de turbulencia a expensas del decremento de energía cinética.

La ecuación [4.41] se corresponde con el valor medio de la parte fluctuante de [4.34], o bien con [4.37], que es siempre positivo (resta energía cinética media del flujo). La razón de disipación escalar,  $\varepsilon$ , se obtiene a partir del tensor de disipación de la ecuación [4.38] al determinar la mitad de la traza de dicho tensor, es decir:  $\varepsilon = \varepsilon_{ij}/2$ , o bien:

$$\varepsilon = v \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_k}{\partial x_i}} = v |\overline{\nabla \mathbf{v}}|^2 \quad [4.42]$$

Las componentes de  $\varepsilon_{ij}$  permiten que cada uno de los componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds disipe energía a una razón diferente.

Por otro lado, los términos tercero y cuarto de la ecuación [4.39] están escritos en forma de divergencia, lo que quiere decir que su integral sobre un volumen de fluido se corresponde con su flujo a través de la superficie de dicho volumen. Como la elección de este volumen es arbitraria, la elección de una superficie en la cual dicho flujo sea nulo da como resultado que estos términos sean nulos en el interior del volumen (este mismo razonamiento ha permitido escribir [4.31] de la forma [4.33]). Por tanto, son los otros términos de esta ecuación los que pueden modificar la cantidad total de energía cinética de las fluctuaciones contenidas en el volumen considerado.<sup>211</sup> Esta interpretación confirma el resultado integral dado en [4.35].

El mecanismo por el cual las ecuaciones de Navier-Stokes dan lugar a gradientes de deformación,  $e_{ij}$ , elevados, en un fluido incompresible y en un espacio tridimensional, se sustenta en la ecuación de generación de vorticidad [2.51]. El término  $\Omega_i e_{ij}$  de esta ecuación representa la ampliación de la vorticidad por estiramiento del vórtice (cuando  $e_{ij}$  es positivo) y es el responsable de generar estructuras energéticas basadas en una distribución frecuencial de la vorticidad. En presencia de turbulencia, este término no puede ser nulo, aunque el movimiento sea bidimensional y unidireccional, ya que entonces se cancelaría la cascada de energía en la zona inercial. Dicho de otro modo: aunque el movimiento medio sea bidimensional, la turbulencia aparece como un fenómeno fluctuante tridimensional.

No obstante, la discusión del párrafo anterior no resuelve por qué  $e_{ij}$  ha de ser positivo en turbulencia, es decir, por qué la cascada de energía inercial evoluciona hacia vórti-



ces cada vez más pequeños y vorticosos. De hecho, existen movimientos en que, al menos localmente o durante períodos de relajación, la deformación es negativa y la vorticidad se diluye con el tiempo. Otros flujos turbulentos concentran su vorticidad en las escalas extremas de la cascada, de longitud  $l_0$  y  $l_K$ , rehuyendo otros tamaños de vórtices e inhibiendo un espectro de turbulencia uniforme en todas las escalas. Normalmente, la vorticidad en estos flujos se presenta en hilos de vórtices, con diámetros internos del orden de  $l_K$  y de longitud característica  $l_0$ , que se superponen al espectro de turbulencia correspondiente a la cascada autosemejante. Curiosamente, en estos casos, se observa que la diferencia de velocidad en el núcleo de los vórtices más pequeños (en cuyo interior el flujo es liso y laminar) suele ser del mismo orden que en los mayores,  $v_0$ , y no  $v_K$ , que sería la velocidad característica que les correspondería según el teorema de Kelvin.<sup>212</sup> Todas estas circunstancias sugieren que su existencia es ajena a la presencia de una cascada turbulenta uniforme, y revelan que son muchos los misterios no resueltos aún en el estudio de la turbulencia.

Una salida airosa a esta y a otras cuestiones similares la proporciona la misma esencia intermitente de la turbulencia. El planteamiento inicial de la cascada de energía asumía que la tasa de disipación era espacialmente homogénea, es decir, que las distribuciones de probabilidad de las magnitudes turbulentas eran independientes de la escala. Experimentalmente, se observa que ello no es así, sino que las diferencias de velocidad se hacen más intermitentes a medida que disminuyen de escala. Esto conduce, por un lado, a tasas de disipación variables con la escala, lo que puede hacer prevalecer un tamaño de vórtice determinado en detrimento de los demás, y, por otro, a que el comportamiento de los vórtices de un mismo tamaño sea más variable en las escalas más pequeñas. Esta variabilidad asociada a la intermitencia hace que el tamaño de los vórtices difiera cada vez más del valor medio correspondiente a su escala y que la evolución de la cascada desemboque en hilos de vórtices a medida que disminuyen de tamaño.

El planteamiento clásico que resuelve la relación entre los gradientes de deformación y la vorticidad parte de la ecuación [2.50] en su forma media. Operando como en otras ocasiones, y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, se llega a

$$\frac{\partial \overline{\Omega_i}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{\Omega_i}}{\partial x_j} = -\overline{v'_j} \frac{\partial \overline{\Omega'_i}}{\partial x_j} + \overline{\Omega'_j e'_{ij}} + \overline{\Omega_j e_{ij}} + \nu \frac{\partial^2 \overline{\Omega_i}}{\partial x_j \partial x_j} \quad [4.43]$$

Como la vorticidad es solenoidal, tanto la media como la fluctuante,<sup>213</sup> el primer suando del segundo miembro se puede escribir como

$$\overline{v'_j} \frac{\partial \overline{\Omega'_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\overline{v'_j \Omega'_i})}{\partial x_j} \quad [4.44]$$

Es evidente que este término es análogo al gradiente de las tensiones de Reynolds [4.20] y, por tanto, se corresponde con el transporte medio de la vorticidad fluctuante por interacción con la velocidad  $v'_j$ . El segundo término de [4.43] representa la ganancia o la pérdida de vorticidad media como consecuencia del estiramiento y la rotación de las componentes de la velocidad fluctuante, y también es

$$\overline{\Omega'_j e'_{ij}} = \overline{\Omega'_j} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\overline{\Omega'_j v'_i})}{\partial x_j} \quad [4.45]$$



Si se multiplica la ecuación [4.43] por la vorticidad y se toma el valor medio del resultado, se obtiene una ecuación semejante a la [4.39], que presenta los términos de los que depende la magnitud de la fluctuación turbulenta. El lector reconocerá formas parecidas a las anteriores en todos los términos de esta ecuación:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{D(\overline{\Omega'_i \Omega'_i})}{Dt} + \frac{\partial(\overline{v'_j \Omega'_i \Omega'_i})}{\partial x_j} \right) = -\overline{v'_j \Omega'_i} \frac{\partial \overline{\Omega'_i}}{\partial x_j} + \overline{\Omega'_i \Omega'_j} \overline{e_{ij}} + \overline{\Omega'_i \Omega'_j e'_{ij}} + \overline{\Omega'_j \Omega'_i e'_{ij}} + \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2 (\overline{\Omega'_i \Omega'_i})}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \frac{\partial \overline{\Omega'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\Omega'_i}}{\partial x_j} \quad [4.46]$$

Si la turbulencia es homogénea sin movimiento medio, esta ecuación se reduce a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{\Omega'_i \Omega'_i})}{\partial t} = \overline{\Omega'_i \Omega'_j e'_{ij}} - \nu \frac{\partial \overline{\Omega'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\Omega'_i}}{\partial x_j} \quad [4.47]$$

En 1938, Taylor demostró que el primero de los términos del segundo miembro de esta ecuación es siempre positivo (está claro que el segundo no puede ser negativo), lo que explica que el crecimiento del valor cuadrático de la vorticidad fluctuante sólo está limitado por el efecto viscoso del segundo término.

Si el número de Reynolds es suficientemente grande, los términos viscosos son despreciables en magnitud y la vorticidad es generada mayoritariamente por el campo fluctuante de la velocidad (y es independiente de la estructura del flujo medio). En definitiva, la ecuación [4.47] muestra que la vorticidad tiende a aumentar<sup>214</sup> hasta que los efectos viscosos del segundo término de la derecha equilibran la generación turbulenta del primero, lo que ocurre a partir de la *escala de Taylor*. Se demuestra que esta escala es del mismo orden que la de Kolmogorov, por lo que la tasa de disipación de energía también está asociada a las fluctuaciones de la vorticidad, y se cumple

$$\overline{\varepsilon} = 2\nu \overline{e'_{ij} e'_{ij}} = \nu \overline{\Omega'_i \Omega'_i} \quad [4.48]$$

Este resultado permite interpretar el gradiente de las tensiones de Reynolds como un transporte de vorticidad.

La ecuación que relaciona los términos de convección y difusión de la vorticidad media con las tensiones de Reynolds se obtiene combinando por parejas las ecuaciones de Reynolds [4.22] con la ecuación de continuidad, de forma que se eliminen los términos de la presión. El resultado de la operación es

$$\frac{\partial \overline{\Omega'_i}}{\partial t} + v_j \frac{\partial \overline{\Omega'_i}}{\partial x_j} = \overline{\Omega'_j} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 (\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 (\overline{v'_i v'_k})}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \overline{\Omega'_i}}{\partial x_j \partial x_j} \quad [4.49]$$

Esta ecuación es análoga a [4.43], pero hace más evidente la relación entre la vorticidad y las tensiones de Reynolds.

Como la difusión viscosa de la vorticidad (último sumando) puede despreciarse a altos números de Reynolds, esta ecuación muestra que la vorticidad puede generarse mediante dos mecanismos básicos en un flujo turbulento: la deflexión de las líneas de vórtice existentes en el flujo (primer sumando) y la existencia de tensiones de Reynolds





no equilibradas o correlacionadas. El primero de estos mecanismos da lugar, por ejemplo, al flujo secundario que aparece en codos y otras configuraciones curvas de flujo, y también a los característicos vórtices de herradura que aparecen a ambos lados de los álabes de los rotores axiales. El segundo origina flujos secundarios en conductos rectos, no bidimensionales, que implican la existencia de vórtices longitudinales que transportan cantidad de movimiento y energía del flujo medio principal al contorno, y viceversa. A continuación, se describen algunas implicaciones de esta ecuación en el caso de los movimientos turbulentos unidireccionales.

#### 4.1.5. Movimientos turbulentos unidireccionales

El flujo unidireccional analizado en el apartado 3.4 era consecuencia de la existencia de un contorno que impedía el desarrollo de velocidades normales a su superficie. En esa clase de movimientos, todas las variables dependen solamente de la coordenada longitudinal a lo largo de la línea de corriente, que transcurre paralela al contorno, y la presión reducida se mantiene constante en dirección transversal. Se vio entonces que, cuando el fluido era, además, incompresible, la hipótesis de unidireccionalidad implicaba una simplificación notable de las ecuaciones de Navier-Stokes, porque la aceleración convectiva resultaba idénticamente nula y la ecuación resultante era lineal.

Las condiciones impuestas por la cuasiunidireccionalidad del movimiento cambian en turbulencia, ya que el término convectivo no desaparece por completo, aunque el fluido sea incompresible. La presencia de las tensiones de Reynolds hace que la presión reducida deje de ser constante en dirección normal y que, en determinadas condiciones, aparezcan velocidades medias no nulas en dirección transversal. Estas velocidades forman unos flujos recirculatorios, denominados *flujos secundarios*, que conducen al desarrollo de vorticidad en dirección longitudinal. Estos flujos afectan la distribución del flujo principal y son causados por la naturaleza asimétrica de las tensiones de Reynolds.

En general, para el flujo turbulento en un conducto unidireccional en que la sección recta se mantiene constante, existe un flujo laminar equivalente, que es solución de [3.97] y que puede presentarse si el número de Reynolds es suficientemente bajo. Como ya se ha mencionado en este tema, las diferencias más importantes entre ambas clases de movimiento son debidas a la existencia de las tensiones turbulentas. En el flujo turbulento que se establece en un conducto, se produce un incremento notable de la pérdida de carga y de las tasas de transporte de las distintas propiedades con respecto al laminar correspondiente. Se comprueba, además, que la distribución de la velocidad en el flujo turbulento es más uniforme en toda la sección que en el caso laminar, salvo en la vecindad de la pared, donde prevalecen los esfuerzos viscosos porque aparecen gradientes importantes de velocidad. Por otro lado, en un flujo laminar, nunca se presentan flujos secundarios (existe, además, una demostración analítica para ello), sea cual sea la forma de la sección.

Considérese un flujo turbulento permanente completamente desarrollado en un conducto unidireccional de sección recta constante, en que todas las magnitudes medias (asociadas a la velocidad) son constantes en dirección longitudinal  $\{x\}$  e independientes del tiempo (incluidos los valores medios de los productos de las velocidades fluctuantes). Las ecuaciones del movimiento [4.22] en ejes  $\{xyz\}$ , en ausencia de fuerzas másicas no conservativas y en función de la presión reducida, son



$$\begin{aligned}
v_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{v}_x - \frac{\partial(\overline{v'_x v'_y})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{v'_x v'_z})}{\partial z} \\
v_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{v}_y - \frac{\partial(\overline{v'_y})^2}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{v'_y v'_z})}{\partial z} \\
v_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \bar{v}_z - \frac{\partial(\overline{v'_y v'_z})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{v'_z})^2}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Estas tres ecuaciones, más la de continuidad,

$$\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \tag{4.51}$$

forman un conjunto de cuatro ecuaciones independientes con nueve incógnitas. Las condiciones de contorno imponen que las tensiones de Reynolds y todas las velocidades medias sean nulas en la pared fija.

Las ecuaciones de la vorticidad [4.49], en este caso, son

$$\begin{aligned}
v_y \frac{\partial \bar{\Omega}_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{\Omega}_x}{\partial z} &= \frac{\partial^2(\overline{v'_y})^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2(\overline{v'_z})^2}{\partial y \partial z} - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\overline{v'_y v'_z}) + \nu \nabla^2 \bar{\Omega}_x \\
v_y \frac{\partial \bar{\Omega}_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{\Omega}_y}{\partial z} &= \bar{\Omega}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{\Omega}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} - \frac{\partial^2(\overline{v'_x v'_y})}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2(\overline{v'_x v'_z})}{\partial z^2} + \nu \nabla^2 \bar{\Omega}_y \\
v_y \frac{\partial \bar{\Omega}_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{\Omega}_z}{\partial z} &= \bar{\Omega}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{\Omega}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \frac{\partial^2(\overline{v'_x v'_z})}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2(\overline{v'_y v'_z})}{\partial y^2} + \nu \nabla^2 \bar{\Omega}_z
\end{aligned} \tag{4.52}$$

La primera de estas ecuaciones representa la evolución de la componente axial de la vorticidad.<sup>215</sup> Si el movimiento fuera de forma que las velocidades medias en dirección transversal resultaran nulas, y las tensiones de Reynolds se cancelaran entre sí o fueran también nulas, la componente  $\Omega_x$  no podría desarrollarse, salvo por difusión viscosa o por deflexión de la vorticidad preexistente (y aparecería un término  $\partial \Omega_x / \partial t$  no nulo a la izquierda de la ecuación).<sup>216</sup>

Es obvio que no hay motivo para pensar, en principio, que las tensiones de Reynolds tengan que ser nulas o que su efecto pueda cancelarse exactamente entre sí, salvo cuando la turbulencia es isotrópica y se cumplen [4.25] y [4.26], de modo que los primeros términos de estas ecuaciones no pueden ser, en general, nulos, y se justifica la aparición de los flujos secundarios. Esto es: como se está suponiendo que el movimiento es permanente, la existencia de la componente  $\Omega_x$  (que, por definición, implica velocidades transversales medias,  $v_y$  y  $v_z$ , no nulas) sólo es posible si alguno de los términos turbulentos de la derecha de la primera ecuación [4.52] no es idénticamente nulo.

Es un resultado experimental, ampliamente consensuado, que las tensiones cruzadas de Reynolds no son nulas sobre superficies a través de las cuales existe un gradiente finito de la velocidad media. Este resultado fundamenta y está de acuerdo con el concepto clásico de la longitud de mezcla de Prandtl (que se explica en el apartado siguiente), según el cual una velocidad de fluctuación,  $v'_y$ , en la dirección  $\{y\}$ , en la que existe un



gradiente de la velocidad media  $v_x$  no nulo, produce una correlación entre las velocidades  $v_x'$  y  $v_y'$ . También se acepta, a su vez, que estas tensiones pueden generarse si se presentan asimetrías en el flujo que impliquen la existencia de direcciones preferentes para las velocidades fluctuantes. En un movimiento básicamente unidireccional, estas direcciones pueden favorecer el desarrollo de una determinada velocidad de fluctuación, o bien impedirlo, y siempre son consecuencia de la no homogeneidad o de la asimetría del flujo. Se ha de tener en cuenta que las velocidades fluctuantes en un punto están relacionadas entre sí por [4.16], de forma que el crecimiento de una se consigue a expensas de las demás, lo que, en definitiva, indica la existencia de algún tipo de correlación.

En el movimiento bidimensional que transcurre en un conducto circular o entre dos placas planas paralelas (de ancho casi infinito), se cumple que la velocidad media  $v_z$  y las derivadas de cualquier magnitud media en la dirección  $\{z\}$  son nulas. Esto quiere decir que los valores medios de los productos de cualquier velocidad de fluctuación sólo dependen de  $y$ . La simetría de estos flujos también anula la tensión de Reynolds cruzada  $v_y'v_z'$  (en caso contrario, el gradiente de presión en dirección  $\{z\}$  no sería nulo y el flujo no sería bidimensional). En un conducto circular, la dirección  $\{z\}$  es la dirección acimutal  $\{\theta\}$  en ejes polares, e  $\{y\}$  la dirección radial. En el flujo bidimensional entre placas paralelas, la dirección  $\{z\}$  se corresponde con la perpendicular al movimiento y paralela al contorno (es la dirección perpendicular al plano del papel en la figura 3.9). Como, según la ecuación de continuidad [4.51], la derivada de la velocidad media  $v_y$  en dirección  $\{y\}$  también ha de ser nula (porque lo son las derivadas de las velocidades medias  $v_x$  y  $v_z$  en las direcciones  $\{x\}$  y  $\{z\}$ , respectivamente), las ecuaciones del movimiento [4.50] se simplifican en el caso bidimensional a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{(v_x' v_y')}}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= - \frac{\partial \overline{(v_y')^2}}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad [4.53]$$

y, la de la vorticidad,  $\Omega_x$ , a

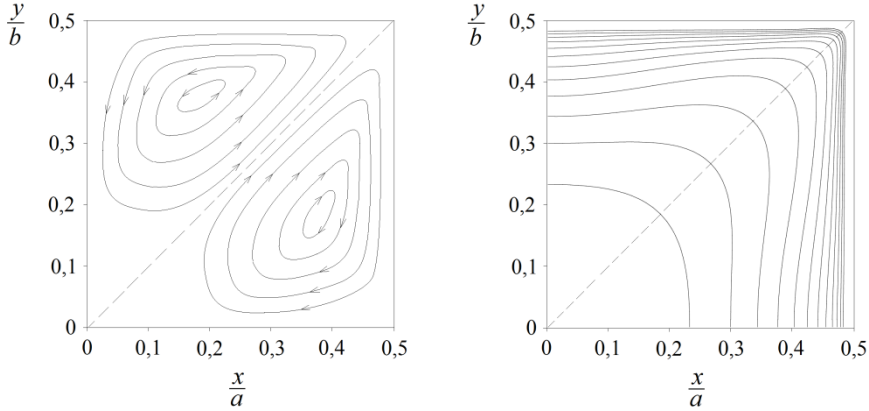
$$\bar{v}_y \frac{\partial \overline{\Omega_x}}{\partial y} = \nu \nabla^2 \overline{\Omega_x} \approx 0 \quad [4.54]$$

Estos resultados permiten asegurar que, en el caso de un movimiento turbulento unidireccional y bidimensional, no se producen flujos secundarios, o estos son mínimos, pero que, si la sección del flujo no es bidimensional, como podría serlo un rectángulo de ancho finito, la hipótesis de unidireccionalidad no es correcta porque no es cierto que la velocidad sea  $\mathbf{v} = v_x(y,z)\mathbf{i}$ . En secciones de flujo que no sean bidimensionales, los esfuerzos turbulentos del segundo miembro de [4.50] no se equilibran con el gradiente de la presión correspondiente, y aparecen flujos secundarios con velocidades no nulas en dirección transversal.

La trayectoria descrita por el fluido en estos flujos secundarios no es axial, sino que sigue líneas helicoidales que van del interior del conducto a la pared, y después vuelven

al interior, etc. La figura 4.3 muestra las líneas de corriente y los isocontornos de velocidad que se presentan en una sección rectangular. Obsérvese que los flujos secundarios se dirigen hacia la esquina, donde proporcionalmente existe más resistencia al flujo y es necesario el aporte de fluido del interior para mantener la continuidad, y regresan al interior del conducto por el plano lateral.

Figura 4.3. Flujo secundario en un conducto rectangular  $axb$  (esquina superior derecha). A la izquierda se presentan las líneas de corriente en una sección transversal y, a la derecha, los isocontornos de velocidad axial. En un conducto rectangular como el que se muestra, se desarrollan ocho flujos secundarios, a razón de dos por esquina. En un conducto triangular, el número de flujos es de seis.



Si se observa a continuación la segunda de las ecuaciones [4.53], se deduce que no es la presión reducida la que se mantiene constante a través de la sección, sino la relación

$$p_0 = \bar{p} + \overline{\rho(v'_y)^2} \quad [4.55]$$

donde  $p_0$  es la presión reducida existente en la pared (o en una superficie libre), donde  $v'_y = 0$ . Como el valor medio de la intensidad fluctuante  $(v'_y)^2$  es independiente de  $x$ , la ecuación de la cantidad de movimiento en dirección  $\{x\}$  se puede escribir como

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \overline{\rho v'_x v'_y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad [4.56]$$

y, en consecuencia, el esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$ , suma del viscoso y del turbulento, varía de forma lineal en dirección transversal al movimiento.

Si  $\tau_0$  es la tensión rasante en la pared de un flujo bidimensional que transcurre entre placas paralelas separadas una distancia  $h$ , con  $y=0$  en la pared, entonces<sup>217</sup>

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \overline{\rho v'_x v'_y} = \tau_0 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} y \quad [4.57]$$

y, en la pared,

$$\tau_0 = -\frac{h}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad [4.58]$$

Si el movimiento tiene lugar en un conducto de radio constante,  $R$ , se cumple

$$\tau_{xr} = \frac{r}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad [4.59]$$



y

$$\tau_0 = -\frac{R}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad [4.60]$$

Las ecuaciones [4.58] y [4.60] resuelven el equilibrio de fuerzas sobre el elemento diferencial de fluido de longitud  $dx$  en un flujo turbulento unidireccional y bidimensional (v. figura 3.10 para el caso circular).<sup>218</sup> Obsérvese en las ecuaciones [4.57] y [4.59] que la tensión  $\tau_{xy}$  se anula en el centro geométrico del conducto ( $y = h/2$ ,  $r = 0$ ), donde la velocidad es máxima y las tensiones de Reynolds son nulas (la tensión cruzada de Reynolds se anula por razones de simetría, no porque lo haga el gradiente de la velocidad media).

#### 4.1.6. Viscosidad de remolino y longitud de mezcla

El planteamiento estadístico de los fenómenos de transporte, en función de los valores medios de las magnitudes características que pueden observarse, es interesante desde el punto de vista tecnológico, pero conduce a un sistema de ecuaciones que tiene demasiadas incógnitas. Ante esta dificultad, se puede seguir uno de los siguientes caminos: establecer relaciones entre las tensiones de Reynolds y los gradientes de la velocidad de deformación, o especificar los términos de transporte turbulento utilizando modelos de turbulencia.

Hoy todavía no se conoce una ley que describa adecuadamente los términos de transporte turbulento, que tenga un carácter tan general como las de Navier-Poisson, de Fourier o de Fick, y permita cerrar el problema matemático. Los modelos de turbulencia tratan de describir los resultados experimentales mediante funciones o constantes empíricas, utilizando hipótesis sobre los procesos turbulentos que justifiquen la observación. Estos modelos incorporan nuevas ecuaciones, algebraicas o diferenciales, a las ecuaciones del flujo medio, pero no pueden explicar el detalle del movimiento turbulento ni su origen, sino sólo su efecto sobre las características medias observadas.

Una de las primeras propuestas para modelizar la turbulencia fue realizada por Boussinesq en 1877. A pesar de su antigüedad y de que el interés por ella ha sido meramente académico o histórico durante muchos años, esta ecuación es la base de la mayoría de los modelos de turbulencia utilizados en simulación computacional en la actualidad.

El concepto de viscosidad de remolino introducido por Boussinesq supone que la relación entre las tensiones de Reynolds y los gradientes de deformación de la velocidad media es lineal:

$$\frac{\tau_{Re}}{\rho} = -\overline{v'_i v'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad [4.61]$$

donde  $\nu_t$  es la *viscosidad de remolino* o turbulenta. Esta ecuación también es aplicable a las tensiones normales cuando se escribe, con [4.15] y [4.24], de la forma:<sup>219</sup>

$$-\overline{v'_i v'_j} = -\frac{2}{3} q \delta_{ij} + \nu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad [4.62]$$

de modo que las tensiones totales quedan



$$\tau_{ij,r} = -\left(\bar{p} + \frac{2}{3}\rho q\right)\delta_{ij} + (\mu + \rho\nu_t)\left(\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_i}\right) \quad [4.63]$$

Nótese que esta ecuación implica un aumento de la viscosidad equivalente en turbulencia (que puede interpretarse como la suma de la molecular y la de remolino), y que las tensiones normales actúan como una fuerza de presión.

Lamentablemente, si bien la viscosidad cinemática molecular,  $\nu$ , es una propiedad del fluido, la de remolino es función de la agitación turbulenta y, por tanto, es una característica de los flujos y no es constante (es decir, puede variar significativamente entre puntos distantes de una corriente y entre flujos distintos). Los experimentos muestran que la viscosidad de remolino es muy superior a la molecular y que su diferencia aumenta con el número de Reynolds. De hecho, se acepta que su cociente es proporcional al número de Reynolds de la corriente y que la relación:

$$\frac{\nu l}{\nu_t} \approx 10 \quad [4.64]$$

es un buen punto de partida a la hora de estimar su magnitud. En esta expresión,  $\nu$  es la diferencia de velocidad característica de un remolino de longitud  $l$ . Si se admite que este remolino disipa energía con una ratio  $\varepsilon \approx \nu_t(\nu/l)^2$ ,<sup>220</sup> la ecuación [4.64] permite escribir

$$\frac{\nu^3}{\varepsilon l} \approx 10 \quad [4.65]$$

El análisis dimensional respalda que la viscosidad de remolino,  $\nu_t$ , ha de ser proporcional a una velocidad que caracterice el movimiento fluctuante y a una longitud típica del flujo. Si se escoge como velocidad característica la raíz cuadrada de  $q$ , se ha de cumplir

$$\nu_t \approx q^{1/2} l \quad [4.66]$$

que es la conocida *ecuación de Kolmogorov-Prandtl*. Combinando estos resultados con  $\nu \approx q^{1/2}$ , resulta

$$\nu_t \approx \frac{1}{10} \frac{q^2}{\varepsilon} \quad [4.67]$$

En la práctica, el factor  $1/10$  se sustituye por un coeficiente empírico,  $c_\mu$ , que suele tomar valores cercanos a  $0,09$ .<sup>221</sup>

El primer modelo de turbulencia propuesto para describir la distribución de la viscosidad de remolino en un flujo se debe a Prandtl y se conoce como *teoría del camino libre de mezcla*. Este modelo se inspira en la teoría cinética de los gases y su aplicación más importante se encuentra en los movimientos turbulentos cuasiunidireccionales.<sup>222</sup>

En esta clase de movimientos, se conviene que las magnitudes fluidas medias correspondientes a los tres fenómenos de transporte,  $\nu_x$ ,  $T$  y  $c_q$ , varían sólo con la coordenada perpendicular al movimiento,  $y$ . Si se admite, a su vez, que una partícula fluida no cambia sus propiedades medias en un pequeño desplazamiento vertical,  $\delta y$  (hipótesis de Prandtl), resulta que, en su nueva ubicación, entre dicha partícula y las de su entorno se observa una fluctuación correspondiente a la diferencia del valor medio de la propiedad transportada por la partícula. Esta fluctuación ha de ser



$$\varphi'(y) = \overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(y - \delta y) \approx \frac{d\overline{\varphi}}{dy} \delta y \quad [4.68]$$

El transporte turbulento en la dirección  $\{y\}$  de la propiedad media  $\varphi$  es, por tanto,

$$\overline{\varphi'v'_y} \approx \frac{d\overline{\varphi}}{dy} \overline{v'_y} \delta y \quad [4.69]$$

Si se aplica la ecuación [4.68] a la fluctuación de la velocidad  $v'_x$ , resulta

$$v'_x \approx \frac{d\overline{v}_x}{dy} \delta y \quad [4.70]$$

Por otro lado, por consideraciones de continuidad y de conservación del impulso, las velocidades de fluctuación de la velocidad han de ser de signo opuesto y del mismo orden. Esto quiere decir que  $v'_y = -kv'_x$ , y la ecuación [4.69] puede escribirse de la forma:

$$\overline{\varphi'v'_y} \approx -k(\delta y)^2 \frac{d\overline{\varphi}}{dy} \left| \frac{dv_x}{dy} \right| = -l_m^2 \frac{d\overline{\varphi}}{dy} \left| \frac{dv_x}{dy} \right| \quad [4.71]$$

Para el caso de la transferencia de cantidad de movimiento, la tensión de Reynolds es:

$$\overline{v'_x v'_y} = -l_m^2 \frac{dv_x}{dy} \left| \frac{dv_x}{dy} \right| \quad [4.72]$$

lo que, con [4.61], equivale a una viscosidad de remolino:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{dv_x}{dy} \right| \quad [4.73]$$

El signo menos y el módulo del gradiente de la velocidad en [4.71] sirven para forzar que la transferencia turbulenta se realice hacia gradientes negativos de  $\varphi$ . La constante  $k$  se absorbe en la longitud  $l_m$ , denominada *longitud de mezcla*, cuyo conocimiento es necesario para poder aplicar esta ecuación a casos prácticos, pero que, a diferencia de  $\nu_t$ , sólo depende de la geometría del problema.<sup>223</sup>

#### 4.1.7. Distribución de velocidad próxima a una pared

En los últimos apartados, se ha visto que el esfuerzo cortante,  $\tau_{xy}$ , en un flujo unidireccional bidimensional varía linealmente a lo largo de la sección recta del conducto y que su parte turbulenta puede estimarse en función del gradiente de deformación medio y de la longitud de mezcla. La parte viscosa de esta tensión es mucho más pequeña que la turbulenta en casi toda la sección, salvo en la proximidad de la pared, donde los efectos viscosos cobran importancia a medida que los turbulentos se anulan.

En general, la velocidad del fluido se ve afectada por la presencia de la pared a distancias inferiores a  $y = \delta$ . Esta capa superficial es un colador de cantidad de movimiento y, por tanto, también de la energía cinética asociada al flujo externo, de velocidad caracte-



rística  $v_0$ . La energía cinética del flujo medio se transfiere a la capa superficial por medio de las tensiones de Reynolds, donde es reconvertida en energía cinética turbulenta y en calor por disipación viscosa. Si  $u^*$  caracteriza el nivel de fluctuación de la velocidad en esta región, se deduce que el orden de magnitud del término de producción de energía cinética turbulenta por transporte de tensiones de Reynolds, por unidad de área y tiempo, es  $\rho v_0 (u^*)^2$ . En cambio, la pérdida disipativa se concentra en la región más próxima a la pared, donde existen los mayores gradientes de velocidad, y es del orden  $\rho (u^*)^3$ .<sup>224</sup> En este apartado, se verá que el orden de  $u^*$  es inferior a  $v_0$ , por lo que se concluye que la mayor parte de la energía cinética del flujo medio externo transportada a la capa superficial se dedica a mantener su energía cinética turbulenta. Esta es, además, la mayor fuente de energía turbulenta de todo el flujo, porque las tensiones de Reynolds son menores en el flujo externo, al ser menores los gradientes de la velocidad media.

En el interior de esta región de ancho  $\delta$ , denominada *capa límite*, se distinguen cuatro zonas, según el valor relativo de las tensiones viscosa y turbulenta de  $\tau_{xy}$  y la influencia de la región exterior: la más interna o profunda, situada a distancias de la pared inferiores a  $\delta_v$ , que es del orden  $\nu/u^*$ , en que el movimiento es laminar<sup>225</sup> y prevalece la parte viscosa de la tensión; una región comprendida entre  $\delta_v$  y  $\delta_t$ , donde ambos esfuerzos son del mismo orden y suponen la transición entre la subcapa viscosa y la turbulenta; la que está por encima de  $y = \delta_t$ , distancia a partir de la cual predominan los esfuerzos turbulentos y la influencia del fluido exterior empieza a hacerse notar, pero aún es muy tenue, y la más externa, para  $\delta_e < y < \delta$ , en que la influencia del flujo exterior es predominante. La transición entre estas zonas ha de ser gradual por continuidad, de modo que los valores que se dan a continuación para  $\delta_v$ ,  $\delta_t$  y  $\delta_e$  son, por tanto, sólo una referencia aproximada de la ubicación de cada zona (v. figura 4.4).

La distribución de la velocidad media en la región interna de la capa límite, donde la pared está suficientemente cerca, es una función  $v_x = v_x(y, \mu, \rho, \tau_0, \varepsilon)$ , que se supone auto-semejante. Esta relación indica que la velocidad no depende de  $\delta$ , porque se entiende que  $y$  es la única longitud relevante, esto es: cualquier otra distancia es percibida por el fluido suficientemente lejos para que no afecte su movimiento.<sup>226</sup> En los tubos lisos, la rugosidad superficial,  $\varepsilon$ , es nula y, cuando no lo es, se admite que siempre será inferior a  $\delta$ , y sólo del orden de  $y$  para el fluido que transita muy cerca de la pared. Despreciando, de momento, el efecto de la rugosidad, la relación anterior se escribe de forma adimensional:

$$\frac{v_x}{u^*} = f_p \left( \frac{y u^*}{\nu} \right) \quad [4.74]$$

donde

$$u^* = \left( \frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \quad [4.75]$$

es la *velocidad de fricción* que, como se ha avanzado y se deduce de [4.57], puede interpretarse como un valor típico de la velocidad de agitación turbulenta. Esta expresión, denominada *ley de pared*, conduce a diferentes distribuciones teóricas de la velocidad, según el rango de la variable independiente  $y^+ = y u^* / \nu$ .

En la región más próxima a la pared,  $0 < y < \delta_v$ , los esfuerzos turbulentos de  $\tau_{xy}$  son despreciables y la integración de [4.57] conduce a





$$\frac{v_x}{u^*} = \frac{yu^*}{\nu} \quad [4.76]$$

En la integración anterior, se ha supuesto que, por continuidad en la pared (y porque  $\delta_i$  es muy inferior a  $\delta$ ), se cumple que  $\tau_{xy} \approx \tau_0$ . Los resultados experimentales han permitido verificar que las tensiones de Reynolds son muy pequeñas en la capa de flujo hasta  $y^+ = 5$  y, por ello, esta región recibe el nombre de *subcapa viscosa*. En esta capa, las fluctuaciones de la velocidad contribuyen muy poco a la tensión total, como consecuencia del efecto amortiguador de la viscosidad, y la turbulencia no se puede auto-mantener.

Los esfuerzos turbulentos de  $\tau_{xy}$  dominan los viscosos por encima de  $\delta_i$  (para  $y^+ > 30$ , aproximadamente). En esta región de la capa límite, denominada *subcapa inercial*, la relación  $v_x = v_x(y, \mu, \rho, \tau_0)$  aún es válida, pero [4.74] se invalida gradualmente a medida que desaparece la influencia de la pared y aparece la del exterior. La ecuación [4.72] permite escribir

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho} = -\overline{v'_x v'_y} = l_m^2 \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^2 \quad [4.77]$$

La longitud  $l_m$  no puede depender de la viscosidad, y no es posible obtener una variable con dimensiones de longitud con la densidad y la tensión. Prandtl supuso que  $l_m = ky$  y, en consecuencia, se sigue

$$\frac{dv_x}{u^*} = \frac{1}{k} \frac{dy}{y} \quad [4.78]$$

de donde

$$\frac{v_x}{u^*} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{yu^*}{\nu} \right) + a = 2,5 \ln \left( \frac{yu^*}{\nu} \right) + 5 \quad [4.79]$$

La experiencia muestra que la hipótesis de Prandtl es correcta, con  $k=0,4$  (constante de von Kármán), y que tanto  $k$  como  $a$  son constantes universales.

Por encima de  $\delta_e$ , von Kármán postuló la *ley de defecto de velocidad*, según la cual la diferencia de velocidad entre el fluido exterior y el interior a la capa era una función del tipo:  $v_0 - v_x = v(\delta, \mu, \rho, \tau_0)$ . El análisis dimensional permite expresar esta ley de la forma:

$$\frac{v_0 - v_x}{u^*} = f_d \left( \frac{y}{\delta} \right) \quad [4.80]$$

Los resultados experimentales demuestran que esta ley es independiente del número de Reynolds de la corriente principal, siempre que sea suficientemente grande (común en turbulencia), y, lo que es más significativo, que también es independiente de la rugosidad superficial.

La ley de pared,  $f_p$ , y la ley de defecto,  $f_d$ , no terminan ni empiezan en ningún punto exacto y han de tener una región común de solape. Es, precisamente, la continuidad de la velocidad en esta zona la que exige que, entre la región más externa de la ley de pared (donde el perfil es logarítmico) y la región más interna de la ley de defecto, ambas den el mismo resultado. Millikan postuló que las expresiones [4.74] y [4.80] tenían que coincidir en algún punto situado entre  $\delta_i$  y  $\delta_e$ , y, por tanto, debía ser

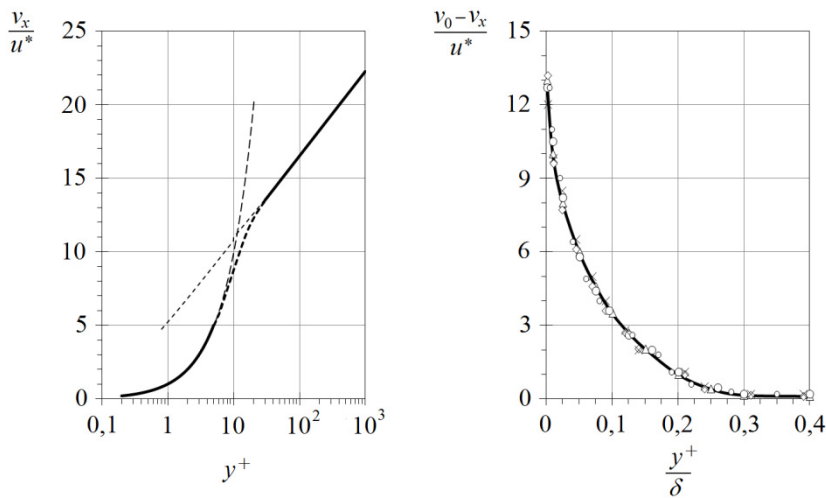
$$\frac{v_x}{u^*} = \frac{v_0}{u^*} - f_d\left(\frac{y}{\delta}\right) = f_p\left(\frac{yu^*}{\nu}\right) \quad [4.81]$$

Tras una serie de pasos que se omiten para no perder continuidad, se llega a la conclusión de que la ley de defecto también es logarítmica:

$$\frac{v_0 - v_x}{u^*} = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + b \quad [4.82]$$

donde ahora la constante  $b$  no es universal porque depende del tipo de movimiento externo (y de la forma del conducto). Con esta ecuación y la [4.79], se sigue que, si la constante  $b$  es pequeña, la ley de pared se extiende hasta  $y = \delta$  y no es necesaria una descripción alternativa de la velocidad en la región exterior, por encima de  $\delta_e$ .

Figura 4.4. Perfil de velocidad en el interior de una capa límite turbulenta. A la izquierda, la capa interna (ley de la pared). No existe forma analítica sencilla con un fundamento teórico válido para el intervalo  $5 < y^+ < 30$  ( $\delta_v < y < \delta$ ). El punto de intersección de [4.76] y [4.79] se encuentra en  $y^+ \approx 11$ . A la derecha, la capa externa (ley de defecto) con gradiente de presión nulo.



En el tema siguiente, se verá que la capa límite que evoluciona sobre una pared tiene tendencia a crecer de espesor con la distancia longitudinal. Cuando el movimiento se produce en un conducto, en cambio, las características del contorno impiden el crecimiento continuo de la capa límite y, si el conducto es bidimensional, este desarrollo progresa hasta que  $\delta = h/2$  o  $\delta = R$ . A partir de este momento, el flujo está completamente desarrollado y el perfil de la velocidad se mantiene con la distancia, tanto en forma como en magnitud.

Con arreglo a la ecuación [4.74], la ley de pared tiene carácter universal porque no depende de  $\delta$ . No se puede decir lo mismo de la ley de defecto de velocidad cuando el flujo tiene lugar en un conducto, ya que entonces  $\delta$  depende de su tamaño y la relación [4.80], de su forma. La suma de las ecuaciones [4.79] y [4.82], para un conducto circular de radio  $R$ , conduce a

$$\frac{v_0}{u^*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{Ru^*}{\nu}\right) + a + b \quad [4.83]$$

Esta expresión coincide con la [4.79] para la condición ( $y = \delta = R$ ,  $v_x = v_0$ ), si se prescinde de  $b$ . Experimentalmente, se encuentra que  $b \approx 1$  en conductos circulares (y en cana-



les),<sup>227</sup> por lo que se puede aplicar la ley de pared hasta el centro del conducto, en una primera aproximación. Con  $y=R-r$ , se tiene

$$\frac{v_x}{u^*} \approx \frac{1}{k} \ln \left( \frac{(R-r)u^*}{\nu} \right) + a \quad [4.84]$$

El valor de  $v_0$  se estima adecuadamente con esta ecuación, pues la contribución más importante viene dada por el sumando que contiene el logaritmo. No obstante, esta extensión del rango de validez de la forma logarítmica de la ley de pared presenta un defecto de forma (porque no predice un gradiente nulo de la velocidad en el centro del conducto) y hace que pierda su carácter universal (porque  $b$  no es, en realidad, nula, ni despreciable frente a  $a$ , ni universal).

Estos pequeños sacrificios tienen una lectura muy interesante en la práctica: como la parte lineal de la ley de pared no suele ocupar más de un 2% de la sección del flujo, se puede utilizar la ecuación [4.84] para estimar la distribución de la velocidad en todo el conducto y, con ella, el caudal trasegado, la pérdida de carga o el gradiente de presión actuante. Por ejemplo, el caudal es<sup>228</sup>

$$Q = \pi R^2 \bar{v}_x = \int_0^R 2\pi r v_x dr \approx 2\pi u^* \int_0^R r \left( \frac{1}{k} \ln \left( \frac{(R-r)u^*}{\nu} \right) + a \right) dr \quad [4.85]$$

Esta ecuación y la [4.80] permiten escribir la velocidad media como

$$\frac{\bar{v}_x}{u^*} = \frac{v_0}{u^*} - \frac{1}{S} \int_S f_d \left( \frac{y}{R} \right) dS \quad [4.86]$$

donde la integral del segundo término es una constante geométrica. De la integración de [4.85], o bien sustituyendo [4.82] en [4.86], se obtiene<sup>229</sup>

$$\frac{\bar{v}_x}{u^*} \approx \frac{1}{k} \ln \left( \frac{Ru^*}{\nu} \right) + a + c = 2,5 \ln \left( \frac{Ru^*}{\nu} \right) + 2 \quad [4.87]$$

Antes de pasar a examinar la relación entre la velocidad media y la pérdida de carga, es necesario discutir la influencia de la rugosidad superficial en el perfil de la velocidad y en el rozamiento.

Todas las superficies son, de algún modo, rugosas, pero la experiencia enseña que la rugosidad sólo juega un rol significativo en el problema cuando el número de Reynolds rugoso,  $Re_\varepsilon = \varepsilon u^* / \nu$ , es superior a 5, y que es determinante cuando es superior a 70, aproximadamente. La condición  $Re_\varepsilon > 5$  sugiere que la subcapa viscosa es absorbida por la rugosidad, pues entonces  $\varepsilon > \delta_v$ , lo que implica que la ley de pared, deducida para tubos lisos, ha de ser modificada o ampliada. Por debajo de esta condición, la pared puede ser considerada lisa a efectos fluidodinámicos.<sup>230</sup>

La ley de la pared modificada para tener en cuenta el efecto de la rugosidad toma la forma:

$$\frac{v_x}{u^*} = f_{p\varepsilon} \left( \frac{yu^*}{\nu}, \frac{\varepsilon u^*}{\nu} \right) \quad [4.88]$$



o bien, dividiendo ambos factores entre sí,

$$\frac{v_x}{u^*} = f'_{p\varepsilon} \left( \frac{y}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon u^*}{\nu} \right) \quad [4.89]$$

Estas expresiones han de acoplarse con la ley de defecto de velocidad [4.80] que, en principio, no depende de la rugosidad.<sup>231</sup>

Si se admite que la ecuación [4.78] continúa siendo válida (es decir,  $l_m$  no depende de  $\varepsilon$ ), se deduce que el efecto de la rugosidad sólo puede aparecer en  $f_{p\varepsilon}$  como una función aditiva de  $f_p$ . La nueva ley de pared resultante toma la forma:

$$\frac{v_x}{u^*} = 2,5 \ln \left( \frac{y u^*}{\nu} \right) + a_\varepsilon \quad [4.90]$$

Obsérvese que esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{v_x}{u^*} = 2,5 \ln \left( \frac{y}{\varepsilon} \right) + d_\varepsilon \quad [4.91]$$

Los términos  $a_\varepsilon$  y  $d_\varepsilon$  no son ahora constantes, sino parámetros que dependen de  $Re_\varepsilon$ . La relación entre ambos es

$$a_\varepsilon = -2,5 \ln \left( \frac{\varepsilon u^*}{\nu} \right) + d_\varepsilon \quad [4.92]$$

Por tanto, el tratamiento del rozamiento se reduce, desde el punto de vista analítico, al caso de la tubería lisa, si se sustituye la constante  $a$  de [4.79] o de [4.83], por la función más general,  $a_\varepsilon$ , de [4.92]. Este mismo razonamiento puede aplicarse al término constante de [4.87], haciendo  $a_\varepsilon + c$ . La figura 4.5 muestra la variación experimental de  $a_\varepsilon$  y  $d_\varepsilon$  con el número de Reynolds rugoso. Si  $Re_\varepsilon$  es pequeño (por debajo de  $\log_{10} 5 = 0,7$ ), el parámetro  $a_\varepsilon$  tiende al valor límite  $a = 5$ , correspondiente a la tubería lisa [4.79]. Para números de Reynolds grandes (por encima de  $\log_{10} 70 = 1,8$ ), es el parámetro  $d_\varepsilon$  el que tiende a un valor límite aproximado de  $d_{\varepsilon,\infty} = 8,5$ .

En resumen, las ecuaciones más generales que proporcionan la velocidad en el centro del tubo circular y la velocidad media son, para un conducto circular liso:

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{u^*} &= \frac{1}{k} \ln \left( \frac{R u^*}{\nu} \right) + a + b = 2,5 \ln \left( \frac{R u^*}{\nu} \right) + 6 \\ \bar{v}_x / u^* &= \frac{1}{k} \ln \left( \frac{R u^*}{\nu} \right) + a + c = 2,5 \ln \left( \frac{R u^*}{\nu} \right) + 2 \end{aligned} \quad [4.93]$$

y, para un tubo rugoso,

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{u^*} &= \frac{1}{k} \ln \left( \frac{R}{\varepsilon} \right) + d_{\varepsilon,\infty} + b = 2,5 \ln \left( \frac{R}{\varepsilon} \right) + 9,5 \\ \bar{v}_x / u^* &= \frac{1}{k} \ln \left( \frac{R}{\varepsilon} \right) + d_{\varepsilon,\infty} + c = 2,5 \ln \left( \frac{R}{\varepsilon} \right) + 5,5 \end{aligned} \quad [4.94]$$

En general, para un flujo intermedio, ni liso ni rugoso, se puede aplicar

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{u^*} &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{Ru^*}{\nu}\right) + a_\varepsilon + b = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) + d_\varepsilon + b \\ \frac{\bar{v}_x}{u^*} &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{Ru^*}{\nu}\right) + a_\varepsilon + c = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) + d_\varepsilon + c \end{aligned} \quad [4.95]$$

Si se comparan estas ecuaciones entre sí, se observa que la diferencia entre ambas velocidades es igual a  $4u^*$  en cualquier caso. La experiencia corrobora que las velocidades media y máxima en un conducto son muy parecidas en régimen turbulento, de modo que la velocidad de fluctuación  $u^*$  es un orden inferior a  $v_0$ .<sup>232</sup> En consecuencia, el cociente entre la velocidad máxima y la media ha de ser próximo a la unidad y, por supuesto, muy inferior al valor de 2 correspondiente al régimen laminar de Poiseuille.

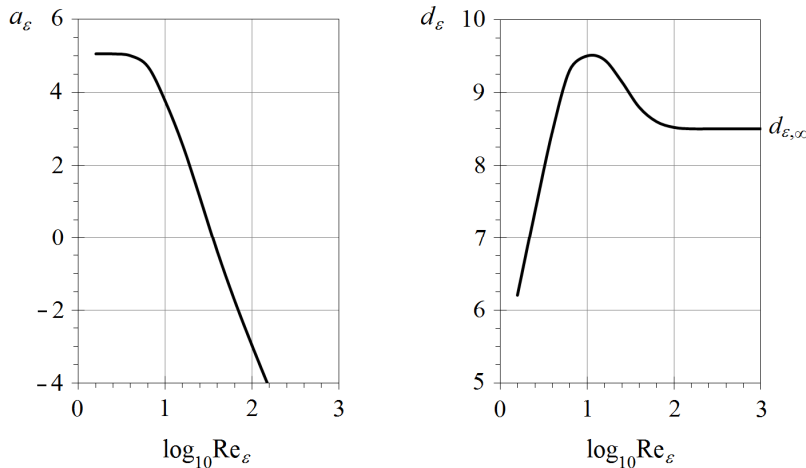


Figura 4.5. Evolución de los parámetros  $a_\varepsilon$  y  $d_\varepsilon$  en función de  $Re_\varepsilon$ .

El movimiento que se establece en un conducto es consecuencia de la existencia de un gradiente no nulo de presión reducida. Este gradiente se relaciona con la tensión en la pared mediante la expresión [4.60] o, en términos más generales, con

$$\tau_0 = -r_H \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = r_H \Delta p_L \quad [4.96]$$

donde  $r_H$  es el *radio hidráulico* del conducto.<sup>233</sup> Si el flujo está plenamente desarrollado, esto es, la velocidad máxima no cambia, el análisis dimensional indica que la tensión en la pared es proporcional a la energía cinética media:

$$\tau_0 = c_f \rho \frac{\bar{v}_x^2}{2} \quad [4.97]$$

El *coeficiente de fricción*,  $c_f$ , es una función del número de Reynolds de la corriente, de la rugosidad y del tamaño y de la forma del conducto. En la práctica, se prefiere utilizar



el coeficiente  $f=4c_f$  (v., por ejemplo, los apartados 5.5.3 y 5.9.2). Esta fórmula y la [4.75] resuelven que

$$f = 4c_f = 8 \left( \frac{u^*}{\bar{v}_x} \right)^2 \quad [4.98]$$

Sustituyendo [4.97] en [4.96], resulta

$$\Delta p_L = f \frac{1}{4r_H} \rho \frac{\bar{v}_x^2}{2} \quad [4.99]$$

que es una función cuadrática del caudal (no lineal, como lo era [3.108]), siempre que  $f$  sea independiente de  $Re$ .

El valor del coeficiente de rozamiento puede estimarse a partir del diagrama de Moody de la figura 5.2 o mediante expresiones pseudoempíricas. Las fórmulas con más fundamento teórico son las que se deducen a partir de las leyes de pared y del defecto de velocidad. Por ejemplo, para una tubería lisa, combinando [4.93] y [4.98], es

$$\frac{1}{f^{1/2}} = 2 \log_{10} \left( \frac{\bar{v}_x D}{\nu} f^{1/2} \right) - 0,8 \quad [4.100]$$

y, para un régimen rugoso, con [4.94],

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{D} \right) + 1,14 \quad [4.101]$$

En situaciones intermedias, puede utilizarse la aproximación dada por Colebrook [5.6].

#### 4.1.8. Movimientos turbulentos libres

En este apartado, se hace una presentación fenomenológica de los movimientos turbulentos estacionarios que no están confinados por una pared, tales como chorros, estelas, capas de mezcla y penachos. En todos estos fenómenos, se cumple que la longitud característica en la dirección del movimiento es mucho mayor que la transversal y que, a partir de una determinada distancia de su origen, los perfiles de la velocidad guardan una relación de autosemejanza, es decir, se mantienen idénticos a sí mismos con un adecuado cambio de variables.

Como sucedía con el flujo en un conducto, los movimientos turbulentos libres tienen también un equivalente laminar. La experiencia demuestra, en cambio, que los chorros, las estelas, etc., son casi siempre turbulentos y que sólo se presentan en forma laminar cuando el número de Reynolds, calculado en función de su espesor,  $\delta$ , es inferior a 100. Como estos procesos tienen lugar, a menudo, con aire, la hipótesis de incompresibilidad requiere que su velocidad característica sea muy inferior al número de Mach (lo cual es normal en la práctica). En los penachos, que son estructuras de desarrollo vertical causadas por el aporte inicial de calor en forma de aire caliente, se acepta que su densidad puede cambiar con la altura, pero estos cambios están sujetos a la flotabilidad y son, normalmente, de pequeña magnitud.<sup>234</sup>



La simetría de estos movimientos con respecto a su eje central permite asegurar que  $v_y = 0$  en  $y = 0$ , y que esta condición se mantendrá en la dirección  $\{x\}$ . Por otro lado, el gradiente de la presión, tanto en la dirección longitudinal como en la transversal, también ha de ser nulo o despreciable, ya que el movimiento se produce en un entorno libre en que la presión es constante. Esta hipótesis no es estrictamente cierta en los penachos, por la misma razón que su densidad cambia con la altura, pero esto no afecta significativamente el resultado porque, en ellos, la descripción de las leyes de evolución se suele realizar en términos de temperatura.

La observación experimental confirma que el ancho de esta clase de movimientos crece de forma potencial con la distancia y que la distribución de la velocidad se diluye a medida que el flujo avanza. La aplicación de los principios fundamentales en forma integral a un volumen de control comprendido por su superficie lateral y dos secciones cualesquiera del flujo muestra, por un lado, que la superficie lateral no es impermeable y, por otro, que la cantidad de movimiento no siempre se conserva entre dos secciones consecutivas. Esto ha dado lugar a la formulación de unos principios de conservación específicos para cada tipo de movimiento libre. Por ejemplo, en un chorro, la cantidad que se conserva es la cantidad de movimiento,  $J$ :

$$J = \rho \int_S v_x^2 dS \quad [4.102]$$

En cambio, se demuestra que el flujo de masa no se conserva en un chorro y que la cantidad de masa que absorbe del entorno es del mismo orden que la que transporta. En la figura 4.7, se muestra que la velocidad transversal en los extremos de una sección es positiva cuando  $y/h$  es negativa, y negativa cuando  $y/h$  es positiva; es decir, la velocidad transversal se dirige hacia el interior del chorro aportando masa fresca del exterior. No obstante, como la cantidad de movimiento asociada a esta velocidad no influye en la dirección  $\{x\}$ , se entiende que el balance de la ecuación [4.102] se conserve.

En una estela pasa algo similar, pero la cantidad que se conserva es

$$F = \rho \int_S v_x (v_\infty - v_x) dS \quad [4.103]$$

que, en realidad, es un defecto de cantidad de movimiento. Este defecto se interpreta como la fuerza de arrastre sobre el cuerpo que genera la estela sumergido en un flujo potencial  $v_\infty$ .

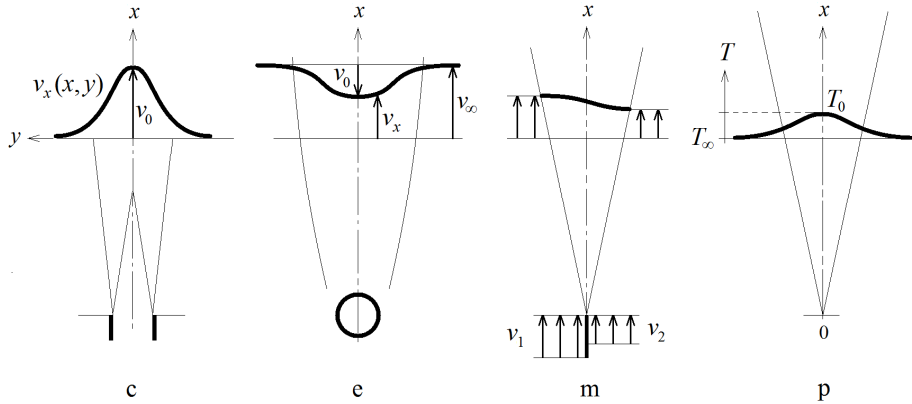
El modelo de un penacho es más complejo porque las fuerzas másicas de flotabilidad asociadas al aire caliente hacen que no se conserve su cantidad de movimiento. El empuje ascensional hace que el penacho olvide la cantidad de movimiento de partida, de modo que, en principio, es de prever que su velocidad media decrezca a un ritmo más lento que en un chorro o en una estela. Se demuestra que la cantidad que se mantiene constante en un penacho es el flujo entálpico neto emitido

$$Q = \int_S \rho c_p (T_x - T_\infty) v_x dS \quad [4.104]$$

que también puede interpretarse como el flujo de la diferencia de entalpía con respecto a la entalpía ambiental. Si el penacho no recibe calor de otras fuentes durante su ascenso, esta ecuación muestra que el penacho se enfría a medida que se ensancha.



Figura 4.6. Representación esquemática semejante de un chorro (c), una estela (e), una capa de mezcla (m) y un penacho (p). Las leyes de velocidad no son válidas en  $x=0$  porque el flujo semejante no está plenamente desarrollado.



Estos movimientos son claramente bidimensionales, pero no unidireccionales (en el sentido que  $v_x$  varía con  $x$ , pero el fluido es incompresible). No obstante, como se acepta que la velocidad transversal es pequeña frente a la longitudinal en cualquier sección del flujo (v. figura 4.7), la ecuación de la cantidad de movimiento en dirección  $\{y\}$  de [4.22] también se simplifica a la forma dada en [4.53]. Por otro lado, como se supone que la presión en su interior es constante, la ecuación [4.55] indica que la energía cinética turbulenta media ha de ser pequeña (y si no lo es, el gradiente de presión en dirección transversal no es nulo). Con todo, las ecuaciones del movimiento plano de esta clase de flujos son<sup>235</sup>

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{4.105}$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

y, si el movimiento es axilimétrico,

$$\frac{\partial(v_x r)}{\partial x} + \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} = 0 \tag{4.106}$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial(\tau_{xy} r)}{\partial r}$$

En el caso de un penacho, la ecuación de la cantidad de movimiento es

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial(\tau_{xy} r)}{\partial r} + g\beta(T - T_\infty) \tag{4.107}$$

La tensión rasante de estas ecuaciones se calcula con [4.77] porque, en ausencia de pared, los esfuerzos viscosos son despreciables, y la longitud de mezcla se escoge proporcional al ancho de la zona,  $\delta$ .

La ley de semejanza de los perfiles de velocidad se describe mediante unas funciones de forma,  $f$ , que son función de la coordenada  $y$  y normalizada,  $y/\delta$ . Las condiciones de contorno de estas funciones son  $f=0$ , si  $y/\delta = \pm\infty$  (en ocasiones, se prefiere  $y/\delta = \pm 1$ ), y





$f=1$ , si  $y/\delta=0$ . Las velocidades,  $v_x$ , para un chorro, una estela y una capa de mezcla, en función de las leyes de semejanza respectivas, se escriben

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{v_0} &= f_c \left( \frac{y}{\delta} \right) \\ \frac{v_\infty - v_x}{v_0} &= f_e \left( \frac{y}{\delta} \right) \\ v_x &= \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 - v_2}{2} f_m \left( \frac{y}{\delta} \right) \end{aligned} \quad [4.108]$$

En un penacho, se ha de añadir a la primera de estas ecuaciones una nueva ley para la temperatura:

$$\frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = f_p \left( \frac{y}{\delta} \right) \quad [4.109]$$

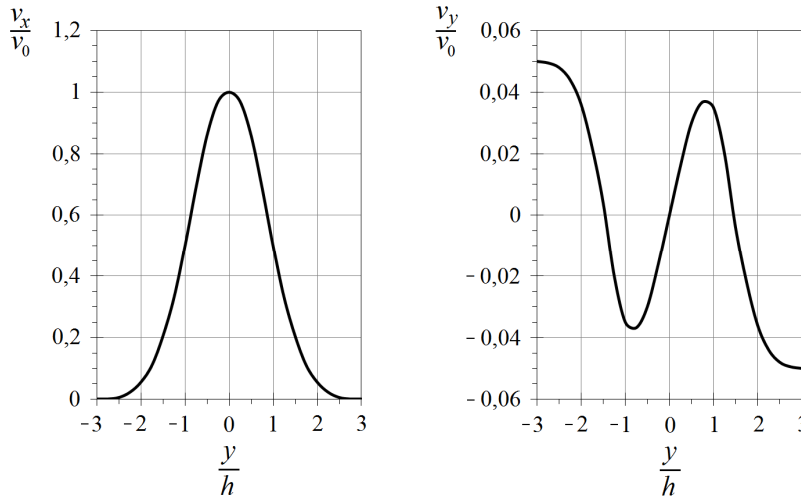


Figura 4.7. Distribuciones normalizadas de las velocidades medias en el sentido longitudinal y en el transversal de un chorro plano. Las componentes de la velocidad en una sección  $x$ ,  $v_x(x,y)$  y  $v_y(x,y)$  se han dividido por su valor máximo en el eje central,  $v_0(x)$ . La coordenada transversal normalizada es  $y/h$ , donde  $h$  es la distancia  $y$ , en la sección  $x$ , en que se cumple que  $v_x$  es la mitad de la velocidad máxima en dicha sección.

Las leyes de semejanza se complementan con las leyes de evolución del ancho,  $\delta$ , de la velocidad y de la diferencia de temperaturas características, que normalmente se escriben de la forma:

$$\begin{aligned} \delta &= ax^m \\ v_0 &= bx^{-n} \\ T_0 - T_\infty &= cx^{-p} \end{aligned} \quad [4.110]$$

Estas leyes de evolución están relacionadas entre sí por el principio de conservación que se aplique a cada tipo de movimiento. El signo de los exponentes resulta de suponer que el ancho de la zona crece en la dirección  $\{x\}$ , mientras que la velocidad característica y la diferencia de temperaturas disminuyen. Para determinar su valor en cada caso, se sustituye la velocidad que resulta de la ley de semejanza en el sistema de ecuaciones formado por [4.105] y el principio de conservación correspondiente. Esto con-



duce a unas ecuaciones que son sólo función de  $y/\delta$ , de las que se puede entrever la forma del perfil de la velocidad.

La tabla 4.2 muestra el valor de los exponentes  $m$  y  $n$  (y  $p$ ) en función del tipo de movimiento. Se observa que el ancho de un chorro, de una capa de mezcla y de un penacho es proporcional a la distancia  $x$  ( $m=1$ ). Los resultados experimentales muestran que la constante  $a$  es, aproximadamente, 0,1. Esto es, el ángulo de apertura de todas estas estructuras es del orden de  $5^\circ$ . En una estela, la evolución del ancho no es lineal y el valor de las constantes depende de cada caso particular.

Tabla 4.2.  
Exponentes de las  
leyes de evolución para  
distintos tipos de  
movimientos turbulentos  
libres.

	$m$	$n$	$p$
Chorro plano	1	1/2	
Chorro axilsimétrico	1	1	
Estela plana	1/2	1/2	
Estela axilsimétrica	1/3	2/3	
Capa de mezcla	1		
Penacho	1	1/3	5/3

## 4.2. Capa límite

La viscosidad de los fluidos reales hace que se adhieran a las superficies sobre las que fluyen de tal forma que se anule su velocidad en el punto de contacto. Se denomina *capa límite fluidodinámica*, o simplemente *capa límite*, la región de un flujo de fluido en las proximidades de un contorno, en la cual la velocidad se ve afectada por su presencia. El espesor de esta región,  $\delta$ , es pequeño con respecto a la longitud característica de la superficie,  $x$ , y se acepta que

$$O\left(\frac{\delta}{x}\right) \ll 1 \tag{4.111}$$

Este tema se dedica al desarrollo de la teoría básica que explica las características de la capa límite fluidodinámica y su estabilidad. Evidentemente, el concepto de capa límite puede extenderse a los demás fenómenos de transporte, y se puede hablar de capa límite térmica, en cuyo interior la temperatura evoluciona desde la temperatura del contorno hasta la del fluido del flujo exterior, y de capa límite de concentración, cuando la superficie contiene, por ejemplo, una sustancia hidrosoluble o volátil que se incorpora al flujo principal de agua o de aire.

Fue Prandtl quien propuso por primera vez en 1904 el concepto de capa límite, y con ello daba explicación a muchos fenómenos fluidodinámicos y abría las puertas de la mecánica de fluidos contemporánea. La idea fundamental de Prandtl consistió en suponer que las fuerzas viscosas son del mismo orden que las de inercia en el interior de la capa límite pero que, en la corriente exterior, el fluido puede considerarse ideal porque el efecto de la viscosidad es despreciable. Esta división del campo fluido en dos regiones supuso una revolución en tiempos de Prandtl, al explicar, de una manera muy intuitiva, la experiencia cotidiana. El planteamiento de Prandtl simplificaba las ecuaciones gobernantes de la capa límite mediante una serie de hipótesis basadas en la observación del orden de magnitud de sus términos.



La capa límite se desarrolla sobre cualquier superficie, tanto alrededor de los objetos como en el interior de los conductos. En ambos casos, el flujo contenido en el interior de la capa límite se mantiene adherido a la superficie si se dan las condiciones de contorno y de presión adecuadas. Se produce desprendimiento de la capa límite cuando el fluido fluye alrededor de cuerpos romos y también cuando lo hace por el interior de conductos muy divergentes o en los que se producen cambios de sección abruptos. Si no hay desprendimiento, el escaso espesor de la capa límite permite extender la teoría de los fluidos ideales casi hasta la misma superficie del contorno pero, si la capa límite se desprende, la línea de separación de ambas regiones, la externa y la ocupada por el flujo desprendido, es indeterminada e inestable, lo que dificulta el análisis y la determinación del punto de desprendimiento.

Se dice que la capa límite es turbulenta cuando los fenómenos de transporte turbulentos son importantes en su interior, y laminar en caso contrario. La experiencia enseña que la capa límite que se inicia cuando el flujo entra en contacto con una superficie es, en primer lugar, laminar, y que se produce la transición a turbulenta a una distancia determinada del borde frontera. El término viscoso de la ecuación de la cantidad de movimiento en la capa límite laminar ha de ser del mismo orden que el convectivo:

$$O\left(\frac{\mu v}{\delta^2}\right) = O\left(\frac{\rho v^2}{x}\right) \quad [4.112]$$

de donde se deduce que su espesor es

$$O\left(\frac{\delta}{x}\right) = \left(\frac{\mu}{\rho v x}\right)^{1/2} = \frac{1}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad [4.113]$$

El espesor de la capa límite turbulenta es algo superior al dado por [4.113] y, de acuerdo con los resultados experimentales, se puede ajustar con

$$O\left(\frac{\delta}{x}\right) = \frac{1}{\text{Re}_x^{1/5}} \quad [4.114]$$

Obsérvese que ambas expresiones ratifican [4.111], para los números de Reynolds usuales, e indican que la capa límite se ensancha con la distancia  $x$  (v. figura 4.8).

En el apartado 4.1.7, se ha visto que la capa límite turbulenta siempre contiene una subcapa viscosa en la zona más próxima al contorno, y otra de transición hasta  $\delta_t$ , a partir de la cual dominan los esfuerzos turbulentos. El tratamiento analítico riguroso es muy complicado cuando el contorno no es plano o existen gradientes de presión importantes en la dirección del movimiento, por lo que la práctica recomienda realizar hipótesis previas sobre la forma del perfil de velocidad que permitan obtener soluciones aproximadas de forma integral.

En la región exterior a la capa límite, la ecuación de Bernoulli indica que, a lo largo de la línea de corriente potencial, se cumple

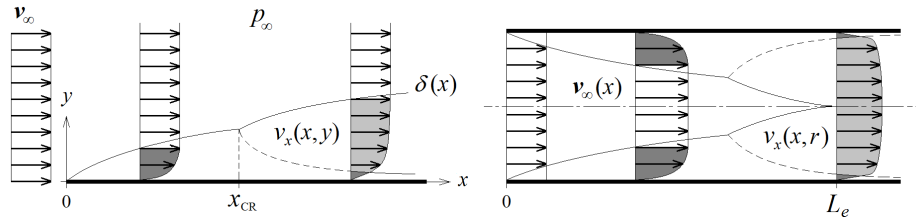
$$v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp_\infty}{dx} = 0 \quad [4.115]$$

y la presión (reducida) se mantiene constante si lo hace  $v_\infty$ .



Considérese el flujo uniforme sobre la placa plana y horizontal de la figura 4.8, sobre la que el fluido incide en su misma dirección. Si la placa es suficientemente delgada, la corriente exterior no viscosa no se ve perturbada y mantiene su velocidad  $v_\infty$  constante. No obstante, a partir de la posición  $x=0$ , la exploración del perfil de la velocidad en dirección transversal a la superficie en una ubicación cualquiera,  $x$ , muestra que la velocidad crece de forma asintótica, desde la condición  $v_x=0$ , para  $y=0$ , hasta  $v_x=v_\infty$ . El espesor de la capa límite  $y=\delta$  se define, por convenio, cuando se verifica que  $v_x=0,99v_\infty$ . A partir de la posición  $x=x_{CR}$ , se produce la transición a turbulenta de la capa límite, y para  $x > x_{CR}$  el perfil de la velocidad incluye una región, la más próxima al contorno, donde el flujo sigue siendo laminar y otra, la más exterior, donde el flujo es turbulento. A la ubicación crítica,  $x_{CR}$ , le corresponde un espesor  $\delta_{CR}$  para el que el número de Reynolds,  $Re_\delta = v_\infty \delta_{CR} / \nu$  es, aproximadamente,  $10^3$ , si la placa plana es lisa y el nivel de turbulencia de la corriente incidente es inferior al 1%. El número de Reynolds longitudinal,  $v_\infty x / \nu$ , toma el valor  $Re_{x,CR} \approx 3,2 \cdot 10^5$  en  $x_{CR}$ , para las mismas condiciones anteriores (v. figura 4.9).

Figura 4.8. Capas límite fluidodinámica sobre una placa plana y en la entrada de un conducto (en el que se supone que el flujo de entrada es uniforme).



Si la capa límite se inicia en la embocadura de un conducto de radio  $R$ , el crecimiento de su espesor con la distancia hace que el flujo interno esté completamente desarrollado a partir de  $\delta=R$ , o de  $x=L_e$ . El punto de encuentro se produce a distancias  $L_e$  que son muy superiores a  $R$  si el número de Reynolds en el conducto es superior a 1, (v. [5.34] y [5.35] del apartado 5.2.1), porque el espesor de la capa límite  $\delta(x)$  es muy inferior a  $x$ . En el flujo de entrada, coexisten la capa límite y la corriente libre para longitudes inferiores a  $L_e$ , pero, para longitudes superiores, el flujo se mantendrá invariable, si es estacionario, y desaparecerán los términos convectivos, si es unidireccional. En consecuencia, según si la capa límite es laminar o turbulenta en  $x=L_e$ , el flujo desarrollado será, a su vez, laminar o turbulento, respectivamente. En el primer caso, el flujo resultante será el de Poiseuille descrito en el apartado 3.4.2, con una distribución parabólica de velocidades, y, en el segundo, el perfil de la velocidad será como el que se muestra en la figura 4.8, mucho más plano y con una velocidad máxima sólo algo superior a la media.<sup>236</sup> Por otro lado, la conservación del flujo de masa en el tramo de entrada muestra que  $v_\infty$  varía con  $x$ , de modo que la presión en la corriente libre también debe hacerlo, según lo que estipula [4.115].

Los dos casos anteriores son bidimensionales y, en ellos, la vorticidad en el interior de la capa límite es  $\Omega_z = \partial v_x / \partial y$ .<sup>237</sup> La vorticidad total por unidad de longitud de la capa límite en  $x$  es

$$\int_0^\infty \Omega_z dy = \int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = v_\infty(x) \quad [4.116]$$



y el flujo de vorticidad en una posición cualquiera,

$$\int_0^{\infty} \Omega_z v_x dy = \int_0^{\infty} v_x dv_x = \frac{1}{2} v_{\infty}^2 \quad [4.117]$$

Esta ecuación y la [4.115] muestran que el flujo de vorticidad depende del gradiente de la presión externa: en las zonas en que el gradiente de presión sea negativo, es decir, favorable al movimiento, se introduce vorticidad en la capa límite pero, si es desfavorable, se elimina. La viscosidad se encarga de la difusión de la vorticidad en la capa límite, y la convección la transporta aguas abajo.

#### 4.2.1. Ecuaciones características y analogía de Reynolds

Las ecuaciones de conservación en la capa límite laminar, para un fluido newtoniano incompresible, en un flujo estacionario bidimensional son: la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad [4.118]$$

las dos ecuaciones de la cantidad de movimiento,

$$\begin{aligned} \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad [4.119]$$

y la ecuación de la energía (sin los términos de radiación y reacción química), que, para un fluido de capacidad calorífica,  $c$ , y conductividad,  $k$ , constantes, se escribe<sup>238</sup>

$$\rho c \left( v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad [4.120]$$

Si el flujo en capa límite tiene lugar por mezcla no reactiva de dos componentes, también tendría que considerarse la ecuación [2.34] de conservación de la especie  $q$ :

$$v_x \frac{\partial c_q}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_q}{\partial y} = D_q \left( \frac{\partial^2 c_q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_q}{\partial y^2} \right) \quad [4.121]$$

Las capas límite hidrodinámica y térmica descritas por estas ecuaciones están desacopladas cuando las diferencias de temperatura son pequeñas, comparadas con la temperatura absoluta, porque entonces los cambios de viscosidad son despreciables y [4.119] y [4.120] pueden resolverse por separado.<sup>239</sup> El acoplamiento térmico de las capas límite acostumbra a ser débil porque la transferencia de calor con la pared es pequeña en la mayoría de los problemas fluidodinámicos. No obstante, el acoplamiento puede producirse también por cambios de la densidad (en gases), por ejemplo en movimientos con empuje ascendente o a alta velocidad. En el primer caso, el acoplamiento también suele ser débil y, en el segundo, son necesarios números de Mach muy elevados para que los términos del gradiente de la presión y de la disipación viscosa no sean despre-



ciables en la ecuación de la energía (entalpía), e induzcan campos de temperatura y densidad suficientemente variables.

Prandtl analizó el orden de magnitud de los términos de estas ecuaciones con el fin de simplificarlas. Así, por ejemplo, de la ecuación de continuidad se deduce que

$$O\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = O\left(\frac{v_y}{v_\infty}\right) = O\left(\frac{\delta}{x}\right) \ll 1 \quad [4.122]$$

Del mismo modo, para las derivadas segundas de [4.119] se cumple

$$O\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right) = \frac{v_\infty}{x^2} \ll \frac{v_\infty}{\delta^2} = O\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \quad [4.123]$$

y

$$O\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}\right) = \frac{v_\infty}{x^2} \left(\frac{\delta}{x}\right) \ll \frac{v_\infty}{\delta^2} \left(\frac{\delta}{x}\right) = O\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) \quad [4.124]$$

Se aprecia que todos los términos de la ecuación en  $\{y\}$  de la cantidad de movimiento son de un orden inferior a los de la componente  $\{x\}$ . En concreto, para el gradiente transversal de la presión reducida, ha de ser

$$O\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = O\left(\frac{\delta}{x}\right) O\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \ll O\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad [4.125]$$

por lo que la derivada parcial de la presión puede sustituirse por la total, en dirección  $\{x\}$ . Este resultado implica que la presión en el interior de la capa límite sigue la evolución de la presión externa,  $p_\infty$ , dada por la ecuación [4.115].

Con todo, las ecuaciones [4.119] de la capa límite fluidodinámica se reducen a

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad [4.126]$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Cuando la capa límite bidimensional es turbulenta, las ecuaciones para la cantidad de movimiento [4.119], o [4.126], han de ser sustituidas por el sistema [4.50], o bien [4.53]. En realidad, la única contribución destacada de la turbulencia en la capa límite es que la tensión rasante,  $\tau_{xy}$ , no es solo viscosa, sino que contiene un término asociado a los esfuerzos turbulentos correspondientes, tal como se ha expuesto en [4.56] para el movimiento turbulento unidireccional y bidimensional. Si se admite que los esfuerzos turbulentos son aproximadamente iguales entre sí y que las velocidades de agitación turbulenta son pequeñas con respecto a las velocidades medias, las mismas hipótesis que se aplican a la capa laminar conducen a las mismas simplificaciones de las ecuaciones de la capa turbulenta.

Un análisis parecido de las ecuaciones para las capas límite térmica y de concentración (en caso de existir) indica que



$$\begin{aligned} \mathcal{O}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) &= \frac{\Delta T}{x^2} \ll \frac{\Delta T}{\delta_T^2} = \mathcal{O}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \\ \mathcal{O}\left(\frac{\partial^2 c_q}{\partial x^2}\right) &= \frac{\Delta c_q}{x^2} \ll \frac{\Delta c_q}{\delta_c^2} = \mathcal{O}\left(\frac{\partial^2 c_q}{\partial y^2}\right) \end{aligned} \quad [4.127]$$

lo que conduce a la simplificación siguiente:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ v_x \frac{\partial c_q}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_q}{\partial y} &= D_q \frac{\partial^2 c_q}{\partial y^2} \end{aligned} \quad [4.128]$$

En estas expresiones,  $\delta_T$  y  $\delta_c$  son los espesores de las capas límite de temperatura y concentración, respectivamente, y  $\alpha$  es la difusividad térmica definida en [1.95].

Las condiciones de contorno del conjunto de ecuaciones [4.118], [4.126] y [4.128] son: para  $x=0$ ,  $v_x = v_{00}(y)$ ,  $T = T_{00}(y)$  y  $c_q = c_{00}(y)$ ; para  $y=0$ ,  $v_x = 0$ ,  $T = T_0$  y  $c_q = c_0$ ; y para  $y = \infty$ ,  $v_x = v_\infty(x)$ ,  $T = T_\infty(x)$  y  $c_q = c_\infty(x)$ . Normalmente, el flujo en  $x=0$  es uniforme, y  $v_\infty \approx v_{00}$ ,  $T_\infty \approx T_{00}$ , etc., de forma que  $v_{00}$ ,  $T_{00}$  y  $c_{00}$  son constantes conocidas del problema.

La analogía de las ecuaciones [4.126] y [4.128] es evidente (en especial, si  $v_\infty$  es constante). Nótese, además, que una forma alternativa de la ecuación de la energía es la siguiente:

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad [4.129]$$

A diferencia del número de Reynolds, que es un parámetro variable en función del flujo, el número de Prandtl es una propiedad del fluido a una presión y a una temperatura determinadas. Para evidenciar la importancia del número de Prandtl, pueden escribirse las ecuaciones [4.119], [4.120] y [4.121] en forma adimensional:

$$\begin{aligned} \frac{v_\infty^2}{x} \left( v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right) &= -\frac{v_\infty^2}{x} \frac{dp^*}{dx^*} + \nu \frac{v_\infty}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^{*2}} \\ v_\infty \frac{\Delta T}{x} \left( v_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{\delta}{\delta_T} v_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) &= \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \nu \frac{v_\infty^2}{\delta^2} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right)^2 \\ v_\infty \frac{\Delta c_q}{x} \left( v_x^* \frac{\partial c_q^*}{\partial x^*} + \frac{\delta}{\delta_c} v_y^* \frac{\partial c_q^*}{\partial y^*} \right) &= D_q \frac{\Delta c_q}{\delta_c^2} \frac{\partial^2 c_q^*}{\partial y^{*2}} \end{aligned} \quad [4.130]$$

En esta transformación, se han tomado como magnitudes de referencia:  $\Delta T = T_\infty - T_{00}$  y  $\Delta c_q = c_\infty - c_{00}$ , para las diferencias características de temperatura y de concentración, y  $\rho v_\infty^2$  para la presión. Como velocidad transversal característica de todas las capas límite, se ha utilizado [4.122], lo que, en el fondo, y como se explica a continuación, presupone que todos los espesores son del mismo orden y  $\delta \approx \delta_T \approx \delta_c$ . Reescribiendo estas ecuaciones en función de los grupos adimensionales básicos, se llega a



$$\begin{aligned}
 v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} &= -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{1}{\text{Re}_x} \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \\
 v_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{\delta}{\delta_T} v_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} &= \frac{1}{\text{Re}_x} \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{x}{\delta_T}\right)^2 \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{1}{\text{Re}_x} \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 \frac{v_\infty^2}{c\Delta T} \left(\frac{\partial v_x^*}{\partial y^*}\right)^2 \\
 v_x^* \frac{\partial c_q^*}{\partial x^*} + \frac{\delta}{\delta_C} v_y^* \frac{\partial c_q^*}{\partial y^*} &= \frac{1}{\text{Re}_x} \frac{1}{\text{Sc}} \left(\frac{x}{\delta_C}\right)^2 \frac{\partial^2 c_q^*}{\partial y^{*2}}
 \end{aligned} \quad [4.131]$$

Evidentemente, el último término de la primera ecuación es significativo en la capa límite laminar, porque su coeficiente coincide con [4.113], que es aproximadamente la unidad. Por la misma razón, el último de la ecuación de la energía (el término correspondiente a la disipación viscosa de la segunda ecuación) es despreciable con respecto al primero, siempre que la velocidad sea pequeña.<sup>240</sup> Obsérvese también que este primer término, con [4.113], indica que

$$O\left(\frac{1}{\text{Re}_x} \left(\frac{x}{\delta_T}\right)^2\right) = O\left(\frac{\delta}{\delta_T}\right)^2 = \text{Pr} \quad [4.132]$$

Esto es, si el número de Prandtl es aproximadamente la unidad, los espesores de las capas límite fluidodinámica y térmica son del mismo orden (un análisis paralelo puede hacerse con el número de Schmidt de la tercera ecuación).

El número de Prandtl representa el cociente entre los efectos de difusividad viscosa y los de la térmica.<sup>241</sup> En los líquidos, para los que  $\text{Pr} \approx 1$  y la capacidad calorífica,  $c$ , es elevada, el efecto de la disipación viscosa en el incremento de la temperatura es despreciable a bajas velocidades, frente al incremento debido a la convección y a la conducción, y las ecuaciones adimensionales toman la forma (con  $\text{Sc} \approx 1$ ):

$$\begin{aligned}
 v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} &= -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \\
 v_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} &= \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \\
 v_x^* \frac{\partial c_q^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial c_q^*}{\partial y^*} &= \frac{\partial^2 c_q^*}{\partial y^{*2}}
 \end{aligned} \quad [4.133]$$

Por otro lado, las variables  $v_x^*$  y  $T^*$  de [4.133] verifican ambas la misma ecuación y las mismas condiciones de contorno cuando  $\text{Pr} = 1$  y el gradiente de la presión es nulo. Por tanto, si la temperatura de la pared,  $T_0$ , es constante, se verifica

$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_\infty} = \frac{v_x}{v_\infty} \quad [4.134]$$

y, conocido el campo de velocidades, se obtiene la distribución de temperaturas directamente. Como el flujo de calor hacia la pared es

$$q_0(x) = k \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} \quad [4.135]$$





de la combinación de estas ecuaciones, con [4.57] y  $Pr = 1$ , se deduce que

$$q_0 = -k \frac{T_0 - T_\infty}{v_\infty} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=0} = c \frac{T_\infty - T_0}{v_\infty} \tau_0 \quad [4.136]$$

o bien, en función del número de Stanton, y con [4.97] y [4.98],

$$Sta = \frac{q_0}{\rho v_\infty c (T_\infty - T_0)} = \frac{c_f}{2} \quad [4.137]$$

Esta expresión constituye la *analogía de Reynolds* para los transportes de cantidad de movimiento y energía, y es válida para movimiento laminar, a bajas velocidades y con  $Pr = 1$ . La aproximación de esta analogía a situaciones más generales es posible mediante ligeras modificaciones de la definición del número de Stanton, que incluyan la influencia del número de Prandtl y de la turbulencia.<sup>242</sup>

#### 4.2.2. Espesores típicos de la capa límite

La consideración de los órdenes de magnitud de los distintos términos de las ecuaciones simplificadas de Prandtl, en su forma adimensional [4.131], conduce a las siguientes expresiones aproximadas de los espesores de las tres capas límite laminares:

$$\begin{aligned} O(\delta) &= x Re_x^{-1/2} = \left( \frac{v_x x}{v_\infty} \right)^{1/2} \\ O(\delta_T) &= x Re_x^{-1/2} Pr^{-1/2} \\ O(\delta_C) &= x Re_x^{-1/2} Sc^{-1/2} \end{aligned} \quad [4.138]$$

Estas expresiones ponen de manifiesto que el aumento del número de Reynolds hace disminuir el espesor de todas las capas límite y que la relación entre los distintos espesores es

$$\begin{aligned} O\left(\frac{\delta}{\delta_T}\right) &= Pr^{1/2} \\ O\left(\frac{\delta}{\delta_C}\right) &= Sc^{1/2} \end{aligned} \quad [4.139]$$

Es decir, los números de Prandtl y Schmidt expresan la importancia relativa de las capas límite en cada caso. Si, por ejemplo, el número de Prandtl es muy pequeño, entonces puede anticiparse que la capa límite fluidodinámica será mucho más estrecha que la térmica, de modo que la velocidad del fluido será  $v_\infty$  en prácticamente toda la capa térmica. Si, en cambio, el número de Prandtl es muy grande, la conductividad térmica predomina sobre la viscosidad, y se puede suponer una distribución lineal de  $v_x$  en la capa térmica. Ambas situaciones permiten integrar la ecuación de continuidad [4.118] para deducir la evolución de  $v_y$ , que, sustituida en las de cantidad de movimiento, energía y concentración, y analizando el orden de magnitud de los términos resultantes, conduce a las mismas ecuaciones [4.138] en el primer caso ( $Pr \ll 1$ ) y a las siguientes en el segundo ( $Pr \gg 1$ ):



$$\begin{aligned} O\left(\frac{\delta_T}{x}\right) &= \text{Re}_x^{-1/2} \text{Pr}^{-1/3} \\ O\left(\frac{\delta}{\delta_T}\right) &= \text{Pr}^{1/3} \end{aligned} \quad [4.140]$$

Esta última relación entre los espesores  $\delta$  y  $\delta_T$  también se deduce por el procedimiento presentado en el apartado anterior. Si se admite, para ello, que la aproximación lineal de  $v_x$  en la capa límite térmica, implica que la velocidad característica en su frontera exterior es del orden

$$O\left(\frac{v_{x,T}}{v_\infty}\right) = O\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right) \quad [4.141]$$

y que, por continuidad, su velocidad transversal es

$$O\left(\frac{v_{y,T}}{v_\infty}\right) = O\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right) O\left(\frac{\delta_T}{x}\right) \quad [4.142]$$

y no la dada por [4.122], la ecuación de la energía adimensional de [4.130] pasa a ser

$$v_\infty \frac{\Delta T}{x} \frac{\delta_T}{\delta} \left( v_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) = \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad [4.143]$$

de donde

$$O\left(\frac{\delta_T^3}{x^2 \delta}\right) = \text{Re}_x \text{Pr} \quad [4.144]$$

Esta ecuación y la [4.113], permiten deducir cualquiera de las [4.140], como se pretendía comprobar.

De todas formas, la definición del espesor de la capa límite que se ha utilizado hasta ahora es subjetiva, en el sentido de que la velocidad  $v_\infty$  sólo se alcanza en el infinito, y la condición  $y = \delta$ , cuando  $v_x = 0,99v_\infty$ , era completamente arbitraria. Una forma más concreta de definir el espesor  $y$ , desde luego, mucho más práctica (y elegante), consiste en hacer la operación:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy \approx \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad [4.145]$$

Este espesor,  $\delta^*$ , se denomina *espesor de desplazamiento* y resulta de

$$\int_0^\infty v_x dy = v_\infty \int_{\delta^*}^\infty dy \quad [4.146]$$

o bien,

$$v_\infty \delta^* = \int_0^\infty (v_\infty - v_x) dy \quad [4.147]$$

El espesor de desplazamiento se interpreta como la distancia que tendría que desplazarse el contorno hacia el interior del flujo para que se satisfaga la ecuación de continuidad aplicada al movimiento externo.



Del mismo modo, también puede definirse un espesor asociado a la cantidad de movimiento:

$$\int_0^{\infty} \rho v_x^2 dy = \rho v_{\infty}^2 \int_{\delta^{**}}^{\infty} dy \quad [4.148]$$

con,

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{v_x^2}{v_{\infty}^2}\right) dy \approx \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{v_x^2}{v_{\infty}^2}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad [4.149]$$

y a la pérdida de cantidad de movimiento:

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{v_x}{v_{\infty}} \left(1 - \frac{v_x}{v_{\infty}}\right) dy \approx \delta \int_0^1 \frac{v_x}{v_{\infty}} \left(1 - \frac{v_x}{v_{\infty}}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad [4.150]$$

El espesor  $\theta$  se conoce como *espesor de cantidad de movimiento*. Es fácil ver que la relación entre estos espesores es  $\theta = \delta^{**} - \delta^*$ , y que todos ellos pueden ser calculados una vez conocida (o supuesta) la evolución de la velocidad en el interior de la capa límite.

### 4.2.3. Ecuación integral de von Kármán

Pese a la simplificación efectuada en las ecuaciones del movimiento en capa límite, existen muy pocas soluciones analíticas exactas y todas ellas suponen que la capa límite es laminar y la superficie, lisa. Estas ecuaciones, aun simplificadas, son no lineales y en derivadas parciales, y su solución sólo es factible cuando los perfiles de la velocidad son semejantes y el contorno es axilsimétrico o extremadamente simple. De las soluciones conocidas, tal vez la que más ha trascendido es la solución de Blasius para la capa límite laminar sobre una placa plana, infinita y lisa (v. figura 4.9). Como ocurría con las soluciones laminares de la ecuación [3.97], el interés por esta solución no es sólo académico, sino también práctico, y con frecuencia se utiliza como referencia para validar otros modelos y soluciones aproximadas (v. tabla 4.3).

Se dice que la capa límite es semejante cuando el perfil de la velocidad obedece a una ley de la forma  $v_x/v_{\infty} = f(y/\delta)$ .<sup>243</sup> Las ecuaciones de la capa límite dan lugar a una ecuación diferencial ordinaria, con respecto a la variable  $x$ , cuando se integran en dirección normal a la superficie. En esta ecuación, aparecen integrales con respecto a la variable  $y$  y que contienen la velocidad  $v_x$ , y que pueden ser resueltas cuando se conoce la distribución de la velocidad. Lamentablemente, la solución para  $v_x$  no es conocida, pero las condiciones de contorno en la pared y en el infinito permiten definir la forma que ha de tener el perfil de la velocidad para satisfacer la ecuación ordinaria. La ventaja principal de este procedimiento, es que puede aplicarse tanto a la capa límite laminar como a la turbulenta y, en ambos casos, los resultados que se obtienen son excelentes incluso en superficies curvas y rugosas.

La base del método consiste en integrar las ecuaciones de continuidad y de la cantidad de movimiento en dirección  $\{y\}$ , teniendo en cuenta que en el contorno se verifica  $v_i = 0$  y que, en  $y = \infty$ , la derivada de la velocidad es nula. La ecuación de continuidad, integrada, permite deducir el valor de la velocidad normal a la superficie:



$$v_y = -\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \quad [4.151]$$

De la integración de la ecuación de la cantidad de movimiento a través de la capa límite, se sigue que

$$\int_0^{\infty} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dy = \nu \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy = -\nu \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=0} = -\frac{\tau_0}{\rho} \quad [4.152]$$

Si, a continuación, se sustituye la primera en la segunda y se integra por partes la integral de la izquierda, se obtiene, con [4.115],

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (v_x (v_{\infty} - v_x)) dy + \frac{dv_{\infty}}{dx} \int_0^{\infty} (v_{\infty} - v_x) dy = \frac{\tau_0}{\rho} \quad [4.153]$$

Esta expresión puede escribirse, con los espesores definidos en el apartado anterior, de la forma

$$\frac{d}{dx} (v_{\infty}^2 \theta) + \delta^* v_{\infty} \frac{dv_{\infty}}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho} \quad [4.154]$$

que es la *ecuación integral de von Kármán* de la capa límite. La resolución de esta ecuación es sencilla, una vez supuesto un perfil de velocidad con que calcular los espesores de desplazamiento y de cantidad de movimiento a lo ancho de la capa límite en función de  $\delta$ , y si es conocida la evolución de  $v_{\infty}$  en  $x$ .

Si  $v_{\infty}$  es constante, la ecuación de von Kármán y [4.97] conducen a

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho v_{\infty}^2} = \frac{c_f}{2} \quad [4.155]$$

que permite calcular fácilmente el esfuerzo cortante sobre una placa plana, e indica que la pérdida de cantidad de movimiento con la distancia es consecuencia del rozamiento del fluido con la pared. Como consecuencia de esta pérdida de velocidad en la capa límite a una distancia y del contorno, la ecuación de continuidad muestra, en su forma integral [4.151], que la velocidad transversal no puede ser nula, por lo que el fluido ha de escapar de la capa límite por su frontera superior a medida que se ensancha.

#### 4.2.4. Capas límite laminar y turbulenta

La capa límite laminar transita a turbulenta cuando el número de Reynolds longitudinal toma un valor cercano a  $3,2 \cdot 10^5$ . La transición depende de muchas circunstancias, entre las que destacan, entre otras: el gradiente de presión externo, el nivel de turbulencia de la corriente, la rugosidad de la pared y el estado térmico del fluido.

En la zona laminar, la solución teórica deducida por Blasius, a partir del modelo simplificado por Prandtl, coincide perfectamente con los resultados experimentales. La figura 4.9 muestra la distribución típica de las velocidades longitudinal y transversal normalizadas de la capa límite laminar, para el movimiento bidimensional e incompresible sobre una placa plana y lisa.



Para poder resolver la ecuación integral de von Kármán para las capas laminar y turbulenta, es necesario presuponer la distribución de velocidades. En el caso laminar, las expresiones que se proponen son de tipo polinómico, cuyo grado está limitado por el número de condiciones de contorno o en los límites de que se disponga. Para la capa turbulenta, se utilizan perfiles en forma de potencias de la variable  $y/\delta$ , ya que la distribución logarítmica [4.83] es difícil de aplicar y sus resultados no mejoran los primeros. La ley potencial no tiene ningún fundamento teórico y tiene el inconveniente de que prevé gradientes de velocidad incorrectos en el contorno y en el exterior de la capa. No obstante, está avalada por la experiencia y ofrece buenos resultados cuando se supone que se extiende a toda la capa límite al integrar la ecuación de von Kármán (esto es, se desprecia el espesor de la subcapa laminar interna).

Los resultados que se obtienen para algunas de las distribuciones de velocidad más comunes se han resumido en la tabla 4.3. A continuación, se presenta, a modo de ejemplo, el procedimiento que condujo a dichos resultados.

Supóngase que se pretende ensayar un perfil de velocidad parabólico para la capa límite laminar, del tipo

$$v_x = ay + by^3 \quad [4.156]$$

Las constantes  $a$  y  $b$  resultan de las condiciones límite:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dv_x}{dy} \right]_{y=0} &= \frac{\tau_0}{\mu} = a \\ \left[ \frac{dv_x}{dy} \right]_{y=\delta} &= a + 3b\delta^2 = 0 \end{aligned} \quad [4.157]$$

con  $v_\infty = a\delta + b\delta^3$ . La distribución hallada, en función de la variable  $y/\delta$ , es

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \quad [4.158]$$

Tras sustituir estas ecuaciones en [4.154], integrar y simplificar adecuadamente, se tiene

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{3}{2} \frac{v_\infty}{\delta} = \frac{39}{280} v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \quad [4.159]$$

La solución de esta ecuación ordinaria de primer orden es:

$$\delta = 4,64 \left( \frac{v_x x}{v_\infty} \right)^{1/2} = 4,64 x \text{Re}_x^{-1/2} \quad [4.160]$$

y, para el esfuerzo cortante de [4.159],

$$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0,323 \text{Re}_x^{-1/2} \quad [4.161]$$

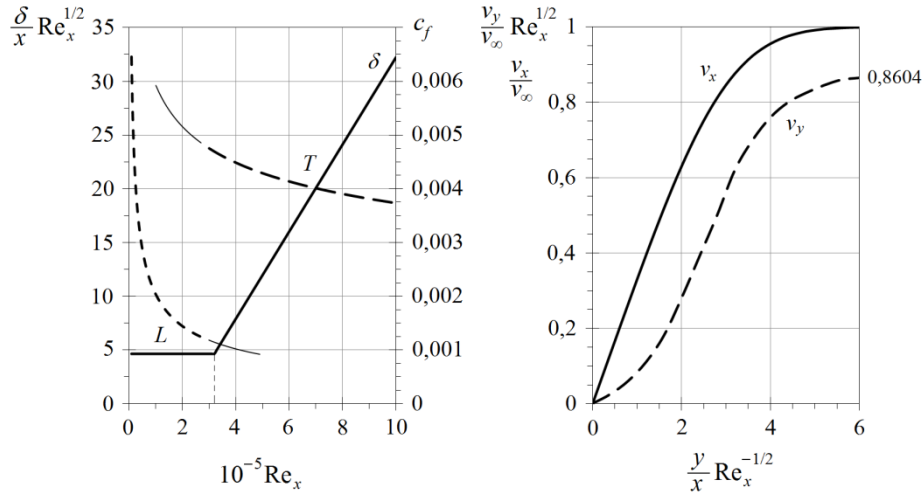
Una vez conocidas [4.158] y [4.160], pueden calcularse todos los espesores de la capa límite. Por ejemplo, el espesor de desplazamiento es



$$\delta^* = \delta \int_0^1 \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} + \frac{1}{2} \frac{y^3}{\delta^3} \right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{3}{8} \delta = 1,74 \text{Re}_x^{-1/2} \quad [4.162]$$

que es del orden de la tercera parte de  $\delta$  en este caso.

Figura 4.9. A la izquierda, se presenta la evolución del espesor normalizado de la capa límite sobre una placa plana y de los coeficientes de rozamiento,  $c_f$ , en función de  $\text{Re}_x$ , (a trazos). Obsérvese que  $c_f$  es mayor en la capa turbulenta (T) que en la laminar (L). A la derecha, se muestran las velocidades normalizadas (soluciones exactas de Blasius) en la capa laminar. La velocidad transversal en la capa límite no es nula, lo que significa que el aumento del espesor con la distancia implica un flujo continuo de fluido hacia el exterior de la capa límite.



El movimiento turbulento se ajusta mediante expresiones del tipo

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^m \quad [4.163]$$

donde  $m$  es un exponente que aumenta con el número de Reynolds y que la práctica sitúa entre 5 y 7. Como la tensión rasante no puede obtenerse por derivación directa de esta ecuación, se utiliza el resultado [4.97] ajustado a los datos experimentales:

$$\tau_0 = \frac{c}{\left( \frac{v_\infty \delta}{\nu} \right)^{1/4}} \rho v_\infty^2 \quad [4.164]$$

donde  $c$  es una constante, de valor aproximado 0,0225. Obsérvese que el esfuerzo cortante disminuye con el número de Reynolds y es menor cuanto mayor sea  $\delta$ .

Sustituyendo [4.163] y [4.164] en [4.154], para  $m=7$ , y tras integrar, se llega a

$$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0,0972 \frac{d\delta}{dx} \quad [4.165]$$

y

$$\delta = 0,376x \text{Re}_x^{-1/5} \quad [4.166]$$

Finalmente, se tiene<sup>244</sup>



$$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0,0296 \text{Re}_x^{-1/5} \quad [4.167]$$

	Perfil de velocidades	Espesor	Tensión rasante
Laminar $\text{Re}_x < 3,2 \cdot 10^5$	Blasius (exacta)	$\frac{\delta}{x} = 4,92 \text{Re}_x^{-1/2}$	$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0,332 \text{Re}_x^{-1/2}$
	$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{y}{\delta}$	$\frac{\delta}{x} = 3,46 \text{Re}_x^{-1/2}$	$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0,289 \text{Re}_x^{-1/2}$
	$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$	$\frac{\delta}{x} = 4,64 \text{Re}_x^{-1/2}$	$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0,323 \text{Re}_x^{-1/2}$
	$\frac{v_x}{v_\infty} = 2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	$\frac{\delta}{x} = 5,48 \text{Re}_x^{-1/2}$	$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0,364 \text{Re}_x^{-1/2}$
	$\frac{v_x}{v_\infty} = 2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - 2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	$\frac{\delta}{x} = 5,83 \text{Re}_x^{-1/2}$	$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0,343 \text{Re}_x^{-1/2}$
	$\frac{v_x}{v_\infty} = \sin\left(\frac{\pi y}{2 \delta}\right)$	$\frac{\delta}{x} = 4,80 \text{Re}_x^{-1/2}$	$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0,328 \text{Re}_x^{-1/2}$
Turbulento $5 \cdot 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$	$\frac{v_x}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = 1,15 \left(\frac{y}{x}\right)^{1/7} \text{Re}_x^{1/35}$	$\frac{\delta}{x} = 0,376 \text{Re}_x^{-1/5}$	$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0,030 \text{Re}_x^{-1/5}$

Tabla 4.3. Parámetros característicos de la capa límite fluidodinámica sobre una superficie plana.

#### 4.2.5. Desprendimiento de la capa límite

La separación de la capa límite de una superficie es uno de los fenómenos más interesantes de la mecánica de fluidos, tanto por la dificultad de su tratamiento analítico, como por sus consecuencias sobre el flujo y las pérdidas que ocasiona.

Los fluidos tienen la tendencia natural a adherirse a las superficies sobre las que fluyen. No obstante, la experiencia enseña que la capa límite se desprende cuando se dan determinadas circunstancias, normalmente asociadas a la naturaleza de la propia superficie (cambios locales de rugosidad o de dirección) o a cambios en el gradiente de la presión del flujo externo.

Las fuerzas viscosas están en equilibrio con las de inercia en el interior de la capa límite. Las primeras son un sumidero de cantidad de movimiento, mientras que las segundas son el resultado del arrastre que el flujo exterior induce en el fluido contenido en la capa límite. Si las fuerzas de inercia disminuyen, las fuerzas de fricción frenan el fluido y, como resultado de ello, el perfil de la velocidad se retrae y la capa límite se ensancha.

La ecuación de la cantidad de movimiento [4.126] en la pared toma la forma

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right]_{y=0} \quad [4.168]$$



Esta ecuación indica que, cuando el gradiente de la presión es positivo, ha de aparecer un punto de inflexión en el perfil de la velocidad.<sup>245</sup> El punto de desprendimiento es aquel para el cual  $\tau_0=0$ , es decir, es el punto en que, si no cambian las condiciones externas, el flujo sobre la pared está a punto de invertirse. En el caso laminar, esta condición se reduce a

$$\left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 \quad [4.169]$$

La inversión del perfil de velocidad en esta región provoca una zona con recirculación donde se genera vorticidad. Aguas abajo y a partir de este momento, dejan de ser aplicables las ecuaciones de la capa límite y la solución invíscida exterior, pues ambas suponían que la capa límite estaba adherida.

Si el desprendimiento se produce cuando la capa límite es laminar, se demuestra que el punto de desprendimiento sólo depende de la forma geométrica de la superficie (y de su influencia sobre el valor de  $v_\infty$ ). La dependencia de la viscosidad aparece, curiosamente, cuando la capa límite pasa a ser turbulenta, porque la transición está marcada por el número de Reynolds. En apartados anteriores, se ha visto que la tensión rasante en el flujo próximo a la pared es mayor en la capa límite turbulenta que en la laminar (las tensiones de Reynolds son mayores que las viscosas), lo que significa que la capa límite turbulenta transporta más cantidad de movimiento que la laminar. Como, en la vecindad de la pared, se ha de cumplir

$$\tau_{y \approx 0} = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \rho \overline{v'_x v'_y} = 0 \quad [4.170]$$

la transición a turbulenta de la capa límite retrasa la ubicación del desprendimiento porque es necesario un recorrido disipativo más largo.

Todas estas circunstancias son importantes en el estudio aerodinámico de los cuerpos, o en el diseño de objetos que hayan de presentar una mínima resistencia al avance. Para concretar mejor lo anterior mediante un ejemplo, supóngase un cilindro horizontal liso, fijo y carente de rotación, como el de la figura 4.10, sumergido en una corriente potencial en que la velocidad incidente sea  $v_\infty$ . La forma del cilindro (por continuidad) hace que el fluido se acelere en la parte anterior y se desacelere en la posterior. En el exterior de la capa límite, el efecto del cambio en la velocidad,  $v_\infty(\theta)$ , decrementa la presión entre los puntos “0” y “1” y la incrementa entre los puntos “1” y “2”. En el interior, en cambio, el rozamiento consume parte de la energía cinética del fluido entre “0” y “1”, de modo que, al llegar a “1”, no retiene la suficiente para recuperar su estado inicial en “2” y se ve obligado a abandonar la superficie del cuerpo en algún punto situado entre “1” y “2”.

El desprendimiento no suele producirse entre “0” y “1” porque, en esta zona, el gradiente de la presión es negativo y ayuda a compensar el efecto del rozamiento. Esta ausencia de desprendimiento hasta, aproximadamente, el punto de presión mínima “1” hace que la distribución teórica de la presión coincida bastante bien con los resultados experimentales. En contrapartida, el desprendimiento posterior genera una zona de sombra en la cual la presión es más baja que la teórica y se genera una succión conocida como *resistencia de forma*.





En general, se distinguen diferentes regímenes en función del número de Reynolds asociado al diámetro del cilindro,  $Re_D = v_\infty D / \nu$ . Si el número de Reynolds es lo suficientemente bajo ( $Re_D < 5$ ), la experiencia muestra que el perfil de la presión alrededor del cilindro es simétrico y coincide, a efectos prácticos, con el que resulta de la ecuación [3.48] (sin el término de la circulación) para el fluido ideal.<sup>246</sup> La capa límite es enteramente laminar y, en este caso, la única resistencia al avance es la del rozamiento viscoso. No obstante, la pérdida viscosa es despreciable con respecto a la variación convectiva de  $v_\infty(\theta)$ , por lo que la estela que se produce tras el cuerpo no oscila, es estacionaria, y tiene un grosor mínimo.

Para números de Reynolds comprendidos entre  $5 < Re_D < 50$ , se generan tras el cuerpo un par de vórtices simétricos que forman una región de recirculación conocida como *burbuja*. En el intervalo  $50 < Re_D < 200$ , se comienzan a gestar inestabilidades en la región de recirculación de la burbuja que hacen que la estela deje de ser estable. Cuando los remolinos llegan a desprenderse del cuerpo (para  $Re_D$  que pueden llegar a ser de hasta 2.500), lo hacen en orden intermitente, pero de forma ordenada, y dan lugar a la denominada *calle de vórtices* de von Kármán (v. figura 4.11). Esta estela genera una fuerza de sustentación, de media cero, que cambia con el tiempo según la frecuencia de aparición de los vórtices, y cuyo valor aumenta con  $v_\infty$ . Para números de Reynolds de hasta  $10^5$ , la capa límite sigue siendo enteramente laminar, pero en la estela aparecen estructuras tridimensionales porque es completamente turbulenta.

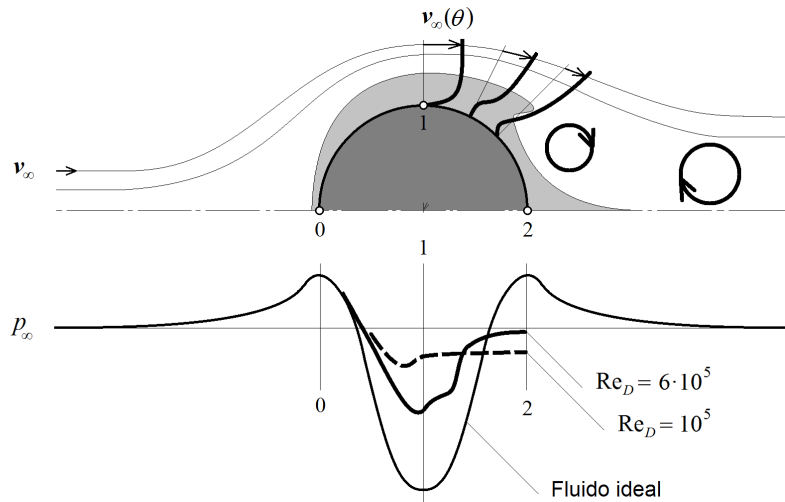


Figura 4.10. Flujo alrededor de un cilindro horizontal (arriba) y distribución de presiones sobre su superficie para distintos valores del número de Reynolds.

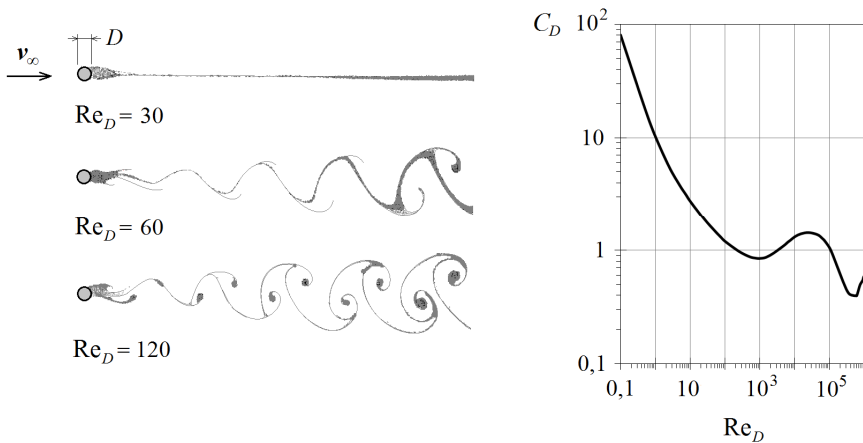
La capa límite se vuelve turbulenta cada vez más cerca del punto de estancamiento “0” para  $Re_D$  superiores a  $10^5$ . En el pequeño intervalo  $3 \cdot 10^5 < Re_D < 3,5 \cdot 10^5$ , el desprendimiento de los vórtices no es completamente simétrico y las capas límite que se desarrollan a ambos lados del cilindro se alternan entre laminar y turbulenta. Para  $Re$  mayores, la capa límite es turbulenta casi en su totalidad y el punto de desprendimiento se atrasa reduciendo el ancho de la estela.

Esta disquisición, con alguna pequeña modificación en el valor del número de Reynolds que define cada uno de los intervalos, puede aplicarse prácticamente a cualquier



cuerpo tridimensional inmerso en un flujo (la mayoría de los flujos externos de interés práctico pertenecen a los regímenes explicados en el último párrafo). Aunque el rozamiento en la capa límite turbulenta es mayor que en la laminar, la contribución del rozamiento superficial,  $c_f$ , es pequeña, comparada con la pérdida de forma asociada a la aparición de la estela. Esta circunstancia explica que la fuerza de resistencia efectiva del cuerpo disminuya con el número de Reynolds<sup>247</sup> y también que sea menor cuanto más turbulenta es la corriente incidente (pues favorece la transición a turbulenta de la capa límite y el desplazamiento aguas abajo del punto de desprendimiento).

Figura 4.11. Diferentes flujos de estela tras un cilindro horizontal (izquierda) y evolución característica del coeficiente de resistencia (v. [3.53]) en función del número de Reynolds (derecha).



<sup>198</sup> El transporte turbulento de una propiedad es mucho mayor que el laminar correspondiente definido en el apartado 1.3.1, pero, a su vez, puede ser mucho menor que el correspondiente al transporte convectivo asociado a la velocidad media del flujo. Un ejemplo ayudará al lector a centrar ideas: el tiempo de difusión molecular de una gota de leche en un café es del orden de un día, pero nadie espera tanto para tomarse un café con leche.

<sup>199</sup> El ancho de este espectro en frecuencia, es decir, la diferencia de tamaño entre los remolinos más grandes y los más pequeños, aumenta con el número de Reynolds (v. [4.6]).

<sup>200</sup> Estrictamente hablando, la turbulencia isotrópica no se da nunca en la práctica, pero puede conseguirse artificialmente en túneles de viento, haciendo que el fluido atravesase una o más rejillas metálicas e instalando la zona de ensayo a una distancia suficiente para salvar las irregularidades que se puedan generar. Los flujos internos y los de capa límite se apartan bastante de la isotropía, pero se acepta que la turbulencia libre atmosférica es isotrópica. La condición de isotropía local exige números de Reynolds elevados, basados en el valor medio cuadrático de la fluctuación de la velocidad turbulenta.

<sup>201</sup> Esta velocidad, o la  $v_0$ , no son, propiamente hablando, del orden de magnitud de la velocidad media del flujo, sino de su variación a lo largo de la distancia  $l$ , o de la  $l_0$ . El cociente  $v/l$  es la frecuencia característica del vórtice de longitud  $l$ .

<sup>202</sup> Es razonable pensar que la ratio temporal de suministro de energía a la turbulencia ha de ser igual que la ratio temporal de disipación. Este el fundamento de la teoría del *equilibrio universal de Kolmogorov* de la estructura turbulenta de pequeña escala.

<sup>203</sup> Nótese que el número de grados de libertad independientes en un volumen  $l^3$  es  $Re^{9/4}$ .



<sup>204</sup> Se omite la demostración para no perder continuidad, pero el desarrollo que conduce a [4.27] es análogo al utilizado en el apartado 2.3.2.

<sup>205</sup> El término de disipación viscosa de Rayleigh también contiene dos contribuciones esencialmente positivas: una asociada al movimiento medio y otra, al de fluctuación turbulenta. Ambos términos degradan la energía mecánica del flujo y la convierten en térmica.

<sup>206</sup> Este no sea el caso de las fuerzas electromagnéticas o de las gravitatorias en fluidos estratificados (en este último caso, no son isótropas). Las primeras no se tratan en este estudio y las segundas son isótropas y homogéneas si el fluido es de densidad constante.

<sup>207</sup> A este mismo resultado se llega si se parte de [2.60] y se tiene en cuenta que

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \tau = \nabla \cdot (\tau \cdot \mathbf{v}) - \tau : \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot (\tau \cdot \mathbf{v}) - \Phi_v$$

<sup>208</sup> Recuérdese [2.71]. En la terminología propia de la turbulencia, se utiliza el símbolo  $\varepsilon$  para indicar la ratio de disipación de energía por unidad de masa y de tiempo. Este término es, conceptualmente, idéntico a la función de disipación de Rayleigh,  $\Phi_v$ , y representa la transformación (o degradación) de energía mecánica en calor por efectos viscosos.

<sup>209</sup> En este tema y en algunos apartados anteriores de este libro (v., por ejemplo, [1.40] y [2.51]), se ha utilizado la notación indicial o convención de la suma por subíndices (convenio de Einstein), que permite omitir el símbolo sumatorio de las ecuaciones. Una expresión con un índice repetido, denominado *índice mudo*, representa una sumatoria con respecto a dicho índice. El índice mudo varía a través de su rango, 1, 2 y 3, en el espacio euclidiano. La expresión final de [4.36], sin este convenio, sería

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)^2$$

Un índice no repetido se denomina *índice libre*. Por ejemplo,  $a_i b_j = a_{i1} b_{j1} + a_{i2} b_{j2} + a_{i3} b_{j3}$ . La permutación entre los índices libres ha permitido escribir  $\partial v_i / \partial x_j$  como una semisuma en [4.34].

<sup>210</sup> Como se ha explicado, apenas hay transporte espacial en los flujos homogéneos y, en los isótropos, las tensiones cruzadas (no diagonales) de Reynolds son nulas. Los términos diagonales del tensor de tensiones de Reynolds contribuyen muy poco al transporte de cantidad de movimiento del movimiento medio.

<sup>211</sup> Conviene señalar, como ya se ha indicado al principio de este apartado, que el flujo a través de una superficie puede comportar también una transferencia de energía debida a la propagación de ondas provenientes del exterior del volumen.

<sup>212</sup> Este teorema ( $l\nu = \text{constante}$ ) es aplicable a los vórtices inerciales y justifica el aumento de la vorticidad cuando se disminuye el alcance longitudinal de los vórtices. La vorticidad de estos vórtices aun es elevada debido a su reducido diámetro, por lo que la conservación del momento los hace muy estables en forma, y hace que su vida media coincida con el tiempo de renovación del flujo principal.

<sup>213</sup> La vorticidad fluctuante se define como el rotacional de la velocidad fluctuante.

<sup>214</sup> Del mismo modo que la velocidad de deformación media se admite inferior a la fluctuación de la velocidad de deformación, la variación de la vorticidad está dominada por la velocidad de variación de la vorticidad fluctuante.

<sup>215</sup> Las dos últimas no son independientes entre sí. Se recuerda que  $\Omega_x = \partial v_z / \partial y - \partial v_y / \partial z$ .

<sup>216</sup> La vorticidad longitudinal puede aparecer como consecuencia de la deflexión de la vorticidad existente en la capa límite, donde el movimiento no es irrotacional. Esta deflexión implica un efecto tridimensional que no está presente en los flujos bidimensionales, en que la vorticidad sólo puede cambiar por difusión viscosa. Recuérdese [2.42] y también la ecuación de Helmholtz [2.58].

<sup>217</sup> La elección de  $y=0$  en la pared se hace por conveniencia, como podrá comprobar el lector en el apartado 4.1.7.

<sup>218</sup> En los movimientos no bidimensionales, este equilibrio no es correcto, tal como se ha planteado, porque aparecen flujos en dirección transversal en el interior de la capa límite y la tensión rasante no tiene dirección axial.



- <sup>219</sup> El lector puede comprobar que una contracción de subíndices conduce a la expresión [4.24]. El hecho de que la viscosidad de remolino sea introducida como un escalar positivo invalida su uso en la modelización de flujos complejos, normalmente no isotrópicos, en los que la tensión de Reynolds y los gradientes de deformación tengan signos opuestos. Obsérvese que  $\tau_{Re} = 2\rho \nu_t e_{ij}$ .
- <sup>220</sup> Este supuesto implica que la tasa de producción de tensiones de Reynolds [4.40] es, aproximadamente,  $\varepsilon$  (condición de equilibrio energético en la cascada) y que  $O(e_{ij}) = \nu/l$ .
- <sup>221</sup> Estas ecuaciones son el punto de partida del algoritmo  $k-\varepsilon$  (siendo  $k$  la energía cinética  $q$ ) para la resolución fenomenológica de la turbulencia por ordenador. Este modelo utiliza la expresión de Kolmogorov-Prandtl y sendas ecuaciones para el transporte de energía cinética y la disipación viscosa. Las limitaciones del modelo  $k-\varepsilon$  surgen, principalmente, de representar la turbulencia mediante su energía cinética, que es un escalar y no puede describir por sí sola la turbulencia anisótropa. Consúltese una obra especializada en turbulencia para ampliar este contenido y conocer las aplicaciones y restricciones de este algoritmo.
- <sup>222</sup> Aunque esta circunstancia pueda suponer una restricción de su campo de aplicación a los movimientos turbulentos más sencillos, la verdad es que estos son también los más frecuentes: movimientos en conductos, canales, capas límite, chorros, etc.
- <sup>223</sup> Prandtl sugirió que esta longitud era del orden de la distancia a lo largo de la cual la partícula mantenía sus propiedades en el desplazamiento que condujo a [4.69], y de ahí la definición de *longitud libre de mezcla*. A diferencia de Prandtl, que supuso que la velocidad media  $v_x$  se mantenía constante en un desplazamiento vertical, Taylor supuso que era la vorticidad la que lo hacía, es decir, el gradiente de la velocidad en dirección vertical. Con esta hipótesis llegó a la misma ecuación [4.72], pero con una longitud de mezcla  $2^{1/2}$  mayor. La hipótesis de Prandtl es más acertada en los flujos internos, en los que predominan los remolinos turbulentos con sus ejes en la dirección del flujo y normales a las variaciones de la velocidad, mientras que la de Taylor lo es en los flujos externos, en los que los remolinos se forman tras los cuerpos con sus ejes perpendiculares al flujo en dirección de las variaciones longitudinales de la velocidad. En el primer caso, los campos de temperaturas y velocidades son semejantes (analogía de Reynolds), mientras que, en el segundo, la semejanza se establece entre los campos de temperaturas y vorticidades.
- <sup>224</sup> El término  $\rho \nu_0 (u^*)^2$  es el orden de magnitud del tercer término de [4.39] por unidad de tiempo y área, en una región de ancho  $\delta$ , mientras que  $\rho (u^*)^3$  es el orden de magnitud del último en las mismas unidades, y se obtiene de  $(\nu/u^*)\rho \nu (u^*)^2 / (\nu/u^*)^2$ , al ser el espesor característico de la región más próxima a la pared del orden  $\nu/u^*$ , muy inferior a  $\delta$ .
- <sup>225</sup> Esta definición es común, pero incorrecta, ya que este nombre sugiere que en la subcapa "laminar" no existen fluctuaciones de velocidad. A continuación, se verá que la distribución de velocidades en esta zona es lineal, como en el movimiento laminar de Couette [3.101], lo que ha alimentado, sin duda, el equívoco. En adelante, se denominará *subcapa viscosa* la zona situada a distancias  $0 < y < \delta$ , de la pared. El concepto de capa límite laminar se explica en el tema siguiente.
- <sup>226</sup> Se admite que tanto  $\nu/u^*$  como el parámetro con que se caracteriza la rugosidad superficial,  $\varepsilon$ , son mucho mayores que  $\delta$ . En los tubos lisos, desaparece  $\varepsilon$  y, si el cociente entre las escalas características restantes,  $u^* \delta / \nu$ , es suficientemente grande, existe una distancia en el interior de la zona de influencia de la pared en que la escala asociada a  $\delta$  no es efectiva.
- <sup>227</sup> La condición ( $y = \delta = R$ ,  $v_x = v_0$ ), en el centro del tubo, sustituida en [4.82], confirma que  $b$  ha de ser muy pequeña.
- <sup>228</sup> En este apartado, se ha suprimido la barra superior para indicar la velocidad media en un punto. Nótese que, si  $u^* = 10$  cm/s en agua a 20°C, la condición  $y^+ = 30$  ocurre para  $y = 0,06$  mm, por lo que está justificado el empleo de la ley logarítmica en [4.85].
- <sup>229</sup> La constante  $c$  que resulta de la integración de [4.85] es  $c = -1,5/k = -3,75$ . Por tanto,  $a + c$  sería 1,25. Los resultados experimentales se ajustan mejor con  $c = -3$ , y este es el valor que se utiliza normalmente.
- <sup>230</sup> Para fijar ideas mediante un ejemplo, si  $u^* = 10$  cm/s en agua a 20°C, la condición  $\varepsilon u^* / \nu = 5$  sitúa el valor de  $\varepsilon$  en 0,01 mm, muy inferior a la rugosidad de muchas tuberías comerciales. La rugosidad  $\varepsilon$  que se considera en este apartado es el valor medio cuadrático de las protuberancias y de las cavidades existentes en la pared. La coordenada vertical,  $y$ , se define con respecto a la posición media de dichas protuberancias y cavidades.



<sup>231</sup> Por el mismo razonamiento por el que la ley de pared no depende de  $\delta$ , la ley de defecto no lo hace de  $\varepsilon$ , siempre que sea muy inferior al radio del conducto.

<sup>232</sup> El orden de magnitud de  $u^*$  puede deducirse de [4.60] y [4.75]. Combinando estas ecuaciones y la [4.98], se llega a:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_0} = \frac{v_0 - 4u^*}{v_0} = \frac{1}{1 + (2f)^{1/2}}$$

Este resultado es próximo a la unidad para los valores usuales de  $f$ . Siguiendo con un ejemplo anterior, un valor de  $u^* = 10$  cm/s equivale a un gradiente de presión de 400 Pa/m (en agua) por una tubería de 5 cm de diámetro y  $v_0 \approx 2$  m/s. Con esta  $v_0$ , el cociente anterior es 0,8.

<sup>233</sup> El radio hidráulico se define como el cociente entre el área mojada y el perímetro mojado por el flujo. En un tubo circular de diámetro  $D$ , es  $4r_H = D$ . Este factor surge de la necesidad de establecer una correlación válida para la fricción en conductos no circulares, en que el flujo no es bidimensional y, por tanto, aparecen flujos secundarios.

<sup>234</sup> Salvo en penachos muy altos, del orden de kilómetros de altura. Se acepta que los cambios en la densidad son suficientemente grandes para permitir un incremento de la cantidad de movimiento del penacho en su ascenso pero, aun así, pequeños comparados con la propia densidad del fluido. De esta manera, puede aplicarse la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible, en que los cambios de la densidad se incluyen mediante el coeficiente de compresibilidad  $\beta$  [1.128], tal como se hace en [4.107]. En este apartado, se supone que la densidad y la composición del fluido son parecidas a las del entorno libre sobre el que se desarrolla el flujo.

<sup>235</sup> En el caso de las estelas, estas ecuaciones admiten una simplificación adicional. Se entiende que la pérdida de velocidad en la estela de un cuerpo es pequeña, comparada con la velocidad (usual) de los chorros, y la velocidad  $v_x$  puede sustituirse por la velocidad no perturbada por el objeto,  $v_\infty$ . Como  $v_y$  sigue siendo pequeña frente a  $v_x$ , la ecuación de la cantidad de movimiento para una estela plana sería

$$v_\infty \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

La misma simplificación es posible en el caso de las estelas redondas.

<sup>236</sup> Recuérdese que su diferencia es  $4u^*$ .

<sup>237</sup> Se admite que  $v_y$  es nula o despreciable. Esta hipótesis se justifica en [4.122].

<sup>238</sup> La función de disipación de Rayleigh definida en [2.63] se simplifica en este movimiento porque  $v_z = 0$ , el fluido es incompresible, y se cumple que  $O(\partial v_y / \partial x) \ll O(\partial v_x / \partial x) = O(\partial v_y / \partial y) \ll O(\partial v_x / \partial y)$ .

<sup>239</sup> Una vez calculado el perfil de velocidades con [4.119], la [4.120] proporciona el de temperatura. Esta ecuación es lineal si  $k$  es constante. En caso de acoplamiento, las ecuaciones del campo de temperaturas no son lineales. El concepto de acoplamiento también puede utilizarse entre estas capas y la de concentración. De todas formas, exista o no acoplamiento, la hipótesis de que los espesores de las capas límite fluidodinámica y térmica son pequeños sigue siendo válida.

<sup>240</sup> Para el agua e incrementos de temperatura de un grado, es necesaria una velocidad de 25 m/s, aproximadamente, para que este término sea la unidad.

<sup>241</sup> Normalmente, el número de Prandtl es aproximadamente 1 para la mayor parte de líquidos y gases poco viscosos, y es mucho menor que 1 para los metales líquidos. Para el agua,  $Pr \approx 7$  y, para el aire,  $Pr \approx 0,7$ . Si el número de Prandtl es muy grande, la ecuación [4.132] enseña que los cambios de temperatura en dirección longitudinal de [4.131] son despreciables con respecto a los transversales, al ser  $v_x^2/c$  pequeño. El número de Prandtl es muy grande en los aceites viscosos.

<sup>242</sup> En el régimen laminar que se produce en un conducto circular, se ha mostrado en [3.111] que  $f = 64/Re$ , de modo que se cumple que  $St \cdot Re = 8$ . Consúltense una obra especializada para el estudio de otras formas de esta analogía y para las analogías entre el transporte de cantidad de movimiento y de masa (analogías de Prandtl-Taylor, von Kármán y Martinelli, y de Sherwood, Colburn y Lyon, entre otras).



- 
- <sup>243</sup> Esta hipótesis convierte las ecuaciones en derivadas parciales en ecuaciones ordinarias. Goldstein demostró que la capa límite es semejante en movimientos estacionarios, si la velocidad  $v_x$  es proporcional a una potencia de  $x$ , siendo  $x$  la distancia curvilínea medida a lo largo de la superficie desde el punto de remanso, donde  $x=0$ .
- <sup>244</sup> Compruebe el lector que  $\delta^* = \delta/8$  y  $\theta = (7/72)\delta$ .
- <sup>245</sup> Cuando  $dp/dx=0$ , el punto de inflexión se sitúa en  $y=0$ , pero cuando  $dp/dx>0$ , el punto de inflexión se produce en  $y>0$ . La condición  $dp/dx>0$  es una condición necesaria pero no suficiente para el desprendimiento de la capa límite.
- <sup>246</sup> La solución analítica de este flujo para una esfera se debe a Stokes. La fuerza de rozamiento sobre una esfera en régimen laminar es  $3\pi D\mu v_x$ .
- <sup>247</sup> Merece la pena destacar que se produce una pérdida brusca de resistencia para números de Reynolds del orden de  $4 \cdot 10^5$ . En las esferas, esta pérdida se conoce como *efecto Eiffel* y, por ejemplo, se utiliza en las pelotas de golf para anticipar la transición a turbulenta de la capa límite.



→ 5





## Complementos y aplicaciones

En este capítulo, se explican algunos complementos y aplicaciones de la mecánica de fluidos que amplían la teoría expuesta hasta el momento. Entre los temas que se tratan aquí, se encuentran una introducción a la teoría unidimensional de turbomáquinas, una descripción de los procesos de descarga de líquidos y gases a través de orificios y conductos, el flujo laminar de fluidos no newtonianos y una disertación sobre el índice politrópico, sus límites y su relación con el número de Mach. Algunos otros son una continuación directa de los explicados en el capítulo 3, de los que el lector puede preferir realizar una lectura secuencial.

### 5.1. Aplicaciones de las ecuaciones de Euler y Bernoulli

Las ecuaciones de Euler y Bernoulli tienen innumerables aplicaciones prácticas, sobre todo en el movimiento permanente de líquidos, en el cálculo de caudales o en la descripción de algunos fenómenos no estacionarios, como el establecimiento de la corriente en un conducto o las oscilaciones de masa. A continuación, se describen algunos de ellos y, más adelante, se amplía el análisis detallando las particularidades del flujo de descarga de un depósito y de un calderín a presión.

#### 5.1.1. Tubos piezométricos y de Pitot, y sonda de Prandtl

Los tubos piezométricos, de Pitot y de Prandtl son instrumentos que permiten visualizar los términos energéticos de una corriente.

La forma más sencilla de un tubo piezométrico consiste simplemente en un tubo vertical o inclinado, conectado a la pared del conducto y abierto en el otro extremo (o conectado a una fuente de presión externa constante y conocida). El tubo de Pitot y la sonda de Prandtl son cánulas de pequeño diámetro que se sumergen en el flujo, orientadas según la dirección dominante, y conectadas por el otro extremo a un dispositivo de medición de presión estática. Es habitual que dicho dispositivo sea un tubo en forma de U (o manómetro diferencial) como el que se muestra en la figura 5.1, en el que se



aloja un fluido auxiliar o manométrico no miscible ni reactivo con el fluido circulante y de densidad específica mayor. Los manómetros diferenciales también pueden servirse con los tubos piezométricos para medir la presión estática (y son indispensables cuando se trata con un gas).

Por sus características constructivas, se deduce que los tubos piezométricos miden la presión estática actuante en el punto donde se ubican; que los tubos de Pitot miden la presión de estancamiento de la corriente y, cuando se conoce la presión estática, también pueden utilizarse para medir la velocidad del flujo por diferencia, y que las sondas de Prandtl son una combinación de un tubo piezométrico y un tubo de Pitot. Los tubos de Pitot y las sondas de Prandtl necesitan coeficientes correctores, pues su presencia perturba la corriente. En cambio, si bien la medida de un tubo piezométrico no es intrusiva (salvo cuando se presentan fugas a través del conector), para obtener el valor medio correcto de la presión estática es conveniente disponer tres, cuatro y hasta ocho orificios a lo largo del perímetro de la sección de medida, sobre todo cuando se sospecha que el flujo no es unidireccional.

Si se aplica la ecuación de Bernoulli entre un punto aguas arriba de la línea de corriente que pasa por el centro de la sección abierta del tubo de Pitot y el punto de estancamiento ( $v_2=0$ ) que se produce en ésta, se obtiene:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_{02}}{\rho} + gz_2 \quad [5.1]$$

Es decir, en términos de presión reducida, o si el tubo es horizontal, se cumple:

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_{02} \quad [5.2]$$

de donde se puede despejar  $v_1$ .

El valor de la velocidad obtenido por esta expresión es el teórico, por cuanto es inevitable que, a la entrada del tubo, se presenten pérdidas de energía y que existan perturbaciones del campo de velocidades. Estos efectos se tienen en cuenta introduciendo un *coeficiente de velocidad*,  $C_v$ , que depende de la forma del tubo y del número de Reynolds de la corriente y adquiere valores cercanos a 0,98 en la práctica (cuando, además, la sonda está perfectamente orientada). La velocidad real del flujo resulta ser, entonces:

$$v_1 = C_v \left( \frac{2}{\rho} (p_{02} - p_1) \right)^{1/2} \quad [5.3]$$

El mismo procedimiento, aplicado a una sonda de Prandtl, conduce también a esta expresión para  $v_1$ , pero sin la incertidumbre asociada al valor local de  $p_1$  (que un tubo de Pitot no puede disociar del término cinético). Estos dispositivos se encuentran normalizados, de forma que la perturbación sea mínima y se pueda suponer que  $v_1 \approx v_3$  y que  $p_1 \approx p_3$ , salvo por la pequeña pérdida de presión existente en la vaina del tubo entre las secciones (2) y (3). Evidentemente, la disposición de diversas tomas piezométricas perimetrales y el pequeño diámetro de la sonda garantizan una lectura correcta de la presión estática y que  $z_1 \approx z_3$ .

Cuando se conectan un tubo piezométrico, uno de Pitot y una sonda de Prandtl a un tubo en U, como se muestra en la figura 5.1, la relación teórica entre las variables me-



didadas y las lecturas  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  de los manómetros diferenciales correspondientes, para un líquido manométrico de densidad  $\rho_m$ , y una profundidad de manómetro  $h_0$ , son:<sup>248</sup>

$$\begin{aligned} p_1 &= (\rho_m - \rho)gh_1 - \rho gh_0 \\ p_{02} &= (\rho_m - \rho)gh_2 - \rho gh_0 \\ \rho \frac{v_1^2}{2} &= (\rho_m - \rho)gh_3 \end{aligned} \quad [5.4]$$

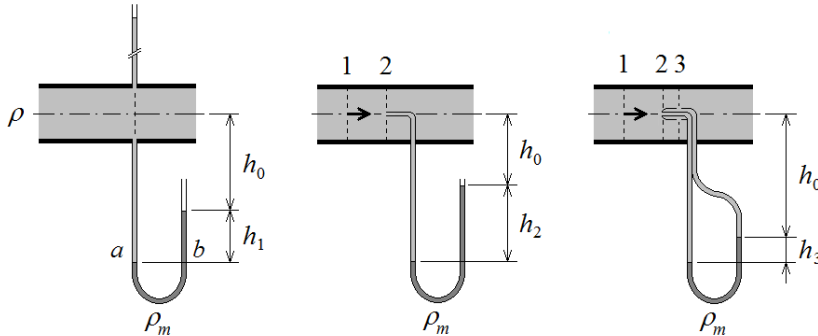


Figura 5.1. Lecturas de presión estática, remanso y dinámica en un tubo piezométrico (izquierda), un tubo de Pitot (centro) y una sonda de Prandtl (derecha). Las dimensiones de los tubos de Pitot y de Prandtl están normalizadas. El radio del tubo del manómetro diferencial ha de ser mayor que la longitud capilar dada por [1.157] de ambos fluidos. Los puntos  $a$  y  $b$  se hallan a idéntica presión estática.

### 5.1.2. Medida diferencial del caudal

La medida del caudal que pasa por una instalación a presión puede acometerse, en la práctica, con un gran número de caudalímetros, cuyo principio de funcionamiento está pensado para el tipo de fluido, la precisión y el rango de medición deseados (entre otros). El caudal en volumen puede medirse, por ejemplo, con caudalímetros de presión diferencial, de área variable, de velocidad por ultrasonidos, electromagnéticos, de desplazamiento y de vórtice, y el caudal másico, con caudalímetros térmicos, de Coriolis, etc.

En este apartado, se explica cómo la aplicación combinada de la ecuación de Bernoulli y del principio de continuidad a un flujo estrangulado permite determinar el caudal circulante. Para ello, se toma como ejemplo el tubo de Venturi de la figura 5.2, aunque el principio de funcionamiento es el mismo para cualquiera de los dispositivos mostrados.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones (1) y (2) del tubo de Venturi de la figura, resulta:

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) \quad [5.5]$$

Las velocidades medias  $v_1$  y  $v_2$  se relacionan entre sí mediante la ecuación de continuidad, pues el diseño del tubo de Venturi garantiza que el flujo en él sea casi unidireccional.<sup>249</sup> Suponiendo que el flujo a la entrada del tubo de Venturi es uniforme, se tiene:

$$v_1 A_1 = v_2 A_c \quad [5.6]$$



donde  $A_C$  es el área contracta de la vena fluida en la sección (2), que es el cuello del Venturi donde el área geométrica,  $A_2$ , es mínima. El *coeficiente de contracción* de estos dispositivos se define como  $C_C = A_C/A_2 < 1$ . Si se denomina  $\beta = (A_2/A_1)^{1/2}$  la relación de los diámetros geométricos del medidor diferencial, entonces la ecuación [5.5] puede escribirse de la forma siguiente:

$$v_2 = \frac{1}{(1 - \beta^4 C_C^2)^{1/2}} \left( \frac{2}{\rho} (p_1 - p_2) \right)^{1/2} \quad [5.7]$$

Para obtener una buena estimación del caudal real, se han de tener en cuenta otros efectos marginales que afectan la velocidad, como la rugosidad de la pared, la viscosidad o la uniformidad de la corriente en (2). Estos efectos se incluyen mediante un *coeficiente de velocidad*,  $C_V$ , de modo que el caudal observado en función de la altura manométrica medida,  $h_m$ , en un tubo en U es:

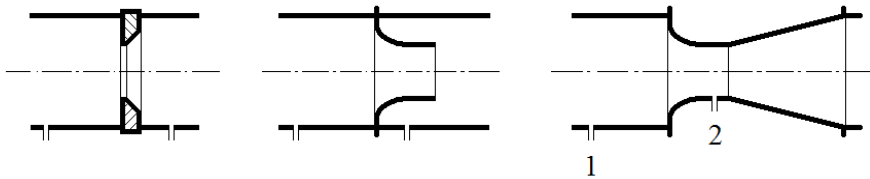
$$Q = \frac{C_V C_C}{(1 - \beta^4 C_C^2)^{1/2}} A_2 \left( 2 \left( \frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right) g h_m \right)^{1/2} \quad [5.8]$$

En general, en esta clase de dispositivos se denomina *coeficiente de caudal* al factor:

$$C_Q = \frac{C_V C_C}{(1 - \beta^4 C_C^2)^{1/2}} \quad [5.9]$$

y el producto  $C_V C_C$ , *coeficiente de derrame*,  $C_D$ . Ambos coeficientes (o sus partes,  $C_C$  y  $C_V$ ) se hallan tabulados en función de la geometría del dispositivo,  $\beta$ , y del número de Reynolds. El coeficiente de derrame adquiere valores del orden de 0,95 en los tubos de Venturi normalizados.

Figura 5.2. Representación esquemática de un diafragma (izquierda), una tobera (centro) y un tubo de Venturi (derecha). Todos estos dispositivos tienen la particularidad de producir una diferencia de presión, entre los puntos donde están ubicadas las tomas piezométricas, que es función del caudal. El sentido del flujo es de izquierda a derecha.



### 5.1.3. Introducción a la descarga de un depósito

Cuando la ecuación de Bernoulli se aplica entre un punto de la superficie libre y otro de la misma línea de corriente, pero situado en el centro de la sección de descarga del depósito de la figura 5.3, se obtiene:

$$\frac{v^2}{2} = gh \quad [5.10]$$

Se admite que la presión en ambos puntos es la misma y que el proceso transcurre sin pérdidas. La velocidad resultante es la conocida *ecuación de Torricelli*:



$$v = (2gh)^{1/2} \quad [5.11]$$

donde  $h$  es la altura del líquido en el depósito con respecto al centro del orificio. Esta ecuación es válida incluso cuando el nivel de la superficie no se mantiene constante, siempre que se pueda admitir que el proceso de descarga es cuasiestacionario. Para ello, es necesario que la aceleración local sea muy inferior a la convectiva, lo que, en términos del número de Strouhal, implica que el tiempo de descarga sea mucho mayor que el tiempo de residencia del fluido en la vecindad del orificio (v. [5.27]).

La experiencia enseña que la velocidad de Torricelli sólo se consigue en algún punto aguas abajo del orificio, donde el área del chorro es inferior a la geométrica,<sup>250</sup>  $A_0$ . Por tanto, si se pretende calcular el caudal de salida por un orificio utilizando la velocidad de Torricelli, es necesario introducir en el cálculo sendos coeficientes de velocidad y contracción, como se ha hecho en [5.8]. Conocido el caudal en función de la altura y en el supuesto cuasiestacionario, el tiempo de vaciado del depósito se obtiene aplicando la ecuación de continuidad, que si el depósito es de sección recta constante,  $A_D$ , es [2.5], o bien [5.22]. Integrando entre los límites ( $t=0, h=H; t=t_v, h=0$ ) y sustituyendo, resulta:

$$t_v = \frac{1}{C_D} \frac{A_D}{A_0} \left( \frac{2H}{g} \right)^{1/2} \quad [5.12]$$

Este es el tiempo que tarda en vaciarse el depósito desde una altura  $H$ , desde  $t=0$ , o su incremento desde otra altura respecto de un tiempo cualquiera del proceso. El orden de magnitud inicial entre los tiempos de vaciado y residencia es:

$$O\left(\frac{t_v}{t_R}\right) \approx \frac{3}{2} \frac{A_D}{A_0} \left( \frac{2H}{g} \right)^{1/2} \left( \frac{2gH}{A_0} \right)^{1/2} = 3 \frac{A_D H}{A_0^{3/2}} \quad [5.13]$$

donde  $A_D H$  es el volumen del depósito a  $t=0$ , y se ha supuesto en primera aproximación que  $C_D \approx 2/3$ . Por tanto, para que se cumpla la condición de cuasiestacionariedad del movimiento es necesario que la sección del orificio sea muy inferior a la sección recta del depósito y que éste sea de grandes dimensiones. La condición de cuasiestacionariedad comporta, también, que se pueda despreciar la velocidad de la superficie libre,  $w$ , con respecto a la de salida,  $v_2$ , como se ha hecho en [5.10], por cuanto, en general, se cumple que  $A_D \gg A_0$  y la altura del fluido en el depósito,  $h$ , es mayor que el diámetro del orificio durante casi toda la descarga. La relación entre ambas velocidades es  $A_0/A_D$ , evidentemente, y es independiente de la altura  $h$ .

#### 5.1.4. Establecimiento de una corriente desde un depósito

La velocidad de salida para la descarga del depósito anterior se alcanza casi de forma instantánea, porque los efectos inerciales quedan restringidos a una región de longitud característica del orden del diámetro del orificio,  $A_0^{1/2}$ . En esta pequeña región, la aceleración convectiva experimenta un cambio sustancial y la partícula de fluido adquiere la mayor parte de su velocidad. Esto no es así, por ejemplo, cuando la descarga tiene lugar a través de un conducto de longitud  $L$ , en cuyo caso se observa que la velocidad media de salida aumenta de forma asintótica hasta alcanzar el valor máximo predicho por la ecuación de Torricelli (en ausencia de pérdidas).



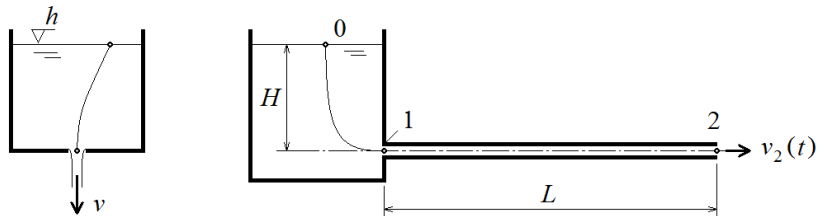
Supóngase el depósito de la figura 5.3, cuya superficie libre se mantiene a un nivel  $H$  y al que se ha conectado un conducto indeformable de sección recta constante,  $A$ . En el extremo del tubo, se halla una válvula, inicialmente cerrada, que se admite que no produce pérdidas de energía cuando está completamente abierta (esta válvula se ha omitido en la figura). Para dar cuenta del efecto inercial que dará lugar al establecimiento del caudal en el conducto a partir de la apertura (instantánea) de la válvula, se parte de la ecuación completa de Euler aplicada a la línea de corriente coincidente con el eje del tubo:<sup>251</sup>

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad [5.14]$$

que, integrada entre un punto de la superficie libre (0) y otro de la sección de salida por la válvula (2), es:

$$\int_0^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \left[ \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right]_0 = 0 \quad [5.15]$$

Figura 5.3. Ecuación de Torricelli y problema de establecimiento de una corriente en un conducto.



Las condiciones de contorno son  $p_0 = p_2$ ;  $z_0 = H$ ,  $z_2 = 0$ , y  $v_0 = 0$ ,  $v_2 = v(t)$ , y las iniciales,  $t = 0$ ,  $v_2 = 0$ . En el interior del conducto, se cumple por continuidad que  $v(x, t) = v(t)$ , pues el fluido es incompresible y el área recta, constante. Esta condición también impone que la derivada local sea constante a lo largo del tubo y que la aceleración convectiva sea nula (salvo en las proximidades de la embocadura del depósito). Como, además, la integral temporal de [5.15] sólo está definida donde la derivada local existe, que es aproximadamente entre los puntos (1) y (2), la ecuación anterior conduce a:

$$L \frac{dv}{dt} = gH - \frac{v^2}{2} \quad [5.16]$$

Esta ecuación integrada es:

$$t = \frac{L}{(2gH)^{1/2}} \ln \left( \frac{(2gH)^{1/2} + v}{(2gH)^{1/2} - v} \right) \quad [5.17]$$

de donde se despeja la velocidad en función del tiempo siguiente:

$$v = (2gH)^{1/2} \left( \frac{e^{\frac{(2gH)^{1/2} t}{L}} - 1}{e^{\frac{(2gH)^{1/2} t}{L}} + 1} \right) = v_\infty \left( \tanh \frac{t}{t_E} \right) \quad [5.18]$$

La tangente hiperbólica es una función monótona creciente para  $t > 0$ , que para  $t = t_E$  es 0,7616 y para  $t = \infty$  es la unidad (es decir, la velocidad media máxima,  $v_\infty$ , es la dada



por la ecuación de Torricelli). El tiempo característico de establecimiento,  $t_E$ , es  $2L/v_\infty$ , y es del orden del tiempo de residencia medio del fluido en el conducto.

El tiempo  $t_E$  es el tiempo necesario para que la corriente adquiriera, aproximadamente, el 75 % del valor máximo marcado por la ecuación [5.11]. Mientras se está, por tanto, en este intervalo temporal, es perfectamente asumible que no se apreciará un descenso significativo del nivel de la superficie libre en el depósito pues, de hecho, la velocidad de descenso de la superficie,  $w$ , se incrementa en este tiempo una magnitud del orden de  $0,75(A/A_D)v_\infty$ .<sup>252</sup> Este tiempo puede compararse con el tiempo de vaciado del depósito [5.12], para saber si el nivel puede suponerse constante durante la puesta en marcha del flujo. Combinando las ecuaciones [5.12] y el orden dado para  $t_E$ , se deduce que esta relación es:

$$O\left(\frac{t_v}{t_E}\right) = \frac{A_D}{A} \frac{H}{L} \quad [5.19]$$

que es la relación entre los volúmenes ocupados por el fluido en el depósito y en el conducto.

La ecuación [5.15] puede escribirse también en función del caudal volumétrico circulante y no de la velocidad. Esto resulta interesante si el conducto no es de área recta constante, pues entonces, aunque la velocidad media cambie en su interior, el caudal y sus variaciones no lo hacen y el término integral se simplifica del mismo modo que se hizo hasta [5.16]. Para fluido incompresible, se obtiene el resultado:

$$\left( \rho \int_0^2 \frac{1}{A(s)} ds \right) \frac{dQ}{dt} + \left[ \rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gz \right]_0^2 = 0 \quad [5.20]$$

Esta ecuación pone de manifiesto el carácter inercial del problema. La integral es una propiedad geométrica del conducto que, junto con la densidad, puede interpretarse como una inercia equivalente. En un tubo de sección constante –y aunque pueda parecer paradójico–, la inercia del fluido contenido es mayor en los tubos de menor área recta,  $A$ , es decir, aumenta al disminuir el volumen de fluido (y su masa) para una longitud dada.<sup>253</sup>

La solución expuesta en este apartado no ha tenido en cuenta la pérdida de energía que se produce en el tubo durante el proceso de establecimiento. Es fácil demostrar que la velocidad última en presencia de pérdidas continuas es:

$$v_\infty = \left( \frac{2gH}{1 + f \frac{L}{D}} \right)^{1/2} \quad [5.21]$$

donde  $f$  es el coeficiente de fricción y  $L/D$ , la ratio de aspecto del tubo. Esta ecuación no tiene en cuenta las pérdidas singulares en la embocadura y en la salida, salvo que se incluyan en la longitud equivalente del conducto, y supone que  $f$  es constante durante la descarga, lo que no es cierto si el flujo en el conducto es laminar o de transición.

Obsérvese que, como era de esperar, las pérdidas hacen disminuir la velocidad máxima y aumentar el tiempo característico de la descarga. En cualquier caso, y aun utilizando



el valor dado por [5.21], la curva asintótica [5.18] sólo representa la evolución media de la velocidad durante la puesta en marcha, pues no considera ni la compresibilidad del líquido ni la del material del conducto. La experiencia enseña que, en este tipo de procesos, la velocidad aumenta rápidamente al principio (incluso con  $v_{\text{máx}} > v_{\infty}$ ), y después decae y oscila hasta alcanzar el régimen estacionario, en que  $v_{\infty} \approx (2gH)^{1/2}$ .

## 5.2. Procesos de descarga

A continuación, se analiza con más rigor el movimiento que resulta de la descarga del líquido contenido en un depósito a través de un conducto de sección constante,  $A$ , y del gas contenido en un calderín a presión.

### 5.2.1. Descarga de un líquido desde un depósito

En el apartado anterior, se ha visto que los cambios de nivel en el depósito pueden ser significativos a partir del tiempo  $t_E$ . La evolución de  $h$  con el tiempo resulta de aplicar el principio de conservación de la masa para un volumen de control coincidente con el que ocupa el líquido que se encuentra en el depósito. Esta ecuación se escribe:

$$A_D \frac{dh}{dt} = -A_D w = -Av \tag{5.22}$$

donde la sección recta del depósito,  $A_D$ , puede ser, a su vez, función de  $h$ , aunque aquí se supone que es constante. Esta ecuación y [5.18], más la condición inicial  $h = H$  en  $t = 0$ , permiten completar la solución del sistema cuando se omiten los términos viscosos.

El problema no es tan sencillo cuando se pretenden incluir los efectos viscosos que intervienen durante la descarga. No obstante, a continuación se verá cómo es posible simplificar la descripción del movimiento cuando se tienen en cuenta las diferentes escalas del mismo. En adelante, se supondrá que la altura  $H$  es del orden de  $A_D^{1/2}$  y mucho mayor que  $A^{1/2}$ , y que todas las longitudes características son mucho mayores que el radio capilar. Según la ecuación [5.22], si la relación  $A/A_D$  es pequeña, pero no nula, el depósito se descargará con el tiempo, y tanto más lentamente cuanto más pequeña sea dicha relación. La velocidad de descenso,  $w$ , es del orden de  $(A/A_D)v$ , y el tiempo característico de la descarga es  $t_D = H/w$ , que es el tiempo que invierte una partícula fluida en recorrer el depósito hasta su salida. Además, se puede afirmar que, cuando la relación  $A/A_D$  es muy pequeña, el fluido apenas percibe la existencia del orificio hasta que no está a una distancia  $A^{1/2}$  de él, y que la distribución de presiones en el depósito es, aproximadamente, la hidrostática.

Esta última afirmación resulta de la estimación del orden de magnitud de los diferentes términos de la ecuación del movimiento en el depósito. En forma adimensional, esta ecuación es:

$$\frac{\rho w}{t_D} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho w^2}{A_D^{1/2}} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{\Delta p}{A_D^{1/2}} \nabla^* p^* + \frac{\mu w}{A_D} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \tag{5.23}$$





Como el tiempo de descarga es del orden de  $A_D^{1/2}/w$ , resulta que las aceleraciones local y convectiva son semejantes. Como siempre, la relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas viene dada por el número de Reynolds en el depósito:

$$\text{Re} = \frac{\rho w A_D^{1/2}}{\mu} \approx \frac{\rho v A^{1/2}}{\mu} \left( \frac{A}{A_D} \right)^{1/2} \quad [5.24]$$

Este número de Reynolds es inferior al presente en el conducto en un factor  $(A/A_D)^{1/2}$ . Si resulta mayor que la unidad, el movimiento en el depósito sigue las ecuaciones de Euler y la variación espacial de la presión es del orden de  $\rho w^2 \approx \rho v^2 (A/A_D)^2$ . En cambio, si fuese inferior a la unidad, entonces podrían despreciarse las fuerzas de inercia y el orden de la variación espacial de la presión resultaría ser  $\mu w/A_D^{1/2} \approx \mu v A/A_D^{3/2}$ . En ambos casos, el término correspondiente es muy inferior a  $\rho gh$ , lo que justifica la hipótesis hidrostática para el cálculo de la presión en el depósito cuando  $A/A_D$  es pequeña.

Para analizar el proceso completo de la descarga, se va a presentar en este apartado el movimiento en un conducto circular, de radio  $R$ , y horizontal. El movimiento se inicia porque existe una presión motriz en el depósito, de valor  $\{p_0 + \rho g H\}$ , mayor que  $p_2$ . Como se supone que el conducto es horizontal y que  $p_0 = p_2$ , el término  $\rho gh$  es también la diferencia de presión motriz entre un punto de la superficie del depósito y la salida del conducto.

Se distinguen, en general, tres zonas del flujo: una región de entrada, de dimensión característica  $R \approx A^{1/2}$ , donde las tres componentes de la velocidad son del mismo orden,  $v$ , pues el fluido entra en el conducto proveniente de todas direcciones; otra región a la salida del conducto, que se puede pensar inicialmente que es de características similares, y, por último, la región principal del conducto de longitud  $L$ , donde es de esperar que el movimiento sea unidireccional, al ser  $L \gg R$ . Entre la región de entrada y la principal, el flujo se adapta al movimiento unidireccional a medida que se desarrolla la capa límite sobre el contorno interno del conducto, pero en ocasiones lo hace después de haberse desprendido de la pared.

Una partícula de fluido situada en la región de entrada, en el caso límite en que la relación  $A/A_D$  es muy pequeña, percibe la superficie libre y las paredes del depósito en el infinito, y también que el conducto es infinitamente largo. La ecuación de la cantidad de movimiento en esta región es:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad [5.25]$$

donde  $p$  es la presión reducida, que coincide con la presión motriz,  $\rho gh$ , cuando  $p_0 = p_2 = 0$ . De forma adimensional, esta ecuación se escribe:

$$\frac{\rho v}{t_D} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho v^2}{R} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{\Delta p}{R} \nabla^* p^* + \frac{\mu v}{R^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad [5.26]$$

Si comparamos el término de aceleración local con el de aceleración convectiva, se obtiene una interpretación física del fenómeno en esta región de suma importancia. El resultado de la operación es el número de Strouhal:



$$St = \frac{v/t_p}{v^2/R} \approx \frac{w}{v} \frac{R}{H} \approx \left( \frac{A}{A_p} \right)^{3/2} \quad [5.27]$$

que resulta muy pequeño respecto a la unidad. Esto es: una partícula fluida atraviesa esta zona en un tiempo muy pequeño frente al tiempo que tarda en recorrer el depósito durante la descarga. Así pues, en esta región, está justificado despreciar el término de aceleración local frente al término convectivo y el proceso puede ser considerado cuasiestacionario durante la descarga prolongada, toda vez que la corriente ya ha sido establecida.

Sin el término local, las ecuaciones del movimiento se reducen a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \end{aligned} \quad [5.28]$$

donde ahora  $p$  es la caída de presión motriz desde su valor en el depósito.<sup>254</sup> Las condiciones de contorno que se deben emplear para resolver las ecuaciones [5.28] son:  $v=p=0$ , en cualquier punto alejado del orificio hacia el interior del depósito, y  $v=0$ , en la pared. La solución de estas ecuaciones depende de la forma geométrica en esta zona, aunque se puede aventurar que presentará simetría axial.

La forma adimensional de la ecuación de la cantidad de movimiento de [5.28] es:

$$\mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad [5.29]$$

donde se ha escogido  $R$  como longitud característica, y se miden las variaciones de la presión en una escala  $\rho v^2$ . Con esta elección, el número de Reynolds es  $\rho v R / \mu$  y los términos adimensionales convectivo ( $\mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^*$ ) y viscoso ( $\nabla^{*2} \mathbf{v}^*$ ) son del mismo orden.

Para  $Re$  pequeños frente a la unidad, los términos viscosos se equilibran con las fuerzas de presión y las variaciones de  $p^*$  serán del orden de  $1/Re$ . Esto quiere decir que la variación de la presión en la región de entrada es:

$$O(\Delta p) = \rho v^2 \frac{\mu}{\rho v R} = \frac{\mu v}{R} \quad [5.30]$$

La ecuación [5.29] es lineal en ausencia del término convectivo, por lo que se puede anticipar que la estructura del flujo en la región de salida es del mismo tipo que en la región de entrada y que la pérdida será del mismo orden. Además, como la definición de  $Re$  coincide con la que se hace en el conducto, se puede asegurar que el flujo en éste será el dado por la ecuación de Poiseuille [3.106] y que será laminar. En estas condiciones, la magnitud de la velocidad media en el conducto,  $v$ , viene dada por la ecuación [3.108], que es:

$$O(v) = \frac{\rho g}{8\mu} \frac{R^2}{L} h \quad [5.31]$$

y no por la ecuación de Torricelli (o la [5.21] en presencia de pérdidas). La pérdida de presión [5.30] que se produce, tanto a la entrada como a la salida del conducto, en este caso, se debe añadir a la dada por [3.111] para el flujo de Poiseuille, aunque, como se



verá a continuación, en general, es despreciable si se dan las condiciones [3.88] y [3.89], que garantizan el movimiento unidireccional y viscoso en el conducto.

Si el número de Reynolds es mayor que la unidad, los efectos viscosos representados por el último término de la ecuación [5.29] son despreciables en la mayor parte de la región de entrada. El sistema de ecuaciones se reduce, entonces, al siguiente:

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* &= 0 \\ \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* &= -\nabla^* p^*\end{aligned}\quad [5.32]$$

que son las ecuaciones de Euler de forma adimensional. Al desaparecer los términos viscosos, no se puede exigir la condición de no deslizamiento en el contorno, pues sólo se puede imponer que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ . El movimiento desarrollado aguas abajo no tiene por qué venir dado por el flujo tubular de Poiseuille,<sup>255</sup> como ocurría cuando predominaban los efectos viscosos, pero en cambio sí se puede seguir admitiendo que el movimiento en el conducto de sección constante será unidireccional. El flujo de entrada con  $Re$  grandes alcanza la velocidad uniforme  $v$  a una distancia del orden del radio del conducto, si la toma está redondeada, y la ecuación [5.32] muestra que lo hace a costa de una caída de presión del orden  $\rho v^2$ . Esta velocidad uniforme se manifiesta en toda la sección, salvo en la capa límite, cuyo espesor crece y da lugar a la transición del flujo uniforme al flujo desarrollado en el conducto a partir de la longitud de entrada.

El movimiento no viscoso a la entrada cuando  $Re \gg 1$  es irrotacional, pues el fluido proviene de un estado en calma y es imposible la difusión de la vorticidad. No obstante, esta solución no es uniformemente válida, pues los efectos viscosos juegan un papel importante junto a la pared. El orden de magnitud del espesor de la capa límite se obtiene de exigir que el término viscoso y el convectivo de [5.29] tengan el mismo orden en ella. Esto implica que ( $v$ , también [4.112]):

$$O(\delta) = \left( \frac{\mu R}{\rho v} \right)^{1/2} = \frac{R}{Re^{1/2}} \quad [5.33]$$

Como  $t_R = R/v$  es el tiempo de residencia del fluido en la región de entrada, el espesor de la capa límite es la distancia de penetración de los efectos viscosos durante dicho tiempo, y es pequeña cuando  $Re$  es mucho mayor que la unidad.

En la solución potencial del movimiento, la velocidad del fluido fuera de la capa límite crece desde los valores pequeños existentes en el depósito hasta el valor  $v$  que se encuentra en el conducto. Si la entrada al conducto no está suficientemente redondeada (entrada abocinada), de manera que la curvatura del contorno sea pequeña aun comparada con  $R$ , entonces las partículas fluidas experimentan incrementos en su cantidad de movimiento debido a la presencia de aceleraciones centrípetas fuertes. Estos cambios de la velocidad consumen energía de presión y hacen que ésta sea mínima en la zona de mayor curvatura. Tras esta zona sobreviene otra de gradiente de presiones adverso en la que la presión se recupera y la velocidad disminuye hasta el valor  $v$  que existe en el conducto.

Una partícula que se desplace en esta región dentro de la capa límite lo hará ayudada por las fuerzas de presión en el primer caso, pero será arrastrada por las fuerzas viscosas cuando el gradiente de presiones no sea favorable. Si el gradiente adverso es muy fuerte, como ocurre cuando la curvatura de la superficie es demasiado pronunciada o se



presenta un ángulo vivo, las fuerzas viscosas pueden no ser suficientes y aparecer flujo inverso. Esta circunstancia conduce, inevitablemente, a la separación de la capa límite y a la producción intermitente de una secuencia de formación y desprendimiento de vórtices. Este fenómeno de desprendimiento también es inevitable en la zona de salida cuando el número de Reynolds es muy elevado, pues los esfuerzos viscosos no son capaces de hacer doblar la esquina a la corriente. En este caso, la superficie de discontinuidad que se genera con el aire exterior tiene forma de chorro, y en ella el esfuerzo viscoso es nulo (o casi) y la presión es constante e igual a la de salida (si se desprecia el efecto de la cota en su extensión vertical).

Boussinesq fue el primero en realizar investigaciones teóricas en la región de entrada utilizando el concepto de crecimiento de capa límite: se sabe que, cuando las capas límite entran en contacto siendo laminares, el flujo consiguiente también lo es, y viceversa si son turbulentas. Cuando  $Re \ll 1$ , la distancia aproximada,  $L_e$ , que una partícula ha de recorrer en el interior del conducto para que los efectos viscosos den lugar a la transición del flujo uniforme al de Poiseuille por crecimiento de la capa límite laminar es pequeña y del orden del propio radio del conducto. Si, en cambio,  $Re \gg 1$ , el fluido se ha de desplazar una distancia mayor para que los efectos viscosos den lugar al flujo de Poiseuille (si es el caso y el flujo en el conducto es laminar, con  $Re < 2.300$ ). Esta distancia resulta ser:

$$O(L_e) = 0,06R Re \tag{5.34}$$

que ha sido validada por los resultados experimentales.

La longitud de entrada en régimen turbulento (en el conducto) puede tomarse de la expresión [2.114] en una primera aproximación. No obstante, se han sugerido algunas expresiones empíricas en función del coeficiente de fricción del flujo completamente desarrollado, para el cual el núcleo no viscoso del flujo ha desaparecido por completo, que ajustan mejor dicha longitud. A falta de otros datos, para el flujo turbulento puede utilizarse la expresión:

$$O(L_e) = \frac{8R}{f^{1/2}} \tag{5.35}$$

Ambas expresiones muestran que la longitud de entrada aumenta con el diámetro del conducto y que su valor oscila entre algunas decenas o centenas de  $R$ . Para un flujo laminar de número de Reynolds máximo 2.300, [5.34] indica que  $L_e/R \approx 140$ , mientras que para  $Re = 5 \cdot 10^5$  y tubería lisa, con  $f = 0,0133$  (v. figura 5.13 o la ecuación de Blasius de la tabla 5.1),  $L_e/R \approx 70$  de [5.35].

Pasada la zona de adaptación a la entrada, el fluido llega al conducto, en el que el flujo se supone unidireccional. Evidentemente, el término  $\Delta p_L(t)$  de [3.97] experimenta variaciones de su mismo orden en el conducto, y pasa de ser  $\rho gH/L$  en el instante inicial a nulo al final de la descarga. Esto quiere decir que al menos uno de los otros dos términos debe ser también significativo: el movimiento puede considerarse cuasiestacionario si predomina el término viscoso, y es:

$$O\left(\frac{\rho v}{t_D}\right) \ll O\left(\frac{\mu v}{R^2}\right) \tag{5.36}$$

Esta condición se cumple si  $t_D \approx H/w$  es muy superior a  $\rho R^2/\mu$ . Es fácil ver que este resultado también conduce al siguiente:<sup>256</sup>



$$O\left(\frac{\rho v R}{\mu}\right) \ll \frac{H}{R} \frac{A_D}{A} \approx \left(\frac{A_D}{A}\right)^{3/2} \quad [5.37]$$

En consecuencia, si  $t_D$  es muy pequeño o  $Re$  es muy grande, las fuerzas de viscosidad sólo influyen en la delgada capa en torno a las paredes internas y, en la región exterior, donde el fluido se comportará como ideal, podrán usarse las ecuaciones de Euler y Bernoulli.

Para eliminar todo rastro de los efectos viscosos en el conducto, a excepción de la capa límite viscosa y la región de entrada, debe darse, además, la condición opuesta a [3.89], que es:

$$O\left(Re \frac{D}{L}\right) \gg 1 \quad [5.38]$$

Si ahora se multiplica la ecuación [5.37] por  $R/L$ , y se tiene en cuenta [5.38], resulta:<sup>257</sup>

$$O\left(\frac{\rho v R R}{\mu L}\right) \gg \frac{H}{L} \frac{A_D}{A} \gg 1 \quad [5.39]$$

Estas son las condiciones para que se pueda suponer que el flujo unidireccional es ideal en la mayor parte del conducto. Es decir, el movimiento podrá suponerse ideal cuando el volumen de fluido contenido en el depósito sea mucho mayor que el contenido en el conducto. Con esta condición, se aplica la ecuación de Euler [5.14] y es válido el resultado del apartado 5.1.4 en términos del tiempo de establecimiento (se tendrían que añadir las pérdidas por fricción en la pared, las cuales no desaparecen en este supuesto). La condición [5.39] coincide con [5.19] e implica que el tiempo de establecimiento es muy inferior al de descarga, por lo que el fluido se pone en movimiento y alcanza la velocidad máxima muy rápidamente. No obstante, esta hipótesis se anula si el tiempo de descarga es muy grande, pues entonces se aplica [5.36] y el movimiento sería viscoso y cuasiestacionario.

El efecto de las singularidades y de los cambios de sección en el conducto puede ser despreciable frente a la pérdida total si se presentan las condiciones adecuadas. El sentido común sugiere que estas condiciones se han de dar predominantemente en conductos largos, y la experiencia muestra que esta hipótesis es razonablemente válida si se cumple que  $L/D > 10^3$ .

Para estimar la pérdida producida por una singularidad o ensanchamiento de diámetro  $D$  a su salida, se han de estimar primero los órdenes de magnitud de los diferentes términos de la ecuación de la cantidad de movimiento. Si el efecto de la singularidad se extiende aguas abajo una distancia del orden de su diámetro,<sup>258</sup> entonces esta ecuación en forma adimensional es:

$$\frac{\rho v^2}{D} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{\Delta p}{D} \nabla^* p^* + \frac{\mu v}{D^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad [5.40]$$

Como ya se ha hecho otras veces, se deduce que, si  $Re = \rho v D / \mu \gg 1$ , la pérdida de presión asociada a la singularidad es del orden de  $\rho v^2$  y, en el caso opuesto,  $\mu v / D$ . La pérdida singular correspondiente se calcula multiplicando el orden anterior por un coeficiente experimental que depende de la geometría concreta de la singularidad (y de si



el número de Reynolds es pequeño o cercano a la unidad) y que toma valores inferiores o próximos a la unidad en la mayoría de casos.<sup>259</sup>

Si el movimiento en el conducto es turbulento, la relación entre cualquier pérdida local y la dada, por ejemplo, por [5.140], es:

$$O\left(\frac{\Delta p_s}{\Delta p_c}\right)_T = \frac{2\rho v^2}{f \frac{L}{D} \rho v^2} = \frac{2D}{fL} \quad [5.41]$$

que será despreciable si  $10^2 D/L \ll 1$ , para un valor usual  $f=0,02$ . Comparando ahora las pérdidas para el caso laminar, en que es válida la expresión [3.108], se deduce, cuando  $Re \ll 1$ , que:

$$O\left(\frac{\Delta p_s}{\Delta p_c}\right)_L = \frac{D}{L} \quad [5.42]$$

y, si  $Re \gg 1$ :

$$O\left(\frac{\Delta p_s}{\Delta p_c}\right)_L = \frac{\rho v D}{\mu} \frac{D}{L} \quad [5.43]$$

Por tanto, si se dan las condiciones para que el movimiento viscoso sea unidireccional, [3.88] y [3.89], se puede despreciar el efecto de la singularidad.

### 5.2.2. Descarga del gas contenido a presión en un calderín

Supóngase un depósito de volumen  $V$  que contiene un gas de propiedades constantes, a la presión  $p_0$  y a la temperatura ambiente  $T_0$ , en equilibrio con su entorno. A partir de un instante inicial, se produce su descarga a la atmósfera, donde reina una presión  $p_a$ , a través de un orificio de área mínima  $A$  (con un coeficiente de contracción unidad). Para el análisis de este movimiento, se divide el campo fluido en tres regiones:

1. El interior del depósito, exceptuando una región en torno al orificio de salida. En esta primera región, de longitud característica  $V^{1/3}$ , el tiempo característico es el de descarga del depósito,  $t_c$ , y la velocidad característica es  $V^{1/3}/t_c$ .
2. El interior del depósito, pero en torno al orificio. Aquí la velocidad del fluido alcanza un valor elevado, del orden de la velocidad de salida en la tobera,  $v$ . La longitud característica es  $A^{1/2}$  y el tiempo de residencia en esta zona,  $A^{1/2}/v$ , es muy inferior a  $t_c$ , siempre que  $A$  sea lo suficientemente pequeña.
3. El exterior del depósito a partir de la sección  $A$ . A menos que a la salida se alcancen las condiciones críticas, la descarga es en forma de chorro y la presión a la salida coincide con  $p_a$ .

Las variaciones espaciales de la presión en la primera región pueden ser del orden:

$$\Delta p \approx \rho \left(\frac{V^{1/3}}{t_c}\right)^2 \quad [5.44]$$

o bien:



$$\Delta p \approx \frac{\mu}{t_c} \quad [5.45]$$

según el número de Reynolds, definido como:

$$\text{Re} = \frac{\rho V^{2/3}}{\mu t_c} \quad [5.46]$$

sea mucho mayor o menor que la unidad, respectivamente. En cualquier caso, estas variaciones espaciales de la presión son despreciables frente a las variaciones espaciales y temporales de la presión de la segunda zona, ambas del orden de  $p - p_a$ .

La ecuación de la entropía para la masa (variable) de gas contenida en el depósito se escribe, en este caso:

$$T \frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = \rho V T \frac{ds}{dt} = \dot{Q} \quad [5.47]$$

ya que no hay calor añadido por reacción química y se asume despreciable el que se irradia a través de la tobera. Evidentemente, también se desprecia la disipación viscosa o cualquier otra generación irreversible,  $\sigma$ , en el interior del depósito.<sup>260</sup>

El calor que se intercambia con las paredes del depósito puede estimarse a través de cualquiera de las expresiones siguientes:

$$\dot{Q} = k \int_{A_p} \left[ \frac{dT}{dx} \right]_p dS = h_m A_p (T_0 - \bar{T}) \quad [5.48]$$

donde  $h_m$  es el coeficiente de intercambio de calor medio con la pared y  $A_p$ , su superficie interna efectiva, de valor aproximado  $V^{2/3}$ , y que se admite que se encuentra a la temperatura  $T_0$ . En la primera ecuación,  $[dT/dx]_p$  representa el gradiente térmico en la pared. En este momento, resulta útil introducir la constante de tiempo térmica,  $t_T$ , definida como:

$$t_T = \frac{\rho V c_v}{h_m A_p} \quad [5.49]$$

de forma que el calor se evalúe con la expresión:

$$\dot{Q} = \rho V c_v \frac{T_0 - \bar{T}}{t_T} = \rho V \dot{q} \quad [5.50]$$

Es evidente que  $t_T$  no se mantiene constante durante la descarga, aunque su valor medio puede compararse con  $t_c$  para discernir si el proceso puede ser considerado adiabático en una primera aproximación (se adelanta que, si  $t_T$  es mucho mayor que  $t_c$ , el proceso será prácticamente adiabático). Más adelante, se presentan sendos procedimientos que permiten estimar ambos tiempos.

El orden de magnitud de los términos de la ecuación de la entropía es el que se indica a continuación en forma adimensional:

$$\rho T_0 \frac{\Delta s}{t_c} \frac{ds^*}{dt^*} = k \frac{\Delta T}{V^{2/3}} \frac{d^2 T^*}{dx^{*2}} \quad [5.51]$$



de donde se deduce que el cambio de entropía de una partícula durante el proceso de descarga es:

$$\frac{\Delta s}{c_v} \approx \frac{kt_c}{\rho c_v V^{2/3}} \frac{\Delta T}{T_0} \approx \left( \frac{\delta_T}{V^{1/3}} \right)^2 \frac{\Delta T}{T_0} \quad [5.52]$$

Puesto que  $\Delta s/c_v$  y  $\Delta T/T_0$  son del orden de la unidad como máximo, siempre que la longitud de penetración de los efectos térmicos,  $\delta_T$ , sea pequeña respecto de  $V^{1/3}$ , se puede considerar que el proceso de expansión del gas es isentrópico, salvo en la capa límite térmica,  $\delta_T$ , donde la temperatura continuará siendo  $T_0$ . En caso contrario, cuando  $\delta_T$  sea del orden  $V^{1/3}$ , el proceso será isotérmico y todo el gas estará a  $T_0$ .

Los tiempos característicos se pueden relacionar con la longitud  $\delta_T$  teniendo en cuenta [5.49], [5.52] y que el coeficiente  $h_m$  está relacionado con el número de Nusselt de la forma  $Nu = h_m V^{1/3}/k$ . El resultado de la operación es:

$$O\left(\frac{\delta_T}{V^{1/3}}\right) = \left(\frac{1}{Nu} \frac{t_c}{t_T}\right)^{1/2} \quad [5.53]$$

Como el número de Nusselt en convección libre es del orden de  $V^{1/3}/\delta_T$ , esta ecuación sugiere:

$$O\left(\frac{\delta_T}{V^{1/3}}\right) = \frac{t_c}{t_T} \quad [5.54]$$

y, por tanto, cuando se cumpla que  $t_T$  sea mucho mayor que  $t_c$ , el proceso se podrá considerar adiabático.<sup>261</sup> En general, pues, las descargas más lentas son prácticamente isoterms.

Cuando la relación entre las longitudes características del orificio y del depósito contenedor es pequeña y, en consecuencia, el gas en el cilindro se encuentra en estado de reposo excepto en la región próxima al orificio de salida, se puede aceptar que el proceso transcurre siguiendo una sucesión de estados en equilibrio cuasiestático para los que es válida la hipótesis de equilibrio termodinámico local. Si la descarga es cuasiestática, se puede admitir que la presión media varía de forma continua, sin variaciones espaciales de consideración (tal como se ha indicado con [5.44] y [5.45]), incluso en el interior de la capa límite térmica. Pero, si bien la presión es casi uniforme en el interior, con la temperatura no ocurre lo mismo, pues las diferencias locales de densidad ocasionadas por la aparición del flujo y el efecto de la transferencia de calor en la pared provocan campos de temperatura variable.<sup>262</sup>

En la literatura, se encuentran diferentes procedimientos para el cálculo de  $t_T$  en recintos cerrados. Uno de estos procedimientos es el que sugiere Otis para acumuladores hidroneumáticos, según el cual el número de Nusselt se ajusta a la expresión:<sup>263</sup>

$$Nu = \frac{h_m L}{k} = 1,6151 Ra^{0,344} F^{1,760} (T^*)^{-2,528} \quad [5.55]$$

donde F es un factor geométrico, de valor:

$$F = \frac{V}{A_p D} = \frac{L/D}{2 + 4L/D} \quad [5.56]$$





en depósitos cilíndricos, y  $T^*$  es la temperatura adimensional, definida como la relación entre la temperatura de la pared (en este caso,  $T_p = T_0$ ) y la temperatura media del fluido, ambas en kelvin. Utilizando [5.49] y operando, se llega a:

$$t_r = \frac{\rho VL}{1,6151A_p} \left( \frac{c_v}{k} \right)^{0,656} \left( \frac{\mu}{g\beta} \right)^{0,344} F^{-1,760} (T^*)^{2,528} [\rho^2 L^3 (\bar{T} - T_p)]^{-0,344} \quad [5.57]$$

y, para el aire:

$$t_r \approx 36,57DF^{-0,760} \rho^{0,312} (T^*)^{2,528} (\bar{T} - T_p)^{-0,344} \quad [5.58]$$

Para el cálculo del tiempo  $t_c$ , es necesario calcular primero el caudal en masa,  $G$ , que escapa del depósito en función de la presión interna. La experiencia enseña que la descarga del aire a presión hasta la presión atmosférica tiene lugar mediante una relajación casi exponencial en la que el caudal de escape no se mantiene constante. Si las variaciones espaciales de la densidad pueden suponerse despreciables (como ocurre en muchos casos prácticos, salvo en la región cercana al orificio, cuya masa no es relevante), entonces el principio de conservación de la masa gobierna la variación de la densidad media en el interior del depósito, y toma la forma:

$$V \frac{d\rho}{dt} + G = 0 \quad [5.59]$$

siendo:

$$G = \rho v A = jA \quad [5.60]$$

definido positivo cuando es saliente. Si el gas es ideal, entonces:

$$G = -\frac{dm}{dt} = -\frac{V}{R} \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{T} \right) \quad [5.61]$$

Se puede admitir que la descarga inicial es isentrópica, al menos mientras  $t < t_r$ . Cuando el escape tiene lugar en condiciones subsónicas, es decir, mientras la relación de presiones  $r = p_a/p$  sea superior a la crítica,  $b$ , el flujo másico se puede calcular mediante la expresión de Saint-Venant:

$$G = A \left( 2 \frac{\gamma}{R(\gamma-1)} \left[ r^{\frac{2}{\gamma}} - r^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] \right)^{1/2} \frac{P}{T^{1/2}} \quad [5.62]$$

Se tienen condiciones sónicas en el orificio en el instante inicial si se cumple que la relación de presiones,  $r_0 = p_a/p_0$ , es inferior a la crítica,  $b$ . En este caso, el flujo de masa estará bloqueado, y el gasto se calculará haciendo:

$$G_s = A \left( \frac{\gamma}{R} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right)^{1/2} \frac{P}{T^{1/2}} \quad [5.63]$$

que es el máximo que alcanza la expresión [5.62] cuando la relación de presiones,  $r$ , toma el valor crítico teórico:

$$b = \left( \frac{p_a}{p} \right)_s = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad [5.64]$$



y la que debe utilizarse cuando  $r < b$ . Esta expresión muestra que el valor de la relación crítica depende de  $\gamma$ , aunque esta dependencia es débil: para  $\gamma = 1,4$  es  $b = 0,53$  y para  $\gamma = 1,3$  resulta ser  $b = 0,55$ .

Para zanjar el problema y tener en cuenta el efecto de la transferencia de calor en el depósito, es necesario aplicar la ecuación de la energía [2.29] al volumen de control fijo. Admitiendo que el centro de masas del sistema no cambia de posición significativamente y que, por tanto, los cambios de la energía interna sólo lo son de energía intrínseca,  $u$ , se cumple:

$$\dot{Q} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV + \left( u + \frac{p}{\rho} \right) G \quad [5.65]$$

Esta ecuación, en este caso, es:

$$\dot{Q} = \left( u \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{du}{dt} \right) V + \left( u + \frac{p}{\rho} \right) G \quad [5.66]$$

En la práctica, es más conveniente utilizar un algoritmo basado en la temperatura que en la energía interna. Con [1.114], es posible escribir esta ecuación de la forma:

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = \frac{1}{mc_v} \left( \dot{Q} - T \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_\rho \frac{G}{\rho} \right) \quad [5.67]$$

que, con [5.50], es:

$$\dot{T} = \frac{T_p - T}{t_T} - \frac{T}{mc_v} \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_\rho \frac{G}{\rho} \quad [5.68]$$

o bien, para el gas ideal:

$$\dot{T} = \frac{T_p - T}{t_T} - \frac{RT}{mc_v} G \quad [5.69]$$

Evidentemente, la masa contenida en el interior del depósito en un instante  $t$  se calcula haciendo:

$$m = - \int_0^t G dt \quad [5.70]$$

de modo que la densidad media, siendo el depósito de volumen constante, es  $\rho = m/V$ , y la masa inicial viene dada por las condiciones iniciales y la ecuación de estado.

Si el volumen fuera variable, como podría suceder, por ejemplo, si se analizara el proceso de descarga de una de las cámaras de un actuador neumático en movimiento, entonces la ecuación [5.65] debería incluir el trabajo frontera asociado al desplazamiento del émbolo. En este caso, no puede asumirse que la transferencia de calor por convección libre sea la predominante, pues aparecería algún tipo de convección forzada, pero el tratamiento simplificado en términos del tiempo térmico continuaría siendo válido. La ecuación [5.68] ampliada a este caso sería:<sup>264</sup>

$$\dot{T} = \frac{T_p - T}{t_T} - \frac{T}{mc_v} \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_\rho \left( \frac{dV}{dt} + \frac{G}{\rho} \right) \quad [5.71]$$

y, para el gas ideal:



$$\dot{T} = \frac{T_p - T}{t_T} - \frac{p}{mc_v} \left( \frac{dV}{dt} + \frac{G}{\rho} \right) \quad [5.72]$$

La resolución combinada de las ecuaciones anteriores es compleja y hace conveniente acudir a la simulación por ordenador. De todas formas, este procedimiento no permite una estimación rápida del tiempo  $t_c$ , que era nuestro objetivo inicial. Un camino alternativo consiste en utilizar la expresión ofrecida por la norma ISO 6358 para el cálculo del caudal a través de la tobera.<sup>265</sup> El método propuesto por esta norma es, de hecho, una simplificación de la expresión teórica [5.62] que adapta la característica real mediante el uso de dos coeficientes experimentales: la *conductancia sónica*,  $C$ , y la relación crítica de presiones,  $b$  (que es inferior a la teórica [5.64]). La conductancia sónica o conductividad se define como la relación entre el caudal medido en condiciones normales de ensayo y la presión de entrada. Esto es:

$$C = \frac{Q_N}{p} \quad [5.73]$$

Por definición, la conductancia es proporcional al área efectiva,  $A$ , del elemento:

$$C = \frac{K}{\rho_N \sqrt{T_N}} A \quad [5.74]$$

donde  $K$  es una constante característica del gas, función de  $R$  y  $\gamma$ . Es importante indicar que la definición de  $C$  en la ISO 6358 se basa en condiciones de ensayo en régimen permanente, en que la presión de entrada se mantiene constante y, en consecuencia, la tobera percibe un sistema de capacidad infinita.

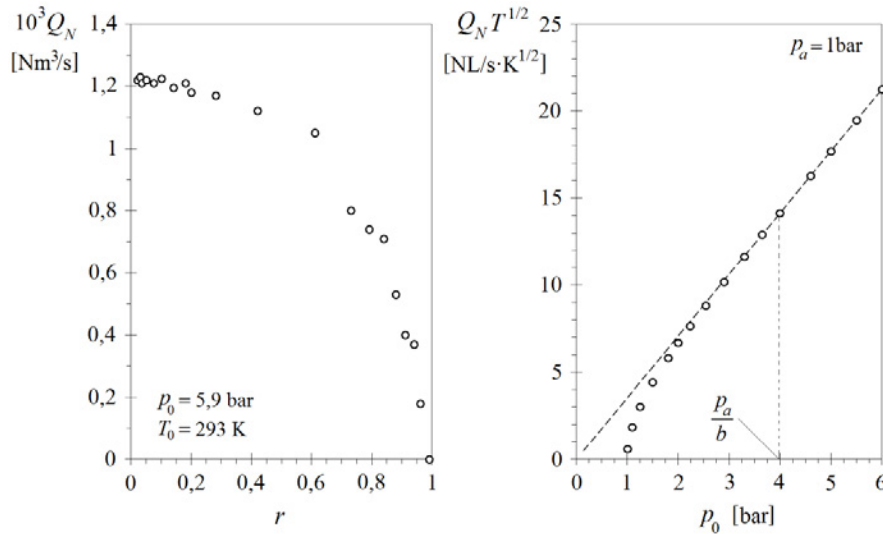


Figura 5.4. Curva típica  $Q_N$  vs.  $r$  de una válvula neumática, obtenida siguiendo el procedimiento descrito en la ISO 6358 (izquierda), y característica lineal del flujo sónico (derecha).  $C = 2,068 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}/\text{Pa}$  y  $b = 0,254$ .

La conductancia medida en los ensayos ha de corregirse por el factor  $(T^{1/2})$  cuando la temperatura experimental es diferente de la normal (v. [5.63]) y, entonces:



$$C = \frac{Q_N}{p} \sqrt{\frac{T}{T_N}} = \frac{1}{K_T} \frac{Q_N}{p} \quad [5.75]$$

donde  $K_T$  es la ratio correctora de la temperatura de remanso y es usualmente muy próxima a la unidad (recuérdese que las temperaturas están en kelvin y que  $T_N = 293 \text{ K}$ ).

En general, el método ISO presenta la formulación siguiente: el flujo de masa es

$$G = \rho_N Q_N = C \rho_N K_T \omega p \quad [5.76]$$

siendo  $\omega = 1$  en condición sónica, y

$$\omega = \left( 1 - \left( \frac{r-b}{1-b} \right)^2 \right)^{1/2} \quad [5.77]$$

en el caso subsónico.

Con esta nueva formulación, es posible obtener una estimación inicial del tiempo  $t_c$ . Si se asume que, durante el principio de la descarga, el aire se expande siguiendo un proceso politrópico general, del tipo  $p/\rho^n = \text{cte}$ , se deduce de [5.61], con [5.76] y  $\omega = 1$ :

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = -C \frac{\rho_N R T_0 K_T}{V} n p \quad [5.78]$$

que indica que, si el proceso es isoterma ( $K_T = K_{T0} = \text{cte}$ ), la descarga sónica sigue una exponencial teórica. Para condiciones sónicas isentrópicas ( $n = \gamma$ ), la integración de esta ecuación conduce a la expresión:

$$p = p_0 \left( 1 - C \frac{\gamma-1}{2} \frac{p_N}{K_{T0} V} t \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad [5.79]$$

que, en primera aproximación, es

$$p \approx p_0 e^{-C \frac{\gamma p_N}{K_{T0} V} t} \quad [5.80]$$

siempre que

$$t \ll \frac{2}{\gamma-1} \frac{K_{T0} V}{p_N} \frac{1}{C} \quad [5.81]$$

Esta aproximación permite asimilar la descarga isentrópica a un proceso exponencial, de tiempo característico:

$$t_c = \frac{K_{T0} V}{\gamma p_N} \frac{1}{C} = R_0 C_0 \quad [5.82]$$

donde  $R_0$  es la resistencia característica del escape (si se verifica que el flujo inicial es sónico, eso es,  $p_0 > p_d/b$ ):

$$R_0 = \frac{p_0}{G_0} = \frac{1}{\rho_N K_{T0} C} \quad [5.83]$$

y  $C_0$ , la capacidad inicial de la cámara:

$$C_0 = \frac{V}{\gamma R T_0} \quad [5.84]$$



El ritmo de decrecimiento de la presión en la descarga sónica isentrópica sigue una ley exponencial en el instante inicial, de modo que se cumple:

$$\left[ \frac{dp}{dt} \right]_0 = -\frac{p_0}{t_c} \quad [5.85]$$

El tiempo característico experimental en esta analogía RC tiene lugar cuando la presión desciende un 63,2% desde  $p_0$  hasta el vacío (pero no es posible que la descarga sea sónica durante todo el proceso o, mejor dicho, sólo lo sería si descargara en el vacío). Esto es,  $t_c$  es el tiempo que tardaría la presión en alcanzar el valor  $p_c = p_0/e$  en una descarga ideal y en condiciones de bloqueo,<sup>266</sup> lo que ocurre cuando se cumple la condición:

$$p_0 > \frac{e}{b} p_a \quad [5.86]$$

La ecuación [5.82] también ofrece un método alternativo para calcular  $C$ , que sólo precisa medir el volumen del recinto que se descarga, la temperatura inicial del aire contenido (que suele ser la atmosférica,  $T_0 = T_a$ ) y su presión de carga, y el tiempo propio de la relajación observada. Si, cuando se alcanza el tiempo característico  $t_c$ , la presión en el interior es superior a  $p_a/b$ , se puede afirmar que la descarga ha sido sónica hasta ese momento. La conductancia efectiva se despeja de [5.82]:

$$C = \left\{ \frac{K_{T_0} V}{\gamma p_N} \right\} \frac{1}{t_c} \quad [5.87]$$

que es mayor cuanto más rápida es la descarga, como era de esperar.

En un proceso de descarga cuasiestático como el analizado, en el que la mayor cuantía de las pérdidas irreversibles escapa de la cámara y tiene lugar en el exterior, la ecuación de estado y el primer principio, expresados ambos por unidad de tiempo y masa, son:

$$\begin{aligned} \dot{p}\nu + p\dot{\nu} &= R\dot{T} \\ \dot{q} - p\dot{\nu} &= c_v\dot{T} \end{aligned} \quad [5.88]$$

De estas ecuaciones, y teniendo presente la relación de Mayer, se deduce:

$$\dot{q} = \frac{c_p}{R} \dot{p}\nu + \frac{c_v}{R} p\dot{\nu} \quad [5.89]$$

Si la descarga es suficientemente rápida para que se dé la condición  $t_c \ll t_T$ , entonces se tendría, combinando [5.89] y [5.306]:

$$n = -\frac{\dot{p}\nu}{p\dot{\nu}} = \frac{c_p}{c_v} = \gamma \quad [5.90]$$

En un proceso lento sin refrigeración interna, en cambio, no es posible que el gas evolucione de forma espontánea hacia temperaturas por debajo de la ambiental. Por ello, a partir de la ecuación de estado [5.88], sería:

$$\dot{p}\nu + p\dot{\nu} = 0 \quad [5.91]$$

y, de nuevo con [5.306],  $n = 1$ .



En general, la ecuación [5.89] indica que el índice politrópico instantáneo, para gas ideal y procesos cuasiestáticos, puede calcularse mediante la expresión:

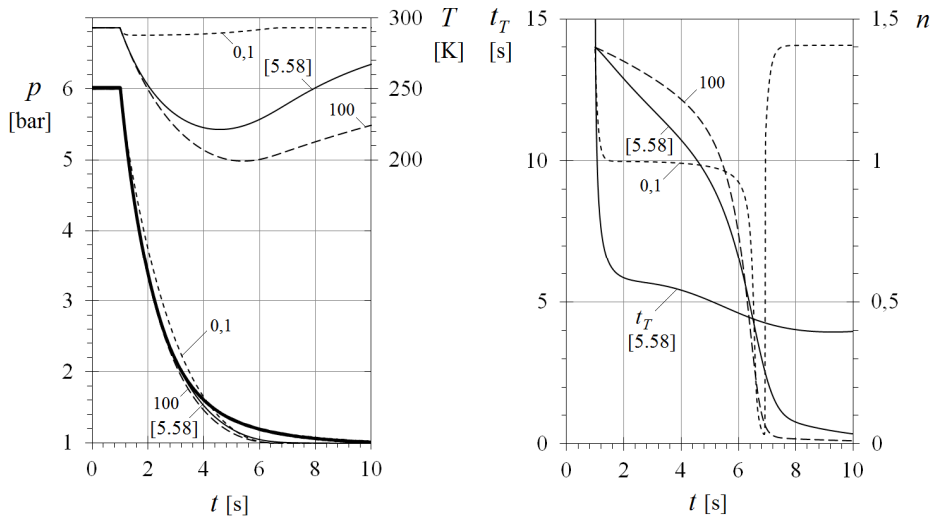
$$n = \frac{c_p}{c_v} - \frac{R}{c_v} \frac{\dot{q}}{p\dot{v}} \quad [5.92]$$

y, si la descarga se realiza con cambio de volumen:

$$n = \frac{c_p}{c_v} - \frac{R}{c_v} \frac{\dot{Q}}{p \left( \frac{dV}{dt} + \frac{G}{\rho} \right)} \quad [5.93]$$

Esta ecuación pone de manifiesto que un cambio repentino del volumen también conduce a compresiones isentrópicas, para las que  $n \approx \gamma$ , del mismo modo que ocurre, como se ha explicado, cuando las descargas son suficientemente rápidas. En el tema 5.10, se demuestra que el efecto de las irreversibilidades o el uso de ecuaciones de estado de gas real hacen que el límite superior para el índice politrópico correspondiente a un proceso adiabático deje de ser  $\gamma$ .

Figura 5.5. Simulación del proceso de descarga de aire a presión para diferentes valores de  $t_T$  (en segundos). La curva más gruesa de la izquierda muestra el resultado experimental. Valores de ensayo:  $V = 2,262 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ ;  $L = 45 \text{ cm}$ ;  $C = 9,782 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s/PA}$ ;  $b = 0,3152$ ;  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ;  $p_0 = 6 \text{ bar}$ ;  $p_a = 0,99 \text{ bar}$ . Con estos datos, el tiempo de [5.82] es  $t_c \approx 1,65 \text{ s}$ , que coincide con el experimental ( $p_c = 2,21 \text{ bar}$ ). A la derecha, se representa la evolución del tiempo térmico [5.58] y del índice politrópico correspondiente.



### 5.3. Balance energético en una máquina

Una máquina de fluido es un sistema mecánico que intercambia energía con el fluido contenido o que circula a través de ella. Son máquinas de fluido las bombas, los ventiladores, los compresores, las turbinas hidráulicas, las turbinas de vapor y de gas, pero también los tornillos de Arquímedes o las ruedas hidráulicas. La gran complejidad del flujo en estas máquinas, aun supuesto ideal, hace que su estudio sea motivo de investigación permanente y que su diseño se base tanto en la experimentación como en el desarrollo de teorías y simulaciones que analicen el flujo tridimensional.



En general, las máquinas de fluidos pueden clasificarse según el sentido de transmisión de la energía entre el fluido y la máquina (bombas frente a turbinas, es decir, generadoras frente a motoras), la compresibilidad del fluido (bombas hidráulicas frente a compresores) o su principio de funcionamiento (por ejemplo, una bomba centrífuga frente a una volumétrica). Según este último criterio, las bombas hidráulicas pueden ser rotodinámicas o turbomáquinas, en las que el intercambio de energía se produce mediante la transferencia de cantidad de movimiento; de desplazamiento positivo o volumétricas; gravimétricas, en las que la energía intercambiada es de tipo potencial, y de otros tipos más singulares, como las capilares, de ariete, etc. En el sentido más amplio del término, una bomba hidráulica es una máquina generadora que trabaja con un fluido incompresible, en la cual se produce una transformación de energía mecánica en hidráulica.

La misión de una bomba es transferir energía a un líquido para permitir su transporte en una instalación. Esto conlleva, normalmente, un aumento de la presión a través de la bomba que se relaciona con el caudal que se está transportando en forma de curva característica. Esta curva característica es propia de cada bomba y depende de su forma y del principio de funcionamiento, de su tamaño, de la velocidad del accionamiento, etc., y también de algunas propiedades del fluido (aunque sobre todo, de su viscosidad). Cabe añadir, no obstante, que el transporte de un fluido puede producirse sin que aumente su presión e, incluso, sin que exista mecanismo impulsor alguno, como ocurre en las mechas capilares o en el derrame de un líquido desde un depósito. Entre las máquinas destinadas a transportar líquidos a presión constante, se encuentran las norias y los rosarios, en general poco comercializados y de ejecución muy especial, y también los tornillos de Arquímedes, que actualmente tienen algunas aplicaciones industriales interesantes.

Las bombas hidráulicas más usuales son las bombas rotodinámicas o turbomáquinas y las de desplazamiento positivo o volumétricas. Una bomba rotodinámica es una máquina generadora que comunica energía al fluido a su paso por uno o varios rodets (también rotores o impulsores), incrementando su cantidad de movimiento<sup>267</sup> sin un cambio apreciable en su densidad. Según la dirección del flujo en el rodete, estas bombas pueden clasificarse en centrífugas o radiales, axiales y de flujo mixto. Las bombas volumétricas son ingenios mecánicos que transportan el fluido en forma de paquetes discretos que no interaccionan entre sí. Esta forma de impulsión tiene una serie de consecuencias bastante evidentes: por un lado, interrumpe la vena fluida y, por tanto, la ecuación de la energía sólo se puede aplicar si se realiza un promedio temporal de sus términos; pero, por otro lado, favorece el transporte de fluidos viscosos a alta presión y hace que su caudal sea casi independiente de la presión a unas revoluciones dadas. Esta última circunstancia las hace muy indicadas en sistemas de transmisión de energía y de dosificación, sectores industriales en los que hallan numerosas aplicaciones prácticas sin casi competencia.

El planteamiento de la ecuación de la energía entre la entrada y la salida de una máquina por la que se ha establecido un flujo másico de fluido,  $G$ , en régimen estacionario, tal como se ha visto en [2.30], se expresa:

$$G \left[ \left( h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_s - \left( h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_e \right] = -\dot{W} + \dot{Q} \quad [5.94]$$

es decir, el producto del gasto másico y la variación entre la salida y la entrada de la suma de la entalpía, la energía cinética y la energía potencial gravitatoria es igual a la



suma del trabajo más el calor comunicados por unidad de tiempo al fluido en el interior de la turbomáquina.

Teniendo presente que la entalpía,  $h$ , es la suma de la energía interna,  $u$ , y del término de impulsión,  $p/\rho$ , la expresión anterior puede escribirse de la forma:

$$u_s - u_e + \frac{p_s}{\rho_s} - \frac{p_e}{\rho_s} + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) = \frac{-\dot{W} + \dot{Q}}{G} = -w + q \quad [5.95]$$

Ambas expresiones son válidas bajo las hipótesis siguientes:

1. El proceso es cuasiestacionario (sin acumulación de masa o energía en el interior de la máquina).
2. La máquina es de forma que el flujo sólo tiene una entrada y una salida (situación común en la práctica), y no hay fugas externas de caudal o éstas son despreciables.
3. Se verifica que el flujo es uniforme en las secciones de entrada y salida, y que el nivel de turbulencia es del mismo orden en ambas. Si este último supuesto no fuera válido, se tendría que añadir el término de fluctuación turbulenta correspondiente, que no afecta al caudal pero sí al término cuadrático de la velocidad.
4. La velocidad del fluido en las superficies fijas no móviles es nula, mientras que en las móviles es la del cuerpo en movimiento (condición de no deslizamiento).

Este análisis es válido para una máquina de desplazamiento positivo, si se considera un promedio temporal para las condiciones en la entrada y en la salida de la máquina y si no hay acumulación de masa o energía en su interior. Si ello no fuera posible, se tendrían que incluir los términos no estacionarios y el tratamiento actual no sería aplicable.

### 5.3.1. Ecuación de la energía mecánica

La ecuación de la energía mecánica a través de una máquina de flujo incompresible se obtiene de la ecuación de la energía cuando se agrupan los términos térmicos y se identifican las pérdidas viscosas en el volumen interior de la máquina,  $\Phi_v$ , como se ha hecho en [2.64]. Admitiendo que el fluido es incompresible y que la situación es cuasiestacionaria, la ecuación de la energía interna descrita para el volumen de control establecido en la máquina es:

$$\int_{S_c} \rho u(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_c} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + q_a) dV + \int_{V_c} \Phi_v dV \quad [5.96]$$

que, agrupando las integrales de volumen y en ausencia de fugas externas, es:

$$G(u_s - u_e) = \dot{Q} + \Phi_v \quad [5.97]$$

Esta ecuación, combinada con [5.95], conduce a:





$$\frac{p_s - p_e}{\rho} + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) + \frac{\Phi_V}{G} = -\frac{\dot{W}}{G} = -w \quad [5.98]$$

Si la máquina considerada es una bomba, el trabajo comunicado por unidad de masa,  $w$ , es negativo en valor absoluto y se dedica a aumentar la energía mecánica específica,  $e_m$ , y a soportar las pérdidas que tienen lugar.<sup>268</sup> La pérdida de energía por unidad de masa por fricción viscosa se define como:

$$Y_V = \frac{\Phi_V}{G} > 0 \quad [5.99]$$

por lo que el aumento de la energía mecánica específica se observa en el aumento combinado de los términos de presión, energía cinética y energía potencial, y es:

$$\frac{p_s - p_e}{\rho} + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) = -w - Y_V = -w_u \quad [5.100]$$

### 5.3.2. Altura manométrica y formas de energía específica

Es común utilizar la denominación *altura manométrica*<sup>269</sup> para denominar el incremento de energía mecánica útil por unidad de peso de fluido bombeado. La altura manométrica comunicada por la bomba,  $H_B$ , es:

$$H_B = -\frac{w_u}{g} = \frac{p_s - p_e}{\rho g} + \frac{1}{2g}(v_s^2 - v_e^2) + (z_s - z_e) \quad [5.101]$$

Con esta definición, y haciendo  $Y_V = gH_V$ , el trabajo por unidad de tiempo resulta ser:

$$-\dot{W} = gG(H_B + H_V) = -wG \quad [5.102]$$

y, evidentemente:

$$-\dot{W}_u = gGH_B = \rho gQH_B = -w_u G \quad [5.103]$$

La altura de elevación proporcionada por una bomba varía con el caudal a unas revoluciones dadas según una ley que recibe el nombre de curva característica y que suele tener forma de parábola invertida. Esta curva cambia con la velocidad de rotación y el tipo de bomba, y es suministrada por el fabricante.

La *energía por unidad de masa*,  $Y = gH_B$ , es un invariante de la bomba rotodinámica para unas condiciones de funcionamiento dadas, al estar relacionada directamente con la geometría, el tamaño y las revoluciones por medio de los triángulos de velocidades en el rotor y la ecuación [2.138]. La ecuación [5.101] en función de  $Y$  se escribe:

$$Y = -w_u = \frac{p_s - p_e}{\rho} + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) \quad [5.104]$$

y el *salto de presión total* o incremento de energía mecánica por unidad de volumen:

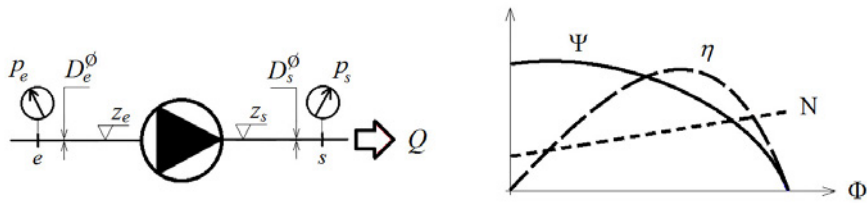
$$p_T = -\rho w_u = (p_s - p_e) + \frac{1}{2}\rho(v_s^2 - v_e^2) + \rho g(z_s - z_e) \quad [5.105]$$



Cualquiera de estas ecuaciones muestra cómo se observa el incremento de energía proporcionado por la bomba desde el sistema. En concreto, si la cota a la que se encuentran las bridas de aspiración e impulsión son iguales, y los conductos a la entrada y a la salida de la máquina son del mismo diámetro, la altura manométrica de la bomba se observa desde el exterior como un incremento de la presión estática entre  $e$  y  $s$ , y entonces  $H_B = (p_s - p_e) / \rho g$ .

Tanto  $Y$  como  $H_B$  y  $p_T$  son formas específicas de energía mecánica (o de su incremento) por unidad de masa, peso y volumen, respectivamente, y proporcionan el incremento de la potencia del flujo cuando se multiplican por el caudal en masa, peso o volumen de fluido transportado. Es fácil deducir que  $[J/kg] \equiv [m^2/s^2]$ ,  $[J/N] \equiv [m]$  y  $[J/m^3] \equiv [Pa]$ . Es importante tener presente, no obstante, que, siendo  $Y$  un invariante de la bomba rotodinámica, la altura  $H_B$  lo es si no cambia la aceleración de la gravedad y la presión total, si no lo hace la densidad del fluido. Esto es, para una  $Y$  dada, la altura de elevación de una bomba sería mayor en la Luna que en la Tierra, y el salto de presión total comunicado, mucho mayor en el caso de impulsar líquidos que gases (mayor en las bombas que en los ventiladores). Esta última circunstancia explica el defecto de capacidad de succión en las bombas rotodinámicas, que son incapaces de generar una gran depresión a su entrada si no han sido cebadas previamente.<sup>270</sup>

Figura 5.6. Condiciones de entrada y de salida para el balance de energía específica en una bomba rotodinámica (izquierda), y ejemplo de curvas características adimensionales de una bomba centrífuga (derecha).



### 5.3.3. Pérdidas y rendimientos característicos

Las pérdidas que tienen lugar en una bomba responden a tres tipologías distintas, a saber:

1. Pérdidas volumétricas o de caudal.
2. Pérdidas hidráulicas.
3. Pérdidas mecánicas.

Las pérdidas de caudal,  $G_f$ , se pueden agrupar en dos clases: las exteriores,  $G_{f,e}$ , debidas a la salpicadura de fluido hacia el exterior a través del juego entre la carcasa y el eje de la bomba, o a través de las bridas de conexión, y las interiores,  $G_{f,i}$ , debidas al aumento de presión en el interior de la bomba (lo que origina todo tipo de recirculaciones internas cuya reducción es muy complicada). Por norma general, las fugas internas son más cuantiosas que las externas y ambas se describen normalmente en términos del caudal en volumen, es decir,  $Q_{f,e}$  y  $Q_{f,i}$ .



Las pérdidas hidráulicas son aquellas que disminuyen la energía útil que la bomba comunica al flujo de fluido. Dicha energía útil, que, expresada en términos de energía por unidad de peso, es la altura manométrica de la bomba,  $H_B$ , se obtiene aplicando Bernoulli entre las secciones de entrada y salida de la bomba y está relacionada con la altura teórica de la bomba [5.127] y las pérdidas en el interior del modo siguiente:

$$H_t = H_B + H_f \quad [5.106]$$

En las bombas centrífugas, el término  $H_f$  engloba las pérdidas de dos tipos básicos: las pérdidas de superficie, debidas al flujo a través del rotor y de los conductos internos de la bomba, entre éstos los difusores, y las pérdidas de forma, debidas al desprendimiento de la capa límite a la entrada y a la salida del rodete o al choque del fluido con el rodete, según sean su velocidad y su dirección con respecto a los álabes, o a la entrada de la cámara espiral. Estas pérdidas son de pequeña cuantía en las máquinas de desplazamiento positivo, pues van asociadas al flujo continuo de fluido, que en ellas es despreciable o inexistente.

Las pérdidas de tipo mecánico son el resultado de la existencia de pérdidas por fricción, ya sean debidas al rozamiento entre las partes sólidas del interior de la máquina que participan del movimiento relativo o absoluto (cojinetes, juntas, etc.), o de tipo hidráulico, denominadas en las bombas rotodinámicas *pérdidas por fricción en el disco* (que formarían parte de [5.99] y que existen aun en ausencia de flujo útil, siempre que gire el rotor mojado).

Cada una de estas pérdidas es descrita por medio del rendimiento correspondiente, de modo que es posible calcular el rendimiento total de la bomba como el producto de tres rendimientos. Éstos son:

1. El rendimiento volumétrico,  $\eta_v$ , que evidencia la existencia de fugas de caudal.
2. El rendimiento hidráulico,  $\eta_H$ , que es el cociente entre la altura útil comunicada al fluido,  $H_B$ , y la suma de ésta y las pérdidas,  $H_f$ .
3. El rendimiento mecánico,  $\eta_{mec}$ .

La potencia (definida ahora positiva) que se invierte en la máquina,<sup>271</sup>  $N$ , es superior a la que recibe el fluido que atraviesa el rotor de la bomba,  $N_i$ , y viene dada por:

$$N = \frac{N_i}{\eta_{mec}} = \frac{g(G + G_f)(H_B + H_f)}{\eta_{mec}} \quad [5.107]$$

La diferencia entre ambas potencias son las pérdidas mecánicas y la potencia consumida en el accionamiento de cualquier tipo de dispositivo auxiliar, como por ejemplo un cuentarrevoluciones externo.

Análiticamente, los tres rendimientos anteriores se deducen de la expresión siguiente:

$$\eta_B = -\frac{\dot{W}_u}{N} = \frac{G}{G + G_f} \frac{H_B}{H_B + H_f} \frac{g(G + G_f)(H_B + H_f)}{N} = \eta_v \eta_H \eta_{mec} \quad [5.108]$$

y, en consecuencia:



$$\dot{W}_u = -\eta_V \eta_H N_i \quad [5.109]$$

Todas estas relaciones definen el sentido de la transformación de la energía en una máquina y pueden ser utilizadas como medio de comprobación de su eficiencia, pero nada dicen sobre su geometría o sobre la relación que ésta guarda con sus prestaciones. Estas cuestiones y otras se tratan a continuación.

#### 5.4. Teoría unidimensional para turbomáquinas

El incremento de energía total que el fluido experimenta en el interior del rotor de una bomba rotodinámica es el resultado de aplicar el principio de la cantidad de movimiento. En una turbomáquina hidráulica generadora, la energía se transfiere del motor al fluido aumentando su momento cinético sin un cambio apreciable de densidad, y se manifiesta en un incremento de sus energías cinética y estática o de presión. En este apartado, se deduce la magnitud teórica de cada uno de estos incrementos en el supuesto unidimensional y su relación con la geometría básica y las revoluciones del rodete.

La teoría clásica unidimensional que se presenta a continuación permite explicar adecuadamente las relaciones fundamentales existentes entre las condiciones globales de operación de la máquina: el caudal, la velocidad de giro, la energía comunicada, etc., en función de las velocidades medias del fluido, y además proporciona una guía de diseño suficientemente precisa para la selección de los ángulos y las dimensiones principales del rotor y de la máquina. Para ello, es necesario realizar una serie de hipótesis simplificadoras que, aunque no se cumplan exactamente en la máquina real,<sup>272</sup> pueden deshacerse a posteriori mediante coeficientes experimentales que ajusten la teoría a la realidad.

En definitiva, las hipótesis de partida en las que se basa la teoría unidimensional son:

- Se trabaja con velocidades medias, y la velocidad en cualquier sección transversal al flujo es uniforme y el resultado de la ecuación de continuidad en forma integral.
- Se admite que hay simetría polar en el rotor, de modo que la distribución de la velocidad, sea absoluta o relativa, y de todas sus proyecciones es también uniforme en superficies cilíndricas concéntricas con el eje.
- Se acepta que los álabes, sean fijos o móviles, guían perfectamente el fluido y definen la dirección de la línea de corriente en cada sección. En un rotor, esta hipótesis implica que la velocidad relativa del fluido sigue, en todo instante y lugar, la dirección de la tangente del álabe.

Esta última hipótesis se conoce como condición de *flujo congruente* con los álabes, y es tanto más cierta cuantos más álabes tiene el rotor. La teoría unidimensional se conoce como *teoría para un número infinito de álabes*, en la que el flujo relativo tiene lugar en una única dirección curvilínea.

Aunque la teoría que se presenta en este apartado puede aplicarse, en líneas generales, a cualquier turbomáquina, incluidas las turbinas y las térmicas, el tratamiento se centra en las máquinas generadoras de fluido incompresible: las bombas y los ventiladores, tanto radiales como axiales.



### 5.4.1. Velocidades características en un rotor

En adelante, se denomina con la letra  $c$  la velocidad absoluta del fluido en el interior de la máquina. En el interior del rotor, esta velocidad resulta de la suma vectorial de las velocidades de arrastre,  $u$ , y relativa,  $w$ , en cada punto, y está supeditada al caudal y a la transferencia de energía experimentada. En general, cada una de estas velocidades está formada por las tres componentes que resultan de su proyección sobre cada uno de los ejes de referencia, y su suma vectorial puede representarse mediante triángulos de velocidades. Es decir, la suma vectorial de las velocidades absoluta, relativa y de arrastre en cualquier punto de un rotor puede visualizarse en forma de triángulos, cuya magnitud y forma determinan el caudal y la energía aportados por éste.

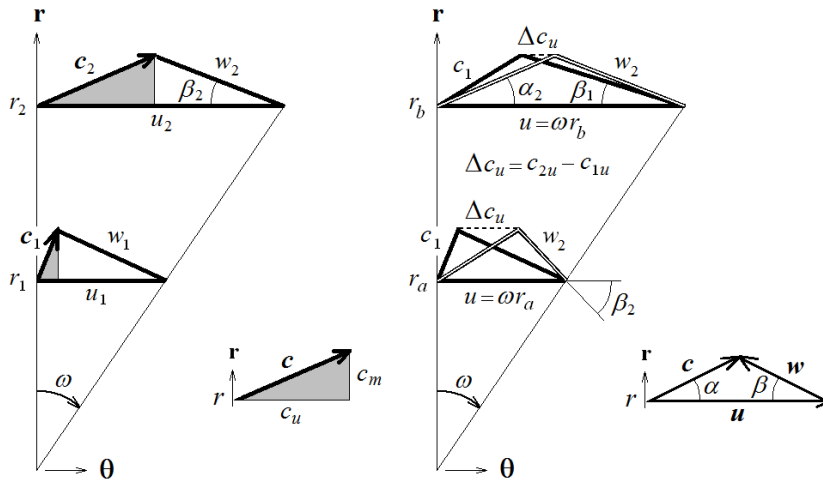


Figura 5.7. Magnitud cualitativa de los triángulos de velocidad en un rodete radial (izquierda) y axial (derecha). En el caso axial, el movimiento se admite bidimensional a lo largo de tubos de corriente de radio  $r$ , coaxiales con el eje de giro. Los triángulos de entrada y salida del rotor axial se muestran a dos radios distintos,  $r_a$  y  $r_b$ , en los que  $u_1 = u_2$ , y serían perpendiculares al plano del papel. Todos los triángulos cumplen  $c = u + w$ .

En un sistema de coordenadas cilíndrico vinculado al suelo cuyo eje principal coincida con el de la máquina, la velocidad absoluta se descompone en sus componentes radial,  $c_r$ ; axial,  $c_z$ , y acimutal o perimetral,  $c_\theta$ , que es perpendicular a las dos anteriores y se halla en el plano de rotación ( $pr$ ). Las componentes radial y axial de la velocidad absoluta se encuentran sobre el plano meridiano ( $pm$ ), que es el plano que contiene el eje de giro de la máquina y es perpendicular al de rotación, y su suma vectorial recibe el nombre de *velocidad meridiana*,  $c_m$ , de modo que  $c = c_m + c_\theta$ .

La dirección de la velocidad absoluta en el interior del rotor queda determinada mediante dos ángulos, que se designan  $\alpha$ , el ángulo que forma la velocidad de arrastre con la absoluta, y  $\beta$ , el que forma la velocidad de arrastre con la relativa. Es evidente que la velocidad de arrastre sólo tiene componente perimetral, siendo  $u = \omega r \theta$ , por lo que los ángulos anteriores definen la dirección de las velocidades absoluta y relativa con respecto a la dirección perimetral. Las proyecciones de las velocidades absoluta y relativa sobre  $u$  se denominan  $c_u$  y  $w_u$ , respectivamente, y  $c_u = c_\theta$  en el interior del rotor.

El caudal en las secciones transversales de entrada y salida del rotor (en rotores cerrados lateralmente) se puede escribir como:

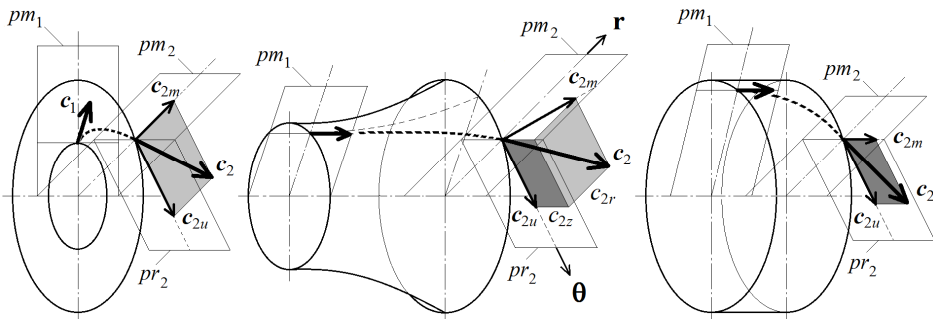
$$Q_R = -\int_{S_1} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS = \int_{S_2} \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS \quad [5.110]$$

donde se han utilizado los subíndices (1) y (2) para designar la entrada y la salida del rotor, respectivamente, o bien:

$$Q_R = \int_{S_1} c_{1m} dS = \int_{S_2} c_{2m} dS \quad [5.111]$$

puesto que la componente perimetral de la velocidad absoluta,  $c_u$ , no produce flujo si la sección transversal es de revolución centrada en el eje. Si la velocidad  $c_{im}$  es uniforme en la sección  $S_i$ , esta ecuación relaciona el caudal que atraviesa el rotor con la altura del triángulo de velocidad correspondiente, y con el ancho,  $b_i$ , y el diámetro,  $D_i$ , de la sección.

Figura 5.8. Superficies de flujo y velocidad absoluta, y sus proyecciones en los distintos tipos de rotor de una bomba rotodinámica: radial (izquierda), semiaxial, mixta o diagonal (centro) y axial o de hélice (derecha). A trazos, la línea de corriente absoluta en el rotor.



La forma básica de la máquina, incluidos el rotor y el resto de componentes que la forman, depende de la orientación de la velocidad meridiana,  $c_{2m}$ , con respecto al eje. Si esta componente es radial, la turbomáquina es centrífuga y, si es axial, se denomina axial o de hélice. En una máquina radial pura, la componente axial de la velocidad absoluta es nula tanto a la entrada como a la salida del rodete y las componentes meridianas coinciden con la radial, siendo  $c_r = c_m$ . En cambio, en una máquina axial pura en que  $c_r = 0$ , se tiene que es la componente axial la que coincide con la meridiana y  $c_z = c_m$ .

Una bomba rotodinámica basa su funcionamiento en el principio de conservación de la cantidad de movimiento. Por tanto, el incremento total de energía que experimenta el fluido en el rodete tiene una parte fundamental que resulta del incremento de su velocidad en forma de energía cinética [5.119]. Esta energía ha de transformarse adecuadamente en el interior de la bomba para que se adapte al tipo de energía que el sistema espera recibir y que viene descrita por la ecuación [5.101] y la del sistema [5.131]. De no hacerlo, el acoplamiento entre la bomba y la instalación no sería eficiente, y tanto el rendimiento de la bomba como el de la propia instalación disminuirían drásticamente.

Con este cometido, se disponen en el interior de la bomba o fuera de ella una serie de difusores que reconvierten el exceso de energía cinética generada en el rotor en energía estática. Estos difusores son elementos estáticos en forma de conductos o álabes fijos, en los que el fluido no incrementa su energía pero cuya configuración, pensada para el trabajo en torno al punto de diseño, permite transformar la energía cinética y acondicionar la velocidad del fluido al movimiento del rodete o de los rodetes.



En las máquinas de tipología radial o mixta, se utilizan la cámara espiral (CE) y el cono difusor (C) de salida como elementos difusores principales (figura 5.9). En las máquinas radiales, también se puede situar el inicio de la cámara espiral a un radio mayor con respecto al eje de giro, de modo que se forme entre el rodete (R) y la voluta (V) un espacio en forma de corona (CD) que produzca un efecto difusor adicional. Esta corona contiene, en ocasiones, álabes fijos cuya misión es mejorar el rendimiento global de la máquina, al conducir el flujo hacia la cámara espiral de forma óptima.

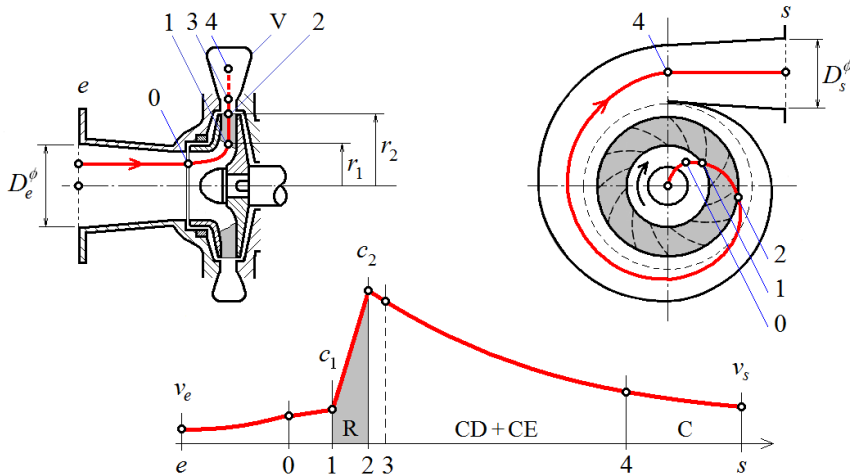


Figura 5.9. Evolución de la velocidad media en el interior de una bomba centrífuga. En una bomba monocelular, el fluido entra por la brida de aspiración (e), atraviesa el rodete describiendo una trayectoria absoluta curva, es recogido por la cámara espiral (CE) o voluta (V) alrededor de todo el perímetro del rodete (R, en gris) y es enviado hacia la brida de impulsión (s) a través del cono difusor (C). La sección de la voluta se cierra sobre sí misma (4), una vez ha dado una vuelta completa alrededor del rodete.

#### 5.4.2. Conservación del momento cinético

La aplicación del principio de conservación del momento cinético [2.21] al volumen de control contenido en el interior del rotor, en caso de que el flujo sea estacionario, se escribe de la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_m + \mathbf{M}_s = \int_{S_c} (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{c}) \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS \quad [5.112]$$

El momento se dirige en la dirección del eje de simetría y su módulo es la suma de los momentos de las fuerzas másicas y de superficie con respecto al mismo. No obstante, en un rotor, las fuerzas másicas no producen momento por simetría y las que sí podrían hacerlo son nulas, pues la ecuación anterior está referida a un sistema fijo de referencia. Con respecto a las fuerzas superficiales, de presión y viscosas, cabe distinguir entre las que están aplicadas sobre las superficies de entrada y salida del rodete, las que actúan sobre las paredes móviles del rotor y las que pudieran actuar sobre las paredes fijas de la carcasa interna de la máquina, en el caso de los rotores abiertos. De todas ellas, las únicas que realizan momento sobre el eje son las que se aplican sobre la superficie de los álabes, puesto que las otras se anulan por simetría, al ser las superficies de entrada y salida de revolución, o bien, en general, son despreciables como en [2.15], o el rotor es cerrado y el fluido en su interior no está en contacto con paredes fijas.



La ecuación [5.112], con las velocidades definidas en el apartado anterior y admitiendo el no deslizamiento del fluido en las paredes de la superficie de control, sean éstas fijas o móviles, es:

$$M_R = \int_{S_2} \rho_2 r_2 c_{2u} c_{2m} dS - \int_{S_1} \rho_1 r_1 c_{1u} c_{1m} dS \quad [5.113]$$

y, si las velocidades se distribuyen uniformemente en cada una de las secciones y el fluido es incompresible, entonces:

$$M_R = \rho Q_R (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) \quad [5.114]$$

A la vista de este resultado, se concluye que el par comunicado depende del flujo másico circulante y de la proyección de la velocidad absoluta en la dirección perimetral en cada una de las secciones. Estas proyecciones son definidas positivas cuando se dirigen en el mismo sentido que  $u$  y negativas, en caso contrario.

Utilizando [1.6], es posible escribir esta ecuación de la forma:

$$M_R = \frac{\rho Q_R}{2\pi} (\Gamma_2 - \Gamma_1) \quad [5.115]$$

que muestra que el incremento del momento cinético del fluido a lo largo de una línea de corriente que atraviesa el rotor conduce a un cambio en la circulación de la velocidad absoluta entre la entrada y la salida.<sup>273</sup> Para que el par comunicado sea positivo, es necesario que  $r_2 c_{2u}$  sea mayor que  $r_1 c_{1u}$ , es decir, que la circulación se incremente entre (1) y (2).

Téngase presente que las expresiones [5.114] y [5.115] son indistintas de la forma de los álabes o de la naturaleza del fluido, y que tampoco se ha avanzado ninguna hipótesis sobre el efecto de la viscosidad. Es decir, tanto un flujo viscoso como uno ideal reciben el mismo par si en ambas secciones la distribución de velocidades es idéntica.<sup>274</sup> Con respecto a la densidad, estas ecuaciones pueden utilizarse con toda generalidad en turbomáquinas térmicas en las que el flujo es compresible, utilizando el gasto másico,  $G_R = \rho Q_R$ .

### 5.4.3. Ecuaciones de Euler

Si se multiplica la ecuación [5.114] por las revoluciones del eje y se divide por el flujo másico circulante a través del rotor, se obtiene:

$$Y_{t,\infty} = u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u} = \frac{\omega}{2\pi} (\Gamma_2 - \Gamma_1) = \frac{M_R \omega}{\rho Q_R} \quad [5.116]$$

Estas ecuaciones son válidas para máquinas radiales, axiales y mixtas, y permiten obtener el trabajo específico de la máquina, conocidos los triángulos de velocidades o la circulación en las secciones de entrada y salida del rotor. La primera igualdad es la conocida ecuación de Euler para las turbomáquinas y define la energía comunicada a la unidad de masa de fluido en el supuesto teórico unidimensional, según el cual la velocidad es uniforme y presenta simetría polar, lo que equivale a considerar que el número de álabes es infinito.<sup>275</sup> La segunda igualdad pone de manifiesto que el fluido sólo puede intercambiar energía con el rotor si se produce un cambio en su circulación.





Aplicando el teorema del coseno a los triángulos de velocidades que se forman en el interior del rotor, se deduce:

$$2u_i c_{iu} = c_i^2 + u_i^2 - w_i^2 \quad [5.117]$$

por lo que la expresión [5.116] puede escribirse como:

$$Y_{i,\infty} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \quad [5.118]$$

que es otra forma de la ecuación fundamental de Euler. Evidentemente, el primer término de la derecha es el incremento de energía cinética teórico que experimenta el fluido en el rotor, de modo que la suma de los otros dos términos, aun evaluados en función de dos velocidades, representa el incremento de energía estática teórico, que en el caso incompresible permite escribir:

$$Y_{i,\infty} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = Y_{i,\infty}^{din} + Y_{i,\infty}^{est} \quad [5.119]$$

Ésta es la ecuación de Bernoulli generalizada para el caso de una turbomáquina en un sistema de referencia fijado al suelo. Estas ecuaciones justifican la presencia de difusores en el interior de la máquina, porque el incremento de energía cinética a través del rotor no coincide, en general, con el que se observa desde el sistema entre las bridas de entrada y salida de la máquina.

La ecuación [5.118] enseña que el incremento de energía estática en una bomba rotodinámica es consecuencia de dos efectos: por un lado, a la contribución derivada de la fuerza centrífuga:

$$\left[ \frac{p_2 - p_1}{\rho} \right]_u = \int_1^2 \omega^2 r dr = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \quad [5.120]$$

y, por otro, a la difusión de la velocidad relativa en el canal formado entre dos álabes y las paredes laterales del rotor. El primero de estos efectos es fundamental en las máquinas centrífugas, pues aporta la mayor parte de la energía estática generada en el rotor, y podría interpretarse como el incremento de presión (en términos de energía por unidad de masa) que se observaría entre (1) y (2) si el rotor estuviera cerrado, lleno de fluido (incompresible) y, a la vez, girara sobre su eje.

Para que la difusión de la velocidad relativa induzca un aumento gradual de la presión estática a través del rotor, ha de ser, evidentemente,  $w_1 > w_2$ , de modo que el canal entre álabes ha de aumentar de sección en la dirección meridiana. Este incremento de presión estática es fundamental en las máquinas axiales, en las que el flujo transcurre básicamente en superficies cilíndricas y  $u_1 \approx u_2$ , pero está sujeto a condicionantes relativos al desarrollo óptimo de las capas límite sobre los álabes que limitan su valor para evitar el desprendimiento de la corriente.

El diseño de muchas bombas centrífugas se acomete en la hipótesis de entrada radial, es decir,  $c_{1u} = 0$  y  $c_1 = c_{1m}$ , condición de compromiso que suele suceder cuando el conducto de aspiración está bien diseñado y se reducen las causas de prerrotación a la entrada de la máquina. Esta condición impone un ángulo  $\beta_{10}$  a los álabes para una  $u_1$  y un caudal dados que, en el caso unidimensional, cumple la igualdad:



$$\operatorname{tg} \beta_{10} = \frac{c_{1m}}{u_1} \quad [5.121]$$

Cuando se admite que la entrada es radial, la energía teórica sólo depende de las variables a la salida y la ecuación [5.116] se simplifica a:

$$Y_{t,\infty} = u_2 c_{2u} = u_2 \left( u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) \quad [5.122]$$

o bien

$$\frac{Y_{t,\infty}}{u_2^2} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \frac{c_{2m}}{u_2} \quad [5.123]$$

La ecuación [5.122] en función del caudal [5.111], es:

$$Y_{t,\infty} = \omega^2 r_2^2 - \frac{\omega}{2\pi b_2 \operatorname{tg} \beta_2} Q_R \quad [5.124]$$

Estas expresiones relacionan la energía específica y el caudal en una máquina de velocidad periférica  $u_2$ , con la geometría del rotor y el ángulo  $\beta_2$ , que es el ángulo que forma la tangente del álabe a la salida del rotor con la dirección perimetral (v. figura 5.7).

Las gráficas de la figura 5.10 indican que la energía comunicada aumenta al hacerlo  $\beta_2$ , lo que es una ventaja constructiva que permite diseñar máquinas más pequeñas para unas prestaciones dadas. No obstante, en una bomba centrífuga casi nunca se utilizan rodets con álabes girados hacia delante ( $\beta_2 > 90^\circ$ ) ya que las curvas características pueden ser inestables cuando  $dY/dQ > 0$  y provocar el fenómeno denominado *bombeo*. Por otro lado, el aumento indiscriminado de  $\beta_2$  en una bomba centrífuga implica el aumento de la velocidad absoluta a la salida del rotor,  $c_2$ , y que el canal entre álabes se vuelva sinuoso, de modo que el flujo relativo real puede desprenderse de las paredes y disminuir su efectividad fuera del punto de diseño.

Con el objetivo de reducir al mínimo las pérdidas superficiales y de forma en el rotor radial, el canal de la corriente relativa formado por dos álabes consecutivos no puede tener cualquier forma. Si el ángulo  $\beta_2$  para un  $\beta_1$  dado fuera muy pequeño, siendo  $\beta_2 > \beta_1$ , resultaría un conducto equivalente excesivamente largo, cuyo radio hidráulico para un número concreto de álabes disminuiría (ambas circunstancias aumentarían las pérdidas superficiales en el mismo). Si el ángulo  $\beta_2$  fuera demasiado grande, en cambio, el conducto equivalente presentaría un ángulo de difusión excesivo, de modo que aumentarían las pérdidas de forma.

#### 5.4.4. Grado de reacción y característica real

El grado de reacción de una turbomáquina es un parámetro que permite discernir qué cantidad de la energía generada por la bomba (o extraída del fluido, en el caso de las turbinas) es estática. El grado de reacción de la teoría unidimensional para el rotor de una turbobomba es:



$$\sigma_{t,\infty} = \frac{p_2 - p_1}{\rho Y_{t,\infty}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{Y_{t,\infty}} \quad [5.125]$$

Si la entrada es radial y se cumple que  $c_{2m} = c_{1m}$ , lo que es muy aproximado en las bombas radiales y estrictamente cierto, por término medio, en las axiales cuyo flujo transcurre en superficies cilíndricas, entonces:

$$\sigma_{t,\infty} = 1 - \frac{1}{2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{u_2 c_{2u}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{c_{2u}}{u_2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \frac{c_m}{u_2} \right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{Y_{t,\infty}}{u_2^2} \quad [5.126]$$

El ángulo  $\beta_2$  está muy relacionado con la energía total comunicada por el rodete y su grado de reacción: se comprueba que, si bien la energía aumenta al hacerlo  $\beta_2$ , lo hace a expensas de disminuir  $\sigma$  y, por tanto, la contribución del rotor a la energía estática del flujo.

El exceso de energía dinámica generada en el rotor respecto la que existe en la brida de salida ha de recuperarse mediante difusores estáticos, cuyas pérdidas reducen el rendimiento hidráulico de la máquina y fuerza una solución de compromiso para  $\beta_2$ . Esta circunstancia y las explicadas al final del apartado anterior convierten este ángulo en un parámetro fundamental del rotor y sugieren que tiene que haber un  $\beta_2$  óptimo, que la experiencia sitúa en torno a los  $30^\circ$  en los rotores radiales.

La curva característica real de una bomba centrífuga se obtiene de la teórica [5.124], una vez se deshacen las hipótesis de la teoría unidimensional y se incluyen las pérdidas hidráulicas. Definiendo el *coeficiente de disminución del trabajo*,  $e_z$ , la energía teórica por unidad de masa se escribe:

$$Y_t = e_z Y_{t,\infty} \quad [5.127]$$

y, con el rendimiento hidráulico,  $\eta_H$ , la energía real resulta:

$$Y = \eta_H Y_t = \eta_H e_z Y_{t,\infty} = g H_B \quad [5.128]$$

cuya forma característica adimensional es la de la figura 5.6. Como la energía teórica es proporcional al caudal, la expresión [5.128] acepta, en general, ajustes del tipo:

$$H_B = a + bQ - cQ^2 \quad [5.129]$$

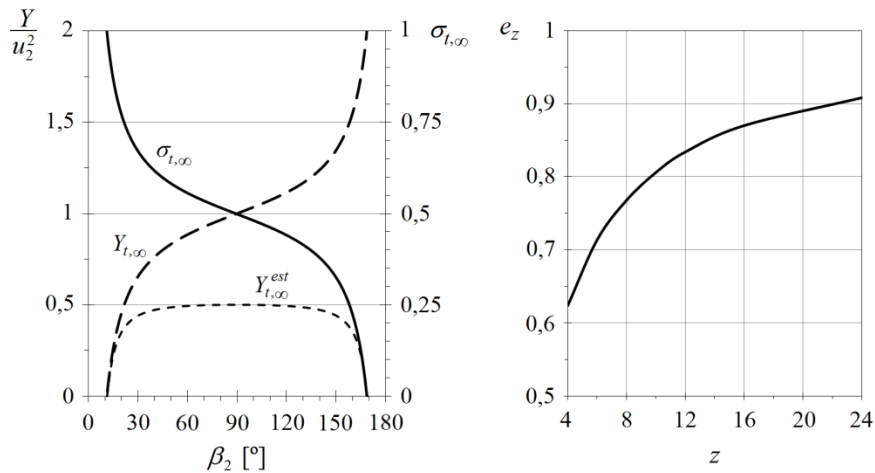
Cuando el coeficiente  $b$  es positivo (normalmente, en bombas de velocidad específica,  $\Omega$ , baja), la curva  $H_B$  tiene un máximo en el primer cuadrante, para el que se cumplen las condiciones  $Q(H_{B,\text{máx}}) = 0,5b/c$  y  $H_{B,\text{máx}} = a + 0,25b^2/c$ . Los coeficientes  $a$  y  $c$  son siempre positivos.

La corrección debida al coeficiente  $e_z$  se debe a que el flujo en el interior del rodete no puede ser considerado unidimensional cuando el número de álabes no es infinito. La ecuación de Euler sigue siendo válida cuando se aplica a una línea de corriente pero, como la hipótesis de flujo congruente con un número de álabes finito no es siempre válida, no todas las líneas de corriente comparten la misma  $Y_{t,\infty}$  y la energía comunicada no puede ser uniforme. El promedio espacial sobre la sección donde hay flujo de cada  $Y_{t,\infty}$  particular supone una disminución de la capacidad de comunicar trabajo por el rotor, por lo que, en el fondo, esta energía teórica suponía una sobreestimación de la

$Y_t$  real. En este sentido, es importante indicar que  $e_z$  no es un rendimiento, por cuanto la diferencia entre  $Y_{t,\infty}$  e  $Y_t$  no es una energía que haya existido nunca y, por tanto, no calienta el fluido ni la máquina, ni supone una pérdida irreversible de energía que haya que contabilizar de ningún modo, salvo en el sentido de minoración descrito.

Por norma general, se acepta que, en las máquinas axiales y en las turbinas hidráulicas, no es necesario el factor  $e_z$ , de modo que  $Y_t = Y_{t,\infty}$ . Ello es consecuencia de que en estas turbomáquinas el flujo sigue el contorno sin grandes desviaciones ni desprendimientos y, sobre todo, de que la estimación unidimensional concuerda bastante bien con la realidad.<sup>276</sup> No obstante, en estas máquinas se ha de procurar referir las ecuaciones de Euler a los ángulos de la corriente y no a los de los álabes, y para ello se definen los ángulos de incidencia a la entrada y de desviación a la salida del flujo. Estos ángulos han sido utilizados extensamente para especificar las características de las cascadas de los álabes y sus pérdidas.

Figura 5.10. Relación de la energía teórica [5.122] y del grado de reacción [5.126] con el ángulo  $\beta_2$ , según la teoría unidimensional, para el caso de entrada radial y  $c_{2m} = c_{1m}$  (izquierda), y factor de disminución del trabajo en función del número de álabes de un rotor centrífugo (derecha).



En las turbomáquinas radiales, el factor  $e_z$  toma valores cercanos a 0,8 y aumenta, como es natural, con el número de álabes (figura 5.10). Es paradójico percatarse de que este factor es consecuencia de la falta de simetría en el flujo y que es esta asimetría la que permite comunicar par al rotor. Estas características bidimensionales están asociadas a la existencia de un torbellino relativo que gira en sentido contrario a la rotación del rodete, con la intención de preservar la irrotacionalidad del movimiento. La superposición de las distribuciones de velocidad asociadas al flujo medio y a dicho torbellino (que no aporta caudal) permite visualizar la asimetría y establecer métodos para su cuantificación.<sup>277</sup>

Se ha de decir, también, que la magnitud de  $e_z$  en un rodete radial apenas se ve afectada por la naturaleza del fluido, pues viene determinada básicamente por la desviación angular que experimenta el flujo relativo debido a la rotación. Es por ello que, en numerosas referencias, el coeficiente de disminución del trabajo se denomina *slip factor*, pues el fluido poco viscoso parece deslizarse en el canal entre álabes en sentido contrario a la rotación del rodete.



## 5.5. Flujo incompresible en tuberías

La gran cantidad y la diversidad de instalaciones hidráulicas y sus aplicaciones hacen imposible explicar en detalle cada una de ellas. Por fortuna, todas comparten características comunes y pueden ser descritas mediante ecuaciones que formalmente siguen los mismos principios generales. Conocidos éstos y los requisitos funcionales de la instalación, la interconexión de las diferentes bombas, conductos, accesorios y válvulas entre sí asegurará un servicio específico acorde con un diseño previamente convenido.

El transporte de un fluido por un conducto puede hacerse a presión o sin presión. El primer caso trata de conducciones por las que se realiza el trasvase de un líquido entre dos puntos, ya sea por gravedad o por impulsión (conducción forzada), en que se asume que toda la sección del conducto es ocupada por el líquido. El segundo caso es común en los sistemas de evacuación de las aguas residuales o en el transporte de agua por canales, sistemas de regadío, etc. Este apartado se centra en el primer caso, para el que, en general, es necesario utilizar bombas para vencer un determinado desnivel piezométrico.

### 5.5.1. Ecuación de Bernoulli generalizada

El planteamiento de la ecuación de Bernoulli en términos de energía específica media,  $e_m$ , permite su generalización al caso más general de flujo unidimensional en que no se pueda considerar que el fluido sea ideal y, por tanto, que  $e_m$  sea constante a lo largo del conducto en su línea media. Este es el caso en que se plantea un balance energético en un conducto de sección variable en que hay bombas, que incrementan la energía específica al comunicar potencia al fluido (o turbinas que la disminuyen), y accesorios, codos, válvulas, filtros y otras resistencias, que disipan potencia y disminuyen la energía específica de la corriente.

La ecuación integral de la energía aplicada al fluido incompresible que fluye entre las secciones (1) y (2) de la figura 5.11, conduce al resultado siguiente (con  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ):

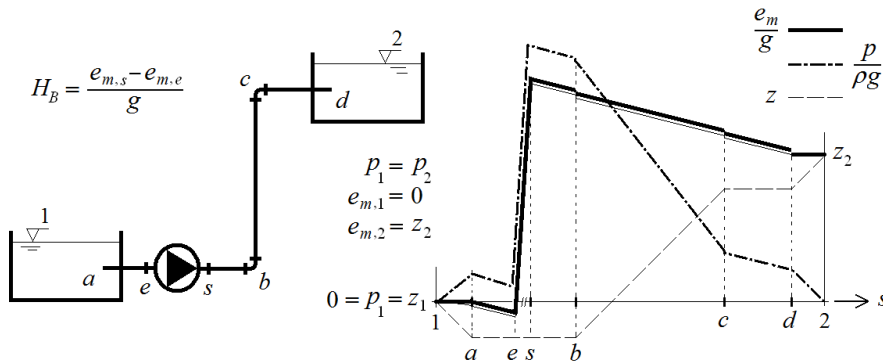
$$\frac{e_{m,2} - e_{m,1}}{g} = \left[ \frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} \right]_1^2 = H_B - \sum_i h_{f,i} \quad [5.130]$$

donde  $H_B$  es la energía por unidad de peso aportada por la bomba (o bombas) y  $h_{f,i}$  son las pérdidas de energía del componente o conducto  $i$ . A continuación, se explica cómo se cuantifican estas pérdidas; de momento, basta con observar que, en un conducto de sección constante y en régimen permanente, la energía decae de forma lineal con la distancia, mientras que la pérdida que supone un accesorio es local y casi una singularidad. Obsérvese también que, si (1) y (2) fueran los puntos de entrada y salida de una bomba, esta ecuación revela que la constante  $C$  de [3.10] cambiaría a través de la bomba como consecuencia del trabajo aportado por ésta, siendo  $H_B = (C_2 - C_1)/g$ .

Se denomina *línea de carga* o *de altura total* la línea energética definida por la evolución de  $e_m/g$  (en metros columna de fluido), que es, en todo punto, la suma de los tres términos energéticos de [3.22]. La línea resultante de sumar, en las mismas unidades, las energías de cota y presión es la *línea de cotas piezométricas*. Esta línea es paralela a

la anterior si la sección del conducto es constante, pues entonces también lo son la velocidad en régimen permanente y el término cinético.

Figura 5.11. Aplicación de la ecuación generalizada de Bernoulli y líneas de energía de la línea media. La evolución de las líneas energéticas entre las secciones de entrada y salida de la bomba es sólo orientativa. La línea continua que transcurre paralela y por debajo de la línea de energía total es la línea piezométrica.



A la hora de representar las líneas energéticas de una instalación, es interesante tener presente que la línea de energía cinética resulta del caudal y de la sección en cada punto, por lo que en una instalación dada no cambia si no lo hace el caudal; que la línea de cota,  $z$ , es definida por la situación de la instalación con respecto a un plano de referencia común, que puede ser el nivel del mar, en cuyo caso es geodésica, y que la línea de presión estática se obtiene de la diferencia entre la línea de carga y las energías de cota y de velocidad en cada punto. Se puede afirmar, pues, que, para una instalación dada por la que circule un caudal constante, la energía en forma de presión estática es la variable libre que manifiesta los cambios experimentados por  $e_m$  como consecuencia de las pérdidas y las aportaciones de energía entre dos puntos.

### 5.5.2. Ecuación del sistema y punto de funcionamiento

Se denomina *característica del sistema* la representación gráfica en ejes  $(Q,H)$  de:

$$H_{sis} = \left[ \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + z_2 - z_1 \right] + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \sum_i h_{f,i} \quad [5.131]$$

Esta ecuación resulta de combinar los diferentes términos de [5.130], de forma que queden a un lado las características del grupo de bombeo y, al otro, las de la instalación. Los puntos (1) y (2) son los extremos físicos del sistema en los que está definida su energía específica, en términos de presión, cota y velocidad. Esta ecuación puede escribirse como  $H_{sis} = H_e + H_d + H_f$ , suma de las alturas estática, dinámica y de pérdidas entre (1) y (2), definidas como sigue:

$$\begin{aligned} H_e &= \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + z_2 - z_1 \\ H_d &= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \\ H_f &= \sum_i h_{f,i} \end{aligned} \quad [5.132]$$



El primero de los términos es el único independiente del caudal y representa la ordenada en el origen de la ecuación del sistema. El término  $H_e$  se interpreta, en muchas ocasiones, como la altura útil de la instalación. La altura dinámica,  $H_d$ , es una función cuadrática del caudal y es nula si los puntos (1) y (2) se escogen sobre las superficies libres de dos depósitos. Esta situación es la más frecuente en la práctica, aunque no siempre es así. Entre los casos en que este término no es nulo, se encuentran las instalaciones en las que el punto final supone una descarga libre del caudal, en una manguera, por ejemplo, o cuando se aplica la ecuación de la energía entre un depósito y un nudo intermedio de una red de distribución.<sup>278</sup> La altura de pérdidas,  $H_f$ , siempre es positiva, como resultado de las diferentes pérdidas de energía asociadas al flujo de fluido y, en general, es admisible interpretarla como proporcional al cuadrado del caudal.

Teniendo en cuenta los comentarios del párrafo anterior, la ecuación [5.131] puede escribirse de la forma siguiente:

$$H_{sis} = H_e + A_S Q^2 \approx H_e + r_{eq} Q^2 \quad [5.133]$$

donde  $r_{eq}$  representa la resistencia hidráulica equivalente de la instalación (que coincide con  $A_S$  cuando  $H_d=0$ ). Esta resistencia no es, en realidad, constante e independiente del caudal, dado que depende del número de Reynolds: siempre hay una región próxima al origen de caudales en que el régimen es laminar y  $H_f=H_f(Q)$ , y no  $H_f=H_f(Q^2)$ , como se ha supuesto. En cualquier caso, esta región queda alejada de la zona de funcionamiento formal de la mayoría de las instalaciones (en que  $Re$  suele ser bastante elevado y el régimen, turbulento) y no se tiene en cuenta en [5.133].

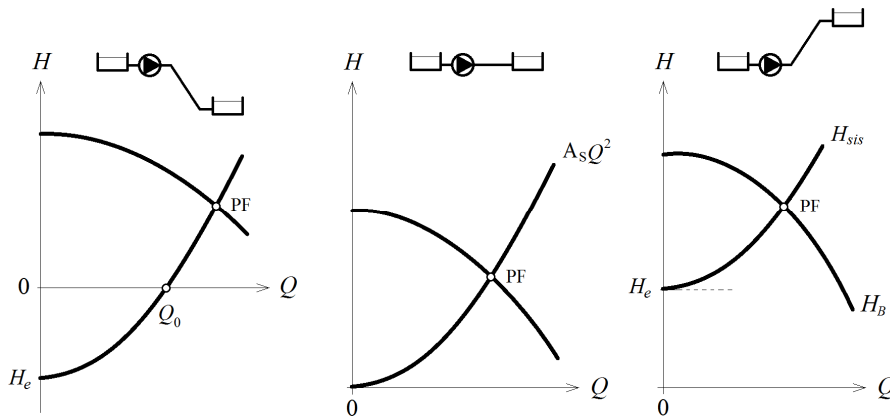


Figura 5.12. Diversos tipos de instalaciones y características asociadas. A la izquierda, un sistema hidráulico de  $H_e < 0$ , en que fluiría por gravedad el caudal  $Q_0$ . En los sistemas de ventilación, suele ser  $H_e = 0$  (centro). A la derecha, la situación más frecuente, en que  $H_e > 0$  y se necesita bomba.

La intersección gráfica de la ecuación del sistema y la curva de la bomba o del grupo de bombas determina el *punto de funcionamiento*, PF, de la instalación. Para el caudal de este punto, y no otro, se verifica la ecuación de la energía ( $H_B = H_{sis}$ ) y quedan definidas la altura de elevación de la bomba, su potencia y su rendimiento. Las características de este punto proporcionan la información mínima necesaria para solicitar la bomba adecuada a la instalación, para la que debe escogerse aquella (o aquellas) que tenga un punto de funcionamiento nominal más próximo al PF considerado.<sup>279</sup> En caso de no encontrar la bomba necesaria, siempre se puede adaptar la bomba de serie al PF reque-



rido, por ejemplo, torneando el rodete original o cambiando sus revoluciones, y también acoplar diversas bombas en serie y/o en paralelo. En la figura 5.12, se muestran algunos ejemplos de sistemas característicos y sus PF correspondientes.

### 5.5.3. Cálculo de pérdidas

Las pérdidas de energía en una instalación son una manifestación de la resistencia asociada al flujo de fluido hidráulico. Las pérdidas deben reducirse en lo posible, pues, cuanto mayores sean, menor será el rendimiento de la instalación y mayores serán sus gastos de explotación. Se sabe que una instalación de mayor diámetro provoca menos pérdidas para una misma longitud de conducto, pero también es más costosa en montaje y mantenimiento, por lo que la elección del diámetro resulta del compromiso de diversos factores.

Existen, básicamente, dos fenomenologías de pérdidas: las *lineales* y las *singulares*. Las pérdidas lineales,  $\Delta h_{f,c}$ , también llamadas *primarias* o *continuas*, corresponden a las pérdidas de energía por unidad de peso que se producen en los tramos donde el movimiento es permanente y uniforme. Las pérdidas singulares o secundarias,  $\Delta h_{f,s}$ , también por unidad de peso, se localizan en los elementos puntuales de la instalación, tales como codos, derivaciones, ensanchamientos, etc., y, en general, son despreciables frente a las lineales cuando se verifica la condición  $L/D > 10^3$ .

Las pérdidas de carga continuas se calculan multiplicando la pérdida de carga por unidad de longitud,  $j$ , por la longitud del tramo,  $L$ , es decir:

$$\Delta h_{f,c} = jL \quad [5.134]$$

donde  $j$  resulta de la fórmula de Darcy-Weisbach para un conducto de diámetro  $D$ :

$$j = f \frac{1}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad [5.135]$$

El valor del coeficiente de fricción,  $f$ , depende del tipo de flujo establecido en el conducto. Para régimen laminar ( $Re < 2.300$ ), es válida la expresión [3.111] obtenida para el flujo de Hagen-Poiseuille y  $f = 64/Re$ . Si el flujo es turbulento, entonces  $f$  toma los valores aproximados que se calculan de la fórmula de Colebrook:

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon / D}{3,715} + \frac{2,51}{Re f^{1/2}} \right) \quad [5.136]$$

o del gráfico de Moody, siempre en función de la rugosidad relativa equivalente,  $\varepsilon/D$ , y del número de Reynolds,  $Re$ , evaluado para el diámetro hidráulico del conducto.

La fórmula de Colebrook tiene carácter general e incluye los casos de tubería hidráulicamente lisa (TL) y régimen rugoso (TR) como límite (v. el apartado 4.1.7). Así, para movimiento turbulento rugoso, basta anular la influencia del número de Reynolds de la ecuación, y resulta:

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon / D}{3,715} \right) = -2 \log_{10} (\varepsilon / D) + 1,14 \quad [5.137]$$





mientras que, para movimiento turbulento liso, es:

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2,51}{\text{Re} f^{1/2}} \right) = 2 \log_{10} (\text{Re} f^{1/2}) - 0,8 \quad [5.138]$$

La línea a trazos que figura en el diagrama de Moody corresponde a la condición:

$$f^{1/2} \frac{\varepsilon}{D} \text{Re} = 197,8 \quad [5.139]$$

e indica dónde se produce la transición a régimen turbulento rugoso, zona del gráfico en la que el coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach no depende de la viscosidad (del número de Reynolds) y las líneas se vuelven horizontales. En esta región, la relación entre la pérdida  $j$  y la velocidad es estrictamente cuadrática, pues  $f=f(\varepsilon/D)$ , como se observa en [5.137]. En cambio, en el régimen turbulento de transición (TT), dicha relación es del tipo general  $j=j(v^a)$ , con  $1,8 < a < 2$ , y creciente con  $\text{Re}$ , hasta hacerse dos en el flujo turbulento rugoso.<sup>280</sup>

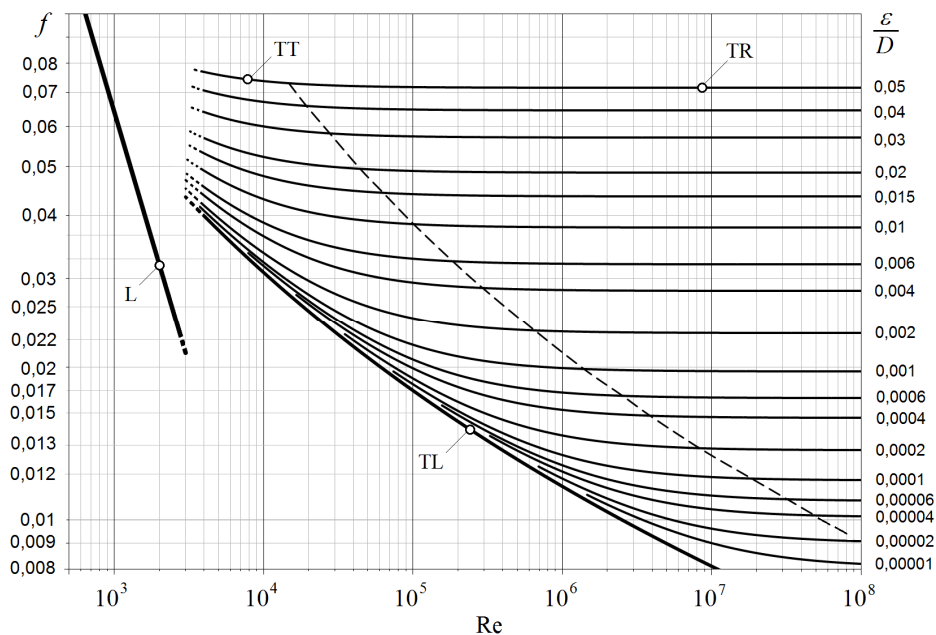


Figura 5.13. Diagrama de Moody para el cálculo de las pérdidas lineales obtenido de la ecuación de Colebrook [5.136]. En la figura: L, régimen laminar ( $f = 64/\text{Re}$ ); TT, régimen turbulento de transición; TR, régimen turbulento completamente desarrollado o régimen turbulento rugoso [5.137], y TL, flujo turbulento en tuberías hidráulicamente lisas [5.138]. Los flujos TT y TR, se separan, aproximadamente, en la línea de trazos [5.139]. La zona  $2.300 < \text{Re} < 4.000$  comprende regímenes de transición muy inestables.

Con los medios disponibles hoy día, no es un problema calcular el coeficiente de rozamiento de la fórmula de Colebrook sin acudir al diagrama de Moody. En la actualidad, no obstante, se cuestiona la validez universal de esta fórmula, por lo que se han desarrollado multitud de fórmulas específicas y ábacos para distintos materiales y tipos de fluido que aproximan mejor la pérdida correspondiente. Algunas formas explícitas de  $f$  se han recogido en la tabla 5.1.



Tabla 5.1.  
Fórmulas alternativas explícitas para el cálculo del coeficiente de rozamiento o la pérdida de carga específica. La última expresión es una forma adaptada de la de Hazen-Williams para el agua donde la constante  $C$  (dimensional) depende del material y toma valores cercanos a  $10^{-3}$ . Unidades del SI.

Régimen	Ecuación	Validez
TT	$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon / D}{3,715} + \frac{5,74}{\text{Re}^{0,9}} \right)$	$5.000 < \text{Re} < 10^8$ $10^{-6} < \varepsilon / D < 0,01$
TL	$f = 0,316 \text{Re}^{-1/4}$	$3.000 < \text{Re} < 10^5$
TL	$f = 0,184 \text{Re}^{-1/5}$	$10^5 < \text{Re} < 10^6$
TR	$f = 0,18(\varepsilon / D)^{0,33}$	$0,0005 < \varepsilon / D < 0,05$
TR	$f = 0,16(\varepsilon / D)^{0,31}$	$0,0005 < \varepsilon / D < 0,05$
TT	$j = \frac{C}{D^{7/6}} \bar{v}^{-1,85}$	$\bar{v} < 3 \text{ m/s}$ $D > 5 \text{ cm}$

En las conducciones, es más práctico describir la pérdida de energía en términos del caudal. En un conducto circular es:

$$\Delta h_{f,c} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} = f \frac{8}{\pi^2} \frac{L}{D^5} Q^2 \quad [5.140]$$

La fórmula de Darcy-Weisbach no es exclusiva de los conductos circulares a presión,<sup>281</sup> sino que puede aplicarse a cualquier otro conducto utilizando el *diámetro hidráulico* correspondiente:  $D_H = 4r_H = 4S/p_m$ , donde  $S$  y  $p_m$  son la sección de flujo y el perímetro mojado del conducto, respectivamente, y  $r_H$ , su radio hidráulico. La pérdida de energía es consecuencia del rozamiento en el perímetro de la sección y, por ello, es normal que, en régimen laminar, donde el crecimiento de la velocidad es más gradual y el efecto de la pared penetra más hacia el interior, la forma de la sección juegue un papel más importante en la distribución de la velocidad y en la pérdida de carga que en régimen turbulento.

Los valores de la rugosidad absoluta pueden tomarse de la tabla 5.2 para diferentes materiales y tuberías nuevas. El valor de la rugosidad aumenta con el tiempo, a medida que la tubería envejece, por lo que los valores dados en esta tabla son sólo una referencia cuando se trabaja con tuberías usadas, que debe corregirse en función de las circunstancias de cada caso.

Las pérdidas de carga singulares son función de la geometría de cada singularidad, del número de Reynolds y de la energía cinética media del fluido. Del análisis dimensional, se deriva:

$$\Delta h_{f,s} = K(\text{Re}, \text{geometría}) \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad [5.141]$$

donde, si no se dice lo contrario, la velocidad ha de ser la velocidad a la entrada de la singularidad. El coeficiente  $K$  puede hallarse documentado en numerosas referencias para las singularidades más frecuentes. Como caso particular, se demuestra que  $K = 1$  en el ensanchamiento brusco que tiene lugar cuando un flujo desemboca en un depósito (pues toda la energía cinética transportada se disipa en su interior).



Material	Rugosidad absoluta, $\varepsilon$ [mm]
Acero asfaltado	- 0,0015
- Acero laminado oxidado	- 0,15÷0,25
- Acero laminado nuevo	- 0,05
- Cemento alisado	- 0,3÷0,8
- Cemento bruto u hormigón	- 0,5÷3
- Fibrocemento	- 0,02÷0,025
- Fundición asfaltada	- 0,10÷0,15
- Fundición dúctil nueva	- 0,025
- Hierro galvanizado	- 0,15÷0,2
- Policloruro de vinilo (PVC)	- 0÷0,01
- Polietileno (PE)	- 0÷0,0015
- Vidrio, cobre o latón estirado	- 0÷0,0015

Tabla 5.2. Valores usuales de  $\varepsilon$  para tuberías comerciales nuevas. En tuberías envejecidas, el valor aumenta y puede llegar a superar el indicado en un factor de 2 o 3, dependiendo del fluido transportado.

Un método alternativo de cálculo del efecto de una singularidad consiste en sustituir el accesorio por una *longitud equivalente* de conducto que produzca la misma pérdida de energía. La longitud correspondiente a una singularidad  $K$  se deduce de la identidad:

$$K \frac{\bar{v}^2}{2g} = f \frac{l_{eq}}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad [5.142]$$

y conduce a la expresión:

$$l_{eq} = \frac{K}{f} D \quad [5.143]$$

en la que  $f$  debe estimarse para el flujo y el diámetro de conducto correspondientes, que puede ser, en general, distinto a la de la propia singularidad.

Diámetro nominal	½"	¾"	1	1½"	2	3	4	6	10
Codo estándar de 90°	0,80	0,75	0,69	0,63	0,57	0,54	0,51	0,45	0,42
Codo estándar de 45°	0,43	0,40	0,37	0,34	0,30	0,29	0,27	0,24	0,22
"T" en flujo directo	0,54	0,50	0,46	0,42	0,38	0,36	0,34	0,30	0,28
"T" en flujo cruzado	1,62	1,50	1,38	1,26	1,14	1,08	1,02	0,90	0,84

Tabla 5.3. Valores del coeficiente de singularidad para codos y "T" estándar, en función de su diámetro nominal. Existen tablas para el cálculo de  $K$  en curvas de 45 y 90° en función del parámetro  $d/D$  y de la relación  $r/D$ , donde  $r$  es el radio medio de la curva. La pérdida singular de la curva es prácticamente despreciable cuando  $r/D > 10$  y  $d/D < 0,001$ , y puede sustituirse por la pérdida continua asociada a su desarrollo lineal. Nótese que el diámetro nominal (en pulgadas) no corresponde al diámetro interno del conducto.

Evidentemente, es posible extender este principio a toda la instalación, de modo que las pérdidas totales se calculen en términos de una longitud equivalente total, suma de la



longitud real y la longitud virtual que resulta de sumar las distintas longitudes equivalentes de cada singularidad. Esto es, para un conducto circular:

$$\Delta h_f = \left( f \frac{L}{D} + \sum_i K_i \right) \frac{\bar{v}^2}{2g} = f \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_{eq}}{D^5} Q^2 = r_{eq} Q^2 \quad [5.144]$$

donde:

$$L_{eq} = L + \sum_i l_{eq,i} \quad [5.145]$$

y en que  $r_{eq}$  se identifica con la resistencia hidráulica equivalente del conducto.<sup>282</sup>

Una de las ventajas de este planteamiento es que la longitud equivalente puede referirse a diámetros no instalados, de modo que es posible comparar energéticamente instalaciones de distinto diámetro entre sí y también detectar la influencia relativa de los diferentes diámetros de una misma instalación, con la intención de intensificar esfuerzos sobre un determinado tramo para reducir las pérdidas.

#### 5.5.4. Sistemas simples unidireccionales

Un sistema es unidireccional cuando el flujo entre dos puntos transcurre, preferentemente, en un sentido predeterminado. Esta situación es la más frecuente en instalaciones industriales o de bombeo en que la bomba o el grupo de bombas impulsan el fluido en una única dirección. En este apartado, se presentan los casos simples de sistemas unidireccionales formados por tuberías de diferente diámetro y longitud, conectadas entre sí en serie o en paralelo.

En un conducto de diámetro constante del que se conoce la pérdida específica,  $j$ , es posible obtener el caudal circulante sin necesidad de calcular primero  $f$  del diagrama de Moody. Esta circunstancia puede simplificar el cálculo de aquellas instalaciones en que predomina una tubería sobre las demás y, además, las pérdidas singulares son despreciables; pero, sobre todo, sirve para poner de manifiesto la relación directa existente entre la velocidad (o el caudal, para un diámetro dado) y  $j$ , que no es más que la pendiente de la línea de carga. Cualquier cambio en dicha pendiente implica el consiguiente cambio en la velocidad: si es nula, la velocidad también y, si se invierte, el caudal transportado cambia de sentido.

En una instalación en línea formada por  $n$  conductos de varios diámetros en serie, se cumple que  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$ , y la pérdida de carga total está formada por la suma de todas las pérdidas continuas, más las locales:<sup>283</sup>

$$\Delta h_f = \sum_{k=1}^n \Delta h_k = \frac{8}{\pi^2 g} \sum_{k=1}^n \frac{1}{D_k^4} \left( f_k \frac{L_k}{D_k} + \sum_i K_i \right) Q^2 = \sum_{k=1}^n r_k Q^2 \quad [5.146]$$

La pendiente  $j$  es distinta en cada uno de los tramos según [5.135], pero, como ahora el caudal es común y las velocidades medias están relacionadas entre sí por la ecuación de continuidad, se sigue que  $j$  depende inversamente de la potencia quinta del diámetro de dicho tramo para el caudal trasegado.

Se define como *diámetro equivalente* de la instalación en serie,  $D_{eq}$ , aquel para el cual el desnivel en  $j$  sería producido por un único conducto de dicho diámetro (probable-



mente, no comercial) y una longitud igual a la suma de las longitudes de cada tramo,  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ . Con esta definición, la ecuación [5.146] se escribe:

$$\Delta h_f = f_{eq} \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L}{D_{eq}^5} Q^2 = \frac{8}{\pi^2 g} \sum_{k=1}^n \frac{1}{D_k^4} \left( f_k \frac{L_k}{D_k} + \sum_i K_i \right) Q^2 = r_s Q^2 \quad [5.147]$$

A menos que las longitudes sean pequeñas y el efecto de las singularidades no pueda desprejiciarse, esta ecuación conduce al resultado:

$$D_{eq} = \frac{(f_{eq} L)^{1/5}}{\sum_{k=1}^n \left( \frac{f_k L_k}{D_k^5} \right)^{1/5}} \quad [5.148]$$

donde el coeficiente de fricción equivalente ha de calcularse para  $D_{eq}$  (en la práctica, suele suponerse, en primera aproximación, que  $f_{eq} \approx f_k$  o un valor medio adecuado).

Otra forma de analizar este tipo de instalaciones utiliza la longitud equivalente [5.145] evaluada en términos del diámetro del tramo predominante. Por ejemplo, si este diámetro es  $D_1$ , es fácil deducir que se cumple:

$$\Delta h_f = f_1 \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_{eq,1}}{D_1^5} Q^2 = \frac{8}{\pi^2 g} \sum_{k=1}^n \frac{1}{D_1^4} \left( f_1 \frac{L_{eq,k}}{D_1} + \sum_i l_{eq,i} \right) Q^2 = r_s Q^2 \quad [5.149]$$

donde:

$$L_{eq,k} = L_k \frac{f_k D_1^5}{f_1 D_k^5} \quad [5.150]$$

$$l_{eq,i} = \left( \frac{K_i}{f_1 D_1} \right) \frac{D_1^4}{D_k^4}$$

Si se admite que las pérdidas singulares son pequeñas, entonces:

$$L_{eq,1} = \sum_{k=1}^n L_{eq,k} = L_1 + \sum_{k=2}^n L_k \frac{f_k D_1^5}{f_1 D_k^5} \quad [5.151]$$

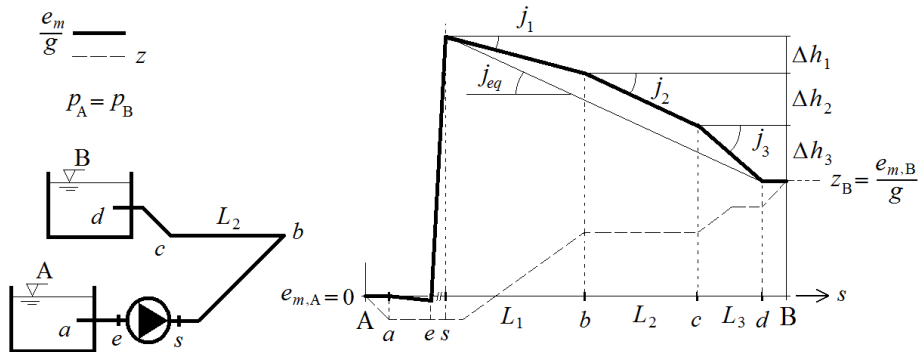


Figura 5.14. Sistema de tuberías en serie. Los diámetros de las tuberías son tales que  $D_a > D_1 > D_2 > D_3$  ( $D_2 \approx D_{eq}$ ), es decir,  $j_a < j_1 < j_2 < j_3$ . Se desprecian los términos cinéticos y las pérdidas singulares.

Cualquiera de las expresiones [5.146], [5.147] o [5.149] permite obtener  $H_f$  de la ecuación del sistema y el punto de funcionamiento con facilidad. Obsérvese que la resisten-



cia equivalente del sistema en serie puede definirse en términos del diámetro equivalente o de la longitud equivalente, y que en ambos casos tiene, evidentemente, el mismo valor.

Se dice que  $n$  conductos están en paralelo cuando se bifurcan en un punto dado para encontrarse más adelante aguas abajo. En este caso, se cumple:  $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \dots = \Delta h_n = \Delta h_f$  si se puede despreciar la pérdida local en cada bifurcación, y el caudal total es la suma de los caudales parciales. Si se desprecia el efecto del resto de singularidades,<sup>284</sup> entonces:

$$\Delta h_f = f_1 \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_1}{D_1^5} Q_1^2 = f_2 \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_2}{D_2^5} Q_2^2 = \dots = f_n \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_n}{D_n^5} Q_n^2 \quad [5.152]$$

La pendiente  $j$  de cada tramo es, en general, distinta, pues puede serlo cada una de las longitudes para una misma  $\Delta h_f$ , pero ahora también depende del cuadrado del caudal del tramo correspondiente. El reparto de caudales se efectúa conforme a la expresión:

$$\frac{Q_k}{Q} = \left( \frac{f_{eq} L}{f_k L_k} \frac{D_k^5}{D_{eq}^5} \right)^{1/2} = \left( \frac{r_p}{r_k} \right)^{1/2} \quad [5.153]$$

Como  $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$ , una sencilla operación conduce a:

$$\frac{Q}{\sum_{k=1}^n Q_k} = \frac{\left( \frac{D_{eq}^5}{f_{eq} L} \right)^{1/2}}{\sum_{k=1}^n \left( \frac{D_k^5}{f_k L_k} \right)^{1/2}} = 1 \quad [5.154]$$

de donde se obtiene el diámetro equivalente del sistema en paralelo:

$$D_{eq} = (f_{eq} L)^{1/5} \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{D_k^5}{f_k L_k} \right)^{1/2} \right)^{2/5} \quad [5.155]$$

En este caso, se ha de escoger primero la longitud  $L$ , que puede ser la longitud real o equivalente de alguno de los tramos. El cálculo del caudal particular de cada tramo es inmediato a partir de cada una de las expresiones [5.152], conocido  $\Delta h_f$ , o de la [5.153] para el caudal total  $Q$ .

Las resistencias hidráulicas equivalentes asociadas a los sistemas en serie,  $r_s$ , y en paralelo,  $r_p$ , cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned} r_s &= r_1 + r_2 + \dots + r_n \\ \frac{1}{r_p^{1/2}} &= \frac{1}{r_1^{1/2}} + \frac{1}{r_2^{1/2}} + \dots + \frac{1}{r_n^{1/2}} \end{aligned} \quad [5.156]$$

y, en una instalación formada exclusivamente por conductos en serie o en paralelo, coinciden con la constante  $A_S$  de la ecuación [5.133], si  $H_d = 0$  y se incluyen las pérdidas singulares o éstas son menores. En otros casos, siempre es posible obtener  $r_{eq}$  por



combinación de las resistencias correspondientes en serie y en paralelo; por ejemplo, podría ser  $r_{eq} = r_{S,1} + r_{P,1} + r_{S,2} + \dots$ , etc.

De las ecuaciones [5.156], se concluye que los sistemas hidráulicos guardan cierta analogía con los eléctricos, aunque no sean lineales. Por ejemplo, si, en un sistema en serie, uno de los conductos es muy resistivo, lo es todo el sistema, y los conductos menos resistivos contribuyen, en menor medida, a la resistencia total, y para todos ellos es  $r_k < r_S$ . En un sistema en paralelo, en cambio, la resistencia equivalente es dominada por el tramo de menor resistencia, por el cual circulará la mayor parte del caudal [5.153], y  $r_k > r_P \forall k$ .

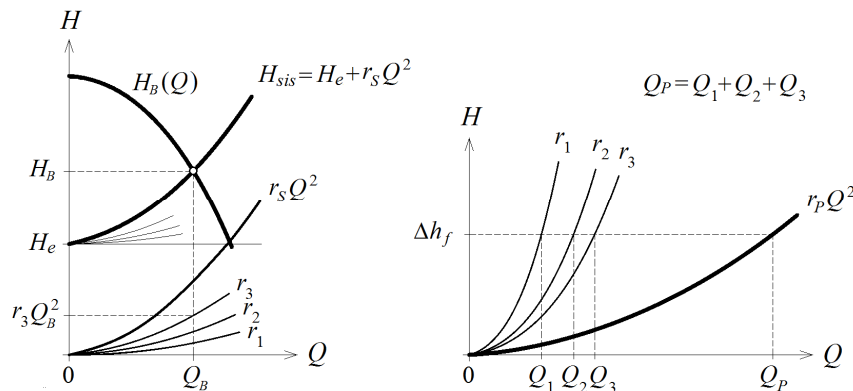


Figura 5.15. Obtención gráfica del sistema equivalente de tuberías en serie (izquierda) y en paralelo (derecha).

## 5.6. Lubricación por fluidos

Las aplicaciones de muchos ingenios mecánicos están afectadas negativamente por la presencia de la fricción y el desgaste. Se entiende por lubricación la técnica o el conjunto de técnicas encaminadas a reducir la fricción y a controlar el desgaste de los elementos de las máquinas en movimiento relativo.

Cuando la lubricación utiliza un medio fluido, que puede tener además otras funciones, como la de garantizar la estanquidad o evacuar el calor generado, la relación entre el espesor de la película de lubricante y la rugosidad de las superficies,  $\lambda$ , permite distinguir entre tres tipos de lubricación: lubricación perfecta, cuando  $\lambda$  es superior a 3,5; lubricación mixta, cuando  $\lambda$  es inferior a 3,5 pero superior a 1, y lubricación seca, cuando es inferior a 1. En la lubricación perfecta, las superficies no están nunca en contacto si se mantiene la capa de lubricación estable y fluida.

En este apartado, se amplían algunos de los contenidos ya explicados de la lubricación fluidodinámica y se introducen cuestiones de tipo práctico que competen al diseño industrial y al funcionamiento real de los cojinetes por cuña de aceite, para los cuales se entiende que la lubricación es perfecta. Quedan fuera de esta exposición otros tipos de cojinetes, como los de rodamientos o los sólidos por fricción (de grafito, teflón, bronce poroso, etc.). En líneas generales, y para un mismo tamaño, estos cojinetes tienen aplicaciones distintas a los fluidodinámicos: los de fricción trabajan bien a bajas velocidades relativas (de giro) y cargas medianas, y los rodamientos cubren la zona intermedia entre éstos y los fluidodinámicos, que son los mejores a altas cargas con velocidades elevadas.<sup>285</sup>

### 5.6.1. Cojinetes por patín oscilante

Una de las primeras aplicaciones industriales exitosas del tipo de cojinete fluidodinámico por película líquida fueron los axiales de patín oscilante, como el que se reproduce en la figura 5.16, cuyo desarrollo inicial se debe a Michell. La configuración mostrada en la figura resuelve el problema de capacidad de carga limitada, que se presenta en los cojinetes de ángulo de cuña constante, y permite que el patín trabaje siempre cerca de la relación  $h_2/h_1$  óptima. Como muestran, por ejemplo, la fórmula [3.133] y la figura 3.12, es difícil alcanzar un compromiso aceptable entre la relación  $h_2/h_1$  óptima, el huelgo mínimo  $h_2$  y la carga aplicada, ante variaciones de ésta, si no se puede cambiar el ángulo  $\alpha$ . En otras palabras, cualquier variación de la carga para la que se mantenga  $\alpha$  constante, implica un cambio en  $h_2$  que modifica la relación  $h_2/h_1$ .

Para mostrar cómo la configuración de la figura 5.16 permite que el cojinete trabaje con una relación  $h_2/h_1$  prácticamente constante e independiente de la carga, en esta exposición se supone que son válidos los resultados del apartado 3.5.1, aplicados a la geometría actual, porque el ancho del patín es muy inferior a su longitud. Utilizando la nomenclatura de la figura, se deduce que  $h = (L_0 - x)\alpha$ , si el ángulo de la cuña es pequeño, y la ecuación [3.124], con  $(x=0, p=p_0)$ , conduce a:

$$p = p_0 + \frac{6\mu x}{\alpha^2 L_0(L_0 - x)} \left( v_0 - q \frac{2L_0 - x}{\alpha L_0(L_0 - x)} \right) \quad [5.157]$$

El caudal, para la condición  $(x=L, p=p_0)$ , es:

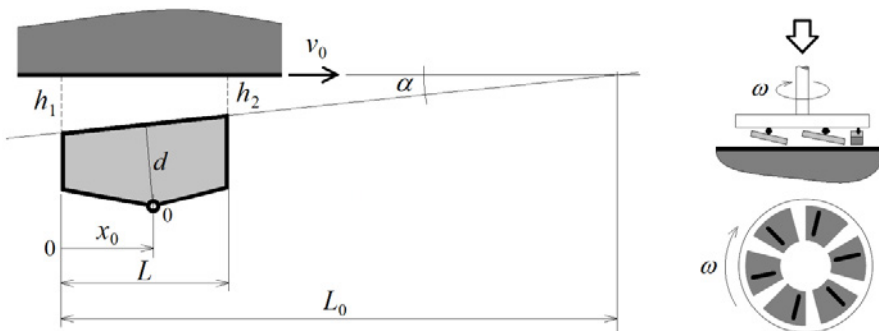
$$q = v_0 \frac{L_0(L_0 - L)}{2L_0 - L} \quad [5.158]$$

y la distribución de la presión:

$$p = p_0 + 6\mu v_0 \frac{L}{h^2} \frac{\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L}}{2 \frac{L_0}{L} - 1} \quad [5.159]$$

Figura 5.16. Geometría de un cojinete de patín oscilante articulado. Este tipo de cojinete es autogenerado, pues se adapta a las circunstancias operativas sin perder el principio de funcionamiento. A la derecha, se muestra la disposición de un patín Michell para el soporte de un eje vertical (por ejemplo, de una turbina). Estos cojinetes se emplean también para ejes horizontales (por ejemplo, en la propulsión de embarcaciones por hélices).

Este desarrollo es paralelo al que condujo a la expresión [3.129].







Si se identifica el espesor mínimo de la película,  $h_2$ , con el correspondiente a la condición de lubricación perfecta,  $h_0$ , y se describe el espesor a cualquier  $x$  mediante la fórmula lineal:

$$h = h_0 + h_0 m \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad [5.160]$$

donde  $m$  es la *ratio de convergencia* del patín, se sigue:

$$p^* = \frac{p - p_0}{6\mu v_0 \frac{L}{h_0^2}} = \frac{m \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L}}{(m+2) \left( 1 + m \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \right)^2} \quad [5.161]$$

La condición de presión máxima se encuentra derivando respecto a la variable adimensional  $x/L$  y es:

$$\frac{x_p}{L} = \frac{m+1}{m+2} \quad [5.162]$$

Esta condición de máximo, con  $m = \alpha L/h_0 \approx h_1/h_2 - 1$ , coincide con la obtenida para la expresión [3.130].

En esta posición, el espesor es:

$$h_p = h_0 + h_0 m \left( 1 - \frac{m+1}{m+2} \right) = 2 \left( \frac{m+1}{m+2} \right) h_0 \quad [5.163]$$

El caudal de lubricación es una variable importante del diseño de estos cojinetes, ya que se ha de suministrar suficiente cantidad de fluido para mantener las superficies separadas. El caudal a aportar por unidad de ancho resulta de la expresión [3.124] utilizando la condición [5.163], en virtud de la cual  $dp/dx = 0$ :

$$q = \frac{1}{2} h_p v_0 = \left( \frac{m+1}{m+2} \right) h_0 v_0 \quad [5.164]$$

A este mismo resultado se llega con [3.128] para  $m = h_1/h_0 - 1$ .

Por otro lado, sustituyendo la condición [5.162] en [5.161], resulta:

$$p_{\max}^* = \frac{1}{4} \frac{m}{(m+1)(m+2)} \quad [5.165]$$

De la misma manera, el valor de  $m$  que hace que la presión sea máxima se encuentra derivando esta última expresión, y resulta  $m_p = 2^{1/2}$ , para  $x_p/L = 2^{-1/2} = 0,707$ . Estas condiciones de máximo pueden observarse en la figura 5.17.

La condición de presión máxima no implica que la fuerza de sustentación generada sea máxima también. La fuerza de sustentación por unidad de ancho es [3.132] y, en este caso:

$$F_N = \mu v_0 \frac{L^2}{h_0^2} \left( 6 \frac{\ln(m+1)}{m^2} - \frac{12}{m(m+2)} \right) \quad [5.166]$$



cuyo máximo corresponde a  $m_F = 1,189$ . El factor entre paréntesis se denomina *coeficiente de sustentación del patín*,  $C_S$ . La fórmula [5.166] dice que  $C_S = 0,1602$  en condición de  $F_N$  máxima.

La fuerza tangencial [3.135], consecuencia de rozamiento viscoso sobre la corredera, se calcula, en este caso, también por unidad de ancho:

$$F_T = \mu v_0 \frac{L}{h_0} \left( \frac{6}{m+2} - 4 \frac{\ln(m+1)}{m} \right) \quad [5.167]$$

donde ahora el valor absoluto del factor entre paréntesis se denomina *coeficiente de fricción viscosa*,<sup>286</sup>  $C_V$ . La relación entre ambas fuerzas es función de ambos coeficientes y, por tanto, función de  $m$ , que, a su vez, es función del ángulo de la cuña y del espesor mínimo de película. El resultado se interpreta como un coeficiente de fricción efectivo del patín,  $f$ , y es:

$$f = \frac{F_T}{F_N} = \frac{h_0}{L} \frac{C_V}{C_S} = \frac{\alpha}{m} \frac{C_V}{C_S} \quad [5.168]$$

o bien:

$$f = \frac{h_0}{L} m \left( \frac{3m - 2(m+2)\ln(m+1)}{6m - 3(m+2)\ln(m+1)} \right) \quad [5.169]$$

cuyo mínimo se encuentra para  $m_f = 1,534$ . Como se ha mencionado antes, la máxima capacidad de carga tiene lugar cuando  $m_F = 1,189$ . Por tanto, en el diseño de estos cojinetes, debe darse el compromiso entre ambas condiciones: máxima carga admisible y mínimo rozamiento, lo que conduce a diseños con valores de  $m$  comprendidos entre ambos límites.

La potencia disipada por unidad de ancho depende de la fuerza tangencial desarrollada sobre la corredera, y se calcula mediante cualquiera de las expresiones siguientes:

$$N_V = F_T v_0 = f C_S \mu \frac{L^2}{h_0^2} v_0^2 = C_V \mu \frac{L}{h_0} v_0^2 \quad [5.170]$$

La ubicación de la articulación de estos cojinetes es fundamental para su autorregulación. El ángulo de la cuña en este desarrollo no es una cantidad fija conocida, sino que depende del equilibrio estable que se consiga entre los momentos aplicados sobre la articulación. Despreciando la pequeña inclinación del patín y el efecto de los extremos, el punto de aplicación de  $F_N$  se calcula haciendo:

$$F_N x_N = \int_0^L (p - p_0) x dx \quad [5.171]$$

de donde se deduce que  $x_N$  es sólo función de  $m$  (v. figura 5.17). La fuerza de rozamiento sobre el patín se calcula mediante la expresión:<sup>287</sup>

$$F_P = \mu v_0 \frac{L}{h_0} \left( \frac{6}{m+2} - 2 \frac{\ln(m+1)}{m} \right) \quad [5.172]$$

Los momentos correspondientes a  $F_N$  y a la fuerza de fricción sobre el patín están en equilibrio con el correspondiente a su propio peso y a cualquier otro existente en "0". En consecuencia:



$$F_N(x_N - x_0) + F_P d = M_G + M_0 \quad [5.173]$$

Despreciando el peso propio del patín y  $M_0$ , se deduce, con [5.166] y [5.172]:

$$x_N - x_0 = \frac{1}{3} d \frac{h_0}{L} m \left( \frac{3m - (m+2)\ln(m+1)}{2m - (m+2)\ln(m+1)} \right) < 0 \quad [5.174]$$

Como  $h_0$  es muy inferior a  $L$  y el término entre paréntesis no excede en mucho la unidad para  $m$  comprendidos entre 0,5 y 2, la ecuación anterior indica que  $x_N \approx x_0$ . Por tanto, si se escoge la posición de la articulación en la  $x_N$  correspondiente al diseño seleccionado en términos de  $m$ , este valor permanece constante, salvo por las diferencias de orden menor (debidas al cambio de  $h_0$ ) que se muestran en [5.174]. Por ejemplo, el valor de la razón  $x_N/L$  para una ratio de convergencia de 1,4 es 0,5863 (v. figura 5.17), de donde  $x_0 = 0,5863L + 3,233dh_0/L \approx 0,5863L$ .

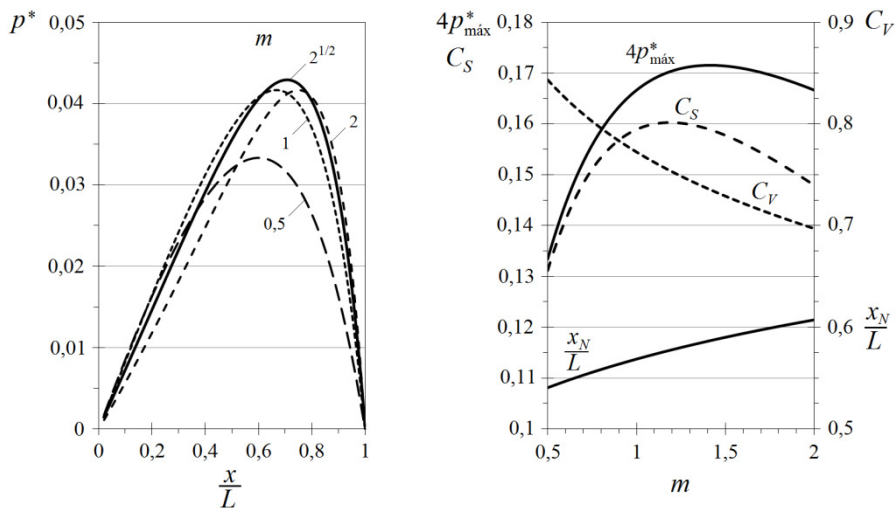


Figura 5.17. Distribución de la presión (izquierda) y condición de presión máxima en el patín y coeficientes  $C_S$  y  $C_V$  en función de  $m$  (derecha). También se ha representado el punto de aplicación normalizado de  $F_S$ .

Todas las condiciones de máximo y de diseño obtenidas en este desarrollo en términos de  $m$  pueden extenderse al ángulo de la caña,<sup>288</sup> en función de  $L$  y  $h_0$ , y constituyen la información mínima necesaria para el proyecto de uno de estos mecanismos. El efecto de los extremos y de la variación en  $z$  de la presión puede incorporarse utilizando coeficientes  $C_S$  y  $C_V$  efectivos para el patín de ancho  $b$  o admitiendo una disminución determinada de la presión a lo largo de su línea media. De este modo, las magnitudes reales se calculan de las anteriores multiplicándolas por  $b$  y utilizando los coeficientes efectivos correspondientes.

El tratamiento presentado hasta ahora ha seguido la teoría de la lubricación clásica, que responde a la ecuación de Reynolds. Sin embargo, cuando la carga actúa sobre una superficie reducida, el aumento de la presión tiene dos efectos que no fueron incluidos y que, combinados, conducen a un aumento del grueso de la película y de su estabilidad. Estos efectos son el aumento de la viscosidad con la presión<sup>289</sup> y la deformación elástica de las superficies. En la práctica, el aumento de la presión supone el aplastamiento de las superficies en la zona de contacto, lo que distribuye la carga sobre una

superficie mayor, y el aumento de la viscosidad potencia la capacidad de creación y mantenimiento de la película lubricante. Los resultados empíricos muestran que ambas hipótesis son necesarias para justificar la ausencia de desgaste cuando la teoría clásica predice huelgos tan pequeños que el contacto debería ser inevitable.

Desde el punto de vista matemático, considerar la variación de la viscosidad con la presión mediante una expresión del tipo [1.104] introduce una no linealidad en la parte de difusión de la ecuación de Reynolds, que sólo es resoluble mediante métodos numéricos. La ecuación resultante es [3.156], que cuando  $\partial h/\partial t = 0$  es:

$$6\mu_0 v_0 \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-c_p} h^3 \frac{dp}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( e^{-c_p} h^3 \frac{dp}{dz} \right) \quad [5.175]$$

En lo referente al cambio del espesor de la película con la presión, una buena aproximación consiste en considerar que el huelgo real,  $h$ , resulta de la composición del huelgo geométrico,  $h^*$ , y el huelgo deformado,  $h_D$ , que resulta de la teoría de la elasticidad para placas planas. En consecuencia, el espesor total de la película es la solución de una ecuación de tipo biarmónico, donde interviene como fuerza exterior la presión del fluido, y:

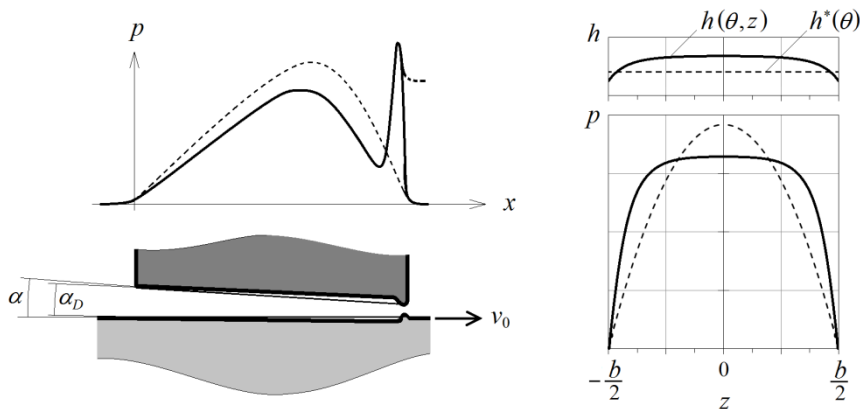
$$h(x, y) = h^*(x) + h_D(x, y) \quad [5.176]$$

con:

$$\xi \Delta^2 h_D = p \quad [5.177]$$

en donde  $\xi$  es la rigidez flexional de la placa. De esta clase de relaciones se ocupa la elastohidrodinámica (EHD), campo de la mecánica de fluidos que queda fuera del alcance de esta obra.

Figura 5.18. Efecto de la deformación, en una cuña bidimensional (izquierda) y en un cojinete cilíndrico corto de ancho  $b$  (derecha), sobre la distribución de la presión y el espesor de la película. La disminución de  $\alpha$  supone una disminución del ratio de convergencia del patín (v. figura 5.17).



La deformación elástica de las superficies de la cuña tiene, no obstante, una aplicación importante en los sistemas de estanquidad dinámica, que puede explicarse con el contenido expuesto hasta el momento. En general, se observa que la deformación del contorno aumenta con la presión, cuyo máximo se ha visto que se encuentra por encima de  $x/L = 1/2$  (ecuación [5.162], con  $m$  siempre positivo). Como consecuencia, el ángulo efectivo de la cuña,  $\alpha_D$ , disminuye prácticamente en toda la placa, hasta que la condi-



ción de presión externa reduce la deformación y genera una protuberancia a la salida. Esta protuberancia supone una restricción al flujo de Couette, que puede llegar a suponer una reducción del espesor de la película de hasta un 25 % (dependiendo del módulo elástico del material), y cuyo resultado consecuente es la generación de un pico de presión en  $x/L$  prácticamente 1. Esta sobrepresión local puede ser mayor que la presión máxima interna generada por la cuña y supone un freno hidráulico a la entrada de fluido desde el extremo hacia donde se dirige la superficie móvil. Este efecto se observa en la figura 5.18 y es utilizado en el diseño de juntas de vástago para actuadores hidráulicos.

### 5.6.2. Cojinetes cilíndricos

Los cojinetes cilíndricos son elementos de máquina que permiten a un eje girar libremente, a la vez que soportan una carga en dirección radial. En funcionamiento normal, los cojinetes basados en la lubricación fluidodinámica estudiados en el tema 3.5.1 evitan el contacto entre las superficies sólidas en movimiento relativo, interponiendo una capa de fluido entre ellas, sin necesidad de equipos o bombas auxiliares (por lo que, en teoría, tienen una vida útil infinita). Además, por un lado, la capacidad de carga de estos cojinetes es muy importante y su resistencia al movimiento relativo de las superficies pequeña, y, por otro, los efectos de aplastamiento explicados en 3.5.2, sugieren que también tienen la capacidad de amortiguar cargas dinámicas, al oponerse a la acción que trata de reducir o ampliar el espesor de la capa fluida. Todas estas circunstancias hacen que tengan numerosas aplicaciones prácticas y que toleren condiciones de trabajo cambiantes o adversas.

En el diseño y en la elección de un cojinete de este tipo, se distinguen dos tipos de variables: las controladas por el diseñador, como la viscosidad, la carga, la velocidad de rotación y las dimensiones del cojinete y del eje, y otras que sólo puede controlar de forma indirecta, como el coeficiente de rozamiento efectivo, el flujo de lubricante, el espesor mínimo de la película o la temperatura de trabajo. Este conjunto de variables hace que la estrategia a seguir en el diseño de un cojinete consista en definir los límites satisfactorios de las variables del segundo grupo, para después concretar las del primero de forma que no se sobrepasen dichos límites.

En general, todas estas variables, directa o indirectamente, se engloban de alguna manera en el parámetro de Sommerfeld [3.150] o son función de éste. En los gráficos siguientes, se muestra la evolución del coeficiente de rozamiento efectivo adimensional,<sup>290</sup>  $fR/j$ , el espesor mínimo de película y la excentricidad, la variable de flujo adimensional,  $Q/(Rj\omega b)$ , y la presión máxima desarrollada en la película con alimentación atmosférica, en función de  $S$  y de la relación  $D/b$ , donde  $b$  es el ancho del cojinete y  $D=2R$ , el diámetro del eje. El límite izquierdo de la zona sombreada de la figura 5.19 define la  $h_0$  óptima para fricción mínima y, el derecho, la  $h_0$  óptima para carga máxima (nótese que  $h_0/j=1-\varepsilon$ ). Éstas son las condiciones normales de diseño y el punto de partida para el cálculo del cojinete.

Si bien el trabajo con números de Sommerfeld mayores a los indicados por la zona sombreada conduce a cojinetes más pequeños, con menos consumo y más capacidad de carga, los problemas de alineación, exceso de temperatura o alto rozamiento que se presentan en la práctica desaconsejan su elección. Como se había indicado al final del apartado 3.5.1, la relación de excentricidad óptima de esta clase de cojinetes es  $\varepsilon=0,7$



aproximadamente ( $h_0/j=0,3$ ), a la que corresponden valores de  $S$  comprendidos en el intervalo  $[0,08-0,45]$ , en función de la relación  $D/b$ . Es interesante notar, a su vez, que la relación entre el huelgo máximo y el mínimo de la película en el interior del cojinete viene dada por  $(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ , que para  $\varepsilon=0,7$  es igual a 5,67. Esta relación es muy superior a la  $h_1/h_2$  óptima de un cojinete por cuña, situada alrededor de 2,4 (para  $m=1,4$ ).

Figura 5.19. Coeficiente de rozamiento equivalente adimensional,  $fR/j$ , y espesor mínimo de película,  $h_0/j$ , en función del parámetro de Sommerfeld,  $S$ , y de la relación  $D/b$ .

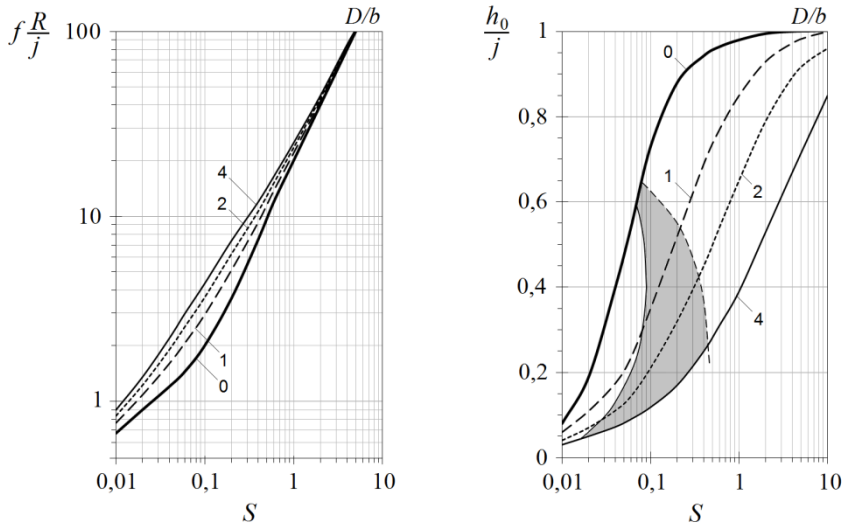
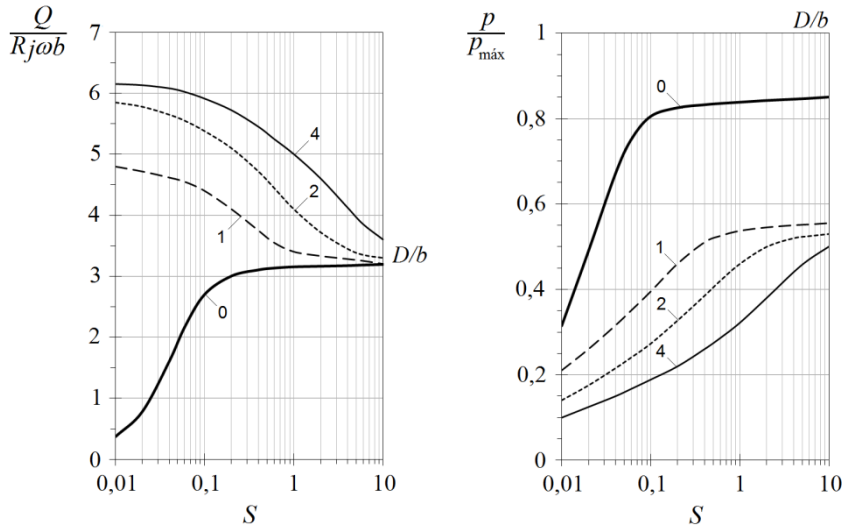


Figura 5.20. Variable de flujo adimensional y presión característica respecto a la máxima desarrollada en la película, en función del parámetro de Sommerfeld y de la relación  $D/b$ .



La teoría expuesta al final del apartado anterior también puede aplicarse numéricamente en esta clase de cojinetes, para tener en cuenta la deformación de las superficies a causa del incremento de la presión. El tratamiento riguroso de esta cuestión no se trata aquí,<sup>291</sup> si bien se reconoce que su efecto es semejante en ambos casos: la distribución no uniforme de la presión en el interior del cojinete lo achata, de forma que, como en los cojinetes planos, también se reduce el ángulo de la cuña curva formada. En la prác-



tica, este fenómeno no es tan trascendente en estos cojinetes porque su encapsulado es bastante robusto, aunque sí se observa que la distribución real de la presión en  $z$  es más uniforme que la teórica, lo que también reduce la presión máxima generada y modifica la diferencia entre el huelgo máximo y el mínimo de la película (v. figura 5.18).

Una de las cuestiones que se producen en esta clase de cojinetes y que diferencian su tratamiento respecto al cojinete plano es la predicción de presiones negativas en parte del perímetro del eje. Estas depresiones, en teoría, pueden llegar a ser tan elevadas que harían cavitarse el fluido en el interior del cojinete, lo que sin duda sería un gran inconveniente para su funcionamiento y su esperanza de vida. En realidad, el efecto frontera de su ancho finito y la ubicación correcta de las linternas de alimentación del cojinete reducen su ocurrencia lo suficiente para suponer que la presión en el interior nunca será negativa (respecto a la presión de alimentación).

Tanto la solución completa de Sommerfeld [3.140], para cojinetes infinitamente largos, como la de Ocvirk [3.161], para cojinetes cortos, predicen una antisimetría de la presión respecto a la posición de huelgo mínimo que provoca presiones negativas en la región divergente del cojinete. Las ecuaciones que dieron lugar a estas soluciones se pueden resolver con condiciones de contorno que inhiban la existencia de presiones negativas. Entre las soluciones propuestas –aunque no sean las únicas, pero sí las más utilizadas por su sencillez–, destacan la solución parcial de Sommerfeld y la de Reynolds. La primera simplemente hace cero la presión para ángulos superiores a  $\pi$  y coincide con la solución completa de Sommerfeld en ángulos inferiores, donde la presión es positiva. La solución de Reynolds supone que la transición entre la zona de presión positiva y la de presión cero se produce de forma gradual, de modo que el gradiente de la presión se adapta, de forma progresiva, a la condición  $p=0$ , sin discontinuidades en su valor medio. Esta hipótesis conduce a presiones ligeramente positivas en la región de entrada de la zona convergente del patín (v. figura 5.21), pero ha sido ratificada por la experiencia: tanto la aparición de cavitación como la transición entre ambas regiones se producen mediante regueros longitudinales de fluido, que se van estrechando a medida que el espesor aumenta.<sup>292</sup>

Como es fácil de entender, cuando se inhibe en la solución la existencia de presiones negativas, la carga soportada por el cojinete deja de ser perpendicular a la dirección de centros  $00'$ , tal como resultaba de la solución completa de Sommerfeld. El ángulo que forma la dirección de aplicación de la carga con la línea de centros,  $\beta$ , se denomina *ángulo de posición* del cojinete (*attitude angle*) y resulta ser la dirección donde se presenta el huelgo mínimo. Para completar este análisis, se evalúan este ángulo y el valor de la carga resultante utilizando la solución de Ocvirk, que es la solución más adecuada a los cojinetes cortos actuales, para los que la relación  $R/b$  suele ser superior a 1,5. El procedimiento es el mismo que el que se ha seguido en 3.5.2, pero utilizando la ecuación [3.161] y la solución parcial de Sommerfeld, por lo que se omiten los pasos de la demostración.

Para la configuración mostrada en la figura 5.22, la carga actuante en la dirección de centros se evalúa de la expresión:

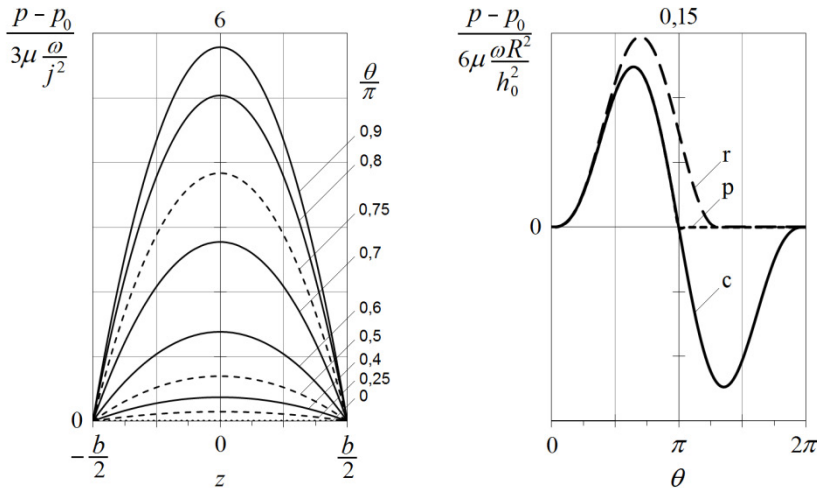
$$F_x = \int_{-b/2}^{\pi} \int_{-b/2}^{b/2} pR \cos \theta d\theta dz = \mu\omega \frac{Rb^3}{j^2} \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \quad [5.178]$$

y la perpendicular de:



$$F_y = \int_0^{\pi} \int_{-b/2}^{b/2} pR \sin \theta d\theta dz = -\frac{\pi}{4} \mu \omega \frac{Rb^3}{j^2} \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \quad [5.179]$$

Figura 5.21. A la izquierda, se muestra la distribución de la presión para la solución de Ocvirk [3.161]. En la gráfica de la derecha, se observa la evolución de la presión en un cojinete infinitamente largo para las soluciones completa de Sommerfeld (c), parcial de Sommerfeld (p) y de Reynolds (r).  $h_0$  es el espesor mínimo de la película.



Evidentemente, la carga total se calcula de  $F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$ , de donde:

$$F = \frac{\pi}{4} \mu \omega \frac{Rb^3}{j^2} \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} (0,621\varepsilon^2 + 1)^{1/2} \quad [5.180]$$

y, finalmente:

$$\text{tg} \beta = -\frac{F_y}{F_x} = \frac{\pi}{4} \frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon} \quad [5.181]$$

Según este resultado, el ángulo  $\beta$  es nulo cuando  $\varepsilon = 1$ , esto es, cuando el eje se apoya sobre la parte inferior del cojinete y la distancia entre centros es máxima. En la figura 5.22, se muestra la evolución del centro del eje respecto al centro del cojinete en función de  $\varepsilon$  (para condiciones de trabajo estables y permanentes).

La fuerza de rozamiento resultante sobre el eje resulta ser:

$$F_R = 2\pi\mu\omega \frac{R^2b}{j} \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \quad [5.182]$$

y el coeficiente de rozamiento efectivo:

$$f = \frac{F_R}{F} = 8 \frac{Rj}{b^2} \frac{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}{\varepsilon(0,621\varepsilon^2 + 1)^{1/2}} \quad [5.183]$$

Obsérvese que, cuando la excentricidad es nula, la fuerza de rozamiento viene dada por el primer término de [5.182], conocido como “fricción de *Petroff*”, y que ésta se hace infinita cuando  $\varepsilon = 1$ . El término dependiente de  $\varepsilon$  de la misma expresión es denominado, comúnmente, “coeficiente multiplicador de *Petroff*”. Este coeficiente crece muy rápido para excentricidades superiores a 0,8 y es prácticamente 1 si  $\varepsilon$  es inferior a 0,7.





Respecto al coeficiente de rozamiento de [5.183] y su paralelismo con la solución dada en [3.148], ambas expresiones indican que  $f$  es infinito para excentricidad nula, lo que es sólo consecuencia de la singularidad debida a la ausencia de carga sobre el cojinete (excluido también el peso propio del eje).

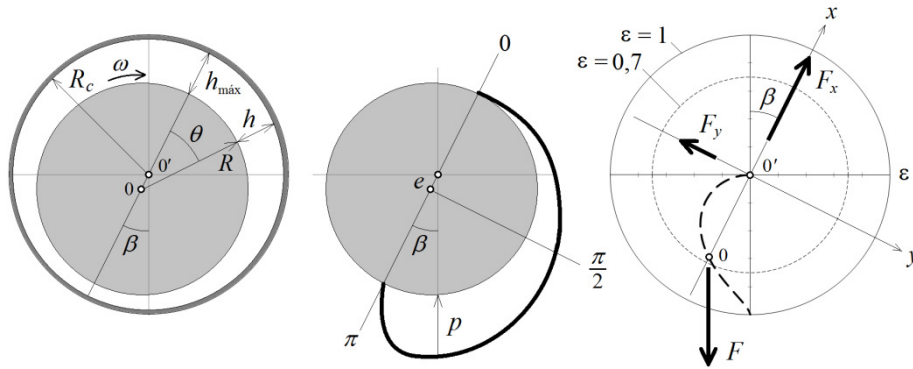


Figura 5.22. Geometría, distribución de la presión (parcial de Sommerfeld) y componentes de la fuerza desarrollada por un cojinete corto. A la derecha, se observa la evolución del centro del eje respecto al centro del cojinete en función de  $\varepsilon$  (línea discontinua). Los círculos concéntricos en  $O'$  son líneas de  $\varepsilon$  constante.

La cantidad de lubricante a aportar a estos cojinetes, como consecuencia de las fugas laterales que se producen, es una cuestión práctica muy interesante, que se resuelve mediante la alimentación de fluido exterior a través de orificios o ranuras perimetrales. La cantidad de fluido a aportar es proporcional a las revoluciones del eje, el juego radial, el ancho del cojinete y la excentricidad, y es función del parámetro de Sommerfeld y de la relación  $R/b$ . Usualmente, este caudal lateral de fugas resulta ser del orden del 70 % del caudal circulante,  $Q$ , y aumenta al hacerlo  $R/b$ .

Por norma general, la alimentación se realiza mediante sólo un orificio circular, o bien una ranura (cuando se prevé que la carga puede cambiar de dirección), ubicados entre el principio de la zona difusora del cojinete y el punto opuesto al de aplicación de la carga, antes del inicio de la zona convergente. Con esta disposición, el valor de la carga desarrollada apenas se ve afectado por la presencia del orificio, y se favorece la alimentación de fluido porque la presión, en tendencia, es algo negativa en esta zona.

La alimentación puede hacerse sin presión o a presión. Evidentemente, la alimentación sin presión es más sencilla y, en la práctica, puede consistir simplemente en la colocación, junto al cojinete, de un tubo vertical o un pequeño depósito con capacidad de lubricante suficiente. No obstante, se ha de convenir que la lubricación presurizada tiene algunas ventajas prácticas que la hacen recomendable frente a la natural. La inyección de fluido fresco a presión cerca del punto de aplicación de la carga tiene un efecto significativo en la temperatura media del cojinete y la reducción de las tensiones térmicas producidas por el calor generado por fricción. Además, la alimentación a presión ayuda en la puesta en marcha y detención del cojinete, a modo de lubricación fluidostática, y reduce la ocurrencia de cavitación.

## 5.7. Flujo de fluidos no newtonianos

En todos los problemas de la mecánica de fluidos es necesario resolver las ecuaciones de conservación sujetas a las condiciones de contorno, que definen la geometría del



problema, y a una descripción matemática del fluido. Esta descripción se realiza mediante una ecuación constitutiva, que no es más que una relación reológica entre las tensiones aplicadas al fluido y las deformaciones consiguientes. La producción, el procesado, la dosificación y la utilización de materiales como polímeros, pinturas, cosméticos y productos farmacéuticos, son algunas de las aplicaciones industriales en donde se produce flujo de un fluido no newtoniano, y que exigen el conocimiento y la aplicación de diagramas reológicos.

La reología se ocupa de la relación entre la tensión y la deformación resultante y es, por tanto, una parte de la mecánica del continuo. La ley de Hooke describe el comportamiento de un sólido elástico mediante una relación lineal y constante entre la tensión y la deformación, y la ley de Newton resuelve el comportamiento de un fluido viscoso lineal entre la tensión de cortadura y la velocidad de deformación. La mayor parte de los fluidos no newtonianos no son, ni puramente viscosos, ni perfectamente elásticos, y a menudo exhiben propiedades que dependen de la historia previa y conducen a diagramas reológicos con lazos de histéresis. Estos fluidos suelen tener una microestructura, cuya escala puede ser de varias micras o de milímetros, que es afectada por el proceso de flujo, de deformación e, incluso, de solidificación o consolidación.

La mayoría de fluidos newtonianos incompresibles son líquidos monofase de bajo peso molecular, y su flujo está bien resuelto mediante las ecuaciones de Navier-Stokes y sus simplificaciones. Cabe señalar que los dos fluidos más abundantes de nuestro entorno, el agua y el aire, son fluidos newtonianos en condiciones normales. El flujo de fluidos no newtonianos, en cambio, está sujeto a características que hacen que la respuesta que se obtiene ante un estado de deformación concreto sea cualitativamente distinta a la que indica la experiencia cotidiana.

La característica esencial del comportamiento no newtoniano viscoelástico es que las tensiones normales son anisótropas cuando el fluido fluye. En reposo, estas tensiones se reducen a la presión hidrostática isotropa pero, en movimiento, la tensión normal ejercida en la dirección del flujo,  $\sigma_{xx}$ , es distinta de las tensiones en dirección perpendicular,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$ . Esta diferencia explica cualitativamente muchos fenómenos “paradójicos” que se dan con fluidos poliméricos, como los efectos de Barus o de Weissenberg,<sup>293</sup> que son consecuencia, de hecho, de la estructura molecular del fluido y de su alineamiento o estiramiento a lo largo de la línea de corriente.

En este apartado, se presentan las ecuaciones que permiten definir el flujo de un fluido no newtoniano, independiente del tiempo, por un tubo capilar y entre placas planas paralelas. El tratamiento se realiza, en particular, con la ley de potencia de Ostwald-de Waele con cierta tensión de fluencia, supuesta constante, y podría extenderse fácilmente a otras geometrías y a otras ecuaciones reológicas de tipo empírico presentes en la literatura (ecuaciones de Prandtl, Eyring, Powel, Williamson, Ellis, etc.).

### 5.7.1. Flujo por un tubo capilar

El equilibrio de fuerzas en dirección longitudinal sobre un elemento de fluido en forma de disco diferencial como el de la figura 3.10 indica que:

$$\pi r^2 p = \pi r^2 (p - \Delta p_L dx) + 2\pi r dx \tau \quad [5.184]$$



de donde se deduce que la tensión rasante es proporcional a la distancia al centro del conducto:

$$\tau = \frac{r}{2} \Delta p_L \quad [5.185]$$

En la obtención de este resultado, no se ha hecho referencia a la constitución física o química del fluido, por lo que es válida en el continuo siempre que sea homogéneo en el interior del volumen diferencial.

Combinando la ecuación [5.185] con la ley potencial de Ostwald-de Waele, resulta:

$$\frac{dv}{dr} = - \left( \frac{r}{2k} \Delta p_L \right)^{\frac{1}{n}} \quad [5.186]$$

que, integrada entre los límites ( $r, v; r=R, v=0$ ), es:

$$\frac{v}{v_0} = 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad [5.187]$$

con:

$$v_0 = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta p_L}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}} \quad [5.188]$$

El caudal volumétrico,  $Q$ , viene dado por:

$$Q = \int_0^R v 2\pi r dr = \frac{n+1}{3n+1} \pi R^2 v_0 \quad [5.189]$$

Con esta ecuación y [5.187], el valor de la tensión rasante en la pared ( $r=R$ ) es:

$$\tau_0 = \frac{R}{2} \Delta p_L = k \left( \frac{3n+1}{n} \frac{Q}{\pi R^3} \right)^n \quad [5.190]$$

Si el fluido presenta cierto comportamiento plástico, tal que su diagrama reológico se ajusta por la expresión:

$$\tau = \tau_f + k \dot{\gamma}^n \quad [5.191]$$

siendo  $\tau_f > 0$  su tensión de fluencia, entonces el flujo presenta, en zonas próximas a su eje de simetría, donde  $\tau < \tau_f$ , una característica de deformación nula, asimilable al comportamiento de sólido rígido (flujo tapón). La figura 5.23 y la ecuación [5.185] enseñan que esta región se extiende una distancia  $r^*$  desde el eje, de valor:

$$r^* = 2 \frac{\tau_f}{\Delta p_L} \quad [5.192]$$

En este caso, el flujo no es posible si el gradiente de presión es inferior a uno dado. Es decir, para que exista flujo plástico en un tubo capilar, debe darse la condición:

$$\Delta p_L > 2 \frac{\tau_f}{R} \quad [5.193]$$



Para obtener la distribución de la velocidad en la región externa al núcleo central del conducto ( $r > r^*$ ), ahora debe cumplirse:

$$\tau = \frac{r}{2} \Delta p_L = \tau_f + k \dot{\gamma}^n > \tau_f \quad [5.194]$$

y, por tanto:

$$\dot{\gamma}^n = \frac{1}{k} \left( \frac{r}{2} \Delta p_L - \tau_f \right) = \frac{\Delta p_L}{2k} (r - r^*) \quad [5.195]$$

Tras integrar, se resuelve:

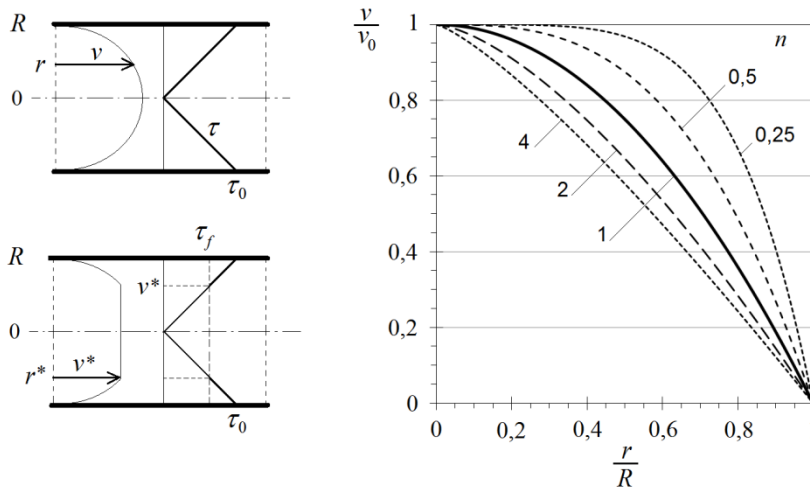
$$v = v^* = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta p_L}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} (R - r^*)^{\frac{n+1}{n}} \quad [5.196]$$

si  $0 < r < r^*$ , y:

$$v = v^* - \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta p_L}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} (r - r^*)^{\frac{n+1}{n}} \quad [5.197]$$

si  $r^* < r < R$ .<sup>294</sup>

Figura 5.23. A la izquierda, flujo a través de un canal circular de ancho constante de un fluido newtoniano (arriba) y de otro con una tensión de fluencia no nula (abajo). A la derecha, se muestra la distribución de la velocidad [5.187] para flujos viscosos y fluidos de Ostwald-de Waele en función del índice de fluencia. El perfil de velocidades resultante para la ley potencial se corresponde con el newtoniano cuando  $n=1$ . Recuérdese que un fluido en que  $n < 1$  se denomina *pseudoplástico*, y *dilatante* si  $n > 1$ .



El caudal resultante es:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{r^*} v^* 2\pi r dr + \int_{r^*}^R v 2\pi r dr = \pi R^2 v^* - 2\pi \int_{r^*}^R \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta p_L}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} (r - r^*)^{\frac{n+1}{n}} r dr = \\ &= \pi R^2 \left( 1 - \frac{2n}{2n+1} \left( \frac{2n+1}{3n+1} \left( 1 - \frac{r^*}{R} \right)^2 + \frac{r^*}{R} \left( 1 - \frac{r^*}{R} \right) \right) \right) v^* \end{aligned} \quad [5.198]$$

de donde no se puede despejar el gradiente de presión de forma explícita, ya que  $r^*$  y  $v^*$  son, a su vez, función de  $\Delta p_L$ .

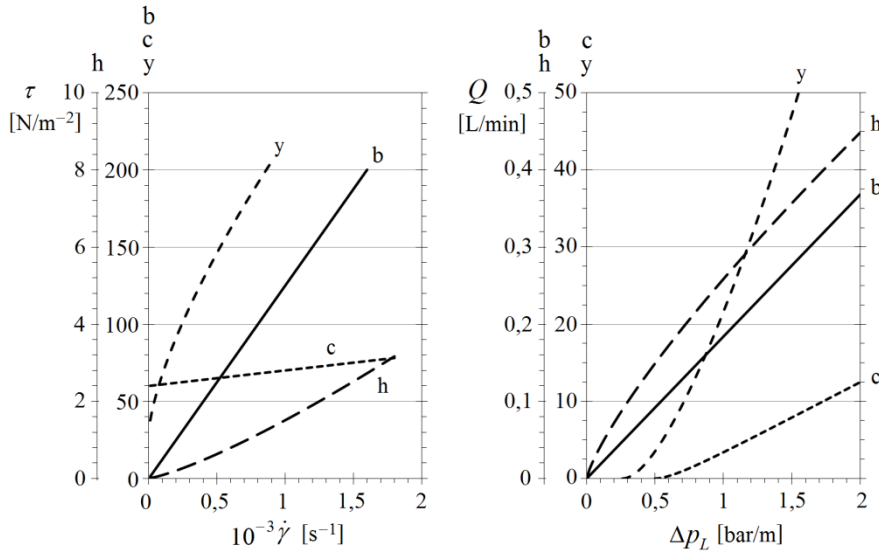


Figura 5.24. Diagramas reológicos típicos de cuatro productos alimentarios (izquierda) y la relación caudal vs gradiente de presión correspondiente, a través de un conducto capilar de  $R = 2,5$  mm (derecha). Leyenda: b, batido; c, crema; h, leche, e y, yogur.

### 5.7.2. Flujo por un canal plano

Un desarrollo paralelo al del apartado anterior, pero para el caso en que el flujo tenga lugar entre dos placas planas infinitamente largas separadas una distancia  $h$ , resuelve que la distribución de la velocidad es:

$$\frac{v}{v_0} = 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad [5.199]$$

con la condición de contorno ( $y = h/2, v = 0$ ) y:

$$v_0 = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta p_L}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{h}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad [5.200]$$

El caudal volumétrico por unidad de ancho vendrá dado por:

$$q = 2 \int_0^{h/2} v dy = \frac{n+1}{2n+1} h v_0 \quad [5.201]$$

El caudal que pasa entre dos placas paralelas de ancho  $b$  es, evidentemente,  $qb$ , y la tensión rasante en la pared:

$$\tau_0 = \frac{h}{2} \Delta p_L = k \left( \frac{2n+1}{n} \frac{2q}{h^2} \right)^n \quad [5.202]$$

Asimismo, cuando el fluido presenta un comportamiento plástico del tipo [5.191], la zona plástica se extiende hasta:



$$y^* = \frac{\tau_f}{\Delta p_L} \quad [5.203]$$

y el flujo es posible si:

$$\Delta p_L > 2 \frac{\tau_f}{h} \quad [5.204]$$

La distribución de velocidades, en este caso, es:

$$v = v^* = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta p_L}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{h}{2} - y^* \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad [5.205]$$

si  $0 < y < y^*$ ,  $y$ :

$$v = v^* - \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta p_L}{k} \right)^{\frac{1}{n}} (y - y^*)^{\frac{n+1}{n}} \quad [5.206]$$

si  $y^* < y < h/2$ , para un caudal por unidad de ancho:

$$q = h \left( 1 - \frac{n}{2n+1} \left( 1 - \frac{2y^*}{h} \right) \right) v^* \quad [5.207]$$

El lector puede comprobar fácilmente que las ecuaciones de este apartado se corresponden con las deducidas en 3.4.2, para el flujo laminar unidireccional de un fluido newtoniano, haciendo  $k = \mu$ ,  $\tau_f = 0$  y  $n = 1$ . De la misma manera, también es posible su aplicación a otras geometrías utilizando el procedimiento descrito en 3.4.3.

## 5.8. Discontinuidades en el seno de un fluido

Se habla de discontinuidad en el seno del fluido cuando alguna de sus magnitudes o de sus derivadas no son continuas en todo el espacio en todo momento. Cuando las magnitudes fluidas experimentan saltos finitos a través de una superficie de discontinuidad, se dice que la discontinuidad es *finita* o de orden cero en ella, mientras que, cuando todas las magnitudes son continuas pero alguna de sus derivadas no, la discontinuidad es *débil* y su orden, el de la primera derivada no continua.

Los saltos de las magnitudes fluidas o de sus derivadas a través de la discontinuidad no son arbitrarios, sino que están sujetos a las leyes de conservación de la masa, el impulso y la energía, las cuales establecen las denominadas *condiciones de compatibilidad*. Estas condiciones son distintas en función de si la discontinuidad es finita o débil, pues se refieren al salto de la magnitud o al de sus derivadas, y también dependen de si el fluido atraviesa en su movimiento la discontinuidad o no lo hace.

### 5.8.1. Condiciones generales de compatibilidad

Las discontinuidades débiles se presentan en superficies características de las ecuaciones de Euler, es decir, en superficies fluidas, que están en reposo respecto al fluido, o en ondas de Mach, que se mueven a la velocidad del sonido respecto al mismo.<sup>295</sup> Esto es así porque las discontinuidades débiles no pueden producirse espontáneamente, sino



que son siempre el resultado de alguna singularidad de las condiciones iniciales, del contorno o de los límites del flujo (si se pretende que la solución de Euler represente, aproximadamente, el flujo real y la solución de Navier-Stokes).

Al eliminar de las ecuaciones de Navier-Stokes los términos asociados a los esfuerzos viscosos y los flujos de calor, proporcionales a los gradientes de velocidad y temperatura, desaparecen, a su vez, los mecanismos naturales que eliminan los saltos en las derivadas de las magnitudes fluidas. En consecuencia, cuando los valores de  $Re$  o de  $ReSt$  son muy elevados, aparecen regiones de espesor casi nulo a través de las cuales las magnitudes fluidas y sus derivadas experimentan cambios de su mismo orden, de modo que la superficie que las separa se muestra como una discontinuidad de la solución de Euler (por ejemplo, en las capas límite estudiadas en el capítulo 4).

Por su parte, las ondas de Mach son discontinuidades débiles que se mueven a la velocidad del sonido respecto al fluido y, en este sentido, son líneas características del flujo que pueden considerarse ondas de choque diferenciales o de muy baja intensidad. Estas líneas aparecen en los flujos supersónicos en presencia de cuerpos planos, romos o agudos,<sup>296</sup> y su dirección es de forma que la componente de la velocidad incidente en dirección normal a la línea es siempre la velocidad del sonido correspondiente (v. figura 5.25). Es decir, las líneas de Mach cortan las líneas de corriente formando un ángulo que cumple la condición  $\sin\alpha = 1/M$ , que se denomina *ángulo de Mach* (v. figura 3.17).

Los cambios que experimenta el flujo a través de una onda de Mach son diferenciales o nulos, tanto en la desviación que experimenta la corriente como en el cambio de velocidad. Para un cambio  $dv_n$  en la velocidad normal incidente, teniendo en cuenta que la velocidad del fluido no cambia en dirección tangente a la onda, se aprecia en el flujo un cambio en dirección de valor  $d\theta$ , tal que:

$$\begin{aligned}(v + dv) \cos(-d\theta) - v &= dv_n \sin \alpha \\ (v + dv) \sin(-d\theta) &= dv_n \cos \alpha\end{aligned}\quad [5.208]$$

de donde, linealizando y despreciando términos de orden mayor, resulta  $dv = dv_n \sin \alpha$  y  $-vd\theta = dv_n \cos \alpha$ . De ambas ecuaciones, y como  $\text{tg} \alpha = 1/(M^2 - 1)^{1/2}$ , se deduce:

$$\frac{dv}{v} = -\text{tg} \alpha d\theta = \pm \frac{d\theta}{(M^2 - 1)^{1/2}} \quad [5.209]$$

Los ángulos  $d\theta$  y  $\alpha$  se definen respecto a la línea de corriente de entrada y son positivos en sentido levógiro. El doble signo “ $\pm$ ” se ha de utilizar para tener en cuenta que un mismo  $d\theta$  puede suponer una deceleración o una aceleración del flujo, en función del cuadrante en que se encuentre el ángulo de Mach,  $\alpha$ , para un mismo valor de  $M$  (v. figura 5.25).

Por otro lado, la conservación de la cantidad de movimiento a través de la onda (v. [3.175], pero con una onda inclinada respecto a la línea de corriente) y de la entalpía de remanso, al ser el movimiento isentrópico y el fluido calóricamente perfecto, indica:

$$\begin{aligned}dp &= -\rho v dv \\ h_0 &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\end{aligned}\quad [5.210]$$

La segunda ecuación, con [3.182] y  $c = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ , también es:

$$\frac{c_0^2}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2} \quad [5.211]$$

que es otra forma de describir la conservación de la energía. Obsérvese que, si la onda es de expansión y  $dv > 0$ , el número de Mach aumenta porque lo hace  $v$ , pero también porque disminuye  $c$ . En consecuencia, el ángulo  $\alpha$  de la figura 5.25 (izquierda) va disminuyendo y la línea de Mach corta la línea de corriente de una forma más sesgada (menos perpendicular) a medida que el fluido se expande.

De las ecuaciones [5.210] y diferenciando [5.211], con  $v = cM$ , se llega fácilmente a:

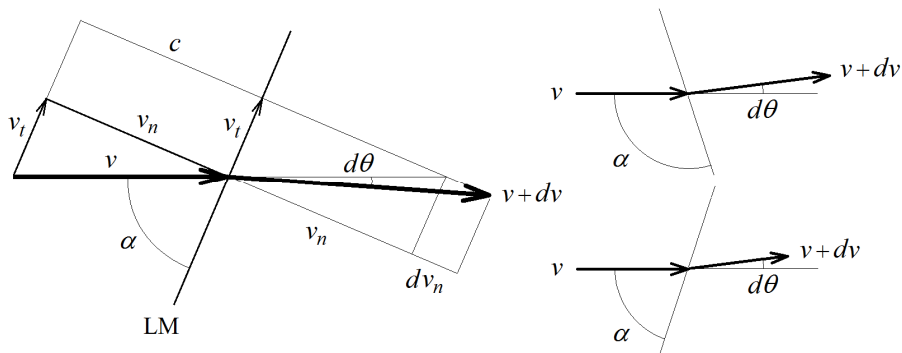
$$\frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{dv}{v} \quad [5.212]$$

$$\frac{dM}{M} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \frac{dv}{v}$$

que son las relaciones de compatibilidad a través de una onda de Mach.

Estas ecuaciones indican que, cuando el flujo es permanente y no hay cambio en la velocidad,  $dv = 0$ , tampoco se produce cambio en la presión ni el número de Mach, y las líneas de Mach son rectas paralelas de pendiente  $\alpha$ . Nótese además que, cuando  $\alpha = \pi/2$ , resulta  $M = 1$ , y entonces  $v = v_n = c$  (la línea de Mach es una onda acústica como la mostrada en la figura 3.16). En contrapartida, cuando la desviación  $d\theta$  se produce de forma que la línea de corriente se acerca a la línea de Mach, se produce una deceleración del flujo, que supone una compresión y  $dp > 0$ . En caso contrario, el flujo se acelera y se expande, con  $dp < 0$ . Esta expansión es conocida como la *expansión isentrópica de Prandtl-Meyer*, en que las características extremas, de entrada y de salida, son líneas de discontinuidad de la aceleración.

Figura 5.25. Cambio de las magnitudes cinemáticas a su paso por una línea de Mach (LM) con velocidades del fluido relativas a la línea ( $v$ , figura 3.16). A la derecha, se muestran sendos casos de aceleración ( $dp < 0$ ) y deceleración ( $dp > 0$ ) para un mismo  $M$  de entrada.



Las discontinuidades finitas o de orden cero dividen el campo fluido en dos regiones, (1) y (2), a ambos lados de la superficie de discontinuidad, donde las magnitudes fluidas son continuas. Tomando un sistema de referencia solidario a la discontinuidad, supuesta localmente plana (aunque, en general, pueda ser curva) y de espesor infinitesimal, de forma que puedan despreciarse los flujos y las fuerzas extendidas sobre su superficie





lateral, los principios de conservación integral de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, descritos en función de la velocidad relativa del fluido a la discontinuidad, se escriben:

$$\begin{aligned}\rho_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} - \rho_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \rho_2 \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}) - \rho_1 \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}) &= p_2 \cdot \mathbf{n} - p_1 \cdot \mathbf{n} \quad [5.213] \\ \rho_2 \left( u_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}) - \rho_1 \left( u_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}) &= p_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}) - p_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal a la superficie del lado que sale el fluido (2), en su caso, de modo que  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  es la velocidad normal del fluido relativa a la discontinuidad. Estas ecuaciones pueden reescribirse de la forma:

$$\begin{aligned}\rho_1 v_{1n} &= \rho_2 v_{2n} = j \\ j v_{1n} + p_1 &= j v_{2n} + p_2 \\ j v_{1t} &= j v_{2t} \quad [5.214] \\ j \left( u_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) + p_1 v_{1n} &= j \left( u_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) + p_2 v_{2n}\end{aligned}$$

donde  $j$  es la densidad de flujo másico. La última de estas ecuaciones también puede escribirse en función de la entalpía de remanso y de las componentes de la velocidad como:

$$\begin{aligned}j \left( u_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) + p_1 v_{1n} &= j \left( u_1 + \frac{1}{2} (v_{1n}^2 + v_{1t}^2) \right) + p_1 v_{1n} \\ j \left( u_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) + p_1 v_{1n} &= j h_{01} = j h_{02} \quad [5.215]\end{aligned}$$

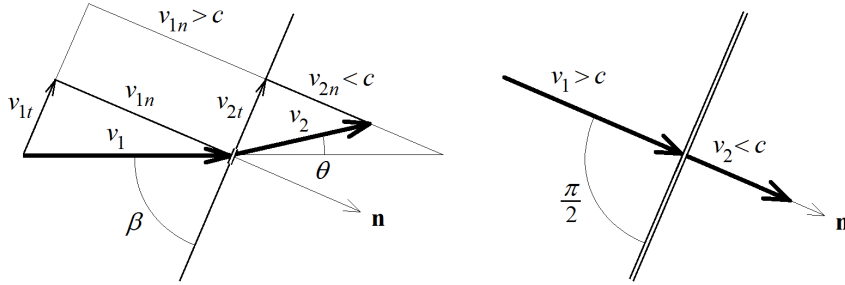
A la vista de todas estas relaciones y del valor del flujo másico específico,  $j$ , se deduce que existen dos tipos de discontinuidades finitas: aquellas en las que el fluido no atraviesa la discontinuidad y  $j=0$ , denominadas *discontinuidades tangenciales*, y otras en las que sí lo hace, que son las *discontinuidades normales* u ondas de choque (*shock waves*).

En las discontinuidades tangenciales, la superficie de discontinuidad es una superficie fluida donde  $v_{1n} = v_{2n} = 0$ . De la segunda ecuación [5.214], se sigue que  $p_1 = p_2$ , mientras que las dos últimas se verifican para cualquier valor de  $u$  y de la velocidad tangencial  $v_t$ . Esto es, en una discontinuidad tangencial, la presión y la velocidad normal son continuas (la velocidad normal lo es por ser nula), mientras que el resto de magnitudes pueden ser discontinuas o no.

En las discontinuidades normales, las velocidades  $v_n$  no son nulas (pues se considera que ambas densidades tampoco lo son) y, además, han de ser discontinuas a través de la superficie,  $v_{1n} \neq v_{2n}$ , ya que, en caso contrario, las densidades serían también iguales, lo que comportaría la identidad del resto de magnitudes y no habría discontinuidad. Es decir, estas discontinuidades sólo se presentan en fluidos compresibles e implican el salto de todas las magnitudes a su través, salvo la velocidad tangencial, que sí se conserva, como se deduce de la tercera ecuación de [5.214]. En estas discontinuidades, la velocidad tangencial sólo contribuye aumentando la energía cinética total del flujo [5.215].



Figura 5.26. Relaciones para el salto a través de una discontinuidad finita. A la izquierda, una onda de choque oblicua y, a la derecha, una normal.



Se verá, a continuación, que las ondas de choque se mueven con respecto al fluido a velocidades supersónicas, de modo que, en resumen, si al analizar el movimiento asociado a una perturbación se pueden despreciar los términos viscosos y de conducción de calor, las superficies donde se produce la discontinuidad, o no se mueven con respecto al fluido (y son superficies de Euler o discontinuidades tangenciales), o lo hacen a la velocidad del sonido (y son superficies de Mach), o lo hacen a una velocidad superior (y son ondas de choque).

### 5.8.2. Expansión isentrópica de Prandtl-Meyer

Cuando un cuerpo provoca en el flujo supersónico que lo envuelve un cambio de dirección que lo expande, las líneas de Mach que aparecen a partir del vértice divergen para acomodar gradualmente la expansión entre las dos regiones uniformes. Si el contorno del cuerpo es de forma que el flujo ha de comprimirse, la convergencia de las líneas de Mach crea una región en la que las magnitudes fluidas acaban por tener un salto finito y se produce una onda de choque oblicua (v. figura 5.27). En la región de transición entre los dos flujos uniformes de velocidad constante, se produce un cambio continuo en el flujo, que implica la existencia de infinitas líneas de Mach y una aceleración (o deceleración) gradual.

Si el flujo de entrada es uniforme, se mantiene irrotacional a través de las ondas de Mach en ausencia de ondas de choque, lo que permite integrar las ecuaciones [5.212], con [5.209], para analizar la variación de  $M$  y  $p$  como consecuencia de la deflexión de la corriente. Esta operación es interesante sobre todo en las expansiones, en que, al no producirse ondas de choque, el número de Mach siempre aumenta cuando  $\theta$  disminuye (v. figura 5.25; para  $\alpha$  inferiores a  $\pi/2$ , el ángulo  $\theta$  aumenta en valor absoluto).

La relación entre  $M$  y la desviación  $\theta$  es:

$$\frac{dM}{M} = - \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{(M^{1/2} - 1)^{1/2}} d\theta \quad [5.216]$$

Para integrar esta ecuación, se define por conveniencia el ángulo de Prandtl-Meyer,  $\delta^*$ , que es nulo cuando  $M = 1$  y que aumenta cuando  $\theta$  disminuye. El resultado de la integración, entre las condiciones ( $\delta^* = 0, M = 1; \delta^*, M$ ), es:



$$\delta^* = \int_0^{\delta^*} d\theta = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{1/2} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(M^{1/2}-1)\right)^{1/2} - \operatorname{tg}^{-1}(M^{1/2}-1)^{1/2} \quad [5.217]$$

que es la función de Prandtl-Meyer para la expansión supersónica, con  $\delta^*$  en radianes.

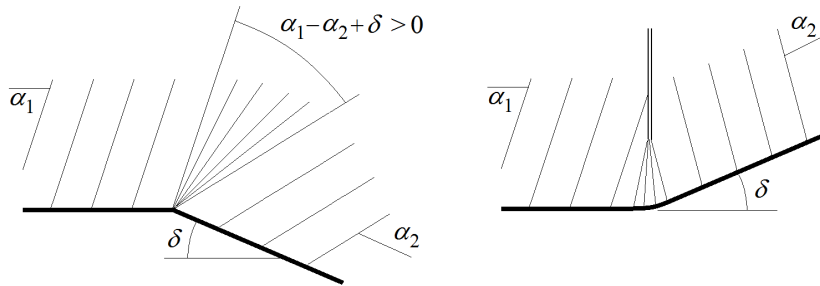


Figura 5.27. Expansión y compresión de Prandtl-Meyer. En la región de flujo uniforme, no hay cambio en la presión ni en el número de Mach, y las líneas de Mach son paralelas. A la izquierda, se muestra el caso en que el contorno induce la expansión del flujo, es decir, su aceleración y el aumento gradual del número de Mach. A la derecha, el caso contrario, en que se observa la formación de una onda de choque a cierta distancia del contorno por la confluencia de las líneas de Mach. En ambos casos, el proceso es adiabático pero, en el segundo, deja de ser reversible en la discontinuidad finita y, además, aparece una gran vorticidad tras el choque si la onda no es de intensidad constante o es curva.

En una expansión de Prandtl-Meyer como la de la figura 5.28, la desviación  $\delta$  que experimenta la corriente entre las dos características extremas, donde los números de Mach son  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente, es  $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 + (\theta_2 - \theta_1)$ , que también puede calcularse como  $\delta = \delta_2^* - \delta_1^*$ , siendo cada  $\delta_i^*$  la desviación que experimentaría una corriente hipotética al pasar de  $M=1$  a  $M_i$ . Los valores de  $\delta_i^*$  que se deducen de la ecuación anterior se han presentado de forma gráfica en la figura 5.28. Si, después de esta primera expansión, se produjera otra, el estado inicial de la segunda sería el final de la primera, pues entre ellas el flujo es uniforme, por lo que su estado final depende, a su vez, del estado inicial  $M_1$  y de la desviación total acumulada, independientemente de que ésta se haya producido entre dos vértices, en uno sólo o de forma progresiva en un contorno romo. Es decir, el estado final de una expansión de Prandtl-Meyer sólo depende de  $M_1$  y de la desviación total de la corriente, y no de la forma en que ésta se produzca.<sup>297</sup>

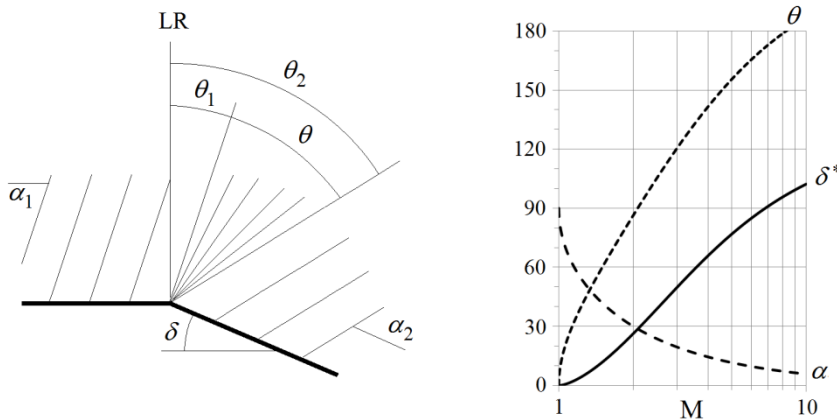


Figura 5.28. Ángulos característicos de una expansión de Prandtl-Meyer y su relación con el número de Mach. Se verifica que  $\delta = \theta + \alpha - 90^\circ$  (en grados). LR es la línea de referencia que define la dirección del eje polar. Este ángulo  $\theta$  no coincide con el de la figura 5.25 o la ecuación [5.216].



Para concluir, como en esta expansión se cumple que  $dv > 0$  y  $dM > 0$ , la deflexión máxima posible se encuentra cuando la corriente incidente es sónica y la emergente tiene la dirección de la característica, es decir, sólo componente tangencial a la onda y un Mach de salida infinito. Se deduce de [5.217] que esta deflexión es de  $130,45^\circ$  para  $\gamma = 7/5$ . Si el contorno presenta un ángulo superior, entre la característica correspondiente a la desviación máxima y el contorno existe el vacío, pues la corriente isentrópica no puede llenar el hueco formado.

### 5.8.3. Superficies de discontinuidad tangencial

Las superficies de discontinuidad tangencial se suelen considerar capas de torbellinos (*vortex sheet*) de espesor infinitesimal. En estas capas, se puede definir una vorticidad,  $\Omega$ , tangente a la superficie y de intensidad tal que la circulación asociada por unidad de longitud sea finita. Esta circulación puede calcularse del límite

$$\Gamma = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \Omega \rightarrow \infty}} \Omega \delta \quad [5.218]$$

y se corresponde con el flujo de vorticidad a través de la superficie de ancho  $\delta$  normal a la capa.

Según el teorema de Stokes, la circulación a lo largo del contorno de espesor  $\delta$  y ancho unitario es  $\Gamma = \Omega \delta$  y tiene la dirección de la tangente a la superficie, esto es,  $\Gamma = \Omega \delta \mathbf{s}$ , con  $\Omega = \Omega \mathbf{s}$ . Si  $\mathbf{n}$  es un versor normal a la superficie del lado (1), entonces la discontinuidad tangencial local es de valor  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \Gamma \wedge \mathbf{n}$ , ya que la velocidad normal a la superficie no aporta circulación porque es nula. Del mismo modo, se puede afirmar que la existencia de una discontinuidad tangencial provoca la aparición de una capa de torbellinos de intensidad  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ .

Las implicaciones de esta capa de torbellinos son múltiples, pero a menudo van asociadas a la aparición de inestabilidades sobre la superficie y a la gestación de capas de mezcla, o a que la propia superficie se deforme y adquiera configuraciones típicas en forma de ondas longitudinales o transversales. Las inestabilidades más frecuentes se presentan en dos formas básicas: la *inestabilidad de Kelvin-Helmholtz*, de forma parecida a la espiral de Cornu o clotoide, y la *inestabilidad de Rayleigh-Taylor*, semejante al sombrero de una seta. Ambas formas típicas de inestabilidad se presentan en la figura 5.29.<sup>298</sup>

El mecanismo de origen de una inestabilidad puede entenderse de los esquemas de la figura 5.30. Supóngase que dos flujos uniformes e irrotacionales se mueven con velocidades opuestas a ambos lados de una discontinuidad tangencial y que, en ésta, se produce una perturbación que la ondula y forma una inflexión.<sup>299</sup> Dado que la vorticidad generada es transportada por el flujo a ambos lados de la discontinuidad, las crestas de las ondas viajan en direcciones opuestas y acaban por enrollarse formando un vórtice espiral. Si la vorticidad generada por la perturbación es de signo opuesto, entonces el patrón de vórtices que se forma es simétrico respecto a la línea discontinua inicial. La primera forma inestable se denomina *solución de fase par* o *solución sinuosa*, y la segunda, *solución de fase impar* o *solución varicosa*.

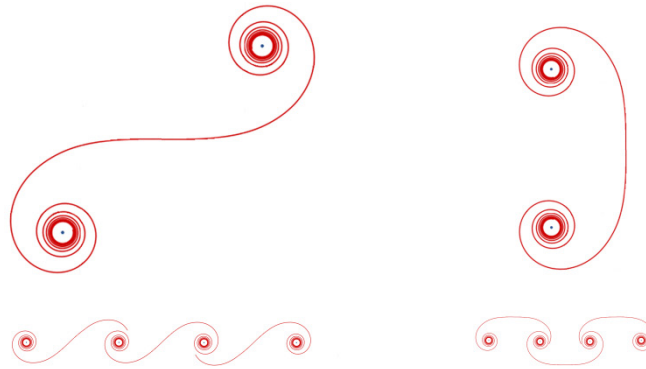


Figura 5.29. Formas básicas de las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz (izquierda) y Rayleigh-Taylor (derecha). Por norma general, la primera suele dominar el movimiento en dirección longitudinal, mientras que la segunda lo hace en dirección transversal. Las curvas múltiples se obtienen topológicamente añadiendo una función de fase.

Desde el punto de vista topológico, una curva en el espacio,  $r(s)$ , está completamente caracterizada por su coordenada curvilínea,  $s$ ; su curvatura,  $\kappa(s)$ , y su torsión,  $\tau(s)$ , en el marco de Frenet. Se sabe, además, que todas las curvas con idénticos  $\kappa$  y  $\tau$  son congruentes entre sí, independientemente de las coordenadas iniciales de la curva (punto O de la figura 1.4) y, por tanto, las variables  $(s, \kappa, \tau)$  son intrínsecas a un tipo de curva.

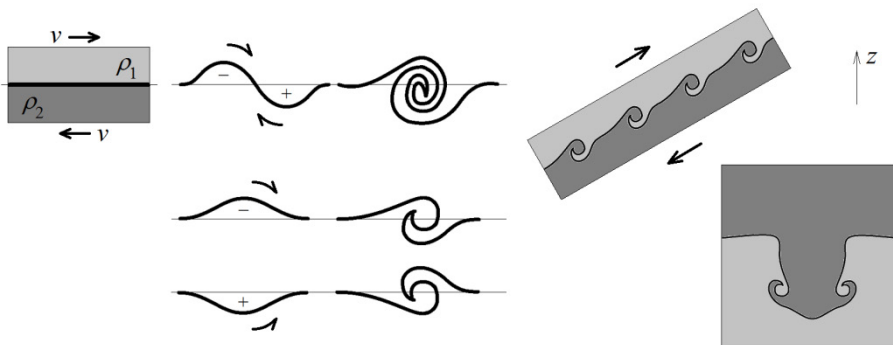


Figura 5.30. Gestación de inestabilidades de fase par (arriba) y de fase impar (abajo), y ejemplos. La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (fase par) aparece, por ejemplo, en el movimiento por un tubo inclinado de dos fluidos de densidades distintas, en que el inferior es el más denso. La inestabilidad de Rayleigh-Taylor (fase impar) se puede producir también entre dos líquidos de densidades distintas, si inicialmente están en equilibrio inestable, es decir, el más denso está encima. La ruptura del equilibrio fuerza un patrón de penetración en forma de seta. Existen numerosos experimentos caseros que permiten visualizar ambas inestabilidades.

Las funciones  $f(s, \kappa, \tau) = 0$  son superficies cuya intersección por parejas definen curvas en el espacio  $(s, \kappa, \tau)$ , que tienen una equivalencia bien conocida en el espacio  $(x, y, z)$ . Por ejemplo, para la pareja de funciones:

$$\begin{aligned} f_\tau(s, \kappa, \tau) &= \tau = 0 \\ f_\kappa(s, \kappa, \tau) &= \kappa - g(s) = 0 \end{aligned} \tag{5.219}$$

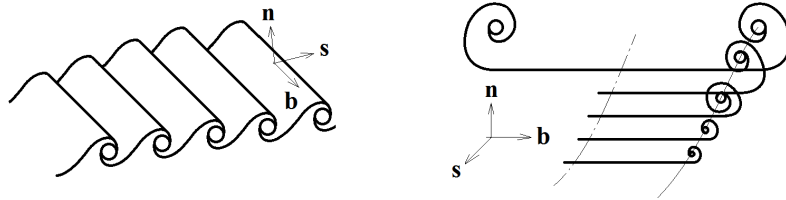
se sabe que, cuando  $g(s) = 0$ , la curva formada tiene curvatura y torsión nulas, y es una recta en el espacio  $(x, y, z)$ . Si  $g(s) = 1$ , la curva en el espacio  $(s, \kappa, \tau)$  es una recta desplazada respecto al origen, paralela al eje  $s$  y situada en el plano  $\tau = 0$ , pero en  $(x, y, z)$  es un círculo. Si  $g(s) = 1/s$ , la curva en  $(x, y, z)$  es una espiral logarítmica y si  $g(s) = s$ , entonces es una espiral de Cornu. A partir de aquí, se inicia una secuencia de modo que, para  $g(s) = s^n$ , las espirales son del tipo de Cornu si  $n$  es impar, y en forma de seta si  $n$  es par (y más cerradas cuanto mayor sea  $n$ ). Se puede conseguir una secuencia continua de espirales introduciendo una función de fase,  $\varphi(s)$ , tal que  $g(s) = d\varphi/ds$  sea la curvatura



de la curva. Si  $\varphi = 1/\cos^2(s)$ , se obtiene la espiral múltiple de Cornu que se muestra en la figura 5.29 y, si  $\varphi = \text{tg}(s)/\cos(s)$ , entonces se forma la característica en doble seta.<sup>300</sup>

En general, existen dos situaciones extremas en el análisis topológico de las curvas en el espacio: aquellas en las que la torsión es nula y son dominadas por su curvatura, aunque sea pequeña, y otras en las que domina la torsión, puesto que su curvatura es mínima, aunque no nula.<sup>301</sup> En el primer caso, la curva está confinada en el plano  $(\mathbf{s}, \mathbf{n})$  y el vector binormal mantiene su dirección, siendo  $d\mathbf{b}/ds = 0$ . Estas curvas se generan mediante el desplazamiento paramétrico a lo largo del vector tangente,  $s(p)$ , que puede ser una línea de corriente. En el segundo caso, es el vector tangente el que se mantiene prácticamente invariante,  $ds/ds \approx 0$  y la curva se genera en el plano  $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$  siguiendo la dirección de la binormal,  $\tau(p)$ . Las curvas dominadas por su curvatura dan lugar a superficies que se enrollan a lo largo de la dirección binormal, mientras que las de torsión dominante dan lugar a superficies enrolladas en la dirección tangente. Es evidente que ambos casos se corresponden bastante bien con la forma clásica de las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y Rayleigh-Taylor de la figura 5.30.

Figura 5.31. Superficies con curvas de curvatura (izquierda) y torsión (derecha) dominantes. El primer caso se encuentra, por ejemplo, en la estela tras un cilindro (v. figura 4.11), mientras que el segundo se observa en la estela de un avión, el cual deja a su paso un rastro de vórtices que es especialmente visible los días con humedad bastante elevada (la depresión generada en el interior del vórtice hace condensar el vapor de agua del aire en gotitas que evidencian su presencia). La longitud del vórtice se relaciona directamente con la capacidad de sustentación del ala y es, por tanto, mayor en los aviones grandes (cuyos vórtices pueden engullir aviones más pequeños).



Desde el punto de vista fluidodinámico, el movimiento permanente del fluido a altos números de Reynolds puede ser descrito por las ecuaciones de Euler en coordenadas intrínsecas [3.7], que también pueden escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} \rho v \frac{\partial v}{\partial s} + \mathbf{s} \cdot \nabla(p + \rho U) &= e_s = 0 \\ \rho \kappa v^2 + \mathbf{n} \cdot \nabla(p + \rho U) &= e_n = 0 \\ \mathbf{b} \cdot \nabla(p + \rho U) &= e_b = 0 \end{aligned} \quad [5.220]$$

Si existen fuerzas másicas que no deriven de un potencial  $U$ , o bien en el flujo aparecen otras fuerzas o perturbaciones,  $\mathbf{f}$ , que puedan afectar el movimiento, entonces se ha de cumplir la identidad vectorial:

$$e_s \mathbf{s} + e_n \mathbf{n} + e_b \mathbf{b} = f_s \mathbf{s} + f_n \mathbf{n} + f_b \mathbf{b} \quad [5.221]$$

Evidentemente, si las fuerzas  $\mathbf{f}$  son nulas, se cumple:

$$\kappa = \frac{-\mathbf{n} \cdot \nabla(p + \rho U)}{\rho v^2} \quad [5.222]$$

Es decir, las ecuaciones de Euler en ausencia de fuerzas externas conducen a flujos de curvatura dominante (a menos que sea nula), ya que el gradiente combinado de la presión y de las fuerzas másicas conservativas en dirección binormal ha de ser nulo. Para ver mejor las implicaciones de esta afirmación, puede analizarse el resultado de derivar



la ecuación [5.221] respecto a la coordenada  $s$  (ténganse presentes las relaciones de Serret-Frenet [1.30]). El resultado es:

$$\left(\frac{de_s}{ds} - \kappa e_n\right) \mathbf{s} + \left(\frac{de_n}{ds} + \kappa e_s - \tau e_b\right) \mathbf{n} + \left(\frac{de_b}{ds} + \tau e_n\right) \mathbf{b} = \frac{df}{ds} \quad [5.223]$$

Por tanto, cuando  $f_b=0$  en todo el campo fluido, aunque no lo sean  $f_s$  y  $f_n$ , ha de ser  $e_b=0$ , pero también  $de_b/ds=0$ , y entonces:

$$\tau = 0 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{D} \propto \mathbf{v} \cdot \nabla \wedge \mathbf{v} \quad [5.224]$$

Según este resultado, la situación de torsión nula implica que la densidad de helicidad,  $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ , es también nula y  $\Omega_s=0$ . Por otro lado, si la variación en  $s$  del resto de fuerzas exteriores también es nula, entonces los términos  $e_s$  y  $e_n$  forman un grupo armónico, en el sentido que cumplen la condición:

$$\begin{aligned} \frac{de_s}{ds} - \kappa e_n &= 0 \\ \frac{de_n}{ds} + \kappa e_s &= 0 \end{aligned} \quad [5.225]$$

y, por ello, cabe esperar soluciones en forma de espiral en la dirección de la tangente, con su eje en la dirección binormal.

Se puede analizar el caso límite en que  $\kappa=0$  cuando son nulas  $f_s$  y su derivada en  $s$ , pero, en cambio, no lo son  $f_n$  ni  $f_b$ , aunque sí lo sea  $df/ds$ . En este supuesto,  $e_s=f_s=0$ , y entonces resulta que son  $e_n$  y  $e_b$  los que son armónicos:

$$\begin{aligned} \frac{de_n}{ds} - \tau e_b &= 0 \\ \frac{de_b}{ds} + \tau e_n &= 0 \end{aligned} \quad [5.226]$$

y el flujo es de torsión dominante con espirales en dirección de la binormal y de eje en la tangente. En este movimiento, según [5.222], el gradiente de la presión y de las fuerzas másicas conservativas es perpendicular a la dirección normal, o bien es nulo.

#### 5.8.4. Ondas de choque normales

Se ha visto que los saltos de las magnitudes fluidas a través de la superficie de discontinuidad finita que supone una onda de choque no son arbitrarios, sino que obedecen a los principios de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía descritos por las ecuaciones [5.214].

El caso más general de onda de choque se produce de forma que la velocidad incidente a la onda forma un ángulo no recto con ésta,  $\beta$ , y, por tanto, la velocidad del fluido tiene una componente tangencial no nula, situada en el plano tangente a la superficie de la onda (v. figura 5.26). En estas ondas, denominadas *oblicuas*, se conserva la componente tangencial de la velocidad,  $v_t$ , pero no la normal,  $v_n$ . Si la onda de choque forma un ángulo recto con la velocidad incidente, tal que  $v=v_n$  y  $v_t=0$ , entonces la onda se denomina *normal*.



La onda de choque oblicua se reduce a la normal si a todo el campo de movimiento del fluido se le resta la componente tangencial a la onda y se trabaja sólo con las velocidades normales y los números de Mach referidos a éstas. Por tanto, todas las relaciones y los saltos de propiedades de las ondas de choque normales que se explican en este apartado son válidos cuando se refieren a la componente normal de la velocidad incidente de una onda oblicua, y se utilizan los números de Mach:

$$\begin{aligned} M_{1n} &= M_1 \sin \beta \\ M_{2n} &= M_2 \sin(\beta - \theta) \end{aligned} \quad [5.227]$$

donde  $\theta$  es la deflexión de la corriente tras la onda. Como particularidad interesante de las ondas de choque oblicuas, el flujo después de la onda oblicua puede seguir siendo supersónico, pues es sólo la componente normal de la velocidad la que se reduce en el salto, lo que también acarrea la deflexión del flujo hacia la onda tras ella.

El aumento de entropía en una onda de choque indica que el movimiento en ellas es irreversible, es decir, se degrada energía debido a los procesos disipativos que se producen en ella. La cantidad de energía que se disipa depende del resultado de aplicar los principios de conservación a ambos lados de la onda, y su espesor es la distancia necesaria para que dichos efectos disipativos puedan tener lugar. Este aumento de entropía en una onda de choque tiene otro efecto importante pues, aunque el flujo sea potencial delante del choque, detrás de él normalmente es rotacional, salvo en aquellos casos en los que la onda sea de intensidad uniforme en toda su área y corte al flujo con un ángulo constante (la onda de choque normal de este tema se supone, precisamente, uno de estos casos). Si, por ejemplo, la onda de choque fuera curva y el flujo a la entrada, uniforme, la deflexión del fluido tras la onda sería diferente en secciones diferentes, lo que acarrearía la aparición de velocidades tangenciales que generarían vorticidad.

Aunque en el interior de una onda de choque normal el flujo ya no pueda ser considerado isentrópico o reversible porque los efectos disipativos son importantes, lo cierto es que continua siendo adiabático y, por tanto, conserva su entalpía de remanso a su paso por la onda. El fluido también conserva su temperatura de remanso si es un gas calóricamente perfecto, pero, aun en ese caso, el resto de magnitudes de remanso experimentan un salto finito que depende de la magnitud de la onda y del incremento de entropía asociado. Las ecuaciones [5.214] son, en este caso, y para  $v_i = v_{in}$ , las siguientes:

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2 = j_{12} \\ p_1 + \rho_1 v_1^2 &= p_2 + \rho_2 v_2^2 \\ h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 &= h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 = h_0 \end{aligned} \quad [5.228]$$

Sin entrar en el detalle de lo que sucede en la misma discontinuidad, la combinación de estas ecuaciones y la de estado conduce a:

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{p_2}{p_1} \right) \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{p_1}{p_2} \right)^{-1} \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{p_2}{p_1} + 1 \right) \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{p_2}{p_1} \right)^{-1} = \frac{v_1}{v_2} \end{aligned} \quad [5.229]$$





que son las *ecuaciones de Rankine-Hugoniot*, de las cuales la primera es conocida simplemente como la *adiabática de choque* ( $[T_2/T_1]_{12}$  en la figura 5.32), y a:

$$(c^*)^2 = \frac{2}{\gamma+1} c_0^2 = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} h_0 = v_1 v_2 \quad [5.230]$$

que es la *relación invariante de Prandtl*,<sup>302</sup> en que  $c^*$  es la velocidad del sonido crítica, es decir, la velocidad del sonido que se tendría si se alcanzara la condición  $M = 1$ , con  $h_0$ .

Estas ecuaciones son muy interesantes, pues permiten dilucidar la magnitud y sentido de la transformación a través de la onda. Por ejemplo, la segunda de [5.229] limita el salto máximo de densidades y velocidades a través de una onda de compresión ( $p_2 > p_1$ ) al valor:

$$\left[ \frac{\rho_2}{\rho_1} \right]_{\text{máx}} = \left[ \frac{v_1}{v_2} \right]_{\text{máx}} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} > 1 \quad [5.231]$$

que se corresponde con la definición de ondas fuertes. Por otro lado, de las dos primeras ecuaciones de [5.228] se deduce la siguiente relación entre el flujo másico específico, que de hecho es una medida de la variación de la propagación respecto al tiempo de una onda de choque, y las presiones y los volúmenes específicos a ambos lados de la onda:

$$j_{12}^2 = - \frac{p_2 - p_1}{v_2 - v_1} \quad [5.232]$$

Este resultado, puesto que  $j^2$  es siempre positivo, sugiere que, si  $p_2 > p_1$ , entonces ha de ser  $v_2 < v_1$ , es decir, el aumento de presión a través de la onda acarrea un aumento de densidad en el fluido. El caso inverso no puede presentarse porque implica una disminución de la entropía, tal como se demuestra a continuación y se deduce de la figura 5.32.<sup>303</sup>

El cambio de entropía del gas perfecto viene dado por la expresión:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad [5.233]$$

Si  $p_2/p_1 < 1$ , el incremento de entropía sólo podría ser negativo, al ser la relación de temperaturas durante el choque,  $[T_2/T_1]_{12}$ , inferior a la isentrópica correspondiente (con  $s_2 = s_1$ ) para dicho  $p_2/p_1$ . Otra forma alternativa de llegar a esta conclusión utiliza la conocida relación termodinámica:  $s = c_v \ln(p/\rho^\gamma) + K$ , y [5.229] para obtener:

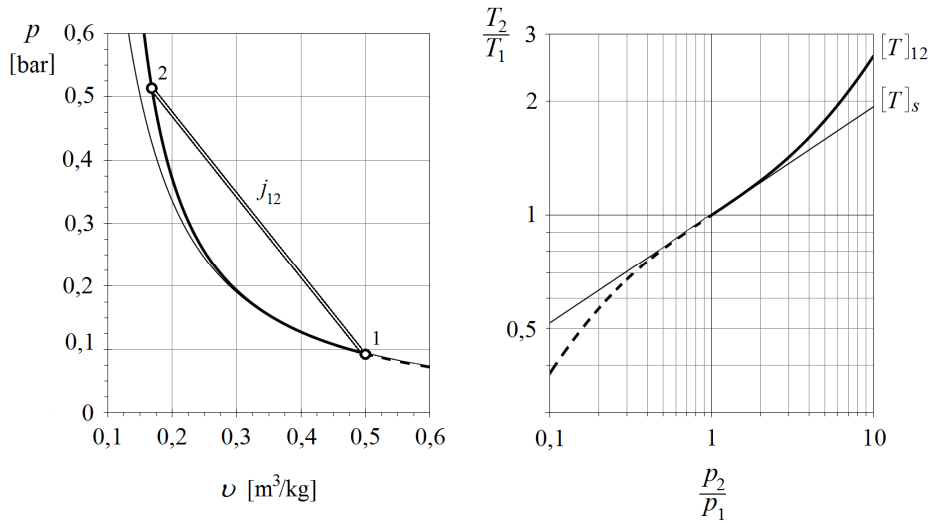
$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left( \frac{p_2 \rho_1^\gamma}{p_1 \rho_2^\gamma} \right) = \ln \left( \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \frac{\rho_1^\gamma}{\rho_2^\gamma} \right) \quad [5.234]$$

que es mayor que cero si:

$$1 < \frac{\rho_2}{\rho_1} \leq \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad [5.235]$$

Esta ecuación define el sentido de la transformación a través de la onda, a la vez que confirma [5.231]. Además, al ser  $\rho_2 > \rho_1$  y, por tanto,  $v_1 > v_2$ , la relación de Prandtl [5.230] asegura que el flujo ha de ser supersónico a la entrada y subsónico a la salida de la onda.

Figura 5.32. Variación de las magnitudes fluidas a través de una onda de choque normal, comparada con la relación de expansión isentrópica.  $[T]_{12}$  es la relación de temperaturas de la adiabática de choque [5.229] y  $[T]_s$ , de la isentrópica. Las líneas de trazos no son posibles porque suponen un decremento de entropía. En la figura de la izquierda, se interpreta el gasto másico específico  $j_{12}$  como la pendiente de la cuerda entre los puntos de entrada y salida a la onda de la adiabática de choque en la gráfica  $(p, v)$  (representada la solución para gas ideal y el caso  $p_{01} = 10$  bar,  $T_{01} = 20^\circ\text{C}$  y  $M_1 = 2.2$ ,  $\gamma = 7/5$ ).



En general, el análisis dimensional demuestra que, en una onda normal, todos los saltos en las magnitudes fluidas se pueden expresar en función del número de Mach a la entrada de la onda y de  $\gamma$ . Con este objetivo, se pueden combinar las ecuaciones [5.228] y las [5.229], teniendo presente que  $c^2 = \gamma p / \rho$ , para llegar al resultado siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \\ \frac{T_2}{T_1} &= \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \\ M_2^2 &= \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \end{aligned} \quad [5.236]$$

Estas relaciones se han representado en la figura 3.20 del apartado 3.6.4.

El salto de presión de remanso a través de la onda puede calcularse mediante una sencilla manipulación que utiliza la relación:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_1}{p_{01}} \frac{p_2}{p_1} \quad [5.237]$$

Para ello, téngase en cuenta que a ambos lados de la onda el fluido continúa comportándose como ideal y, por tanto,  $p_{01}$  y  $p_{02}$  son constantes aguas arriba y aguas abajo, respectivamente. Por otro lado, las dos primeras fracciones de la izquierda del segundo término verifican la ecuación [3.182] y la tercera viene dada por [5.236]. Con todo, tras operar, el salto buscado es:



$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left( \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2 + 2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left( \frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad [5.238]$$

De esta expresión no resulta evidente el sentido del salto en la relación de presiones de remanso, pero, operando de forma parecida con la ecuación [5.233], con [3.182], y siendo  $c_p/R = \gamma/(\gamma-1)$ , resulta, tras realizar las operaciones correspondientes (que se omiten por brevedad), que ésta ha de ser inferior a la unidad, ya que:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \left( \frac{T_2}{T_0} \frac{T_0}{T_1} \right) - \ln \left( \frac{p_2}{p_{02}} \frac{p_{01}}{p_1} \frac{p_{01}}{p_{01}} \right) = \ln \frac{p_{01}}{p_{02}} \quad [5.239]$$

es evidentemente positivo.

Aunque la entropía siempre aumenta a través de una onda de choque, el sentido de la variación de las propiedades de remanso depende del sistema de referencia que se tome, al estar éstas ligadas al valor de la velocidad, de modo que estas consideraciones sólo son ciertas en un sistema de referencia ligado a la onda o en ondas estacionarias. Cuando la onda de choque normal no es estacionaria y deja a su paso fluido a la velocidad  $v_1$ , se demuestra que su velocidad de propagación relativa al gas incidente, supuesto en reposo,  $v_0$ , es superior a la del sonido (resultado ya indicado en [3.175] y que puede completarse con [5.229] y [5.236], teniendo en cuenta que  $p_2 = p_1 + p$ ), y todas las ecuaciones anteriores son válidas sin más que restar vectorialmente a todo al campo fluido  $v_0$ . De esta forma, la onda se vuelve estacionaria y el fluido delante de ella tiene su velocidad (en módulo pero cambiada de signo, es decir, se dirige hacia la onda) y tras ella una velocidad subsónica,  $v_2$ , de módulo igual a la diferencia entre  $v_0$  y  $v_1$  (v. la figura 3.16). Los saltos de las magnitudes fluidas se podrían calcular de las relaciones anteriores con:

$$M_1 = \frac{v_0}{c_0} > 1$$

$$M_2 = \frac{v_0 - v_1}{c_2} < 1 \quad [5.240]$$

donde  $c_0$  es la velocidad del sonido en el medio sin perturbar, y  $c_2$  la velocidad del sonido detrás de la onda estacionaria (y que se puede calcular con [5.236] haciendo  $c_1 = c_0$ ).

Si bien el balance integral [5.228] conduce al mantenimiento de la entalpía de remanso a través de la onda, no dice nada de lo que sucede en su interior, donde, al cambiar rápidamente las variables del flujo, no pueden despreciarse, en general y salvo para ondas de pequeña magnitud, los efectos de la viscosidad o los de la conducción de calor. Este resultado integral es consecuencia del principio de conservación de la energía aplicada a un fluido compresible, pues la energía no puede desaparecer en el choque.<sup>304</sup>

Cuando el flujo es estacionario y unidimensional, siendo todas las variables del flujo función únicamente de la coordenada  $x$  y de la velocidad  $v(x)$  a lo largo de la línea de corriente que atraviesa la discontinuidad, la ecuación de la energía para una partícula [2.48] es:



$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \rho v \frac{\partial h_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{4}{3} \mu v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad [5.241]$$

A distancias grandes de la onda de choque, las magnitudes termodinámicas son constantes y uniformes, y la entalpía de remanso se mantiene porque el flujo es isentrópico y estacionario. Junto a la onda de choque, las variables pueden considerarse localmente uniformes y el flujo, unidimensional. En su interior, la entalpía de remanso varía a lo largo de la línea de corriente por la presencia de esfuerzos viscosos y conductivos, pero su variación se compensa exactamente a ambos lados de la discontinuidad según el balance integral. Para comprender esta última afirmación, puede integrarse la ecuación [5.241] entre dos puntos cualesquiera,  $a$  y  $b$ , de la línea de corriente, y se obtiene:

$$\rho v (h_{0,b} - h_{0,a}) = \left[ \frac{4}{3} \mu v \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial T}{\partial x} \right]_a^b \quad [5.242]$$

que demuestra que, incluso si el fluido es viscoso y conductor, el valor de la entalpía de remanso es el mismo en dos puntos cualesquiera a ambos lados de la onda, en que los gradientes de  $v$  y  $T$  se anulen en el flujo. En consecuencia, el aumento o la disminución de  $h_0$  debidos a las fuerzas viscosas o a la conducción de calor deben compensarse exactamente en el intervalo particular limitado por estos dos puntos.

Por tanto, dentro de la onda de choque, la evolución de la entalpía de remanso sigue la expresión:

$$h_{0,i} = h_0 + \frac{1}{j} \left( \frac{4}{3} \mu v \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad [5.243]$$

y no es constante, aunque a su salida restituya el valor de entrada,  $h_0$ . No obstante, en este desarrollo, debe tenerse en cuenta que el espesor de la discontinuidad es pequeño, salvo en choques débiles, y del orden del recorrido libre medio de las moléculas, de modo que la descripción continua del salto y la propia definición de la línea de corriente pueden quedar en entredicho dentro de la “discontinuidad” (entre otras cosas, porque la descripción newtoniana del fluido no tiene sentido sin el continuo, y la línea de corriente puede verse cortada en la “discontinuidad”). Para no resultar ambiguos, se puede afirmar que la ecuación [5.243] puede aplicarse a capas de transición u ondas de choque débiles en las que el espesor de la discontinuidad, aun pequeño, es finito.<sup>305</sup> En cualquier caso, como los dos últimos términos de la derecha son divergencias, cualquiera que sea la forma de los flujos de momento molecular y de la transferencia de calor en el interior de la onda, considerada una capa de transición, aún se conservaría la entalpía de remanso entre puntos ubicados en regiones externas, a ambos lados de la misma, donde las variables fueran uniformes.

## 5.9. Generalización del flujo compresible

El flujo compresible que se ha tratado hasta el momento se ha considerado homentrópico, salvo en determinadas regiones del flujo, como en las capas límite o en el interior de las ondas de choque, al considerar despreciables las aportaciones de la fricción y de la transferencia de calor. El tratamiento ha permitido establecer las relaciones entre las distintas variables del flujo en función del número de Mach, tanto en el caso unidimen-



sional como cuando se admitía una variación lenta del área recta del conducto que permitía seguir considerando el flujo unidireccional.

Es importante tener presente que, en un proceso adiabático permanente sin fuerzas másicas de consideración, la ecuación de la energía establece la constancia de la entalpía de remanso y, si el gas es perfecto, también de la temperatura de remanso. En estas condiciones, ambas serán constantes aunque el proceso sea irreversible. Para que conserve la presión de remanso (y la densidad, etc.), es necesario que sea adiabático y reversible, es decir, isentrópico. En un movimiento adiabático, cualquier incremento de entropía da lugar al (y es función del) cambio de la presión de remanso, dado por [5.239], por lo que éste es un indicador de que el proceso en cuestión es irreversible.

En este apartado, se introducen las ecuaciones que permiten generalizar el flujo compresible monofásico a situaciones no isentrópicas, reversibles o no, entre las cuales se encuentran las soluciones clásicas de Rayleigh y Fanno para el flujo por conductos de área constante. Se verá que el aporte de calor y el rozamiento afectan la condición de bloqueo en el conducto y que éste no siempre se produce en condiciones sónicas, para  $M^* = 1$ , ni en el punto de sección mínima de una tobera. En adelante, se supondrá que no se realiza trabajo mecánico sobre la corriente y que el término de fricción es la única fuente de irreversibilidad presente.

El conjunto de ecuaciones que rigen el movimiento cuasiunidireccional y permanente por un conducto circular de área variable es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(jA) &= 0 \\ v \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{dU}{dx} + f \frac{1}{D} \frac{v|v|}{2} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) - q &= 0 \end{aligned} \quad [5.244]$$

donde  $f$  es el coeficiente de rozamiento local de Darcy-Weisbach<sup>306</sup> y  $q$  es el aporte externo de calor al fluido por unidad de masa y longitud de conducto. Restando la segunda de la tercera para un conducto horizontal, y con la ecuación de Gibbs de la entalpía, se obtiene:

$$T \frac{ds}{dx} = \frac{dh}{dx} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = f \frac{1}{D} \frac{v^2}{2} + q \quad [5.245]$$

que muestra cómo, a causa de la fricción, la entropía siempre aumenta en la dirección del flujo, pero puede disminuir si  $q$  es suficientemente negativo. Utilizando la relación  $s = c_v \ln(p/\rho^\gamma) + K$  para la entropía y  $c^2 = \gamma p/\rho$ , se sigue:

$$c_v \frac{T}{p} \left( \frac{dp}{dx} - c^2 \frac{d\rho}{dx} \right) = f \frac{1}{D} \frac{v^2}{2} + q \quad [5.246]$$

de donde, con [3.184], se obtiene:

$$v \left( \frac{1-M^2}{M^2} \right) \frac{dv}{dx} = -\frac{c^2}{A} \frac{dA}{dx} + \gamma f \frac{1}{D} \frac{v^2}{2} + (\gamma-1)q \quad [5.247]$$



Esta ecuación es sumamente interesante pues revela cuál es el efecto básico del aporte de calor y del rozamiento en un flujo compresible:

- Si el flujo es subsónico, el rozamiento y el calentamiento ( $q > 0$ ) actúan de forma análoga a una reducción de la sección en una tobera convergente y aumentan la velocidad. Esta ecuación muestra que la condición de velocidad máxima ( $dv = 0$ ) en una tobera con fricción y/o calor se encuentra cuando  $dA/dx$  es positivo, eso es, algo después del punto de sección mínima.
- Si el flujo es supersónico, la corriente se frena en presencia de rozamiento y/o aporte de calor, pero puede acelerarse si se le extrae calor ( $q < 0$ ).

Por otro lado, si la sección es constante, se demuestra:

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{1 - M^2}{M^2} \right) \frac{dp}{dx} = - \left( \frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{M^2} \right) f \frac{1}{D} \frac{v^2}{2} - (\gamma - 1)q \quad [5.248]$$

y la presión siempre disminuye por el rozamiento y el calentamiento en el flujo subsónico.<sup>307</sup> Esta circunstancia dificulta que se puedan conseguir las condiciones de bloqueo a partir del reposo en un conducto de sección constante.

La presencia del rozamiento también hace disminuir la cantidad de movimiento del flujo unidimensional. Por ello, es conveniente definir la función de impulso como:

$$i = A(p + \rho v^2) = pA(1 + \gamma M^2) \quad [5.249]$$

o, en forma diferencial y para  $A$  constante:

$$\frac{di}{i} = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad [5.250]$$

A continuación, se analizan diferentes situaciones particulares de flujo, que utilizan las ecuaciones anteriores y suponen que el gas es perfecto y que  $U$  es constante. El tratamiento analítico es muy similar al del apartado 3.6.2, por lo que pueden omitirse algunos pasos de la demostración y ofrecer directamente la discusión del resultado final. El tema concluye presentando las ecuaciones resultantes en forma de diferencias y para propiedades de gas real.

### 5.9.1. Flujo sin rozamiento con aporte de calor

El flujo compresible por un conducto de sección recta constante, con aporte de calor y gasto másico constante pero sin rozamiento, se denomina *flujo de Rayleigh*. La transferencia de calor puede ser debida a la combustión, la reacción, la evaporación o la condensación de fluido, o a una fuente externa al mismo, y hace que la entalpía de remanso no sea constante en cualquier caso.<sup>308</sup>

En este flujo, las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía son:

$$\begin{aligned} j_1 &= j_2 = j \\ p_1 + jv_1 &= p_2 + jv_2 \\ h_{01} + qL_{12} &= h_{02} \end{aligned} \quad [5.251]$$



donde  $qL_{12}$  es el aporte de calor por unidad de masa entre las secciones (1) y (2) del conducto. Estas ecuaciones, para un gas perfecto ( $c^2 = \gamma RT$ ) y en forma diferencial, conducen a:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{\rho} &= -\frac{dv}{v} \\ \frac{dp}{p} &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} = -\gamma M^2 \frac{dv}{v} \\ \frac{\delta q}{c_p T} &= \frac{dT_0}{T} = \frac{dT}{T} + (\gamma - 1)M^2 \frac{dv}{v}\end{aligned}\quad [5.252]$$

De estas ecuaciones y de la de estado, se deducen las siguientes, en función de la variación del número de Mach:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{v} &= \frac{1}{1 - M^2} \frac{\delta q}{c_p T} = \frac{1}{1 + \gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2} \\ \frac{dp}{p} &= -\frac{\gamma M^2}{1 - M^2} \frac{\delta q}{c_p T} = -\frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2} \\ \frac{dT}{T} &= \frac{1 - \gamma M^2}{1 - M^2} \frac{\delta q}{c_p T} = \frac{1 - \gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2}\end{aligned}\quad [5.253]$$

Además, de cualquiera de ellas resulta:

$$\frac{\delta q}{RT} = \frac{ds}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{1 - M^2}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2}\quad [5.254]$$

Esta ecuación puede ser integrada para conocer el incremento del número de Mach entre dos puntos del flujo entre los cuales se ha aportado una cantidad de calor  $qL_{12}$ . No obstante, esta operación se pospone, de momento, puesto que puede calcularse de la última de [5.251] y las relaciones siguientes, o bien expresarse en función del incremento entrópico.

El uso de las ecuaciones en forma diferencial permite identificar fácilmente el sentido de cambio de una magnitud en función del valor del número de Mach y del signo del término  $\delta q$  (calor por unidad de masa aportado o extraído en un tramo diferencial de conducto,  $dx$ ). Por ejemplo, de la ecuación de la entropía, se observa que  $ds = 0$  cuando  $M = 1$ . Esto es: el aporte de calor a un flujo subsónico hace que aumenten su entropía y su número de Mach hasta alcanzar la condición de entropía máxima ( $ds/dT = 0$ ) o condición crítica, para la que  $M^* = 1$ . De la misma manera, el flujo supersónico se frena hasta  $M^* = 1$  cuando se calienta desde el exterior, mientras que se acelera cuando se le extrae calor. Esta circunstancia invertida entre las características del flujo subsónico y supersónico no es nueva, pues es una propiedad esencial del flujo compresible que ya se ha visto, por ejemplo, en el apartado 3.6.3 y que se volverá a producir en el flujo de Fanno del apartado siguiente. Otra condición de máximo, en principio inesperada, que se produce es la de temperatura máxima (o entalpía máxima,  $dh/ds = 0$ ) en el flujo subsónico cuando  $M = 1/\gamma^{1/2} = 0,845$  (del término,  $1 - \gamma M^2 = 0$ , para  $\gamma = 7/5$ ). En la región comprendida entre este Mach y  $M^* = 1$ , el calentamiento del fluido hace disminuir su temperatura, y la diferencia queda reflejada en un gran incremento de su energía cinética hasta alcanzar la condición crítica (v. figura 5.33).



Las ecuaciones anteriores pueden ser integradas entre dos situaciones (1) y (2), para las cuales estén definidos los números  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente. El resultado es:

$$\begin{aligned} \frac{v_2}{v_1} &= \frac{M_2^2}{M_1^2} \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{M_2^2}{M_1^2} \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \\ \frac{s_2 - s_1}{R} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left[ \frac{M_2^2}{M_1^2} \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] \end{aligned} \quad [5.255]$$

En un flujo de Rayleigh, la transferencia de calor, aunque se produzca de forma reversible, causa la variación de todas las magnitudes de remanso en el conducto. Esta circunstancia hace recomendable tomar como referencia la condición crítica  $M_2 = M^* = 1$ , donde están definidas las condiciones críticas [3.183], que sí son constantes en un flujo determinado. Transformando adecuadamente las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{v}{v^*} &= \frac{(1 + \gamma)M^2}{1 + \gamma M^2} \\ \frac{p}{p^*} &= \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \\ \frac{T}{T^*} &= \left( \frac{(1 + \gamma)M}{1 + \gamma M^2} \right)^2 \\ \frac{s - s^*}{R} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left[ M^2 \left( \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] < 0 \end{aligned} \quad [5.256]$$

En cuanto a la magnitud de remanso correspondiente al proceso isentrópico de mismo número de Mach (v. [3.182]), la presión y la temperatura de remanso del fluido en un punto del flujo, respecto a las críticas, son:

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p_0^*} &= \left( \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right) \left( \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{1 + \gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{T_0}{T_0^*} &= \frac{(1 + \gamma)(2 + (\gamma - 1)M^2)M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} \end{aligned} \quad [5.257]$$

Todas estas relaciones se muestran en la figura 5.33 en función del número de Mach. El efecto de la transferencia de calor en el número de Mach y la tendencia de las variables fundamentales del flujo se muestran en la figura 5.34 y en tabla 5.4. Es interesante reseñar que la presión de remanso siempre decrece durante el calentamiento, independientemente de que el flujo sea subsónico o supersónico, de forma inversa a la tendencia mostrada por la temperatura de remanso.



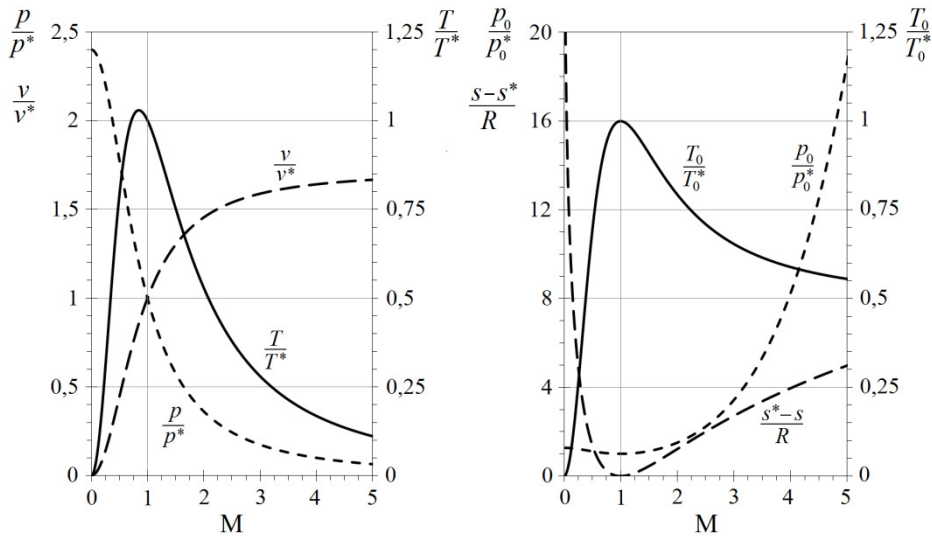


Figura 5.33. Relación de las diferentes variables con el número de Mach en un flujo de Rayleigh. ( $\gamma = 7/5$ )

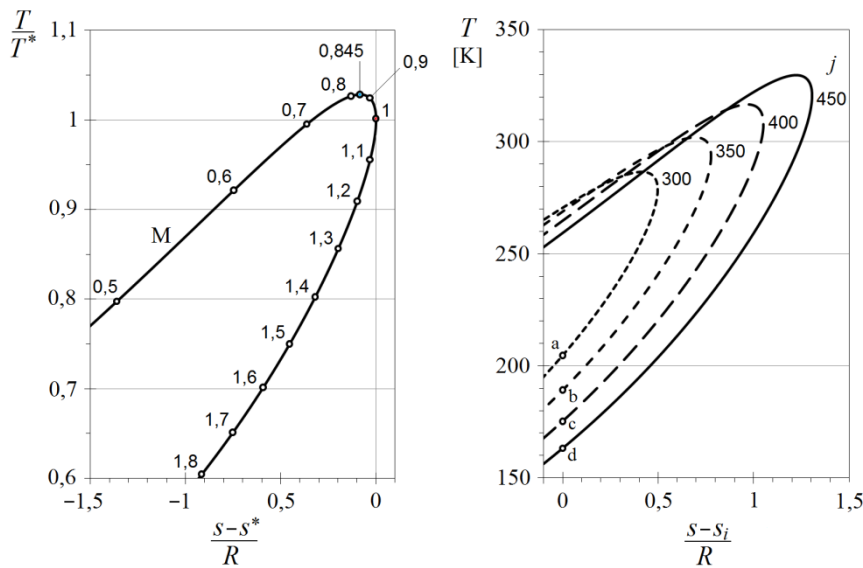


Figura 5.34. Línea de Rayleigh universal (izquierda) e influencia del flujo másico específico (derecha). Valores de referencia de la figura:  $T_0 = 301,1$  K y  $s_1 = 0$ , para  $M_a = 1,535$ ,  $M_b = 1,72$ ,  $M_c = 1,895$  y  $M_d = 2,055$  y  $T_a = 204,65$  K,  $T_b = 189,16$  K,  $T_c = 175,23$  K y  $T_d = 163,23$  K. Para unas condiciones dadas,  $M_i$ ,  $T_i$ ,  $T_{0i}$ , las líneas de Rayleigh se desplazan hacia la izquierda con el aumento de  $j$  (aumento de la presión  $p_i$ ). La línea universal mostrada a la izquierda es independiente del flujo másico ( $\gamma = 7/5$ ).

La figura 5.34 es una representación gráfica del flujo de Rayleigh. A la izquierda, se muestra la línea universal de Rayleigh, que no es más que la relación funcional entre  $T/T^*$  y  $(s-s^*)/R$  de la ecuación [5.256]. Como la conservación de la cantidad de movimiento en este flujo supone:

$$p + \frac{j^2}{\rho} = C \quad [5.258]$$

con  $C$  constante, y, para un gas perfecto, la presión y la densidad son funciones conocidas de  $T$  y  $s$ , se deduce que las líneas de Rayleigh son distintas para diferentes valores del flujo másico específico,  $j$ .



### 5.9.2. Flujo adiabático con rozamiento

Se denomina *flujo de Fanno* el flujo compresible estacionario que se produce en un conducto de sección recta constante sin aporte de calor ni trabajo externo, pero con efectos de fricción sobre la pared interna no despreciables. A diferencia del flujo de Rayleigh del apartado anterior, en éste sí se conserva la entalpía de remanso, porque se admite que el flujo es adiabático,<sup>309</sup> pero no lo harán el resto de magnitudes, debido a la irreversibilidad asociada al rozamiento.

El flujo real de un fluido compresible por un conducto se aproxima mejor a través del modelo de Fanno que del de Rayleigh, ya que es inevitable que existan efectos viscosos y, en consecuencia, que se generen capas límite sobre las paredes pero, en cambio, el aporte de calor es una cuestión controlable por el usuario (especialmente si no se producen reacciones internas, combustión o cambio de fase). La presencia de capas límite reduce la sección de paso al aumentar el espesor de desplazamiento en la dirección del flujo y supone una disminución paulatina del área útil. En este sentido, pueden extenderse algunas de las consideraciones relativas a la evolución de la velocidad del fluido y del número de Mach que se realizaron para el caso del flujo isentrópico por conductos de sección lentamente variable del apartado 3.6.3,<sup>310</sup> pero teniendo en cuenta que el rozamiento hará variar las condiciones de remanso, salvo en la temperatura, si el gas es perfecto.

Dejando de lado la influencia de las capas límite sobre la sección recta del flujo, supuesta constante, las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía vistas en [5.244] para el flujo de Fanno son:

$$\begin{aligned} \frac{dj}{dx} &= 0 \\ v \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + f \frac{1}{D} \frac{v^2}{2} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad [5.259]$$

Estas ecuaciones y la de estado resuelven que la variación diferencial de todas las magnitudes en función del término de rozamiento es:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= \frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(\gamma-1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2} \\ \frac{dp}{p} &= -\frac{\gamma M^2 + \gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D} = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(\gamma-1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2} \\ \frac{dT}{T} &= -\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D} = -\left( \frac{(\gamma-1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2} \end{aligned} \quad [5.260]$$

y, para la función de impulso:

$$\frac{di}{i} = -\frac{\gamma M^2}{2(1+\gamma M^2)} f \frac{dx}{D} = -\frac{1}{1+\gamma M^2} \left( \frac{1-M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2} \quad [5.261]$$



De cualquiera de ellas:

$$f \frac{dx}{D} = \frac{2}{\gamma M^2} \left( \frac{1-M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2} \quad [5.262]$$

En el flujo de Fanno, también se produce el efecto de inversión en las propiedades estáticas (asociado al término  $\{1-M^2\}$ ), salvo en la entropía, que, debido a la segunda ley de la termodinámica, siempre aumenta en la dirección del flujo. El efecto básico del rozamiento es conducir el flujo hacia la condición  $M^* = 1$ , acelerando el subsónico y frenando el supersónico, pero siempre disminuyendo la presión de remanso. La variación cualitativa del resto de magnitudes en función de  $M$  en el flujo de Fanno se resume en la tabla 5.4.

La variación del número de Mach con la fricción resulta de integrar [5.262], de donde se obtiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} f \frac{dx}{D} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left[ \frac{M_1^2 \left( \frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \right)}{M_2^2 \left( \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \right)} \right] \quad [5.263]$$

donde  $f$  es el coeficiente de fricción medio entre ambas secciones.<sup>311</sup> Si se escoge como límite superior de integración el punto crítico para el que  $M_2 = M^* = 1$ , y para el inferior  $x_1 = 0$ , la longitud correspondiente,  $x_2 = L^*$ , representa la distancia necesaria de conducto para que se den las condiciones sónicas a la salida, para un número de Mach de entrada  $M_1 = M$  constante. Se sigue:

$$f \frac{L^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left[ \left( \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \right) \right] \quad [5.264]$$

Es evidente que la longitud  $L^*$  puede ser mayor o menor que la real,  $L$ , por lo que no siempre el escape se produce en condiciones de bloqueo para un número de Mach de entrada determinado. Cuando no se produce bloqueo, la longitud de conducto requerida para que el número de Mach pase de  $M_1$  a  $M_2$  puede obtenerse de [5.263] o, aprovechando que el factor  $fL^*/D$  depende sólo de  $M$ , de la ecuación:

$$f \frac{L}{D} = \left[ f \frac{L^*}{D} \right]_{M_1} - \left[ f \frac{L^*}{D} \right]_{M_2} \quad [5.265]$$

Por otro lado, el mantenimiento de la temperatura de remanso de [3.182] entre dos puntos del flujo, indica:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \quad [5.266]$$

y, por tanto:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \right)^{1/2} \quad [5.267]$$

ya que:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{T_2}{T_1} = \frac{v_1}{v_2} \frac{T_2}{T_1} = \frac{M_1 c_1}{M_2 c_2} \frac{T_2}{T_1} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2} \quad [5.268]$$



Evidentemente, estas relaciones, así como la existente entre el resto de magnitudes con el número de Mach, también pueden obtenerse integrando [5.260]. En el caso de la entropía, se ha de cumplir la relación termodinámica [5.233], de donde, con las anteriores:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[ \frac{M_2 \left( \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}}{M_1} \right] \quad [5.269]$$

En función de la condición crítica, para  $M_2 = M^* = 1$  y  $M_1 = M$ , las relaciones integradas resultan ser:

$$\begin{aligned} \frac{v}{v^*} &= M \left( \frac{1 + \gamma}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right)^{1/2} \\ \frac{p}{p^*} &= \frac{1}{M} \left( \frac{1 + \gamma}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right)^{1/2} \\ \frac{T}{T^*} &= \frac{1 + \gamma}{2 + (\gamma - 1)M^2} \\ \frac{i}{i^*} &= \frac{1}{M} \frac{1 + \gamma M^2}{(1 + \gamma)^{1/2} (2 + (\gamma - 1)M^2)^{1/2}} \\ \frac{s - s^*}{R} &= \ln \left[ M \left( \frac{1 + \gamma}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \right] < 0 \end{aligned} \quad [5.270]$$

donde las variables asterisco denotan la condición correspondiente a  $M = 1$ .

La ecuación de la entropía anterior presenta un máximo cuando  $M = 1$  (v. figura 5.35) y su variación se puede expresar en función de la relación de presiones de remanso crítica. Esta relación se obtiene haciendo uso de [3.182] en la condición sónica:

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{p_0^*}{p^*} &= \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \end{aligned} \quad [5.271]$$

y de [5.270], de donde:

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left( \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = \frac{p_0}{p} \frac{p^*}{p_0^*} \frac{p}{p^*} \quad [5.272]$$

Finalmente:

$$\frac{s^* - s}{R} = \ln \left( \frac{p_0}{p_0^*} \right) > 0 \quad [5.273]$$

y la entropía se incrementa con la disminución de la presión de remanso en un proceso adiabático, o bien la presión de remanso siempre disminuye a lo largo del conducto en



el flujo adiabático con rozamiento. Este resultado viene a confirmar [5.239] y la discusión anterior.

Para acabar este apartado, también en el flujo de Fanno es posible obtener una representación gráfica funcional entre  $T/T^*$  y  $(s-s^*)/R$  de la ecuación [5.270]. Como ahora se verifica:

$$h + \frac{j^2}{2\rho^2} = h_0 \quad [5.274]$$

con  $h_0$  constante, y, para un gas perfecto, la entalpía y la densidad son funciones conocidas de  $T$  y  $s$ , se deduce que las líneas de Fanno son distintas para diferentes valores del flujo másico específico,  $j$ .

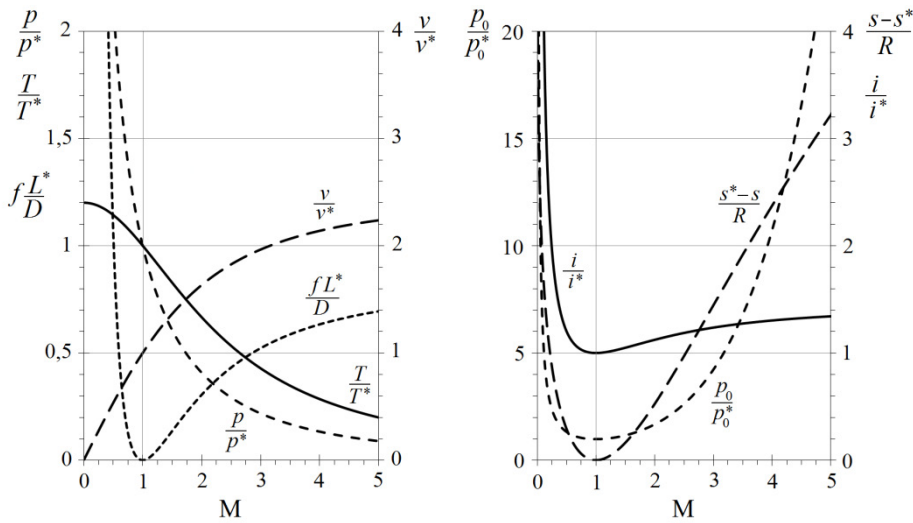


Figura 5.35. Relación de las diferentes variables con el número de Mach en un flujo de Fanno ( $\gamma = 7/5$ ).

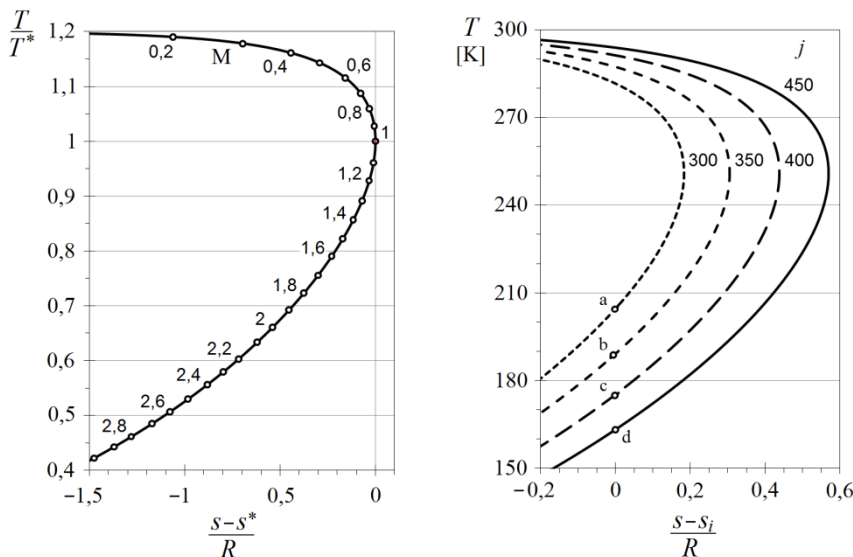


Figura 5.36. Línea de Fanno universal (izquierda) e influencia del flujo másico específico (derecha). Valores de referencia de la figura:  $T_0 = 301,1$  K,  $p_0 = 0,4$  bar y  $s_0 = 0$ , para  $M_a = 1,535$ ,  $M_b = 1,72$ ,  $M_c = 1,895$  y  $M_d = 2,055$  y  $T_a = 204,65$  K,  $T_b = 189,16$  K,  $T_c = 175,23$  K y  $T_d = 163,23$  K. La línea universal que se muestra a la izquierda es independiente del flujo másico. Para unas condiciones dadas,  $M_i$ ,  $T_i$ ,  $T_0$ , las líneas de Fanno se desplazan hacia la izquierda con el aumento de  $j$  (aumento de la presión  $p_0$ ).  $\gamma = 7/5$ .



### 5.9.3. Flujo isotérmico

La hipótesis desarrollada por el flujo de Fanno no es apropiada en conductos largos o cuando la transferencia de calor con la pared es suficientemente rápida, situaciones ambas en que se puede garantizar que la temperatura del fluido permanece constante, a efectos prácticos. El flujo isoterma es frecuente en los gaseoductos y en otros conductos de distribución de aire o gas de gran longitud (de varios cientos de metros) a partir de una determinada longitud de entrada.

En esta clase de flujos, la velocidad subsónica se incrementa por el efecto combinado de la fricción y de la transferencia de calor. Al ser la densidad del fluido una función inversa de la velocidad (al mantenerse  $j$  constante en régimen estacionario) y proporcional a la presión por la ecuación de estado (a temperatura constante), la presión disminuye monótonamente con la distancia y alcanza su valor mínimo en el extremo saliente del conducto, donde pueden producirse condiciones de bloqueo.

Las ecuaciones que gobiernan un flujo isoterma son [5.244], en las cuales se ha de especificar que la temperatura estática sea constante. Como, para el gas perfecto, es  $\rho v^2 = \gamma M^2 p$  y ahora se cumple que  $c^2 = \gamma RT$  es constante, resultan las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2} \\ -f \frac{dx}{2D} = \frac{dv}{v} + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad [5.275]$$

que, combinadas, permiten deducir las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma M^2}{2(1-\gamma M^2)} f \frac{dx}{D} \\ f \frac{dx}{D} = \frac{1-\gamma M^2}{\gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2} \end{aligned} \quad [5.276]$$

Obsérvese que el numerador de la última de estas ecuaciones resulta cero cuando  $M^2 = 1/\gamma$ , no en  $M = 1$ , lo cual define una condición de bloqueo diferente a la de los flujos de Rayleigh y Fanno vistos anteriormente. En consecuencia, el flujo subsónico isoterma se bloquea a un número de Mach de entrada inferior y con un flujo másico más pequeño.

Para un tubo de longitud  $L$  que en  $x=0$  tenga un número de Mach de entrada,  $M_0$ , diferente de cero, el flujo isoterma tiende aguas abajo a un número de Mach límite de valor  $1/\gamma^{1/2}$ , que se alcanza si su longitud coincide con la que resulta de integrar la ecuación [5.276] entre los límites correspondientes:

$$\int_0^L f \frac{dx}{D} = \int_{M_0^2}^{1/\gamma} \frac{1-\gamma M^2}{\gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad [5.277]$$

El resultado es, con  $M_0 = M$ :<sup>312</sup>

$$f \frac{L'}{D} = \frac{1-\gamma M^2}{\gamma M^2} + \ln(\gamma M^2) \quad [5.278]$$



Si el flujo de entrada inicial es subsónico, el fluido se acelera y tiende a alcanzar en la longitud  $L'$  el número de Mach de bloqueo,  $M' = 1/\gamma^{1/2}$ . Si la longitud real es inferior a  $L'$ , el número de Mach de salida no alcanzará el valor de bloqueo, sino el que resulte de la ecuación anterior integrada entre 0 y  $L$ , que será menor a  $M'$  para cualquier Mach de entrada. En cambio, si la longitud real es superior, el conducto presentará bloqueo por fricción en el extremo saliente y el número de Mach de entrada se ralentizará hasta verificar [5.278], con  $L=L'$ . El caso de entrada supersónica necesita un ajuste del flujo que conduce a la aparición de una onda de choque dentro del conducto. Más adelante se explica esta circunstancia con más detalle para los distintos tipos de flujo vistos hasta el momento.

En cualquier caso, la salida bloqueada del flujo isoterma no es sónica y, por tanto, no tiene lugar con las condiciones críticas  $p^*$ ,  $\rho^*$ , etc. La relación de la velocidad, la presión y la densidad con las variables de bloqueo (definidas mediante tilde) viene dada por las ecuaciones siguientes (recuérdese que  $j = \rho v$  y  $c$  son constantes):

$$\frac{v}{v'} = \frac{M}{M'} = \gamma^{1/2} M \quad [5.279]$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{\gamma^{1/2} M}$$

La relación entre las variables de remanso se deduce fácilmente de [3.182] y de las anteriores por sustitución:

$$\frac{p_0}{p'_0} = \frac{p}{p'} \left( \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)(1/\gamma)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \frac{1}{\gamma^{1/2} M} \left( \frac{2\gamma + \gamma(\gamma - 1)M^2}{3\gamma - 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad [5.280]$$

$$\frac{T_0}{T'_0} = \frac{T}{T'} \left( \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)(1/\gamma)} \right) = \frac{2\gamma + \gamma(\gamma - 1)M^2}{3\gamma - 1}$$

Conviene recordar, asimismo, que en el flujo isoterma la temperatura de remanso no es constante, por cuanto existe transferencia de calor. Su variación diferencial en función del número de Mach se obtiene derivando la relación isentrópica [3.182] y haciendo  $dT=0$ . El resultado de la operación es:

$$\frac{dT_0}{T} = \frac{\gamma - 1}{2} dM^2 \quad [5.281]$$

de donde:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{(\gamma - 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad [5.282]$$

La variación de la temperatura de remanso en función del factor  $fdx/D$  se obtiene combinando esta ecuación con [5.276]:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{\gamma(1 - \gamma)M^2}{(1 - \gamma M^2)(2 + (\gamma - 1)M^2)} f \frac{dx}{D} \quad [5.283]$$



#### 5.9.4. Flujo de descarga de un calderín por un conducto

En el apartado 5.2.2, se ha presentado el caso en que un depósito se descarga a través de un orificio a la atmósfera. El conjunto de ecuaciones desarrollado ha permitido calcular el flujo másico de escape, así como la evolución de la temperatura y de la presión internas, en función de los tiempos característicos del fenómeno y de la conductancia asociada al orificio de escape.

Existen muchas situaciones en ingeniería en que un recinto, que contiene un gas a presión, evacúa su contenido por un conducto de área constante. La presencia del conducto, donde no se pueden despreciar, en general, los efectos del rozamiento ni de la transferencia de calor con su pared interna, ralentiza la descarga respecto a la que se produciría por un orificio de idéntica área recta y, por tanto, refuerza la hipótesis de cuasiestacionariedad del fenómeno. Para el análisis de esta clase de procesos, es necesario combinar el desarrollo del apartado 5.2.2 con los flujos de Fanno e isotermo vistos anteriormente. Como ampliación conveniente, desde un punto de vista formal –aunque en la práctica su aplicación esté restringida a algunos casos, por otro lado, muy destacados–,<sup>313</sup> se trata también la descarga subsónica a través del conducto, en el supuesto de que sean válidas las hipótesis del flujo de Rayleigh en su interior.

Aunque las características del flujo compresible que se obtiene en un conducto pueden deducirse del desarrollo general de los apartados anteriores, es necesario poner de manifiesto algunas circunstancias que atañen a cómo se realiza la conexión del conducto al depósito y a las condiciones de contorno a su salida. La característica convergente del movimiento potencial hacia la embocadura del conducto en el interior del recinto hace que el flujo sólo pueda ser subsónico a la entrada.<sup>314</sup> Para conseguir que el flujo sea supersónico en el conducto, es necesario, por tanto, que la conexión entre éste y el recinto se realice mediante una tobera con un tramo final divergente y que, en su área mínima, o un poco más aguas abajo en presencia de fricción (v. [5.247]), se den las condiciones sónicas. De todas formas, la condición de entrada supersónica no garantiza que el flujo pueda ser supersónico en todo el conducto, pues el rozamiento (o el aporte de calor) hacen tender rápidamente el número de Mach del flujo supersónico a la unidad [5.278], en el flujo de Fanno, o a  $M'$ , si es isotermo.

En este apartado, se admite que la evolución del gas en el interior del recinto es isentrópica y parte del reposo y, por tanto, que la presión y la temperatura de remanso,  $p_{00}$  y  $T_{00}$ , son uniformes en todo el volumen. En el caso de que la descarga se realice a través de una tobera, se supone que el proceso es isentrópico en ella, salvo por la ocurrencia de ondas de choque en su interior, y, del mismo modo, cuando la conexión sea recta, se despreciarán las pérdidas singulares en la embocadura. En ambos casos, la evolución del gas hasta la entrada en el conducto mantiene sus valores de remanso a lo largo de una línea de corriente, porque el proceso se considera cuasiestacionario e isentrópico, y la evolución de la presión en el recinto se puede determinar, como se ha hecho en 5.2.2, una vez evaluado el gasto másico que se descarga.<sup>315</sup>

El modelo de flujo con fricción que se produce en un conducto depende de tres factores, de los cuales sólo dos son realmente independientes: el coeficiente adimensional de fricción,  $fL/D$ ; el número de Mach de entrada al conducto,  $M_1$ , y la ratio de presiones,  $p_1/p_2$ . La tendencia de las diferentes magnitudes del flujo, en cada una de las situaciones que pueden presentarse, se muestra en la tabla 5.4. Para hacer un mejor seguimiento de la explicación que sigue a continuación, es importante reconocer dicha tendencia





en las diferentes condiciones de trabajo que pueden presentarse y para las dos configuraciones de la figura 5.37.

	Rayleigh				Fanno		Tobera/difusor isentrópicos			
	$q>0$		$q<0$				$dA/dx<0$		$dA/dx>0$	
	$M<1$	$M>1$	$M<1$	$M>1$	$M<1$	$M>1$	$M<1$	$M>1$	$M<1$	$M>1$
$dv/dx$	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+
$dM/dx$	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+
$dp/dx$	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-
$dT/dx$	(*)	+	(**)	-	-	+	-	+	+	-
$dp/dx$	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-
$ds/dx$	+	+	-	-	+	+	0	0	0	0
$dp_0/dx$	-	-	+	+	-	-	0	0	0	0
$dT_0/dx$	+	+	-	-	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.4. Evaluación cualitativa de la evolución de las diferentes magnitudes fluidas en flujo compresible.  
 (\*) La temperatura se incrementa si  $M < 1/\gamma^{0.5}$ , y se decrementa si  $1/\gamma^{0.5} < M < 1$ .  
 (\*\*) La temperatura se decrementa si  $M < 1/\gamma^{0.5}$ , y se incrementa si  $1/\gamma^{0.5} < M < 1$ .

El abanico completo de flujos que pueden presentarse en un conducto de sección constante sólo es posible si, aguas arriba, el conducto se conecta al depósito con una tobera convergente-divergente de geometría fija y si, aguas abajo, desemboca en un recinto cuya presión,  $p_s$ , puede controlarse. En una configuración como la indicada, existen dos puntos en que el flujo tiene tendencia a bloquearse: la garganta de la tobera de alimentación y el extremo saliente del conducto. Se verá a continuación que el tipo de flujo que se presenta depende de cuál de estas condiciones de bloqueo se produzca en primer lugar.

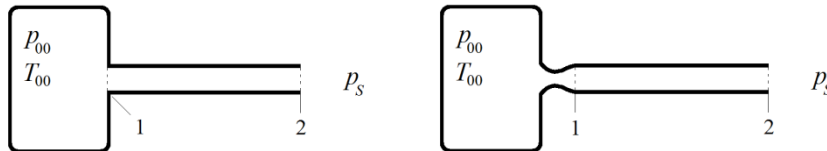


Figura 5.37. Configuraciones de descarga de un calderín a través de un conducto: descarga por una embocadura recta (izquierda) y por una tobera convergente-divergente (derecha).

Cuando el sistema es de forma que la disminución de  $p_s$  hace que se bloquee en primer lugar la tobera, la ecuación [3.194] muestra que son posibles dos valores de  $M$  para el flujo isentrópico a su salida: uno subsónico,  $M_B$ , y otro supersónico,  $M_D$ . A cada uno de estos números de Mach, le corresponde un valor de  $L^*$  de la ecuación [5.264] (o de  $L'$  de la [5.278]), que se denominan, en adelante,  $L_B$  y  $L_D$ , respectivamente. Por otro lado, se admite que, aunque cualquier cambio en el flujo suponga un cambio en el número de Reynolds y, por tanto, en  $f$ , esta variación no afecta las conclusiones cualitativas que se extraen en este apartado, ya que podría realizarse una descripción semejante en términos del producto  $fL$ .

El valor de la longitud máxima depende del tipo de flujo que se presente, el cual, por lo general, estará comprendido entre el de Fanno y el isoterma. Se sabe, por la experiencia, que el flujo isoterma es más adecuado cuando la longitud del conducto es muy elevada, de modo que la transferencia térmica con la pared es suficiente para mantener constante la temperatura del gas. En procesos rápidos o en conductos cortos (aun de



longitud superior a  $L^*$ ), el modelo de Fanno es más aproximado, ya sea porque no hay tiempo para una transferencia de calor activa o porque la longitud de entrada al conducto es mucho mayor que la propia longitud del conducto.

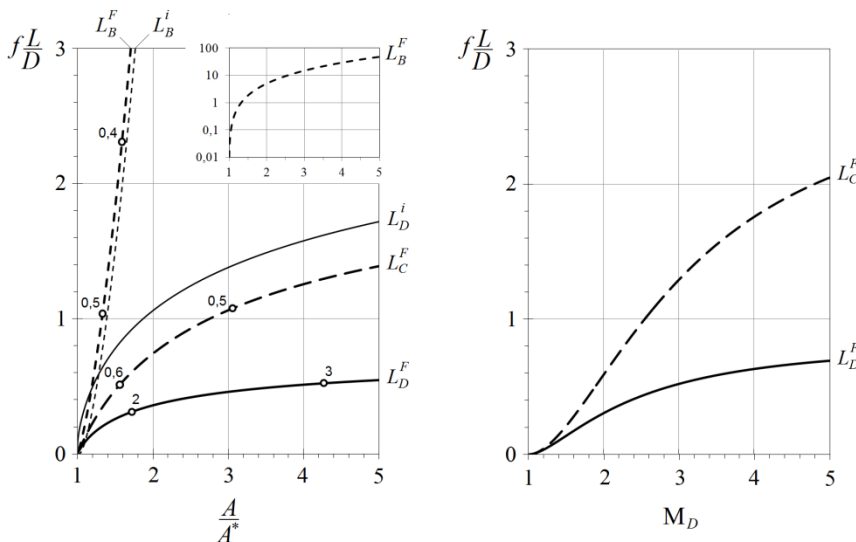
Para entender mejor esta última afirmación, téngase en cuenta que la longitud térmica de entrada es del orden de la hidrodinámica (números de Prandtl próximos a la unidad para la mayoría de gases) y que la mayor parte de la transferencia de calor se produce en la capa límite térmica. Por ejemplo, la ecuación [5.264] indica que el número de Mach de entrada es  $M_0 \approx 2$  para el flujo de Fanno en un conducto de  $fL/D = 0,3$ . Para una viscosidad de  $1,50 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  (aire a 1 atm y  $20^\circ\text{C}$ ), y con este número de Mach “relativamente bajo”, la velocidad del fluido es del orden de los 700 m/s y el flujo, turbulento. Para este valor de  $fL/D$ , la relación entre la longitud de entrada y la del conducto es, con [5.35],  $L_e/L = 13,3f^{1/2}$ . En consecuencia, si  $f = 0,02$ , resulta  $L_e/L \approx 2$ , y el modelo isoterma no puede aplicarse, salvo para valores  $fL/D$  muy elevados. Por otro lado, es fácil comprobar que siempre es  $L_B > L_D$  para el flujo de Fanno y que esta condición se cumple a partir de  $fL/D = 0,58$  para el isoterma, que es un valor inferior al mínimo necesario para que el flujo isoterma sea aplicable (v. figura 5.38).<sup>316</sup>

Tomando como referencia el modelo de Fanno, la longitud máxima, que permite que el flujo sea supersónico en el conducto y sónico a su salida, puede evaluarse de la expresión [5.264] para un número de Mach de entrada infinito. Para  $\gamma = 7/5$ , el resultado es:

$$f \frac{L_{\text{máx}}}{D} = -\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right] = 0,8215 \quad [5.284]$$

de donde se deduce que, independientemente de la magnitud del número de Mach de entrada, si su longitud supera  $L_{\text{máx}}$ , se producirá una onda de choque compresiva en su interior. Para otro Mach de entrada (supersónico, pero no infinito), el flujo puede ser supersónico en todo el conducto, si la longitud es inferior a la  $L^*$  de [5.264] y se dan las condiciones de presión adecuadas.<sup>317</sup>

Figura 5.38. Longitudes características del flujo compresible en un conducto de área  $A$ , alimentado desde una tobera convergente-divergente de área crítica  $A^*$ . Las curvas etiquetadas con  $L^F$  y  $L^i$  representan las funciones  $fL/D$  correspondientes para los flujos de Fanno e isoterma, respectivamente. En la figura de la izquierda, se muestran dos valores de  $M_B$  sobre la curva  $L_B^F$ , dos valores de  $M_D$  sobre la curva  $L_D^F$  y dos valores de  $M_1^i$  sobre la curva  $L_C^i$  (cuando la onda de choque se produce en  $x=0$  y el número de Mach a la salida de la tobera es  $M_D$ ).





Para  $L < L^*$  y una presión a la salida suficientemente baja, inferior a  $p^*$ , el flujo es supersónico en todo el conducto. Cuando la longitud iguala la máxima y se mantiene la presión  $p_S$  por debajo de  $p^*$ , el flujo supersónico alcanza el valor  $M_2 = 1$  justo a la salida. En cambio, si  $L > L^*$ , siendo siempre  $L^* < L_{\text{máx}}$ , y para cualquier valor de  $p_S$ , es inevitable que se produzca una onda de choque que evite la violación del segundo principio. Esto es así porque el flujo supersónico no puede alcanzar el extremo del conducto cuando  $L > L^*$  y, en respuesta, se produce una onda de choque en el lugar preciso del conducto que hace que el flujo subsónico resultante alcance la salida, bien a su misma presión (cuando  $p_S > p^*$ ), o bien en condiciones críticas (cuando  $p_S < p^*$ ). A medida que la longitud aumenta, la onda de choque que se produce se desplaza aguas arriba, hasta alcanzar la entrada del conducto (esto es, el choque se produce con relaciones  $x_{\text{cs}}/L$  más pequeñas cuanto más largo es el conducto).<sup>318</sup> Esta onda podría llegar a introducirse en el interior de la parte divergente de la tobera con longitudes mayores, momento en que el  $M_1$  dejaría de ser supersónico, pero que no cambiaría el flujo másico porque la tobera de alimentación continuaría bloqueada. Hasta este instante, el número de Mach supersónico de entrada al conducto sólo dependía del diseño y de las características geométricas de la tobera de alimentación. Por tanto, la fricción supersónica cambia el modelo del flujo en el conducto en función de la longitud, pero no bloquea (reduce) el flujo másico hasta que el choque no alcanza la garganta de la tobera de alimentación. Esta discusión ha de completarse con el análisis en términos de presión, para poder contemplar la adaptación de la presión a la salida.

En la figura 5.40, se presenta la influencia de los parámetros  $p_1/p_2$  y  $p_{00}/p_S$  en el flujo con fricción que se produce en un conducto alimentado mediante una tobera convergente-divergente (en líneas generales, esta discusión es parecida a la que se ha expuesto en el apartado 3.6.4). El flujo puede suponerse incompresible para ratios de presión próximas a la unidad, tales que el número de Mach de salida sea inferior a 0,3. A partir de este momento, las características del flujo compresible dependen de si la longitud del conducto es superior a  $L_B$ , se encuentra en el intervalo  $[L_D, L_B]$  o es inferior a  $L_D$ .

Si la longitud del conducto es superior a  $L_B$ , entonces se bloquea antes el conducto que la tobera de alimentación. Para valores grandes de  $p_S$ , tanto el número de Mach de salida,  $M_2$ , como el de entrada al conducto,  $M_1$ , son subsónicos, y el caudal puede aumentarse disminuyendo  $p_S$ . La presión de salida es  $p_2 = p_S$ , que es superior a  $p^*$ , y la de entrada,  $p_1$ , es mayor que  $p_2$  y se calcula con [5.267]. Suponiendo un factor  $fL/D$  constante, existe un valor de presión a la salida, precisamente  $p^*$ , para el que  $M_2 = 1$  y cuyo  $M_1$  correspondiente es inferior a  $M_B$ , al ser  $L > L_B$ . Cualquier disminución posterior de  $p_S$  no tiene efecto en las condiciones de presión en el interior del conducto ni de la tobera, y entonces  $p_2 = p^* > p_S$  y el fluido se adapta a la presión del recinto de salida mediante una secuencia de ondas de expansión.

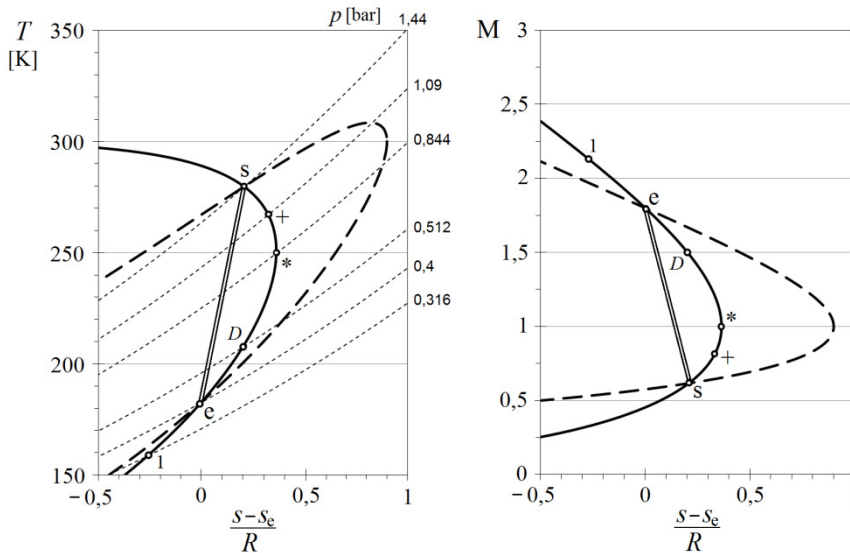
Si la longitud es inferior a  $L_B$ , la disminución de  $p_S$  conduce, primero, al bloqueo de la garganta de la tobera de alimentación, y sitúa el valor de  $M_1$  en  $M_B$  (para  $p_S = p_B$ , en la figura 5.40). Hasta entonces, el flujo es subsónico en toda la instalación y  $M_1$  viene dado por la ecuación [3.188] para cualquier Mach en la garganta, y  $M_1 < M_B < 1$ . A partir del bloqueo en la tobera, cualquier disminución de  $p_S$  sólo conduce a la adaptación de la distribución de la presión de acuerdo con el caudal másico circulante, lo que, en definitiva, provoca la aparición de una onda de choque, pues no es posible que la presión se compense de otra manera. Para valores de  $p_S$  comprendidos entre  $p_B$  y  $p_C$ , el choque se produce en el interior de la zona divergente de la tobera, donde habrá un tramo supersónico, y el número de Mach de entrada al conducto será subsónico.



La ubicación de la onda de choque puede calcularse mediante el sistema de ecuaciones [3.199] y las figuras 3.21 y 3.22 (tomando como  $p_s$  el valor de  $p_1$  de [5.267] y  $M_s = M_1$ ) para una relación  $A_s/A^*$  dada (para el área del conducto:  $A = A_s$ ). No obstante, cabe señalar que, a medida que  $p_s$  disminuye y la onda se acerca a la salida de la tobera, el valor de  $M_1$  aumenta (v. figuras 3.21 y 3.22),<sup>319</sup> lo que disminuye la longitud crítica correspondiente y puede llevar al bloqueo del conducto antes de que la onda lo alcance. La longitud crítica más pequeña,  $L_C$ , se encuentra cuando la onda de choque está justo a la salida de la tobera, para la que el Mach de entrada a la onda es  $M_D$  y el de salida,  $M_1$ , es el subsónico mayor posible a la entrada del conducto (se corresponde con  $M_C$  en la figura 3.19) y se calcula con [5.236]. En definitiva, si la longitud del conducto es inferior a  $L_C$ , la onda de choque alcanza el conducto y el flujo puede ser supersónico a su entrada, pero, si se cumple que  $L_C < L < L_B$ , el conducto se bloquea por fricción antes de que la onda lo alcance y  $M_2 = 1$ . En esta situación, cualquier disminución de  $p_s$  no afecta el flujo en el conducto ni en la tobera, el sistema está doblemente bloqueado y la presión de salida,  $p_2$ , se adapta de nuevo a  $p_s$  mediante un sistema de ondas de expansión.

Con  $L < L_C$  y valores de  $p_s$  algo inferiores a  $p_C$ , la onda de choque penetra en el conducto y el flujo de entrada es supersónico. El valor correspondiente de  $M_1$  es  $M_D$  y el de  $p_1$  (y el del resto de variables), el dado por [3.182] para el flujo isentrópico. Todas las variables de entrada al conducto dependen de las características del flujo isentrópico en la tobera y, por tanto, son sólo función de la relación de áreas [3.190]. Esto es: si no se cambia la geometría de la tobera ni varían las condiciones de remanso de la alimentación, el valor  $M_D$  supersónico de entrada al conducto se mantiene constante ante la consiguiente disminución de  $p_s$ .

Figura 5.39. Visualización del flujo en un conducto, en un diagrama  $T$ - $s$ , e interconexión entre las líneas de Fanno y de Rayleigh (a trazos) durante el choque ( $j = 372 \text{ kg/m}^2/\text{s}$ ). Evidentemente, en el choque se produce un incremento de entropía y de presión (las líneas delgadas a trazos son isobaras). Obsérvese también que la temperatura crítica del flujo de Rayleigh es superior a la del de Fanno correspondiente.



El flujo supersónico que se produce desde el punto “1” de la figura 5.39 recorre la línea de Fanno correspondiente al gasto másico circulante, pero no puede atravesar la condición crítica. Cuando  $L_C > L > L_D$  y la presión  $p_s$  es superior a  $p^*$ , por ejemplo  $p_s^+$  (en la



figura,  $p_S^+ = 1,09$  bar), el flujo supersónico no puede evolucionar dentro del conducto hasta  $p_S^+$ , pues ello supondría una disminución de la entropía con la distancia en la proximidad de la salida. En consecuencia, se produce una onda de choque que aumenta la presión del fluido por encima de  $p_S^+$  y hace que el flujo sea subsónico hasta la salida, con  $p_2 = p_S^+$ . Si la presión  $p_S$  es exactamente  $p^*$ , el flujo tras la onda alcanza la condición crítica a la salida y el conducto está bloqueado por fricción. A partir de este momento, cualquier disminución de  $p_S$  no tiene efecto alguno sobre el flujo y el fluido vuelve a adaptar su presión a  $p_S$  mediante una serie de ondas de expansión fuera del conducto. Es importante notar que la magnitud de la onda de choque disminuye a medida que penetra en el conducto, porque el número de Mach supersónico decrece muy rápidamente con la distancia, lo cual, a su vez, aumenta el número Mach subsónico,  $M_s$  (v. figura 5.40), y disminuye la presión,  $p_s$ , que se obtienen tras el choque. Esta presión, no obstante, siempre es superior a  $p^*$ .

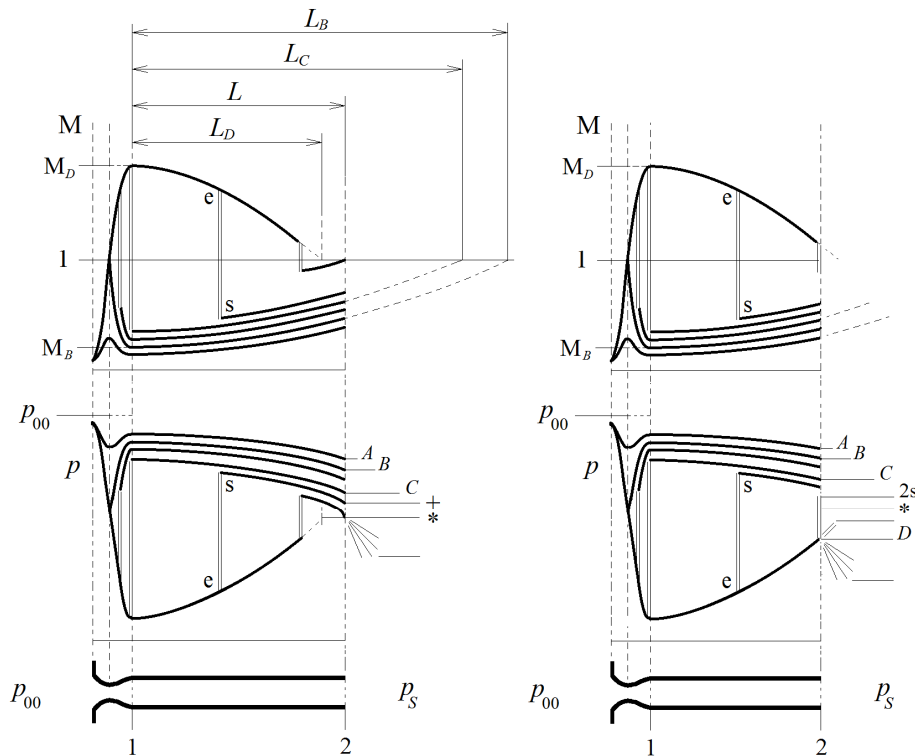


Figura 5.40. Regímenes de flujo en función de la presión del recinto de salida y de la longitud del conducto. A la izquierda, el caso  $L_c > L > L_D$  y, a la derecha, cuando  $L < L_D$ .

La situación es algo diferente cuando  $L < L_D$ , por cuanto, aunque esta condición evita que se dé bloqueo en el conducto, no impide que la onda de choque alcance su salida.<sup>320</sup> Si  $p_{2s}$  es la presión mínima posible tras el choque, que se produce precisamente cuando la onda se sitúa justo a la salida, valores más altos de  $p_S$  mantienen la onda en el interior del conducto, como en el caso anterior; pero, si  $p_S < p_{2s}$ , la onda se escapa aguas abajo y el flujo es supersónico y libre de choques en todo el conducto. La adaptación de la presión se produce, entonces, en el exterior y conduce a ondas de compresión (con



ondas de choque oblicuas) o de expansión, en función de si  $p_s$  es mayor o menor, respectivamente, a la presión en “2” para el flujo supersónico de salida,  $p_D$ . Esta presión y el número de Mach de salida,  $M_2$ , se determinan combinando las ecuaciones [5.265] y [5.267] (en la figura,  $p_D=0,512$  bar y  $M_2=1,5$ ). Por su parte, la presión  $p_{2s}$  se deduce de la ecuación [5.236] cuando  $p_D$  y  $M_2$  son los valores de entrada a la onda. Cuando  $p_s$  es exactamente  $p_D$ , siendo siempre  $p_D < p^*$ , el flujo supersónico de salida está “adaptado” en presión, de forma análoga a como lo estaba el flujo de salida de una tobera convergente-divergente cuando  $p_s=p_D$  (v. figura 3.19).

La ubicación del choque en el conducto,  $x_{es}$ , depende del equilibrio de presiones entre la presión de entrada,  $p_1$  (que depende, a su vez, del flujo bloqueado e isentrópico que se produce en la tobera, con un número de Mach de salida  $M_D=M_1$ ), y la presión de salida,  $p_2=p_s$  (válida mientras el choque no abandone el conducto y  $M_2=M_s < 1$ ). En función de la relación de presiones total,  $p_{00}/p_s$ , y las presiones  $p_e$  y  $p_s$  a ambos lados de la onda de choque, se tiene:

$$\frac{p_{00}}{p_s} = \frac{p_{00}}{p_1} \frac{p_1}{p_e} \frac{p_e}{p_s} \frac{p_s}{p_s} \quad [5.285]$$

Sustituyendo para la primera razón [3.182], para la segunda y la cuarta [5.267] y para la tercera la ecuación [5.236] para el choque, se sigue:

$$\frac{p_{00}}{p_s} = \frac{M_s}{M_D} \frac{M_e}{M_s} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_D^2}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_e^2 - 1)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left( \frac{2 + (\gamma-1)M_e^2}{2 + (\gamma-1)M_s^2} \right)^{1/2} \left( \frac{2 + (\gamma-1)M_s^2}{2 + (\gamma-1)M_D^2} \right)^{1/2} \quad [5.286]$$

donde  $M_e$  es el número de Mach a la entrada de la onda de choque, que es función de  $M_s$  por [5.236], o viceversa. Como, en el choque, el proceso es adiabático y el intercambio de cantidad de movimiento es nulo, la intersección de las líneas de Fanno y de Rayleigh determina la transición entre  $M_e$  y  $M_s$  para las mismas condiciones de entrada a la onda y  $j$  (v. figura 5.39). Además, y por la misma razón, tanto  $M_e$  como  $M_s$  han de compartir el valor de la función de impulso  $i$  (v. figura 5.35).

Por otra parte, en los tramos donde se produce flujo de Fanno, se verifica [5.263] y, por tanto, se han de cumplir las relaciones:

$$f \frac{x_{es}}{D} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{M_D^2} - \frac{1}{M_e^2} \right) + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left[ \frac{M_D^2 \left( \frac{2 + (\gamma-1)M_e^2}{2 + (\gamma-1)M_D^2} \right)}{M_e^2} \right] \quad [5.287]$$

$$f \frac{L-x_{es}}{D} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{M_s^2} - \frac{1}{M_s^2} \right) + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left[ \frac{M_s^2 \left( \frac{2 + (\gamma-1)M_s^2}{2 + (\gamma-1)M_s^2} \right)}{M_s^2} \right]$$

Este conjunto de ecuaciones permite determinar la posición de la onda de choque en el conducto, así como  $M_e$  (y  $M_s$ ) y  $M_s$  en función de  $p_{00}$ ,  $p_s$ , la razón de áreas [3.187] y el factor  $fL/D$ . A la hora de resolver el sistema anterior, se ha de tener en cuenta que  $M_D$  depende de la relación de áreas de la tobera:

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{1}{M_D} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_D^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad [5.288]^*$$



y que  $p_1$  ( $p_D$  en la figura 3.19) es conocido de [3.182] a partir de  $p_{00}$  y  $M_D$ :

$$\frac{p_{00}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_D^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad [5.289]$$

La figura 5.41 muestra la ubicación de la onda cuando  $p_S$  es inferior a  $p^*$ , con  $M_2 = 1$ , si  $L > L_D$ , y  $M_2 > 1$ , si  $L < L_D$ .

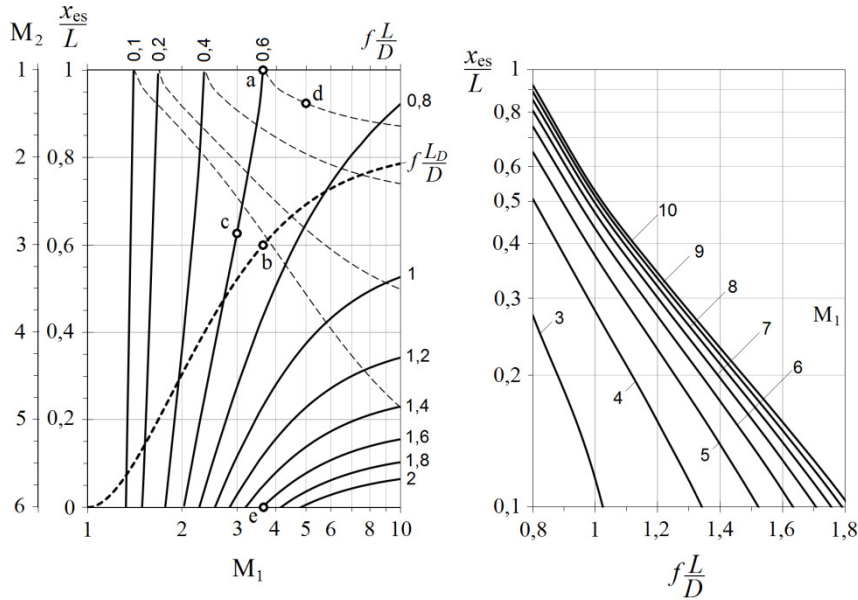


Figura 5.41. Ubicación de la onda de choque,  $x_{es}$ , en función del parámetro  $fL/D$  y el número de Mach de entrada al conducto,  $M_1$ . En la figura de la izquierda, las curvas continuas son la solución  $x_{es}/L$  para  $fL/D$  constante; la curva a trazos muestra la condición crítica  $fL_D/D$ , con  $L_D = L^*$ , y las líneas a trazos delgadas son las curvas de  $M_2$ , para flujo supersónico en todo el conducto. Para la interpretación del gráfico, sigase el siguiente ejemplo: para un conducto de  $fL/D = 0,6$  (a), el choque se produce a la salida ( $x_{es} = L$ ) cuando  $M_1 = 3,63$  y  $fL_D/D = 0,6$  (b). Si el número de Mach de entrada es inferior, se cumplirá que  $L_D < L$ . Por ejemplo, si  $M_1 = 3$ , el choque se produce en  $x_{es}/L = 0,63$  (c) pero, si  $M_1 = 5$ , el flujo de salida es supersónico, con  $M_2 = 1,38$  (d). El choque se produce en  $x_{es} = 0$  cuando  $M_1 = 3,63$ , si  $fL/D = 1,6$  (e).

Si la conexión se realiza sin tobera convergente-divergente de alimentación, el flujo a la entrada es tal que  $M_1 < 1$ , y se mantendrá subsónico, con  $M_2 = 1$  a la salida, si  $L > L^*$ , y con  $M_2 < 1$ , si  $L < L^*$ . En el primer caso, el conducto está bloqueado por la fricción y el número de Mach de entrada inicial se ralentiza hasta verificar [5.264], haciendo  $L = L^*$ . En el segundo caso, en cambio, el número de Mach de entrada puede aumentarse (por ejemplo, aumentando la presión de alimentación,  $p_{00}$ ) hasta que  $L = L^*$  y el conducto se bloquee.<sup>321</sup>

La resolución de este caso es más sencilla porque no puede haber onda de choque en el conducto. Teniendo en cuenta que el flujo hasta la salida del depósito es isentrópica y, por tanto, se cumple [5.289], con  $p_{00} = p_{01}$ , la ecuación [5.267], para  $p_2 = p_S$ , conduce a:

$$\frac{p_{00}}{p_S} = \frac{p_{00}}{p_1} \frac{p_1}{p_S} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{2 + (\gamma-1)M_2^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2}\right)^{1/2} \quad [5.290]$$

o bien:

$$\frac{p_{00}}{p_S} = \frac{M_2}{M_1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad [5.291]$$

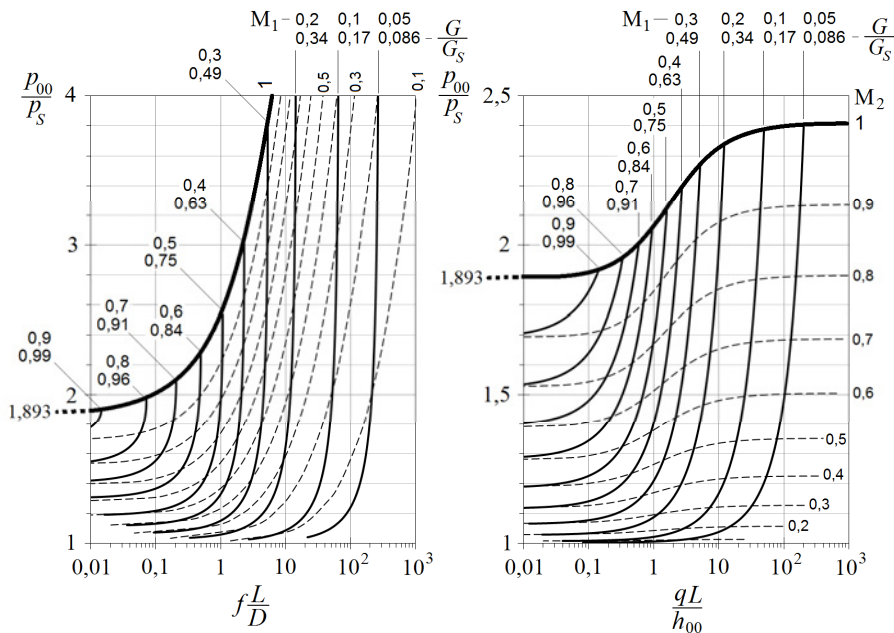
Esta ecuación y [5.265] forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas,  $M_1$  y  $M_2$ . Una vez determinado  $M_1$ , se pueden obtener todas las propiedades del fluido a la entrada del conducto y, como éstas son función de las del depósito, el gasto másico puede calcularse en función de las condiciones de remanso de partida:

$$G = j_1 A = \frac{\rho_{00}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \frac{c_{00}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{1}{2}}} M_1 A = \rho_{00} c_{00} \frac{M_1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} A = \frac{p_{00}}{(RT_{00})^{1/2}} \frac{\gamma^{1/2} M_1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} A \quad [5.292]$$

La ecuación [5.292] permite definir una conductancia efectiva para el sistema de descarga, análoga a [5.74], pero que ahora sería dependiente del factor  $fL/D$  a través de  $M_1$ . El flujo de masa máximo,  $G_s$ , se obtiene cuando  $M_1 = 1$  (y  $L=0$ ), respecto al cual se define la relación:

$$\frac{G}{G_s} = \frac{M_1}{\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \quad [5.293]$$

Figura 5.42. Solución gráfica de los sistemas de ecuaciones que resuelven los flujos de Fanno (izquierda) y de Rayleigh (derecha) en un conducto con entrada recta. A trazos, las líneas de  $M_2$  constante. Si, para unos datos de partida, el punto de trabajo ( $fL/D$ ,  $p_{00}/p_s$ ) cae por encima de la línea  $M_2 = 1$ , la salida está representada por el punto de idéntica abscisa de la línea  $M_2 = 1$  y de curva límite  $M_1$ . La presión en el resto del conducto sigue la línea característica  $M_1$  hacia atrás, sustituyendo  $L$  por  $x$ , para el gasto másico  $G/G_s$ . A  $x=0$  le corresponde la relación de presiones crítica [3.183]:  $p_{00}/p_s = 1,893$ .



Cuando el flujo de Rayleigh es de aplicación, la relación entre las presiones de entrada y salida viene dada por [5.255]. Si se admite que el aporte de calor se produce sólo en el conducto, entonces aún se cumple [5.289] y se tiene:





$$\frac{p_{00}}{p_s} = \frac{p_{00}}{p_1} \frac{p_1}{p_s} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \quad [5.294]$$

Dividiendo la última de las ecuaciones [5.251] por la entalpía de remanso en el depósito,  $h_{00}$ , y, para  $T_{00} = T_{01}$  y el gas perfecto, se deduce:

$$1 + \frac{qL}{h_{00}} = \frac{h_{02}}{h_{00}} = \frac{T_{02}}{T_0} \frac{T_0^*}{T_{00}^*} \quad [5.295]$$

de donde, con [5.257]:

$$\frac{qL}{h_{00}} = \frac{M_2^2 (1 + \gamma M_1^2)^2 (2 + (\gamma-1)M_2^2)}{M_1^2 (1 + \gamma M_2^2)^2 (2 + (\gamma-1)M_1^2)} - 1 \quad [5.296]$$

Esta ecuación y la [5.294] permiten calcular  $M_1$ ,  $M_2$  y el gasto con [5.292].

### 5.9.5. Solución general del flujo compresible

El conjunto de ecuaciones [5.244] dependen de cuatro factores fundamentales: el calor externo aplicado, la fricción del fluido, los cambios de área normal al flujo y el gradiente del potencial de fuerzas másicas (no considerado hasta el momento). Es importante observar que la variación de la entalpía de remanso descrita por la última de estas ecuaciones omite la conducción de calor en dirección axial y los efectos disipativos que son consecuencia de la expansión viscosa.<sup>322</sup> Por su parte, el flujo de calor por unidad de masa y longitud,  $q$ , es el calor que recibe el fluido desde el exterior y no incluye el calor irreversible generado por los efectos viscosos, motivo de la transformación (degradación) de la energía mecánica en térmica. Se entiende, a su vez, que cualquier efecto disipativo que debiera contemplarse en la ecuación [5.245] ha sido incluido en la determinación experimental del factor  $f$ .

La manipulación de estas ecuaciones y las relaciones termodinámicas definidas en la tabla 1.5 permite derivar un conjunto de ecuaciones en diferencias que describen la variación de las variables del flujo para el caso más general de flujo compresible cuasiunidireccional de un gas real. La forma básica de estas ecuaciones es:

$$(1 - M^2) \frac{d\psi_i}{\psi_i} = \sum_{j=1}^4 L_{ij} \eta_j \quad [5.297]$$

donde los  $L_{ij}$  son los coeficientes que figuran en la tabla 5.5, función del número de Mach y de los parámetros termodinámicos normalizados. Por ejemplo, la variación unitaria de la densidad se escribe de la forma:

$$(1 - M^2) \frac{d\rho}{\rho} = -\phi \frac{q}{c^2} dx - (1 + \phi) \frac{f}{2D} M^2 dx + M^2 \frac{dA}{A} - \frac{1}{c^2} dU \quad [5.298]$$

La velocidad del sonido utilizada para definir el número de Mach en estas ecuaciones es la velocidad del sonido que deriva de la expresión [3.176], en que se sustituye la razón de los calores específicos,  $\gamma$ , por la inversa del coeficiente de compresibilidad adiabático,  $\beta_s$ .<sup>323</sup>



$$c^2 = \gamma_s \frac{P}{\rho} \tag{5.299}$$

y también es:

$$c^2 = \frac{\phi c_p}{\alpha} = -\phi \rho \left[ \frac{\partial h}{\partial \rho} \right]_p \tag{5.300}$$

Tabla 5.5. Relaciones fundamentales para el flujo compresible cuasiunidireccional de un gas real. El lector puede verificar por sí mismo la equivalencia entre estas relaciones y las obtenidas en este tema para cada uno de los flujos característicos en el supuesto de gas ideal.

$\frac{d\psi_i}{\psi_i}$	$\frac{q}{c^2} dx$	$\frac{f}{2D} M^2 dx$	$M^2 \frac{dA}{A}$	$\frac{1}{c^2} dU$
$\frac{dp}{p}$	$-\gamma_s \phi M^2$	$-\gamma_s (1 + \phi M^2)$	$\gamma_s$	$-\gamma_s$
$\frac{d\rho}{\rho}$	$-\phi$	$-(1 + \phi)$	1	-1
$\frac{dT}{T}$	$(1 - \gamma M^2) \frac{\phi}{\hat{\alpha}}$	$(1 - \hat{\alpha} - \gamma M^2) \frac{\phi}{\hat{\alpha}}$	$\phi$	$-\phi$
$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{c^2}$	$\phi M^2$	$(1 + \phi) M^2$	-1	$M^2$
$\frac{dh}{c^2}$	$1 - (1 + \phi) M^2$	$-(1 + \phi) M^2$	1	-1
$\frac{du}{c^2}$	$1 - \frac{\phi}{\gamma_s} - M^2$	$1 - \hat{\beta}_h - M^2$	$\frac{1}{\gamma_s}$	$-\frac{1}{\gamma_s}$
$\frac{Tds}{c^2}$	$1 - M^2$	$1 - M^2$	0	0

Sorprende que las ecuaciones que se derivan de la tabla 5.5 no aparezcan en los textos clásicos, cuyo desarrollo se restringe normalmente a las situaciones más extremas y simples de flujo compresible: reversible con aporte de calor, o flujo de Rayleigh, o con rozamiento pero adiabático, o flujo de Fanno. Probablemente, la razón de ello estriba en que los flujos reales pueden interpretarse en la mayoría de casos con las hipótesis anteriores y el “sufrido” gas ideal.<sup>324</sup> No obstante, aunque el tratamiento que aquí se presenta no es tan amigable ni permite el seguimiento analítico sencillo de las ecuaciones, utiliza propiedades de gas real y es especialmente indicado cuando el fluido fluye en condiciones próximas a las críticas (para cualquier M). Las ecuaciones deducidas para los flujos “ideales” de Rayleigh y Fanno dependen de la razón de los calores específicos,  $\gamma$ , la cual es fuertemente divergente cerca del punto crítico del fluido,<sup>325</sup> lo que invalida las soluciones encontradas por integración (en que se supone que  $\gamma$  es constante).

Las ecuaciones que se obtienen de la tabla 5.5 confirman, aun en el caso de gas real, la importancia del término  $\{1 - M^2\}$  en el flujo compresible, y también que la adición de calor a un flujo subsónico causa una reducción de su temperatura cuando  $M^2 > 1/\gamma$ . En cambio, estas ecuaciones ponen de manifiesto que la entalpía y la energía interna del



gas real, con  $q > 0$  y  $M < 1$ , disminuyen cuando  $M > (1 + \phi)^{-1}$  y  $M^2 > 1 - \phi/\gamma_s$ , respectivamente, y, por tanto, los puntos de temperatura, entalpía y energía interna máximas no coinciden en el caso real (compruebe el lector que todas estas relaciones coinciden cuando el gas es ideal y  $\gamma_s = \gamma$ , etc.).

Como curiosidad, obsérvese también cómo el parámetro de Grüneisen es inesperadamente útil al deducir la forma general de estas ecuaciones. Este parámetro, con [1.138] y [5.299], también se define de cualquiera de las siguientes formas:

$$\phi = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial u} \right]_p = \left( \frac{\gamma_s p}{\rho} \right) \frac{\alpha}{c_p} = \frac{1}{\beta_s \rho} \frac{\alpha}{c_p} = \frac{1}{\beta_1 \rho} \frac{\alpha}{c_v} = \frac{\gamma - 1}{\hat{\alpha}} \quad [5.301]$$

y puede ser considerado constante en muchas ocasiones, por ser el menos dependiente de la presión y de la temperatura de todos los parámetros de la tabla 1.5.

## 5.10. Sobre el índice politrópico

Se denominan *politrópicas* las transformaciones termodinámicas reversibles que satisfacen la ecuación:

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n \quad [5.302]$$

o las equivalentes para un gas perfecto:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{1-n} \quad [5.303]$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

en que  $n$  es el exponente politrópico o de politropía.

Estas relaciones se han mostrado muy útiles para estimar el trabajo de expansión por unidad de masa de una transformación dada:

$$w_{12} = \int_1^2 p dv = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1-n} = \frac{R(T_2 - T_1)}{1-n} \quad [5.304]$$

o, también, para calcular el calor total recibido por el gas perfecto durante el proceso, de acuerdo con:

$$\int_1^2 T ds = c_v \frac{\gamma - n}{1-n} (T_2 - T_1) \quad [5.305]$$

Existe abundante literatura relativa a las aplicaciones de esta clase de transformaciones y de sus características en función del valor de  $n$ . Este coeficiente aparece como una generalización de forma, que, englobando los casos isoterma ( $n = 1$ ) y adiabático ( $n = \gamma$ ) como particulares, permite estimar las magnitudes anteriores en función de las variables termodinámicas de estado a la entrada y a la salida de una turbomáquina, de una máquina térmica, en ciclos de potencia o de generación de energía, etc.



Se sabe que el índice politrópico es la ratio que indica la cantidad de calor recibida por el gas entre los límites de integración {1,2}. Según la termodinámica clásica, la integral definida [5.305] no se corresponde con ningún área representativa (encerrada) en un diagrama  $T-s$  si el proceso es irreversible, pues no es definible una trayectoria entre los límites de integración con variables de estado definidas sólo en equilibrio. No obstante, bajo la hipótesis de equilibrio local y utilizando la entropía estadística, puede acortarse la distancia entre los límites de integración y redefinir un índice politrópico instantáneo, variable durante un proceso real cuasiestacionario.

Derivando respecto al tiempo las ecuaciones [5.302] y [5.303], supuesto  $n$  constante en la transformación diferencial  $\delta t$ , se deduce que el índice politrópico instantáneo de una transformación de estado se calcula mediante la expresión:

$$n = \frac{\dot{p}}{p} \frac{\rho}{\dot{\rho}} = -\frac{\dot{p}}{p} \frac{v}{\dot{v}} = 1 - \frac{\dot{T}}{T} \frac{\dot{v}}{v} \quad [5.306]$$

es decir, el índice politrópico es el cociente entre los trabajos de compresión y expansión del gas. Estas ecuaciones son fácilmente implementables en cualquier programa de ordenador y su conexión con [5.71], por ejemplo, es evidente.

El índice politrópico experimental puede conocerse mediante la relación siguiente:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)} \quad [5.307]$$

El cálculo preciso del politrópico implica reducir en lo posible el tiempo que separa los puntos (1) y (2), pero manteniendo el compromiso entre la precisión del resultado, función de la frecuencia de adquisición de los datos, y su convergencia numérica, que empeora cuando  $v_1 \approx v_2$  y existen errores de lectura. El uso de logaritmos no representa una indeterminación en [5.307] porque la presión, la densidad y la temperatura son definidas positivas.

### 5.10.1. Límites naturales para el índice politrópico

La ecuación [5.306] muestra que  $n=0$  en un proceso isobárico,  $n=1$  en uno isotermo (con gas ideal) y  $n=\pm\infty$  en uno isócoro. Se sabe, también, que  $n=\gamma$  en un proceso adiabático reversible (v. [5.305]), pero no es cierto que  $n=\gamma$  en una transformación adiabática en presencia de irreversibilidades. En este apartado, se demuestra esta última afirmación y se presenta un método para la estimación del calor irreversible generado en un proceso,  $|q_i|$ , cuando se conoce la evolución experimental del índice politrópico correspondiente.

Partiendo de la ecuación de estado para el gas ideal y de la ecuación de Gibbs de la energía interna [1.114], ambas por unidad de masa y tiempo, resulta:

$$\begin{aligned} \dot{p}v + p\dot{v} &= R\dot{T} \\ T\dot{s} - p\dot{v} &= c_v\dot{T} \end{aligned} \quad [5.308]$$



Estas ecuaciones, combinadas con la ecuación de la entropía:

$$T\dot{s} = \dot{q} + |\dot{q}_i| \quad [5.309]$$

conducen a la expresión:

$$\dot{p}v + p\dot{v} = \frac{R}{c_v}(\dot{q} + |\dot{q}_i| - p\dot{v}) \quad [5.310]$$

Con [5.306], se deriva:

$$n = \frac{c_p}{c_v} - \frac{R}{c_v} \left( \frac{\dot{q} + |\dot{q}_i|}{p\dot{v}} \right) \quad [5.311]$$

de donde:

$$|\dot{q}_i| = (\gamma - n) \frac{c_v}{R} p\dot{v} - \dot{q} \quad [5.312]$$

El término de la derecha de esta ecuación no puede ser negativo en un proceso real.<sup>326</sup> Cuando  $n = \gamma$ , todo el calor generado de forma irreversible en el gas debe ser transportado al exterior y, en consecuencia, el proceso no puede ser adiabático. Un proceso adiabático e irreversible conlleva índices politrópicos superiores a  $\gamma$ , si es de compresión ( $dv < 0$ ), e inferiores, si es de expansión ( $dv > 0$ ). Esta tendencia es reconocida en los procesos de flujo compresible adiabático a través de compresores y turbinas, en que la evolución entre los puntos de entrada y salida a la turbomáquina no sigue una trayectoria isentrópica “vertical” en un gráfico  $h-s$  cuando se tienen en cuenta las pérdidas irreversibles. Por otra parte, es fácil ver que el término incluido en el paréntesis de [5.311] es la unidad en un proceso isoterma con gas ideal, de lo cual se deduce  $n = 1$ .

La formulación más genérica a un gas real utiliza el factor de compresibilidad,  $z$ , de [1.111]. La ecuación de estado en este caso es, en diferencias:

$$vdp + pdv = zRdT + RTdz \quad [5.313]$$

El factor de compresibilidad puede ser definido, en función de las condiciones críticas, por medio de las magnitudes reducidas, de la forma:

$$z = z_c \frac{p_r v_r}{T_r} \quad [5.314]$$

Como la ley de estados correspondientes indica que  $v_r = v_r(p_r, T_r)$ , entonces,  $z = z(p_r, T_r)$  para gases de idéntica  $z_c$ . Por tanto:

$$dz = \left[ \frac{\partial z}{\partial p} \right]_T dp + \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_p dT \quad [5.315]$$

o bien:

$$dz = \left[ \frac{\partial z}{\partial v} \right]_T dv + \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v dT \quad [5.316]$$

Por otro lado, de la ecuación [5.313], se sigue:

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v = \frac{zR}{v} + \frac{RT}{v} \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v \quad [5.317]$$

y, de [1.114]:



$$du = c_v dT + \left( \frac{zRT}{v} + \frac{RT^2}{v} \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v - p \right) dv \quad [5.318]$$

$$Tds = c_v dT + p \left( 1 + \frac{T}{z} \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v \right) dv$$

Sustituyendo estos resultados en [5.313], se obtiene:

$$vdp + pdv = \frac{zR}{c_v} \left\{ Tds - p \left( 1 + \frac{T}{z} \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v \right) dv \right\} + RTdz \quad [5.319]$$

y, finalmente, con  $n = -vdp/pdv$ :

$$n = \frac{c_v + zR}{c_v} - \frac{zR}{c_v} \left\{ \frac{Tds}{pdv} - \frac{T}{z} \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v \right\} - \frac{v}{z} \frac{dz}{dv} \quad [5.320]$$

El problema no está resuelto analíticamente aún, por cuanto deben calcularse las derivadas parcial y total del factor de compresibilidad. Para ello, debe acudir a tablas, a correlaciones de  $z$  o bien a ecuaciones de gas real. No obstante, es posible manipular la ecuación anterior para obtener una expresión en función de las derivadas parciales de  $z$ . Con [5.316], y llamando:

$$z_{ij} = \left[ \frac{\partial z}{\partial i} \right]_j \quad [5.321]$$

para simplificar la apariencia del resultado, se obtiene:

$$n = \frac{c_v + zR}{c_v} - \frac{zR}{c_v} \left( 1 + \frac{T}{z} z_{Tv} \right) \frac{Tds}{pdv} - \frac{v}{z} z_{vT} + \frac{RT}{c_v} \left( 2 + \frac{T}{z} z_{Tv} \right) z_{Tv} \quad [5.322]$$

de donde:

$$|\dot{q}_i| = \frac{\left( \frac{c_v + zR}{c_v} - n \right) - \frac{v}{z} z_{vT} + \frac{RT}{c_v} \left( 2 + \frac{T}{z} z_{Tv} \right) z_{Tv}}{\frac{zR}{c_v} \left( 1 + \frac{T}{z} z_{Tv} \right)} p\dot{v} - \dot{q} \quad [5.323]$$

Evidentemente, estas fórmulas coinciden con [5.311] y [5.312] para el gas ideal, si se tuviera que  $z = 1$  y todas las derivadas parciales se anularan.

El valor del índice politrópico en un proceso isentrópico puede calcularse de [5.322], haciendo  $ds = 0$ . Un método alternativo combina las ecuaciones de Gibbs de la energía interna y de la entalpía de la forma:

$$Tds = c_v dT + T \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v dv = c_v dT + T \left( \frac{zR}{v} + \frac{RT}{v} z_{Tv} \right) dv \quad [5.324]$$

$$Tds = c_p dT - T \left[ \frac{\partial v}{\partial T} \right]_p dp = c_p dT - T \left( \frac{zR}{p} + \frac{RT}{p} z_{Tp} \right) dp$$

Como  $Tds = 0$ , resulta:



$$\frac{z + Tz_{Tv}}{c_v} \frac{dv}{v} = - \frac{z + Tz_{Tp}}{c_p} \frac{dp}{p} \quad [5.325]$$

de donde se despeja:

$$\frac{n}{\gamma} = \frac{z + Tz_{Tv}}{z + Tz_{Tp}} \quad [5.326]$$

Obsérvese que el índice politrópico es  $n = \gamma$  en un proceso isentrópico si el factor de compresibilidad es constante, lo cual sólo es posible si el gas es ideal y  $z = 1$ .

Si el proceso es isoterma, la ecuación [5.318] revela:

$$\frac{Tds}{pdv} = 1 + \frac{T}{z} z_{Tv} \quad [5.327]$$

Este factor, sustituido en [5.322], muestra que el índice politrópico correspondiente es:

$$n = 1 - \frac{U}{z} z_{vT} \quad [5.328]$$

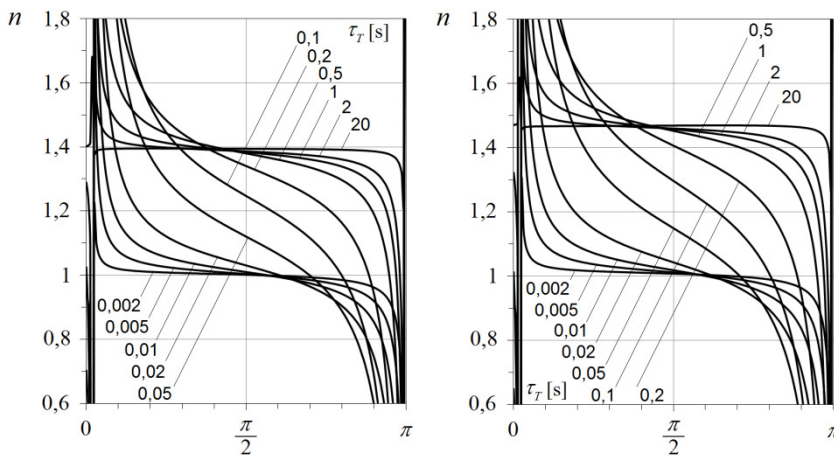


Figura 5.43. Evolución simulada del índice politrópico en la compresión del gas nitrógeno contenido en un sistema cerrado, en función de la constante de tiempo térmica,  $\tau_T$ , de [5.49]. A la izquierda, para el gas ideal ( $R_{N_2} = 296,8$  J/kg/K) y, a la derecha, para el gas real de la ecuación de estado Benedict-Webb-Rubin (en las condiciones de la prueba:  $\gamma = 1,403$ ). El proceso de compresión desplaza un pistón de forma senoidal ( $f = 1$  Hz).  $\theta = 0$  al inicio de la compresión (volumen máximo) y  $\theta = \pi$  al final (volumen mínimo). Sólo se representa el semiperíodo de compresión porque la tendencia mostrada por las curvas es idéntica en la expansión. Obsérvese que el índice politrópico medio supera el valor de  $\gamma \approx 1,4$  para valores elevados de  $\tau_T$  (procesos cuasiadiabáticos) y gas real.

### 5.10.2. Generación de líneas isotrópicas

El índice politrópico instantáneo utilizado en los apartados anteriores puede conocerse experimentalmente mediante la ecuación [5.307],<sup>327</sup> lo que permite cuantificar las pérdidas irreversibles que se producen en el sistema cuando se desplaza del equilibrio siguiendo una trayectoria determinada.

En un diagrama  $T$ - $s$ , cada punto tiene un conjunto de valores  $(T, s, p, v)$ , que definen su *estado termodinámico*. A la trayectoria del proceso, definida en un diagrama  $T$ - $s$  mediante una pendiente  $m$ , le corresponde un índice politrópico característico que definirá



el estado del proceso ( $m, n$ ). Las trayectorias que siguen un mismo politrópico se denominan *isotrópicas* y su determinación analítica se ofrece a continuación.

De las ecuaciones de Gibbs, es fácil deducir las siguientes relaciones  $Tds$ :

$$\begin{aligned} Tds &= c_v dT + T \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v dV = c_v dT + \frac{\alpha T}{\beta_t} dV \\ Tds &= c_p dT - T \left[ \frac{\partial v}{\partial T} \right]_p dp = c_p dT - \alpha T v dv \end{aligned} \quad [5.329]$$

en función del coeficiente de expansión térmica,  $\alpha$ , y del coeficiente de compresibilidad isoterma,  $\beta_t$ . Ambas ecuaciones conducen a:

$$\frac{ds}{dT} = m = \frac{c_v}{T} + \frac{\alpha}{\beta_t} \frac{dV}{dT} = \frac{c_p}{T} - \alpha v \frac{dp}{dT} \quad [5.330]$$

de donde, arreglando convenientemente, se sigue:

$$\frac{mT - c_v}{mT - c_p} = \frac{1}{p\beta_t} \frac{1}{n} \quad [5.331]$$

Finalmente, se despeja:

$$m = \frac{c_v}{T} \frac{p\beta_t n - \gamma}{p\beta_t n - 1} \quad [5.332]$$

y:

$$n = \frac{1}{p\beta_t} \frac{mT - c_p}{mT - c_v} \quad [5.333]$$

Las fórmulas anteriores se simplifican para el gas ideal, al ser  $p\beta_t = 1$ , lo que permite dibujar las curvas isotrópicas de forma rápida.<sup>328</sup>

### 5.10.3. Relación con el número de Mach

El flujo compresible unidireccional resuelto en el tema 5.9 ha permitido calcular todas las magnitudes fluidas en función del valor del número de Mach en el conducto. Se ha deducido que el incremento de entropía del fluido conducía el flujo hacia la condición de bloqueo, que para los flujos de Rayleigh y Fanno tenía lugar en  $M = 1$ . El flujo sólo puede alejarse de la condición de bloqueo si disminuye su entropía específica, lo que sólo es posible si se extrae calor y, en consecuencia, es imposible en condiciones adiabáticas.

Las figuras 5.34 y 5.36 muestran las trayectorias que el flujo sigue para los casos de Rayleigh y Fanno. En cada punto de cada una de las curvas, hay definidos un número de Mach y, tal como se ha explicado, también un índice politrópico característico. En este apartado, se presenta la relación existente entre el número de Mach y el índice politrópico en el flujo compresible de un gas ideal por un conducto de área constante, con rozamiento y aporte de calor.



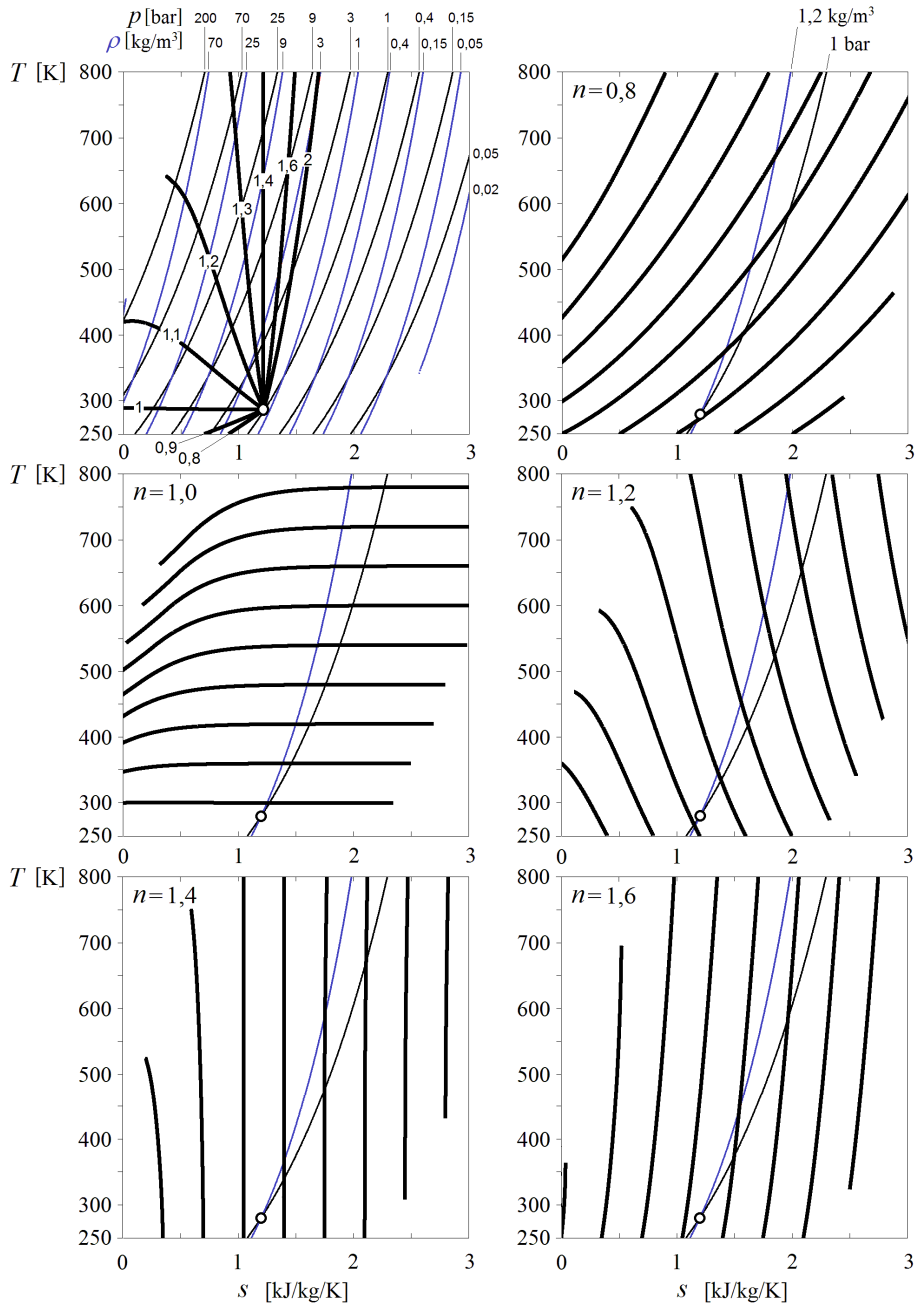


Figura 5.44. Curvas isotrópicas para el gas nitrógeno y diferentes valores de  $n$ .

Las ecuaciones que se cumplen en esta clase de flujos son [5.244]. Estas ecuaciones, en diferencias, son:



$$\begin{aligned}
 vdv - vdv &= 0 \\
 vdp + vdv + f \frac{dx}{D} \frac{v^2}{2} &= 0 \quad [5.334] \\
 du + pdv + vdp + vdv - \delta q &= 0
 \end{aligned}$$

Dividiendo la ecuación de la cantidad de movimiento por  $pdv$ , teniendo en cuenta la ecuación de continuidad y que  $v^2 = \gamma p v M^2$ , se llega a:

$$\frac{n}{\gamma M^2} = 1 + \frac{f}{2D} \frac{v}{\left[ \frac{dv}{dx} \right]} \quad [5.335]$$

o bien:

$$n = \frac{\gamma M^2}{1 - \gamma M^2} \frac{f}{2D} \frac{dp}{p} \quad [5.336]$$

A esta misma relación se llega si se parte de la ecuación de la energía [5.334]. Con la ecuación de la entropía [5.309] aplicada a este caso:

$$Tds = \delta q + f \frac{dx}{D} \frac{v^2}{2} \quad [5.337]$$

y con las ecuaciones [5.304] y [5.305] en forma diferencial, la ecuación de la energía se escribe:

$$(1-n) \frac{c_v}{R} + 1 - n + \gamma M^2 - (\gamma - n) \frac{c_v}{R} + \gamma M^2 \frac{f}{2D} \frac{v}{\left[ \frac{dv}{dx} \right]} = 0 \quad [5.338]$$

de donde se deduce, de nuevo, [5.335].

El flujo de Rayleigh es de forma que  $f=0$  y, por tanto, resulta que el número de Mach sigue la relación:

$$M^2 = \frac{n}{\gamma} \quad [5.339]$$

Es decir, el flujo sin fricción de un fluido ideal se bloquea cuando  $n=\gamma$ , y tiende a  $n=0$  hacia el reposo subsónico, y a  $n=+\infty$  cuando  $M$  crece. Las curvas de Rayleigh están, por tanto, limitadas asintóticamente por una isobara cuando  $M < 1$ , y por una isocora cuando  $M > 1$ .

Para deducir las relaciones anteriores en el flujo de Fanno, hay que utilizar el resultado [5.260] y sustituir  $dv/v$  en [5.335]. Tras operar convenientemente, se llega a:

$$M^2 = \frac{n-1}{\gamma-1} \quad [5.340]$$

y

$$n = 1 + (\gamma - 1)M^2 \quad [5.341]$$



Un flujo adiabático con fricción parte de una isoterma cuando  $M < 1$ , y de una isocora cuando  $M > 1$ .

Estas tendencias asintóticas y las conclusiones que se derivan ya se han observado en las figuras 5.34, 5.36 y 5.39, y pueden deducirse del desarrollo expuesto en el tema 5.9. Se puede concluir, pues, lo siguiente:

- En un flujo de Rayleigh con un número de Mach suficientemente bajo, se puede suponer que la presión del fluido se mantiene prácticamente constante.
- Un flujo con fricción es isotermo si el número de Mach es suficientemente bajo (ratios  $fL/D$  elevados).
- La densidad siempre disminuye al aumentar  $M$ .<sup>329</sup>

Por otro lado, recordando que en un proceso politrópico con gas ideal se cumple:

$$\frac{dT}{T} = (1-n) \frac{dv}{v} = \frac{n-1}{n} \frac{dp}{p} \quad [5.342]$$

y que, combinando la definición del número de Mach y la ecuación de continuidad, es:

$$2 \frac{dv}{v} = 2 \frac{dv}{v} = 2 \frac{dM}{M} + \frac{dT}{T} \quad [5.343]$$

la ecuación [5.335] puede escribirse de la forma:

$$\frac{n}{\gamma M^2} = 1 + (n+1) \frac{f}{4D} \left[ \frac{dM}{dx} \right] \quad [5.344]$$

o también:

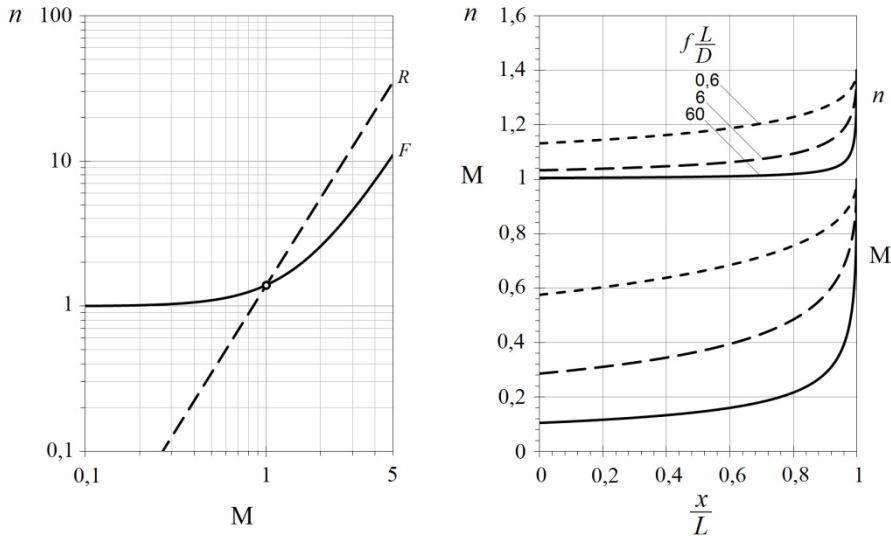
$$n = \gamma M^2 \frac{\frac{dM^2}{M^2} + f \frac{dx}{2D}}{\frac{dM^2}{M^2} - \gamma M^2 f \frac{dx}{2D}} \quad [5.345]$$

de la cual puede deducirse el índice politrópico en función de la evolución del número de Mach para cualquier tipo de flujo.<sup>330</sup>

En la figura 5.45, se muestra la evolución del número de Mach y del índice politrópico con la distancia en un flujo compresible adiabático con fricción, cuando se dan condiciones de bloqueo a la salida. Se observa que el crecimiento de número de Mach en el extremo saliente del tubo es casi abrupto. A medida que se acerca el bloqueo, la caída de presión estática debida a los esfuerzos de fricción hace descender la densidad. Como resultado, se requiere un gran aumento de la velocidad para acomodar el mayor volumen de gas y, por tanto, debe darse una conversión de presión estática en energía cinética, que causa un ulterior cambio en densidad, etc. En el tramo final de aproximación al bloqueo, la aceleración es tan elevada que la pérdida de presión apenas se ve afectada por el rozamiento y el proceso tiende a  $n = \gamma$ .



Figura 5.45. A la izquierda, se muestran los índices politrópicos de los flujos de Rayleigh [5.339] y Fanno [5.341], en función del número de Mach ( $\gamma = 1,4$ ). A la derecha, se ha representado la evolución de  $n$  y  $M$  con la distancia en un flujo de Fanno subsónico para tres valores de  $fL/D$  y  $M_2 = 1$ .



<sup>248</sup> Presiones relativas. El lector puede deducir estas relaciones por sí mismo teniendo presente que el fluido manométrico está en reposo y, por tanto, que los puntos *a* y *b* de la figura 5.1 se encuentran a la misma presión estática.

<sup>249</sup> Para ello, se han de respetar las recomendaciones normalizadas de diseño para un rango de medición determinado, función del número de Reynolds. ISO 5167-4:2003: *Measurement of fluid flow by means of pressure differential devices inserted in circular cross-section conduits running full -- Part 4: Venturi tubes*.

<sup>250</sup> Además, el área del chorro vertical disminuye a medida que desciende, porque la velocidad del fluido aumenta.

<sup>251</sup> La aplicación de la ecuación de Euler a este caso se justifica en que, en general, el volumen fluido contenido en el depósito es mayor que el que ocupa el conducto. Como se verá en el tema siguiente (v. [5.39]), esta condición elimina el efecto viscoso durante la descarga.

<sup>252</sup> Nótese que, durante la descarga continuada del depósito, la presión motriz causante del movimiento cambia significativamente de valor (hasta llegar a cero si la presión sobre la superficie libre es la atmosférica y  $p_0 = p_2$ ). En consecuencia, también cambia  $w$ , pero de forma que su ritmo de cambio es mayor en el instante inicial que al final de la descarga, y presenta un máximo en algún punto intermedio, una vez establecida la corriente.

<sup>253</sup> La ecuación [5.20] comparte forma con la segunda ley de Newton, en la que el caudal hace las veces de velocidad y la energía por unidad de volumen, de fuerza. El producto del caudal por la presión es una potencia, del mismo modo que lo es el de la velocidad por la fuerza, o el de la velocidad angular por el par, o el de la intensidad eléctrica por la tensión. Cuando la energía específica se describe en [Pa] y se utiliza el caudal volumétrico para el flujo [ $m^3/s$ ], entonces la inercia del fluido contenido en un tubo de sección  $A$  constante y longitud  $L$  es  $\rho LA$ , o bien  $\rho V/A^2$  [ $kg/m^4$ ].

<sup>254</sup> Al ser cuasiestacionario el proceso en esta región, la presión motriz en el depósito puede suponerse constante y desaparece al aplicar el operador gradiente.

<sup>255</sup> Que se da, no obstante, si el movimiento se mantiene laminar ayudado por su unidireccionalidad.



<sup>256</sup> Recuérdese que se está suponiendo que  $O(H) = O(A_D^{1/2})$ . Para fijar ideas, la descarga del agua de un depósito por un conducto de  $R = 1\text{ cm}$  conduce a  $\rho R^2/\mu \approx 100\text{ s}$ . Si el diámetro del depósito es de un metro, entonces  $(A_D/A)^{3/2} = 1,25 \cdot 10^5$ , y esta condición se cumple si  $v \ll 12,5\text{ m/s}$ . Con estas áreas, el orden de magnitud de la velocidad  $w$  (asociado a  $v$  por continuidad) ha de ser muy inferior a  $5\text{ mm/s}$ , y el tiempo de la descarga sería superior a los  $100\text{ s}$ . De todas formas, para que el régimen en el conducto fuera laminar, el número de Reynolds tendría que ser inferior a  $2.300$ , que es, en este caso, una condición más restrictiva que la anterior. Para este  $Re$  crítico, se cumpliría que  $v \approx 0,25\text{ m/s}$ ,  $w \approx 0,1\text{ mm/s}$  y la descarga se produciría en horas. Esta condición y la [5.31] para el flujo de Poiseuille, permiten concluir que el proceso será laminar si  $H/L \ll 2,5 \cdot 10^{-3}$  y, para  $H \approx A_D^{1/2} \approx 1\text{ m}$ , la longitud tendría que ser superior a los  $400\text{ metros}$ .

<sup>257</sup> Continuando el ejemplo anterior, esta condición implica que la longitud del conducto ha de ser muy inferior a  $A_D^{3/2}/A \approx 2.000\text{ m}$ . Esta estimación confirma que la unidireccionalidad del movimiento ayuda a que puedan existir los términos viscosos con longitudes grandes. No obstante, se ha visto anteriormente que el flujo es turbulento en el conducto para longitudes inferiores a  $400\text{ m}$ , lo que, con [5.35], conduce a longitudes de entrada del orden de algunos metros.

<sup>258</sup> Lo que equivale a decir que sólo existe una longitud característica en la singularidad.

<sup>259</sup> Con la excepción de las válvulas y de algún otro componente industrial, como los filtros, por ejemplo. En estos casos, el efecto de la singularidad es importante aunque se den las condiciones que se exponen en este apartado.

<sup>260</sup> Además, se están suponiendo uniformes la entropía específica en  $V$  y la temperatura absoluta local del fluido en contacto con la pared, donde se produce la transferencia de calor. La primera hipótesis es razonablemente válida si el estado inicial era uniforme, salvo, como se verá, en una delgada capa en contacto con la pared, donde el proceso no será isentrópico. La segunda es válida si se admite que la temperatura de la pared se mantiene constante.

<sup>261</sup> En este caso, la forma de transporte de calor predominante es la convección libre, ya que no hay apenas convección forzada, pero el fluido adquiere movimiento en el interior del depósito como consecuencia de los gradientes de temperatura y densidad presentes. Así, cabe esperar que  $O(Nu) = Ra^{1/4}$ . Se encuentra experimentalmente que, en recintos cerrados, el número de Nusselt es muy próximo a la unidad para números de Rayleigh inferiores a  $2 \cdot 10^3$ , aproximadamente (toma valores cercanos a la unidad en problemas de conducción pura). Esta circunstancia se da, preferentemente, en recintos más bien planos o alargados, en los que la diferencia de temperatura es pequeña, y justifica que se utilice aire como elemento aislante en los cerramientos térmicos de los edificios. En este último caso, siendo  $Nu \approx 1$ , la transferencia de calor se realiza básicamente por conducción y, como la conductividad del aire es muy baja (del orden de la mitad de los mejores aislantes orgánicos y muy inferior a la del cemento, por ejemplo), se comprende el interés práctico del método del "doble tabique" aislante.

<sup>262</sup> Para números de Rayleigh superiores a  $2 \cdot 10^3$ , se produce advección en el depósito. En el intervalo  $[2 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^4]$ , el movimiento fluido consiste en celdas regularmente espaciadas y estables y, si  $Ra$  es superior, las celdas se rompen y el proceso se vuelve muy turbulento. Con números de Rayleigh muy altos, se consolida la estratificación en el interior de la cámara y se genera un "efecto bombo" de calor, de la parte inferior a la superior, con la formación de sendos polos: frío, el superior, y caliente, el inferior.

<sup>263</sup> Se recuerda que  $Ra = PrGr$ .

<sup>264</sup> Se está analizando el proceso de descarga. El proceso de carga, aunque guarda cierta analogía física con éste, conduce a ecuaciones diferentes, en las que aparece el flujo de entalpía de entrada. El lector puede comprobar que, entonces, la ecuación [5.72] es:

$$\dot{T} = \frac{T_p - T}{t_r} - \frac{1}{mc_v} \left( p \left( \frac{dV}{dt} + \frac{G}{\rho} \right) - c_p (T_e - T) G \right)$$

donde  $T_e$  es la temperatura del aire de entrada y  $G < 0$ .

<sup>265</sup> ISO 6358:1989: *Pneumatic fluid power -- Components using compressible fluids -- Determination of flow-rate characteristics.*

<sup>266</sup> Se demuestra que el tiempo característico de una descarga isoterma es  $\gamma$  veces más grande que el de una descarga adiabática, es decir, aproximadamente un  $40\%$  más, pero, en cambio, como se deduce de [5.78], sí da lugar a una curva exponencial perfecta en condiciones de bloqueo (lo que es una ventaja si se preten-



de obtener  $C$  experimentalmente mediante un proceso de descarga). Una descarga puede forzarse a ser isoterma de dos formas: aumentando el volumen del depósito, lo que no es viable desde un punto de vista práctico, o aumentando la transferencia de calor. Esta última posibilidad se realiza con depósitos cuyo interior se embute de filamentos de cobre u otro metal para aumentar la superficie útil de transferencia y el coeficiente de intercambio. En el interior del depósito, el aire está sumido en un sistema térmico muy rápido y de gran capacidad, lo que reduce el incremento de su temperatura hasta niveles que permiten suponer nulo su gradiente. Mediante este procedimiento, se consiguen saltos térmicos de pocos grados centígrados (entre 1 y 3 °C) durante la descarga y una curva experimental prácticamente exponencial.

- <sup>267</sup> Para ser más precisos, la potencia hidráulica transmitida resulta de la variación del momento cinético que experimenta el fluido al atravesar el rodete mientras gira.
- <sup>268</sup>  $\Phi_V$  contempla las pérdidas de origen viscoso, incluidas las pérdidas por fricción en el disco, que son consideradas pérdidas mecánicas.
- <sup>269</sup> La denominación *altura manométrica* o *de elevación* está más extendida en el uso de las bombas rotodinámicas que en las de desplazamiento positivo, aunque es técnicamente correcta en ambos casos, siempre que sea aplicable [5.95].
- <sup>270</sup> También justifica las diferencias constructivas entre las bombas y los ventiladores: los sistemas de estanquidad necesarios han de contener fugas generadas por gradientes de presión distintos, y los gruesos de pared, de álabes, etc., son menores en los ventiladores, pues, en general, la presión absoluta interna es menor y también el par a comunicar.
- <sup>271</sup> Esta es la potencia en el accionamiento de la máquina, también denominada *potencia en el eje* o *potencia al freno*, y es el valor absoluto del trabajo por unidad de tiempo necesario para accionar la bomba desde el exterior.
- <sup>272</sup> La teoría unidimensional no puede incluir la vorticidad en su análisis ni justificar la existencia de los flujos secundarios que aparecen en los rotores y que suponen una pérdida de rendimiento. Queda claro que el problema global es tridimensional.
- <sup>273</sup> Este resultado suscita una cierta controversia en las personas no familiarizadas con la mecánica de fluidos. El fluido adquiere momento cinético e incrementa su circulación a lo largo de una línea de corriente, pero cuando se cumplen las condiciones de homotropía y del teorema de Kelvin, si el movimiento absoluto era irrotacional a la entrada del rotor, lo seguirá siendo en su interior y después de él. En este caso, el fluido no adquiere rotación, sino que las líneas de corriente se curvan a medida que la circulación se incrementa y mantiene su valor en torno a líneas cerradas concéntricas con el eje. Si el movimiento homotrópico era rotacional a la entrada, la vorticidad sólo puede cambiar por estiramiento o acortamiento del vórtice y el movimiento también mantendrá su circulación en cada línea cerrada, si se cumple el teorema de Kelvin.
- <sup>274</sup> Evidentemente, la viscosidad afecta el campo de velocidades y presiones, pero, si la distribución de velocidades es la misma, esta ecuación indica que el par también lo será. La presión a la entrada y a la salida del rotor no realiza momento alguno, pero su distribución y su magnitud también se ven afectadas por la viscosidad y sus efectos. Por otro lado, las fuerzas viscosas sobre las paredes móviles realizan par, pues la curvatura y el espesor de los álabes impiden que se anulen por simetría.
- <sup>275</sup> No obstante, no debe entenderse que la ecuación de Euler no es válida cuando el número de álabes es finito. En realidad, como se ha obtenido aplicando un principio de conservación integral, también puede aplicarse a cualquier línea de corriente en función de los ángulos reales del fluido. En principio, cada superficie de corriente implica una energía comunicada y la total se obtendrá del promedio espacial en la sección transversal.
- <sup>276</sup> En las máquinas axiales, el diseño de la cascada se realiza en términos de sustentación, por lo que es necesario que no haya desprendimiento de la corriente hasta el borde de fuga de los álabes. En las turbinas, el flujo se acelera en el rotor e inhibe la separación de la capa límite. Tampoco se suele aplicar esta corrección en las turbomáquinas térmicas axiales.
- <sup>277</sup> Entre los procedimientos clásicos para corregir la teoría unidimensional y obtener un valor aproximado de  $e_z$ , se encuentran los de Stodola y Pfeleiderer. Consúltese una obra especializada.
- <sup>278</sup> Incluso, en este último caso, la energía cinética del nudo puede despreciarse, en muchas ocasiones. Entre los casos particulares en que  $v_2$  no es nula, se encuentran las fuentes artísticas, en las cuales, precisamente, la energía útil es  $H_d$ . Si los puntos se escogen sobre dos superficies libres, se cumple que  $O(v_1) \approx O(v_2) \approx 0$



- y, en cualquier caso, inferior a la velocidad en los conductos (cuya energía cinética ya es, de por sí, pequeña).
- <sup>279</sup> Se han de tener en cuenta, evidentemente, otros muchos factores, como el tipo de fluido, el intervalo de caudales de funcionamiento, la capacidad de adaptación del grupo de bombeo a las características cambiantes de la instalación con el tiempo, etc., por lo que, en muchas ocasiones, la elección final es el resultado de una solución de compromiso ante diversas alternativas. Sólo en instalaciones de gran potencia se justifica el diseño de una bomba a un PF determinado.
- <sup>280</sup> Dada la dependencia  $f=f(\text{Re}, \varepsilon/D)$ , para  $\text{Re} = vD/\nu$ . Es posible ajustar el factor  $f$  por intervalos de  $\text{Re}$  para una  $\varepsilon/D$  dada, de forma que, si se acepta que  $f=b/\text{Re}^c$  entre dos valores  $\text{Re}_1$  y  $\text{Re}_2$ , para los que están definidos  $f_1$  y  $f_2$ , respectivamente, resulta  $c = -\log(f_2/f_1)/\log(\text{Re}_2/\text{Re}_1) > 0$  y  $b = f_1 \text{Re}_1^c$ . De esta expresión, se sigue que  $j = j(v^{2-c})$  y  $a = 2-c < 2$  en dicho intervalo. Para una tubería lisa (ecuación de Blasius:  $f = 0,316 \text{Re}^{-1/4}$ ), se cumple que  $j = (0,316 (\nu^{1/4}/D^{5/4})/2g)^{7/4}$ , de donde  $a = 1,75$ .
- <sup>281</sup> Como tampoco lo es el diagrama de Moody, que puede utilizarse con buenos resultados para régimen turbulento con otras secciones de conducto, e incluso en conducciones abiertas.
- <sup>282</sup> En ocasiones, se utiliza la ecuación  $\Delta h_f = r_{eq} Q^a$ , con  $1,8 < a < 2$  y  $r_{eq} = r_{eq}(a)$ , para dar cuenta del régimen de transición. En estos casos,  $r_{eq} = fL2^{2a-1}/(\pi^a g D^{2a+1})$ .
- <sup>283</sup> La pérdida singular que se produce en cada cambio de sección se supone localizada en uno de los tramos.
- <sup>284</sup> Este planteamiento puede hacerse con las longitudes equivalentes de cada tramo. Se supone que las pérdidas singulares pueden despreciarse, lo cual no es cierto cuando hay válvulas en la instalación. Este tratamiento se refiere a las pérdidas singulares “pasivas” provocadas por codos y otros elementos de geometría constante. La pérdida en una válvula puede ser superior a la del tramo de conducto donde está instalada, y su modulación permite variar el PF de una instalación.
- <sup>285</sup> En algunas ocasiones, las condiciones operativas imponen otros requisitos que fuerzan la elección de un tipo de cojinete concreto, independientemente del nivel de carga o de la velocidad de giro del árbol. Entre éstas se encuentran el par de arranque mínimo necesario, el trabajo a altas o bajas temperaturas, el tamaño y la precisión del montaje, etc. Los cojinetes pueden limitar, a su vez, algún grado de libertad al acoplamiento, y pueden ser axiales, radiales o mixtos.
- <sup>286</sup> El valor de esta fuerza es negativo para cualquier  $m$ . V. también [3.135].
- <sup>287</sup> Se omite la demostración. El procedimiento es el mismo que condujo hasta [5.167], pero utilizando  $\tau_h$ . El valor de esta fuerza es positivo para los valores de  $m$  usuales. Como es natural, la fuerza de rozamiento sobre la superficie móvil se opone al movimiento, mientras la fija es arrastrada por él.
- <sup>288</sup> Y son válidas siempre que el ángulo sea pequeño y se cumpla que  $h \approx (L_0 - x)\alpha$ . La aproximación de cojinete infinitamente ancho es, a su vez, adecuada cuando la relación  $b/L$  es superior a 3. Como referencia, para una relación  $b/L = 1$ , la capacidad de carga del cojinete se reduce a la mitad.
- <sup>289</sup> En general, la variación de la densidad de un aceite de lubricación con la presión es muy pequeña y no se contempla. La disminución de la viscosidad con la temperatura puede compensar, de alguna manera, el aumento asociado a la presión, pero, si el cojinete se mantiene en buenas condiciones operativas, la temperatura es constante e igual a la de diseño.
- <sup>290</sup> Deducido en [3.148] para un cojinete infinitamente largo. Se demuestra que  $fR/j \approx 2\pi^2 S$  (v. figura 5.19).
- <sup>291</sup> Su incidencia real en esta clase de cojinetes no es tan relevante.
- <sup>292</sup> Estos regueros suponen una discontinuidad longitudinal del fluido. Para ayudar al lector a visualizar su forma, cabe decir que son semejantes a las púas de un tenedor.
- <sup>293</sup> El efecto de Barus o Merrington consiste en un hinchamiento postextrusión a la salida de un tubo: en un fluido newtoniano, el grosor del chorro descendente de salida disminuye con la distancia, mientras que en un polímero puede hincharse hasta un diámetro cinco veces superior. El efecto de Weissenberg consiste en la ascensión del fluido por un eje en rotación: en un fluido newtoniano, la fuerza centrífuga ocasionada por la rotación es equilibrada por la presión, lo que hace que aumente con el radio y que la superficie libre adquiera la forma de un paraboloide de revolución (v. [1.185]), mientras que en uno no newtoniano la presencia de una tensión normal adicional en dirección radial puede compensar, por sí sola, la fuerza centrífuga y modificar la forma de la superficie libre.



<sup>294</sup> El lector puede visualizar esta distribución de velocidades estrujando un tubo de dentífrico.

<sup>295</sup> Se deduce que las superficies de discontinuidad de orden superior,  $S$ , son superficies características de las ecuaciones de Euler, que cumplen la condición:

$$\frac{DS}{Dt} \left[ \frac{DS}{Dt} \pm c \nabla S \right] = 0$$

es decir, o bien son superficies fluidas de ecuación  $DS/Dt=0$ , o bien son superficies u ondas de Mach que tienen una velocidad de avance normal respecto al fluido igual a la velocidad local del sonido.

<sup>296</sup> A ambos lados de la línea de Mach, las variables del fluido son continuas, y es discontinua la primera derivada espacial de la velocidad cuando el flujo rodea un cuerpo en presencia de ángulos vivos, o la segunda derivada si la curvatura de la superficie del cuerpo no es continua, sin llegar a ser un ángulo, etc.

<sup>297</sup> Siempre que la expansión no esté limitada en su plano superior por una pared, pues entonces las ondas se reflejan e interaccionan entre sí. La expresión [5.217] también puede utilizarse en compresiones isentrópicas de Prandtl-Meyer.

<sup>298</sup> El concepto de inestabilidad hace referencia a su formación, pues estas inestabilidades, una vez formadas, son persistentes en el tiempo (hasta que los efectos de difusión viscosa intervienen y se diluyen, normalmente muy aguas abajo de donde fueron formadas) y, en este sentido, son bastante estables. La espiral de Cornu o clotoide es una curva tangente al eje de las abscisas en el origen, cuyo radio de curvatura disminuye de manera inversamente proporcional a la distancia recorrida sobre ella. Es decir, su curvatura en cualquier punto es proporcional a la distancia a lo largo de la curva medida desde el origen. El lector ha transitado por tramos de espirales de Cornu cuando ha viajado en ferrocarril o por carretera.

<sup>299</sup> Esta perturbación puede ser del campo de velocidades, del de presiones, o tener su origen en la aparición de una fuerza externa causada, por ejemplo, por la presencia de partículas extrañas sobre la superficie o de un contorno próximo.

<sup>300</sup> La función de fase par es de  $n$  impar, y viceversa. Si  $g(s)=s$ , es porque  $\varphi=s^2/2$ . Una función de fase también puede incorporar un factor amplificador, para conseguir que la espiral crezca de tamaño en  $s$  y los centros de singularidad se distancien entre sí. Con esta y otras modificaciones, puede conseguirse cualquier espiral en el espacio y reproducir las que se observan experimentalmente (por ejemplo, tras los cuerpos, como la calle de vórtices de Theodore von Kármán de la figura 4.11).

<sup>301</sup> Recuérdese que el vector de Darboux no tiene componente en dirección  $\mathbf{n}$ . La condición de curvatura nula conduce a una indefinición del marco de Frenet porque las direcciones  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{b}$  son indeterminadas.

<sup>302</sup> En las ondas oblicuas, la relación de Prandtl es:

$$v_{1n} v_{2n} = (c^*)^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_t^2$$

y el producto de las velocidades normales continúa siendo un invariante de la onda, por cuanto la velocidad tangencial no cambia en ella.

<sup>303</sup> Pueden producirse ondas de expansión si la intensidad de la onda es muy pequeña, pues entonces el salto de entropía es un infinitésimo de tercer orden y el proceso puede aproximarse por uno reversible. Las ondas de choque son muy débiles si el salto de velocidades a través de la onda es pequeño, comparado con la propia velocidad, es decir,  $M_1 = 1 + \Delta M$ , y se demuestra entonces que  $\Delta s \approx \Delta M^3$ .

<sup>304</sup> A diferencia de la descripción que se realiza de un resalto hidráulico, en que la energía “mecánica” disminuye y se degrada. Aparte de esta diferencia, existe una analogía clara entre el flujo compresible unidimensional y el flujo de una delgada película de fluido con superficie (analogía compresible del flujo de agua poco profunda).

<sup>305</sup> En una onda de choque fuerte, la definición de espesor carece de sentido por cuanto la discontinuidad es, de hecho, infinitesimal. Se demuestra que el espesor de las ondas de choque decrece al aumentar su intensidad, desde una capa de transición de espesor finito, en que deben tenerse en cuenta la viscosidad y la conductividad térmica del fluido, como se ha hecho en [5.241], hasta un espesor del orden del recorrido libre medio molecular, evaluado para cierta temperatura media, en las ondas de choque fuertes. Suponiendo que el gas es un medio continuo en la dinámica macroscópica del proceso analizado, debe considerarse

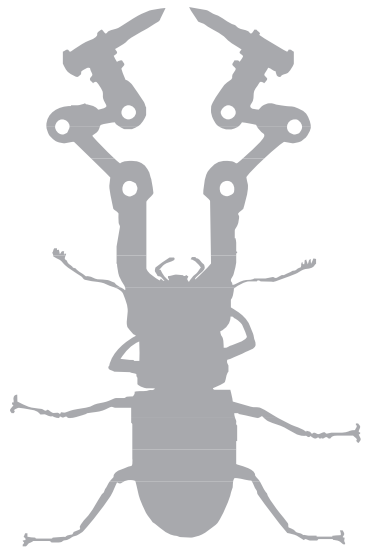




- cero este espesor, salvo que se trabaje a muy bajas presiones o que existan procesos de relajación de la onda que aumenten su espesor, para cuyo estudio se anima al lector a que consulte alguna obra especializada.
- <sup>306</sup> En esta expresión y en las siguientes,  $D$  puede ser el diámetro hidráulico del conducto si no es circular.
- <sup>307</sup> El ritmo de disminución dependerá de la variación experimentada por la densidad.
- <sup>308</sup> En general, la transferencia por conducción a través de la pared ha de omitirse por su acoplamiento con la fricción, que se está suponiendo despreciable. El modelo de Rayleigh representa, de forma adecuada, el flujo en cámaras de combustión de sección constante, en las cuales pueda suponerse que  $j$  no se ve afectado significativamente por el aporte de combustible y que la combustión es uniforme.
- <sup>309</sup> Por la misma razón expuesta en una nota anterior, un flujo compresible no puede ser estrictamente adiabático si existe fricción con el conducto. Recuérdese la analogía de Reynolds del apartado 4.2.1.
- <sup>310</sup> Al menos de forma cualitativa. Si  $M < 1$ , la velocidad del fluido ha de aumentar en  $x$  pero, si  $M > 1$ , es de esperar una lenta deceleración.
- <sup>311</sup> Este coeficiente de fricción es función de los números de Reynolds y de Mach. En los tubos rectos, la compresibilidad no afecta la estructura de la turbulencia de la corriente respecto a la del flujo incompresible, excepto cuando las condiciones se acercan a las sónicas. Esto significa que pueden utilizarse los coeficientes de fricción del flujo incompresible. En régimen subsónico, la dependencia de  $M$  es menor y puede obviarse, de modo que  $f$  puede evaluarse del diagrama de Moody para el  $Re$  medio y la rugosidad del conducto, y puede admitirse constante e independiente de  $Re$  para rugosidades relativas superiores a 0,004 (v. figura 5.13). En esta clase de flujos, la variación extrema de la temperatura está limitada por la ecuación [5.266], y en contadas ocasiones supera el 20%. La variación de la viscosidad resultante no es superior al 10%, lo que supone un incremento del número de Reynolds de tan sólo un 5%. La variación en  $f$  depende, pues, del rango de actuación del número de Reynolds para una rugosidad determinada, pero para  $Re > 10^4$  esta variación puede ser despreciada. En régimen supersónico, la influencia de  $M$  crece asintóticamente en el intervalo  $1 < M < 5$  (v. figura 5.35), pero lo más relevante, entonces, es la gran variación de  $f$  con la distancia, al ser la longitud en que el flujo supersónico puede mantenerse muy corta (alrededor de 80 diámetros para el aire [5.284]).
- <sup>312</sup> La integración de esta ecuación no requiere considerar un factor de rozamiento medio en el conducto, por cuanto es función básicamente del número de Reynolds,  $Re = Dj/\mu$ , y éste no cambia sustancialmente. Para verlo mejor, téngase en cuenta que  $j$  es constante y que la viscosidad es función sólo de la temperatura en el gas ideal. La dependencia de la viscosidad con la presión en los gases reales suele despreciarse en esta clase de problemas.
- <sup>313</sup> Aplicaciones ya mencionadas, entre las cuales destaca el flujo en cámaras de combustión que puedan asimilarse a conductos de área constante, como las de las turbinas de gas y los turboreactores.
- <sup>314</sup> Ni siquiera la condición  $M_1 = 1$  es posible, salvo cuando  $L = 0$ , pues la presencia del rozamiento en el conducto hace aumentar  $M$  con  $x$ , cuyo máximo se encuentra en su extremo de salida, con  $M_2 = 1$ .
- <sup>315</sup> En este proceso, también se puede definir una conductancia equivalente, función del parámetro  $fL/D$ , que permita visualizar el flujo mediante gráficos como el de la figura 5.4. En este caso, tanto el caudal máximo como la condición de bloqueo dependen también de  $fL/D$ .
- <sup>316</sup> Para concretar aún más, si se admite que la relación de longitudes,  $L_e/L$ , ha de ser 0,1 para que el modelo isoterma sea de aplicación, un sencillo análisis, que el lector puede realizar por sí mismo, muestra que la relación  $L/D$  ha de ser  $40/f^{1/2}$ , que es del orden de 300 para  $f = 0,02$  (y para el cual  $fL/D = 6$ ). Según la explicación ofrecida en el texto, es muy probable que el choque alcance la garganta de la tobera de alimentación con este valor de  $L$ ; es decir, un flujo isoterma difícilmente es supersónico y, cuando es subsónico, suele estar bloqueado a la salida con  $M_2 = M'$ , porque  $L$  es mucho mayor que  $L'$ .
- <sup>317</sup> Esta dependencia es muy severa, ya que para un  $M_1 = 3$  se tiene que  $L^* = 26D$ , cuando para un  $M_1$  infinito era de  $41D$ . Valores para  $f = 0,02$ . Obsérvese que  $L_{m\acute{a}x}$  sólo depende de  $\gamma$ .
- <sup>318</sup> En este apartado, se utilizan los subíndices (e) y (s) para indicar que se trata de variables a la entrada y a la salida de la onda de choque, porque los subíndices (1) y (2) se refieren a las condiciones de entrada y salida del conducto.
- <sup>319</sup> Por ejemplo, cuando el choque se produce a la salida de la tobera para  $A_{e0}/A^* = A_s/A^* = 3$ , se tiene  $p_{00}/p_1 \approx 2,7$  y  $M_1 \approx 0,5$ . Con esta relación de áreas, las figuras 3.21 y 3.22 muestran que  $p_{00}/p_1 \approx 2,2$  y  $M_1 \approx 0,4$  cuando el choque se produce en  $A_{e0}/A^* = 2,5$ .



- 
- <sup>320</sup> Es fácil comprobar que al número de Mach que se tiene justo después de la onda de choque,  $M_s$ , le corresponde una longitud crítica mayor que al número de Mach de entrada,  $M_e$ , por lo que la condición  $L < L^*$  asegura la condición subsónica de  $M_2$  y que  $p_2 = p_s$ , mientras el choque se produzca en el interior del conducto.
- <sup>321</sup> Si el flujo en el conducto es isoterma, este análisis continúa siendo válido sustituyendo la condición de bloqueo por la impuesta por  $M'$ ,  $L'$  y la ecuación [5.278].
- <sup>322</sup> Estos términos son normalmente despreciables, salvo para fluidos extremadamente conductores, como el helio superfluido, o en el interior de capas de transición, como la descrita en [5.241]. Se supone que el movimiento es permanente y que el flujo no realiza ni recibe trabajo mecánico alguno.
- <sup>323</sup> Esta velocidad es válida para flujos monofásicos alejados del punto crítico, donde son de prever grandes fluctuaciones de la densidad del fluido. La velocidad del sonido también puede ser anómalamente baja en los flujos bifásicos o con ratios de transferencia de calor excesivamente elevadas. La influencia de la frecuencia se ha descrito cuando se ha definido [3.176].
- <sup>324</sup> En ocasiones, las ecuaciones se amplían para tener en consideración reacciones químicas, cambios de fase o propiedades físicas no constantes, pero entonces, paradójicamente, se continúa considerando que el fluido es ideal. De hecho, el supuesto de calor específico variable es termodinámicamente inconsistente con la asunción de gas ideal.
- <sup>325</sup> A diferencia de  $\gamma_s$  y del parámetro de Grüneisen.
- <sup>326</sup> El planteamiento que ha conducido hasta esta ecuación puede parecer artificioso pues, por un lado, se supone que el gas es ideal y, por otro, se han incluido pérdidas irreversibles (internas al gas) en la ecuación [5.309]. En realidad, esta inconsistencia invalida el resultado cuantitativo de la ecuación, pero permite extraer conclusiones cualitativas que se confirman a continuación al plantear el caso general. En este contexto, y utilizando gases reales, un proceso isentrópico es un proceso en que la entropía específica se mantiene constante, lo que da lugar a procesos de trayectoria vertical en un diagrama  $T$ - $s$  o  $h$ - $s$ .
- <sup>327</sup> Si se trata de un sistema cerrado del tipo cámara-pistón, el volumen específico puede sustituirse por el volumen total de la cámara y, éste, por una función de la carrera del pistón.
- <sup>328</sup> Nótese, no obstante, que las isotrópicas no son rectas ni para el gas ideal, dada su dependencia de la temperatura.
- <sup>329</sup> A partir de un número de Mach suficientemente elevado, por encima de  $M=5$ , el flujo supersónico es hipersónico. En estos flujos, la hipótesis de gas perfecto deja de ser válida porque el rozamiento (calentamiento) en las fronteras del flujo lo disocia molecularmente e ioniza. Para  $M$  superiores, la densidad es tan baja que la hipótesis del continuo es crítica. Se trata de flujos de "reentrada", con números de Knudsen elevados.
- <sup>330</sup> El lector puede comprobar que, si se sustituye la ecuación [5.262] en [5.345], se llega a [5.340].







## Anexo.

# Ecuaciones diferenciales de la mecánica de fluidos

### El operador *nabla* “∇”

Operador	Ecuación	Tipo
Gradiente de un campo escalar	$\nabla p$	Vector
Gradiente de un campo vectorial	$\nabla \mathbf{v}$	Tensor
Divergencia de un campo vectorial	$\nabla \cdot \mathbf{v}$	Escalar
Divergencia de un campo tensorial	$\nabla \cdot \bar{\bar{T}}$	Vector
Rotacional de un campo vectorial	$\nabla \wedge \mathbf{v}$	Vector
Laplaciana de un campo escalar	$\nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T = \Delta T$	Escalar
Laplaciana de un campo vectorial	$\nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v}$	Vector
Aceleración convectiva	$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$	Vector

### Ecuación de conservación de la materia

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

<b>R</b>	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right\} = 0$
<b>C</b>	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right\} = 0$
<b>E</b>	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) \right\} = 0$



### Tensor viscoso para fluidos newtonianos

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu [\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T] + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij}$$

<b>Rectangulares</b>	$\sigma'_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$	$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \tau_{xy} = \tau_{yx}$
	$\sigma'_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$	$\tau'_{yz} = \tau'_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \tau_{yz} = \tau_{zy}$
	$\sigma'_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$	$\tau'_{xz} = \tau'_{zx} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \tau_{xz} = \tau_{zx}$
<b>Cilíndricas</b>	$\sigma'_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$	
	$\sigma'_{\theta\theta} = 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$	
	$\sigma'_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$	
	$\tau'_{r\theta} = \tau'_{\theta r} = \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$	
	$\tau'_{\theta z} = \tau'_{z\theta} = \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) = \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$	
$\tau'_{rz} = \tau'_{rz} = \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \tau_{rz} = \tau_{rz}$		
<b>Estérficas</b>	$\sigma'_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]$	
	$\sigma'_{\theta\theta} = 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \lambda \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]$	
	$\sigma'_{\phi\phi} = 2\mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \text{ctg} \theta}{r} \right) + \lambda \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]$	
	$\tau'_{r\theta} = \tau'_{\theta r} = \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$	
	$\tau'_{\theta z} = \tau'_{z\theta} = \mu \left( \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) = \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$	
$\tau'_{\phi r} = \tau'_{r\phi} = \mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \right) = \tau_{\phi r} = \tau_{r\phi}$		



### Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \bar{\tau} - \nabla p + \rho \mathbf{f}_m$$

<b>Rectangulares</b>	$\rho \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} \right\} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_{m,x}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial z} \right\} - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_{m,y}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} \right\} - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_{m,z}$
<b>Cilíndricas</b>	$\rho \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma'_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma'_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial z} \right\} - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_{m,r}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau'_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial z} \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_{m,\theta}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau'_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} \right\} - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_{m,z}$
<b>Esféricas</b>	$\rho \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma'_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau'_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\sigma'_{\theta\theta} + \sigma'_{\phi\phi}}{r} \right\} - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_{m,r}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \text{ctg} \theta}{r} \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau'_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma'_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau'_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau'_{r\phi}}{r} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} \sigma'_{\phi\phi} \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_{m,\theta}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\theta v_\phi}{r} \text{ctg} \theta \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau'_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma'_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau'_{r\phi}}{r} + \frac{2 \text{ctg} \theta}{r} \tau'_{\theta\phi} \right\} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \rho f_{m,\phi}$



## Ecuación de conservación de la energía interna

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \bar{\bar{T}} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u \right) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \bar{\bar{\tau}} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

Rectangulares

$$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + v_z \frac{\partial u}{\partial z} \right\} =$$

$$= -p \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right\} +$$

$$+ \left\{ \sigma'_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma'_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma'_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau'_{xy} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \right.$$

$$\left. + \tau'_{xz} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \tau'_{yz} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right\}$$

Cilíndricas

$$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + v_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial u}{\partial z} \right\} =$$

$$= - \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right\} - p \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} +$$

$$+ \left\{ \sigma'_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sigma'_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \sigma'_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau'_{r\theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right] \right.$$

$$\left. + \tau'_{rz} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \tau'_{\theta z} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right\}$$

Esféricas

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + v_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right\} =$$

$$= -p \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right\} -$$

$$- \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right\} +$$

$$+ \left\{ \sigma'_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sigma'_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \sigma'_{\phi\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) \right.$$

$$+ \tau'_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \tau'_{r\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right)$$

$$\left. + \tau'_{\theta z} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} v_\phi \right) \right\}$$





### Ecuación de conservación de la entalpía

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \tau : \nabla \mathbf{v} + \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \tau : \nabla \mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p$$

**Rectangulares**

$$\rho \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} + v_z \frac{\partial h}{\partial z} \right\} =$$

$$= - \left\{ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right\} +$$

$$+ \left\{ \sigma'_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma'_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma'_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau'_{xy} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \right.$$

$$\left. + \tau'_{xz} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \tau'_{yz} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right\}$$

**Cilíndricas**

$$\rho \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + v_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial h}{\partial z} \right\} =$$

$$= - \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right\} +$$

$$+ \left\{ \sigma'_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sigma'_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \sigma'_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau'_{r\theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \tau'_{rz} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \tau'_{\theta z} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right\}$$

**Esféricas**

$$\left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + v_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial h}{\partial \phi} \right\} =$$

$$= - \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right\} +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \right\} +$$

$$+ \left\{ \sigma'_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sigma'_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \sigma'_{\phi\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \text{ctg} \theta}{r} \right) + \right.$$

$$+ \tau'_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \tau'_{r\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) +$$

$$\left. + \tau'_{\theta\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} v_\phi \right) \right\}$$



## Función de Rayleigh para fluidos newtonianos

$$\Phi_v = \tau : \nabla v$$

Rectangulares

$$\begin{aligned} \Phi_v &= \sigma_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\ &+ \tau'_{xy} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \tau'_{xz} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \tau'_{yz} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \\ &= 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] - \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

Cilíndricas

$$\begin{aligned} \Phi_v &= \sigma'_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sigma'_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \sigma'_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\ &+ \tau'_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right) + \tau'_{rz} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \tau'_{\theta z} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) = \\ &= 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \\ &\quad - \lambda \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]^2 \end{aligned}$$

Esféricas

$$\begin{aligned} \Phi_v &= \sigma_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sigma_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \sigma_{\phi\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \text{ctg} \theta}{r} \right) + \\ &+ \tau'_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \tau'_{r\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) + \\ &+ \tau'_{\theta\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} v_\phi \right) = \\ &= 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \text{ctg} \theta}{r} \right)^2 \right] + \\ &+ \mu \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} v_\phi \right)^2 \right] - \\ &\quad - \lambda \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \text{ctg} \theta}{r} \right) \right]^2 \end{aligned}$$



### Ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{f}_m$$

<b>Rectangulares</b>	$\rho \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right\} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_{m,x}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right\} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_{m,y}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_{m,z}$
<b>Cilíndricas</b>	$\rho \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right\} =$ $= \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_{m,r}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right\} =$ $= \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_{m,\theta}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} = \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_{m,z}$
<b>Esféricas</b>	$\rho \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right\} =$ $= \mu \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} v_r + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \operatorname{ctg} \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right\} - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_{m,r}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} \right\} =$ $= \mu \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_{m,\theta}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\theta v_\phi}{r} \operatorname{ctg} \theta \right\} =$ $= \mu \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right\} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \rho f_{m,\phi}$





## Bibliografía

Agüera, J. *Mecánica de fluidos incompresibles y turbomáquinas hidráulicas*. Editorial Ciencia 3, 2002. ISBN: 84-95.391-01-05.

Alekseenko, S. *et al.* Theory of concentrated vortices. Springer-Verlag Berlín, 2007. ISBN: 978-3-540-733575-1.

Batchelor, G. *Introducción a la dinámica de fluidos*. Centro de Publicaciones de la Secretaría General Técnica del Ministerio de Medio Ambiente, 1997. ISBN: 84-8320-015-5.

Bosser, J. *Vademecum de mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*. Centre de Publicacions d'Abast. ETSEIB, 1997. ISBN: 84-89.349-91-6.

Costa, E., *et al.* *Ingeniería química. Fenómenos de transporte*. Editorial Alhambra, 1984. ISBN: 84-205-1021-1.

Crespo, A. *Mecánica de fluidos*. Servicio de Publicaciones ETSIIM, 1989. ISBN: 84-7484-061-9.

de las Heras, S., *et al.* *Modelización de sistemas fluidos mediante bondgraph*. Cardellach Còpies, SA. 1999. ISBN: 84-605-7035-5.

de las Heras, S. *Instalaciones neumáticas*. Editorial UOC, 2003. ISBN: 84-9788-002-1.

de las Heras, S. *Fluidos, bombas e instalaciones hidráulicas*. Iniciativa Digital Politècnica, 2011. ISBN: 978-84-7653-801-2.

Favre, A. *et al.* *La turbulence en mécanique des fluides*. Gauthier-Villars, 1976. ISBN: 2-04-003566-4.

Imrie, B. *Compressible fluid flow*. Butterworth & Co Ltd, 1973. ISBN: 0-408-70434-9.

Kirillin, V., *et al.* *Termodinámica técnica*. Editorial Eulipe.

Koelle, E., *et al.* *Fluid Transients in Pipe Networks*. Elsevier Applied Science, 1992. ISBN: 185166760-1.



- Lamit, G. *Piping Systems, Drafting and Design*. Prentice Hall.
- Landau; Lifshitz. *Mecánica de fluidos*. Editorial Reverté, 1991. ISBN: 84-291-4080-8.
- Liñán, A. *Mecánica de fluidos*. Servicio de Publicaciones ETSIAM, 1967.
- Martínez, J. *Análisis diferencial en mecánica de fluidos*. Apuntes, 2004. Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Gijón.
- McComb, W. *The physics of fluid turbulence*. Oxford Science Publications. Clarendon Press – Oxford, 1990. ISBN: 0-19-856160-1.
- Osuna, A. *Hidráulica técnica y mecánica de fluidos*. 5ª ed. Servicio de Publicaciones del Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Octubre de 1995. ISBN: 84-7493-000-6.
- Perspectives in fluid dynamics. Edited by Batchelor, et al.* Cambridge University Press, 2000. ISBN: 0-521-531169-1.
- Schlichting, H. *Boundary layer theory*. Springer-Verlag Berlin, 2003. ISBN: 3-540-66270-7.
- Shapiro, A. *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. Vol I*. John Wiley & Sons, 1953. ISBN: 0-471-06691-5.
- Viedma, A., et al. *Teoría y problemas de máquinas hidráulicas*. Editores Horacio Escarabajal, 2000. ISBN: 84-931650-4-2.
- Virto, L. *Mecànica de fluids. Fonaments I*. Edicions UPC, 1993. ISBN: 84-7653-372-1.
- Virto, L. *Mecànica de fluids. Fonaments II*. Edicions UPC, 1996. ISBN: 84-8301-144-1.
- Ward-Smith, A. *Internal fluid flow. The fluid dynamics of flow in pipes and ducts*. Oxford University Press, 1980. ISBN: 0-19-856325-6.
- Wark, K. *Termodinámica*. 5ª ed. McGrawHill, 1991. ISBN: 968-422-780-9.
- White, F. *Mecánica de fluidos*. McGrawHill, 2008. ISBN: 978-84-481-6603-8.
- Zucrow; Hoffman. *Gas dynamics. Multidimensional flow. Vol 2*. John Wiley & Sons, 1977. ISBN: 0-471-018066-6.