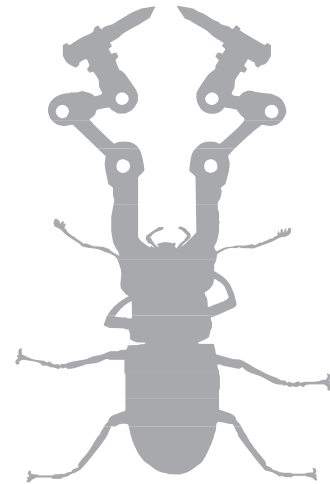


UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH

# Mecánica de fluidos. Problemas resueltos →

Josep M. Bergadà Graño





UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH



iniciativa  
digital politècnica  
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Mecànica de fluids. Problemes resolts →

Josep M. Bergadà Graño

Primera edición (Col. Aula Politècnica): febrero de 2006  
Segunda edición (Col. Aula Politècnica): marzo de 2008  
Primera edición (Col. UPCGrau): junio de 2011

Diseño y dibujo de la cubierta: Jordi Soldevila  
Diseño maqueta interior: Jordi Soldevila

© Josep Maria Bergadà, 2006

© Iniciativa Digital Politècnica, 2006  
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC  
Jordi Girona Salgado 31,  
Edifici Torre Girona, D-203, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101  
[www.upc.edu/idp](http://www.upc.edu/idp)  
E-mail: [info.idp@upc.edu](mailto:info.idp@upc.edu)

Producción: SERVICE POINT  
Pau Casals, 161-163  
08820 El Prat de Llobregat (Barcelona)

Depósito legal: B-22419-2011  
ISBN: 978-84-7653-915-6

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley. Si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de la misma, dirijase al Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO, <<http://www.cedro.org>>).

## Prólogo

La mecánica de fluidos tiene sus orígenes en la hidráulica, tanto en Mesopotamia como en Egipto alrededor del año 4000 antes de nuestra era proliferaron las obras hidráulicas que aseguraban el regadío de vastas zonas. Posteriormente, los imperios griego, chino y especialmente, el romano se caracterizan por una gran profusión de las construcciones hidráulicas.

A lo largo de la historia, aparecen inventos e investigadores que aportan mejoras sustanciales en el campo que hoy se denomina *mecánica de fluidos*, algunas de las cuales son las realizadas por:

Arquímedes (287-212 a.c.), crea el tornillo helicoidal y enuncia el principio de flotación. Leonardo da Vinci (1452-1519), muestra la aparición de vórtices en la zona de separación de flujo; describe los principios de funcionamiento de máquinas voladoras.

Pascal (1623-1662), en el estudio de la estática de fluidos define el principio que lleva su nombre. Newton (1642-1727), realiza el análisis espectral de la luz; define la teoría de gravitación universal; establece los principios de cálculo integral y diferencial, y promulga la ley de viscosidad que lleva su nombre. Henry de Pitot (1695-1771), crea, con el fin de medir la velocidad de un fluido, el tubo que lleva su nombre. Bernoulli (1700-1782), populariza la ley que define la energía asociada al fluido a lo largo de una línea de corriente, estudia problemas sobre estática y dinámica de fluidos. Euler (1707-1783), establece la base matemática para el estudio del flujo ideal, sin viscosidad. Venturi (1746-1822), clarifica los principios básicos del flujo a lo largo de un conducto convergente divergente (el tubo de Venturi), define los principios del resalto hidráulico.



Henri Navier (1785-1836), basándose en los estudios de Euler, deriva las ecuaciones de Navier, que posteriormente Stokes modifica hasta obtener las ecuaciones que se conocen actualmente. Ludwig Hagen (1797-1884), estudiando el flujo en conductos cerrados, encuentra la zona de traspaso entre flujo laminar y turbulento, y observa que depende de la velocidad y la temperatura del fluido, así como del diámetro y la rugosidad del conducto. Poiseulle (1799-1869), estudia el movimiento de la sangre en venas y capilares, y determina experimentalmente la relación entre presión y caudal en capilares.

William Froude (1810-1879), se dedicó durante parte de su vida a construir barcos; sus investigaciones fueron continuadas por su hijo R.E. Froude (1846-1924), el cual definió el número adimensional que lleva su nombre y que relaciona las fuerzas de inercia con las fuerzas gravitacionales. G. Stokes (1819-1903), logró derivar la ecuación de Navier-Stokes. Kirchhoff (1824-1887), define el coeficiente de contracción, hallándolo para el caso de orificios bidimensionales. Ernst Mach (1838-1916), que en uno de sus más conocidos estudios sobre los flujos a alta velocidad, deduce el número de Mach. Reynolds (1842-1912), clarifica el fenómeno de cavitación; define los regímenes laminar y turbulento, y el número adimensional que los identifica. Su teoría sobre la lubricación hidrodinámica es asimismo muy relevante. Ludwig Prandtl (1875-1953), que observa la aparición y define la teoría de la capa límite, se considera como uno de los creadores de la mecánica de fluidos moderna. Theodor Von Karman (1881-1963) estudia los vórtices detrás de un cilindro, define las fuerzas de arrastre y sustentación de cuerpos en el seno de un fluido en régimen turbulento.

Durante el siglo XX, los avances en la mecánica de fluidos son continuos, siendo la dinámica de gases, la aerodinámica y la aeronáutica los campos que han experimentado y seguirán experimentado una especial proliferación.

Quisiera dedicar este libro a las personas cuyo apoyo he tenido constantemente, sin olvidar a las generaciones de estudiantes de los cuales se aprende a diario, y gracias a los cuales este libro es una realidad.

Es mi deseo que este libro sea de utilidad, tanto para los futuros estudiantes como para los profesionales que necesiten repasar conceptos de mecánica de fluidos.

Josep M Bergadà







# Índice

## Capítulo 1. Propiedades de los fluidos

Problema 1.....	13
Problema 2.....	15
Problema 3.....	17
Problema 4.....	18

## Capítulo 2. Tensión y deformación en medios continuos

Problema 5.....	23
Problema 6.....	24
Problema 7.....	28
Problema 8.....	32

## Capítulo 3. Estática

Problema 9.....	39
Problema 10.....	43
Problema 11.....	48

## Capítulo 4. Ecuación de continuidad

Problema 12.....	55
Problema 13.....	56
Problema 14.....	59
Problema 15.....	60
Problema 16.....	63
Problema 17.....	65
Problema 18.....	68



Capítulo 5. Ecuación de cantidad de movimiento

Problema 19.....	77
Problema 20.....	78
Problema 21.....	81
Problema 22.....	82
Problema 23.....	91
Problema 24.....	95
Problema 25.....	98
Problema 26.....	99
Problema 27.....	102
Problema 28.....	107
Problema 29.....	110
Problema 30.....	118

Capítulo 6. Ecuación de momento cinético

Problema 31.....	127
Problema 32.....	131
Problema 33.....	136
Problema 34.....	140
Problema 35.....	144

Capítulo 7. Ecuación de la energía

Problema 36.....	149
Problema 37.....	151
Problema 38.....	155
Problema 39.....	161

Capítulo 8. Flujo con viscosidad dominante

Problema 40.....	169
Problema 41.....	174
Problema 42.....	180
Problema 43.....	184
Problema 44.....	193
Problema 45.....	203
Problema 46.....	211
Problema 47.....	216
Problema 48.....	220
Problema 49.....	228
Problema 50.....	230
Problema 51.....	237

Capítulo 9. Análisis adimensional

Problema 52.....	251
Problema 53.....	255
Problema 54.....	257
Problema 55.....	260
Problema 56.....	262

## Capítulo 10. Sistemas de tuberías

Problema 57.....	267
Problema 58.....	272
Problema 59.....	277
Problema 60.....	282
Problema 61.....	298

## Capítulo 11. Capa límite – Flujo externo.

Problema 62.....	321
Problema 63.....	323
Problema 64.....	327
Problema 65.....	331
Problema 66.....	336
Problema 67.....	340

## Capítulo 12. Flujo no estacionario

Problema 68.....	347
Problema 69.....	353

## Capítulo 13. Gas dinámica

Problema 70.....	359
Problema 71.....	382
Problema 72.....	387
Problema 73.....	393
Problema 74.....	397

Nomenclatura .....	409
--------------------	-----

Bibliografía.....	413
-------------------	-----

→ 1

## Propiedades de los fluidos

### Problema 1

#### Enunciado

Entre los extremos de un tubo de 0,006 m de diámetro y 1 m de longitud, se aplica una diferencia de presión relativa de 50.000 Pa. Si el caudal que fluye es de  $Q = 3,5 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ , halle la viscosidad del fluido circulante (considerando régimen laminar). Compruebe la veracidad de esta hipótesis.

#### Resolución

La velocidad media de paso del fluido por el conducto será:

$$\bar{U} = \frac{Q}{S} = \frac{3,5 \times 10^{-6}}{\frac{\pi 0,006^2}{4}} = 0,1237 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dado que no se puede determinar el número de Reynolds, se considerará que el régimen de flujo es laminar; al final de proceso se comprobará esta hipótesis.

- Considerando que el fluido fluye según la ley de Poiseulle, y sabiendo que la distribución de velocidades en dirección radial según Poiseulle es:

$$\bar{U} = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{\mu} \frac{1}{4} (r^2 - R^2) = U_{\text{máx}} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)$$



donde 
$$U_{\text{máx}} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} R^2$$

La relación velocidad máxima-velocidad media  $\bar{U} = \frac{U_{\text{máx}}}{2}$

donde 
$$\bar{U} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R^2}{8\mu}$$

La diferencia de presión entre extremos del conducto ha de ser contrarrestada por los esfuerzos cortantes en la pared del mismo, así:

$$F_p = \frac{\pi D^2}{4} \Delta P^*_{\text{total}} = \frac{\pi \times 0,006^2}{4} 50.000 = 1,4137 \text{ N}$$

El esfuerzo cortante se define como:

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial r} = \mu \frac{\partial}{\partial r} U_{\text{máx}} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

$$\tau = -\mu U_{\text{máx}} \frac{2r}{R^2}$$

El esfuerzo cortante de la pared valdrá:

$$r = R$$

$$\tau = -\mu U_{\text{máx}} \frac{2}{R}$$

$$\text{como } \bar{U} = \frac{U_{\text{máx}}}{2}$$

$$\tau = -\mu 4 \frac{\bar{U}}{R}$$

El esfuerzo debido a los esfuerzos cortantes a lo largo de todo el tubo será:

$$F_T = \tau S = \tau 2 \pi R L = -\mu 4 \frac{\bar{U}}{R} 2 \pi R L$$

$$\text{como } -F_T = F_p$$

$$1,4137 = 8 \pi \bar{U} \mu L = 8 \pi 0,1237 \mu$$

$$\mu = 0,4547 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

Para que el flujo sea laminar se debe cumplir:

$$\text{Re} = \frac{\bar{U}D}{\nu} = \frac{0,1237 \times 0,006}{\frac{0,4547}{\rho}} < 2.400$$

Para cumplir la igualdad, se tiene que  $\rho$  debería valer  $\rho = 1.470.331 \text{ Kg/m}^3$ ; como esto es imposible, se concluye que la hipótesis es acertada. En concreto, para una densidad de  $800 \text{ Kg/m}^3$ , se obtiene  $\text{Re} = 1,3$ .

## Problema 2

### Enunciado

Halle la potencia necesaria para mantener una velocidad angular constante de  $10 \text{ rad/s}$  en el viscosímetro cilíndrico de la figura. (Considérense los esfuerzos cortantes, en la superficie lateral y en la base.)

Datos:

$$H = 10 \text{ cm}$$

$$R_1 = 3 \text{ cm}$$

$$h = 0,1 \text{ cm}$$

$$\mu = 7 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$$

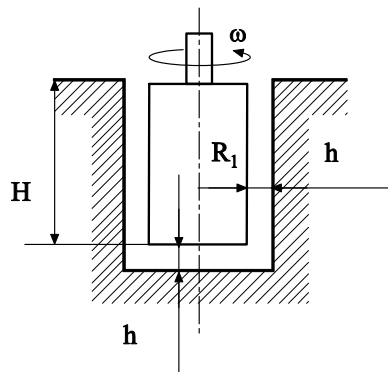


Fig. 2.1

### Resolución

En la cara lateral se tiene:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_1 - 0}{h} = \frac{R_1 \omega}{h}$$



Los valores de la fuerza y el par laterales,  $F_L$  y  $M_L$ , se obtienen:

$$F_L = \tau \cdot dS = \mu \cdot \frac{R_1 \omega}{h} \cdot 2\pi \cdot R_1 \cdot H = \mu \frac{\omega}{h} 2\pi H \cdot R_1^2$$

$$M_L = F \cdot R_1 = \mu \frac{R_1 \omega}{h} \cdot 2\pi \cdot R_1 \cdot H R_1 = \mu \frac{\omega}{h} 2\pi H \cdot R_1^3$$

El valor de la potencia necesaria para vencer los esfuerzos cortantes laterales será:

$$N_L = M \cdot \omega = \mu \frac{\omega^2}{h} 2\pi H \cdot R_1^3$$

En la base del cilindro, se tiene:

$$\frac{du}{dy} = \frac{V_i}{h} = \frac{r_i \omega}{h}$$

Los valores de la fuerza y el par en la base,  $F_B$  y  $M_B$ , serán:

$$F_B = \int_S \tau dS = \int_0^R \mu \frac{r_i \omega}{h} 2\pi r_i dr_i = \mu \frac{2\pi}{h} \omega \left[ \frac{r_i^3}{3} \right]_0^R$$

$$F_B = \mu 2\pi \frac{\omega R^3}{h \cdot 3}$$

$$M_B = \int dF_B \cdot R_1 = \mu \frac{\omega 2\pi}{h} r_i^3 \cdot dr_i = \mu \frac{\omega 2\pi}{h} \left[ \frac{R_i^4}{4} \right]_0^R$$

$$M_B = \mu \frac{\omega 2\pi R^4}{h \cdot 4}$$

La potencia debida a los esfuerzos cortantes en la base,  $N_B$ , será:

$$N_B = M \cdot \omega = \mu \frac{\omega^2 2\pi R^4}{h \cdot 4}$$

con lo que la potencia total necesaria para hacer girar el cilindro será:

$$N_T = N_L + N_B = \mu \frac{\omega^2 2\pi}{h} \left[ H R_1^3 + \frac{R_1^4}{4} \right] = 7 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^2}{0,001} \cdot 2\pi \left( 0,1 \cdot 0,03^3 + \frac{0,03^4}{4} \right)$$

$$N_T = 0,0127 \text{ [W]}$$



### Problema 3

#### Enunciado

Halle la expresión del par necesario para mover la esfera de la figura adjunta.

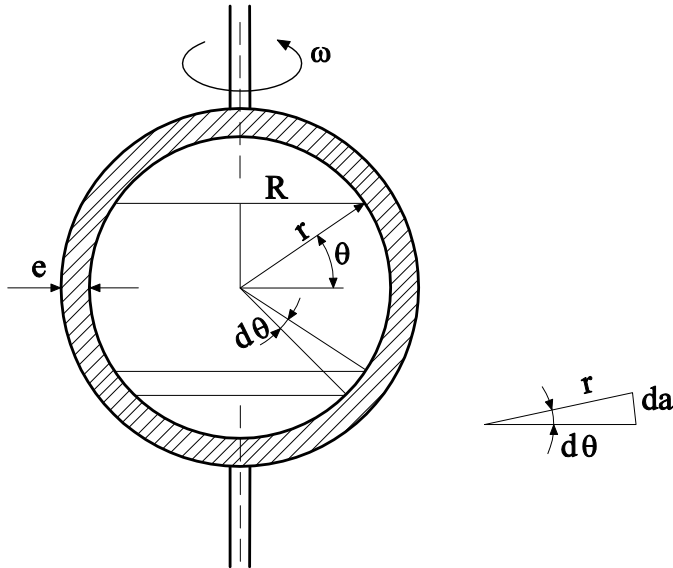


Fig. 3.1

#### Resolución

Las tensiones cortantes existentes se pueden definir como:

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n} = \mu \frac{\omega R}{e} = \frac{\mu \omega r \cos \theta}{e} ;$$

Estudiando la esfera, se observa que la fuerza que se opone al movimiento se da como:

$$\begin{aligned} dF &= \tau dS = \frac{\mu \omega r \cos \theta}{e} 2\pi R da = \frac{\mu \omega r \cos \theta}{e} 2\pi r \cos \theta r d\theta = \\ &= \frac{\mu \omega r^3}{e} 2\pi \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

Así mismo, el momento resistente resultante valdrá:

$$dM = dF R_i = dF r \cos \theta$$



$$dM = \frac{\mu \omega r^3}{e} 2\pi \cos^2 \theta d\theta r \cos \theta$$

$$M = \int_{-90^\circ}^{90^\circ} \frac{\mu \omega r^4}{e} 2\pi \cos^3 \theta d\theta$$

con lo cual, la potencia necesaria para hacer girar la esfera sería:

$$N = M \omega = \mu \omega^2 \frac{r^4}{e} 2\pi \int_{-90^\circ}^{90^\circ} \cos^3 \theta d\theta$$

y quedaría:

$$N = M \omega = \mu \omega^2 \frac{r^4}{e} 2\pi \left[ \left[ \frac{1}{3} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta \right]_{-90}^{90} + \left[ \frac{2}{3} \int_{-90}^{90} \cos \theta d\theta \right] \right]$$

$$N = \mu \omega^2 \frac{r^4}{e} 2\pi \left[ \left[ \frac{1}{3} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta \right]_{-90}^{90} + \left[ \frac{2}{3} \operatorname{sen} \theta \right]_{-90}^{90} \right]$$

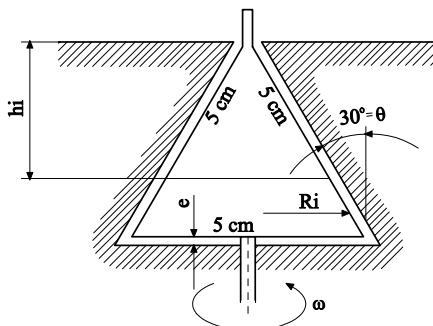
$$N = \mu \omega^2 \frac{r^4}{e} \frac{8}{3} \pi$$

## Problema 4

### Enunciado

Se hace rotar un cuerpo cónico con una velocidad constante de 10 rad/s; la base del cono tiene un diámetro de 5 cm, y el espesor de la película de aceite es de 0,1 mm. Si la viscosidad del aceite es de  $7 \cdot 10^{-3}$  [N·S/m<sup>2</sup>], halle el par necesario para mantener el movimiento.

Fig. 4.1  
Esquema del  
cuerpo cónico



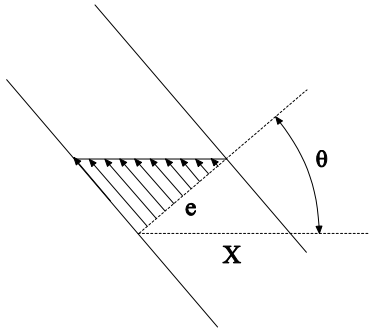
### Resolución

Se divide la superficie del cono en dos partes: por un lado, la superficie lateral y, por otro lado, la base.

En la superficie lateral, el esfuerzo cortante en un punto genérico vale:

$$\tau_i = \mu \frac{dv_i}{dn} = \mu \frac{R_i \omega}{e} = \mu \frac{h_i \operatorname{tg} \theta \omega}{e};$$

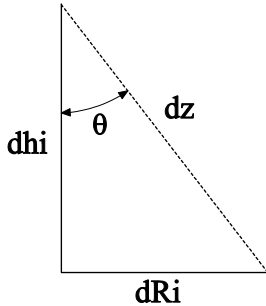
Fig. 4.2



En la base:

$$\tau_i = \mu \frac{dv_i}{dn} = \mu \frac{R_i \omega}{e};$$

Fig. 4.3



La fuerza que se opone al movimiento en la superficie lateral:

$$dF = \tau dS = \tau 2 \pi R_i dZ \quad \cos \theta = \frac{dh}{dz};$$

$$dF = \tau 2 \pi R_i \frac{dh}{\cos \theta} = \tau 2 \pi h_i \operatorname{tg} \theta \frac{dh}{\cos \theta}$$

$$dF = \mu h_i^2 \operatorname{tg}^2 \theta \frac{\omega}{e} 2 \pi \frac{dh}{\cos \theta}$$



$$F = \int_0^h \mu \frac{\omega \operatorname{tg}^2 \theta}{e \cos \theta} 2\pi h_i^2 dh = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\cos \theta} \frac{h_i^3}{3}$$

La fuerza en la base será:

$$dF = \tau dS = \tau 2\pi R_i dR$$

$$dF = \mu \frac{\omega}{e} R_i^2 2\pi dR$$

$$F = \int_0^R \mu \frac{\omega}{e} 2\pi R_i^2 dR = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{R^3}{3}$$

El par necesario en la superficie lateral:

$$M = F \times R_i$$

$$dM = dF \times R_i$$

$$dM = \mu \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega}{e} 2\pi h_i^2 dh R_i \quad R_i = h_i \operatorname{tg} \theta$$

$$M_L = \int_0^h \mu \frac{\operatorname{tg}^3 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega}{e} 2\pi h_i^3 dh = \mu \frac{\operatorname{tg}^3 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{h^4}{4}$$

El par en la base:

$$dM = dF R_i = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi R_i^2 dR R_i$$

$$M_b = \int_0^R \mu \frac{\omega}{e} 2\pi R_i^3 dR = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{R^4}{4}$$

El par total necesario para mantener el movimiento será:

$$M_T = M_L + M_b$$

$$M_T = \mu \frac{\operatorname{tg}^3 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{h^4}{4} + \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{R^4}{4} = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \left[ \frac{\operatorname{tg}^3 \theta}{\cos \theta} h^4 + R^4 \right]$$

Sustituyendo el radio por su equivalente:

$$M_T = \mu \frac{\omega}{e} \frac{\pi}{2} h^4 \operatorname{tg}^3 \theta \left[ \frac{1}{\cos \theta} + \operatorname{tg} \theta \right]$$

La potencia necesaria para mantener el sistema en movimiento será:

$$N = M_T \omega = \mu \frac{\omega^2}{e} \frac{\pi}{2} h^4 \operatorname{tg}^3 \theta \left[ \frac{1}{\cos \theta} + \operatorname{tg} \theta \right]$$

→2



## Tensión y deformación en medios continuos

### Problema 5

#### Enunciado

Sea un volumen de agua de  $1 \text{ m}^3$ , sometido inicialmente a una presión de  $10^5 \text{ Pa}$  y a una temperatura de  $280 \text{ K}$ . Si el proceso evoluciona de forma que al cabo de un tiempo  $T$  la temperatura y la presión del fluido son de  $300 \text{ K}$  y  $3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , determine el volumen que ocupará el líquido en estas condiciones.

Datos:

$$\alpha_r = 1,53 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \text{ (coeficiente de expansión térmica)}$$

$$\beta = 1,96 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{ (módulo de compresibilidad volumétrica)}$$

#### Resolución

La definición del módulo de compresibilidad y del coeficiente de expansión térmica es:

$$\beta = -\nabla \frac{dp}{d\nabla}$$

$$\alpha_r = \frac{1}{\nabla} \frac{d\nabla}{dT}$$

La variación de volumen con la presión y la temperatura se define:

$$d\nabla = \frac{\partial \nabla}{\partial p} dp + \frac{\partial \nabla}{\partial T} dT$$



de donde:

$$dV = -\frac{V}{\beta} dp + \alpha V dT$$

Integrando:

$$\int_{V_{inicial}}^{V_{final}} \frac{dV}{V} = \int_{P_{inicial}}^{P_{final}} -\frac{dp}{\beta} + \int_{T_{inicial}}^{T_{final}} \alpha dT$$

$$\ln\left(\frac{V_{final}}{V_{inicial}}\right) = -\frac{1}{\beta}(p_{final} - p_{inicial}) + \alpha(T_{final} - T_{inicial})$$

$$\ln V_{final} = \ln V_{inicial} - \frac{1}{\beta}(p_{final} - p_{inicial}) + \alpha(T_{final} - T_{inicial})$$

$$V_{final} = V_{inicial} e^{-\frac{1}{\beta}(P_{final}-P_{inicial})} e^{\alpha(T_{final}-T_{inicial})}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$V_{final} = V_{inicial} 1,002961$$

El volumen del fluido al final será ligeramente mayor que el inicial.

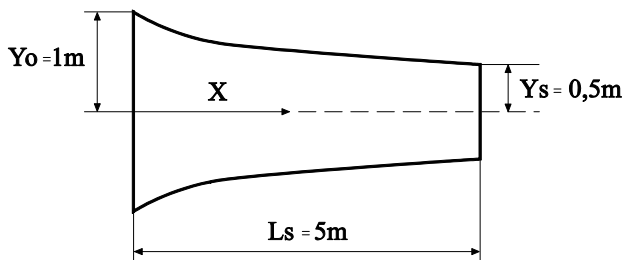
## Problema 6

### Enunciado

Dados un fluido de densidad constante que fluye en un canal convergente con una altura media de  $Y = \frac{Y_0}{\left(1 + \left(\frac{x}{L}\right)\right)}$  y una velocidad en dirección  $x$  de

$$u = u_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{y}{Y}\right)^2\right], \text{ siendo } u_0 = 1 \text{ m/s}$$

Fig. 6.1







Calcule:

La velocidad transversal,  $v(x, y)$ .

La aceleración lineal, la velocidad angular, la vorticidad, la velocidad de deformación volumétrica y la velocidad de deformación angular para dicho fluido.

### Resolución

Para un fluido incompresible y flujo bidimensional, la ecuación de continuidad puede expresarse:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x};$$

En función de los datos del enunciado, la velocidad en dirección  $x$  se puede dar:

$$u = u_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2\right) = u_0 \left[ \left(1 + \frac{x}{L}\right) - \frac{y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^3 \right]$$

derivando respecto a  $x$  se obtiene:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{L} \left[ 1 - \frac{3y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 \right];$$

con lo cual la velocidad en dirección  $y$  será:

$$v = -\int \frac{u_0}{L} \left[ 1 - \frac{3y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 \right] dy = \int -\frac{u_0}{L} dy + \int \frac{u_0 3y^2}{LY_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 dy$$

$$v = -\frac{u_0 y}{L} + \frac{u_0 y^3}{LY_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 + C(x);$$

Condiciones de contorno:  $v = 0$ ; cuando  $y = Y$ ; y para cualquier  $x$ ;

$$0 = -\frac{u_0 Y_0}{L \left(1 + \frac{x}{L}\right)} + \frac{u_0 Y_0^3}{LY_0^2} \frac{\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2}{\left(1 + \frac{x}{L}\right)^3} + C(x)$$

Para cualquier valor de "x" comprendido entre  $0 < x < L$  se cumple que  $C(x) = 0$ ;



Por lo tanto:

$$v = -\frac{u_0 y}{L} \left[ 1 - \left( \frac{y}{Y_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Eligiendo el sistema cartesiano de coordenadas, la aceleración en dirección  $x$  e  $y$  será:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

Puesto que se está en régimen permanente:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$

Derivando las velocidades  $u$  y  $v$  respecto las direcciones  $x$  e  $y$  se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_0 \left[ \frac{1}{L} - \frac{3y^2}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 \frac{1}{L} \right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_0 \left[ -\frac{2y}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^3 \right];$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u_0 \left[ \frac{y^3}{LY_0^2} 2 \left( 1 + \frac{x}{L} \right) \frac{1}{L} \right];$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = u_0 \left[ \frac{3y^2}{LY_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{L} \right];$$

Sustituyendo en las ecuaciones para la aceleración, se obtiene:

$$a_x = \frac{u_0^2}{L} \left[ \left( 1 + \frac{x}{L} \right) - 2 \left( \frac{y}{Y_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^3 + \left( \frac{y}{Y_0} \right)^4 \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^5 \right]$$

$$a_y = \frac{u_0^2}{L^2} \left[ y - 2 \frac{y^3}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{y^5}{Y_0^4} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^4 \right]$$

La velocidad angular se define como:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



Obsérvese que:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

Sustituyendo, queda:

$$\omega_z = \frac{yu_0}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right) \left[ \frac{y^2}{L^2} + \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 \right];$$

Puesto que la vorticidad se define como el doble de la velocidad angular,  $\xi_z = 2\omega_z$ ;

$$\xi_z = 2 \frac{yu_0}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right) \left[ \frac{y^2}{L^2} + \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 \right];$$

la velocidad de deformación volumétrica está dada en este caso por:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d(\delta V)}{dt} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Al sustituir  $\frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$ , se llega a:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d(\delta V)}{dt} = 0;$$

la velocidad de deformación angular viene dada por:

$$\phi_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

puesto que:

$$\phi_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0; \quad \phi_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0;$$

Sustituyendo, se llega a:

$$\phi_{xy} = \frac{yu_0}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right) \left[ - \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{y^2}{L^2} \right];$$

Cabe recordar que, aunque matemáticamente se puedan separar, la rotación, la dilatación y la deformación angular, ocurren en el fluido de forma simultánea, y no se pueden separar desde el punto de vista físico.



## Problema 7

### Enunciado

Sea un flujo definido por una distribución de velocidades tal como:

$$u = \frac{x}{1+t}; \quad v = \frac{y}{1+2t}; \quad w = 0$$

Halle la línea de corriente, senda o trayectoria y la línea de traza que en el instante  $t = 0$  pasa por el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

### Resolución

Puesto que  $w = 0$ , el flujo es bidimensional y, todas la líneas de corriente serán paralelas al plano XY

La determinación de las líneas de corriente se basa en la ecuación:

$$\frac{dx}{ds} = u = \frac{x}{1+t} \qquad \frac{dy}{ds} = v = \frac{y}{1+2t}$$

Integrando para  $t = \text{cte}$ , queda:

$$\frac{dx}{x} = \frac{ds}{1+t}; \quad \ln x = \frac{s}{1+t} + \text{cte} \quad \xrightarrow{\text{variables}(x,y)} \quad x = c_1 \cdot e^{\frac{s}{1+t}}$$

$$y = c_2 \cdot e^{\frac{s}{1+2t}}$$

Para calcular las constantes, se impondrá la condición:  $s=0$ ;  $x=X_0$ ;  $y=Y_0$ , y se obtendrá  $C_1 = x_0$ ;  $C_2 = y_0$ ; Eliminando  $s$ , queda:

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot (1+t) = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \cdot (1+2t)$$

Reagrupando en  $x$  e  $y$ , se obtendrá:

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot \frac{1+t}{1+2t} = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right); \quad e^{\left[\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot \frac{1+t}{1+2t}\right]} = e^{\ln\left(\frac{y}{y_0}\right)}; \quad \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1+t}{1+2t}} = \frac{y}{y_0};$$

Se obtiene así la ecuación de las líneas de corriente que pasan por  $(x_0, y_0)$  en cualquier instante  $t$ :



$$y = y_0 \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1+t}{1+2t}}$$

$$\text{Para } t = 0 \longrightarrow \frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}$$

La línea de corriente será una línea inclinada 45° que pasa por el punto  $(X_0, Y_0)$ , ver figura 7.1:

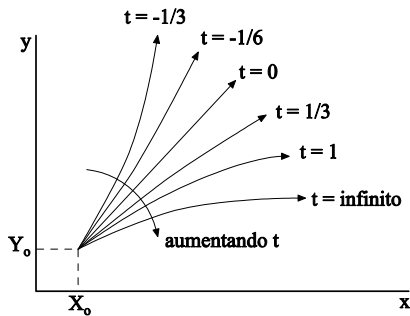


Fig. 7.1  
Líneas de corriente que pasan por el punto  $X_0, Y_0$  para diferentes estados temporales

Las líneas de corriente se pueden determinar también utilizando la ecuación:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

Sustituyendo los valores de  $u$  y  $v$  se obtiene:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \frac{1+t}{1+2t}$$

de donde:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \frac{1+2t}{1+t}$$

Integrando entre límites, se obtiene:

$$\frac{1+t}{1+2t} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_{y_0}^y \frac{dy}{y}$$

$$\text{de donde: } \frac{1+t}{1+2t} \ln \left( \frac{x}{x_0} \right) = \ln \left( \frac{y}{y_0} \right)$$

$$\text{o bien: } \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1+t}{1+2t}} = \left( \frac{y}{y_0} \right)$$

Véase que se obtiene la misma ecuación que en el apartado anterior.



Las sendas o trayectorias se determinan integrando las ecuaciones A y B

$$(A) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} \quad (B) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+2t}$$

Integrando,

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{1+t}; \quad \ln x = \ln(1+t) + k_1; e^{\ln x} = e^{\ln(1+t)+k_1} \longrightarrow x = (1+t) \cdot k_1 \quad (C)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{1+2t}; \ln y = \frac{1}{2} \ln(1+2t) + k_2; e^{\ln y} = e^{\frac{1}{2} \ln(1+2t)+k_2} \longrightarrow y = (1+2t)^{\frac{1}{2}} \cdot k_2 \quad (D)$$

Aparecen dos nuevas constantes,  $k'_1$  y  $k'_2$ , que corresponden a  $e^{k_1}$  y  $e^{k_2}$

Aplicando las condiciones de contorno  $t=0$ ,  $x=X_0$ ,  $y=Y_0$ , queda:

$$X_0 = k'_1; \quad x = (1+t) \cdot X_0$$

$$Y_0 = k'_2; \quad y = (1+2t)^{\frac{1}{2}} \cdot Y_0$$

Eliminando el tiempo se obtiene la ecuación de la senda o trayectoria.

$$y = \left[ 1 + 2 \left( \frac{x}{X_0} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot Y_0$$

Ésta se muestra en la figura 7.2. Véase que no coincide con la ecuación de la línea de corriente en  $t=0$ .

Para hallar la línea de traza, se parte de las ecuaciones integradas de las sendas, ecuaciones C y D, y se calcula la familia de partículas que pasaron por  $(X_0, Y_0)$  en instantes  $\varepsilon < t$ .

Así pues, para  $t = \varepsilon$ ,  $x = X_0$ ,  $y = Y_0$ , se obtiene:

$$(C) \quad x = (1+t) \cdot k'_1; \quad k'_1 = \frac{X_0}{1+\varepsilon} \longrightarrow x = \frac{(1+t)}{1+\varepsilon} X_0$$

$$(D) \quad y = (1+2t)^{\frac{1}{2}} \cdot k'_2; \quad k'_2 = \frac{Y_0}{(1+2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow y = \frac{(1+2t)^{\frac{1}{2}}}{(1+2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} Y_0$$

Estas expresiones corresponden a las líneas de traza que pasan por  $(X_0, Y_0)$  en cualquier instante  $t$ .

Para  $t = \text{cte}$ , se igualan los valores de  $\varepsilon$  de las dos ecuaciones.

$$\varepsilon = \frac{(1+t)}{x} \cdot X_0 - 1 = \left[ (1+2t) \cdot \left( \frac{Y_0}{y} \right)^2 - 1 \right] \frac{1}{2} \longrightarrow (1+t) \frac{X_0}{x} - \frac{1}{2} = \frac{(1+2t)}{2} \left( \frac{Y_0}{y} \right)^2$$



Despejando  $\left(\frac{y}{Y_0}\right)$ , se obtiene:

$$\left(\frac{y}{Y_0}\right) = \left[ \frac{(1+2t)}{2(1+t)\frac{X_0}{x} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \text{Para } t=0 \longrightarrow \left(\frac{y}{Y_0}\right) = \left[ \frac{1}{2\frac{X_0}{x} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ 2\frac{X_0}{x} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Línea también representada en la figura 7.2.

Físicamente, la línea de traza refleja el comportamiento de las líneas de corriente antes del instante  $t=0$ , mientras que la senda refleja lo que ocurre después.

Una línea de traza se genera experimentalmente por medio de la inyección continua de partículas marcadas (tinta, humo o burbujas) desde un punto fijo.

Como última observación, cabe decir que en caso de flujo estacionario, las líneas de traza, senda y corriente coinciden.

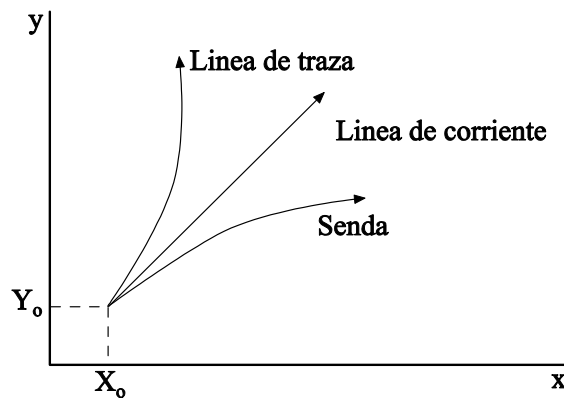


Fig. 7.2  
Línea de corriente, senda y línea de traza que pasan por  $X_0$  e  $Y_0$  en  $T = 0$

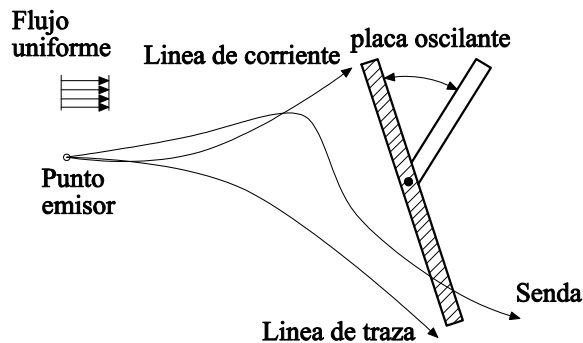


Fig. 7.3  
Flujo no estacionario alrededor de una placa oscilante, visualizado con burbujas desprendidas de un punto fijo

Adaptado del problema 1-14 del libro *Mecánica de Fluidos* del autor Frank M White edición 1988, publicado por McGraw-Hill



## Problema 8

### Enunciado

Sea el movimiento en régimen permanente definido en coordenadas eulerianas y dado por el campo de velocidades:  $\vec{v} = (2x - 3y)\hat{i} + (3x - 2y)\hat{j}$

Se pide:

1. Demuestre que el fluido es incompresible.
2. Determine el campo de aceleración  $\vec{a}$  y el campo de vorticidad ( $\vec{\Omega}$ ).
3. Determine las líneas de corriente e identifique aquella que pasa por el punto  $x=1$ ;  $y=1$ ;  $z=0$ .
4. Determine la ecuación de las líneas de torbellino (vector remolino  $\vec{\omega}$ )
5. Calcule la circulación del vector velocidad a lo largo de la línea de corriente que pasa por el punto  $x=1$ ;  $y=1$ ;  $z=0$ . Calcule también el flujo de vorticidad  $\vec{\Omega}$  a través de la superficie que tiene por línea frontera aquella línea de corriente.
6. Calcule la velocidad de deformación lineal específica en la dirección del vector unitario  $\vec{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$

### Resolución

1. La ecuación de conservación de la masa en forma diferencial se enuncia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0 ;$$

Si el fluido es incompresible, se ha de cumplir:  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Sustituyendo:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow \text{fluido incompresible}$$

$$2. \quad \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

Por ser el movimiento estacionario,  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$





$$\begin{aligned}
 (\bar{v}\nabla)\bar{v} &= (2x-3y)(3x-2y) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} = (2x-3y)(3x-2y) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = \\
 &= [(2x-3y)2 + (3x-2y)(-3)]\hat{i} + [(2x-3y)3 + (3x-2y)(-2)]\hat{j} = \\
 &= [4x - 6y - 9x + 6y]\hat{i} + [6x - 9y - 6x + 4y]\hat{j} = -5x\hat{i} - 5y\hat{j}
 \end{aligned}$$

El campo de vorticidad está definido por  $\bar{\Omega} = \nabla \wedge \bar{V} = \text{rot } \bar{V}$

$$\bar{\Omega} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2x-3y) & (3x-2y) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(3x-2y)\hat{k} - \frac{\partial}{\partial y}(2x-3y)\hat{k} = 6\hat{k}$$

El fluido está girando respecto al eje z.

3. Las líneas de corriente se definen por la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} ; \quad \frac{dx}{2x-3y} = \frac{dy}{3x-2y} ; \quad dx(3x-2y) - dy(2x-3y) = 0$$

Se llega a una ecuación diferencial del tipo:  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Se debe comprobar si se trata de una diferencial exacta:

Para ello, se ha de cumplir  $\longrightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \longrightarrow$  Recordando que

$$N(x, y) = -(2x - 3y)$$

Se observa que la ecuación diferencial es exacta, dado que las dos derivadas tienen el mismo valor.

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -2$$

Puesto que se trata de una diferencial exacta, la solución de la ecuación será del tipo:

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx = \int (3x - 2y)dx = 3\frac{x^2}{2} - 2xy + C(y)$$



$$\text{y debe cumplirse que } N(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y},$$

$$\text{con lo cual: } -(2x - 3y) = -2x + C'(y) \longrightarrow C'(y) = 3y \longrightarrow C(y) = \frac{3y^2}{2} + C_0$$

Por tanto la función queda:

$$F(x, y) = \frac{3x^2}{2} - 2xy + \frac{3y^2}{2} + C_0 = 0$$

(Si en lugar de igualarla a 0 se iguala a cualquier otro número, se obtendrán elipses concéntricas.)

Sustituyendo para el punto  $x=1$ ;  $y=1$ ;  $z=0$ , queda:

$$F(x, y) = \frac{3}{2} - 2 + \frac{3}{2} + C_0 = 0 \longrightarrow C_0 = -1$$

En este punto, la función será:

$$\frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} - 2xy - 1 = 0$$

Ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto  $(1,1,0)$  y representa la ecuación de una elipse centrada en el origen pero inclinada un ángulo  $\theta$ .

Con el fin de hallar la ecuación de la elipse referida a sus ejes centrales, se debe determinar el ángulo de rotación de la misma.

La expresión de una elipse plana en cualquier punto del eje de coordenadas y girada un ángulo  $\theta$  viene dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El término  $x$  y es el que da la rotación.

Los términos en  $x$  e  $y$  dan el desplazamiento (en este caso, no existe desplazamiento)

$$\text{El ángulo de giro viene dado por: } \cotg(2\theta) = \frac{A-C}{B}$$

La ecuación hallada es:  $\frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} - 2xy - 1 = 0$ . Y se puede expresar como:

$$3x^2 + 3y^2 - 4xy - 2 = 0 \quad (1)$$

Se deduce que  $A=3$ ;  $B=-4$ ;  $C=3$ .



$$\cotg(2\theta) = \frac{3-3}{-4} = 0 \longrightarrow 2\theta = 90^\circ \longrightarrow \theta = 45^\circ$$

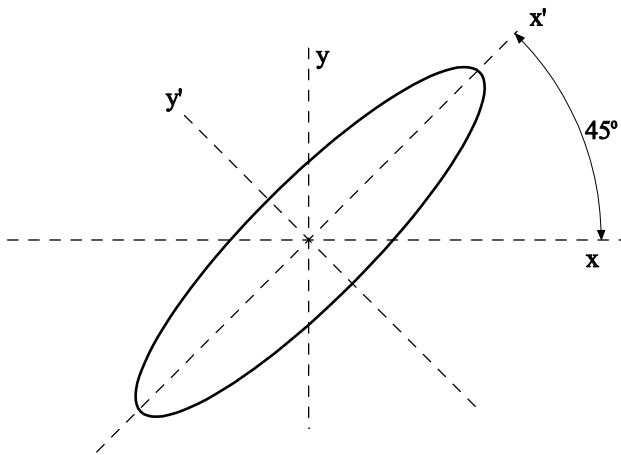


Fig. 8.1  
Inclinación de la  
elipse respecto  
a los ejes  
coordenados

Para transformar la ecuación de la elipse referida a los ejes  $x$  y respecto a los ejes  $x'y'$  se debe realizar el cambio:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta & \Rightarrow & & x &= x'\cos 45^\circ - y'\sin 45^\circ \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta & & & y &= x'\sin 45^\circ + y'\cos 45^\circ \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$3\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 = 0$$

Desarrollando se llega a  $x'^2 + 5y'^2 - 2 = 0$

La ecuación de la elipse respecto a los ejes  $x'$  e  $y'$  será:

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2 - 1 = 0$$

La ecuación genérica de una elipse centrada es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

siendo  $a$  y  $b$  los semiejes principales, que en este caso valdrán:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} \\ b &= \sqrt{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$



4. El vector remolino se define como  $\vec{\omega}$ .

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \longrightarrow (\vec{\Omega} = 6\hat{k}) \text{ apartado 2} \longrightarrow \vec{\omega} = 3\hat{k}$$

5. La circulación del vector velocidad se define como:

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint \{i(2x - 3y) + j(3x - 2y)\} \{i \cdot dx + j \cdot dy\}$$

Esta integral hay que realizarla a lo largo de la línea de corriente (que es la elipse); para integrar se deben transformar todos estos parámetros en uno solo e integrar respecto a dicho parámetro.

Consecuentemente, se han de dar los valores de  $x$ ,  $y$ ,  $dx$ ,  $dy$  en función de los semiejes principales de la elipse y el ángulo de giro.

Las relaciones de transformación son:

Fig. 8.2  
Relaciones de  
Transformación  
para una elipse

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{b}$$

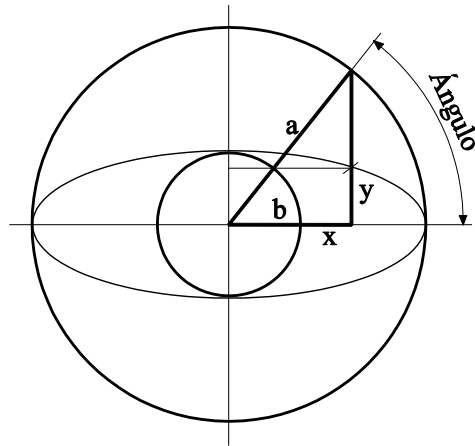
$$\text{cos}\theta = \frac{x}{a}$$

$$x = a\text{cos}\theta = \sqrt{2}\text{cos}\theta$$

$$y = b\text{sen}\theta = \sqrt{\frac{2}{5}}\text{sen}\theta$$

$$dx = -a\text{sen}\theta d\theta = -\sqrt{2}\text{sen}\theta d\theta$$

$$dy = b\text{cos}\theta d\theta = \sqrt{\frac{2}{5}}\text{cos}\theta d\theta$$



Sustituyendo estos valores en la integral se obtiene como única variable el ángulo  $\theta$ , que se integrará entre 0 y  $2\pi$ ;

$$\Gamma = \oint (2x - 3y)dx + (3x - 2y)dy = \int_0^{2\pi} \left( 2\sqrt{2}\text{cos}\theta - 3\sqrt{\frac{2}{5}}\text{sen}\theta \right) \cdot (-\sqrt{2}\text{sen}\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \left( 3\sqrt{2}\text{cos}\theta - 2\sqrt{\frac{2}{5}}\text{sen}\theta \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{2}{5}}\text{cos}\theta \right) d\theta$$

De realizar la integración se obtiene que  $\Gamma = \left( \frac{12\pi}{\sqrt{5}} \right)$

Se observa que este camino elegido es largo. Un método alternativo sería la aplicación del teorema de Stokes:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{s} = \int \vec{\Omega} \cdot d\vec{s} = \int 6\hat{k} \cdot \hat{n} ds = 6 \int ds = 6\pi ab \rightarrow \text{área de la elipse} \rightarrow$$



$$\rightarrow 6\pi ab = 6\pi\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{12\pi}{\sqrt{5}} = \Gamma$$

Obsérvese que el flujo de vorticidad, que se define como  $\int_S (\nabla \wedge \vec{v}) d\vec{s}$  es igual a la circulación del vector velocidad.

6. La velocidad de deformación lineal específica en la dirección del vector unitario

$\vec{r} = i \frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}$  se calcula mediante la expresión:

$$\frac{1}{|d\vec{r}|} \cdot \frac{d}{dt} |d\vec{r}| = e_{ij} \beta_i \beta_j \rightarrow \begin{matrix} \beta_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \beta_j = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

de donde  $e_{ij}$  valdrá:

$$e_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{|d\vec{r}|} \cdot \frac{d}{dt} |d\vec{r}| = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2}(-3+3) & 0 \\ \frac{1}{2}(-3+3) & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La velocidad de deformación lineal vendrá dada por  $\sqrt{2} \hat{i} + \sqrt{2} \hat{j}$ .

→ 3



## Estática, y movimiento de un fluido como sólido rígido

### Problema 9

#### Enunciado

Sea una esfera de radio la unidad, sumergida parcialmente en agua. Se conoce que, en la posición de equilibrio, el punto de tangencia del casquete esférico que sobresale del líquido con el eje de abscisas que pasa por el centro de la esfera forman un ángulo de 45 grados. Determine:

1. La densidad del material de que está compuesta la esfera.
2. Si la esfera se sumerge en mercurio, determine el nivel de mercurio respecto al eje central de la esfera.

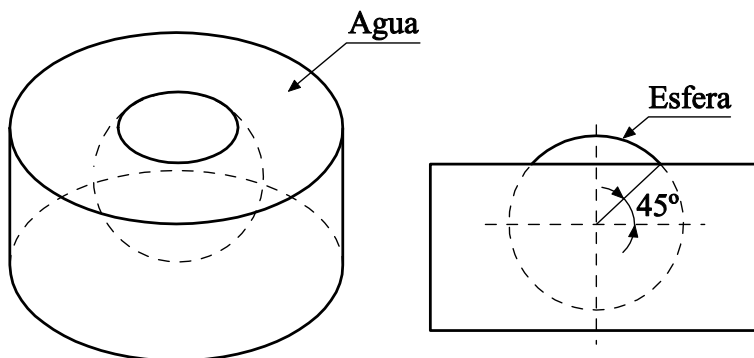


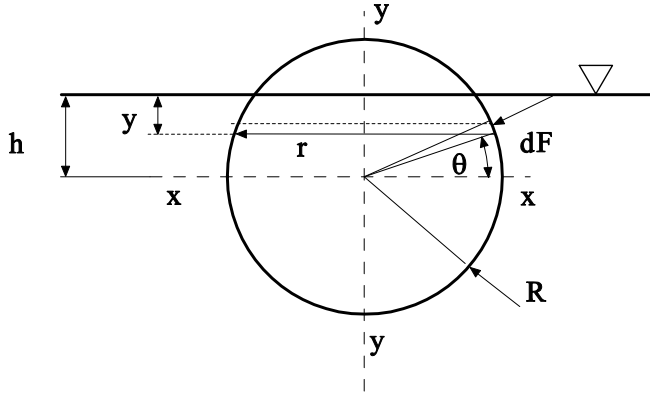
Fig. 9.1  
Esquema de la  
esfera  
parcialmente  
sumergida



### Resolución

1. El elemento diferencial de superficie empleado para determinar el empuje queda esquematizado en la figura 9.2.

Fig. 9.2  
Esquema del  
elemento  
diferencial  
empleado



$$E = - \int_s dF_y = - \int_s dF \sin \theta = - \int_s \rho g y \cdot 2\pi r \cdot R d\theta \cdot \sin \theta;$$

puesto que: 
$$\begin{cases} r = R \cos \theta \\ y = h - R \sin \theta \end{cases}$$

$$E = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho g (h - R \sin \theta) \cdot 2\pi R \cos \theta \cdot R \cdot \sin \theta d\theta;$$

$$E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho g h \cdot 2\pi R^2 \cos \theta \sin \theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho g 2\pi R^3 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta; \quad (1)$$

$$E = -\rho g h 2\pi R^2 \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} + \rho g 2\pi R^3 \left[ \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

Para  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ;  $h = R \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) = R \sin (45^\circ)$

$$E = -\rho g h 2\pi R^2 \frac{1}{2} \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) - \sin^2 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] + \rho g 2\pi R^3 \frac{1}{3} \left[ \sin^3 \left( \frac{\pi}{4} \right) - \sin^3 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right];$$

$$E = -\rho g h 2\pi R^2 \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - 1 \right] + \rho g 2\pi R^3 \frac{1}{3} [0,353553 - (-1)];$$

$$E = \rho g h 2\pi R^2 \left( \frac{1}{4} \right) + \rho g 2\pi R^3 \frac{1}{3} (1,353553);$$





$$E = \rho g 2\pi \left[ \frac{R^2}{4} h + \frac{R^3}{3} (1,353553) \right];$$

$$E = \rho g 2\pi \left[ \frac{R^3 \sin 45^\circ}{4} + \frac{R^3}{3} (1,353553) \right];$$

$$E = \rho g 2\pi R^3 \left[ \frac{\sin 45^\circ}{4} + \frac{1,353553}{3} \right] = \rho g 2\pi R^3 \cdot 0,62796 = \rho g \pi R^3 \cdot 1,2559$$

El peso de la esfera ha de ser igual a su empuje, con lo cual se ha de cumplir:

$$w = \rho_E g \frac{4}{3} \pi R^3 = E = \rho_{H_2O} g \pi R^3 \cdot 1,2559$$

$$\rho_E = \frac{\rho_{H_2O} \cdot 1,2559}{\frac{4}{3}} = 941,94 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

Véase que, tal como cabía esperar, la densidad es menor que la densidad del agua.

2. Si la esfera se sumerge en el mercurio, y dado que la densidad del mercurio es 13,6 veces la densidad del agua, se puede realizar una estimación inicial calculando si la mitad de la esfera quedará o no cubierta por el mercurio. Para ello, se ha de evaluar si se cumple:

$$\text{Peso}_{\text{esfera}} = W_{\text{esfera}} = \rho_{\text{esfera}} g \frac{4}{3} \pi R^3 \stackrel{>}{<} \rho_{\text{Hg}} g \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3$$

y se cumple que :  $\rho_E < \rho_{\text{Hg}} \frac{1}{2}$

con lo cual, seguro que únicamente un pequeño casquete esférico quedará sumergido en el mercurio.

Dado que el elemento diferencial de empuje es el mismo que en el apartado inicial, se llega a la misma expresión (1) que en dicho apartado, aunque ahora la densidad de fluido es la del mercurio.

$$E = -\rho_{\text{Hg}} g h 2\pi R^2 \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} + \rho_{\text{Hg}} g 2\pi R^3 \left[ \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

de donde:

$$E = \rho_{\text{Hg}} g 2\pi R^2 \left\{ \left[ \frac{R}{3} \left( \sin^3 \theta - \sin^3 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] - \left[ \frac{h}{2} \left( \sin^2 \theta - \sin^2 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \right\}; \quad (2)$$



Con el fin de comprobar la bondad de la ecuación hallada, se comprueba que para  $\theta = 0$  se cumple que  $h = 0$ , con lo cual el empuje debería ser el equivalente al de media esfera.

$$E = \rho_{\text{Hg}} g 2\pi R^2 \left[ \frac{R}{3}(0+1) - \frac{h}{2}(0-1) \right]$$

$$E = \rho_{\text{Hg}} g 2\pi R^2 \left[ \frac{R}{3} + \frac{h}{2} \right]$$

$$E = \rho_{\text{Hg}} g 2\pi \frac{R^3}{3} = \rho_{\text{Hg}} g \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{1}{2}$$

Véase que se cumple.

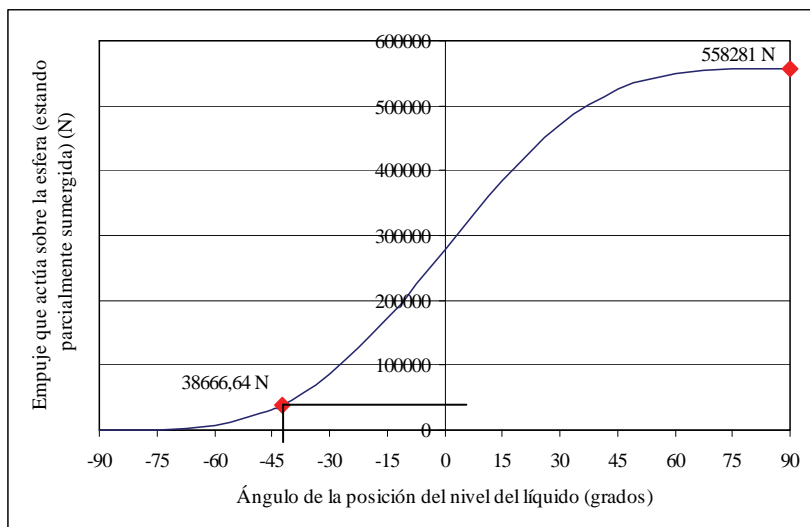
La determinación del ángulo  $\theta$  se obtendrá de igualar el peso de la esfera a la ecuación del empuje en función de dicho ángulo.

El peso de la esfera viene dado por:

$$W_{\text{esfera}} = \rho_{\text{esfera}} g \frac{4}{3} \pi R^3 = 941,94 \cdot 9,8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = 38666,77 \text{ N} \quad (3)$$

La figura 9.3 es la representación gráfica de la ecuación (2), donde entrando para el peso de la esfera se obtiene el ángulo  $\theta$  que forma la superficie libre del mercurio con el eje de abscisas central de la esfera. Cuyo valor es de  $\theta = -42,7^\circ$ .

Fig. 9.3  
Representación  
gráfica de la  
ecuación 2





## Problema 10

### Enunciado

Determine la localización del centro de presión y de los momentos causados por las fuerzas hidrostáticas sobre el eje que pasa por la base de una placa semicircular de radio la unidad, sumergida completamente e inclinada un ángulo de  $\theta=45^\circ$  respecto a la superficie libre del líquido.

Considérese que la parte superior de la placa está situada a una distancia respecto al nivel del líquido de  $h_a$  (10 m; 100 m; 500 m), por debajo de la superficie del mar.

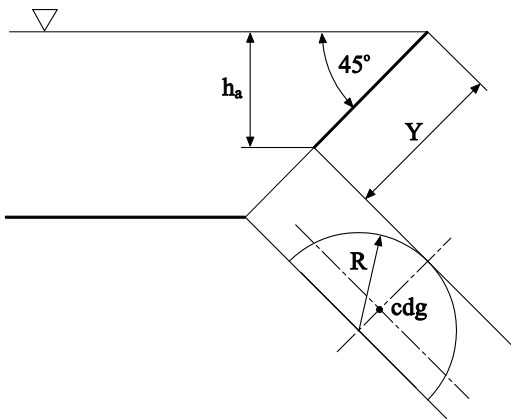


Fig. 10.1  
Esquema de la posición de la placa

### Resolución

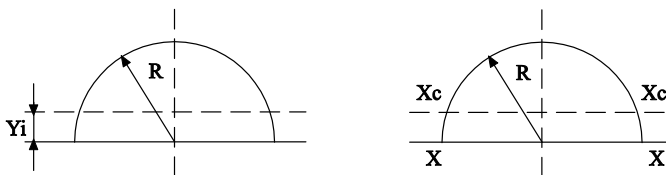


Fig. 10.2  
Ejes de referencia

1. Los momentos de inercia respecto al eje central y el que pasa por la base de la placa se establecen:

$$I_{xc} = \frac{\pi R^4}{8} \left( 1 - \frac{64}{9\pi^2} \right); \quad I_x = \frac{1}{8} \pi R^4; \quad Y = \frac{4R}{3\pi}$$

Sustituyendo para el momento de inercia que pasa por el eje central, se tiene:

$$I_{xc} = 0,1097 \times R^4$$



La distancia (inclinada) desde la superficie del líquido hasta el centro de gravedad del cuerpo se define:

$$Y_{cdg} = \frac{h_a}{\text{sen}45} + \left( R - \frac{4R}{3\pi} \right)$$

$$Y_{cdg10} = Y_{cdg10m} = \frac{10}{\text{sen}45} + \left( 1 - \frac{4 \times 1}{3\pi} \right) = 14,717 \text{ m}$$

$$Y_{cdg100} = Y_{cdg100m} = \frac{100}{\text{sen}45} + \left( 1 - \frac{4 \times 1}{3\pi} \right) = 141,996 \text{ m}$$

$$Y_{cdg500} = Y_{cdg500m} = \frac{500}{\text{sen}45} + \left( 1 - \frac{4 \times 1}{3\pi} \right) = 707,682 \text{ m}$$

El centro de presión en los tres casos está situado:

$$Y_{cdp} - Y_{cdg} = \frac{I_{x_{cdg}}}{Y_{cdg} \times A}$$

$$h_a = 10 \text{ m.} \quad Y_{cdp10} = Y_{cdg10} + \frac{I_{x_{cdg}}}{Y_{cdg10} \times A} = 14,717 + \frac{0,1097 \times 1^4}{14,717 \times \frac{\pi \times 1^2}{2}} = 14,721 \text{ m}$$

$$Y_{cdp10} - Y_{cdg10} = 0,00474 \text{ m}$$

$$h_a = 100 \text{ m.} \quad Y_{cdp100} = 141,996 + \frac{0,1097 \times 1^4}{141,996 \cdot \frac{\pi \times 1^2}{2}} = 141,99649 \text{ m}$$

$$Y_{cdp100} - Y_{cdg100} = 0,000491 \text{ m}$$

$$h_a = 500 \text{ m} \quad Y_{cdp500} = 707,682 + \frac{0,1097 \times 1^4}{707,682 \cdot \frac{\pi \times 1^2}{2}} = 707,6820987 \text{ m}$$

$$Y_{cdp500} - Y_{cdg500} = 0,00009870 \text{ m}$$

Obsérvese que la distancia entre el centro de presiones y el centro de gravedad disminuye a medida que la profundidad aumenta.

La fuerza ejercida sobre la superficie semicircular para las tres profundidades se establece del modo siguiente:

$$F_{10} = \rho g Y_{cdg10} \text{sen}45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 14,717 \cdot \text{sen}45 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 160.195,4 \text{ N}$$



$$F_{100} = \rho g Y_{cdg_{100}} \operatorname{sen}45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 141,996 \cdot \operatorname{sen}45 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 154.5635,43 \text{ N}$$

$$F_{500} = \rho g Y_{cdg_{500}} \operatorname{sen}45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 707,682 \cdot \operatorname{sen}45 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 770.3163,29 \text{ N}$$

El momento respecto a la base del área semicircular será:

$$M = F \cdot d_{(cdp-base)} = F \cdot \left\{ \frac{4R}{3\pi} - (Y_{cdp} - Y_{cdg}) \right\}$$

$$M_{10m} = 160.195,4 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,00474 \right\} = 67.229,71 \text{ Nm}$$

$$M_{100m} = 1.545.635,43 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,000491 \right\} = 655.229,14 \text{ Nm}$$

$$M_{500m} = 7.703.163,29 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,00009870 \right\} = 3.268.563,73 \text{ Nm}$$

2. Segundo método de resolución, por integración directa:

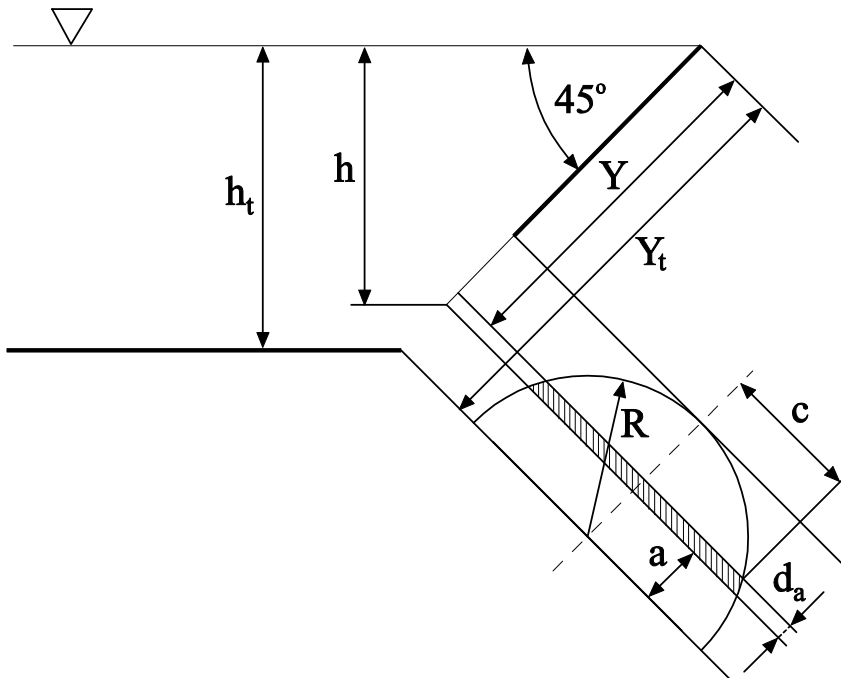


Fig. 10.3  
Esquema de la posición de la placa con el elemento diferencial de superficie elegido

Sea el elemento diferencial de superficie definido en la figura 10.3.



$$ds = 2c \cdot da$$

$$a^2 + c^2 = R^2$$

$$ds = 2\sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$dF = P \quad ds$$

$$dF = \rho \cdot g \cdot h \cdot ds = \rho \cdot g \cdot (h_t - a \cdot \text{sen}\theta) \cdot ds = \rho \cdot g \cdot (Y_t \cdot \text{sen}\theta) \cdot ds = \rho \cdot g \cdot (Y_t - a) \cdot \text{sen}\theta \cdot ds$$

$$dF = \rho \cdot g \cdot (Y_t - a) \cdot \text{sen}\theta \cdot ds = \rho \cdot g \cdot (Y_t - a) \cdot \text{sen}\theta \cdot 2\sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \int_0^R \rho \cdot g \cdot (Y_t - a) \cdot \text{sen}\theta \cdot 2\sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da - \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \int_0^R a \cdot \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \left[ \frac{a}{2} \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{R^2}{2} \cdot \text{arcsen} \frac{a}{R} \right]_0^R - \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \int_0^R a \cdot \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \left[ \frac{R^2}{2} \sqrt{R^2 - R^2} + \frac{R^2}{2} \text{arcsen} \frac{R}{R} \right] - \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \int_0^R a \cdot \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \left[ 0 + \frac{R^2}{2} \text{arcsen} 1 \right] - \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \left[ -\frac{1}{3} (R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \cdot \left( \frac{R^2}{2} \text{arcsen} 1 \right) - \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \left[ -\frac{1}{3} \cdot (R^2 - R^2)^{\frac{3}{2}} - \left( -\frac{1}{3} (R^2 - 0^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right]$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \times \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} (R^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot \frac{R^2 \cdot \pi}{2} - \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} R^3 ;$$

$$F = \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot R^2 \left[ Y_t \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{R \cdot 2}{3} \right] ;$$

El valor de  $Y_t$  será:

$$h_t = h_a + R \cdot \text{sen}\theta$$



La  $h_a$  ha de entenderse ahora como la distancia vertical entre el extremo superior de la placa y la superficie libre del líquido.

$$Y_t = \frac{h_a + R \cdot \text{sen}\theta}{\text{sen}\theta} = \frac{h_a}{\text{sen}\theta} + R$$

Sustituyendo en la ecuación de la fuerza:

$$F = \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot R^2 \left[ \left( \frac{h_a}{\text{sen}\theta} + R \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{R \cdot 2}{3} \right]$$

La fuerza sobre la superficie para las tres profundidades será:

$$h_a=10 \text{ m} \quad F_{10} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot \text{sen}45 \cdot 1^2 \cdot \left[ \left( \frac{10}{\text{sen}45} + 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 2}{3} \right] = 160.203,3 \text{ N}$$

$$h_a=100 \text{ m} \quad F_{100} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot \text{sen}45 \cdot 1^2 \cdot \left[ \left( \frac{100}{\text{sen}45} + 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 2}{3} \right] = 1.545.645,69 \text{ N}$$

$$h_a=500 \text{ m} \quad F_{1000} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot \text{sen}45 \cdot 1^2 \cdot \left[ \left( \frac{500}{\text{sen}45} + 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 2}{3} \right] = 7.703.167,29 \text{ N}$$

El momento respecto a la base del área semicircular es:

$$dM = dF \cdot a$$

$$dM = a \cdot \rho \cdot g \cdot (Y_t - a) \cdot \text{sen}\theta \cdot 2\sqrt{R^2 - a^2} da$$

$$M = \int_0^R \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \cdot Y_t \cdot a \cdot \sqrt{R^2 - a^2} da - \int_0^R \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{R^2 - a^2} da$$

$$M = \rho \times g \times \text{sen}\theta \times 2 \left[ Y_t \left[ -\frac{1}{3}(R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R - \left[ \frac{a(2a^2 - R^2)}{8} \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{R^4}{8} \arcsen\left(\frac{a}{R}\right) \right]_0^R \right]$$

$$M = \rho \times g \times \text{sen}\theta \times 2 \left[ Y_t \left[ \frac{1}{3} R^3 \right] - \left[ \frac{R^4}{8} \arcsen 1 \right] \right]$$

Recordando que

$$Y_t = \frac{h_a}{\text{sen}45} + R ,$$

el momento para los diferentes valores de  $h_a$  será:



$$h_a = 10 \text{ m}$$

$$M_{10} = 1.000 \times 9,8 \times \text{sen}45 \times 2 \left[ \left[ \frac{10}{\text{sen} 45} + 1 \right] \left[ \frac{1}{3} 1^3 \right] - \left[ \frac{1 \pi}{8 \cdot 2} \right] \right] = 67.231,83 \text{ Nm}$$

$$h_a = 100 \text{ m}$$

$$M_{10} = 1.000 \times 9,8 \times \text{sen}45 \times 2 \left[ \left[ \frac{100}{\text{sen} 45} + 1 \right] \left[ \frac{1}{3} 1^3 \right] - \left[ \frac{1 \pi}{8 \cdot 2} \right] \right] = 655.231,83 \text{ Nm}$$

$$h_a = 500 \text{ m}$$

$$M_{10} = 1.000 \times 9,8 \times \text{sen}45 \times 2 \left[ \left[ \frac{500}{\text{sen} 45} + 1 \right] \left[ \frac{1}{3} 1^3 \right] - \left[ \frac{1 \pi}{8 \cdot 2} \right] \right] = 3.268.565,16 \text{ Nm}$$

Véase que los valores de la fuerza y los momentos coinciden con los obtenidos en la resolución anterior.

## Problema 11

### Enunciado

Sea un recipiente cilíndrico parcialmente lleno de agua y abierto a la atmósfera. Dicho recipiente gira a una velocidad angular de  $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  y está montado en un ascensor.

En condiciones de reposo, la altura del nivel del líquido es de 30 cm. Quedando un espacio libre entre el nivel del líquido y la superficie del vaso de 10 cm, el radio del cilindro es de 6 cm.

Sabiendo que cuando el ascensor se pone en marcha, tanto en sentido ascendente como descendente, la aceleración del mismo es de  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  y su deceleración para cualquier sentido de la marcha es de  $0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  determine:

1. La ecuación que rige la posición del nivel del líquido en función del radio.
2. La presión a la que está sometida una partícula de fluido situada en el fondo del depósito y a un radio de 0,02 m, para cualquier sentido de la marcha del ascensor.
3. La velocidad de giro del cilindro para que, en el borde exterior, el líquido se sitúe en el extremo del vaso. Considere el ascensor parado.



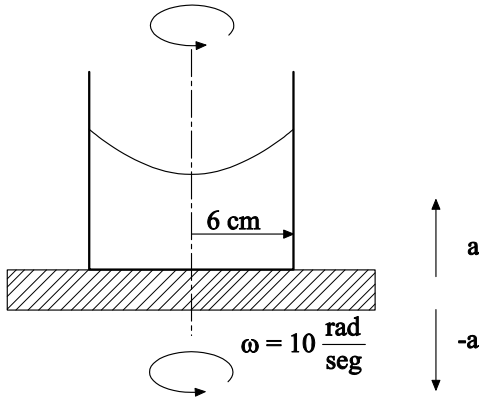


Fig. 11.1  
Esquema del  
recipiente  
cilíndrico que gira

**Resolución**

1. La ecuación diferencial que rige el movimiento de un fluido sometido a las aceleraciones: centrípeta, angular, y en dirección vertical se define como:

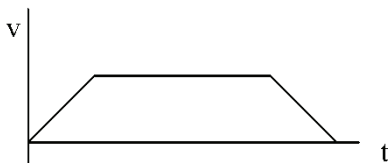
$$dP = \rho r \omega^2 dr - \rho a_\theta r d\theta - \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) dz$$

Puesto que la aceleración angular no existe para el caso que nos ocupa, queda:

$$dP = \rho r \omega^2 dr - \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) dz$$

Los valores de la aceleración  $a_z$  dependerán de si el ascensor está subiendo o bajando y de si está en fase de aceleración o deceleración, con lo cual:

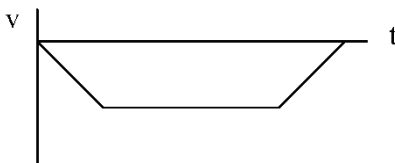
Ascensor en sentido ascendente:



- Aceleración  $a_z = 1 \frac{m}{s^2}$
- Deceleración  $a_z = -0,7 \frac{m}{s^2}$

Fig. 11.2

Ascensor en sentido descendente:



- Deceleración  $a_z = +0,7 \frac{m}{s^2}$
- Aceleración  $a_z = -1 \frac{m}{s^2}$

Fig. 11.3

Las superficies de presión constante tendrán por ecuación diferencial:



$$0 = \rho r \omega^2 dr - \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) dz$$

de donde:

$$\rho r \omega^2 dr = \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) dz$$

$$\int_{r=0}^r r \omega^2 dr = \int_{z_0}^z (g + \bar{a}_z) dz$$

$z_0$  será la altura del líquido para  $r = 0$ ;

$$\omega^2 \frac{r^2}{2} = (g + \bar{a}_z) [z - z_0]$$

con lo cual:

$$z = \omega^2 \frac{r^2}{2} \frac{1}{(g + \bar{a}_z)} + z_0$$

Se observa que la posición del nivel del líquido depende no sólo de la velocidad de giro, sino también de la aceleración del ascensor.

Esta ecuación quedará completamente definida una vez se determine  $z_0$ .

Para determinar  $z_0$  deberán igualarse los volúmenes del líquido en reposo y en movimiento.

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = \int_0^R 2\pi r z dr$$

Del enunciado se conoce que  $z_{\text{inicial}} = 30$  cm.

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = \int_0^R 2\pi r \left( \frac{\omega^2 r^2}{2} \frac{1}{(g + \bar{a}_z)} + z_0 \right) dr$$

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = 2\pi \left[ \frac{\omega^2}{2 \times (g + \bar{a}_z)} \times \frac{r^4}{4} + z_0 \times \frac{r^2}{2} \right]_0^R$$

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = 2\pi \left[ \frac{\omega^2}{2 (g + \bar{a}_z)} \frac{R^4}{4} + z_0 \frac{R^2}{2} \right]$$

$$z_{\text{inicial}} = \frac{\omega^2}{4 (g + \bar{a}_z)} R^2 + z_0$$

$$z_0 = z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4 (g + \bar{a}_z)}$$



Véase que el nivel del líquido cuando el cilindro gira; se desplaza, para radio igual a cero, y depende de las aceleraciones que se tengan en cada caso particular.

La ecuación que da la posición del nivel del líquido teniendo en cuenta todos los parámetros estipulados es:

$$Z = Z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + \bar{a}_z)} + \frac{\omega^2 r^2}{2(g + \bar{a}_z)}$$

2. La presión en el punto considerado saldrá de la ecuación:

$$\int_{P_{\text{atm}}}^{P_{\text{punto}}} dp = \int_0^r \rho r \omega^2 dr - \int_{Z_0}^0 \rho(g + \bar{a}_z) dz$$

$$P_{\text{punto}} - P_{\text{atm}} = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} + \rho(g + \bar{a}_z) Z_0$$

$$P_{\text{punto}} - P_{\text{atm}} = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} + \rho(g + \bar{a}_z) \left[ Z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + \bar{a}_z)} \right]$$

Trabajando en presiones relativas, esta ecuación se puede dar como:

$$P_{\text{punto}} = \rho(g + \bar{a}_z) \left[ Z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + \bar{a}_z)} + \frac{r^2 \omega^2}{2(g + \bar{a}_z)} \right]$$

Los valores de las constantes conocidas son:

$$\rho = 1.000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}; \quad g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$Z_{\text{inicial}} = 0,3 \text{ m}; \quad R = 0,06 \text{ m};$$

$$r = 0,02 \text{ m}; \quad \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$a_z$  = (posee cuatro valores, definidos en el primer apartado):

Así, la presión en el punto deseado para los cuatro casos en estudio será:

Ascensor subiendo, período de aceleración:  $a_z = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$P = 1.000 \times (9,8 + 1) \left[ 0,3 - \frac{10^2 \times 0,06^2}{4(9,8 + 1)} + \frac{10^2 \times 0,02^2}{2} \times \frac{1}{(9,8 + 1)} \right]$$

$$P = 3170 \text{ Pa}$$



Ascensor subiendo, período de deceleración:  $a_z = -0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  ;

$$P = 1.000 \times (9,8 - 0,7) \left[ 0,3 - \frac{10^2 \times 0,06^2}{4(9,8 - 0,7)} + \frac{10^2 \times 0,02^2}{2} \times \frac{1}{(9,8 - 0,7)} \right]$$

$$P = 2660 \text{ Pa}$$

Ascensor bajando, período de aceleración:  $a_z = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  ;

$$P = 2570 \text{ Pa}$$

Ascensor bajando, período de deceleración:  $a_z = +0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  ;

$$P = 3083,9 \text{ Pa}$$

Para el fluido en reposo:  $P = 1.000 \times 9,8 \times 0,3 = 2940 \text{ Pa}$  ;

3. Puesto que el nivel del líquido está dado por la ecuación:

$$Z = Z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + \bar{a}_z)} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \frac{1}{g + \bar{a}_z}$$

Para:

$$Z = 0,40 \text{ m} \quad Z_{\text{inicial}} = 0,3 \text{ m}$$

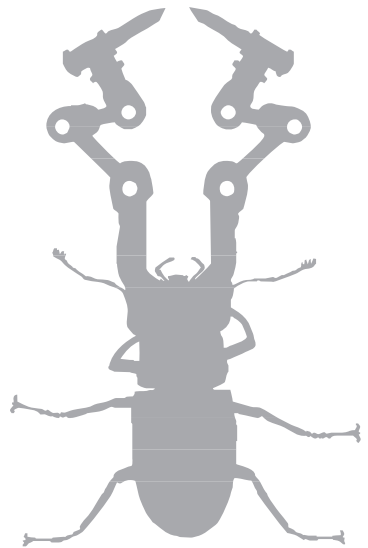
$$a_z = 0 \quad R = 0,06 \text{ m}$$

$$r = R$$

se tiene:

$$0,4 = 0,3 - \frac{\omega^2 0,06^2}{4 \times 9,8} + \frac{\omega^2 0,06^2}{2} \frac{1}{9,8}$$

$$\omega = 32,99 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$



→ 4

## Ecuación de continuidad

### Problema 12

#### Enunciado

Halle la expresión que caracteriza el tiempo de vaciado del depósito troncocónico de la figura 12.1.

$S_d$  = Superficie del agujero de salida

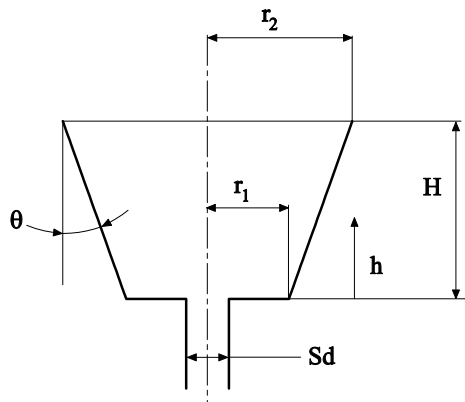


Fig. 12.1

#### Resolución

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \rho dV + \oint_{S_C} \rho \vec{v} \hat{n} dS$$



$$0 = \rho \frac{dV}{dt} + \dot{m}_s$$

$$dV = \pi r_1^2 dh$$

$$dV = \pi (r_1 + htg(\theta))^2 dh$$

$$tg\theta = \frac{r_2 - r_1}{H}$$

$$dV = \pi \left( r_1 + h \frac{r_2 - r_1}{H} \right)^2 dh$$

$$\rho \pi \left( r_1 + h \frac{r_2 - r_1}{H} \right)^2 dh = - \dot{m}_s dt$$

$$\dot{m}_s = \rho S_d v = \rho S_d \sqrt{2gh}$$

$$\frac{\rho \pi}{\rho S_d \sqrt{2g}} \int_H^{h_f} \left( r_1 + h \frac{r_2 - r_1}{H} \right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \int_0^t -dt$$

$$\frac{\pi}{S_d \sqrt{2g}} \int_H^{h_f} \left( r_1^2 + 2r_1 h \frac{r_2 - r_1}{H} + h^2 \frac{(r_2 - r_1)^2}{H^2} \right) \frac{1}{\sqrt{h}} dh = -t$$

$$\frac{\pi}{S_d \sqrt{2g}} \left[ r_1^2 \frac{\sqrt{h}}{1/2} + 2r_1 \frac{r_2 - r_1}{H} \frac{h^{3/2}}{3/2} + \frac{(r_2 - r_1)^2}{H^2} \frac{h^{5/2}}{5/2} \right]_H^{h_f} = -t$$

El tiempo de vaciado del depósito será:

$$t = \frac{\pi}{S_d \sqrt{2g}} \left[ r_1^2 \frac{\sqrt{H}}{1/2} + 2r_1 \frac{r_2 - r_1}{H} \frac{H^{3/2}}{3/2} + \frac{(r_2 - r_1)^2}{H^2} \frac{H^{5/2}}{5/2} \right]$$

### Problema 13

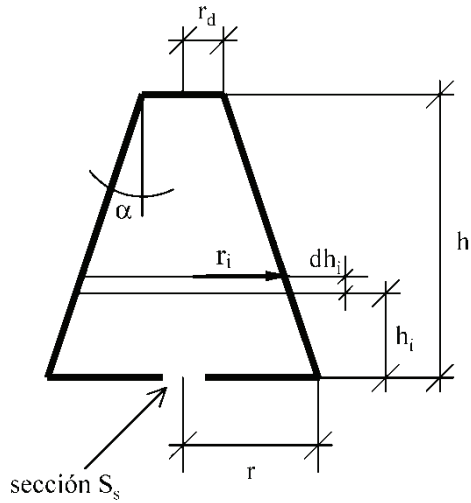
#### Enunciado

Halle el tiempo que tardará en vaciarse el depósito troncocónico de la figura 13.1, tomando como fluido de trabajo el agua.

$$R_d = 0,1 \text{ m}; h = 1 \text{ m}; \alpha = 15^\circ; S_s = 0,1 \text{ m}^2$$



Fig. 13.1



### Resolución

El vaciado del depósito se rige por la ecuación de continuidad:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \vec{V} \hat{n} dS$$

de donde, considerando el fluido como incompresible, se tiene:

$$0 = \rho \frac{dV}{dt} + \rho V S_s \quad (A)$$

De la figura 13.1 se desprende la relación entre el diferencial de volumen y el diferencial de altura:

$$dV = \pi r_i^2 dh_i$$

Por otro lado, la ecuación que rige la velocidad de salida del fluido por la sección  $S_s$  vendrá dada por:

$$V = \sqrt{2gh_i}$$

Sustituyendo en (A):

$$0 = \frac{\rho \pi r_i^2 dh_i}{dt} + \rho \sqrt{2gh_i} S_s$$

de la figura 1 se desprende la relación entre el radio  $r_i$  y la altura  $h_i$

$$r_i = r_d + tg \alpha (h - h_i) ,$$



con lo cual se obtiene:

$$\frac{\pi (r_d + \operatorname{tg} \alpha (h - h_i))^2}{dt} dh_i = -\sqrt{2g h_i} S_s$$

cuyas variables son  $h_i$  y  $t$ .

Agrupando variables e integrando  $h_i$  entre los límites 0 y  $h$ , y el tiempo entre 0 y  $t$ , se obtiene:

$$\pi (r_d + \operatorname{tg} \alpha (h - h_i))^2 dh_i = -\sqrt{2g h_i} S_s dt$$

$$\left[ r_d^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha (h - h_i)^2 + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha (h - h_i) \right] dh_i = -\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi} h_i^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\left[ r_d^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha (h^2 - 2 h h_i + h_i^2) + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha h - 2 r_d \operatorname{tg} \alpha h_i \right] dh_i = -\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi} h_i^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\int_h^0 \left[ \frac{r_d^2}{h_i^{\frac{1}{2}}} + \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{(h^2 - 2 h h_i + h_i^2)}{h_i^{\frac{1}{2}}} + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h}{h_i^{\frac{1}{2}}} - 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h_i}{h_i^{\frac{1}{2}}} \right] dh_i = \int_0^t -\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi} dt$$

$$\left[ r_d^2 \frac{h_i^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \operatorname{tg}^2 \alpha \left( h^2 \frac{h_i^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 h \frac{h_i^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{h_i^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha h \frac{h_i^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h_i^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_h^0 = \left[ -\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi} t \right]_0^t$$

$$-\left( r_d^2 \frac{h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \operatorname{tg}^2 \alpha \left( \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = -\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi} t$$

Podemos aislar el valor de  $t$  en función de todas las demás variables que son conocidas.

$$t = \left( r_d^2 \frac{h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \operatorname{tg}^2 \alpha \left( \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi}}$$

Y, sustituyendo los valores, se obtiene:

$$t = \left( 0,1^2 \operatorname{m}^2 \frac{1^{\frac{1}{2}} \operatorname{m}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 0,268^2 \left( \frac{1^{\frac{5}{2}} \operatorname{m}^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \frac{1^{\frac{5}{2}} \operatorname{m}^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1^{\frac{5}{2}} \operatorname{m}^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + \right. \\ \left. + 2 \cdot 0,1 \operatorname{m} \cdot 0,268 \frac{1^{\frac{3}{2}} \operatorname{m}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 0,1 \operatorname{m} \cdot 0,268 \frac{1^{\frac{3}{2}} \operatorname{m}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \times \frac{1}{\sqrt{2 \times 9,81 \operatorname{m}/\operatorname{s}^2} \frac{0,1 \operatorname{m}^2}{\pi}}$$

$t = 1,19s$

### Problema 14

#### Enunciado

Sea un fluido no viscoso de densidad constante que fluye a través de un difusor bidimensional cuya profundidad es  $b$ , se sabe que la velocidad tiene únicamente componente radial  $V = N/r$ ; y que  $N = cte$ . Halle el caudal volumétrico para una de las superficies siguientes:  $r = r_1 = cte$ . ;  $x = x_1 = cte$ .

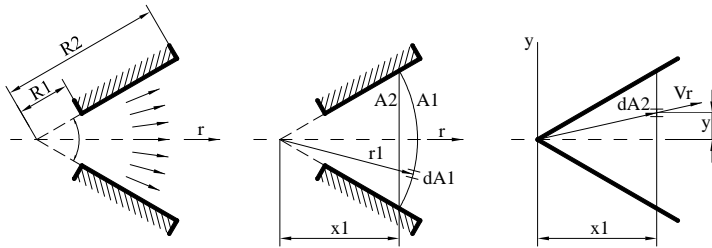


Fig. 14.1

#### Resolución

El caudal volumétrico viene dado por:

$$Q = \int_S V_n dA$$

Para la superficie  $r = r_1 = cte$ .

$V$  es perpendicular al elemento diferencial de área  $d_A$ ;

$$d_A = b r_1 d\theta$$

Sustituyendo:

$$Q = \int_{-\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{N}{r_1} b r_1 d\theta = [N b \theta]_{-\theta_{\min}}^{\theta_{\max}}$$

$Q = N b (\theta_{\max} + \theta_{\min}) = 2 N b \theta_{\max}$ , puesto que el difusor es simétrico respecto al eje X.

El caudal másico será  $\dot{m} = Q\rho = \rho 2 N b \theta_{\max}$

Para hallar el caudal en la superficie  $x = x_1$ , se deberán utilizar las relaciones: (v. figura 14.1):

$$V_n = V \cos \theta; dA = b dy; r = \sqrt{x_1^2 + y^2}$$



Integrando únicamente en la mitad superior:

$$Q = 2 \int_0^{y_{\max}} V \cos \theta (b dy)$$

$$Q = 2b \int_0^{y_{\max}} \frac{N \cdot \cos \theta}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} dy$$

$$\cos \theta = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}}$$

$$Q = 2b \int_0^{y_{\max}} \frac{N \cdot x_1}{x_1^2 + y^2} dy = 2b N x_1 \left( \frac{1}{x_1} \arctg \left( \frac{y}{x_1} \right) \right)_0^{y_{\max}}$$

$$Q = 2b N \arctg \left( \frac{y_{\max}}{x_1} \right) ; \quad \text{tg } \theta_{\max} = \frac{y_{\max}}{x_1}$$

$$Q = 2b N \arctg(\text{tg}(\theta_{\max}))$$

$Q = 2b N \theta_{\max}$  que es la misma respuesta que en el caso anterior, lo cual es lógico, pues para una sección de paso que abarque todo el campo de fluido y siempre que la densidad sea constante el caudal volumétrico será constante.

## Problema 15

### Enunciado

Halle la ecuación diferencial que determina el tiempo de vaciado del depósito de la figura, donde se han realizado varios agujeros para la salida del fluido:

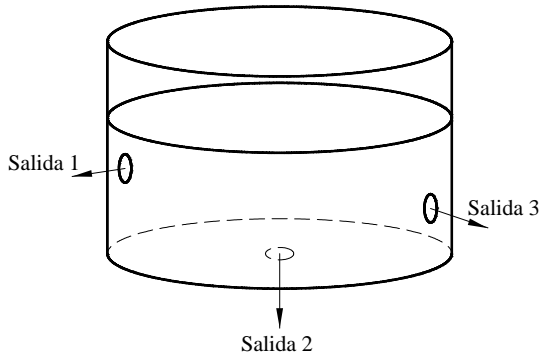
Punto 1. Diámetro  $D_1$ ; altura del centro del agujero respecto a la base del depósito  $H_1$ .

Punto 2. Diámetro  $D_2$ ; agujero en la base.

Punto 3. Diámetro  $D_3$ ; altura del centro del agujero respecto a la base del depósito  $H_3$ .

$H$ =Nivel del líquido en el depósito para  $t=0$ .

Fig. 15.1



### Resolución

Para hallar la ecuación diferencial que determina el tiempo de vaciado del depósito de la figura, se aplicará la ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \, dV + \int_{sc} \rho \, \vec{v} \, d\vec{s} = 0 \quad ; \quad dV = s_D \, dh$$

$S_D$  = Superficie del depósito cilíndrico

Aplicando la ecuación de continuidad al depósito de la figura 15.1, se tiene:

$$\rho s_D \frac{\partial h}{\partial t} + \int_{s_1} (\rho \sqrt{2g(h-H_1)}) \, ds_1 + \int_{s_2} (\rho \sqrt{2g h}) \, ds_2 + \int_{s_3} (\rho \sqrt{2g(h-H_3)}) \, ds_3 = 0$$

Resolviendo las integrales, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\rho s_D \frac{dh}{dt} + (\rho \sqrt{2g(h-H_1)}) s_1 + (\rho \sqrt{2g h}) s_2 + (\rho \sqrt{2g(h-H_3)}) s_3 = 0$$

con lo cual, la ecuación diferencial requerida tendrá la forma:

$$-\frac{dt}{s_D} = \frac{dh}{(\sqrt{2g(h-H_1)}) s_1 + (\sqrt{2g h}) s_2 + (\sqrt{2g(h-H_3)}) s_3}$$

Véase que para la resolución de esta ecuación diferencial se dan tres casos posibles. El primer caso se define para un nivel de líquido en el depósito comprendido entre una altura  $H$  genérica y una altura  $H_1$ . El nivel del líquido en el depósito para el segundo caso estará comprendido entre las alturas  $H_1$  y  $H_3$ . Cuando el nivel del líquido esté comprendido entre las alturas  $H_3$  y  $0$ , se definirá el tercer caso.



Así, para el primer caso, la ecuación diferencial anterior se integrará entre los límites:

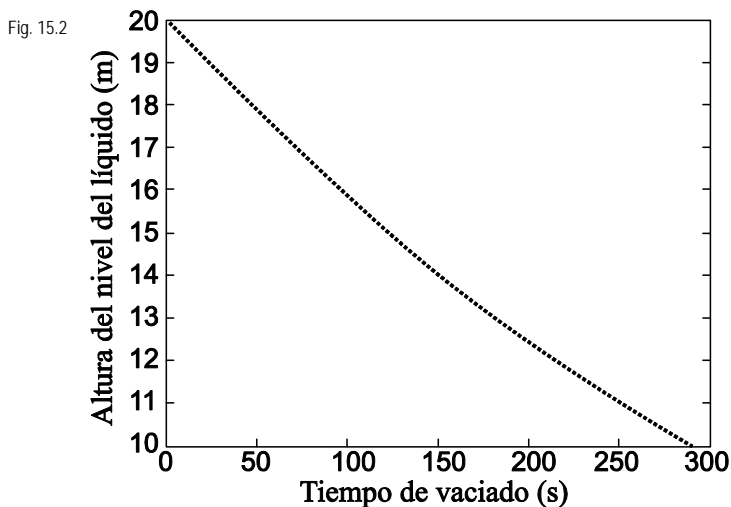
$$\int_0^t \frac{dt}{s_D} = \int_H^{H_1} \frac{dh}{(\sqrt{2g(h-H_1)})s_1 + (\sqrt{2gh})s_2 + (\sqrt{2g(h-H_3)})s_3}$$

Dicha ecuación debe resolverse numéricamente y de ella se obtendrá la variación temporal  $t_1$  del nivel del líquido en el depósito entre una altura genérica  $H$  y la altura  $H_1$ .

Esta ecuación se resolvió utilizando el método Runge-Kutta de cuarto orden y para los siguientes valores:

$$H=20 \text{ m}; \quad H_1=10\text{m}; \quad H_3=5 \text{ m}; \quad S_1 = S_2 = S_3 = 0,0001 \text{ m}^2; \quad S_0 = 0,5 \text{ m}^2.$$

La variación temporal de la altura del nivel del líquido en el depósito entre los valores inicial  $H = 20 \text{ m}$  y el valor final  $H_1 = 10 \text{ m}$  se detalla en la gráfica siguiente.



Cuando el nivel del líquido llegue a la salida 1, la ecuación diferencial quedará: (Caso 2).

$$\int_0^t \frac{dt}{s_D} = \int_{H_1}^{H_3} \frac{dh}{(\sqrt{2gh})s_2 + (\sqrt{2g(h-H_3)})s_3}$$

Obsérvese que se ha situado el origen de tiempos cuando el nivel del líquido en el depósito es  $H_1$ .

La ecuación diferencial anterior se puede dar como

$$\int_0^t \frac{dt}{s_D} = \int_{H_1}^{H_3} \frac{dh}{(a\sqrt{h}) + (b\sqrt{h-c})}$$

donde:  $a = S_2\sqrt{2g}$ ;  $b = S_3\sqrt{2g}$ ;  $c = H_3$ ,

Integrando, se obtiene:

$$-\frac{t_2}{S_D} = \left[ \frac{2a\sqrt{h}}{-b^2 + a^2} + \frac{2bac \operatorname{arctg} \left( \frac{(-b^2 + a^2)\sqrt{h-c}}{a\sqrt{c(-b^2 + a^2)}} \right)}{(a-b)(a+b)\sqrt{c(-b^2 + a^2)}} \right]_{H_1}^{H_3} - \left[ \frac{2b\sqrt{h-c}}{-b^2 + a^2} - \frac{2bac \operatorname{arctg} \left( \frac{(-b^2 + a^2)\sqrt{h}}{b\sqrt{c(-b^2 + a^2)}} \right)}{(a-b)(a+b)\sqrt{c(-b^2 + a^2)}} \right]_{H_1}$$

ecuación que caracteriza el tiempo de vaciado del depósito cuando el nivel del líquido esté comprendido entre los valores  $H_1$  y  $H_3$ .

Por otro lado, cuando la altura del nivel del líquido llegue a la salida 3, la ecuación diferencial aplicable será

$$\int_0^t \frac{dt}{s_D} = \int_{H_3}^0 \frac{dh}{(\sqrt{2gh})s_2}$$

$$t_3 = S_D \frac{2\sqrt{H_3}}{S_2\sqrt{2g}}$$

Véase que el tiempo  $t_1$  es relevante cuando la altura del líquido en el depósito oscila entre una altura genérica y  $H_1$ ; el tiempo  $t_2$  caracteriza la variación temporal del nivel del fluido en el depósito para alturas comprendidas entre  $H_1$  y  $H_3$ , mientras que el tiempo  $t_3$  caracterizará el nivel del líquido para alturas comprendidas entre  $H_3$  y cero.

## Problema 16

### Enunciado

La densidad del gas que fluye a través de un conducto de sección constante  $S$  y longitud  $X$  varía de acuerdo con la ley:

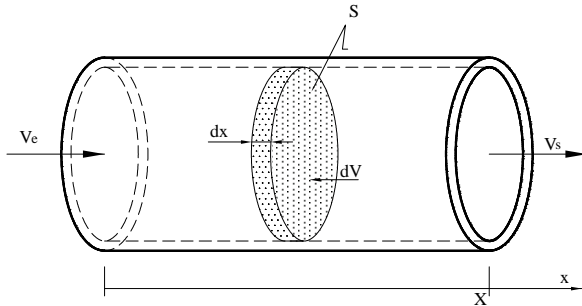


$$\rho = \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) \text{sen} \frac{v_1 t}{X} \quad \frac{X}{v_1} \frac{\pi}{2} > t \geq 0$$

$$0 \leq x \leq X$$

Donde  $v_1$  y  $\rho_1$  son la velocidad y la densidad de referencia; por ejemplo, la velocidad y la densidad del fluido a la entrada del conducto.

Fig. 16.1



Halle la diferencia de flujo másico que entra y sale del conducto en función del tiempo.

### Resolución

La ecuación de continuidad se expresa:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{ss} \rho \vec{v} d\vec{s} + \int_{se} \rho \vec{v} d\vec{s} ;$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV = - \int_{ss} \rho \vec{v} d\vec{s} - \int_{se} \rho \vec{v} d\vec{s} = \int_{se} \rho v \cos \theta \cdot ds - \int_{ss} \rho v \cos \theta \cdot ds ;$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV = \dot{m}_e - \dot{m}_s ;$$

La variación de flujo másico se obtendrá de resolver esta ecuación, de donde:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_0^X \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) \text{sen} \frac{v_1 t}{X} \cdot S dx = \frac{d}{dt} \rho_1 \text{sen} \frac{v_1 t}{X} S \int_0^X \left(1 - \frac{x}{2X}\right) dx =$$

$$= \frac{d}{dt} \rho_1 \text{sen} \frac{v_1 t}{X} S \left[ x - \frac{x^2}{4X} \right]_0^X = \frac{d}{dt} \rho_1 \text{sen} \frac{v_1 t}{X} \cdot S \frac{3}{4} X =$$



$$= S X \rho_1 \frac{3}{4} \cos \frac{v_1 t}{X} \frac{v_1}{X} ; \text{ simplificando}$$

$$\dot{m}_e - \dot{m}_s = \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho d\forall = S \rho_1 \frac{3}{4} v_1 \cos \frac{v_1 t}{X}$$

Por otro lado, si en lugar de realizar el proceso de integración inicialmente y luego el de derivación se realiza a la inversa, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho d\forall = \frac{d}{dt} \int_0^x \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) \text{sen} \frac{v_1 t}{X} \cdot S dx = \int_0^x S \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) dx \left[ \frac{d}{dt} \text{sen} \frac{v_1 t}{X} \right] =$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho d\forall = \int_0^x S \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) dx \left[ \cos \frac{v_1 t}{X} \frac{v_1}{X} \right] =$$

Integrando:

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho d\forall = S \rho_1 \left(1 - \frac{x}{4X}\right)_0^x \left[ \cos \frac{v_1 t}{X} \frac{v_1}{X} \right] = S \rho_1 \frac{3}{4} v_1 \cos \frac{v_1 t}{X}$$

Obsérvese que en ambos casos se obtiene el mismo resultado.

## Problema 17

### Enunciado

En el esquema de la figura 17.1, halle la ecuación diferencial que determina la variación temporal de presión en la cámara del cilindro, conocidas las ecuaciones de los caudales de fuga,  $Q_{L1}$ ;  $Q_{L2}$ .

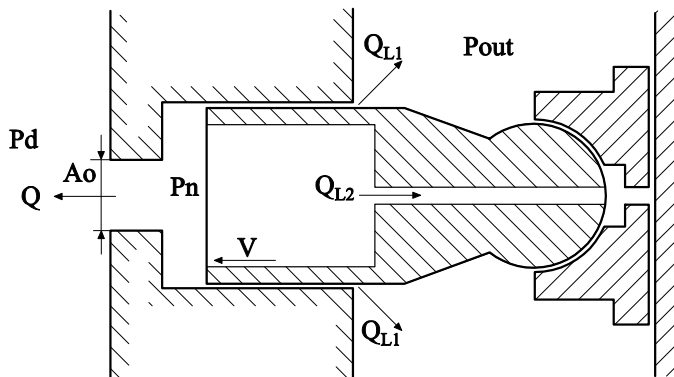


Fig. 17.1



### Resolución

La ecuación de continuidad en modo integral y régimen transitorio se enuncia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \, dV + \oint_{sc} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \, dV + \int_{s_0} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} + \int_{s_1} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} + \int_{s_2} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} = 0$$

puesto que la densidad y el volumen de control dependen del tiempo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \int_{vc} dV + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} dV + \int_{s_0} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} + \int_{s_1} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} + \int_{s_2} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla + \rho \frac{\partial \nabla}{\partial t} + \dot{m}_{salida 0} + \dot{m}_{salida 1} + \dot{m}_{salida 2} = 0$$

$$\beta = -\nabla \frac{dp}{dV} = -\frac{\nabla}{m} \frac{dp}{d\left(\frac{\nabla}{m}\right)} = -v \frac{dp}{dv} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \rho \frac{dp}{d\rho};$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\beta}; \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\beta} \frac{dp}{dt};$$

$$\frac{\rho}{\beta} \nabla \frac{dp}{dt} + \rho \frac{\partial \nabla}{\partial t} + \rho Q_{salida 0} + \rho Q_{L1} + \rho Q_{L2} = 0$$

Despejando la densidad:

$$\frac{\nabla}{\beta} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial \nabla}{\partial t} + Q_{outlet 0} + Q_{L1} + Q_{L2} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\beta}{\nabla} \left( -Q_{salida 0} - Q_{L1} - Q_{L2} - \frac{\partial \nabla}{\partial t} \right) \quad (A)$$

$$\frac{d\nabla}{dt} = S \frac{dx}{dt} = S V_{velocidad};$$

La variación temporal de presión en la cámara cilíndrica puede ser determinada si se conocen las ecuaciones de los caudales de fuga en función de la presión  $P_n$  necesitándose también el valor temporal del volumen de la cámara del cilindro.

A modo de ejemplo, y para el pistón de la figura 17.2, estas ecuaciones se podrían dar de la siguiente manera:

Suponiendo que en  $t = 0$  el pistón se halla en el PMI (punto muerto inferior), el volumen temporal de la cámara del cilindro se puede dar como:

$$V = V_0 + S_{\text{pistón}} R_p \tan(\alpha) (\cos(\omega t) - 1)$$

Y por tanto:

$$\frac{dV}{dt} = -S_{\text{pistón}} R_p \tan(\alpha) \text{seno}(\omega t) \omega$$

Donde:

$V_0$  es el volumen del cilindro en el punto muerto inferior.

$\omega$  = velocidad de giro de la bomba.

$R_p$  = radio del plato inclinado.

$\alpha$  = ángulo de inclinación del plato inclinado.

El caudal de salida del fluido hacia el exterior de la bomba se da por:

$$Q_{\text{salida } 0} = \text{signo de}(P_{\text{in}} - P_{\text{Tank}}) C_d A_0 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_{\text{in}} - P_{\text{Tank}})}$$

$C_d$  = coeficiente de descarga

$A_0$  = Área de salida.

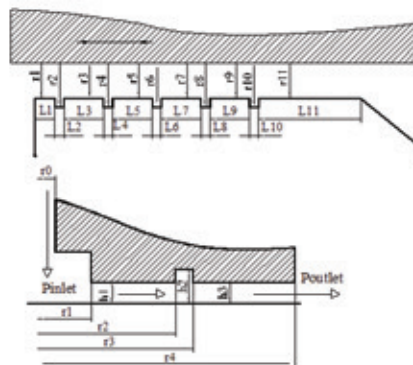
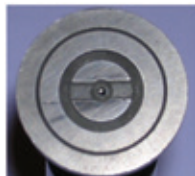


Fig. 17.2  
Conjunto pistón  
y patín  
deslizante

Para el pistón de la figura 17.2, el caudal de fugas temporal viene dado por la ecuación:

$$Q_{L1} = \pi D \left[ \frac{h_1 R_p \tan \alpha (-\text{sen}(\omega t)) \omega}{2} \right] +$$



$$-\frac{\pi D}{12} \left[ \frac{P_{\text{Tank}} - P_{\text{in}} - 6R_p \tan \alpha (-\sin(\omega t)) \omega \mu \left[ \frac{h_{10} - h_1}{h_{10}^3} \right] (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10})}{\frac{\mu}{h_{11}^3} (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{11}) - \frac{0,0195}{2} - R_p \tan \alpha \cos(\omega t)} + \mu \left[ \left( \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right) (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \right] \right]$$

Obsérvese que el caudal depende de la velocidad temporal del pistón y de la longitud del pistón en el interior del cilindro.

Para el patín deslizante de la figura 17.2, y considerando que el patín se desliza paralelo al plato inclinado, el caudal de fugas vendrá dado por:

$$Q_{L2} = \frac{\pi}{6\mu} \frac{P_{\text{in}} - P_{\text{Tank}}}{\frac{1}{h_1^3} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{h_2^3} \ln \left( \frac{r_3}{r_2} \right) + \frac{1}{h_3^3} \ln \left( \frac{r_4}{r_3} \right)}$$

La integración de la ecuación diferencial (A) con las correspondientes ecuaciones asociadas da lugar a la variación de presión en la cámara del pistón, en función del tiempo.

## Problema 18

### Enunciado

El esquema que se muestra a continuación representa un pistón que impulsa fluido hacia un acumulador. Para el estado inicial, se conocen tanto la posición del pistón como la del émbolo del acumulador, sus secciones  $S_{\text{pistón}}$ ;  $S_{\text{émbolo}}$ , así como las condiciones iniciales de los dos fluidos:

$$P_0; T_0; \rho_0; h_0; \quad P_{N_2 0}; T_{N_2 0}; \rho_{N_2 0}; \forall_{N_2 0}$$

La velocidad de desplazamiento temporal del pistón se puede dar como  $V = K \text{seno}(t)$ , donde  $K$  es una constante a determinar. La variación temporal del volumen del cilindro inferior se representa:  $\forall = \frac{S_{\text{pistón}} h_0}{2} (1 + \cos(t))$ , donde  $h_0$  es la longitud inicial de la cámara del pistón.

Se pide:

1. Hallar la ecuación diferencial que caracteriza la variación temporal de la presión en la cámara del pistón, sabiendo que la válvula (A) situada en el acumulador está abierta y permite que pequeñas cantidades de fluido fluyan hacia la atmósfera. Considerar que

este caudal de fugas es pequeño, comparado con el flujo proveniente del pistón. Considerar asimismo que el émbolo que separa el nitrógeno del aceite esta bloqueado y no se puede mover. Determinar la constante K.

2. Si la válvula (A) está cerrada, y Para el caso en que el émbolo que separa el aceite y el nitrógeno esté inmóvil, determinar la ecuación que caracteriza la variación temporal de presión en el sistema.

3. Si el émbolo del acumulador tiene en la parte superior nitrógeno a presión, la válvula (A) está cerrada, y dicho émbolo se puede mover libremente, determinar el conjunto de ecuaciones diferenciales que caracteriza el desplazamiento temporal del émbolo. Razonar las hipótesis realizadas.

4. Determinar cómo varían la posición del émbolo y la presión del nitrógeno con el tiempo, si se tiene en cuenta que el aceite se puede considerar incompresible. La válvula A está cerrada.

Recordar que el fluido ( $N_2$ ), es un gas ideal.

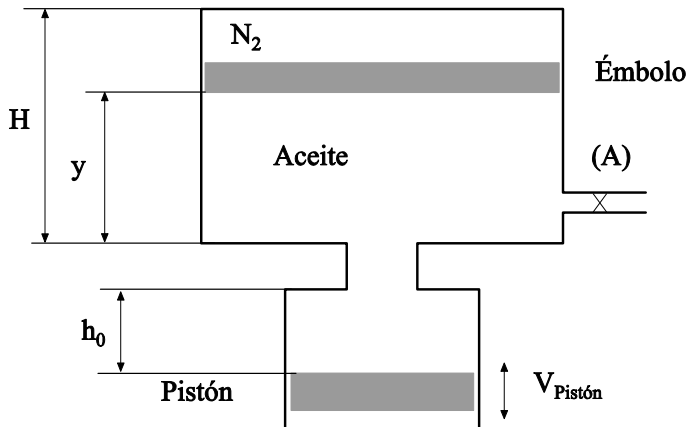


Fig. 18.1  
Conjunto de  
pistón y  
acumulador

### Resolución

1. La ecuación de continuidad en modo integral establece

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \cdot dV + \oint_{sc} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

Según el enunciado, el volumen de la parte superior se considerará constante:

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot S_{piston} \cdot \frac{\partial h_{piston}}{\partial t} + \rho \cdot V_s \cdot S_s = 0$$



$$(\nabla_{\text{embolo}} + \nabla_{\text{piston}}) \cdot \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot S_{\text{piston}} \cdot V_{\text{piston}} + \rho \cdot V_s \cdot S_s = 0$$

Considerando que el fluido que atraviesa la válvula mantiene su densidad constante, la velocidad del fluido por la válvula se puede dar en función del gradiente de presiones entre extremos de la misma.

$$\frac{d\rho}{dt} = \left[ -\rho \cdot S_{\text{piston}} \cdot V_{\text{piston}} - \rho \cdot S_{\text{salida}} \sqrt{\frac{2 \cdot (P_{\text{aceite}} - P_{\text{ext}})}{\rho}} \right] \cdot \frac{1}{(\nabla_{\text{embolo}} + \nabla_{\text{piston}})}$$

La relación entre la variación de densidad y la variación de presión, viene dada en función del módulo de compresibilidad volumétrico, de donde

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\beta} \cdot \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dP_{\text{aceite}}}{dt} = \left[ -S_{\text{piston}} \cdot K \cdot \text{sen}(t) - S_{\text{salida}} \sqrt{\frac{2 \cdot (P_{\text{aceite}} - P_{\text{ext}})}{\rho}} \right] \cdot \frac{\beta}{(\nabla_{\text{embolo}} + \nabla_{\text{piston}})}$$

Esta es la ecuación diferencial que da la presión del aceite en función del tiempo. Se ha considerado que, a través de la válvula, el flujo es siempre saliente.

A priori, en esta ecuación, la densidad del aceite se considerará la inicial y constante, aunque la mejor manera de afrontar el tema es conocer la ecuación que determina la variación de densidad con la presión.

Véase asimismo que, según el enunciado  $\nabla_{\text{piston}} = \frac{S_{\text{piston}} \cdot h_0}{2} \cdot (1 + \cos(t))$

El valor de la constante K se puede determinar:

$$\frac{\partial \nabla_{\text{piston}}}{\partial t} = \frac{S_{\text{piston}}}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial t} = S_{\text{piston}} V_{\text{piston}};$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial \nabla_{\text{piston}}}{\partial t} = \frac{S_{\text{piston}} h_0}{2} (-\text{sen}(t));$$

$$\frac{S_{\text{piston}} h_0}{2} (-\text{sen}(t)) = S_{\text{piston}} K \text{sen}(t); \quad K = -\frac{h_0}{2}$$

2. Cuando la válvula (A) está cerrada y el émbolo se mantiene estático, la presión temporal del aceite será



$$\nabla \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot (\nabla_{\text{émbolo}} + \nabla_{\text{pistón}}) = 0$$

$$\nabla \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$(\nabla_{\text{émbolo}} + \nabla_{\text{pistón}}) \cdot \frac{dP}{dt} \cdot \frac{\rho}{\beta} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = - \frac{S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \text{sen}(t) \cdot \beta}{\nabla_{\text{émbolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2} \cdot (1 + \cos(t))}$$

Ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dP}{dt} = - \frac{C \cdot \text{sen}(t)}{A + B \cdot \cos(t)} \quad \text{donde:} \quad C = S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \beta$$

$$A = \nabla_{\text{émbolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2}$$

$$B = \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2}$$

$$\int_{P_{\text{in}}}^P P = \int_{t=0}^t - \frac{C \cdot \text{sen}(t)}{A + B \cdot \cos(t)} \longrightarrow P - P_{\text{inicial}} = \frac{C}{B} \cdot \ln(A + B \cdot \cos(t))_0^t = \frac{C}{B} \cdot \ln\left(\frac{A + B \cdot \cos(t)}{A + B}\right)$$

Variación temporal de la presión:

$$P = P_{\text{inicial}} + \frac{C}{B} \cdot \ln\left(\frac{A + B \cdot \cos(t)}{A + B}\right)$$

3. Puesto que ahora el émbolo superior se desplaza, de la ecuación de continuidad se obtiene

$$\nabla_{(e+p)} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot (\nabla_{\text{émbolo}} + \nabla_{\text{pistón}}) = 0$$

$$(\nabla_{\text{émbolo}} + \nabla_{\text{pistón}}) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial \nabla_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial \nabla_{\text{pistón}}}{\partial t} = 0$$

$$(\nabla_{\text{émbolo}} + \nabla_{\text{pistón}}) \cdot \frac{dP}{dt} \cdot \frac{\rho}{\beta} + \rho \cdot S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy}{dt} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = \left[ -S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} - S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy_{\text{émbolo}}}{dt} \right] \frac{\beta}{\left( S_{\text{émbolo}} \cdot y_{\text{émbolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2} \cdot (1 + \cos(t)) \right)}$$



donde:

$$S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \nabla_{\text{émbolo}}}{\partial t}$$

Las variables para este caso son: presión aceite; presión N<sub>2</sub>; y émbolo; t.

Para un proceso adiabático, la relación presión-volumen del nitrógeno será

$$P_{N_2} = P_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \left( \frac{\nabla_{N_2 \text{ inicial}}}{\nabla_{N_2}} \right)^\gamma$$

$$\nabla_{N_2} = \nabla_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \left( \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$S_{\text{émbolo}} (H - y) = \nabla_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \left( \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

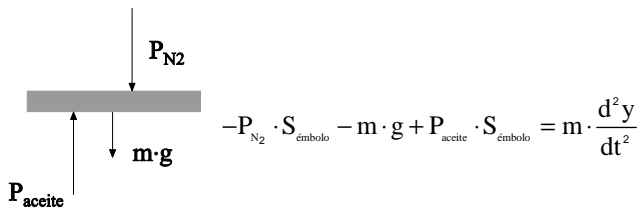
Diferenciando esta ecuación respecto al tiempo, se tiene

$$\frac{d\nabla_{N_2}}{dt} = -S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} = -\nabla_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left( \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \cdot \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}^2} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt}$$

$$\frac{d\nabla_{N_2}}{dt} = S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} = \nabla_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{(P_{N_2 \text{ inicial}})^{\frac{1}{\gamma}}}{(P_{N_2})^{\frac{1}{\gamma}+1}} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt}$$

El balance de fuerzas en el émbolo se enuncia del modo siguiente: considérese que el émbolo tiene una masa “m”.

Fig. 18.2  
Diagrama de  
fuerzas del  
émbolo



Sistema de ecuaciones que ha de resolverse conjuntamente y numéricamente.

4. Si el fluido se considerase incompresible:

$$\rho \cdot \frac{\partial \nabla_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial \nabla_{\text{pistón}}}{\partial t} = 0$$





$$\rho \cdot \frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$

$$\rho S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} + \rho S_{\text{pistón}} K \text{sen } t = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-S_{\text{pistón}} K \text{sen } t}{S_{\text{émbolo}}}$$

$$\int_{Y_{\text{inicial}}}^{Y_{\text{final}}} dy = \int_{t=0}^t \frac{-S_{\text{pistón}} K \text{sen } t}{S_{\text{émbolo}}} dt$$

$$Y_{\text{final}} - Y_{\text{inicial}} = \frac{S_{\text{pistón}} K}{S_{\text{émbolo}}} [\cos t - 1]$$

Puesto que el Nitrógeno es un gas ideal se tiene:

$$\left( \frac{\forall_{N_2}}{\forall_{N_2 \text{ inicial}}} \right)^\gamma = \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}}$$

$$\forall_{N_2} = \left( \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \forall_{N_2 \text{ inicial}}$$

Teniendo presente que

$$\frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t} = - \frac{\partial \forall_{N_2}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\forall_{N_2}}{dt} &= - \frac{d\forall_{\text{émbolo}}}{dt} = -S_{\text{émbolo}} \frac{dy_{\text{émbolo}}}{dt} = S_{\text{pistón}} \frac{dh_{\text{pistón}}}{dt} = S_{\text{pistón}} V_{\text{pistón}} = \\ &= -\forall_{N_2 \text{ inici}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left( \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right)} \cdot \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}^2} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt} \end{aligned}$$

$$-\forall_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left( P_{N_2 \text{ inicial}} \right)^{\left( \frac{1}{\gamma} \right)} \cdot \frac{1}{P_{N_2}^{\left( \frac{1}{\gamma} + 1 \right)}} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt} = S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \text{sen}(t)$$

$$-\forall_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left( P_{N_2 \text{ inicial}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \int_{P_{N_2 \text{ inicial}}}^{P_{N_2}} \frac{dP_{N_2}}{P_{N_2}^{\left( \frac{1}{\gamma} + 1 \right)}} = S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \int_{t=0}^t \text{sen}(t) \cdot dt$$

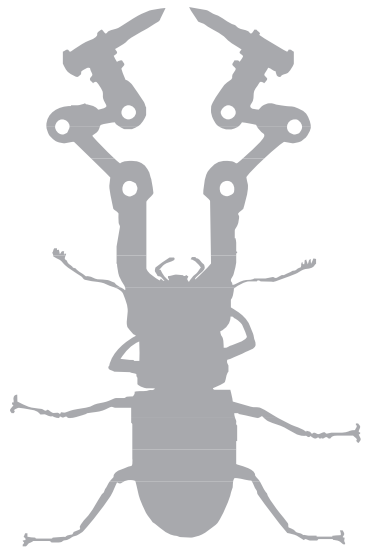


$$\begin{aligned}
 -\forall_{N_2 \text{ inicial}} \frac{1}{\gamma} \left( P_{N_2 \text{ inicial}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{P_{N_2}^{-\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)+1}}{-\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)+1} \right]_{P_{N_2 \text{ inicial}}}^{P_{N_2}} &= S_{\text{pistón}} K [-\cos t]_0^t \\
 -\forall_{N_2 \text{ inicial}} \frac{1}{\gamma} \left( P_{N_2 \text{ inicial}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{P_{N_2}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)} - P_{N_2 \text{ inicial}}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}}{-\frac{1}{\gamma}} &= -S_{\text{pistón}} K [\cos t - 1] \\
 P_{N_2}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)} &= \frac{-S_{\text{pistón}} K [\cos t - 1]}{\forall_{N_2 \text{ inicial}} \left( P_{N_2 \text{ inicial}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} + P_{N_2 \text{ inicial}}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}
 \end{aligned}$$

Reordenando, se obtiene

$$P_{N_2}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}}{1 - \frac{S_{\text{pistón}} K [\cos t - 1]}{\forall_{N_2 \text{ inicial}}}}$$

ecuación que relaciona la variación de la presión del nitrógeno con el tiempo.



→ 5



## Ecuación de cantidad de movimiento

### Problema 19

#### Enunciado

El chorro de agua que sale por una tobera es de 10 mm de diámetro y choca contra una superficie semiesférica. Halle la fuerza que hay que realizar para que la superficie semiesférica no sufra desplazamiento alguno. Aplíquelo para el caso de que el caudal volumétrico entrante sea de  $0,001 \text{ m}^3/\text{s}$ . Comente las hipótesis realizadas.

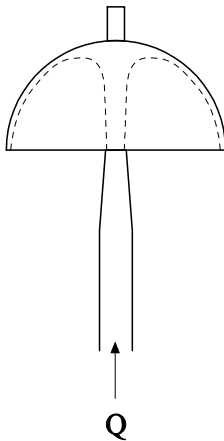
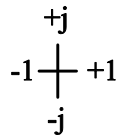


Fig. 19.1



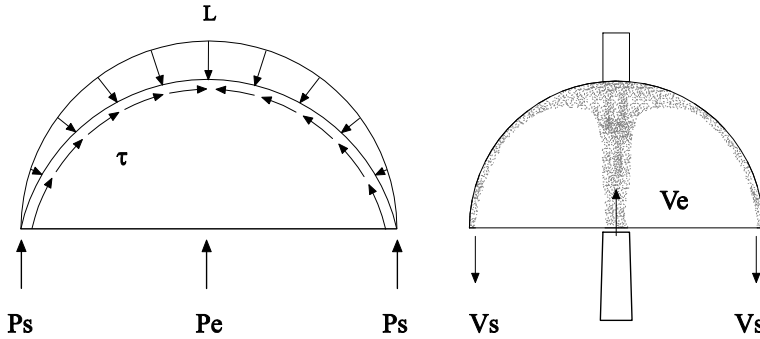
#### Resolución

El empuje que el chorro de fluido ejerce sobre la superficie semiesférica tiene la misma magnitud y sentido contrario a la fuerza que hay que ejercer para que la semiesfera no se desplace. La figura 19.2 muestra un esquema de las fuerzas actuantes sobre la semiesfera.



La ecuación de cantidad de movimiento establece:

Fig. 19.2  
Fuerzas que actúan sobre la semiesfera



$$F_y = - \int_{S_e} P d\vec{S}_j - \int_{S_s} P d\vec{S}_j + \int_{S_l} \tau d\vec{S}_j - \int_{S_l} P d\vec{S}_j = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{S_e} \rho \vec{v} \vec{n} dS}_{F_{LY}}$$

trabajando en presiones relativas y régimen permanente.

$$F_{Ly} = \int_{S_e} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_{S_s} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = -\dot{m} (v_e + v_s)$$

Suponiendo que la velocidad de entrada y salida del agua en el volumen de control es la misma.

$$F_{Ly} = -2 \dot{m} v_e = -2 \rho Q v_e$$

Siendo esta la expresión de la fuerza de reacción en función del caudal de entrada.

Para agua y un caudal entrante de  $0,001 \text{ m}^3/\text{s}$ , la fuerza tendrá un valor de:

$$F_{Ly} = -25,46 \text{ N}$$

## Problema 20

### Enunciado

Dado el esquema de la figura, que representa el flujo de un fluido, que se puede considerar incompresible, a través de una válvula de asiento cónico, y sabiendo que la relación de presiones entrada-salida es  $P_e - P_s$ ; determine la fuerza debida a la cantidad de movimiento que se ejerce sobre la corredera cónica.

Denomínese el flujo volumétrico circulante  $Q$ ; la densidad del fluido  $\rho$ ; el diámetro del conducto del flujo entrante,  $D_e$ , y la distancia perpendicular entre la superficie lateral del cono y el asiento cónico  $e$ . Supóngase que el ángulo del cono es  $\alpha$ .

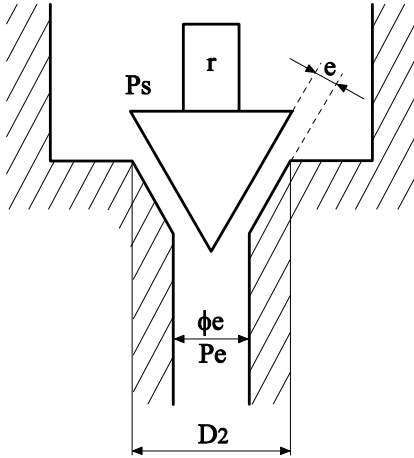


Fig. 20.1

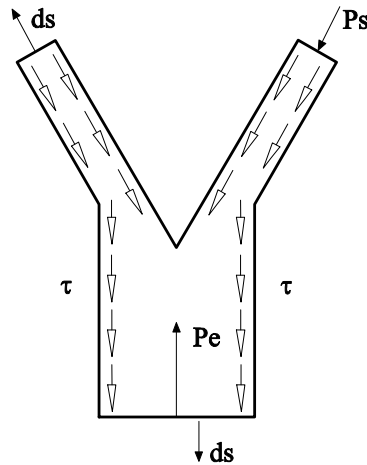


Fig. 20.2

### Resolución

Son conocidos los siguientes datos:  $Q$ ,  $\rho$ ,  $P_e$ ,  $P_s$ ,  $D_e$  y  $D_2$

La ecuación de cantidad de movimiento en dirección  $y$  será:

$$\sum F_{ext_y} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \cdot \bar{v}_y \cdot dV + \oint_{sc} \rho \cdot \bar{v}_y \cdot \bar{v}_r \cdot d\bar{s}$$

Desarrollando la expresión anterior, se obtiene:

$$\sum F_{ext_y} = \int_{sc} \rho \cdot \bar{v}_y \cdot \bar{v}_r \cdot d\bar{s} + \int_{ss} \rho \cdot \bar{v}_y \cdot \bar{v}_r \cdot d\bar{s} = -\rho \cdot v_{ye} \cdot v_e \cdot s_e + \rho \cdot v_{ys} \cdot v_s \cdot s_s$$

Resolviendo para el caso en estudio (v. figura 20.3):

$$\sum F_{ext_y} = -\rho \cdot v_e^2 \cdot s_e + \rho \cdot v_s^2 \cdot s_s \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

A continuación, se determinan las variables necesarias para resolver la expresión anterior:

$$v_e = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D_e^2}{4}} ; \quad v_s = \frac{Q}{s_s} ; \quad r_1 = r_2 - e \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right)$$

La superficie saliente tendrá un valor (v. figuras 20.4, 20.5 y 20.6) de:

$$ds = \int 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dl ; \quad ds = \int_{r_1}^{r_2} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{dr}{\sin \left( 90 - \frac{\alpha}{2} \right)} ;$$



$$s_s = \frac{2 \cdot \pi \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{\text{sen}\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2}$$

$$s_s = \frac{\pi \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{\text{sen}\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Fig. 20.3

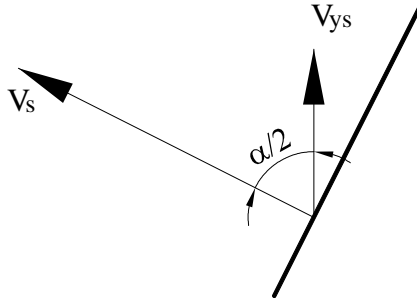


Fig. 20.4

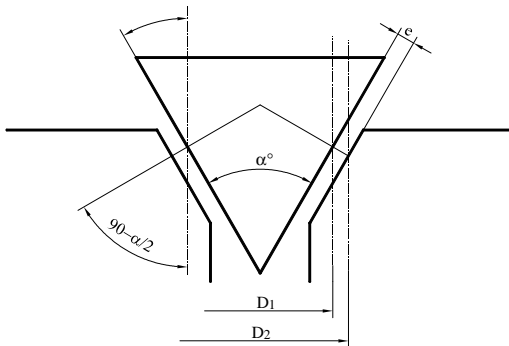


Fig. 20.5

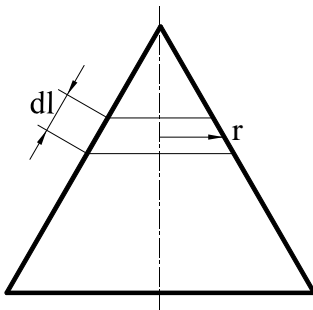
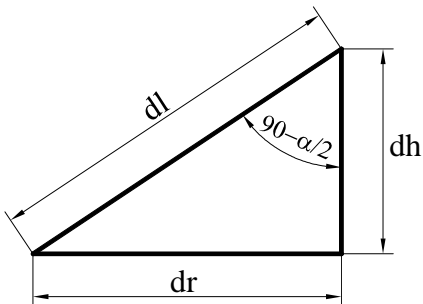


Fig. 20.6







Por otro lado, las fuerzas superficiales que actúan sobre el volumen de control se enuncian:

$$\sum F_{ext,y} = -\int_{se} P_e \cdot \vec{n} \cdot ds - \int_{ss} P_s \cdot \vec{n} \cdot ds + \underbrace{\int_{sl} P_1 \cdot \vec{n} \cdot ds + \int_{sl} \vec{\tau} \cdot ds}_{\sum F_{ly}} \quad (2)$$

con lo cual, igualando las expresiones (1) y (2), se obtiene la ecuación siguiente:

$$\sum F_{ly} = \rho \cdot s_s \cdot v_s^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \rho \cdot s_e \cdot v_e^2 + \int_{ss} P_s \cdot ds - \int_{se} P_e \cdot ds$$

Resolviendo las integrales, se llega a:

$$\begin{aligned} \sum F_{ly} = & \rho \cdot v_s^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{sen} \left( 90 - \frac{\alpha}{2} \right)} (r_2^2 - r_1^2) - \rho \cdot s_e \cdot v_e^2 - P_e \cdot s_e + \\ & + P_s \cdot \frac{\pi}{\operatorname{sen} \left( 90 - \frac{\alpha}{2} \right)} (r_2^2 - r_1^2) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

Agrupando términos, se obtiene:

$$F_{ly} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \left( 90 - \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot (P_s + \rho \cdot v_s^2) - \rho \cdot s_e \cdot v_e^2 - P_e \cdot s_e$$

## Problema 21

### Enunciado

En la figura 21.1 se ha representado la sección recta de un azud con algunas dimensiones principales. Suponiendo que en las secciones de corriente señaladas por líneas de trazos las distribuciones de velocidad son uniformes y conocidas, se pide determinar la fuerza que la corriente realiza sobre el azud. Considérese que el azud tiene una profundidad  $L$  y que la altura del nivel del líquido es de 10 m.

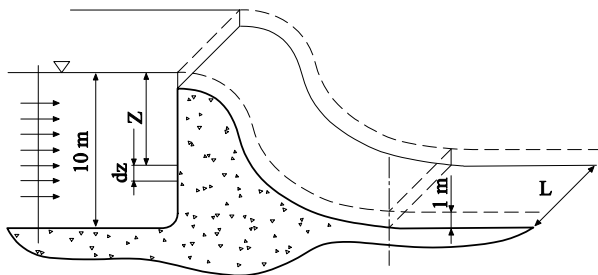


Fig. 21.1  
Sección transversal de un azud



### Resolución

Dado que el enunciado indica que las distribuciones de velocidad son uniformes, el flujo másico circulante será:

$$\dot{m} = \rho Q = \rho s v = \rho l L v = \rho L v$$

La fuerza que la corriente ejerce sobre el azud se podrá determinar aplicando el principio de conservación de cantidad de movimiento al volumen de control englobado entre las dos superficies marcadas en líneas a trazo discontinuo.

La ecuación de cantidad de movimiento en régimen permanente se establece:

$$\int_V \rho g dV + \int_{SL} \vec{\tau} ds - \int_{SL} p d\vec{s} - \int_{SE} p d\vec{s} - \int_{SS} p d\vec{s} = \oint_{SC} \rho \vec{v}_x \vec{v} d\vec{s}$$

Las fuerzas másicas no tendrán componente respecto al eje de abscisas, con lo cual:

$$F_x = \int_{SE} p d\vec{s} + \int_{SS} p d\vec{s} + \oint_{SC} \rho \vec{v}_x \vec{v} d\vec{s}$$

Los términos que definen la fuerza debida a la distribución de presiones en la entrada y la salida son:

$$F_{SE} = - \int_{SE} p d\vec{s} = - \int_0^{10} \rho g z L dz = -\rho g L \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{10} = -\rho g L 50$$

$$F_{SS} = - \int_{SS} p d\vec{s} = \int_0^1 \rho g z L dz = \rho g L \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \rho g \frac{L}{2}$$

El flujo de cantidad de movimiento entre las secciones de entrada y salida del volumen de control es:

$$\int_{SE} \rho \vec{v}_x \vec{v} d\vec{s} = -\rho v_E Q$$

$$\int_{SS} \rho \vec{v}_x \vec{v} d\vec{s} = \rho v_S Q$$

Sustituyendo los cuatro términos en la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene:

$$F_x = -\rho g L 50 + \rho g \frac{L}{2} - \rho v_E Q + \rho v_S Q$$

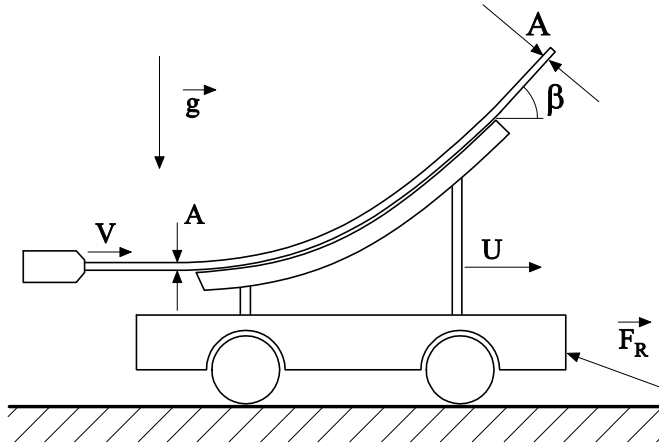
Obsérvese que la fuerza que se obtiene es la fuerza de reacción, la que ejerce el contorno sobre el fluido.

### Problema 22

#### Enunciado



El álabe curvo de la figura se mueve a una velocidad constante absoluta  $U$ . Un chorro de agua fluye de la boquilla estática con una velocidad constante  $V$ , e incide sobre el álabe. Hallar el valor de la fuerza antagonista  $F_R$  que el álabe ejerce sobre el fluido. Considerar despreciables las fuerzas gravitatorias.



**Chorro que golpea un álabe**

Fig. 22.1  
Esquema del  
chorro de fluido  
que impacta  
sobre un álabe  
móvil

### Resolución

Para resolver este problema, se debe utilizar la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, la cual se expresa del modo siguiente:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \vec{v}_i (\rho \cdot dV) + \int_{s.c} \vec{v}_i (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot dS)$$

Descomponiendo esta ecuación en sus términos direccionales X e Y,

$$\Sigma \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} v_{ix} (\rho \cdot dV) + \int_{s.c} v_{ix} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot dS) ;$$

$$\Sigma \vec{F}_y = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} v_{iy} (\rho \cdot dV) + \int_{s.c} v_{iy} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot dS)$$

Véase que, para este problema, la densidad del fluido se mantendrá constante.

La fuerza buscada será  $\vec{F}_R = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ .

Recuérdese que

$v_i$  = componente  $i$ ésima de la velocidad del fluido respecto del sistema de referencia.

$v_r$  = velocidad de entrada o salida de la superficie, velocidad del fluido respecto a la superficie de estudio.

Los sistemas de referencia pueden ser móviles o fijos.



Los volúmenes de control pueden ser deformables o indeformables.

Según lo expuesto, se tienen cuatro posibilidades para resolver este problema:

Sistema de referencia fijo, volumen de control indeformable.

Sistema de referencia móvil, volumen de control indeformable.

Sistema de referencia fijo, volumen de control deformable.

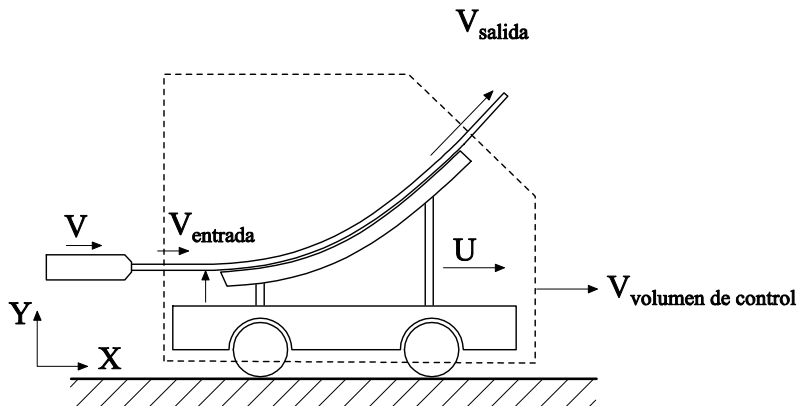
Sistema de referencia móvil, volumen de control deformable.

A continuación, se expone la resolución del problema mediante los cuatro casos propuestos.

### 1. Sistema de referencia fijo, volumen de control indeformable.

Para este caso, el volumen de control se considera indeformable y se desplaza a la misma velocidad del álabe,  $U$ , conforme a la figura siguiente.

Fig. 22.2  
Esquema para  
el caso 1



En el dibujo anterior se observa:

La velocidad a la que se desplaza el volumen de control es  $V_{v,c} = U$ .

La velocidad a la que el fluido atraviesa la superficie de entrada del volumen de control es,  $V_e = (V-U)$ , velocidad medida respecto a la superficie de control elegida.

Para hallar la velocidad a la que el fluido sale del volumen de control, respecto a la velocidad a la que entra, se utilizará la ecuación de continuidad de la masa entre la entrada y la salida del volumen de control.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_c} \rho \cdot dV + \int_{sc} \rho \cdot \vec{v}_r \cdot \vec{dS}$$

puesto que, para el volumen de control elegido, no existen variaciones temporales de masa, la ecuación de continuidad tomará la forma



$$\int_{s_s} \rho \cdot \vec{v}_s \cdot d\vec{S} = \int_{s_E} \rho \cdot \vec{v}_e \cdot d\vec{S} \Rightarrow \rho \cdot v_s \cdot S_s = \rho \cdot v_e \cdot S_e$$

Dado que las secciones de paso del fluido y las densidades del mismo a la entrada y salida son iguales, queda:

$$v_s = v_e = V - U$$

De la ecuación de cantidad de movimiento en dirección X, para un volumen de control indeformable, a velocidad y densidad constantes, se tiene

$$\sum \vec{F}_X = \int_{s_C} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S}) \rightarrow F_X = \rho \cdot v_{isx} \cdot v_s \cdot S_s - \rho \cdot v_{ieX} \cdot v_e \cdot S$$

donde:

$$V_{ieX} = V;$$

$$V_{isx} = U + (V - U) \cos(\beta) \text{ véase la figura adjunta}$$

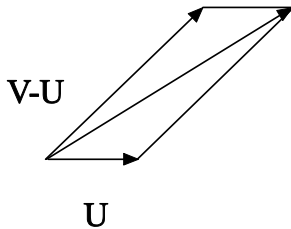


Fig. 22.3

$$F_x = \rho \cdot (U + (V - U) \cos(\beta)) \cdot (V - U) \cdot S_s - \rho \cdot V \cdot (V - U) \cdot S_e = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1)$$

Operando, se obtiene

$$F_x = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1)$$

Esta es la fuerza que el álabe ejerce sobre el fluido, fuerza de reacción. Para que el carrito se desplace a velocidad constante, las fuerzas sobre el mismo han de estar equilibradas y puesto que las fuerzas de rozamiento  $F_r$  son las que impiden el movimiento, la componente horizontal de dichas fuerzas tendrá un valor

$$F_r = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1)$$

La componente vertical de la fuerza actuante sobre el carrito se determina: (Véase que no existirán variaciones temporales de cantidad de movimiento en el volumen de control elegido).

$$\sum \vec{F}_Y = \int_{s_C} \vec{v}_{iY} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S})$$

Dado que la componente en dirección Y de la velocidad del fluido en la sección de entrada del volumen de control es nula, la ecuación se reducirá a

$$\sum \vec{F}_Y = \int_{s_s} \vec{v}_{iY} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S}) = V_{isY} (\rho v_r S_s) = \rho (V - U) \operatorname{sen} \beta (V - U) S_s$$



Puesto que se han despreciado las fuerzas másicas, esta es la ecuación que caracteriza la fuerza vertical que el carrito ejerce sobre el fluido.

2. Sistema de referencia móvil y con velocidad  $U$ , fijado al carrito.

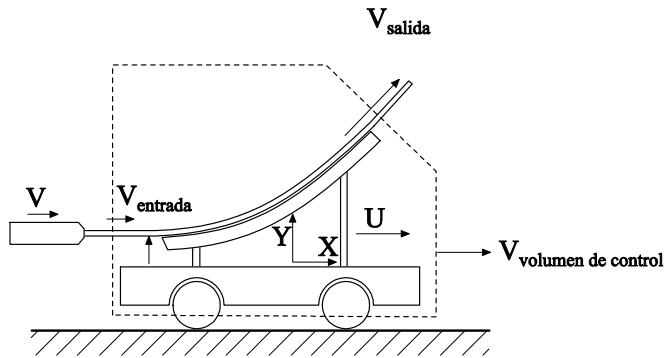
Volumen de control indeformable, que se desplaza a velocidad  $U$ , según la figura adjunta.

Las velocidades de entrada y salida del volumen de control serán las mismas que en el apartado anterior, puesto que el volumen de control es idéntico y se mueve a la misma velocidad.

$$V_s = V_e = V - U$$

En este caso, no obstante,  $V_{iex} = V - U$  ya que es la velocidad que tiene el fluido al entrar a la superficie respecto al sistema de referencia escogido.

Fig. 22.4  
Esquema para el caso 2



Para el presente caso,  $V_{isx} = (V - U) \cdot \cos(\beta)$ , que es la velocidad de salida descompuesta en dirección  $x$ . La velocidad de salida es la velocidad relativa a la superficie de salida, que en este caso se mueve a la misma velocidad que el sistema de referencia.

Volviendo a la ecuación simplificada de cantidad de movimiento en dirección  $x$ ,

$$\sum \vec{F}_x = \int_{s,c} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot \vec{v}_i \cdot d\vec{S}) \rightarrow F_x = \rho \cdot v_{isx} \cdot v_s \cdot S_s - \rho \cdot v_{iex} \cdot v_e \cdot S_e$$

$$F_x = \rho \cdot (V - U) \cos(\beta) \cdot (V - U) \cdot S_s - \rho \cdot (V - U) \cdot (V - U) \cdot S_e = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1)$$

$$F_x = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1)$$

Se obtiene la misma solución que en el apartado anterior.

La componente de la fuerza en dirección  $Y$  se determina del mismo modo que en el apartado anterior, con lo que se obtiene

$$\sum F_Y = \rho \cdot V_{isy} \cdot V_s \cdot S_s = \rho S_s (V - U) \sin \beta (V - U)$$

resultado idéntico al hallado anteriormente.



3. Sistema de referencia fijo, volumen de control deformable.

La superficie de entrada se mantiene fija  $V = 0$  y la superficie de salida es móvil y se desplaza a la velocidad del carrito  $U$ .

Para este caso, se observa que existe variación temporal del volumen de control. Las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad toman, respectivamente, las formas:

$$\Sigma \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_c} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot dV) + \int_{s.c} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S})$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_c} (\rho \cdot dV) + \int_{s.c} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S})$$

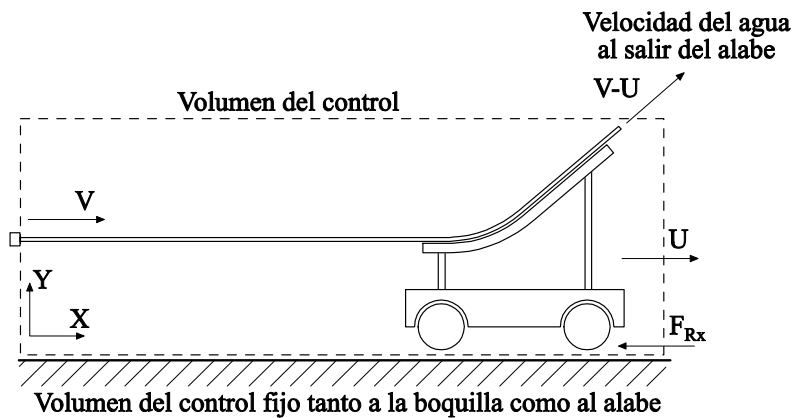


Fig.22.5  
Esquema para el caso 3

Para obtener la velocidad de salida del fluido del volumen de control, se utilizará la ecuación de conservación de la masa.

Con el fin de que se entienda mejor la resolución, se procede a dividir el volumen de control en dos volúmenes: las dimensiones del primero variarán temporalmente, mientras que las del segundo, el cual engloba el álabo, se mantendrán constantes a lo largo del tiempo, (véase la figura siguiente).

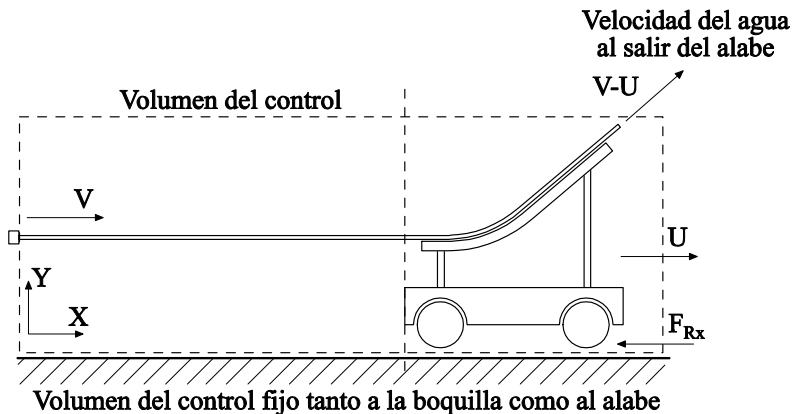


Fig. 22.6  
Esquema para el caso 3, donde se especifican los dos volúmenes de control



El volumen de control total se denomina  $\nabla_T$ , el de la izquierda  $\nabla_1$  y el de la derecha  $\nabla_2$ . La superficie que comparten  $\nabla_1$  y  $\nabla_2$  se mueve a una velocidad  $U$ .

La ecuación de conservación de la masa se expresa:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla_1} (\rho \cdot d\nabla) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla_2} (\rho \cdot d\nabla) + \int_{ST} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot \vec{dS})$$

La variación temporal de la masa en el volumen de control 2 es nula, con lo que

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla_2} (\rho \cdot d\nabla)$$

Los términos restantes de la ecuación de continuidad dan lugar a

$$0 = \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_1) - \rho \cdot v_c \cdot S_c + \rho \cdot v_s \cdot S_s \Rightarrow 0 = \rho \cdot S \cdot \frac{\partial}{\partial t} (x) - \rho \cdot v_c \cdot S_c + \rho \cdot v_s \cdot S_s$$

Se observa que  $\frac{\partial}{\partial t} (x) = U$

Y se obtiene

$$0 = \rho \cdot S \cdot U - \rho \cdot v_c \cdot S_c + \rho \cdot v_s \cdot S_s$$

Puesto que las secciones y densidades a la entrada y salida son iguales, se obtiene que la velocidad a la salida será

$$V_s = V_c - U \Rightarrow V_s = V - U$$

Véase que la velocidad a la salida del volumen de control es la misma que la obtenida en los apartados anteriores.

Aplicando ahora la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control, y para un sistema de referencia fijo

$$\Sigma \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla_{vc}} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot d\nabla) + \int_{sc} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot \vec{dS})$$

Al igual que sucedía con la ecuación de continuidad, la variación temporal de cantidad de movimiento para el volumen de control 2 es nula, de donde

$$\Sigma \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla_1} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot d\nabla) + \int_{ST} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot \vec{dS})$$

$V_{ix}$  en el término temporal corresponde a la velocidad del fluido en el volumen de control referido al sistema de referencia correspondiente, para este apartado  $V_{ix} = V$ .





$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v_1} \vec{V} (\rho \cdot dV) = V \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_1} dV = V \rho S \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_1} dx = V \rho S U.$$

El término de flujo de cantidad de movimiento a través de las superficies del volumen de control quedará

$$\int_{ST} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S}) = \rho V_{isx} V_s S_s - \rho V_{ieX} V_e S_e$$

donde

$$V_{ieX} = V; \quad V_{isx} = U + (V-U) \cos(\beta); \quad V_e = V; \quad V_s = (V-U).$$

Sustituyendo los diversos términos en la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene

$$\Sigma F_x = \rho \cdot V U S + \rho \cdot V_{isx} \cdot V_s \cdot S - \rho \cdot V_{ieX} \cdot V_e \cdot S$$

$$\Sigma F_x = \rho \cdot V U S + (U + (V-U) \cos(\beta)) \cdot (V-U) \cdot S - \rho \cdot V \cdot V \cdot S$$

de donde, operando, se obtiene

$$F_x = \rho \cdot (V-U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1)$$

Obsérvese que la solución es la misma que en los casos anteriores.

La componente de fuerza en dirección Y se obtiene de la misma forma que en los casos anteriores, dado que el volumen de control no se desplaza en dirección vertical; así:

$$\Sigma F_y = \rho V_{isy} V_s S_s = \rho S_s (V-U) \sin \beta (V-U)$$

4. Sistema de referencia móvil, volumen de control deformable, que se desplaza a velocidad U.

La superficie de entrada del volumen de control se mantiene fija, mientras que la superficie de salida se desplaza a la misma velocidad que el álabe.

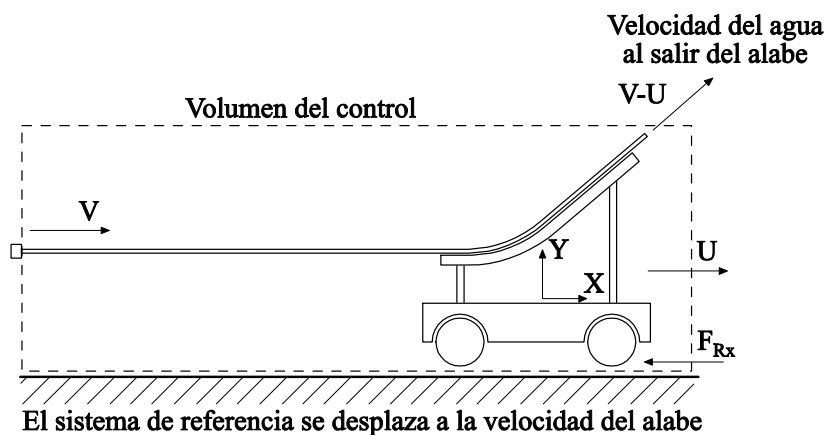


Fig. 22.7  
Esquema para  
el caso 4



El análisis de la ecuación de continuidad de la masa es el mismo que en el apartado anterior, ya que esta no depende del sistema de referencia.

$$V_s = V_e - U \Rightarrow V_s = V - U$$

Se observa que la velocidad de salida es la misma que en los apartados anteriores.

De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control, y para un sistema de referencia móvil, se tiene

$$\Sigma \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot dV) + \int_{s.c} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot dS)$$

Descomponiendo el volumen de control en uno indeformable y otro deformable, se tiene

$$\Sigma \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_1} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot dV) + \int_{sT} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot dS)$$

$V_{ix}$  en el término temporal corresponde a la velocidad del fluido en el volumen de control, referido al sistema de referencia correspondiente. Puesto que ahora el sistema de referencia es móvil, la velocidad del fluido en la zona deformable del volumen de control, medida respecto a un eje de coordenadas que se desplaza a velocidad U, es

$$V_{ix} = V - U$$

$$\Sigma \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_1} (V - U) (\rho \cdot dV) = \rho (V - U) \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_1} dV = \rho (V - U) S \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_1} dx = \rho (V - U) S U$$

Al igual que en los apartados anteriores, el término de flujo de cantidad de movimiento a través de las superficies del volumen de control se expresa del modo siguiente:

$$\int_{sT} \vec{v}_{ix} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot dS) = \rho V_{isx} V_s S_s - \rho V_{ieX} V_e S_e$$

Las velocidades entrantes y salientes del fluido respecto a las superficies del volumen de control y referidas al sistema de referencia móvil serán

$$V_{ex} = (V - U); V_e = V; V_{isx} = (V - U) \cos(\beta); V_s = (V - U).$$

Agrupando todos los términos de la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene

$$\Sigma F_x = \rho \cdot (V - U) U S + (V - U) \cos(\beta) \cdot (V - U) \cdot S - \rho \cdot (V - U) \cdot V \cdot S.$$

Reordenando, se obtiene

$$F_x = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1).$$

Que es de nuevo, la misma solución que en los apartados anteriores.



La componente de fuerza en dirección Y tendrá el mismo valor que para los casos precedentes.

## Problema 23

### Enunciado

Sea el depósito móvil de la figura, el cual a  $t=0$  tiene una altura de líquido  $H$  y parte del reposo. Sabiendo que las fuerzas antagonistas que se oponen al movimiento son las siguientes:

Fricción de la rueda con el suelo  $F_f = K \cdot P$ , donde  $K$  es una constante conocida y  $P$  es el peso del conjunto del depósito y el fluido, se considera conocido este peso para  $t=0$ .

La fricción del depósito con el aire, se define por la ecuación.  $D = C_D \rho_{\text{aire}} S_{\text{proyectada}} \frac{V_{\text{móvil}}^2}{2}$  donde  $D$  representa la fuerza que el aire opone al movimiento del móvil.  $C_D$ ,  $\rho_{\text{aire}}$  y  $S_{\text{proyectada}}$  son conocidos.

Considérense conocidas las dimensiones del depósito.

Determine:

1. La variación temporal del nivel del líquido en el depósito.
2. La ecuación diferencial que determina la velocidad del móvil en función del tiempo.

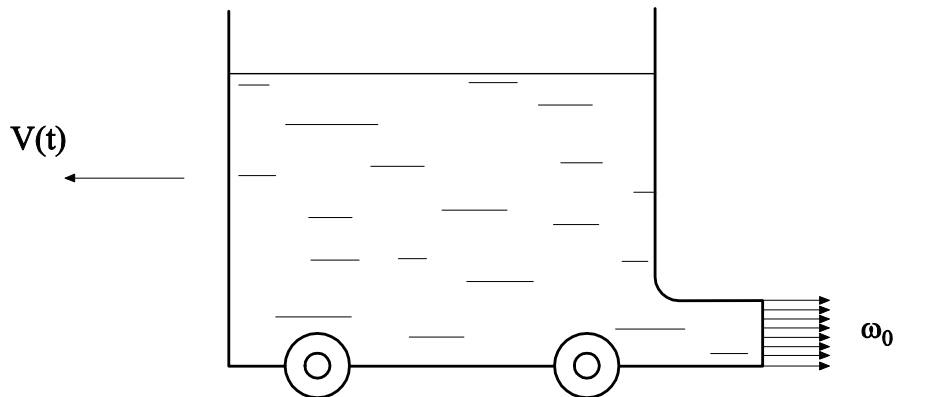


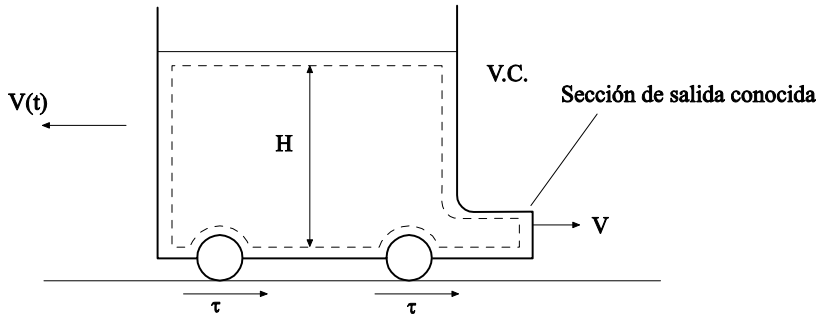
Fig. 23.1

### Resolución

Se elige el volumen de control que muestra la figura siguiente, en el cual la superficie que delimita el nivel del depósito se considera móvil, es decir, en todo momento el volumen de control abarca todo el volumen de líquido en el interior del depósito.



Fig. 23.2



$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho dV + \oint_{S.C.} \rho \vec{v} d\vec{S}$$

Puesto que únicamente existe flujo saliente y la densidad del líquido se puede considerar constante:

$$0 = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} S dh + \int_{S.S.} \rho v dS$$

$$0 = \rho S_d \frac{dh}{dt} + \rho v_s S_s$$

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{v_s S_s}{S_d}$$

En este punto, hay que recalcar que la velocidad de salida del líquido  $V_s$  depende de la altura de fluido en el depósito. Aplicando la ecuación de la energía entre el nivel del líquido y la sección de salida del fluido, y puesto que no existe transferencia de calor o trabajo al volumen de control, si además se supone que las pérdidas por rozamiento son despreciables y que el término de energía cinética en la superficie del depósito es mucho menor que el existente en la sección de salida del mismo se obtiene que la velocidad del fluido a la salida se puede dar:

$$V_s = \sqrt{2gh}$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad, se tiene:

$$\int_{h=H}^{h=h} \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int_{t=0}^t - \frac{S_s}{S_d} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \left[ \frac{h^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_H^h = \frac{1}{\sqrt{2g}} * 2 \left[ h^{\frac{1}{2}} - H^{\frac{1}{2}} \right] = - \frac{S_s}{S_d} t$$

con lo que:



$$h^{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t$$

Ecuación que caracteriza la altura del nivel del líquido en función del tiempo.

La ecuación de cantidad de movimiento aplicada al volumen de control de la figura, y para un sistema inercial de coordenadas, se expresa:

$$-\int_{se} P d\vec{s} - \int_{ss} P d\vec{s} - \underbrace{\int_{sl} P d\vec{s}}_{F_i} + \int_{vc} \bar{\tau} d\vec{s} + \int_{vc} \rho \vec{g} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \vec{v}_i dV + \oint_{sc} \rho \vec{v}_i \vec{v} d\vec{s}$$

Trabajando en presiones relativas, la fuerza en dirección X se puede dar como:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \vec{v}_x dV + \int_{ss} \rho \vec{v}_x \vec{v} d\vec{S}$$

A priori, si el volumen de líquido en el depósito se considera muy grande con respecto al caudal másico saliente, cabe considerar que la variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control es despreciable.

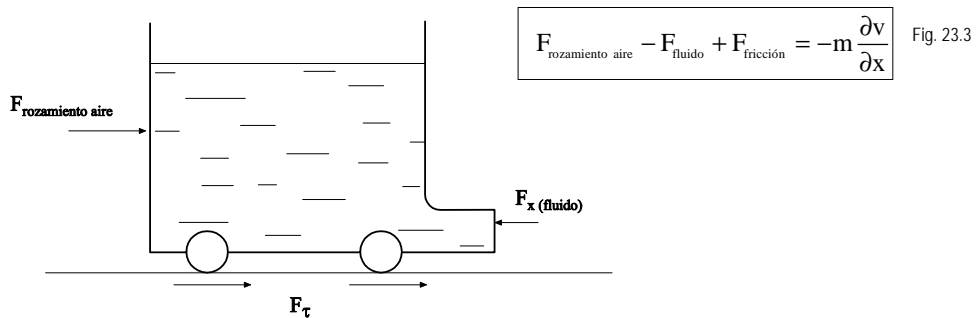
El flujo de cantidad de movimiento será:

$$\int_{ss} \rho \vec{v}_x \vec{v} d\vec{s} = \int \rho \sqrt{2gh} \sqrt{2gh} ds = \rho (2gh) S_s = \rho 2g S_s \left( H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right)^2$$

De donde la fuerza neta de cantidad de movimiento en dirección x será:

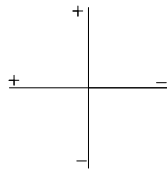
$$F_x = \rho 2g S_s \left( H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right)^2$$

La segunda ecuación de Newton, aplicada al depósito en movimiento, establece:





Eligiendo el sistema de coordenadas que se muestra a continuación, la segunda ecuación de Newton queda:



$$F_{\text{fluido}} - F_{\text{rozamiento aire}} - F_{\text{fricción}} = m \frac{\partial v}{\partial x}$$

Sustituyendo las diferentes ecuaciones en la segunda ecuación de Newton, se obtiene:

$$2 \rho g S_s \left( H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s \sqrt{g}}{S_d} t \right)^2 - K \cdot M_{(\text{carro} + \text{líquido})} g - C_D \rho_{\text{aire}} S \frac{V_{\text{móvil}}^2}{2} = M_{(\text{carro} + \text{líquido})} \frac{dv_{\text{móvil}}}{dt}$$

donde,

$$\begin{aligned} M_{\text{carro} + \text{líquido}} &= M_{\text{inicial}(c+1)} - \dot{m}_{\text{salida}} t = M_{\text{inicial}(c+1)} - (S_s \rho \sqrt{2gh}) t = \\ &= M_{\text{inicial}(c+1)} - \rho \sqrt{2g} S_s \left[ H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s \sqrt{g}}{S_d} t \right] t \end{aligned}$$

y se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 \rho g S_s \cdot \left( H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s \sqrt{g}}{S_d} t \right)^2 - K g \left( M_{\text{inicial}(c+1)} - \rho S_s t \sqrt{2g} \cdot \left[ H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s \sqrt{g}}{S_d} t \right] \right) \\ - C_D \rho_{\text{aire}} S_{\text{proyectada}} \frac{V_{\text{móvil}}^2}{2} = \left\{ M_{\text{inicial}(c+1)} - \rho S_s t \sqrt{2g} \left[ H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s \sqrt{g}}{S_d} t \right] \right\} \frac{dv_{\text{móvil}}}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{dv_{\text{móvil}}}{dt} = \left[ \frac{2 \rho g S_s \cdot \left( H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s \sqrt{g}}{S_d} t \right)^2 - K g \left( M_{\text{inicial}(c+1)} - \rho S_s t \sqrt{2g} \cdot \left[ H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s \sqrt{g}}{S_d} t \right] \right) - C_D \rho_{\text{aire}} S_{\text{proyectada}} \frac{V_{\text{móvil}}^2}{2}}{\left\{ M_{\text{inicial}(c+1)} - \rho S_s t \sqrt{2g} \left[ H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s \sqrt{g}}{S_d} t \right] \right\}} \right]$$

Ésta es la ecuación diferencial que caracteriza la velocidad del móvil en función del tiempo. Cabe recordar que, en general, la fuerza debida al rozamiento entre el aire y el móvil, caracterizada por el coeficiente de arrastre, es pequeña comparada con el resto de fuerzas.



Esta ecuación se ha resuelto por el método Runge-Kutta de cuarto orden, partiendo de las siguientes condiciones iniciales:  $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\rho_{\text{aire}} = 1.2 \text{ Kg/m}^3$ ,  $H = 1 \text{ m}$ ,  $S_s = 0.002 \text{ m}^2$ ,  $S_d = 0.5 \text{ m}^2$ ,  $S_{\text{proyectada}} = 0.7 \text{ m}^2$ ,

$$K = 0.0001, C_D = 0.005, M_{\text{inicial}(c+1)} = S_d H \rho + 100 \text{ Kg} .$$

De donde se ha obtenido la velocidad del móvil (carrito) en función del tiempo, grafica que se muestra a continuación.

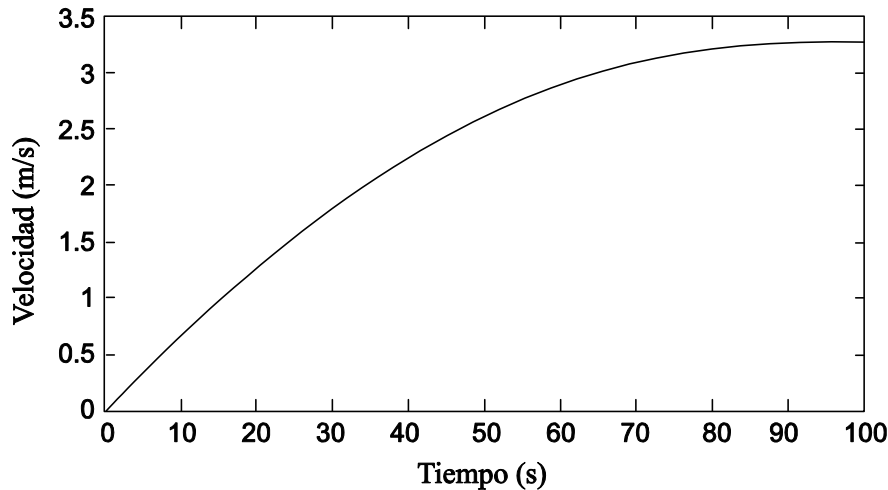


Fig. 23.4  
Variación de  
velocidad del  
móvil en  
función del  
tiempo

## Problema 24

### Enunciado

Se desea evaluar la viabilidad de creación de helicópteros personales, con fines lúdicos. Para ello, se pretende estudiar la potencia necesaria para mantener inmóvil en el aire dicho equipo en función del diámetro "D" del rotor. Se estima que el peso máximo de equipo y pasajero podría ser de unos "P" Kg. En la figura 24.1, se esquematiza el rotor con el volumen de control alrededor del mismo y se supone que en la parte inferior del rotor todo el chorro del fluido se desplaza en sentido vertical.

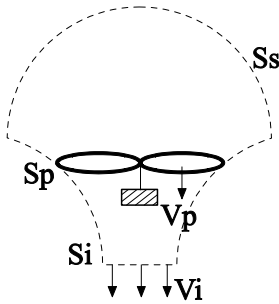
Determine:

1. La potencia necesaria en función del diámetro del rotor y del peso de equipo y pasajero.
2. Para una velocidad de giro de 400 rpm, un diámetro de rotor de 2 m y un peso del conjunto de 200 kgf, determine la potencia y el par necesarios del motor.



### Resolución

Fig. 24.1  
Esquema de  
las hélices del  
rotor y el  
volumen de  
control  
considerado



1. Estableciendo el volumen de control definido en la figura 24.1, para el cual se supondrá que la parte superior del mismo está suficientemente alejada del rotor como para considerar que la velocidad de las partículas es nula, mientras que en su sección inferior el fluido fluye a una velocidad genérica,  $V_i$ . De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento se tiene:

$$F_y = \int_{sc} \rho \vec{V}_y \cdot \vec{V} \, d\vec{s} = \rho S_i \cdot V_i \cdot V_i = \rho S_i V_i^2$$

dónde  $S_i$  es la sección del chorro cilíndrico.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las superficies superior e inferior del volumen de control elegido, se tiene:

$$\frac{P_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + g z_s + Y = \frac{P_i}{\rho} + \frac{V_i^2}{2} + g z_i$$

Asumiendo que la presión en cualquier punto de la entrada o salida se mantiene constante,  $P_i = P_s$ , y suponiendo despreciables los términos de energía potencial, se establece:

$$Y = \frac{V_i^2}{2} = \frac{\Delta P}{\rho}$$

La  $\Delta P$  se entiende entre caras del rotor.

La fuerza de sustentación producida por el rotor debería ser asimismo igual a la diferencia de presión entre ambos extremos de las palas, multiplicada por la superficie barrida, obteniendo:

$$F_y = \Delta P S_p = \rho \frac{V_i^2}{2} S_p$$

Igualando a la ecuación de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$F_y = \Delta P S_p = \rho \frac{V_i^2}{2} S_p = \rho S_i V_i^2$$

de donde:  $S_p = 2 S_i$





Suponiendo un rendimiento unitario, la potencia transmitida al fluido será la que ha de comunicar el motor.

La potencia comunicada al fluido será el producto del gradiente de presiones por el caudal circulante, o bien la energía cinética comunicada al fluido al pasar por el rotor, por el mismo caudal circulante, de donde:

$$N_a = \Delta P S_p V_p = \rho \frac{V_i^2}{2} S_i V_i = \rho \frac{V_i^2}{4} S_p V_i$$

Despejando la velocidad de la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene:

$$V_i = \sqrt{\frac{F_y}{\rho S_i}} = \sqrt{\frac{2F_y}{\rho S_p}}$$

$$N_a = \rho \frac{V_i^2}{4} S_p V_i = \rho S_p \frac{1}{4} \left[ \frac{2F_y}{\rho S_p} \right]^{\frac{3}{2}} = F_y^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2\rho S_p)^{0,5}}$$

o bien:

$$N_a^2 = F_y^3 \frac{1}{2\rho S_p} = F_y^3 \frac{2}{\rho \pi D^2}$$

Expresión que relaciona la potencia de accionamiento con la fuerza de sustentación y el diámetro del rotor.

2. Para un peso de 200 Kgf, un diámetro de rotor de 2 m, y suponiendo la temperatura y la presión del aire atmosférico de 20 C y  $10^5$  Pa, se obtiene una potencia de:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{100.000}{287 \cdot 293} = 1,189 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$N_a^2 = F_y^3 \frac{2}{\rho \pi D^2} = (200 \cdot 9,8)^3 \frac{2}{1,189 \pi 2^2}$$

$$N_a = 31.747,04 \text{ W}$$

Dado que el rotor se quiere que gire a 400 rpm, el par necesario deberá ser de:

$$N_a = M \omega = M \cdot 400 \frac{2\pi}{60} = 31.747,04 \text{ W}$$

$$M = 303,16 \text{ Nm}$$



## Problema 25

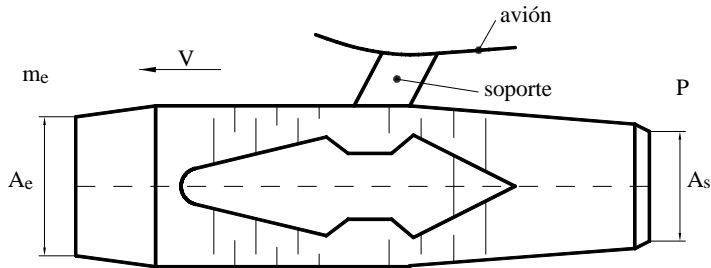
### Enunciado

Sea el turboreactor de un avión de pasajeros, el cual se desplaza a una velocidad  $V$ , (el aire atmosférico se considera sin movimiento), el flujo másico entrante al reactor es  $\dot{m}_E$ , siendo el caudal másico del combustible que entra lateralmente  $\dot{m}_{FUEL}$ . Se conoce, además, que los gases de combustión salen de la tobera a una velocidad relativa al motor  $V_r$ .

Calcule la fuerza realizada por el soporte del motor.

(Se puede considerar despreciable la cantidad de movimiento asociada al caudal másico de combustible,  $\dot{m}_{FUEL}$ .)

Fig. 25.1  
Esquema del motor de avión



### Resolución

La ecuación de cantidad de movimiento en régimen permanente, aplicada a la superficie que envuelve el volumen de control formado por el motor, y en dirección  $x$ , será:

$$\int_{se} \rho \bar{v}_x \bar{v} d\bar{s} + \int_{ss} \rho \bar{v}_x \bar{v} d\bar{s} = \sum \bar{F}_{ext_x}$$

Teniendo en cuenta que el término de fuerzas másicas no tiene componente en dirección  $X$ , y puesto que las fuerzas exteriores están formadas por las fuerzas de presión y los esfuerzos cortantes, que se pueden considerar concentradas en el soporte del motor, considerando que actúan en dirección positiva del eje de abscisas, se establece:

$$F_{soporte_x} = - \int_{se} \rho v_x v ds + \int_{ss} \rho v_{r_x} v_r ds$$

La velocidad en la entrada será  $\frac{\dot{m}_E}{\rho_e A_e} = V$  (velocidad de vuelo del avión).

Para el caso en estudio, se establece:  $V_x = V$ ;  $V_{r_x} = V_r$ . Sólo existe componente de velocidad en dirección  $x$ , Obteniéndose:



$$F_{\text{soporte}_x} = -\dot{m}_E V + (\dot{m}_E + \dot{m}_F) V_r$$

puesto que el caudal másico saliente es  $\dot{m}_E + \dot{m}_{\text{FUEL}}$ .

La fuerza que el soporte ejercerá sobre el motor se establece:

$$F_{\text{soporte}_x} = \dot{m}_E (V_r - V) + \dot{m}_F V_r$$

La fuerza, o empuje del motor, vendrá dada por:

$$F_{\text{motor}_x} = \dot{m}_E (V - V_r) - \dot{m}_F V_r$$

## Problema 26

### Enunciado

Sea un cohete que se desplace verticalmente acelerándose desde el reposo. El consumo de combustible del mismo es de  $\dot{m}$ , siendo la velocidad de escape del fluido constante e igual a  $v_e$  (velocidad relativa a la superficie de salida del cohete). Si se puede considerar constante la densidad del fluido y despreñar la cantidad de movimiento del cohete, determine:

1. La ecuación que determina la aceleración en función del tiempo del cohete.
2. La ecuación que determina la velocidad en función del tiempo.
3. Si la fuerza antagonista que se opone al movimiento del cohete se puede dar (para flujo subsónico) como:  $D = \frac{1}{2} C_D \rho S_p V_{\text{cohete}}^2$ , asumiendo que  $C_D$  es una constante conocida y que la densidad del aire se puede considerar constante, halle la ecuación diferencial que determina el movimiento del cohete, e intégrala para hallar la velocidad del cohete en función del tiempo.

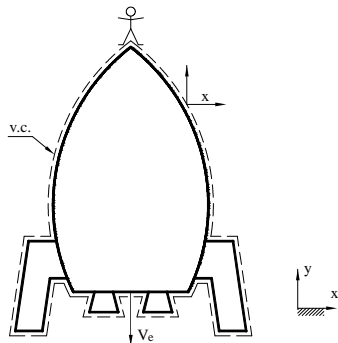


Fig. 26.1



### Resolución

1. La ecuación de cantidad de movimiento para coordenadas no inerciales, cuando se desprecian los esfuerzos por rozamiento, se puede expresar como:

$$F_{\text{másicas}} - \int_{\text{vc}} \mathbf{a} \cdot \rho \cdot dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \bar{v}_y \cdot \rho \cdot dV + \oint_{\text{sc}} \bar{v}_y \cdot \rho \cdot \bar{v}_r \cdot d\bar{s}$$

$$F_{\text{másicas}} = -M_{\text{vc}} \cdot g ;$$

$M_{\text{vc}}$  = es función del tiempo.

Aplicando la ecuación de continuidad al volumen de control del cohete, se obtiene la expresión siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \rho \cdot dV + \int_{\text{sc}} \rho \cdot \bar{v} \cdot d\bar{s} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \rho \cdot dV = - \int_{\text{salida}} \rho \cdot \bar{v} \cdot d\bar{s} = -\dot{m}_{\text{salida}}$$

$$\frac{dM_{\text{vc}}}{dt} = -\dot{m}_{\text{salida}} \quad ; \quad \int_{M_{\text{inicial}}}^{\text{masa cohete}} dM_{\text{vc}} = \int_0^t -\dot{m}_{\text{salida}} \cdot dt$$

$$M_{\text{cohete}} - M_{\text{inicial}} = -\dot{m}_{\text{salida}} \cdot t \quad ;$$

$$M_{\text{cohete}} = M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t$$

de donde:

$$F_{\text{másicas}} = -g \cdot (M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t)$$

$$-\int \mathbf{a} \cdot \rho \cdot dV = -\int \mathbf{a} \cdot dM_{\text{vc}} = -\mathbf{a} \cdot M_{\text{vc}} = -\mathbf{a} \cdot (M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \bar{v}_y \cdot \rho \cdot dV = 0, \text{ según el enunciado.}$$

$$\int_{\text{sc}} \bar{v}_y \cdot \underbrace{\rho \cdot \bar{v}_r \cdot d\bar{s}}_{\dot{m}_{\text{salida}}} = -v_e \cdot \dot{m}_{\text{salida}}$$

Sustituyendo en la ecuación general, se llega a:

$$-g \cdot (M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t) - \mathbf{a} \cdot (M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t) = -v_e \cdot \dot{m}_{\text{salida}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{v_e \cdot \dot{m}_{\text{salida}}}{M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t} - g$$

$$2. \quad \mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad \mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a} \cdot dt = \left[ -\frac{v_e \cdot \dot{m}_{\text{salida}}}{\dot{m}_{\text{salida}}} \cdot \ln(M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t) - g \cdot t \right]_0^t ;$$

$$\mathbf{V} = -V_e \ln\left(\frac{M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} t}{M_{\text{inicial}}}\right) - g t.$$



o bien:

$$V = V_e \ln \left( \frac{M_{\text{inicial}}}{M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} t} \right) - g t.$$

Obsérvese que la velocidad del cohete tiende a aumentar con el tiempo.

3. Si las fuerzas de superficie antagonistas al movimiento del cohete para flujo subsónico se pueden dar como:

$D = \frac{1}{2} C_D \rho S_{\text{proyectada}} V_{\text{cohete}}^2$ , y recordando que la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas no inerciales se enunciaba:

$$\begin{aligned} -\int_{\text{sc}} P d\bar{s} + \int_{\text{sc}} \bar{\tau} d\bar{s} + \int_{\text{vc}} \rho \bar{g} dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \rho \bar{V}_i dV + \oint_{\text{sc}} \rho \bar{V}_i \bar{V} d\bar{s} + \\ &+ \int_{\text{vc}} \rho \left( \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \wedge \bar{r} + \bar{\Omega} \wedge \bar{\Omega} \wedge \bar{r} + 2\bar{\Omega} \wedge \bar{V} \right) dV \end{aligned}$$

Las fuerzas de presión y de esfuerzos cortantes que actúan sobre la superficie del cohete son las fuerzas antagonistas de superficie, y se evalúan por “D”. Por otro lado, y puesto que no hay giro alguno del sistema de referencia no inercial con respecto al inercial, la ecuación de cantidad de movimiento queda:

$$-D - M_{\text{cohete}} g = -\dot{m} V_{\text{fluido saliente}} + M_{\text{cohete}} a_{\text{cohete}}$$

Obsérvese que el término  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \rho \bar{V}_i dV$  representa la variación temporal de la cantidad de movimiento en el volumen de control formado por el cohete, que sería la masa de cada elemento diferencial del cohete, por la variación temporal de la velocidad que este elemento diferencial posee respecto a un sistema de coordenadas inercial que se mueve con el cohete. Para dicho sistema de referencia, la variación temporal de cantidad de movimiento es nula.

La ecuación resultante se expresa como:

$$-C_D \frac{1}{2} \rho V_{\text{cohete}}^2 S_{\text{proyectada}} - (M_{\text{inicial cohete}} - \dot{m} t) g = -\dot{m} V_{\text{fluido saliente}} + (M_{\text{inicial cohete}} - \dot{m} t) \frac{dV_{\text{cohete}}}{dt}$$

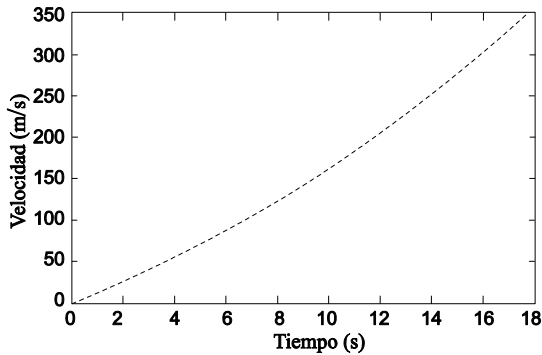
Ésta es la ecuación diferencial que caracteriza la velocidad temporal del cohete en régimen subsónico.

La resolución de esta ecuación diferencial mediante el método de Runge-Kutta 4 con las condiciones iniciales que se detallan a continuación, ha dado lugar a la grafica que se muestra seguidamente.



Condiciones iniciales:  $S_{\text{proyectada}} = 0.5 \text{ m}^2$ ;  $C_D = 0.05$  ;  $\rho = 1.2 \text{ Kg/m}^3$  ;  
 $M_{\text{inicial cohete}} = 2000 \text{ Kg}$  ;  $\dot{m} = 50 \text{ Kg / s}$  ;  $V_{\text{fluido saliente}} = 900 \text{ m / s}$  .

Fig. 26.2  
Velocidad del cohete en función del tiempo



Obsérvese que el cohete tardara unos 18 segundos en alcanzar la velocidad sónica,  $M=1$ ,  $c = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 293} = 343.1 \text{ m / s}$ . A partir de este punto, las fuerzas antagonistas sobre el cohete cambian drásticamente, puesto que deben tenerse en cuenta las fuerzas debidas a la aparición de la onda de choque en el extremo superior del cohete. Con lo que a partir de este punto la ecuación diferencial del movimiento del cohete debe ser modificada.

## Problema 27

### Enunciado

Sea un avión en vuelo ascendente con una inclinación respecto a la horizontal,  $\alpha = 22^\circ$ .

Sea  $V$  la velocidad de escape de los gases de combustión, velocidad relativa a la velocidad del avión, considérese  $V = \text{constante}$ .

Sea  $D$  la fuerza de arrastre debida a las fuerzas superficiales, que se opone al movimiento del avión,  $D = C_D \cdot \rho \cdot S \cdot \frac{V_{\text{avión}}^2}{2}$

$\rho$  = densidad del aire. Considere como primera aproximación la densidad media entre las alturas de vuelo.

$S$  = superficie del avión proyectada en un plano perpendicular a la dirección del movimiento. (Es un dato del problema.)

$C_D$  = coeficiente de arrastre. ( Se supone constante y conocido).

En un instante considerado, el avión vuela a una velocidad  $V_{\text{inicial}}$  y se halla a una altura  $H_{\text{inicial}}$ . Dicho avión está acelerando con el fin de obtener una velocidad  $V_{\text{final}}$  y una altura  $H_{\text{final}}$  en un tiempo  $t$ , en todo momento se mantiene la inclinación.



Determine:

1. El flujo másico que sale por los motores del avión en función del tiempo durante el período de aceleración considerado. Considere que la masa del avión se mantiene constante.
2. El flujo másico que sale por los motores del avión en función del tiempo durante el período de aceleración considerado. Considérese variable la masa del avión y téngase en cuenta que el caudal másico de combustible es el 5% del caudal entrante a los motores.
3. La altura final a la que se encontrará el avión después del período de aceleración  $t$  considerado. Determine la densidad media del aire atmosférico entre las alturas de vuelo consideradas, sabiendo que la temperatura en la atmósfera en función de la altura  $h$  varía según la relación:  $T = T_0 - B \cdot h$ ;  $T_0$  y  $B$  son constantes conocidas.

Datos:

$V_{\text{inicial}}$ ;  $V_{\text{final}}$ ;  $H_{\text{inicial}}$ ;  $\alpha$ ;  $V$ ;  $C_D$ ;  $S$ ;  $t$ ;  $T_0$ ;  $B$ ;  $m_{\text{inicial avión}}$ ;  $\rho$ . (Considérese  $\rho$  conocida para los apartados 1 y 2.)

### Resolución

1. Se eligen los sistemas de coordenadas  $XY$ ;  $X'Y'$ .

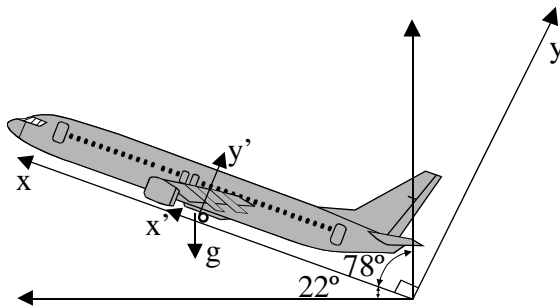


Fig. 27.1

Para el sistema de coordenadas no inercial situado en el avión, se tiene:

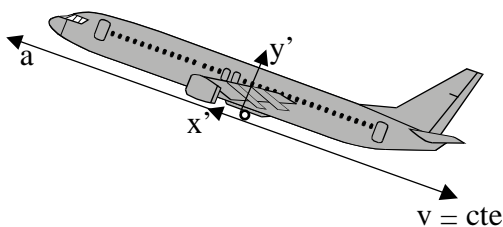


Fig. 27.2



La ecuación de cantidad de movimiento aplicada a un sistema no inercial se enuncia:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{V}_{x'y'} \cdot d\vec{V} + \oint_{sc} \rho \vec{V}_{x'y'} \cdot \vec{V}_{x'y'} \cdot d\vec{s} + \\ & \int_{sc} \rho \left[ \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \left( \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} \right) + (2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'}) + (\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \right] d\vec{V} = \\ & = \sum \vec{F}_{ext} = - \int_{sc} P \hat{n} \, ds + \int_{sc} \vec{\tau} \, ds + \int_{V_c} \vec{g} \rho \, d\vec{V} \end{aligned}$$

Puesto que las aceleraciones de Coriolis, centrípeta y la debida a la velocidad de giro variable no son relevantes para el caso de estudio, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{V}_{x'y'} \cdot d\vec{V} + \oint_{sc} \rho \vec{V}_{x'y'} \cdot \vec{V}_{x'y'} \cdot d\vec{s} + \int_{sc} \rho \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} d\vec{V} = - \int_{sc} P \hat{n} \, ds + \int_{sc} \vec{\tau} \, ds + \int_{V_c} \vec{g} \rho \, d\vec{V}$$

Las fuerzas superficiales han sido dadas en función del coeficiente de arrastre:

$$D = C_D \cdot \rho \cdot s \cdot \frac{V_{avión}^2}{2}$$

Estas fuerzas tienen la dirección del eje X y se dirigen hacia la parte negativa de dicho eje.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{V}_{x'y'} \cdot d\vec{V} + \oint_{sc} \rho \vec{V}_{x'y'} \cdot \vec{V}_{x'y'} \cdot d\vec{s} = -\vec{D} + \int_{V_c} \vec{g} \rho \, d\vec{V} - \int_{V_c} \rho \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} d\vec{V}$$

Eligiendo como volumen de control el avión, se tiene que únicamente existe flujo de cantidad de movimiento entrante y saliente en los motores.

$$\begin{aligned} \int_{sc} \rho \cdot \vec{V}_{x'y'} \cdot \vec{V}_{x'y'} \cdot d\vec{s} &= \int_{se} \rho \cdot \vec{V}_{avión} \cdot \vec{V}_{avión} \cdot d\vec{s} + \int_{ss} \rho \cdot \vec{V}_{gases \, escape} \cdot \vec{V}_{gases \, escape} \cdot d\vec{s} = \\ \rho V_{avión}^2 s_{entrada} - \rho V_{gases \, escape}^2 s_{salida} &= \dot{m}_{entrante} \cdot V_{avión} - \dot{m}_{saliente} \cdot V_{gases \, escape} \end{aligned}$$

En este primer apartado, se va a despreciar la aportación del combustible al caudal másico saliente, con lo cual se tendrá:

$$\dot{m}_{entrante} = \dot{m}_{saliente}$$

En lo que a la variación temporal de cantidad de movimiento se refiere, se va a suponer que la densidad del flujo en el interior del volumen de control es constante; por otro lado, la velocidad de salida del flujo por los motores del avión se ha supuesto también constante, según el enunciado, con lo cual:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{V}_{x'y'} \cdot d\vec{V} = 0;$$

y se obtiene:





$$-\dot{m}_{\text{saliente}} \cdot (\mathbf{V}_{\text{gases escape}} - \mathbf{V}_{\text{avión}}) = -\bar{D} + \int_{V_c} \bar{g} \rho \, dV - \int_{V_c} \rho \frac{d^2 \bar{\mathbf{R}}}{dt^2} dV$$

Proyectando la gravedad en la dirección del movimiento del avión

$$\int_{V_c} \bar{g} \rho \, dV = -\rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{g} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = -m_{\text{avión}} g \cos(90^\circ - \alpha)$$

Puesto que  $\frac{d^2 \bar{\mathbf{R}}}{dt^2} = \bar{a}$ , aceleración del avión

$$-\dot{m}_{\text{saliente}} \cdot (\mathbf{V}_{\text{gases escape}} - \mathbf{V}_{\text{avión}}) = -C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot s \cdot \frac{V_{\text{avión}}^2}{2} - m_{\text{avión}} g \cos(90^\circ - \alpha) - \int_{V_c} \rho \bar{a} \, dV$$

$$-\dot{m}_{\text{saliente}} \cdot (\mathbf{V}_{\text{gases escape}} - \mathbf{V}_{\text{avión}}) = -C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot s \cdot \frac{V_{\text{avión}}^2}{2} - m_{\text{avión}} g \cos(90^\circ - \alpha) - m_{\text{avión}} a$$

$$V_{\text{avión}} = V_{\text{inicial}} + at$$

$$\dot{m}_{\text{saliente}} = \frac{C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot s \cdot \frac{(V_{\text{inicial}} + at)^2}{2} + m_{\text{avión}} g \cos(90^\circ - \alpha) + m_{\text{avión}} a}{(V_{\text{gases escape}} - (V_{\text{inicial}} + at))}$$

2. Si se considera que la masa del avión varía con el tiempo, se tiene, conociendo que la masa de combustible es el 5% de la masa total:

$$m_{\text{avión}} = m_{\text{av.inicial}} - \dot{m}_{\text{entrante}} t \cdot 0,05$$

Según la ecuación de continuidad:

$$\dot{m}_{\text{entrante}} + \dot{m}_{\text{fuel}} = \dot{m}_{\text{saliente}}.$$

$$\dot{m}_{\text{entrante}} + 0,005 \dot{m}_{\text{entrante}} = \dot{m}_{\text{saliente}}.$$

$$1,05 \dot{m}_{\text{entrante}} = \dot{m}_{\text{saliente}}.$$

con lo cual:

$$m_{\text{avión}} = m_{\text{av.inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} t \cdot \frac{0,05}{1,05}$$

El flujo de cantidad de movimiento a través de los motores del avión, al considerar que el flujo másico de combustible es el 5% del flujo entrante, se establece:

$$\int_{sc} \rho \cdot \vec{V}_{x'y'} \cdot \vec{V}_{x'y'} \cdot d\vec{s} = \dot{m}_{\text{entrante}} \cdot V_{\text{avión}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}} = \frac{\dot{m}_{\text{saliente}}}{1,05} \cdot V_{\text{avión}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}} =$$

$$\dot{m}_{\text{saliente}} \left( \frac{V_{\text{avión}}}{1,05} - V_{\text{gases escape}} \right) = \dot{m}_{\text{saliente}} \left( \frac{V_{\text{inicial}} + at}{1,05} - V_{\text{gases escape}} \right)$$



La ecuación de cantidad de movimiento quedará:

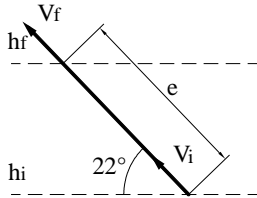
$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{saliente}} \left( V_{\text{gases escape}} - \frac{V_{\text{inicial}} + at}{1,05} \right) &= C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot s \cdot \frac{(V_{\text{inicial}} + at)^2}{2} + \\ \left( m_{\text{av.inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} t \cdot \frac{0,05}{1,05} \right) g \cos(90^\circ - \alpha) &+ \left( m_{\text{av.inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} t \cdot \frac{0,05}{1,05} \right) \bar{a} \\ \dot{m}_{\text{saliente}} \left( V_{\text{gases escape}} - \frac{V_{\text{inicial}} + at}{1,05} \right) &+ \dot{m}_{\text{saliente}} (g \cdot t \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + t \cdot \bar{a}) \frac{0,05}{1,05} = \\ C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot s \cdot \frac{(V_{\text{inicial}} + at)^2}{2} &+ m_{\text{av.inicial}} \cdot (g \cos(90^\circ - \alpha) + \bar{a}) \\ \dot{m}_{\text{saliente}} &= \frac{C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot s \cdot \frac{(V_{\text{inicial}} + at)^2}{2} + m_{\text{av.inicial}} \cdot (g \cos(90^\circ - \alpha) + \bar{a})}{\left( V_{\text{gases escape}} - \frac{V_{\text{inicial}} + at}{1,05} \right) + (g \cdot t \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + t \cdot \bar{a}) \frac{0,05}{1,05}}; \end{aligned}$$

La aceleración que experimenta el avión se halla:

$$\bar{a} = \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}}{t};$$

3. Si a la velocidad inicial le corresponde una altura inicial,  $h_i$ , al final del período de aceleración considerado,  $t$ , la altura del avión será:

Fig. 27.3



$$e = \frac{1}{2} a \cdot t^2;$$

$$\text{sen} 22^\circ = \frac{h_f - h_i}{e};$$

$$h_f = e \cdot \text{sen} 22^\circ + h_i = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \cdot \text{sen} 22^\circ + h_i;$$

La densidad media del aire atmosférico entre las dos alturas de vuelo consideradas se determinará hallando la densidad del aire a cada una de estas alturas, y posteriormente obteniendo la media de dichas densidades:

$$\bar{\rho}_{\text{aire}} = \frac{\rho_{h_f} + \rho_{h_i}}{2};$$

$$\rho_{h_f} = \frac{P_{h_f}}{R \cdot T_{h_f}};$$

$$\rho_{h_i} = \frac{P_{h_i}}{R \cdot T_{h_i}};$$

Puesto que la temperatura del aire en la atmósfera terrestre viene dada por:



$$T = T_0 - B \cdot h;$$

$$T_0 = 15^\circ\text{C} \quad \text{y} \quad B = 0,0065 \frac{\text{K}}{\text{m}};$$

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh = -\frac{P}{R \cdot T} g \cdot dh = -\frac{P \cdot g}{R(T_0 - B \cdot h)} dh;$$

$$\int_{P=P_{\text{atm}}}^{P=P_{\text{hf}}} \frac{dP}{P} = \int_{h=0}^{h=h_f} -\frac{g \cdot dh}{R \cdot (T_0 - B \cdot h)};$$

$$\ln \left[ \frac{P_{\text{hf}}}{P_{\text{atm}}} \right] = \frac{g}{R \cdot B} \cdot \ln \left[ \frac{T_0 - B \cdot h_f}{T_0} \right];$$

$$P_{\text{hf}} = \left( \frac{T_0 - B \cdot h_f}{T_0} \right)^{\frac{g}{R \cdot B}};$$

Expresión que da la presión del aire a una altura  $h$  genérica; sustituyendo  $h$  por  $h_f$  y  $h_i$  se obtienen las presiones a las dos alturas consideradas. Dado que la temperatura también es conocida, se puede determinar la densidad del aire para estas dos alturas y, consecuentemente, la densidad media.

## Problema 28

### Enunciado

Se desea realizar un experimento en la estación espacial internacional. El experimento consiste en determinar la fuerza de reacción del contorno sobre el fluido, cuando este fluye a lo largo de un tramo de tubería recta de 1 m de longitud y 1 cm de diámetro.

El satélite donde irá montada la instalación tiene, en el momento de realizar el experimento, una aceleración respecto a un sistema de referencia inercial de:

$$\vec{a} = 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k} \text{ (m/s}^2\text{)}, \text{ siendo su velocidad angular } \vec{\omega} = 0,2\mathbf{i} + 0,2\mathbf{j} - 0,01\mathbf{k} \text{ (rad/s)}.$$

El tramo de tubería respecto al centro de gravedad del satélite está situado en un plano XZ, y el conducto está alineado con el eje Z. El centro de gravedad del conducto está situado en  $X=0,5$  m;  $Y=0,5$  m;  $Z=1$  m. Se conoce, además, que el flujo es en sentido positivo del eje de las Z, y la presión a la entrada del tramo recto es de  $2 \cdot 10^5$  Pa (presión absoluta).

Debido a que el flujo es laminar, para determinar la presión en el extremo opuesto del

conducto se utilizará la ecuación:  $\Delta P = \frac{\rho \cdot 8 \cdot \nu \cdot L \cdot v}{r_c^2}$ ;  $\frac{\Delta P}{\rho} = \Delta Y$

$L$  = longitud del conducto

$v$  = velocidad del fluido en el conducto, (considérese 1 m/s.)

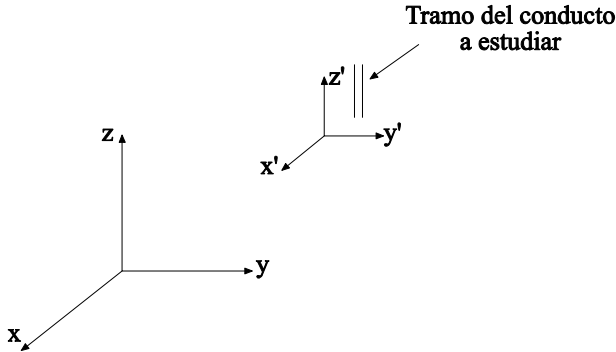


$$\rho = \text{densidad del fluido} = 850 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = \text{viscosidad cinemática del fluido} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Considérese despreciable el efecto de la gravedad terrestre sobre el satélite.

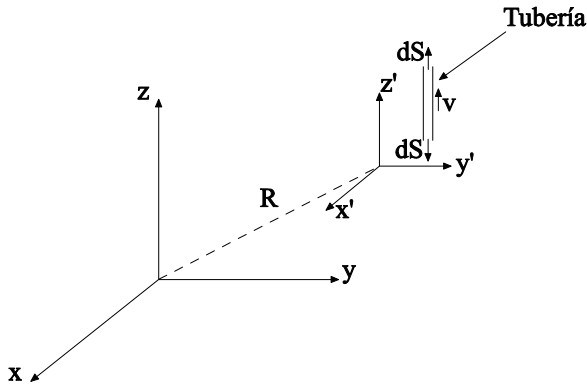
Fig. 28.1  
Esquema de la  
instalación, con  
los dos ejes  
coordenados  
utilizados



### Resolución

La ecuación de cantidad de movimiento para un sistema no inercial de coordenadas se establece (v. figura 28.2):

Fig. 28.2  
Esquema de  
los dos ejes  
coordenados  
con el vector R  
que los une



$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{V} dV + \int_{se} \rho \vec{V} \vec{V} d\vec{S} + \int_{ss} \rho \vec{V} \vec{V} d\vec{S} + \int_{V_c} \rho \left[ \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} \right) + (2\vec{\omega} \wedge \vec{V}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}) \right] dV = \\ & = - \int_{se} p d\vec{S} - \int_{ss} p d\vec{S} + F_{(ijk)} + \int_{V_c} \rho g dV \\ & - \dot{m} V_c \hat{k} + \dot{m} V_s \hat{k} + \int_{V_c} \rho \left[ \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + (2\vec{\omega} \wedge \vec{V}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}) \right] dV + \int_{se} p d\vec{S} + \int_{ss} p d\vec{S} = F_{(i,j,k)} \end{aligned}$$

El radio  $\vec{r}$  en un elemento diferencial de tubo será de la forma:



$$\vec{r} = 0,5\hat{i} + 0,5\hat{j} + Z\hat{k}$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 10\hat{j} + 10\hat{k}$$

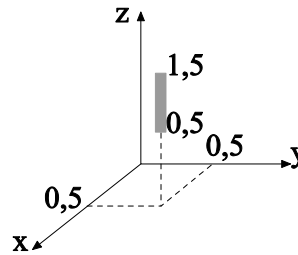


Fig. 28.3

$$(2\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,2 & 0,2 & -0,01 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2[0,2\hat{i} - 0,2\hat{j}] = 0,4\hat{i} - 0,4\hat{j}$$

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,2 & 0,2 & -0,01 \\ 0,5 & 0,5 & Z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\omega} \wedge [0,2Z\hat{i} - 0,5 - 0,01\hat{j} + 0,2 \cdot 0,5\hat{k} - (0,2 \cdot 0,5\hat{k} - 0,5 \cdot 0,01\hat{i} + 0,2Z\hat{j})] =$$

$$= \vec{\omega} \wedge [(0,005 + 0,2Z)\hat{i} - (0,005 + 0,2Z)\hat{j}];$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,2 & 0,2 & -0,01 \\ (0,005 + 0,2Z) & -(0,005 + 0,2Z) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} = -0,01(0,005 + 0,2Z)\hat{j} + 0,2[-(0,005 + 0,2Z)]\hat{k}$$

$$- [0,2(0,005 + 0,2Z)\hat{k} - 0,01(-(0,005))\hat{i}]$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} = -(5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-3}Z)\hat{i} - (5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-3}Z)\hat{j} - (10^{-3} + 4 \cdot 10^{-2}Z)2\hat{k}$$

La presión a la salida del conducto respecto a la entrada del mismo será:

$$\frac{P_e}{\rho_c} + \frac{V^2}{2} + gZ_e = \frac{P_s}{\rho_s} + \frac{V^2}{2} + gZ_s + \frac{8vLV}{r_c^2}$$

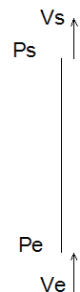


Fig. 28.4

Las fuerzas másicas se consideran despreciables.

$$P_s = P_e - \frac{\rho 8vLV}{r_c^2}$$

$$P_s = 2 \cdot 10^5 - 8160 = 1,9184 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$



$$\int_{0,5}^{1,5} \rho S_{\text{tubo}} \left[ \begin{array}{l} 10 \hat{j} + 10 \hat{k} + 0,4 \hat{i} - 0,4 \hat{j} - (5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-3} Z) \hat{i} - (5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-3} Z) \hat{j} \\ -(2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-2} Z) \hat{k} \end{array} \right] \cdot dZ$$

$$-8.160 \cdot S_{\text{tubo}} \cdot \hat{k} = F_{(i,j,k)}$$

$$\rho S_{\text{tubo}} \left[ \begin{array}{l} 10 \hat{j} + 10 \hat{k} + 0,4 \hat{i} - 0,4 \hat{j} - 5 \cdot 10^{-5} \hat{i} - 5 \cdot 10^{-5} \hat{j} - 2 \cdot 10^{-3} \hat{k} \\ -2 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{Z^2}{2} \right]_{0,5}^{1,5} \hat{i} - 2 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{Z^2}{2} \right]_{0,5}^{1,5} \hat{j} - 8 \cdot 10^{-2} \left[ \frac{Z^2}{2} \right]_{0,5}^{1,5} \hat{k} \end{array} \right] +$$

$$-8.160 \cdot S_{\text{tubo}} \cdot \hat{k} = F_{(i,j,k)}$$

$$850 \cdot \frac{\pi \cdot 0,01^2}{4} \left[ 0,39995 \hat{i} + 9,5995 \hat{j} + 9,998 \hat{k} - 2 \cdot 10^{-3} \hat{i} - 2 \cdot 10^{-3} \hat{j} - 8 \cdot 10^{-3} \hat{k} \right]$$

$$-8.160 \cdot \frac{\pi \cdot 0,01^2}{4} \cdot \hat{k} = F_{(i,j,k)}$$

$$F_{(i,j,k)} = 2,65667 \cdot 10^{-2} \hat{i} + 6,40748 \cdot 10^{-1} \hat{j} + 2,12293 \cdot 10^{-2} \hat{k}$$

## Problema 29

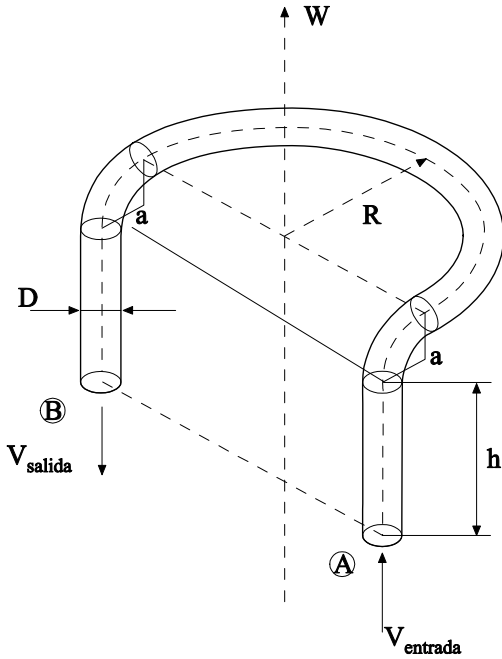
### Enunciado

Sea un fluido de viscosidad dinámica  $\mu$  y densidad  $\rho$  que circula por una tubería de diámetro  $D$ . Sabiendo que el caudal circulante es  $Q$  y que la presión en la entrada del conducto es  $P$ , determine la expresión que caracteriza la fuerza de reacción del contorno sobre el fluido, cuando el sistema está inmóvil y cuando el sistema gira respecto a su eje central vertical a una velocidad angular  $\omega$ . Considere que la tubería es lisa.

Las dimensiones principales del conducto se esquematizan en la figura 29.1.



Fig. 29.1  
Esquema de la instalación



Nota. A los efectos de pérdida de carga, los codos y los tramos curvados de la tubería se considerarán como pérdidas lineales, con una longitud igual a la de su desarrollo.

### Resolución

1. La fuerza de reacción que el conducto realiza sobre el fluido será debida al balance de cantidad de movimiento entre la entrada y la salida del sistema. En este primer apartado, y dado que no existe giro alguno, la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas inerciales se enuncia:

$$-\int_{SA} p \, d\vec{s} - \int_{SB} p \, d\vec{s} - \int_{SL} p \, d\vec{s} + \int_{SL} \vec{\tau} \, ds + \int_{VC} \rho \vec{g} \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} \, dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \, d\vec{s}$$

de donde las fuerzas de reacción (contorno sobre el fluido) y para régimen permanente se definen:

$$\vec{F}_{CF} = \int_{SC} \rho \vec{v} \, d\vec{s} - \int_{VC} \rho \vec{g} \, dV + \int_{SA} p \, d\vec{s} + \int_{SB} p \, d\vec{s} = \int_{SA} \rho \vec{v} \, d\vec{s} + \int_{SB} \rho \vec{v} \, d\vec{s} - \int_{VC} \rho \vec{g} \, dV + \int_{SA} p \, d\vec{s} + \int_{SB} p \, d\vec{s}$$

Una vez realizada la integración, se obtiene:

$$\vec{F}_{CF} = -2 \dot{m} v \hat{k} - s(p_A + p_B) \hat{k} + \rho g L s \hat{k}$$

de donde:



$v$  = velocidad de circulación del fluido, que se calcula mediante la ecuación de continuidad

$\dot{m}$  = caudal másico

$P_A$  = presión en la entrada del conducto, punto A. (dato del problema)

$P_B$  = presión en la salida del conducto, punto B (se determina mediante la ecuación de Bernoulli)

$L_{\text{total}}$  = longitud desarrollada del conducto. Según la figura 26.1, valdrá:

$$L_{\text{total}} = 2h + \pi a + \pi R$$

La presión a la salida del conducto, punto B, se hallará:

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{V^2}{2} + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2}$$

Así:

$$P_B = \left( \frac{P_A}{\rho} - f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} \right) \rho$$

El factor de fricción se determinará a partir del diagrama de Moody, mediante la determinación previa del número de Reynolds y asumiendo, según el enunciado que la tubería es lisa.

2. En el segundo apartado, cuando todo el sistema gira a una velocidad  $\Omega$  respecto al eje Z, se deberá utilizar la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas no inerciales, que se enuncia:

$$\begin{aligned} -\int_{SA} p \, d\vec{s} - \int_{SB} p \, d\vec{s} - \int_{SL} p \, d\vec{s} + \int_{SL} \vec{\tau} \, ds + \int_{VC} \rho \vec{g} \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} \, dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \, d\vec{s} \\ + \int_{VC} \rho \left[ \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right] dV \end{aligned}$$

Puesto que para el caso en estudio únicamente aparecen las aceleraciones centrípeta y de Coriolis, y dado que se tiene régimen permanente, la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} -\int_{SA} p \, d\vec{s} - \int_{SB} p \, d\vec{s} + F_{CF} + \int_{VC} \rho \vec{g} \, dV = \int_{SA} \rho \vec{v} \, d\vec{s} + \int_{SB} \rho \vec{v} \, d\vec{s} + \\ + \int_{VC} \rho \left[ 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right] dV \end{aligned}$$

de donde:





$$F_{CF} = -\dot{m}[2V_Y] \hat{k} + \int_{SA} p d\vec{s} + \int_{SB} p d\vec{s} - \int_{VC} \rho \vec{g} dV + \int_{VC} \rho [2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}] dV$$

$$F_{CF} = -\dot{m}[2V_Y] \hat{k} - P_A S \hat{k} - P_B S \hat{k} + \rho g L_{total} S \hat{k} + \int_{VC} \rho [2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}] dV$$

Las aceleraciones centrípeta y de Coriolis se calculan (v. figura 29.2):

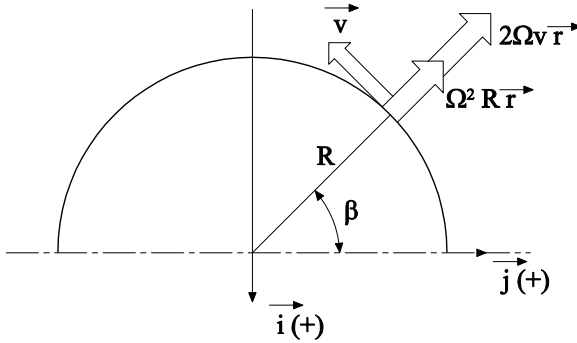


Fig. 29.2  
Representación  
direccional de  
las  
aceleraciones

a) En la curva principal

Coriolis:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -v \cos \beta & -v \sin \beta & 0 \end{vmatrix} = (-\Omega V \cos \beta \hat{j} + \Omega V \sin \beta \hat{i}) 2$$

Centrípeta:

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{R} = \Omega \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -R \sin \beta & R \cos \beta & 0 \end{vmatrix} = \Omega \wedge [-\Omega R \sin \beta \hat{j} - \Omega R \cos \beta \hat{i}] =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -\Omega R \cos \beta & -\Omega R \sin \beta & 0 \end{vmatrix} = -\Omega^2 R \cos \beta \hat{j} + \Omega^2 R \sin \beta \hat{i}$$

La fuerza sobre la curva principal debida a las aceleraciones de Coriolis y centrípeta será:

$$F_{CF(a)} = \int_0^\pi \rho [-\Omega V \sin \beta \hat{i} - \Omega V \cos \beta \hat{j} + \Omega^2 R \sin \beta \hat{i} - \Omega^2 R \cos \beta \hat{j}] dV$$

puesto que

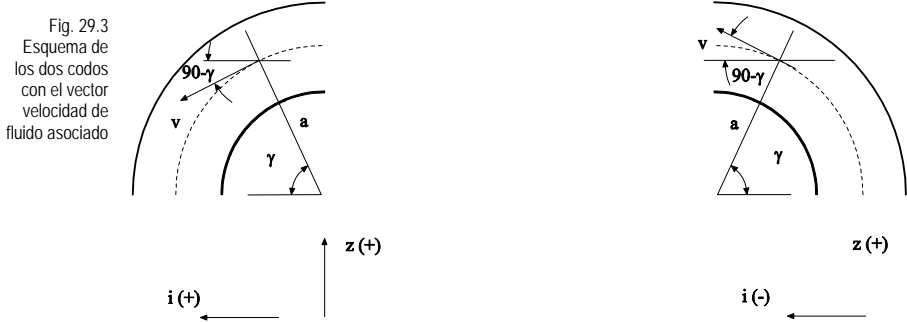
$$dV = SR d\beta$$

después de la integración se tiene:



$$F_{CF(a)} = +2\rho S R \Omega V \hat{i} + 2\rho S R^2 \Omega^2 \hat{i} = 2 \rho S R \Omega (R \Omega + V) \hat{i}$$

b) Las aceleraciones centrípeta y de Coriolis en los dos codos se obtienen (v. figura 29.3):



Coriolis, codo 1:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -v \cos(90-\gamma) & 0 & v \sin(90-\gamma) \end{vmatrix} = 2(-v \cos(90-\gamma) \Omega \hat{j})$$

Coriolis, codo 2:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ v \cos(90-\gamma) & 0 & -v \sin(90-\gamma) \end{vmatrix} = 2(v \cos(90-\gamma) \Omega \hat{j})$$

Obsérvese que la fuerza resultante de Coriolis que actúa sobre los codos 1 y 2 es nula.

Los radios desde el centro de coordenadas hasta un elemento diferencial genérico en los codos 1 y 2 se definen en la figura 29.4:

$$\vec{R}'_1 = a \cos \gamma \hat{i} + R \hat{j} - (a - a \operatorname{sen} \gamma) \hat{k}$$

$$\vec{R}'_2 = a \cos \gamma \hat{i} - R \hat{j} - (a - a \operatorname{sen} \gamma) \hat{k}$$

con lo cual la aceleración centrípeta para el codo 1 será:

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{R} = \Omega \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ a \cos \gamma & R & -a(1 - \operatorname{sen} \gamma) \end{vmatrix} = \Omega \wedge [\Omega a \cos \gamma \hat{j} - \Omega R \hat{i}] =$$

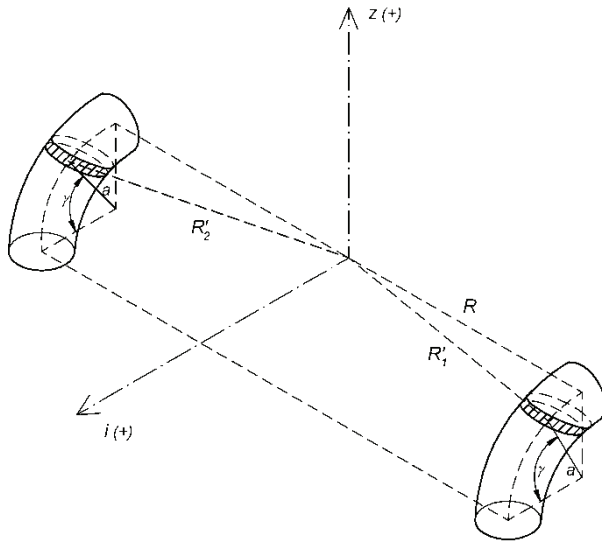


Fig. 29.4  
Esquema de los elementos diferenciales de radio

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ -\Omega R & \Omega a \cos \gamma & 0 \end{vmatrix} = -\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \cos \gamma \hat{i}$$

y para el codo 2 se tendrá:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{R} &= \Omega \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ a \cos \gamma & -R & -a(1 - \sin \gamma) \end{vmatrix} = \Omega \wedge [\Omega a \cos \gamma \hat{j} + \Omega R \hat{i}] = \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ \Omega R & \Omega a \cos \gamma & 0 \end{vmatrix} = \Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \cos \gamma \hat{i} \end{aligned}$$

La fuerza debida a la aceleración centrípeta para los codos 1 y 2 será:

$$F_{CF(b1,2)} = \int_{\forall C(\text{codos1,2})} \rho [2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}] d\forall$$

El diferencial de volumen vendrá dado por:

$$d\forall = S a d\gamma, \text{ de donde:}$$

$$F_{CB(b1,2)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho [-\Omega^2 a \cos \gamma \hat{i} - \Omega^2 R \hat{j} + \Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \cos \gamma \hat{i}] S a d\gamma$$

$$F_{CB(b1,2)} = -2\rho S a^2 \Omega^2 \hat{i}$$

c) Fuerzas debidas a las aceleraciones de Coriolis y centrípeta en los tramos rectos.



El radio genérico de un elemento diferencial de tubería al eje de coordenadas se define en la figura 29.5, de donde:

$$\vec{R}'' = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}$$

por lo que sus componentes para los tramos rectos conectados a los codos 1 y 2 serán:

Tramo unido al codo 1

$$\begin{aligned} R_x &= a \\ R_y &= R \\ R_z &= -(a+z) \end{aligned}$$

Tramo unido al codo 2

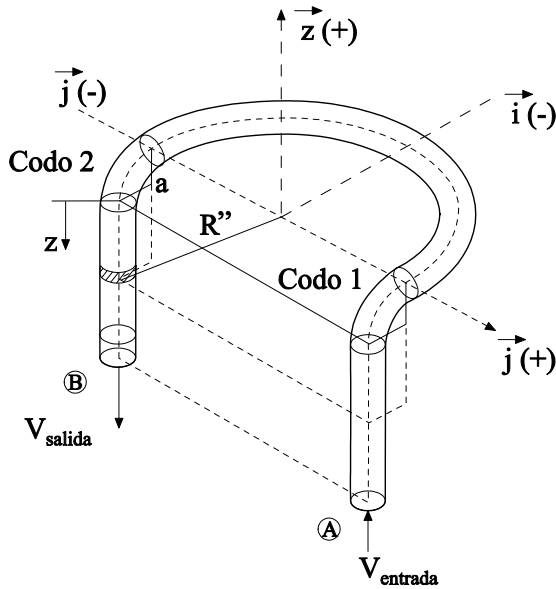
$$\begin{aligned} R_x &= a \\ R_y &= -R \\ R_z &= -(a+z) \end{aligned}$$

La aceleración de Coriolis en los tramos rectos será:

Tramo recto unido al codo 1:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & V_z \end{vmatrix} = 0$$

Fig. 29.5  
Esquema de un  
elemento  
diferencial de  
conducto



Tramo recto unido al codo 2:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & -V_z \end{vmatrix} = 0$$

La aceleración centrípeta será:

Tramo recto unido al codo 1:



$$\begin{aligned}\bar{\bar{\Omega}} \wedge \bar{\bar{\Omega}} \wedge \bar{\bar{R}} &= \Omega \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ a & R & -(a+z) \end{vmatrix} = \Omega \wedge [\Omega a \hat{j} - \Omega R \hat{i}] = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -\Omega R & \Omega a & 0 \end{vmatrix} = -\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i}\end{aligned}$$

Tramo recto unido al codo 2:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\Omega}} \wedge \bar{\bar{\Omega}} \wedge \bar{\bar{R}} &= \Omega \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ a & -R & -(a+z) \end{vmatrix} = \Omega \wedge [\Omega a \hat{j} + \Omega R \hat{i}] = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ \Omega R & \Omega a & 0 \end{vmatrix} = \Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i}\end{aligned}$$

Al sumar las fuerzas debidas a las aceleraciones de Coriolis y centrípeta en los tramos rectos del conducto, únicamente aparece:

$$F_{\text{tubo-recto 1}} = \int_{-(a+z)}^{-a} \rho (-\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i}) S dz = \rho S z (-\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i})$$

$$F_{\text{tubo-recto 2}} = \int_{-a}^{-(a+z)} \rho (\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i}) S dz = \rho S (\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i}) (-z)$$

Si se denomina L a la longitud del tramo recto, la fuerza actuante sobre los dos tramos rectos será:

$$F_{\text{tubo-recto}} = -\rho S \Omega^2 R L \hat{j}$$

La fuerza resultante sobre todos los diversos tramos del conducto se expresará:

$$\begin{aligned}F_{CF} &= -\dot{m} [2 V_y] \hat{k} - P_A S \hat{k} - P_B S \hat{k} + \rho g L_{\text{total}} S \hat{k} + \\ &+ [2 \rho S R \Omega (V + \Omega R) \hat{i}] - 2 \rho S a^2 \Omega^2 \hat{i} - \rho S R \Omega^2 L \hat{j}\end{aligned}$$

Obsérvese que la fuerza resultante tiene componentes en las tres direcciones.



### Problema 30

#### Enunciado

En la figura siguiente, se muestran dos configuraciones de una válvula para dirigir aceite hidráulico, denominada “servoválvula”. Obsérvese que el fluido se dirige a través de unas toberas hacia unas placas planas, denominadas *paletas*.

Se presentan dos configuraciones de conexión diferentes. Ambas constan de cuatro toberas y dos paletas y, en ambos casos, las dos paletas están unidas mediante una armadura y se mueven solidariamente.

Obsérvese que, en ambas configuraciones, dos de las toberas tienen flujo saliente, mientras que en las otras dos el flujo es entrante.

Sabiendo que la distancia entre cada tobera y paleta cuando las paletas están centradas es  $X_0$ , que el diámetro de las toberas es  $D$  y que se cumple que  $X_0 \ll D$ , determine:

1. La fuerza neta actuante sobre las dos paletas, para una posición genérica de las mismas y en función de los parámetros  $X_0$ ;  $D$ ;  $P_P$ ;  $P_A$ ;  $P_B$ ;  $P_R$ ;  $X$ ; se cumple que  $P_p > P_A$  &  $P_B > P_T$ .

$X$  es el desplazamiento de la paleta respecto a su posición central  $X_0$ .  $-X_0 \leq X \leq X_0$

Determine dicha fuerza neta actuante para las dos configuraciones de flujo, detalladas en los esquemas de las figuras siguientes, y comente las diferencias entre los resultados obtenidos.

Recuerde que la relación entre el caudal real que fluye por una obstrucción y el caudal teórico se da por el coeficiente de descarga  $C_d$ :  $C_d = \frac{Q_{\text{real}}}{Q_{\text{teórico}}}$ . Considere  $C_d$  conocido.

Fig. 30.1  
Configuración A

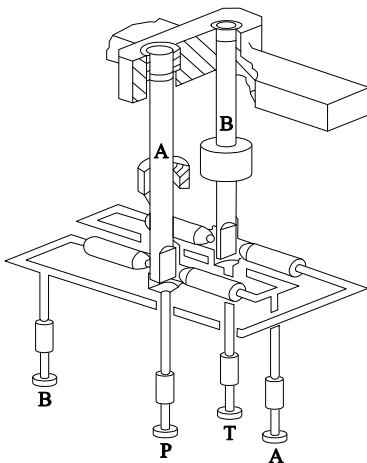
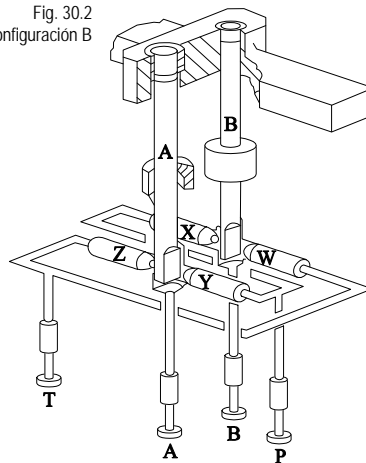


Fig. 30.2  
Configuración B





**Resolución**

Las dos configuraciones se pueden representar del modo siguiente

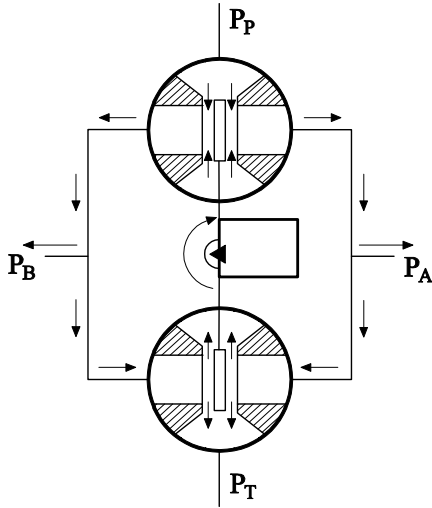


Fig. 30.3 Configuración A

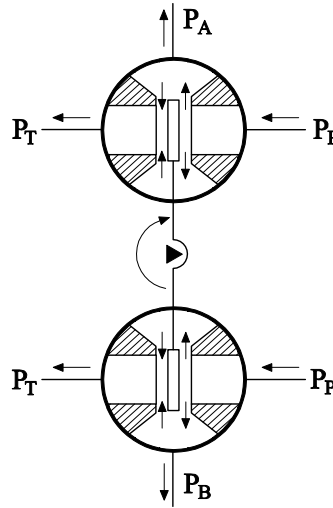


Fig. 30.4 Configuración B

Para determinar la fuerza que el fluido ejerce sobre las paletas, se aplica la ecuación de cantidad de movimiento.

$$-\int_{SE} P \cdot d\vec{S} - \int_{SS} P \cdot d\vec{S} - \int_{SL} P \cdot d\vec{S} + \int_{SL} \vec{\tau} \cdot d\vec{S} + \int_{Vc} \rho \cdot \vec{g} \cdot dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vc} \rho \cdot \vec{V}_i \cdot dV + \oint_{sc} \rho \cdot \vec{V}_i \cdot \vec{V}_r \cdot d\vec{S}$$

De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento a cada una de las diversas toberas, se obtiene lo siguiente.

Configuración A. (Obsérvese que el análisis se realiza en régimen permanente y se desprecian las fuerzas másicas).

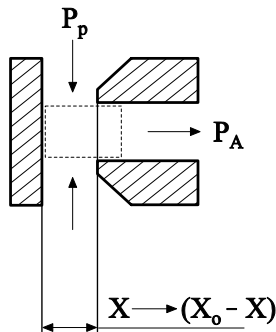


Fig. 30.5 Tobera 1, configuración A

$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_{A1} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dPT} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_0 - x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_P - P_A)}{\rho}}$$



Recuérdese que la magnitud  $X$  se entiende como el desplazamiento de la paleta respecto a su posición inicial.

$$v_{A_1} = \frac{Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot C_{dPR} \cdot (x_o - x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho}}$$

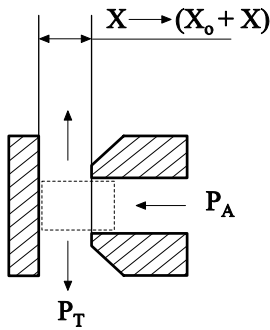
$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{dPR}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

siendo esta la fuerza de reacción, fuerza que la paleta ejerce en dirección  $X$ , sobre el fluido.

Configuración A, tobera 2, flujo de la tobera hacia la paleta.

De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control de la figura 30.6 se obtiene:

Fig. 30.6  
Tobera 2,  
configuración A



$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_{A_2} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dTP} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

$$v_{A_2} = \frac{4 \cdot C_{dTP} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{dTP}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

siendo esta la fuerza de reacción que la paleta ejerce sobre el fluido.

Configuración A, tobera 3, flujo de la tobera hacia la paleta.

Realizando los mismos pasos que en los apartados anteriores, ahora sobre el volumen de control de la figura 30.7, se obtiene:



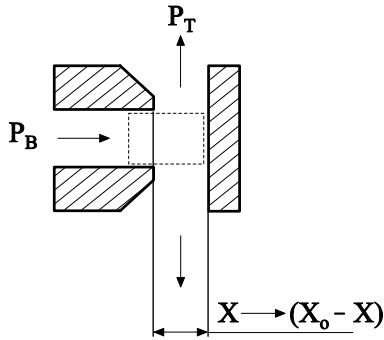


Fig. 30.7  
Tobera 3,  
configuración A

$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_{B1} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dTP} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o - x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

$$v_{B1} = \frac{4 \cdot C_{dTP} \cdot (x_o - x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{dTP}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Fuerza de reacción que la paleta ejerce sobre el fluido para este caso.

Configuración A, tobera 4, flujo de la paleta hacia la tobera.

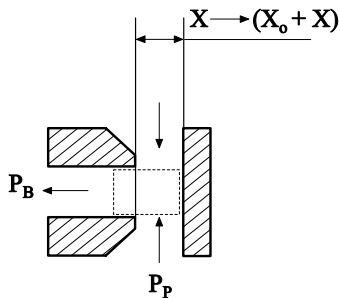


Fig. 30.8  
Tobera 4,  
configuración A

$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_{B2} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dPT} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho}}$$

$$v_{B2} = \frac{4 \cdot C_{dPT} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho}}$$

$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{dPT}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$



La fuerza neta que las dos paletas de la configuración A ejercen sobre el fluido, fuerza de reacción, será

$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{dPT}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} + \rho \cdot 4 \cdot C_{dTP}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \rho \cdot 4 \cdot C_{dTP}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \rho \cdot 4 \cdot C_{dPT}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_p - P_B)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Obsérvese que, si la  $P_A \neq P_B$ , el sistema tiende a desequilibrarse, debido a que las presiones estáticas actuantes sobre las paletas crean una fuerza resultante que tiende a desplazar las paletas de su posición original, incluso en el caso en que  $X=0$  (paleta centrada).

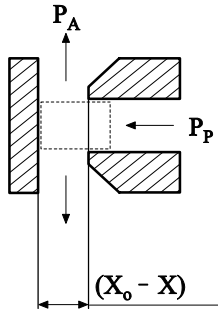
El par sobre la armadura sería esta fuerza por la distancia del eje de las toberas al eje de la armadura.

Para la segunda de las configuraciones, configuración B, se establece lo siguiente:

Configuración B, tobera 1, flujo de la tobera hacia la paleta.

Al igual que en los casos precedentes, se aplica la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control del caso bajo consideración. Para el presente caso, el volumen de control queda definido en la figura 30.9.

Fig. 30.9  
Tobera 1,  
configuración B



$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_p + P_p \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dTP} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o - x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho}}$$

$$v_p = \frac{4 \cdot C_{dTP} \cdot (x_o - x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho}}$$

$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{dTP}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho} + P_p \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

ecuación que establece la fuerza de reacción de la paleta sobre el contorno para el caso objeto de estudio.



Configuración B, tobera 2, flujo paleta-tobera.

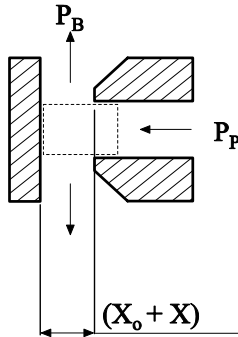


Fig. 30.10  
Tobera 2,  
configuración B

$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_T + P_P \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dTP} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho}}$$

$$v_T = \frac{4 \cdot C_{dTP} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho}}$$

$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{dTP}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho} + P_P \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Configuración B, tobera 3, flujo tobera-paleta.

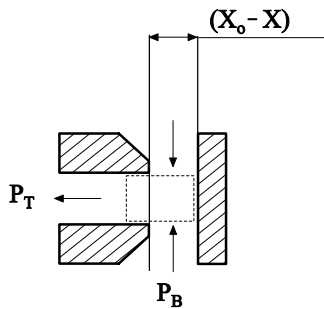


Fig. 30.11  
Tobera 3,  
configuración B

$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_p - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dPT} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o - x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

$$v_p = \frac{4 \cdot C_{dPT} \cdot (x_o - x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

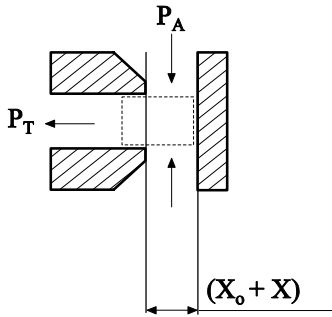
$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{dPT}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho} - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$



Al igual que en los casos anteriores, esta es la fuerza de reacción.

Configuración B, tobera 4, flujo de la paleta hacia la tobera.

Fig. 30.12  
Tobera 4,  
configuración B



$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_T - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{d_{PT}} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

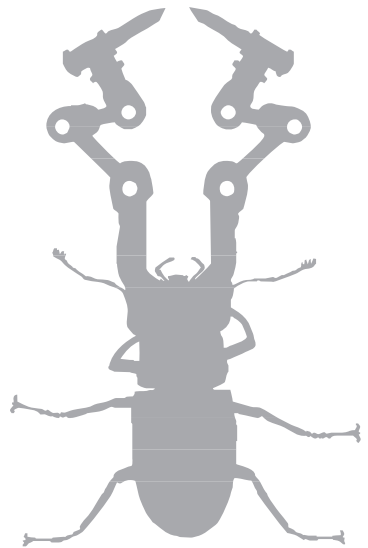
$$v_T = \frac{4 \cdot C_{d_{PT}} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho} - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

La suma de fuerzas de reacción que las paletas ejercen sobre el fluido, para esta segunda configuración es:

$$\begin{aligned} F_x = & \rho \times 4 \times C_{d_{TP}}^2 \times \pi \times (x_o - x)^2 \times \frac{2 \times (P_P - P_A)}{\rho} + P_P \times \frac{\pi \times D^2}{4} + \rho \times 4 \times C_{d_{TP}}^2 \times \pi \times (x_o + x)^2 \\ & \times \frac{2 \times (P_P - P_B)}{\rho} + P_P \times \frac{\pi \times D^2}{4} - \rho \times 4 \times C_{d_{PT}}^2 \times \pi \times (x_o - x)^2 \times \frac{2 \times (P_B - P_T)}{\rho} - P_T \times \frac{\pi \times D^2}{4} \\ & - \rho \times 4 \times C_{d_{PT}}^2 \times \pi \times (x_o + x)^2 \times \frac{2 \times (P_A - P_T)}{\rho} - P_T \times \frac{\pi \times D^2}{4} \end{aligned}$$

Véase que, en esta segunda configuración, la presión que multiplica a la sección de la tobera, es la de alimentación, que es constante, con lo que a priori, independientemente de que las presiones  $P_A$  y  $P_B$  sean o no iguales, la fuerza debida a las presiones estáticas siempre estará en equilibrio. Así, para esta segunda configuración, si existe una fuerza resultante que tienda a desequilibrar la posición de las paletas, esta será debida al flujo de cantidad de movimiento, no a las presiones estáticas; en consecuencia, se puede considerar esta segunda configuración más estable que la primera.



→ 6



## Ecuación del momento cinético

### Problema 31

#### Enunciado

En el conducto de la figura, el fluido sale de la ranura con una velocidad uniforme que varía linealmente con la distancia  $Y$ , tal como se muestra en la figura adjunta. Si el caudal volumétrico que entra por el conducto es  $Q$ , determine:

1. El valor de la velocidad máxima.
2. Los momentos que el fluido crea sobre el anclaje.
3. Si la parte inferior del conducto pudiese girar respecto al eje  $z$  (plano de corte) y sabiendo que el par antagonista al giro está dado por  $M=K\omega$ , siendo  $K=\text{cte}$ ;  $\omega=\text{vel de giro (rad/s)}$ , halle la velocidad de giro.

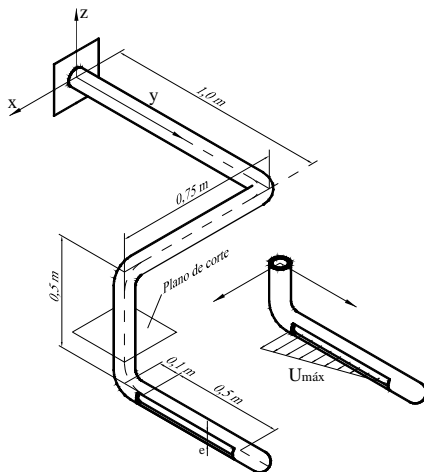


Fig. 31.1



### Resolución

1. Según la ecuación de continuidad en régimen permanente:

$$0 = \oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Para las secciones de entrada y salida:

$$\dot{m}_e = \int_{ss} \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

o bien:

$$Q_e = \int_{ss} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

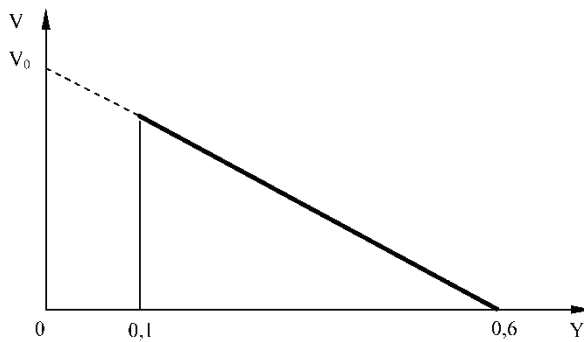
La ecuación que determina la distribución de velocidades en función de la distancia será:

$$a = \frac{u_{\text{máx}}}{0,6 - 0,1}$$

$$v = v_0 - ay$$

$$v = v_0 - \frac{u_{\text{máx}}}{0,6 - 0,1} y$$

Fig. 31.2



Siendo la velocidad en el origen de coordenadas,  $V_0$ .

$$\frac{u_{\text{máx}}}{0,5} = \frac{V_0}{0,6}$$

$$V_0 = \frac{0,6u_{\text{máx}}}{0,5}$$





de donde la ecuación que determina la velocidad será:

$$v = \frac{0,6u_{\text{máx}}}{0,5} - \frac{u_{\text{máx}}}{0,6-0,1}y$$

o bien:

$$v = \frac{u_{\text{máx}}}{0,5} [0,6 - y]$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad:

$$Q_e = \int_{0,1}^{0,6} u_{\text{máx}} \left( \frac{0,6 - Y}{0,5} \right) e \, dy = \frac{u_{\text{máx}}}{0,5} e \left[ 0,6Y - \frac{Y^2}{2} \right]_{0,1}^{0,6} = u_{\text{máx}} e 0,25$$

2. La ecuación de momento cinético en régimen permanente se enuncia:

$$\vec{M}_0 = \int_{se} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v})\vec{v}d\vec{s} + \int_{ss} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v})\vec{v}d\vec{s}$$

Puesto que el flujo entrante no causa momento respecto a ningún eje, se tiene:

$$\vec{M}_0 = \int_{ss} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v})\vec{v}d\vec{s}$$

el término  $\int \rho\vec{v}d\vec{s}$  representa el flujo másico saliente, que se puede dar como:

$\rho Q = \rho u_{\text{máx}} e 0,25$ , aunque en este caso, puesto que la  $V$  depende del  $ds$ , es necesario hacer la integración.

El término  $(\vec{r} \wedge \vec{v})$  se representa como:

$$(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,75 & (1+Y) & -0,5 \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0,5v \hat{j} - (1+Y)v \hat{k}$$

Sustituyendo en la ecuación de cantidad de movimiento, y sustituyendo asimismo la velocidad por su valor, se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \int e \rho \left[ -0,5u_{\text{máx}} \left( \frac{0,6 - Y}{0,5} \right) \hat{j} - (1+Y)u_{\text{máx}} \left( \frac{0,6 - Y}{0,5} \right) \hat{k} \right] u_{\text{máx}} \left( \frac{0,6 - Y}{0,5} \right) dy = \\ &= \int_{0,1}^{0,6} -e \rho u_{\text{máx}}^2 0,5 \left( \frac{0,6 - Y}{0,5} \right)^2 \hat{j} dy - \int_{0,1}^{0,6} (1+Y) e \rho u_{\text{máx}}^2 \left( \frac{0,6 - Y}{0,5} \right)^2 \hat{k} dy = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= -e\rho u_{\text{máx}}^2 \frac{1}{0,5} \left[ 0,6^2 Y - 2 \cdot 0,6 \cdot \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3} \right]_{0,1}^{0,6} \hat{j} \\
 &- e\rho u_{\text{máx}}^2 \frac{1}{0,25} \left[ 0,6^2 Y - 2 \cdot 0,6 \cdot \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3} \right]_{0,1}^{0,6} \hat{k} + \\
 &- e\rho u_{\text{máx}}^2 \frac{1}{0,25} \left[ 0,6^2 \frac{Y^2}{2} - 2 \cdot 0,6 \cdot \frac{Y^3}{3} + \frac{Y^4}{4} \right]_{0,1}^{0,6} \hat{k}
 \end{aligned}$$

de donde los momentos sobre el anclaje vendrán dados por:

$$\vec{M}_0 = -e\rho u_{\text{máx}}^2 0,0833 \hat{j} - e\rho u_{\text{máx}}^2 0,312 \hat{k}$$

3. Aplicando la ecuación de momento cinético respecto del eje z, situado perpendicular a la sección A-A, y considerando régimen permanente (velocidad de giro constante), se tiene (únicamente la sección saliente causa momento):

$$\vec{M}_z = \int_{ss} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v}) \vec{v} d\vec{s}$$

Para ese caso, considerando únicamente el par que provoca un giro sobre el aspersor, se tiene:

$$M_z = - \int_{ss} \rho y (v - \omega y) \vec{v} ds = - \int_{ss} \rho y (v - \omega y) v ds$$

La velocidad v es la velocidad con que el fluido sale por la sección de salida del conducto (velocidad absoluta del fluido), de donde:

$$\begin{aligned}
 M_z &= - \int_{ss} \rho y \left( u_{\text{máx}} \left( \frac{0,6-y}{0,5} \right) - \omega y \right) u_{\text{máx}} \left( \frac{0,6-y}{0,5} \right) e dy = \\
 &= - \int_{0,1}^{0,6} \frac{u_{\text{máx}}}{0,5} \rho e y \left[ u_{\text{máx}} \frac{(0,6-y)^2}{0,5} - \omega y (0,6-y) \right] dy = \\
 &= - \frac{u_{\text{máx}} \rho e}{0,5} \int_{0,1}^{0,6} \left[ \frac{u_{\text{máx}}}{0,5} (0,6^2 - 2 \cdot 0,6 y + y^2) y - \omega y^2 (0,6-y) \right] dy = \\
 &= - \frac{u_{\text{máx}} \rho e}{0,5} \left[ \frac{u_{\text{máx}}}{0,5} \left( 0,6^2 \frac{y^2}{2} - 2 \cdot 0,6 \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right) - \omega \left( 0,6 \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \right]_{0,1}^{0,6} = \\
 &= - \frac{u_{\text{máx}} \rho e}{0,5} \left[ \frac{u_{\text{máx}}}{0,5} \left( \frac{0,6^2}{2} (0,6^2 - 0,1^2) - \frac{2 \cdot 0,6}{3} (0,6^3 - 0,1^3) + \frac{0,6^4 - 0,1^4}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \omega \left( \frac{0,6}{3} (0,6^3 - 0,1^3) - \frac{0,6^4 - 0,1^4}{4} \right) \right]
 \end{aligned}$$



$$= -\frac{u_{\text{máx}}^2 \rho e}{0,5^2} 0,009375 + \omega 0,010625 \frac{u_{\text{máx}} \rho e}{0,5}$$

Puesto que el par antagonista es  $k \omega$ , se tiene:

$$k \omega = -\frac{u_{\text{máx}}^2 \rho e}{0,5^2} 0,009375 + \omega 0,010625 \frac{u_{\text{máx}} \rho e}{0,5}$$

$$\omega \left( -k + 0,010625 \frac{u_{\text{máx}} \rho e}{0,5} \right) = \frac{u_{\text{máx}}^2 \rho e}{0,5^2} 0,009375;$$

$$\omega = \frac{u_{\text{máx}}^2 \rho e}{0,5^2} 0,009375 \frac{1}{-k + 0,010625 \frac{u_{\text{máx}} \rho e}{0,5}}$$

## Problema 32

### Enunciado

Sea la turbina Pelton, esquematizada en la figura 32.1. Si se supone que el agua sale de la tobera a una velocidad  $V$  constante, que la velocidad de giro de la turbina es  $\omega$ , también constante, y que el fluido sale de los álabes de la turbina con un ángulo  $\alpha$ , determine:

1. La potencia comunicada al eje de la turbina. Considere  $r$  el radio de la turbina.
- 2.Cuál sería la velocidad de giro de la turbina si el par antagonista se estima que está determinado por:  $M = a + b \omega$ , siendo  $a$  y  $b$  dos constantes conocidas y  $\omega$  la velocidad de giro de la turbina.
3. Determine la ecuación del rendimiento de la turbina. ¿Qué consideraciones se pueden realizar para una turbina de  $\infty$  álabes?

Datos:  $V$ ,  $\omega$ ,  $r$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$ , ( $\omega$  ha de ser determinada en el apartado 2);  $\phi$  = diámetro del jet

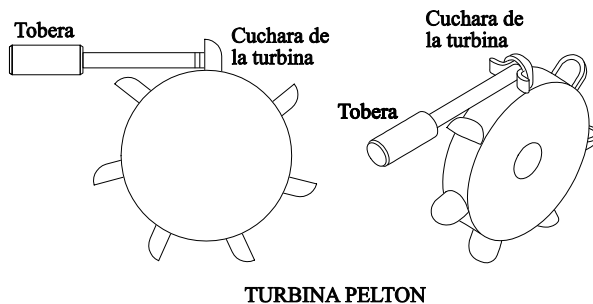


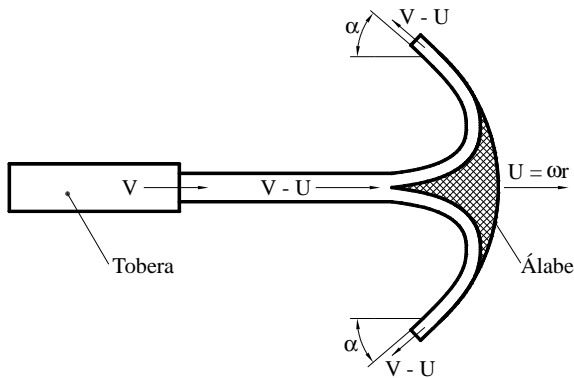
Fig. 32.1  
Esquema de  
una turbina  
Pelton



### Resolución

1. Utilizando un volumen de control que se desplace con el álabe de la turbina, y aplicando la ecuación de continuidad entre la entrada y, salida de dicho volumen de control, se desprende que la velocidad relativa del líquido a la entrada y a la salida es la misma.

Fig. 32.2  
Incidencia del chorro  
en el álabe con las  
velocidades relativas  
del fluido respecto a  
un volumen de  
control que se  
desplaza con el álabe



Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al mismo volumen de control móvil en régimen permanente se establece:

$$\sum F_{\text{ext } x} = - \int_{\text{vc}} P \bar{n} \, ds + \oint_{\text{sc}} \bar{\tau} \, ds + m \bar{g} = \oint_{\text{sc}} \rho \bar{V}_x \bar{V} \, d\bar{s} = \int_{\text{ssc}_1} \rho \bar{V}_x \bar{V} \, d\bar{s} + \int_{\text{ssc}_2} \rho \bar{V}_x \bar{V} \, d\bar{s}$$

despreciando los efectos de las fuerzas másicas:

$$\sum F_{x \text{ superficiales}} = \int_{\text{se}} \rho \bar{V}_x \bar{V} \, d\bar{s} + \int_{\text{ss}} \rho \bar{V}_x \bar{V} \, d\bar{s} \cdot 2$$

(+)      (-)                      (-)      (+)

$$F_{x \text{ sup}} = -\rho(v - \omega r)^2 S_e - \rho(v - \omega r)^2 \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot S_s$$

$$= -\rho(v - \omega r)^2 [S_e + 2S_s \cdot \cos \alpha]$$

y, aplicando la ecuación de continuidad entre la entrada y las salidas del volumen de control, se obtiene:

$$S_e V_e = S_s V_s \cdot 2$$

$$V_e = V_s = V - \omega r$$

$$S_e = 2S_s = S$$

$$F_{x \text{ superficiales}} = -\rho(v - \omega r)^2 \cdot S \cdot (1 + \cos \alpha)$$

Ésta es la fuerza que el contorno realiza sobre el fluido la fuerza que el fluido causa sobre el álabe es:



$$F_x = \rho(v - \omega r)^2 \cdot S \cdot (1 + \cos \alpha)$$

El par creado sobre el eje de giro debido a la fuerza hallada será:

$$M_o = F_x \wedge r = F_x \cdot r \hat{k} = \rho(v - \omega r)^2 \cdot S \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot r \hat{k}$$

La potencia comunicada será:

$$N_a = M_o \cdot \omega = \rho \left( v - \underbrace{\omega r}_u \right)^2 \cdot S \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot \underbrace{r \cdot \omega}_u$$

Para este volumen de control móvil, el caudal entrante al volumen de control será:

$$(v - \omega r) \cdot S = Q_E$$

de donde:

$$N_a = \rho(v - \omega r) \cdot Q_E \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot \omega r$$

2. Si el par antagonista es del tipo:

$M = A + B \omega$ , donde A y B son constantes, y  $\omega$  es la velocidad de giro en rad/s.

Igualando el par creado por el fluido al par antagonista, se tiene:

$$M_o = \rho(v - \omega r)^2 \cdot S \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot r = A + B \omega$$

ecuación de segundo grado; de aquí se despeja  $\omega$ :

$$v^2 - 2v \cdot \omega r + \omega^2 r^2 = [A + B \omega] \frac{1}{\rho S r (1 + \cos \alpha)} ;$$

$$-2v \cdot \omega r + \omega^2 r^2 - \omega \frac{B}{\rho S r (1 + \cos \alpha)} + v^2 - \frac{A}{\rho S r (1 + \cos \alpha)} = 0 ;$$

$$\omega^2 - 2v \frac{\omega}{r} - \omega \frac{B}{\rho S r^3 (1 + \cos \alpha)} + \frac{v^2}{r^2} - \frac{A}{\rho S r^3 (1 + \cos \alpha)} = 0 ;$$

$$\omega^2 - \omega \left[ \underbrace{\frac{2v}{r} + \frac{B}{\rho S r^3 (1 + \cos \alpha)}}_R \right] + \underbrace{\frac{v^2}{r^2} - \frac{A}{\rho S r^3 (1 + \cos \alpha)}}_S = 0 ;$$

$$\omega^2 - \omega R + S = 0$$



$$\omega = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4S}}{2}$$

3. Determinación del rendimiento de la turbina:

Considerando que el nivel libre del agua en la presa de aguas arriba de la turbina, respecto a ésta, es  $H$ , y despreciando las pérdidas en el conducto de la alimentación, se tiene que la potencia teórica a la entrada de la turbina es:

$$N_o = \rho g H Q = \rho g H v \cdot S = \frac{2}{2} \rho g H v \cdot S$$

puesto que  $v = \sqrt{2gH}$

$$N_o = \frac{1}{2} \rho S v^3$$

con lo cual el rendimiento se puede establecer como:

$$\eta = \frac{N_a}{N_o} = \frac{\rho (v - \omega r)^2 \cdot S (1 + \cos \alpha) \cdot \omega r}{\frac{1}{2} \rho S v^3} =$$

$$\eta = \frac{(v - \omega r)^2 \cdot \omega r \cdot (1 + \cos \alpha)}{\frac{1}{2} v^3}$$

El rendimiento máximo de la turbina se obtendrá para un valor del ángulo  $\alpha$  de 0 grados. Para este considerando se tiene:

$$\eta = \frac{(v - \omega r)^2 \cdot \omega r \cdot 2}{\frac{1}{2} v^3} = \frac{(v - u)^2 \cdot 4 u}{v^3} = 4 \frac{u}{v} \left[ \frac{v - u}{v} \right]^2$$

$$\eta = 4 \frac{u}{v} \left[ \frac{v - u}{v} \right]^2$$

Derivando el  $\eta$  respecto a  $\frac{u}{v}$  se obtendrá el valor de  $\frac{u}{v}$  para el cual la función será máxima:

$$\frac{d\eta}{d\left(\frac{u}{v}\right)} = 4 \left[ 1 - 4 \frac{u}{v} + 3 \left( \frac{u}{v} \right)^2 \right] = 0 ;$$



$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{1}{3} = 0;$$

De los dos resultados posibles, el único que tiene sentido físico es:  $\frac{u}{v} = \frac{1}{3}$ ;

con lo cual el rendimiento máximo se obtendrá cuando la relación entre la velocidad de salida del fluido por la tobera y la velocidad tangencial de la turbina sean:

$$\frac{u}{v} = \frac{\omega r}{v} = \frac{1}{3}$$

por otro lado, se observa que todo el proceso se ha realizado partiendo de la fuerza que el líquido ejerce sobre un álabe en solitario; puesto que la turbina tiene un número elevado de álabes que se suceden, se puede considerar que, en promedio, todo el caudal incidente realiza un trabajo; así, la fuerza media que actúa sobre los álabes se puede expresar (para  $\alpha=0$  grados):

$$F_{\text{media}} = 2\rho S \cdot v(v - \omega r)$$

Véase que ahora se considera que todo el caudal que sale por la tobera actúa sobre los álabes.

La potencia media será  $N_{\text{media}} = 2\rho S v(v - \omega r)\omega r$

El rendimiento se obtendrá

$$\eta = \frac{2\rho S v(v - \omega r)\omega r}{\frac{1}{2}\rho S v^3} = \frac{4(v - \omega r)\omega r}{v^2}$$

$$\eta = 4\frac{u}{v}\left(1 - \frac{u}{v}\right);$$

$$\frac{d\eta}{d\left(\frac{u}{v}\right)} = 4\left(1 - 2\frac{u}{v}\right) = 0$$

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{2}$$

Siendo ésta la relación de velocidades más apropiada para una turbina Pelton real.



### Problema 33

#### Enunciado

Sea un sistema de aspersión tal como el que se ilustra en la figura 33.1. Los brazos que unen las dos toberas tienen forma de perfil aerodinámico Göttingen 682, con una anchura y un ángulo de ataque constantes. Los coeficientes de arrastre y sustentación del perfil aerodinámico están dados por:

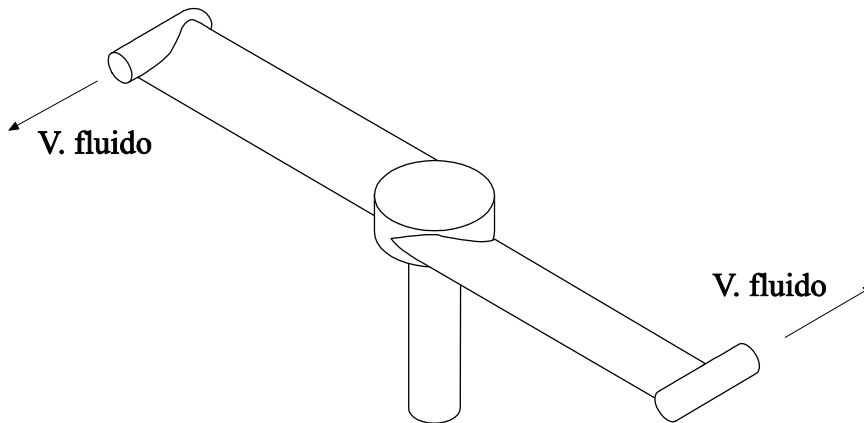
$$C_L = \frac{L}{\rho \frac{1}{2} V_{\infty}^2 S_{\text{proyectada}}}$$

$$C_D = \frac{D}{\rho \frac{1}{2} V_{\infty}^2 S_{\text{proyectada}}}$$

Considerar que la sección proyectada es la perpendicular al movimiento en cada caso.

El valor de los mismos se puede determinar partiendo de la curva polar adjunta, conocido el ángulo de ataque  $\alpha = 3^\circ$  figuras 33.2 y 33.3.

Fig. 33.1  
Esquema del  
sistema de  
aspersión  
considerado



Halle:

1. El par que crean los chorros de fluido, en función de la velocidad de salida del líquido por las toberas.
2. El par que se crea en el eje central, debido a la fuerza de arrastre.
- 3.-Si el peso del conjunto es de 1.000 N y ha de ser soportado por el efecto de sustentación de los álabes, determine: la velocidad de giro necesaria para producir la sustentación requerida. ¿Cuál es el caudal requerido para que dicha sustentación exista?  
Radio del aspersor:  $R = 0,5$  m.



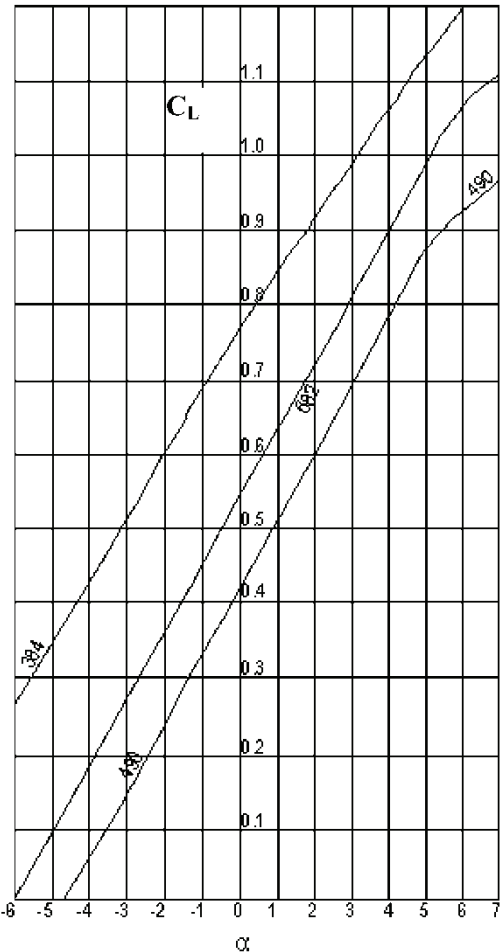


Fig 33.2  
Coeficiente de sustentación  $C_L$  en función del ángulo de ataque  $\alpha$ .

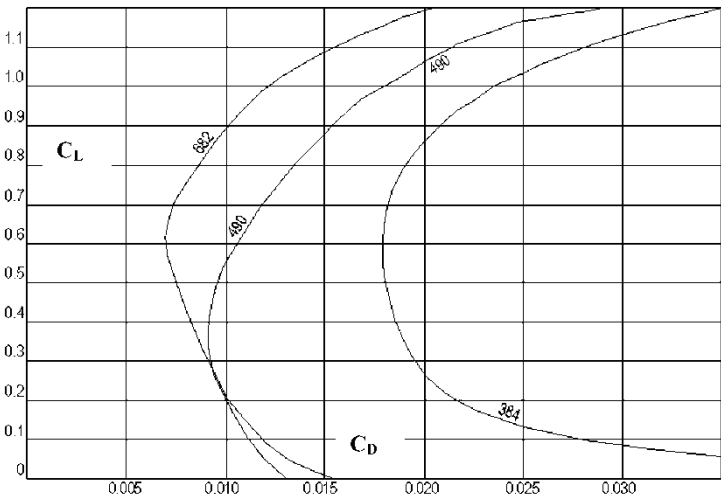


Fig. 33.3  
Curvas polares correspondientes a un colectivo de perfiles Göttingen.



### Resolución

1. La ecuación del momento de la cantidad de movimiento se expresa:

$$\vec{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_C} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v}) dV + \oint_{S_C} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v}) \vec{V} d\vec{s}$$

Aplicada al conjunto aspersor, teniendo en cuenta la simetría del mismo y que el flujo entrante no causa momento, se obtiene:

$$\vec{M}_0 = \int_{S_{salida}} 2\rho(\vec{r} \wedge \vec{v}) \vec{V} d\vec{s} = 2\rho r (V_{fluido} - \omega r) Q_{un\ aspersor} = \rho r (V_{fluido} - \omega r) Q_{entrante}$$

2. El momento resistente establecido para un diferencial de superficie del álabe vendrá dado por:

$$D = C_D \rho \frac{1}{2} V_{\infty}^2 S_{pd} \Rightarrow dD = C_D \rho \frac{1}{2} V_{\infty}^2 b \sin \alpha dr \Rightarrow dD = C_D \rho \frac{1}{2} \omega^2 r^2 b \sin \alpha dr$$

$b$  = anchura del álabe.  $dS_{pd} = b \sin \alpha dr$  ;

De la figura 33.2 entrando para un  $\alpha$  de  $3^\circ$  se obtiene un valor del coeficiente de sustentación de  $C_L=0,82$ ; con dicho valor del coeficiente de sustentación y para el perfil aerodinámico Göttinguen 682, a partir de la figura 33.3 se obtiene un valor del coeficiente de arrastre de  $C_D = 0,0088$ .

El momento producido por este diferencial de fuerza será:

$$dM = r dD = \frac{1}{2} C_D \rho r r^2 \omega^2 b \sin \alpha dr$$

de donde el momento que se opone al movimiento vendrá dado, teniendo en cuenta que existen dos álaves.

$$M = \int_0^R 2 \frac{1}{2} C_D \rho b \sin \alpha r^3 \omega^2 dr = C_D \rho b \sin \alpha \int_0^R r (\omega^2 r^2) dr$$

$$M = C_D \rho b \sin \alpha \omega^2 \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{4} C_D \rho b \sin \alpha \omega^2 R^4$$

Igualando los pares de arrastre y de momento cinético, se obtiene:

$$\frac{1}{4} C_D \rho b \sin \alpha \omega^2 R^4 = 2 \rho r (V_{flu} - \omega r) Q_{un\ aspersor} = \rho r (V_{flu} - \omega r) Q_{entrante}$$

Para  $r=R$ , que es la distancia de los chorros de salida al eje de giro, queda:

$$\frac{1}{4} C_D b \sin \alpha \omega^2 R^3 = (V_{flu} - \omega R) Q_{entrante}$$



En función de la sección proyectada de uno de los brazos del aspersor  $S_{PD} = R b \sin \alpha$ , se tiene:

$$\frac{1}{4} C_D S_{PD} \omega^2 R^2 = (V_{flu} - \omega R) Q_{entrante}$$

3. La fuerza de sustentación viene dada por:

$$L = \rho C_L \frac{1}{2} V_{\infty}^2 S_{PL}$$

Para un diferencial de superficie, se tiene:

$$dL = \rho C_L \frac{1}{2} V_{\infty}^2 b \cos \alpha dr$$

$$dL = \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 r^2 b \cos \alpha dr$$

$$\int_0^L dL = \int_0^R \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 r^2 b \cos \alpha dr$$

de donde la fuerza de sustentación para los dos brazos del aspersor será:

$$L = 2 \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R b \cos \alpha$$

$$L = \rho C_L \frac{\omega^2 R^2 b \cos \alpha R}{3} = \rho C_L \frac{1}{3} S_{PL} \omega^2 R^2; \quad S_{PL} = R b \cos \alpha;$$

Puesto que  $L = 1.000 \text{ N}$ ;  $\rho C_L \frac{1}{3} S_{PL} \omega^2 R^2 = 1.000 = L$

Con lo cual la velocidad de giro será:

$$\omega = \sqrt{\frac{L}{\rho C_L \frac{1}{3} S_{PL} R^2}}$$

Una vez determinado  $\omega$  para hallar el caudal circulante, se utilizará la ecuación hallada en el apartado 2:

$$\frac{1}{4} C_D S_{PD} \omega^2 R^2 = (V_{flu} - \omega R) Q_{entrante} = 2 (V_{flu} - \omega R) Q_{un aspersor}$$

$$V_{flu} = \frac{Q_{un aspersor}}{S_{conducto aspersor}}; \quad \frac{1}{4} C_D S_{PD} \omega^2 R^2 = 2 \left( \frac{Q_{un aspersor}}{S_{conducto aspersor}} - \omega R \right) Q_{un aspersor}$$



$$\frac{Q_{\text{un aspersor}}^2}{S_{\text{conducto}}} - \omega R Q_{\text{un aspersor}} = \frac{1}{8} C_D S_{PD} \omega^2 R^2$$

$$Q_{\text{un aspersor}}^2 - \omega R S_{\text{conducto}} Q_{\text{un aspersor}} - \frac{1}{8} C_D S_{PD} \omega^2 R^2 S_{\text{conducto}} = 0$$

Ecuación de segundo grado de la cual se obtendrá el caudal saliente en una de las toberas.

## Problema 34

### Enunciado

Se desea realizar los cálculos preliminares para el estudio de un helicóptero. A priori, se estima que la masa del helicóptero será  $m$ , el rotor principal tendrá tres palas y el de la cola, cuatro. Las dimensiones principales del rotor principal y el de la cola se establecen en el dibujo adjunto. (Figura 34.1).

Si el ángulo de ataque de los álabes de ambos rotores se quiere a priori mantener constante igual a 4 grados, y para el perfil aerodinámico elegido se conoce que los coeficientes de sustentación y arrastre, tanto para el rotor principal como el de la cola, son:  $C_L=0,8$ ;  $C_D=0,0135$ , se pide:

1. Hallar la velocidad de giro del rotor principal  $\omega$  para que el helicóptero de masa  $m$  se mantenga en suspensión.
  2. Determinar la ecuación de la velocidad de giro del rotor principal en función de la altura  $a$  a la que se encuentre el helicóptero. Téngase en cuenta que la variación de la temperatura del aire con la altura de la atmósfera terrestre es  $T=T_0 - Kh$ .
- $T$  y  $T_0$  están dados en grados kelvin.  $K$  es una constante conocida.  $h$  es la altura en metros.
3. Hallar la potencia del motor del rotor principal cuando el helicóptero se encuentra al nivel del mar.
  4. Determinar el radio  $r_4$  para que el rotor de cola compense el par creado por el rotor principal. Considerar que el rotor de cola gira a una velocidad angular constante  $\Omega$ .

Recuérdese que:

$$\text{Fuerza de sustentación} = L = \rho C_L \frac{1}{2} V_\infty^2 S; \quad \text{fuerza de arrastre} = D = \rho C_D \frac{1}{2} V_\infty^2 S;$$

$V_\infty$ = velocidad del fluido sobre cada elemento diferencial de superficie del álabe.

$S$ = superficie proyectada, en planta, del álabe.

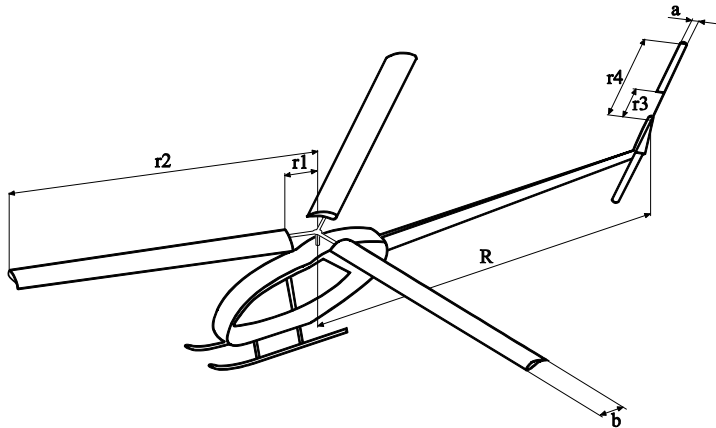


Fig. 34.1. Esquema del helicóptero. Por razones de nitidez, se ha realizado el dibujo con únicamente dos palas en el rotor de cola. No obstante, en los cálculos se consideraran cuatro palas, puesto que así lo indica el enunciado.

## Resolución

1. Velocidad de giro para que el helicóptero de masa  $m$  se mantenga en suspensión.

Se conocen los siguientes datos: Ángulo de ataque  $\alpha = 4^\circ$ ;  $C_L = 0,8$ ;  $C_D = 0,0135$

El balance ha de ser tal que la fuerza de sustentación sea igual al peso del helicóptero.

La fuerza de sustentación viene dada por:

$$L = \rho_{\text{aire}} C_L \frac{1}{2} V_\infty^2 S$$

$S$  = superficie proyectada del álabes

$V_\infty$  = velocidad del fluido

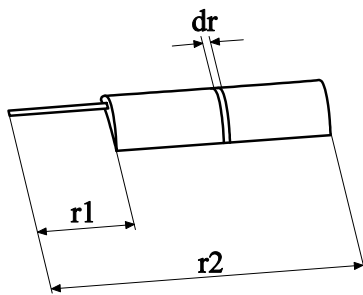


Fig. 34.2

$$\int_0^L dL_1 = \int_{r_1}^{r_2} \rho C_L \frac{1}{2} (\omega r)^2 b \cos \alpha dr$$

$$L_1 = \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 b \cos \alpha \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$L_1 = \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 b \cos \alpha \frac{r_2^3 - r_1^3}{3};$$



Esta es la fuerza de sustentación que crea un álabe; puesto que hay tres, la fuerza de sustentación será

$$L_{\text{rotor principal}} = \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 b \cos \alpha (r_2^3 - r_1^3) = \text{masa del helicóptero} * g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{\text{heli}} \cdot g}{\rho C_L \frac{1}{2} b \cos \alpha (r_2^3 - r_1^3)}}$$

2. Para hallar la velocidad de giro en función de la altura a la que se encuentra el helicóptero respecto al nivel del mar, es necesario determinar la densidad del aire en función de dicha altura: considerando el aire como fluido ideal:

$$\rho = \frac{P}{RT}; \quad dp = -\rho g dh$$

$$T = T_0 - kh; \quad T_0 = \text{temperatura a nivel del mar}$$

$k = \text{constante conocida}$

La presión del aire en función de la altura será

$$\int_{P_{\text{atm}}}^P \frac{dP}{P} = \int_0^h -\frac{g}{R(T_0 - kh)} dh$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_{\text{atm}}}\right) = \frac{g}{kR} \ln\left[\frac{T_0 - kh}{T_0}\right]$$

$$P = P_{\text{atm}} \left(\frac{T_0 - kh}{T_0}\right)^{\frac{g}{kR}}$$

Esta ecuación proporciona la variación de la presión del aire con la altura.

La velocidad de giro del rotor en función de la altura a la que se encuentra el helicóptero vendrá dada:

La densidad del aire en función de la altura es

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{P}{R(T_0 - kh)} = \frac{1}{R(T_0 - kh)} \cdot P_{\text{atm}} \left(\frac{T_0 - kh}{T_0}\right)^{\frac{g}{kR}} = \frac{P_{\text{atm}}}{R T_0^{\left(\frac{g}{kR}\right)}} (T_0 - kh)^{\left(\frac{g}{kR} - 1\right)}$$

Con lo que:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{\text{heli}} \cdot g}{C_L \frac{1}{2} b \cos \alpha (r_2^3 - r_1^3) \cdot \frac{P_{\text{atm}}}{R T_0^{\left(\frac{g}{kR}\right)}} (T_0 - kh)^{\left(\frac{g}{kR} - 1\right)}}}$$

Esta ecuación da la velocidad de giro del rotor principal en función de la altura a la que esté situado el helicóptero.

3. La potencia del rotor principal será la que se requiera para vencer el par generado por dicho rotor. El par creado por una de las palas del rotor principal será

$$D = C_d \rho \frac{1}{2} v_\infty^2 s$$

$$dD = C_d \rho \frac{1}{2} \omega^2 r^2 b \operatorname{sen} \alpha \, dr$$

$$\int_0^M dM = dD \cdot r = \int_{r_1}^{r_2} C_d \rho \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cdot r \cdot b \operatorname{sen} \alpha \, dr$$

$$M_1 = C_d \rho \frac{1}{2} \omega^2 b \operatorname{sen} \alpha \frac{(r_2^4 - r_1^4)}{4}$$

El par creado por las tres palas es

$$M_{\text{total}} = 3 C_d \rho \frac{1}{8} \omega^2 b \operatorname{sen} \alpha (r_2^4 - r_1^4)$$

La potencia del motor será  $N_{\text{motor}} = M_{\text{total}} \cdot \omega$

4. Para hallar el par que sobre el eje principal crea el rotor de cola, se determinará la fuerza que en sentido horizontal crean las cuatro palas del rotor de cola. Dicha fuerza por la distancia entre los dos ejes  $R$  será el par que el rotor de cola crea sobre el eje principal.

La fuerza en sentido horizontal creada por una de las palas se determina:

Sea  $\beta$  el ángulo de ataque de las palas del rotor de cola. La velocidad de giro del rotor de cola es  $\Omega$ .

$$\int_0^L dL = \int_{r_3}^{r_4} \rho C_L \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 a \cos \beta \, dr$$

$$L_1 = C_L \rho \frac{1}{2} \Omega^2 a \cos \beta \frac{(r_4^3 - r_3^3)}{3}$$

La fuerza creada por las cuatro palas del rotor de cola es

$$L_{\text{cola}} = \frac{2}{3} C_L \rho \Omega^2 a \cos \beta (r_4^3 - r_3^3)$$

El par sobre el eje del rotor principal creado por el rotor de cola será

$$M_{\text{cola}} = \frac{2}{3} C_L \rho \Omega^2 a \cos \beta (r_4^3 - r_3^3) \cdot R$$



Obsérvese que el parámetro  $R$  caracteriza la distancia perpendicular entre el eje de giro del rotor principal y el eje de giro del rotor de cola.

Este par es el que ha de compensar el par creado por el rotor principal, con lo cual

$$3C_d \frac{1}{8} \omega^2 b \operatorname{sen} \alpha (r_2^4 - r_1^4) = \frac{2}{3} C_L \Omega^2 a \cos \beta R (r_4^3 - r_3^3)$$

$$r_4 = \sqrt[3]{\frac{C_d \frac{3}{8} \omega^2 b \operatorname{sen} \alpha (r_2^4 - r_1^4)}{\frac{2}{3} C_L \Omega^2 a \cos \beta R} + r_3^3}$$

ecuación que caracteriza el radio del rotor de cola para compensar el par de giro creado por el rotor principal.

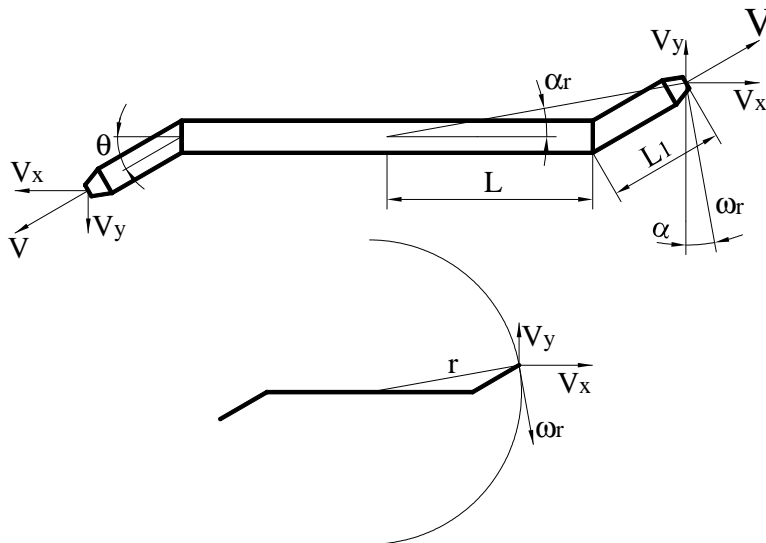
### Problema 35

#### Enunciado

Sea el aspersor esquematizado de la figura 35.1, conocidos el diámetro de las toberas de salida, las longitudes  $L$  y  $L_1$  de los brazos del aspersor, el ángulo  $\theta$ , el caudal másico entrante  $\dot{m}$ , la densidad del fluido  $\rho$  y el par antagonista  $M_o = k \omega$ , siendo  $k =$  constante, y  $\omega$  la velocidad de giro en rad/s. Para la realización de este problema, no es necesario que se consideren en los diversos tramos del conducto, las aceleraciones centrípeta y coriolis.

Se pide hallar la ecuación que determina la velocidad de giro del aspersor.

Fig. 35.1  
Esquema del  
aspersor, con  
sus parámetros  
físicos  
fundamentales







## Resolución

La ecuación de momento cinético para sistemas inerciales se enuncia:

$$\Sigma \mathbf{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{sc} (\bar{\mathbf{r}} \wedge \bar{\mathbf{v}}) \rho dV + \int_{sc} (\bar{\mathbf{r}} \wedge \bar{\mathbf{v}}) \rho \bar{\mathbf{v}} d\bar{s}$$

En régimen permanente, para los dos brazos:

$$\Sigma \mathbf{M}_0 = 2 \int_{ss} (\bar{\mathbf{r}} \wedge \bar{\mathbf{v}}) \rho \bar{\mathbf{v}} d\bar{s}$$

Datos:

$$\begin{aligned} r_x &= L + L_1 \cos \theta & \alpha &= \arctg \frac{L_1 \operatorname{sen} \theta}{L + L_1 \cos \theta} & r &= \frac{r_x}{\cos \alpha} = \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \\ r_y &= L_1 \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

$$v_x = v \cos \theta + \omega r \operatorname{sen} \alpha = v \cos \theta + \omega \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha$$

$$v_y = v \operatorname{sen} \theta - \omega r \cos \alpha = v \operatorname{sen} \theta - \omega (L + L_1 \cos \theta)$$

$$\bar{\mathbf{r}} \wedge \bar{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = r_x v_y \hat{\mathbf{k}} - r_y v_x \hat{\mathbf{k}} ;$$

$$\bar{\mathbf{r}} \wedge \bar{\mathbf{v}} = (L + L_1 \cos \theta) \cdot [v \operatorname{sen} \theta - \omega (L + L_1 \cos \theta)] \hat{\mathbf{k}}$$

$$-L_1 \operatorname{sen} \theta \left[ v \cos \theta + \omega \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha \right] \hat{\mathbf{k}}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_0 = 2 \int_{sc} \rho \begin{bmatrix} (L + L_1 \cos \theta) \cdot [v \operatorname{sen} \theta - \omega (L + L_1 \cos \theta)] \hat{\mathbf{k}} \\ -L_1 \operatorname{sen} \theta \left[ v \cos \theta + \omega \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha \right] \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \cdot \bar{\mathbf{v}} ds$$

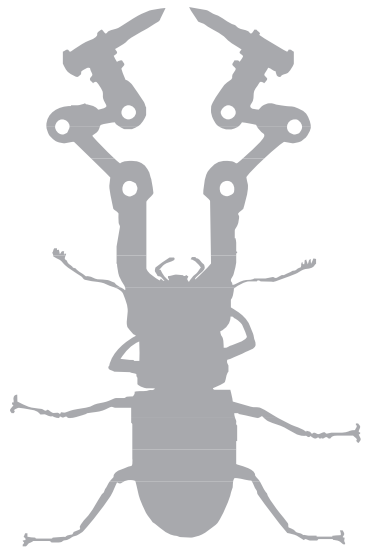
$$\Sigma \mathbf{M}_0 = \mathbf{k} \cdot \omega = \dot{m} \begin{bmatrix} (L + L_1 \cos \theta) \cdot [v \operatorname{sen} \theta - \omega (L + L_1 \cos \theta)] \\ -L_1 \operatorname{sen} \theta \left[ v \cos \theta + \omega \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha \right] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} \cdot \omega = \dot{m} \begin{bmatrix} (L + L_1 \cos \theta)^2 \cdot [-\omega] + [(L + L_1 \cos \theta)] v \operatorname{sen} \theta \\ -L_1 v \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \omega L_1 \operatorname{sen} \theta \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \frac{k \cdot \omega}{\dot{m}} + \omega (L + L_1 \cos \theta)^2 + \omega L_1 \operatorname{sen} \theta \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha &= \\ &= (L + L_1 \cos \theta) v \operatorname{sen} \theta - L_1 v \operatorname{sen} \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{(L + L_1 \cos \theta) v \operatorname{sen} \theta - L_1 v \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\frac{k}{\dot{m}} + (L + L_1 \cos \theta)^2 + L_1 \operatorname{sen} \theta \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha}$$



→7

## Ecuación de la energía

### Problema 36

#### Enunciado

El compresor de la figura adjunta comprime 5 kg/s de aire; las condiciones termodinámicas a la entrada del compresor son:  $T_1 = 297 \text{ K}$  y  $P_1 = 92.000 \text{ Pa}$  (presión absoluta); las condiciones del fluido a la salida son:  $T_2 = 380 \text{ K}$  y  $P_2 = 300.000 \text{ Pa}$  (presión absoluta). El perfil de velocidades del fluido a la entrada se considera uniforme, mientras que a la salida se considera parabólico, y está definido por la

$$\text{ecuación: } U = U_{\text{máx}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Si se considera que el flujo es estacionario y la transferencia de calor es despreciable, determine la potencia requerida para accionar el compresor.

$$\text{Capacidad calorífica a volumen constante del aire } C_v = 720 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

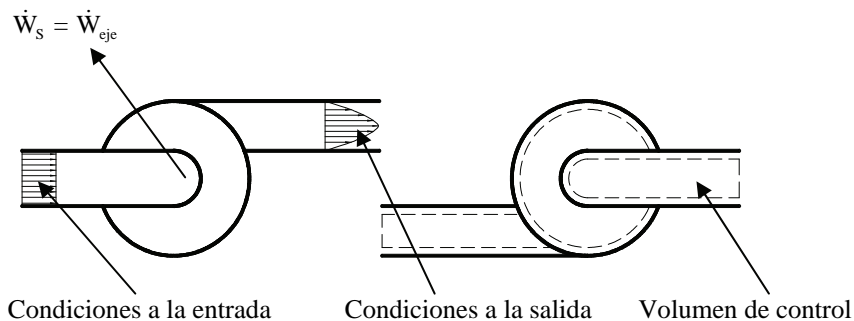


Fig. 36.1



Datos:

$$\dot{m} = 5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$T_1 = 297 \text{ K}$$

$$P_1 = 92.000 \text{ Pa}$$

$$R_1 = 0,2 \text{ m}$$

$$T_2 = 380 \text{ K}$$

$$P_2 = 300.000 \text{ Pa}$$

$$R_2 = 0,2 \text{ m}$$

### Resolución

La ecuación de la energía para régimen permanente y volumen de control fijo y rígido se enuncia:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \oint_{SC} \rho \left( u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$$

$$\dot{W}_s = \dot{W}_{\text{eje}} + \dot{W}_t; \quad \text{se considera} \quad \begin{aligned} \dot{Q} &= 0 \\ \dot{W}_t &= 0 \quad (\text{no hay pérdidas}) \\ Z_1 &= Z_2 \end{aligned}$$

de donde:

$$-\dot{W}_{\text{eje}} = \oint_{SC} \rho \left( u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$$

$$-\dot{W}_{\text{eje}} = \dot{m} \left[ (u_2 - u_1) + \left( \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) \right] + \int_{S.\text{salida}} \rho_2 \frac{\bar{v}^2}{2} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \dot{m} \frac{v_1^2}{2}$$

$$\int_{S.\text{salida}} \rho_2 \frac{v^3}{2} ds = \int_0^{R_2} \rho_2 u_{\text{máx}}^3 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]^3 \frac{2\pi r}{2} dr = \frac{\pi \rho_2 u_{\text{máx}}^3 R_2^2}{8}$$

para determinar la relación entre la velocidad media y la velocidad máxima:

$$\dot{m} = \rho_2 \bar{v}_2 S_2 = \int_0^{R_2} \rho_2 u_2 2\pi r dr = \int_0^{R_2} \rho_2 u_{\text{máx}} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)^2 2\pi r dr$$

$$\rho_2 \bar{v}_2 \pi R_2^2 = \rho_2 u_{\text{máx}} 2\pi \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4 R^2} \right]_0^{R_2}$$

$$\rho_2 \bar{v}_2 \pi R_2^2 = \rho_2 u_{\text{máx}} 2\pi \frac{R_2^2}{4}$$

$$u_{\text{máx}} = \bar{v}_2 \cdot 2$$

de donde:

$$\int_{\text{S.salida}} \rho_2 \frac{v^3}{2} ds = \frac{\pi \rho_2 u_{\text{máx}}^3 R_2^2}{8} = \frac{\pi \rho_2 \bar{v}_2^3 8 R_2^2}{8} = \dot{m} \bar{v}_2^2$$

Recordando que la ley de los gases perfectos es:  $\frac{P}{\rho} = RT$  ;

sustituyendo en la ecuación de energía queda:

$$-\dot{W}_{\text{eje}} = \dot{m} (C_v (T_2 - T_1)) + \dot{m} R (T_2 - T_1) + \dot{m} \left( \frac{\bar{v}_2^2}{2} - \frac{\bar{v}_1^2}{2} \right)$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 S_2} = \frac{\dot{m} R T_2}{P_2 S_2} = 14,46 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \bar{v}_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 S_1} = \frac{\dot{m} R T_1}{P_1 S_1} = 36,86 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$-\dot{W}_{\text{eje}} = 5 \times 720 \times (380 - 297) + 5 \times 287 \times (380 - 297) + 6 \times \left( 14,46^2 - \frac{36,86^2}{2} \right)$$

$-\dot{W}_{\text{eje}} = 415.553 \text{ W}$  El signo indica que se trata de energía que se comunica al volumen de control.

## Problema 37

### Enunciado

Sea un tanque de almacenamiento de combustible de grandes dimensiones. El nivel del combustible y la presión del mismo se pueden considerar constantes. El combustible es bombeado fuera del tanque mediante una bomba volumétrica, y a la salida de la misma se encuentra un intercambiador de calor que tiene como función incrementar la



temperatura del fluido. Conociendo que la temperatura en el tanque es de  $5^{\circ}\text{C}$ , que el intercambiador de calor aporta una energía al fluido de  $10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ , que el caudal circulante es de  $0,004 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  y que la longitud de la tubería es de 100 m, determine:

1. La potencia requerida en la bomba.
2. La temperatura a la salida del conducto.

Considere el sistema térmicamente aislado y que la densidad ( $\rho$ ) se mantiene constante.

Datos:

Rendimiento hidráulico de la bomba:  $\eta_H = 90\%$

Factor de fricción del conducto:  $f_{\text{conducto}} = 0,022$

$$\Delta Y_{\text{intercambiador}} = 5 \cdot 10^6 \cdot Q^2, \text{ donde: } \Delta Y \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]; Q \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

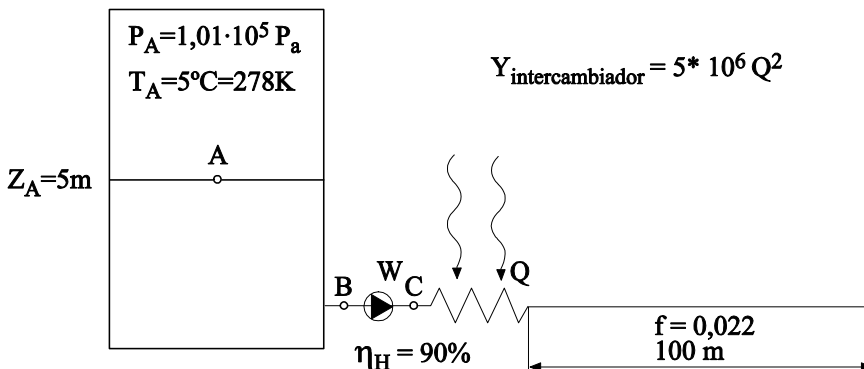
$$\rho = 875 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$P_{\text{salida del conducto (punto D)}} = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$c_{\text{vfuel}} = 2.000 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\phi_{\text{conducto}} = 0,05\text{m}$$

Fig. 37.1





## Resolución

1. Aplicando la ecuación de la energía entre A y D, se tiene:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{bomba}} = \int_{S_A} \rho \left( \frac{P}{\rho} + u + \frac{v^2}{2} + gz \right) V dS + \int_{S_D} \rho \left( \frac{P}{\rho} + u + \frac{v^2}{2} + gz \right) V dS + \dot{W}_\tau$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{bomba}} = m \left( \frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + u_D - u_A + \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_D - z_A) \right) + \dot{W}_\tau$$

Se ha de entender que la potencia que la bomba comunica al fluido se utiliza para variar su energía cinética y potencial, y vencer los esfuerzos cortantes que impiden el movimiento del fluido. Que el fluido se caliente o enfríe, implica que su viscosidad variara y por tanto también variarían los esfuerzos cortantes. No obstante para este primer apartado se considerara que la viscosidad del fluido se mantiene constante en todo el dominio. Que es lo mismo que suponer que no existe transferencia de calor y, por tanto, no habrá gradiente térmico.

La potencia que la bomba comunica al fluido será:

$$-W_{\text{fluido}} = \frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_D - z_A) + \Delta Y_{\text{intercambiador}} + \Delta Y_{\text{conductor}}$$

$$-W_{\text{fluido}} = \frac{4 \cdot 10^5}{875} - \frac{1,01 \cdot 10^5}{875} + \frac{1}{2} \left( \frac{0,004}{\frac{\pi \cdot 0,05^2}{4}} \right)^2 - 0 + g(0 - 5) + 5 \cdot 10^6 \cdot Q^2 +$$

$$+ \frac{0,022}{2} \cdot \frac{100}{0,05} \left( \frac{0,004}{\frac{\pi \cdot 0,05^2}{4}} \right)^2$$

$$-W_{\text{fluido}} = 457,14 - 120 + 2,075 - 49 + 80 + 91,3$$

$$W_{\text{fluido}} = -461,51 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Según el convenio de signos de termodinámica, el signo negativo indica que se trata de energía comunicada al fluido.

Dado que el rendimiento hidráulico es del 90%, la energía por unidad de masa es:

$$W_{\text{eje}} = W_{\text{fluido}} \cdot \frac{1}{0,9} = 512,79 \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$



$$\dot{W}_{\text{eje}} = 512,79 \cdot 875 \cdot 0,004 = 1.794,78 \left[ \frac{\text{J}}{\text{s}} \right]$$

El calor que la bomba transfiere al fluido es el 10% de esta energía.

2. La temperatura del fuel a la salida del conducto, punto D, será debida al incremento de temperatura producido por el intercambio de calor y las pérdidas de energía en la bomba y los conductos, que se transforman en calor comunicado al fluido.

Aplicando de nuevo la ecuación de la energía entre A y D: (Obsérvese que no se incluyen las pérdidas de carga por rozamiento entre fluido y conducto).

$$Q - \dot{W}_{\text{eje}} = \dot{m} \left( \frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + u_D - u_A + \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_D - z_A) \right)$$

$$Q - W_{\text{eje}} = \frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + u_D - u_A + \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_D - z_A)$$

de donde:

$$T_D - T_A = \frac{Q - W_{\text{eje}} - \left[ \frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_D - z_A) \right]}{c_v}$$

Véase que  $W_{\text{eje}}$  engloba los términos de energía cinética y potencial, así como las pérdidas por fricción entre los puntos A y D, teniendo en cuenta, además, el rendimiento hidráulico de la máquina.

Sustituyendo los valores:

$$T_D - T_A = \frac{10^5 + 512,79 - \left[ \frac{4 \cdot 10^5}{875} - \frac{1,01 \cdot 10^5}{875} + \frac{1}{2} \left( \frac{0,004}{\frac{\pi \cdot 0,05^2}{4}} \right)^2 - 0 + 9,8 \cdot (0 - 5) \right]}{2.000} \quad (\text{II})$$

Este término engloba el 10% de la energía generada por la bomba, más las pérdidas por fricción en los conductos.

$$T_D = 50,02 + 278 = 328,02\text{K}$$

Como conclusión de este apartado, cabe decir que el aumento de temperatura del fluido es debido a:

a.- El calor transferido al sistema.  $10^5 \text{ J/Kg}$ .

b.- El 10% de la energía que la bomba necesita.

$$0,1\hat{*} \left\{ \begin{aligned} & \frac{4 \cdot 10^5}{875} - \frac{1,01 \cdot 10^5}{875} + \frac{1}{2} \left( \frac{0,004}{\pi \cdot 0,05^2} \right)^2 - 0 + g(0-5) + 5 \cdot 10^6 \cdot Q^2 + \\ & + \frac{0,022}{2} \cdot \frac{100}{0,05} \left( \frac{0,004}{\pi \cdot 0,05^2} \right)^2 \end{aligned} \right\}$$

c.- Las pérdidas por fricción en los conductos.

$$\left\{ 5 \cdot 10^6 \cdot Q^2 + \frac{0,022}{2} \cdot \frac{100}{0,05} \left( \frac{0,004}{\pi \cdot 0,05^2} \right)^2 \right\}$$

Estos tres términos son los que forman el numerador de la ecuación (II) de donde se obtiene el aumento de temperatura del fluido.

## Problema 38

### Enunciado

Estudiando los diferentes diseños de hovercraft, se pretende hacer ensayos con un modelo cuya sección transversal se muestra en la figura. Sabiendo que existen 100 toberas de descarga en la base del cojín, cuyo diámetro unitario es  $d_T$ , que el diámetro de la boca de entrada del ventilador es  $D_e$  ( $D_e \gg d_T$ ), y que se puede considerar que la presión en el depósito (cojín de aire anular) se mantiene constante, pudiéndose despreciar el término de energía cinética en el depósito determine:

1. La ecuación que define el flujo volumétrico que fluye por cada tobera, en función de la presión en el depósito superior (cojín). Considere que las pérdidas de energía en cada tobera dadas en [J/Kg] son:

$$\Delta Y = K_T \cdot Q_{\text{tobera}}^2$$

2. La ecuación que determina la fuerza de sustentación en función de la presión en el interior del hovercraft, si se considera que dicha fuerza es únicamente producida por el flujo saliente por las toberas.



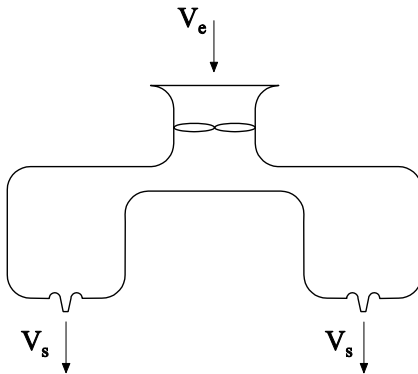
3. La potencia por unidad de masa que hay que comunicar al ventilador (dar la potencia en función de la presión interna del hovercraft). Se sabe que las pérdidas de energía por unidad de masa entre el ventilador y el cojín de aire interno son del tipo  $\Delta Y = K_{\text{int}} \cdot Q_{\text{entrante ventilador}}^2$ .

4. Considerando el sistema térmicamente aislado, y sabiendo que el rendimiento del ventilador es del 96%, halle el incremento de temperatura del aire entre la entrada y el cojín de aire interno. Considere las pérdidas definidas en el apartado 3.

5. Si alrededor del hovercraft se coloca una falda de un material semirrígido, tal que el flujo de fluido desde la parte interior del hovercraft hacia el exterior está regido por la ecuación  $\Delta Y = K_{\text{ext}} \cdot Q_{\text{saliente hovercraft}}^2$ , determine como varía la sustentación de dicho hovercraft.

Realice las hipótesis oportunas en cada caso.

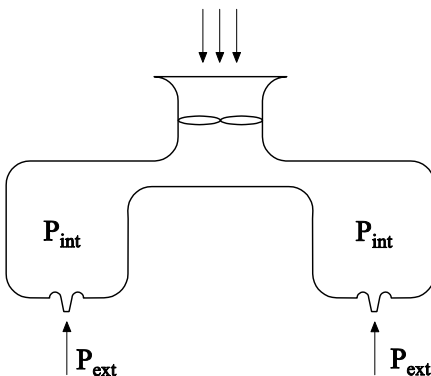
Fig. 38.1  
Sección del  
hovercraft



### Resolución

1. De la aplicación de la ecuación de la energía entre el interior y el exterior del cojín de aire a través de la tobera (una de ellas) se obtiene:

Fig. 38.2



$$\frac{P_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}}} + g z_{\text{int}} + \frac{v_{\text{int}}^2}{2} = \frac{P_{\text{ext}}}{\rho_{\text{ext}}} + g z_{\text{ext}} + \frac{v_{\text{ext}}^2}{2} + K_T Q_{\text{tobera}}^2$$

$$\frac{P_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}}} - \frac{P_{\text{ext}}}{\rho_{\text{ext}}} = \frac{Q_{\text{tobera}}^2}{S_{\text{tobera}}^2} + K_T Q_{\text{tobera}}^2$$

$$Q_{\text{tobera}}^2 = \left( \frac{P_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}}} - \frac{P_{\text{ext}}}{\rho_{\text{ext}}} \right) \frac{1}{\frac{1}{S_{\text{tobera}}^2} + K_T}$$

Caudal saliente total  $QTT = 100 * QT$

2. Fuerza ascensorial debida a la variación de la cantidad de movimiento. Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento entre la entrada del ventilador y la salida de las toberas, se establece:

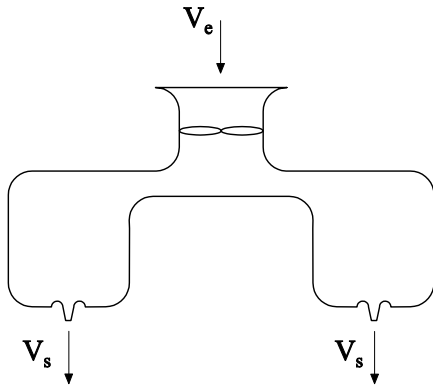


Fig. 38.3

$$-\int_{se} P_e d\vec{s} - \int_{ss} P_s d\vec{s} + \int_{sl} \vec{\tau} d\vec{s} + \int_{sl} P d\vec{s} = \oint_{sc} \rho \vec{v} \vec{v} d\vec{s}$$

Trabajando en presiones relativas, el empuje debido a la variación de cantidad de movimiento será:

$$F_Y = \int_{se} \rho \vec{v} \vec{v} d\vec{s} + \int_{ss \text{ tobera } 1} \rho \vec{v} \vec{v} d\vec{s} + \dots + \int_{ss \text{ tobera } n} \rho \vec{v} \vec{v} d\vec{s}$$

$$F_Y = \dot{m} (v_e - v_s) = \dot{m} \left( \frac{Q_e}{S_e} - \frac{Q_{\text{tobera}}}{S_{\text{tobera}}} \right)$$

$$F_Y = \dot{m} Q_{\text{tobera}} \left( \frac{100}{S_e} - \frac{1}{S_{\text{tobera}}} \right)$$



$$F_Y = \rho_{\text{entrada}} Q_e Q_{\text{tobera}} \left( \frac{100}{S_e} - \frac{1}{S_{\text{tobera}}} \right)$$

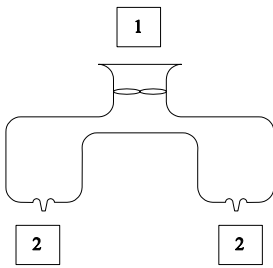
La ecuación de continuidad aplicada entre la entrada y la salida dirá:  $Q_e = 100 Q_{\text{tobera}}$

$$F_Y = \rho_{\text{entrada}} 100 Q_{\text{tobera}}^2 \left( \frac{100}{S_e} - \frac{1}{S_{\text{tobera}}} \right)$$

### 3. Potencia del ventilador

Aplicando la ecuación de la energía en régimen permanente entre los puntos 1 y 2 (entrada y salida del hovercraft), se obtiene:

Fig. 38.4



$$\dot{Q} - \dot{W} = \oint_{sc} \rho \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \cdot z + u \right) \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

puesto que  $\dot{Q} = 0$ ; por tanto, la ecuación queda:

$$-\dot{W}_{\text{eje}} - \dot{W} = \oint_{se} \rho \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z + u \right) \vec{v} \cdot d\vec{s} + \oint_{ss} \rho \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z + u \right) \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

$$-Y_{\text{eje}} = \frac{-\dot{W}_{\text{eje}}}{\dot{m}} = \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z + u \right)_{ss} - \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z + u \right)_{se} + K_T Q_{\text{tobera}}^2 + K_{\text{int}} Q_{\text{ent}}^2$$

Trabajando en presiones relativas, ó para variaciones de presión despreciables:

$$-Y_{\text{eje}} = g(z_s - z_e) + \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + \frac{K_T}{100^2} Q_{\text{total salida}}^2 + K_{\text{int}} Q_{\text{ent}}^2$$

Asumiendo que la potencia comunicada al ventilador es positiva y despreciando las variaciones de energía potencial:

$$W_{\text{eje}} = Y_{\text{eje}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{Q_{\text{tobera}}^2}{s_{\text{tobera}}^2} - \frac{Q_{\text{entrada}}^2}{s_{\text{entrada}}^2} \right] + \frac{K_T}{100^2} Q_{\text{total salida}}^2 + K_{\text{int}} Q_{\text{ent}}^2$$

$$Y_{\text{eje ventilador}} = Q_{\text{total salida}}^2 \left[ \frac{1}{2 s_{\text{tobera}}^2} \frac{1}{100^2} - \frac{1}{2 s_{\text{entrada}}^2} \right] + \frac{K_T}{100^2} + K_{\text{int}}$$

Recuérdese que  $Q_{TT} = 100 \cdot Q_T$

La potencia comunicada al fluido será:  $N_{\text{fluido}} = \rho Y_{\text{eje}} Q_{\text{Total}}$

Nota: En realidad, la potencia necesaria en el ventilador será un 4% mayor que la potencia establecida aquí.

4. El incremento de temperatura que experimentará el fluido desde la entrada hasta la zona de remanso será debido al calor transferido en el ventilador (que equivale al 4% de su potencia), más la energía perdida por fricción entre la entrada y la zona de remanso, y que se convertirá en calor. Así pues,

$$C_v (T_3 - T_1) = 0,04 Y_{\text{eje ventilador}} + K_{\text{int}} Q_{\text{ent}}^2$$

La expresión obtenida para el incremento de temperatura es:

$$(T_3 - T_1) = \frac{0,04 Y_{\text{eje ventilador}} + K_{\text{int}} 100^2 Q_{\text{tobera}}^2}{C_v}$$

5. Al utilizar la falda exterior, la presión debajo del hovercraft será ligeramente mayor que la presión atmosférica. El cálculo analítico para la obtención de dicha presión es:

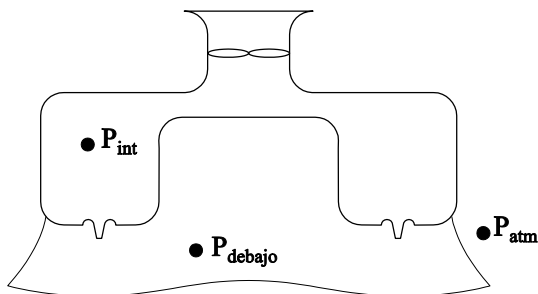


Fig. 38.5



$$\frac{P_{\text{debajo}}}{\rho_{\text{debajo}}} + g z_{\text{debajo}} + \frac{v_{\text{debajo}}^2}{2} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{atm}}} + g z_{\text{atm}} + \frac{v_{\text{atm}}^2}{2} + K_{\text{ext}} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2$$

$$\frac{P_{\text{debajo}}}{\rho_{\text{debajo}}} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{atm}}} + K_{\text{ext}} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2$$

Recuérdese que:

$$\dot{m}_{\text{entrante}} = \dot{m}_{\text{total toberas}} = \dot{m}_{\text{saliente}}$$

Considerando la densidad del aire prácticamente constante a la entrada y a la salida, queda :

$$Q_{\text{entrante}} = Q_{\text{total toberas}} = Q_{\text{saliente}}$$

Y en presiones relativas:

$$P_{\text{debajo}} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{atm}}} \rho_{\text{debajo}} + K_{\text{ext}} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2 \rho_{\text{debajo}}$$

$$P_{\text{debajo}} = K_{\text{ext}} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2 \rho$$

El caudal que fluye por las toberas quedará modificado, puesto que la presión en el exterior es ahora ligeramente mayor que la atmosférica.

$$Q_{\text{tobera 2}}^2 = \left[ \left( \frac{P_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}}} - \frac{P_{\text{debajo}}}{\rho_{\text{debajo}}} \right) + g (z_{\text{int}} - z_{\text{debajo}}) \right] \frac{1}{\frac{1}{2 S_{\text{tobera}}^2} + K_T}$$

Suponiendo que el caudal que suministra el ventilador es el requerido en este apartado, la fuerza de sustentación tendrá la misma forma que en el apartado 2. Únicamente quedará modificado el caudal de la tobera:

$$F_Y = \rho_{\text{entrada}} 100 Q_{\text{tobera 2}}^2 \left( \frac{100}{S_c} - \frac{1}{S_{\text{tobera}}} \right)$$

Además, en este apartado, la presión debajo del hovercraft crea una fuerza de sustentación adicional:

$$F_{\text{adicional}} = P_{\text{debajo}} S_{\text{hovercraft proyectada}}$$



$$F_{Y_{total}} = F_Y + F_{adicional}$$

## Problema 39

### Enunciado

Sea una turbina axial como la esquematizada en la figura 39.1, la cual consiste en un conjunto de alabes fijos o directrices (estator) y un rotor. La longitud de los alabes, tanto en el estator como en el rotor, se considerará muy pequeña, comparada con el radio medio del rotor  $R_M$ , con lo cual se podrán considerar uniformes las propiedades a lo largo del alabe.

La velocidad del fluido a la entrada del estator (punto 1), la cual tiene únicamente componente axial, tiene un valor conocido  $C_1$ . A la salida del rotor, el fluido tiene así mismo únicamente componente axial. El valor de la componente axial se mantendrá a lo largo de la máquina.

Los triángulos de velocidades para un radio medio  $R_M$ , tanto a la entrada como a la salida del rotor, se detallan en la figura 39.1.

Considérense conocidos los valores siguientes:

Constantes termodinámicas del gas que fluye por la turbina:  $R$ ,  $C_v$ ,  $C_p$ ,  $\gamma$

Radio medio en el centro de los alabes:  $R_M$

Altura del alabe del estator:  $H_1$

Velocidad del fluido a la entrada del estator:  $C_1$

Presión a la entrada del estator:  $P_1$

Temperatura a la entrada del estator:  $T_1$

Ángulo formado por la velocidad relativa y el eje de la turbina:  $\alpha_2$

Considerar que para el presente caso y para el radio medio de la turbina,  $U_2$  coincide en módulo con  $W_{2u}$

Determine:

1. Suponiendo que los triángulos de velocidades son los esquematizados en la figura, halle la velocidad de giro del rotor. Determine también el caudal másico circulante.

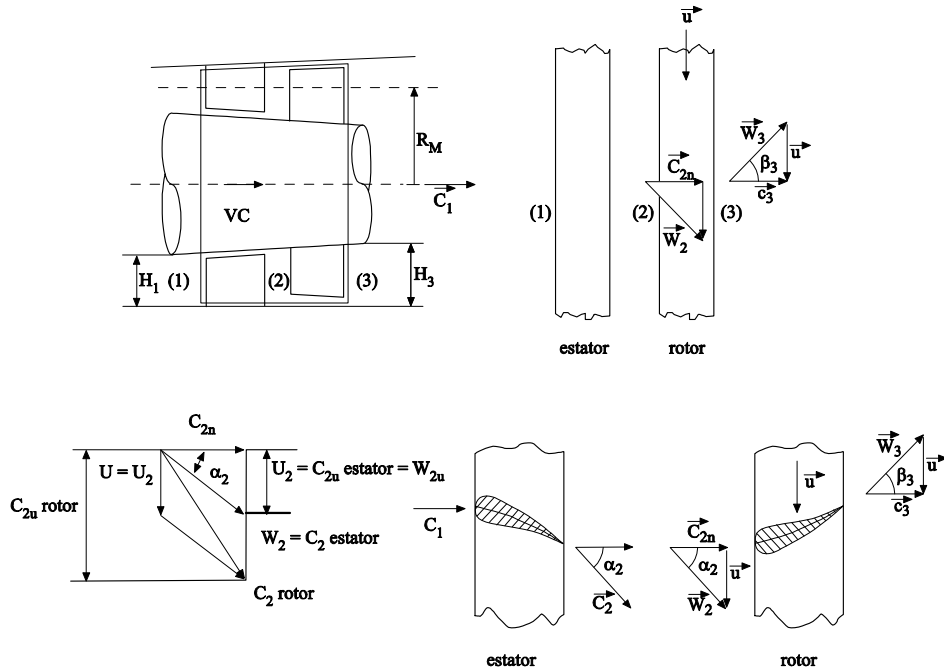


2. La energía por unidad de masa que la turbina absorbe del fluido, el par generado por la turbina y la potencia comunicada al eje.

3. La temperatura del fluido a la salida de la turbina, asumiendo que no existe calor transferido al contorno sólido. Indique que mediciones de los parámetros del fluido se deberían realizar para determinar la altura de los alabes en los puntos 2 y 3.

Indique las hipótesis que se van realizando en cada caso.

Fig. 39.1  
Esquema de una turbina axial



### Resolución

1. Puesto que se dice que la componente axial se mantendrá a lo largo del rodete, se cumple que:

$C_1 = C_{2n} = C_3$ ;  $C_{2n}$  = Componente normal de la velocidad absoluta a la entrada del rotor.

Con lo que la velocidad de giro del rotor se puede determinar para el presente caso particular, como:

$$\text{Tg } \alpha_2 = \frac{U_2}{C_{2n}} = \frac{U_2}{C_1} = \frac{\omega R_M}{C_1}$$

$$\omega = \frac{Tg\alpha_2 C_1}{R_M}$$

El caudal másico que fluye por la máquina será, entonces:

$$\dot{m} = \int \rho \vec{V} d\vec{S} = -\int \rho C_1 d\vec{S} = -\rho C_1 \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2)$$

Puesto que los diámetros exterior e inferior en el estator no son conocidos, la sección de paso se aproximará por:

$$\frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) \approx 2\pi R_M H_1$$

con lo cual:

$$\dot{m} = -\rho C_1 2\pi R_M H_1$$

La densidad a la entrada de la turbina se hallará:

$$\rho = \frac{P_e}{R T_e} = \frac{P_1}{R T_1} ;$$

Así pues, el caudal másico circulante será:

$$\dot{m} = -\frac{P_1}{R T_1} C_1 2\pi R_M H_1$$

Nota. El signo ( - ) indica que es flujo entrante al sistema.

2. La ecuación de Euler de las turbomáquinas, aplicada a la turbina en estudio, dice:

$$Y_{\tau\infty} = U_3 C_{3u} - U_2 C_{2u}$$

Puesto que todos los parámetros se definen para el radio  $R_M$ , se tiene que  $U_2 = U_3 = U$

Por otro lado, del triángulo de velocidades a la salida del rotor se deduce que la componente tangencial de la velocidad absoluta es  $C_{3u} = 0$ .

Así, la energía que el fluido transmite al rotor será:

$$Y_{\tau\infty} = -U_2 C_{2u} = -\omega R_M C_{2u}$$



Observe que  $C_{2u}$  es la componente tangencial del fluido en el punto 2. Del triángulo de velocidades en este punto se deduce que:  $C_{2u} = U + W_2 \sin \alpha_2$ ; de donde se obtiene:

$Y_{\tau_{\infty}} = -\omega R_M (U + W_2 \sin \alpha_2)$ ;  $\left[ \frac{J}{Kg} \right]$ ; el signo (-) indica que se trata de energía transmitida a la máquina.

De la ecuación del momento cinético aplicada a una turbomáquina, para el caso en estudio se obtiene:

$$\sum M_{\text{eje}} = \dot{m} (R_{M3} C_{3u} - R_{M2} C_{2u})$$

Como  $R_{M3} = R_{M2} = R_M$  y  $C_{3u} = 0$ , se dirá que el par generado por la turbina valdrá:

$$M_{\text{eje}} = -\dot{m} R_M C_{2u} = -\dot{m} R_M (U + W_2 \sin \alpha_2)$$

$$M_{\text{eje}} = -\frac{P_1}{R T_1} C_1 2\pi R_M^2 H_1 (U + W_2 \sin \alpha_2)$$

Asimismo, la potencia transmitida al eje será:

$$\dot{W}_{\text{eje}} = M_{\text{eje}} \omega = -\dot{m} R_M \omega (U + W_2 \sin \alpha_2)$$

$$\dot{W}_{\text{eje}} = -\frac{P_1}{R T_1} C_1 2\pi R_M^2 H_1 \omega (U + W_2 \sin \alpha_2)$$

3. Finalmente, la temperatura del fluido a la turbina, asumiendo que no existe calor transferido hacia o por el sistema, se determinará partiendo de la ecuación de la energía aplicada entre la entrada y la salida de la turbina. En régimen permanente, se tiene:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{eje}} = \int_{S_1} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + g z + \frac{P}{\rho} \right) \bar{v} d\bar{s} + \int_{S_3} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + g z + \frac{P}{\rho} \right) \bar{v} d\bar{s}$$

Siendo  $\dot{Q} = 0$ , se obtiene que:

$$-\dot{W}_{\text{eje}} = \dot{m} \left( u + \frac{v^2}{2} + g z + \frac{P}{\rho} \right)_{S_1} + \dot{m} \left( u + \frac{v^2}{2} + g z + \frac{P}{\rho} \right)_{S_3}$$

Obsérvese que las pérdidas de energía por esfuerzos cortantes no se han considerado porque no pueden ser evaluadas. Entonces:

$$-\dot{W}_{\text{eje}} = \dot{m} \left[ u_3 - u_1 + \frac{v_3^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + g(z_3 - z_1) + \frac{P_3}{\rho_3} - \frac{P_1}{\rho_1} \right]$$

Dado que la cota del punto 3 y 1 es la misma, y que las velocidades absolutas en dichos puntos son iguales, según enunciado  $v_3 = C_3$ ;  $v_1 = C_1$ ;  $C_3 = C_1$  y queda que:

$$-\dot{W}_{\text{eje}} = \dot{m} \left[ u_3 - u_1 + \frac{P_3}{\rho_3} - \frac{P_1}{\rho_1} \right] = \dot{m} \left[ u_3 + \frac{P_3}{\rho_3} - u_1 - \frac{P_1}{\rho_1} \right]$$

$$-\dot{W}_{\text{eje}} = \dot{m} [h_3 - h_1] = \dot{m} C_p [T_3 - T_1]$$

$$T_3 = \frac{-\dot{W}_{\text{eje}}}{\dot{m} C_p} + T_1$$

Como la potencia en el eje de la turbina se ha hallado en el apartado 2, se tiene:

$$T_3 = \frac{\frac{P_1}{R T_1} C_1 2\pi R_M^2 H_1 \omega (U + W_2 \sin \alpha_2)}{\dot{m} C_p} + T_1$$

De la aplicación de la ecuación de continuidad entre los puntos 1, 2 y 3, se puede decir:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

$$Q_1 \rho_1 = Q_2 \rho_2 = Q_3 \rho_3$$

$$S_1 C_1 \rho_1 = S_2 C_{2n} \rho_2 = S_3 C_3 \rho_3$$

Según el enunciado,  $C_1 = C_{2n} = C_3$ , y sabiendo que  $\rho_i = \frac{P_i}{R T_i}$  y  $S_i = 2\pi R_B H_i$ , se

tiene:

$$2\pi R_M H_1 C_1 \frac{P_1}{R T_1} = 2\pi R_M H_2 C_1 \frac{P_2}{R T_2} = 2\pi R_M H_3 C_1 \frac{P_3}{R T_3};$$

$$H_1 \frac{P_1}{T_1} = H_2 \frac{P_2}{T_2} = H_3 \frac{P_3}{T_3};$$



La altura de los alabes en los puntos 2 y 3 se podría determinar una vez conocidas la presión y la temperatura en dichos puntos. Experimentalmente, se podría realizar introduciendo sendos sensores de presión y temperatura en dichas zonas. Hay que observar que P2 y T2 serán muy similares a P1 y T1.



→ 8



## Flujo con viscosidad dominante

### Problema 40

#### Enunciado

Sean dos cilindros concéntricos de longitud unitaria, con radios  $R_{\text{ext}}$  y  $R_{\text{int}}$ , respectivamente, separados por una película de aceite de viscosidad  $\mu$ . El cilindro interior gira a una velocidad angular  $\omega_{\text{int}}$  (sentido horario), mientras que el exterior gira a una velocidad angular  $\omega_{\text{ext}}$  (sentido antihorario).

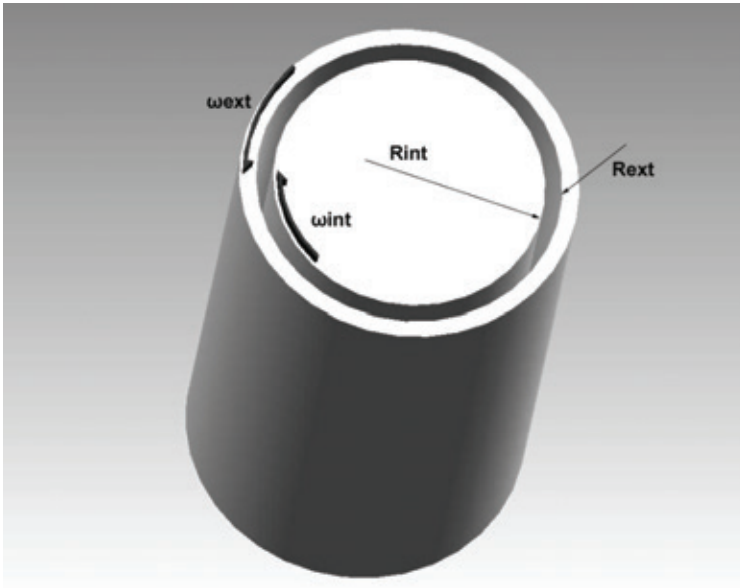


Fig. 40.1



Halle las ecuaciones que definen:

1. La distribución de velocidades entre cilindros.
2. La distribución de presiones entre cilindros.
3. El par necesario en el cilindro exterior para que se produzca el giro.

### Resolución

Cálculos previos

Las condiciones de contorno que definen este problema son:

$$r = R_{\text{ext}} \Rightarrow V_{\theta} = \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}$$

$$r = R_{\text{int}} \Rightarrow V_{\theta} = \omega_{\text{int}} R_{\text{int}} (-1)$$

La ecuación de continuidad, en coordenadas cilíndricas, establece:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0$$

La ecuación de Navier-Stokes, en cilíndricas, se enuncia:

$$\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_{\theta}^2}{r} \right) =$$

$$\rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} \right]$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_{\theta}}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_{\theta}}{\partial r} + V_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_{\theta}}{\partial z} - \frac{V_{\theta} V_r}{r} \right) =$$

$$\rho g_{\theta} - \frac{\partial P}{r \partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{\theta}) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_{\theta}}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) =$$

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right]$$

Únicamente existe variación de velocidad  $V_{\theta}$  en dirección radial, con lo que se tiene:

La ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) = 0 \Rightarrow \rho \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0$$

$\rho = \text{constante}$

La ecuación de Navier-Stokes:

La presión reducida variará únicamente en la dirección radial

$$-\rho \frac{V_\theta^2}{r} = \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial P^*}{\partial r}$$

$$0 = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) = 0$$

Se considera que no existen fuerzas másicas en la dirección z.

$$0 = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial P^*}{\partial z} = 0$$

No hay gradiente de presión reducida en la dirección z.

1. Así, se tiene que:

De la primera ecuación de Navier-Stokes:

$$P^* = \int \rho \frac{V_\theta^2}{r} dr$$

Será necesario conocer la distribución de velocidades en la dirección  $\theta$ , ya que esta dependerá de  $r$ .

De la segunda ecuación de Navier-Stokes:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) = C_1$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración



$$\frac{\partial}{\partial r}(r V_{\theta}) = r C_1$$

$$r V_{\theta} = C_1 \frac{r^2}{2} + C_2$$

$$V_{\theta} = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

Con las condiciones de contorno:

$$r = R_{\text{ext}} \Rightarrow V_{\theta} = \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}$$

$$r = R_{\text{int}} \Rightarrow V_{\theta} = \omega_{\text{int}} R_{\text{int}} \quad (-1)$$

$$(1) \quad \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}} = C_1 \frac{R_{\text{ext}}}{2} + \frac{C_2}{R_{\text{ext}}}$$

$$(2) \quad -\omega_{\text{int}} R_{\text{int}} = C_1 \frac{R_{\text{int}}}{2} + \frac{C_2}{R_{\text{int}}}$$

$$C_2 = \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - C_1 \frac{R_{\text{ext}}^2}{2} \Rightarrow -\omega_{\text{int}} R_{\text{int}} = C_1 \frac{R_{\text{int}}}{2} + \frac{1}{R_{\text{int}}} \left[ \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - C_1 \frac{R_{\text{ext}}^2}{2} \right]$$

$$-\omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - \omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 = C_1 \left( \frac{R_{\text{int}}^2}{2} - \frac{R_{\text{ext}}^2}{2} \right) \Rightarrow C_1 = \frac{2(\omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 + \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2)}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2}$$

$$C_2 = \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - \frac{2(\omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 + \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2)}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2} \frac{R_{\text{ext}}^2}{2}$$

$$C_2 = \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{ext}}^2 \frac{(\omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 + \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2)}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2}$$

Entonces:

$$V_{\theta} = \frac{2(\omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 + \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2)}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2} \frac{r}{2} + \frac{1}{r} \left( \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{ext}}^2 \frac{(\omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 + \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2)}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2} \right)$$

2. De la primera ecuación de Navier-Stokes:

$$P^* = \int \rho \frac{V_{\theta}^2}{r} dr$$

Introduciendo la ecuación de  $V_\theta$  en la integral, se tiene:

$$P^* = \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} \rho \frac{1}{r} \left( C_1^2 \frac{r^2}{4} + \frac{C_2^2}{r^2} + C_1 C_2 \right) dr$$

y se halla:

$$P^* = \rho \left( C_1^2 \frac{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2}{8} + \frac{C_2^2}{2} \frac{1}{R_{\text{int}}^2 - R_{\text{ext}}^2} + C_1 C_2 \text{Ln} \frac{R_{\text{ext}}}{R_{\text{int}}} \right)$$

3. Los esfuerzos cortantes en cilíndricas se pueden dar:

$$\tau_{r\theta} = r \mu \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) \right|_{r=R_{\text{ext}}}$$

puesto que

$$V_\theta = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}; \quad \frac{V_\theta}{r} = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) = - \frac{2C_2}{r^3}$$

$$\tau_{r\theta} \Big|_{r=R_{\text{ext}}} = - \frac{\mu C_2}{r^3} \Big|_{r=R_{\text{ext}}} = \frac{-2\mu C_2}{R_{\text{ext}}^2}$$

El par por unidad de longitud que actúa sobre el cilindro exterior será:

$$M_{R_{\text{ext}}} = \tau_{r\theta} \Big|_{r=R_{\text{ext}}} 2 \pi R_{\text{ext}} R_{\text{ext}}$$

así, queda:

$$M_{R_{\text{ext}}} = - \frac{2 \mu C_2}{R_{\text{ext}}^2} 2 \pi R_{\text{ext}}^2 = - 4 \pi \mu C_2$$

Obsérvese que, si se determinase el par por unidad de longitud del cilindro que actúa sobre el cilindro interior, el resultado sería el mismo.

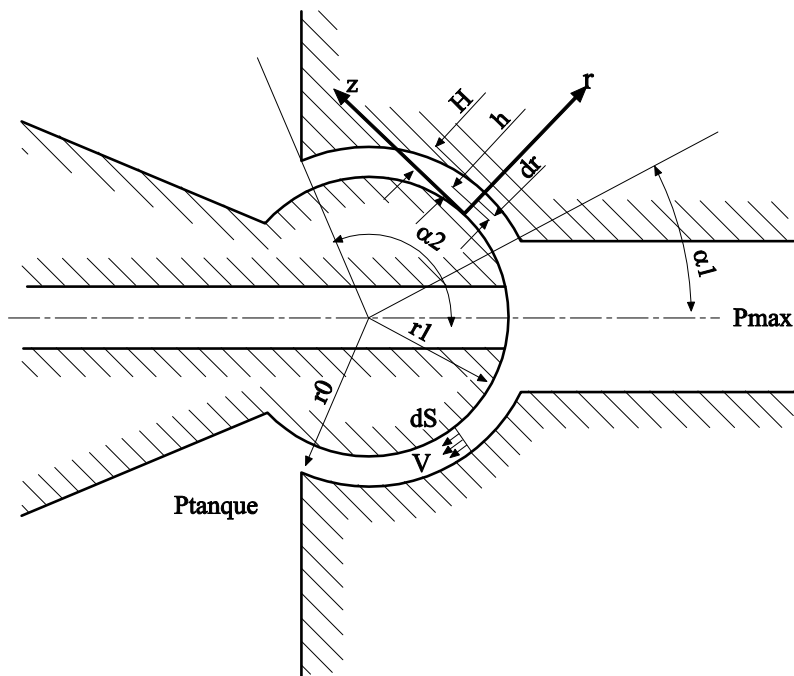


### Problema 41

#### Enunciado

Dado el cojinete esférico de la figura 41.1, halle las ecuaciones que describen la distribución de presiones y el caudal a través del mismo. Realice de nuevo el problema partiendo de la ecuación generalizada de lubricación de Reynolds en coordenadas esféricas.

Fig. 41.1  
Esquema del  
cojinete esférico



#### Resolución

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$$

El diferencial de área en el intersticio entre las dos esferas se puede dar como:

$$\int ds = \int_0^H 2\pi (r_1 + r) \operatorname{sen}\alpha \, dr$$

El caudal volumétrico entre las dos esferas es:

$$dQ = \int_0^H V 2\pi (r_1 + r) \operatorname{sen}\alpha \, dr$$

La ecuación de Poiseuille para flujo entre dos placas planas dice:

$$V = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \frac{r}{2} (H-r)$$

con lo que el caudal volumétrico queda:

$$dQ = \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \frac{r}{2} (H-r) 2\pi (r_1 + r) \operatorname{sen}\alpha \, dr$$

La relación entre el diferencial de ángulo y el arco que forma es:

$$dz = \left(r_1 + \frac{H}{2}\right) d\alpha$$

de donde:

$$dQ = \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\alpha \left(r_1 + \frac{H}{2}\right)} \frac{r}{2} (H-r) 2\pi (r_1 + r) \operatorname{sen}\alpha \, dr$$

$$dQ = \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\alpha \left(r_1 + \frac{H}{2}\right)} r \pi \operatorname{sen}\alpha \left[ H r_1 + H r - r_1 r - r^2 \right] dr$$

Una vez realizada la integración, queda:

$$Q = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\alpha} \frac{1}{\left(r_1 + \frac{H}{2}\right)} \pi \operatorname{sen}\alpha \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right]$$

La distribución de presiones a lo largo del intersticio es:

$$dP = -Q \mu \left(r_1 + \frac{H}{2}\right) \frac{1}{\pi \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right] \operatorname{sen}\alpha} d\alpha$$

con lo que:

$$\int_{P_{\max}}^{P_{\min}} dP = -Q \mu \left(r_1 + \frac{H}{2}\right) \frac{1}{\pi \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right]} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

después de la integración se obtiene:



$$P_{\text{máx}} - P_{\text{tank}} = Q \mu \left( r_1 + \frac{H}{2} \right) \frac{1}{\pi \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right]} \ln \left[ \frac{\text{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{\text{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]$$

por lo que el caudal que fluye entre las dos esferas será:

$$Q = \frac{(P_{\text{máx}} - P_{\text{tank}}) \pi \left( r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right)}{\mu \left( r_1 + \frac{H}{2} \right) \ln \left[ \frac{\text{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{\text{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]}$$

La presión en un punto genérico localizado a un ángulo  $\alpha$  se obtiene:

$$Q = \frac{(P_{\text{máx}} - P) \pi \left( r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right)}{\mu \left( r_1 + \frac{H}{2} \right) \ln \left[ \frac{\text{tg} \frac{\alpha}{2}}{\text{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]}$$

de donde:

$$P = P_{\text{máx}} - \frac{Q \mu \left( r_1 + \frac{H}{2} \right) \ln \left[ \frac{\text{tg} \frac{\alpha}{2}}{\text{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]}{\pi \left( r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right)}$$

Sustituyendo el valor del caudal en la ecuación anterior, se obtiene:

$$P = P_{\text{máx}} - \frac{(P_{\text{máx}} - P_{\text{tank}}) \ln \left[ \frac{\text{tg} \frac{\alpha}{2}}{\text{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]}{\ln \left[ \frac{\text{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{\text{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]}$$

ecuación que determina la presión entre dos esferas separadas por una distancia muy pequeña y para un ángulo genérico  $\alpha$ .



2. Resolución partiendo de la ecuación generalizada de lubricación de Reynolds en coordenadas esféricas.

Dicha ecuación fue hallada por Donna Meyer y publicada en el *Journal of Tribology* - ASME el 2003.

$$\frac{1}{\text{sen}\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h^3 \text{sen}\alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \phi} \right) =$$

$$= 6R^2 \mu \left[ \omega \cos \beta \text{sen}\phi \frac{\partial h}{\partial \alpha} + \left( \omega \text{sen}\beta + \omega \cos \beta \frac{\cos \alpha}{\text{sen}\alpha} \cos \phi \right) \frac{\partial h}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right]$$

Los parámetros definidos en esta ecuación se detallan en la figura 41.2.

Puesto que para el caso en estudio se cumple que:

$$\omega = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial \alpha} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0 \quad ;$$

La ecuación diferencial resultante es:

$$\frac{1}{\text{sen}\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h^3 \text{sen}\alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) = 0$$

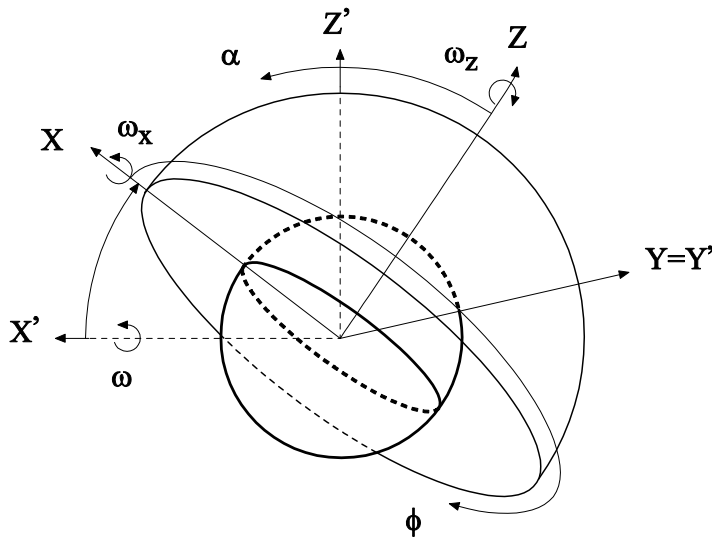


Fig. 41.2  
Parámetros  
definidos en la  
ecuación de  
lubricación de  
Reynolds

La integración de la ecuación diferencial resultante da lugar a:

$$h^3 \text{sen}\alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} = C_1 \quad ;$$



$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{C_1}{h^3 \operatorname{sen} \alpha};$$

$$\int dp = \frac{C_1}{h^3} \int \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} d\alpha;$$

$$p = \frac{C_1}{h^3} \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) + C_2;$$

Condiciones de contorno:

$$\alpha = \alpha_1; \quad p = p_{\max}$$

$$\alpha = \alpha_2; \quad p = p_{\tan \text{ que}}$$

$$p_{\max} = \frac{C_1}{h^3} \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right) \right) + C_2;$$

$$p_{\tan \text{ que}} = \frac{C_1}{h^3} \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right) \right) + C_2;$$

Y se obtiene:

$$p_{\max} - p_{\tan \text{ que}} = \frac{C_1}{h^3} \ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)} \right);$$

$$C_1 = (p_{\max} - p_{\tan \text{ que}}) h^3 \frac{1}{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)} \right)};$$

$$C_2 = p_{\max} - \frac{1}{h^3} \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right) \right) \cdot \left[ (p_{\max} - p_{\tan \text{ que}}) h^3 \frac{1}{\ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right) \right) - \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right) \right)} \right];$$



$$C_2 = p_{\text{máx}} - (p_{\text{máx}} - p_{\text{tan que}}) \frac{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)} \right)}{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)} \right)};$$

Sustituyendo en la ecuación de distribución de presiones, se obtiene:

$$p = p_{\text{máx}} - (p_{\text{máx}} - p_{\text{tan que}}) \frac{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)} \right)}{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)} \right)};$$

Obsérvese que se ha obtenido la misma ecuación de distribución de presiones que en el apartado anterior.

La determinación del caudal circulante entre las dos esferas se realiza del mismo modo que en el apartado precedente, con la salvedad de que, al llegar a la ecuación:

$$Q = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\alpha} \frac{1}{\left(r_1 + \frac{H}{2}\right)} \pi \operatorname{sen} \alpha \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right]$$

ahora la variación de angular de presión se puede dar como:  $\frac{dp}{d\alpha} = \frac{C_1}{h^3 \operatorname{sen} \alpha}$  y puesto que la constante  $C_1$  es conocida, se tiene:

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{(p_{\text{máx}} - p_{\text{tan que}})}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{1}{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)} \right)}$$

con lo que, sustituyendo en la ecuación del caudal, se obtiene:



$$Q = \frac{1}{\mu} \frac{\pi}{\left(r_1 + \frac{H}{2}\right)} \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right] \frac{(p_{\text{máx}} - p_{\text{tan k}})}{\ln \left( \frac{\text{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)}{\text{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)} \right)}$$

Véase que esta ecuación coincide con la que se ha hallado en el apartado anterior.

## Problema 42

### Enunciado

El esquema de la figura representa un depósito cerrado y presurizado a 100 bar, en el interior del cual existe un fluido de densidad  $\rho$ . La salida de fluido del depósito se efectúa a través de un plato de sección circular y de radio exterior  $r_e$ ; la distancia entre el plato y la base ( $d$ ) se considerará muy pequeña comparada con el radio del plato, de tal manera que el fluido se podrá considerar que fluye únicamente en dirección radial y en régimen laminar.

Sabiendo que la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, flujo

unidireccional, se enuncia como:  $\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r d^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0$  ;

siendo la ecuación que determina el caudal que fluye entre los platos:  $Q = -\frac{\pi r d^3}{6 \mu} \frac{dp}{dr}$

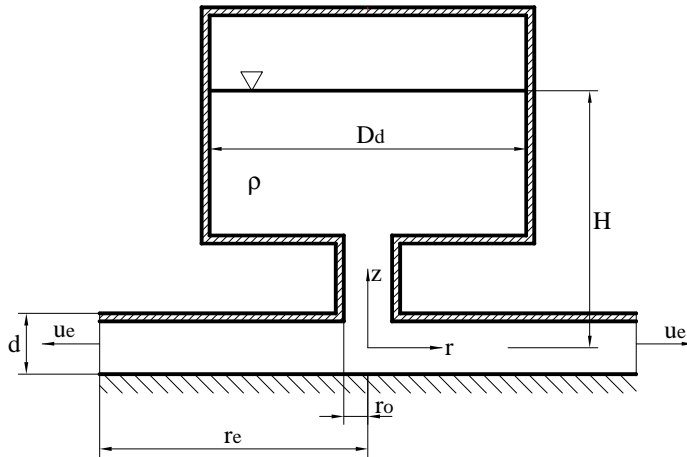
Determine:

1. El caudal que fluye entre los platos y la distribución de presiones en dirección radial. Considere que la altura  $H$  se mantiene prácticamente constante.
2. Si la distancia entre los platos ( $d$ ) aumentase notoriamente, de tal forma que el flujo no pudiese ser considerado laminar, ¿cuál sería la ecuación que define el caudal que fluye? ¿Cuál sería en este caso, la distribución de presiones en función del radio? Considere que el depósito está abierto a la atmósfera y que la altura  $H$  no se mantiene constante.

Datos:  $H, d, r_0, r_e, \rho, g, P_{\text{depósito}}, D_d$ .



Fig. 42.1



### Resolución

1. Partiendo de la ecuación de lubricación de Reynolds para el caso en estudio, se establece:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r d^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0; \quad \left( \frac{r d^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = C_1;$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = C_1 \frac{\mu}{r d^3};$$

$$P = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r + C_2;$$

Por otro lado, el flujo circulante entre las dos placas circulares se define:

$$Q = -\frac{\pi r d^3}{6 \mu} \frac{dp}{dr}; \quad Q = -\frac{\pi}{6} C_1;$$

Las constantes de integración se determinan mediante las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{cases} r = r_e & ; P = 0 \\ r = r_o & ; P = P_{inlet} = 100 \cdot 10^5 + \rho \cdot g \cdot H \end{cases}$$

$$0 = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_e + C_2;$$

$$P_{inlet} = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_o + C_2;$$



$$P_{\text{inlet}} = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_o - C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_e ; \quad P_{\text{inlet}} = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln \left( \frac{r_o}{r_e} \right)$$

$$C_1 = \frac{P_{\text{inlet}}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left( \frac{r_o}{r_e} \right)}$$

$$0 = \frac{P_{\text{inlet}}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left( \frac{r_o}{r_e} \right)} \frac{\mu}{d^3} \ln r_e + C_2 ;$$

$$C_2 = - \frac{P_{\text{inlet}} \ln r_e}{\ln \left( \frac{r_o}{r_e} \right)}$$

La ecuación que determina la distribución de presiones entre las dos placas en función del radio queda:

$$P = \frac{P_{\text{inlet}}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left( \frac{r_o}{r_e} \right)} \frac{\mu}{d^3} \ln r - \frac{P_{\text{inlet}} \ln r_e}{\ln \frac{r_o}{r_e}} ;$$

Agrupando términos, se obtiene:

$$P = \frac{P_{\text{inlet}}}{\ln \frac{r_o}{r_e}} [\ln r - \ln r_e] ;$$

$$P = \frac{P_{\text{inlet}}}{\ln \frac{r_e}{r_o}} [\ln r_e - \ln r]$$

$$P = \frac{P_{\text{inlet}}}{\ln \frac{r_e}{r_o}} \ln \left[ \frac{r_e}{r} \right]$$

El caudal circulante viene dado por:

$$Q = - \frac{\pi}{6} C_1 ; \quad Q = \frac{\pi}{6} \frac{P_{\text{inlet}}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left( \frac{r_e}{r_o} \right)}$$



2. Aplicando la ecuación de continuidad entre la superficie del líquido y la salida de la placa:

$$\pi \cdot r_d^2 \cdot u_d = 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d \cdot u_e; \quad \frac{u_d}{u_e} = \frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^2}$$

Aplicando Bernoulli entre la superficie libre del depósito y la sección de salida:

$$P_d + \rho \cdot g \cdot z_d + \frac{\rho}{2} u_d^2 = P_e + \rho \cdot g \cdot z_e + \frac{\rho}{2} u_e^2;$$

$$z_d - z_e = H$$

$$2 \cdot g \cdot H = u_e^2 - u_d^2 = u_e^2 \left( 1 - \left( \frac{u_d}{u_e} \right)^2 \right);$$

$$u_e = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left( \frac{u_d}{u_e} \right)^2}}$$

Sustituyendo la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$u_e = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left( \frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^2} \right)^2}}$$

El caudal circulante viene definido por:

$$Q = u_e \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d$$

de donde:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left( \frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^2} \right)^2}}$$

Para hallar la distribución de presiones, se aplica Bernoulli entre un radio genérico  $r$  y la salida de la placa.

$$\frac{P_r}{\rho} + \frac{u_r^2}{2} + g z_r = \frac{P_e}{\rho} + \frac{u_e^2}{2} + g z_e$$

y se obtiene:

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2} (u_r^2 - u_e^2)$$



La ecuación de continuidad entre estos dos puntos establece:

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot d \cdot u_r = 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d \cdot u_e ;$$

$$u_r = u_e \frac{r_e}{r} ;$$

de donde, sustituyendo en la ecuación para la distribución de presiones:

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2} \left( u_e^2 \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 - u_e^2 \right) ;$$

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2} \cdot u_e^2 \left( \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 - 1 \right)$$

Sustituyendo la velocidad a la salida de las placas:

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2} \left( \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 - 1 \right) \cdot \frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left( \frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^2} \right)^2} ;$$

$$P_e - P_r = \rho \cdot g \cdot H \cdot \frac{\left( \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 - 1 \right)}{\left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^2} \right)^2 \right]}$$

Ecuación que determina la distribución de presiones en función del radio y para flujo turbulento.

### Problema 43

#### Enunciado

La figura 43.1 muestra un patín deslizante, formado por una placa de sección circular situada en la parte inferior de uno de los nueve pistones que forman parte de una bomba de pistones axiales. Una de las características de este patín deslizante es que tiene tallada una ranura en su sección de deslizamiento.

Se pide: Determinar la ecuación que caracteriza el caudal de fugas entre el patín y la placa de deslizamiento, denominada *plato inclinado*, sabiendo que la distancia entre ambos oscila, por lo general, en torno a las 10 micras y en consecuencia, el régimen del





fluido se considera laminar. Determinar asimismo la distribución de presiones en dirección radial y la fuerza resultante que el fluido ejerce sobre el patín.

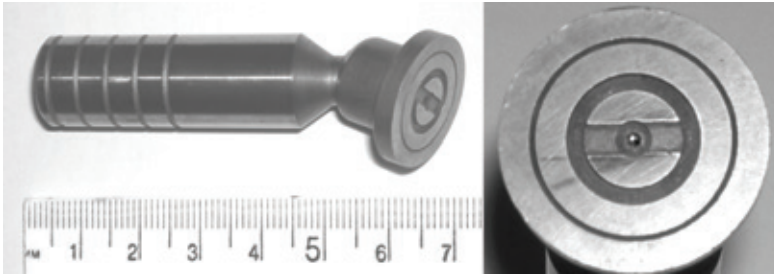
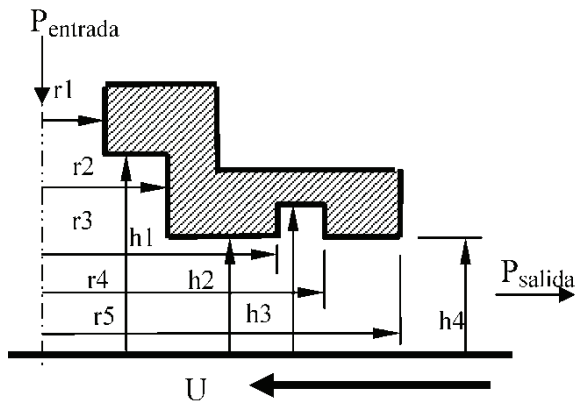


Fig. 43.1  
Conjunto pistón /  
patín deslizante y  
las dimensiones del  
patín. Cortesía de  
Oilgear Towler



Considerar que el fluido entra axialmente por el agujero central del patín y se distribuye, en todo momento, en dirección radial. Como primera aproximación, suponer que el sistema es estático y el patín está paralelo a la placa base.

Se pide, asimismo, extender las ecuaciones halladas para considerar un número de ranuras genérico y de cualquier dimensión.

### Resolución

Las hipótesis de partida para la resolución de este problema son:

El flujo se considera laminar e incompresible.

Se considera como primera aproximación, el patín deslizante estático y paralelo a la placa de deslizamiento, plato inclinado.

El movimiento del fluido será, en todo punto, en dirección radial.



El patín deslizante es suficientemente rígido como para no permitir flexiones del mismo.

A partir de estas consideraciones, se puede aplicar la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, la cual toma la forma siguiente:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 6\mu \left( U \cos \theta \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{U \sin \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)$$

En esta ecuación, la posición angular del patín deslizante se define por la letra  $\theta$ , cuyo valor oscilará entre 0 y 360 grados. Los términos que consideran la inclinación del patín vienen determinados por  $\frac{\partial h}{\partial r}$  y  $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ .

Considerando la viscosidad del fluido constante, el patín sin desplazamiento y situado paralelo a la placa de deslizamiento, la ecuación anterior queda

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \quad (1)$$

Integrando esta ecuación, se obtiene

$$P = \frac{C_1 \mu}{h^3} \ln r + C_2 \quad (2)$$

$C_1$  y  $C_2$  son constantes que han de ser halladas mediante condiciones de contorno.

Por otro lado, la distribución del perfil de velocidades para un fluido laminar que fluye entre dos platos planos cilíndricos, y en función de la distribución de presiones entre el radio interior y exterior de dichos platos, se enuncia del modo siguiente:

$$u = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (h-y)$$

El caudal volumétrico que fluye entre estos dos platos será

$$Q = \int_0^h u 2\pi r dy = -\frac{\pi r}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{h^3}{6}$$

Sustituyendo la primera derivada de la ecuación diferencial (1) en la ecuación anterior, se obtiene

$$Q = -\pi \frac{C_1}{6} \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) proporcionan la distribución de presiones y el caudal entre dos platos cilíndricos.

Para determinar las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , se utilizarán las siguientes condiciones de contorno:

$$r = r_i; \quad p = p_i$$

$$r = r_j; \quad p = p_j.$$

Las ecuaciones (2) y (3) pueden ser aplicadas a cualquier número de placas planas cilíndricas consecutivas, entendiéndose que el fluido se mantiene, en todo punto, laminar. Debe asimismo tenerse en cuenta que, cada vez que se apliquen dichas ecuaciones entre dos placas, aparecerán dos nuevas constantes de integración.

Así, aplicando las ecuaciones para el patín deslizante de la figura 43.1, el cual está formado por cuatro superficies que se consideran paralelas a la placa de deslizamiento, se puede establecer el colectivo de ecuaciones siguiente:

Parte central del patín deslizante

$$p_1 = C_1 \frac{\mu}{h_0^3} \ln r + C_2 \quad \text{Campo de aplicación} \quad r_1 < r < r_2 \quad (4)$$

$$Q_1 = -\frac{\pi C_1}{6} \quad (5)$$

Primera placa

$$p_2 = C_3 \frac{\mu}{h_1^3} \ln r + C_4 \quad \text{Campo de aplicación} \quad r_2 < r < r_3 \quad (6)$$

$$Q_2 = -\frac{\pi C_3}{6} \quad (7)$$

Ranura

$$p_3 = C_5 \frac{\mu}{h_2^3} \ln r + C_6 \quad \text{Campo de aplicación} \quad r_3 < r < r_4 \quad (8)$$

$$Q_3 = -\frac{\pi C_5}{6} \quad (9)$$



Segunda placa

$$p_4 = C_7 \frac{\mu}{h_3^3} \ln r + C_8 \quad \text{Campo de aplicación} \quad r_4 < r < r_5 \quad (10)$$

$$Q_4 = -\frac{\pi C_7}{6} \quad (11)$$

Las condiciones de contorno para determinar las constantes de integración son:

$$r = r_1 \quad p_1 = p_{\text{entrada}}$$

$$r = r_2 \quad p_1 = p_2 \quad Q_1 = Q_2$$

$$r = r_3 \quad p_2 = p_3 \quad Q_2 = Q_3$$

$$r = r_4 \quad p_3 = p_4 \quad Q_3 = Q_4$$

$$r = r_5 \quad p_4 = p_{\text{salida}}$$

Una vez determinadas las constantes  $C_1 \dots C_8$ , y sustituidas en las ecuaciones pertinentes, se obtienen las ecuaciones de la distribución de presiones, cuatro en total, una para cada placa plana cilíndrica, así como la ecuación que determina el flujo volumétrico entre placas.

La distribución de presiones para la placa situada entre los radios  $r_1 < r < r_2$  viene dada por la ecuación:

$$p_1 = p_{\text{entrada}} - \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}})}{\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)} \frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

La distribución de presiones para la placa situada entre los radios  $r_2 < r < r_3$  viene dada por la ecuación:

$$p_2 = p_{\text{entrada}} - \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}})}{\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)} \left[ \frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) \right]$$

La distribución de presiones para la placa situada entre los radios  $r_3 < r < r_4$  viene dada por la ecuación:



$$p_3 = p_{\text{entrada}} - \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}}) \left[ \frac{1}{h_1^3} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{h_2^3} \ln \left( \frac{r_3}{r_2} \right) + \frac{1}{h_3^3} \ln \left( \frac{r}{r_3} \right) \right]}{\frac{1}{h_1^3} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{h_2^3} \ln \left( \frac{r_3}{r_2} \right) + \frac{1}{h_3^3} \ln \left( \frac{r_4}{r_3} \right) + \frac{1}{h_4^3} \ln \left( \frac{r_5}{r_4} \right)}$$

Y, por último, la distribución de presiones para la placa situada entre los radios  $r_4 < r < r_5$  viene dada por la ecuación:

$$p_4 = p_{\text{entrada}} - \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}}) \left[ \frac{1}{h_1^3} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{h_2^3} \ln \left( \frac{r_3}{r_2} \right) + \frac{1}{h_3^3} \ln \left( \frac{r_4}{r_3} \right) + \frac{1}{h_4^3} \ln \left( \frac{r}{r_4} \right) \right]}{\frac{1}{h_1^3} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{h_2^3} \ln \left( \frac{r_3}{r_2} \right) + \frac{1}{h_3^3} \ln \left( \frac{r_4}{r_3} \right) + \frac{1}{h_4^3} \ln \left( \frac{r_5}{r_4} \right)}$$

La ecuación del caudal volumétrico que fluye entre las placas paralelas en función del gradiente de presión entre extremos de las mismas es:

$$Q = \frac{\pi}{6\mu} \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}})}{\frac{1}{h_1^3} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{h_2^3} \ln \left( \frac{r_3}{r_2} \right) + \frac{1}{h_3^3} \ln \left( \frac{r_4}{r_3} \right) + \frac{1}{h_4^3} \ln \left( \frac{r_5}{r_4} \right)}$$

Una vez halladas las distribuciones de presión entre extremos de cada placa plana cilíndrica, se puede determinar fácilmente la fuerza que el fluido ejerce sobre el patín deslizando. Dicha fuerza viene dada por la ecuación:

$$F_{\text{sustentación}} = \int_{r_1}^{r_2} P_1(r) 2\pi r dr + \int_{r_2}^{r_3} P_2(r) 2\pi r dr + \int_{r_3}^{r_4} P_3(r) 2\pi r dr + \int_{r_4}^{r_5} P_4(r) 2\pi r dr$$

donde las presiones  $P_1(r)$ ,  $P_2(r)$ ,  $P_3(r)$  y  $P_4(r)$  vienen dadas por las ecuaciones que caracterizan la distribución de presión en cada una de las placas planas en estudio. Así, realizando la sustitución e integración para cada conjunto de placas, se obtiene

$$\begin{aligned} F_{\text{sustentación}} &= p_{\text{entrada}} \pi (r_5^2 - r_1^2) \\ &- C\pi r_5^2 \cdot \left( \frac{1}{h_1^3} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{h_2^3} \ln \left( \frac{r_3}{r_2} \right) + \frac{1}{h_3^3} \ln \left( \frac{r_4}{r_3} \right) + \frac{1}{h_4^3} \ln \left( \frac{r_5}{r_4} \right) \right) \\ &+ C\pi \left( \frac{1}{h_1^3} \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} + \frac{1}{h_2^3} \frac{r_3^2 - r_2^2}{2} + \frac{1}{h_3^3} \frac{r_4^2 - r_3^2}{2} + \frac{1}{h_4^3} \frac{r_5^2 - r_4^2}{2} \right) \end{aligned}$$



donde la constante C toma la forma

$$C = \frac{P_{\text{entrada}} - P_{\text{salida}}}{\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)}$$

Las ecuaciones acabadas de determinar han sido definidas para el caso en estudio, es decir, un patín deslizante de sección circular y con una ranura tallada en su cara de deslizamiento. Para este caso, el número de placas planas circulares (anillos considerados) ha sido de 4,  $n = 4$ . No obstante, estas ecuaciones se pueden ampliar para un caso genérico, es decir, un patín deslizante de sección circular con diversas ranuras talladas en su superficie de deslizamiento.

Así, las ecuaciones genéricas que determinan la distribución de presiones, el caudal circulante y la fuerza que el fluido ejerce sobre el patín tomarán la forma:

Véase que las ecuaciones que se encuentran a continuación están definidas en función de un parámetro  $\{n\}$ , que indica el número total de anillos circulares (placas) considerado. Obsérvese que, para el caso en estudio,  $n = 4$ .

La ecuación genérica para el caudal es

$$Q = \frac{\pi (P_{\text{inlet}} - P_{\text{outlet}})}{6\mu \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}$$

La ecuación genérica que caracteriza la distribución de presiones en cada una de las placas circulares paralelas genéricas  $\{n\}$  toma la forma:

Para la sección de menor radio del patín, bolsillo central:  $r_1 < r < r_2$ .

$$p_1 = P_{\text{inlet}} - \frac{(P_{\text{inlet}} - P_{\text{outlet}})}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} \left[ \frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \right]$$

Para el resto de las caras:  $2 < j < n$

$$p_j = P_{\text{inlet}} - \frac{(P_{\text{inlet}} - P_{\text{outlet}})}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} \left[ \frac{1}{h_j^3} \ln\left(\frac{r}{r_j}\right) + \sum_{k=1}^{k=j-1} \frac{1}{h_k^3} \ln\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right) \right]$$

La ecuación genérica que determina la fuerza sobre el patín deslizante para un número genérico de ranuras talladas en la cara de deslizamiento del patín es

$$F_{\text{lift}} = P_{\text{inlet}} \pi (r_{(n+1)}^2 - r_1^2) - C \pi r_{(n+1)}^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln \left( \frac{r_{(i+1)}}{r_i} \right) + C \pi \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \frac{r_{(i+1)}^2 - r_i^2}{2}$$

donde

$$C = \frac{P_{\text{inlet}} - P_{\text{outlet}}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln \left( \frac{r_{(i+1)}}{r_i} \right)}$$

Algunos de los resultados que se pueden obtener de las ecuaciones acabadas de hallar se muestran en las gráficas siguientes.

La gráfica 43.2 muestra el valor del caudal de fugas para diferentes gradientes de presiones y distancias entre el patín y la placa base. La 43.3 muestra la distribución de presiones en dirección radial. Y la 43.4 indica cómo varía el caudal de fugas y la fuerza resultante sobre el patín cuando los radios interior y exterior de la ranura tallada en la cara de deslizamiento del mismo se desplazan en dirección radial. Obsérvese el enorme efecto que las dimensiones de la ranura tienen sobre la fuerza actuante sobre el patín.

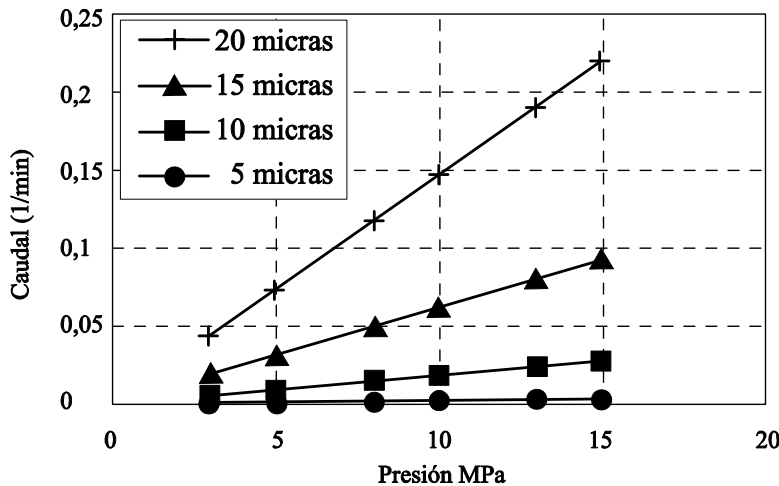


Fig. 43.2  
Caudal de fugas en función de la presión diferencial y la distancia entre el patín y la placa base. Escala 2:1



Fig. 43.3  
Distribución de presión en dirección radial y en función del gradiente de presiones entre extremos del patín.  
Escala 2:1

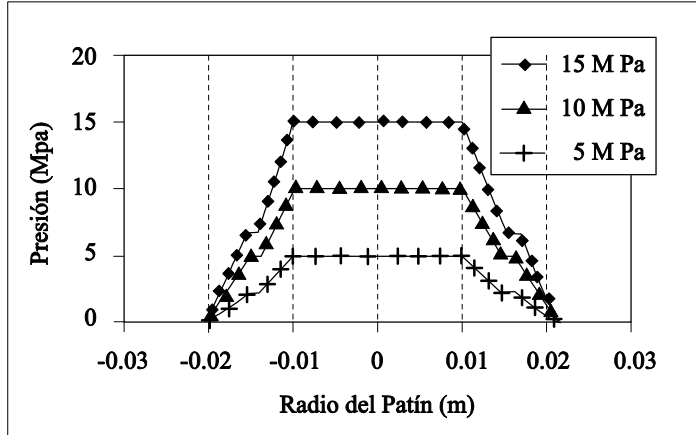
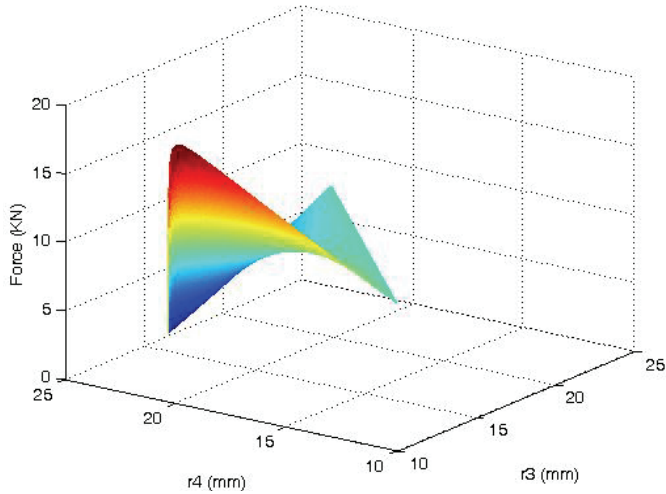
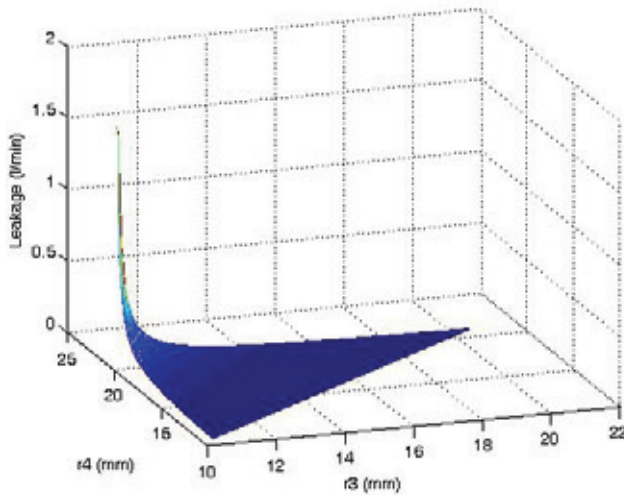


Fig. 43.4  
Fuerza y caudal de fugas para el patín deslizando original (escala 2:1) cuando se modifican las dimensiones de la ranura,  $r_3$  y  $r_4$ . La profundidad de la ranura se mantiene constante a 0,8 mm.  $h_2 = h_4 = 10$  micras. Presión de alimentación: 15 MPa. a) fuerza; b) caudal



a)



b)





## Problema 44

### Enunciado

Sea el patín deslizante estudiado en el problema 43.1 y definido en la figura 44.1. Determine la distribución de presiones entre el patín y la placa base (plato inclinado), así como el caudal de fugas, para el caso en que el patín tenga una inclinación pequeña respecto a dicha placa base. Considere el fluido como incompresible, régimen laminar, flujo en dirección radial. Asimismo, considere como primera aproximación que no existe movimiento relativo entre el patín y la placa de deslizamiento. Generalice las ecuaciones para un patín con un número de ranuras cualquiera.

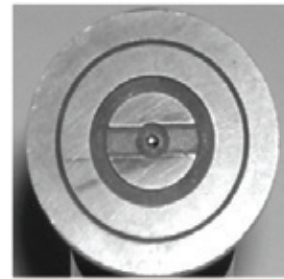
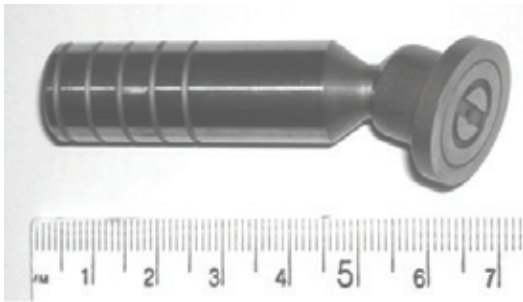
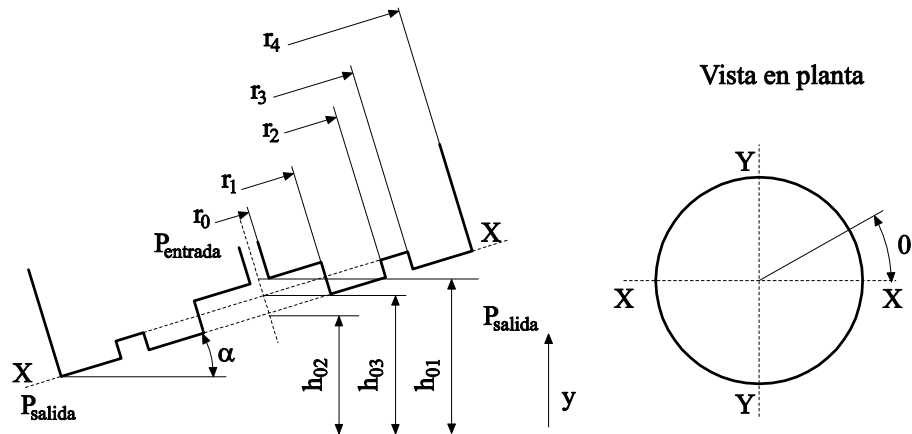


Fig. 44.1  
Conjunto pistón /  
patín deslizante y  
las dimensiones del  
patín. Cortesía de  
Oilgear Towler



### Resolución

Las hipótesis de partida para realizar el análisis matemático del patín inclinado son:

El flujo se considerara laminar.

El patín deslizante está ligeramente inclinado respecto a la placa base (plato inclinado).



El análisis se efectuará en condiciones estáticas, aunque se permite la rotación del patín sobre su propio eje central (*spin*).

El flujo se considera en dirección radial.

Todas las caras del patín deslizante son planas; no tienen curvatura alguna.

El único movimiento relativo entre el patín y el plato inclinado es el (*spin*).

De la aplicación de la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 6\mu \omega r \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (1)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular del patín (*spin*) respecto a su eje central.

El espesor de la película de fluido en función del radio y del ángulo de posición del patín  $\theta$  se determina del modo siguiente (v. figura 44.1):

$$h = h_0 + \alpha r_m \cos \theta \quad (2)$$

Obsérvese que se utiliza el radio medio  $r_m$  de la placa circular genérica en estudio.

La variación del espesor de la película de fluido en función de la posición angular del patín se enuncia:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -\alpha r_m \operatorname{sen} \theta \quad (3)$$

La primera integración de la ecuación diferencial (1) da lugar a

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{-3\mu \omega \alpha r_m \operatorname{sen} \theta r}{(h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} + \frac{k_1}{r (h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} \quad (4)$$

De la segunda integración, se obtiene

$$p = \frac{-3\mu \omega \alpha r_m \operatorname{sen} \theta r^2}{2 (h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} + \frac{k_1}{(h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} \ln(r) + k_2 \quad (5)$$

Por otro lado, el caudal que fluye entre el patín deslizante y la placa base (plato inclinado), se define como

$$Q_{\text{fugas}} = \int_0^{2\pi} \int_0^h u r dy d\theta \quad (6)$$



Asumiendo una distribución de velocidades de Poiseulle, la distribución de velocidades en función del gradiente de presión y de la altura genérica  $h$  se define

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (y-h) \quad (7)$$

con lo que:

$$Q_{\text{fugas}} = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (y-h) r dy d\theta \quad (8)$$

Sustituyendo en la ecuación 8 la distribución de presiones en función del radio, (ecuación 4), e integrando a lo largo de la altura de la película de líquido, se tiene

$$Q_{\text{fugas}} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu} [-3\mu\omega\alpha r_m \text{sen}\theta r^2 + k_1] d\theta \quad (9)$$

Es necesario recordar, en este punto, que una segunda integración no se puede llevar a término, puesto que la constante  $k_1$  puede depender de la posición angular  $\theta$ . En cualquier caso, para un patín deslizante compuesto de varias superficies planas paralelas, se pueden aplicar las ecuaciones 5 y 9 a cada una de las superficies.

Para el caso en estudio, donde el patín posee cuatro superficies paralelas, se establece:

Parte central del patín:  $r_0 < r < r_1$

$$p_1 = \frac{-3\mu\omega\alpha r_{m1} \text{sen}\theta r^2}{2(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{k_1}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} \ln(r) + k_2 \quad (10)$$

$$Q_{\text{caudal 1}} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu} [-3\mu\omega\alpha r_{m1} \text{sen}\theta r^2 + k_1] d\theta \quad (11)$$

$$r_{m1} = \frac{r_1 + r_0}{2} \quad (12)$$

Primera placa:  $r_1 < r < r_2$

$$p_2 = \frac{-3\mu\omega\alpha r_{m2} \text{sen}\theta r^2}{2(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{k_3}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} \ln(r) + k_4 \quad (13)$$

$$Q_{\text{caudal 2}} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu} [-3\mu\omega\alpha r_{m2} \text{sen}\theta r^2 + k_3] d\theta \quad (14)$$



$$r_{m2} = \frac{r_2 + r_1}{2} \quad (15)$$

Ranura:  $r_2 < r < r_3$

$$p_3 = \frac{-3\mu\omega\alpha r_{m3} \operatorname{sen}\theta r^2}{2(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} + \frac{k_5}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} \ln(r) + k_6 \quad (16)$$

$$Q_{caudal3} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu} [-3\mu\omega\alpha r_{m3} \operatorname{sen}\theta r^2 + k_5] d\theta \quad (17)$$

$$r_{m3} = \frac{r_3 + r_2}{2} \quad (18)$$

Segunda placa:  $r_3 < r < r_4$

$$p_4 = \frac{-3\mu\omega\alpha r_{m4} \operatorname{sen}\theta r^2}{2(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3} + \frac{k_7}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3} \ln(r) + k_8 \quad (19)$$

$$Q_{caudal4} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu} [-3\mu\omega\alpha r_{m4} \operatorname{sen}\theta r^2 + k_7] d\theta \quad (20)$$

$$r_{m4} = \frac{r_4 + r_3}{2} \quad (21)$$

Las condiciones de contorno necesarias para determinar las constantes de integración se definen:

$$r = r_0 \quad p_1 = p_{entrada} \quad (22)$$

$$r = r_1 \quad p_1 = p_2 \quad Q_{fugas1} = Q_{fugas2}$$

$$r = r_2 \quad p_2 = p_3 \quad Q_{fugas2} = Q_{fugas3}$$

$$r = r_3 \quad p_3 = p_4 \quad Q_{fugas3} = Q_{fugas4}$$

$$r = r_4 \quad p_4 = p_{salida}$$

De aplicar las condiciones de contorno a las ecuaciones 10-21 se obtiene el valor de las diversas constantes de integración. Así:



$$k_1 = \frac{P_{\text{salida}} - P_{\text{entrada}} - \frac{3\mu\omega\alpha\text{sen}\theta}{2} \left[ \frac{r_{m1}(r_0^2 - r_1^2)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m2}(r_1^2 - r_2^2)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m3}(r_2^2 - r_3^2)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m4}(r_3^2 - r_4^2)}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3} \right]}{\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3}} + \frac{3\mu\omega\alpha\text{sen}\theta \left[ \frac{r_1^2(r_{m2} - r_{m1})\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + [r_1^2(r_{m2} - r_{m1}) + r_2^2(r_{m3} - r_{m2})]\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{[r_1^2(r_{m2} - r_{m1}) + r_2^2(r_{m3} - r_{m2}) + r_3^2(r_{m4} - r_{m3})]\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3} \right]}{\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3}} \quad (23)$$

$$k_3 = 3\mu\omega\alpha\text{sen}\theta r_1^2[r_{m2} - r_{m1}] + k_1 \quad (24)$$

$$k_5 = 3\mu\omega\alpha\text{sen}\theta[r_1^2[r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2[r_{m3} - r_{m2}]] + k_1 \quad (25)$$

$$k_7 = 3\mu\omega\alpha\text{sen}\theta[r_1^2[r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2[r_{m3} - r_{m2}] + r_3^2[r_{m4} - r_{m3}]] + k_1 \quad (26)$$

$$k_2 = P_{\text{entrada}} + \frac{3\mu\omega\alpha r_{m1} \text{sen}\theta}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} \frac{r_0^2}{2} - \frac{k_1}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} \ln r_0 \quad (27)$$

$$k_4 = P_{\text{entrada}} + k_1 \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} - \frac{\ln r_1}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} \right] + \frac{3\mu\omega\alpha\text{sen}\theta}{2} \left[ \frac{r_{m1}[r_0^2 - r_1^2]}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m2}r_1^2}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} \right] - \frac{3\mu\omega\alpha\text{sen}\theta r_1^2[r_{m2} - r_{m1}]}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} \ln r_1 \quad (28)$$



$$\begin{aligned}
 k_6 = p_{\text{entrada}} + k_1 & \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} - \frac{\ln r_2}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} \right] \\
 + \frac{3\mu \omega \alpha \text{sen}\theta}{2} & \left[ \frac{r_{m1} [r_0^2 - r_1^2]}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} + \frac{r_{m2} [r_1^2 - r_2^2]}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} + \frac{r_{m3} r_2^2}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} \right] \\
 + 3\mu \omega \alpha \text{sen}\theta & \left[ \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} - \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2 [r_{m3} - r_{m2}]}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} \ln r_2 \right]
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 k_8 = p_{\text{entrada}} + k_1 & \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} + \right. \\
 & \left. + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} - \frac{\ln r_3}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos \theta)^3} \right] \\
 + \frac{3\mu \omega \alpha \text{sen}\theta}{2} & \left[ \frac{r_{m1} [r_0^2 - r_1^2]}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} + \frac{r_{m2} [r_1^2 - r_2^2]}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} + \right. \\
 & \left. + \frac{r_{m3} [r_2^2 - r_3^2]}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} + \frac{r_{m4} r_3^2}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos \theta)^3} \right] \\
 + 3\mu \omega \alpha \text{sen}\theta & \left[ \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} + \right. \\
 & + \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2 [r_{m3} - r_{m2}]}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \\
 & \left. - \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2 [r_{m3} - r_{m2}] + r_3^2 [r_{m4} - r_{m3}]}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos \theta)^3} \ln r_3 \right]
 \end{aligned} \tag{30}$$

Sustituyendo el valor de las constantes de integración en las ecuaciones de la distribución de presión en cada una de las cuatro caras paralelas, (ecuaciones 10, 13, 16 y 19), se obtienen ecuaciones explícitas para cada una de las caras paralelas en estudio. El resultado es:

$$p_1 = p_{\text{entrada}} + \frac{k_1 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} + \frac{3\mu \omega \alpha r_{m1} \text{sen}\theta}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} \left[ \frac{r_0^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right] \tag{31}$$



$$\begin{aligned}
 p_2 = p_{\text{entrada}} + k_1 & \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} \right] + \\
 & + \frac{3\mu \omega \alpha \text{sen}\theta}{2} \left[ \frac{r_{m1} [r_0^2 - r_1^2]}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} + \frac{r_{m2} [r_1^2 - r^2]}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} \right] \\
 & + \frac{3\mu \omega \alpha \text{sen}\theta r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}]}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)
 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 p_3 = p_{\text{entrada}} + k_1 & \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} \right] \\
 & + \frac{3\mu \omega \alpha \text{sen}\theta}{2} \left[ \frac{r_{m1} [r_0^2 - r_1^2]}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} + \frac{r_{m2} [r_1^2 - r_2^2]}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} + \frac{r_{m3} [r_2^2 - r^2]}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} \right] \\
 & + 3\mu \omega \alpha \text{sen}\theta \left[ \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} + \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2 [r_{m3} - r_{m2}]}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) \right]
 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 p_4 = p_{\text{entrada}} + k_1 & \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_3}\right)}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos \theta)^3} \right] \\
 & + \frac{3\mu \omega \alpha \text{sen}\theta}{2} \left[ \frac{r_{m1} [r_0^2 - r_1^2]}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos \theta)^3} + \frac{r_{m2} [r_1^2 - r_2^2]}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} + \frac{r_{m3} [r_2^2 - r_3^2]}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} + \frac{r_{m4} [r_3^2 - r^2]}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos \theta)^3} \right] \\
 & + 3\mu \omega \alpha \text{sen}\theta \left[ \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos \theta)^3} + \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2 [r_{m3} - r_{m2}]}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos \theta)^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2 [r_{m3} - r_{m2}] + r_3^2 [r_{m4} - r_{m3}]}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos \theta)^3} \ln\left(\frac{r}{r_3}\right) \right]
 \end{aligned} \quad (34)$$

Por otro lado, al sustituir las constantes de integración en las ecuaciones 11, 14, 17 y 20, se obtiene una única ecuación que determina el caudal de fugas entre el patín deslizante inclinado y la placa base:



$$Q_{\text{fugas}} = -\int_0^{2\pi} \frac{k_1}{12 \mu} d\theta \quad (35)$$

Debido a la complejidad de la integral definida en la ecuación 35, esta debe ser integrada numéricamente.

La generalización de las ecuaciones de distribución de presiones y caudal, para un número cualquiera de ranuras talladas en la cara del patín, da lugar a las ecuaciones siguientes:

Se generalizan, inicialmente, las constantes de integración:

Puesto que todas las constantes están dadas en función del parámetro  $k_1$ , se generalizará inicialmente esta constante. En las ecuaciones siguientes, se debe tener presente que  $1 < i < n$ , donde  $n$  es el número de caras paralelas que posee el patín, incluyendo como cara la central del patín y la ranura o las ranuras. Véase que el número mínimo de caras que un patín de estas características puede tener es “ $n = 2$ ”, que obedece a un patín que posee únicamente la cara central y la cara deslizante. Para el patín deslizante objeto estudio, se observa que  $n = 4$ .

$$k_1 = \frac{\left[ \begin{aligned} &P_{\text{salida}} - P_{\text{entrada}} - \frac{3\mu\omega\alpha \text{sen}\theta}{2} \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{r_{mi} (r_{i-1}^2 - r_i^2)}{(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos\theta)^3} \right] \\ &- 3\mu\omega\alpha \text{sen}\theta \left[ \sum_{i=1}^{i=(n-1)} \frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) \left[ \sum_{j=1}^{j=i} r_j^2 (r_{m(j+1)} - r_{mj}) \right]}{(h_{0(i+1)} + \alpha r_{m(i+1)} \cos\theta)^3} \right] \end{aligned} \right]}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\ln\left(\frac{r_i}{r_{(i-1)}}\right)}{(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos\theta)^3}} \quad (36)$$

La ecuación genérica para las constantes impares  $k_3, k_5, k_7, \dots$  será

$$k_L = 3\mu\omega\alpha \text{sen}\theta \left( \sum_{j=1}^{j=\frac{L-1}{2}} \left[ r_j^2 [r_{m(j+1)} - r_{mj}] \right] \right) + k_1 \quad (37)$$

donde el valor de “ $L$ ” tiene que ser impar y entre  $3 \leq L \leq (2n - 1)$ .

La ecuación genérica para las constantes pares  $k_2, k_4, k_6, k_8, \dots$  será:





$$\begin{aligned}
 k_M = P_{\text{inlet}} + & \left\{ \sum_{i=1}^{\left(\frac{M-2}{2}\right)} \left( \frac{\ln\left(\frac{r_i}{r_{(i-1)}}\right)}{\left(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos \theta\right)^3} - \frac{\ln r_{\left(\frac{M-2}{2}\right)}}{\left(h_{0(M/2)} + \alpha r_{m(M/2)} \cos \theta\right)^3} \right) \right\} k_1 + \\
 + \frac{3\mu\omega\alpha \text{sen } \theta}{2} & \left\{ \sum_{i=1}^{\left(\frac{M-2}{2}\right)} \left( \frac{r_{mi} \left(r_{i-1}^2 - r_i^2\right)}{\left(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos \theta\right)^3} + \frac{r_{m(M/2)} r_{\left(\frac{M-2}{2}\right)}^2}{\left(h_{0(M/2)} + \alpha r_{m(M/2)} \cos \theta\right)^3} \right) \right\} + \\
 + 3\mu\omega\alpha \text{sen } \theta & \left\{ \sum_{i=1}^{\left(\frac{M-4}{2}\right)} \left( \frac{\left[ \sum_{j=1}^{j=i} \left[ r_j^2 \left( r_{m(j+1)} - r_{mj} \right) \right] \right] \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}{\left(h_{0(i+1)} + \alpha r_{m(i+1)} \cos \theta\right)^3} \right) \right\} \\
 & \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\left(\frac{M-2}{2}\right)} \left( r_j^2 \left( r_{m(j+1)} - r_{mj} \right) \right)}{\left(h_{0(M/2)} + \alpha r_{m(M/2)} \cos \theta\right)^3} \frac{\ln r_{\left(\frac{M-2}{2}\right)}}{\left(\frac{M-2}{2}\right)} \right\}
 \end{aligned} \tag{38}$$

Los valores de la variable  $M$  en la ecuación 38 han de ser pares y estar dentro del margen  $2 \leq M \leq 2n$ . Cuando se desarrollen las ecuaciones explícitas partiendo de las ecuaciones genéricas, se debe recordar que, cuando aparezca un sumatorio del tipo  $\sum_{\text{límite inferior}}^{\text{límite superior}}$  si el límite superior tiene un valor más pequeño que el límite inferior, significa que todo el término que queda afectado por el sumatorio tendrá el valor 0.

La ecuación genérica que da lugar a la distribución de presión en cualquier punto del patín toma la forma:

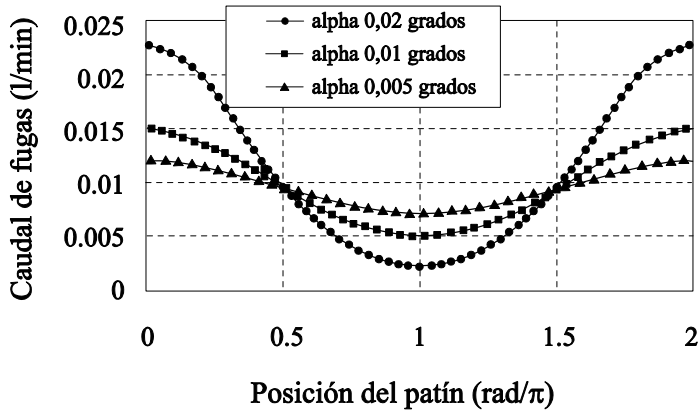
$$\begin{aligned}
 p_i = p_{\text{entrada}} + k_1 & \left[ \frac{\ln\left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)}{\left(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos \theta\right)^3} + \sum_{j=2}^{j=i} \frac{\ln\left(\frac{r_{j-1}}{r_{j-2}}\right)}{\left(h_{0(j-1)} + \alpha r_{m(j-1)} \cos \theta\right)^3} \right] + \\
 \frac{3\mu\omega\alpha \text{sen } \theta}{2} & \left[ \frac{r_{mi} \left[r_{i-1}^2 - r^2\right]}{\left(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos \theta\right)^3} + \sum_{j=2}^{j=i} \frac{r_{m(j-1)} \left[r_{j-2}^2 - r_{j-1}^2\right]}{\left(h_{0(j-1)} + \alpha r_{m(j-1)} \cos \theta\right)^3} \right] + \\
 3\mu\omega\alpha \text{sen } \theta & \left[ \frac{\left[ \sum_{j=2}^{j=i} r_{j-1}^2 \left[ r_{mj} - r_{m(j-1)} \right] \right]}{\left(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos \theta\right)^3} \ln\left(\frac{r}{r_{i-1}}\right) + \sum_{j=3}^{j=i} \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_{j-1}}{r_{j-2}}\right) \left[ \sum_{k=3}^{k=i} r_{k-2}^2 \left[ r_{m(k-1)} - r_{m(k-2)} \right] \right]}{\left(h_{0(j-1)} + \alpha r_{m(j-1)} \cos \theta\right)^3} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{39}$$



La ecuación genérica que caracterizaría el caudal de fugas sigue siendo la ecuación 35, aunque cuando el valor de la constante  $k_1$  es el genérico.

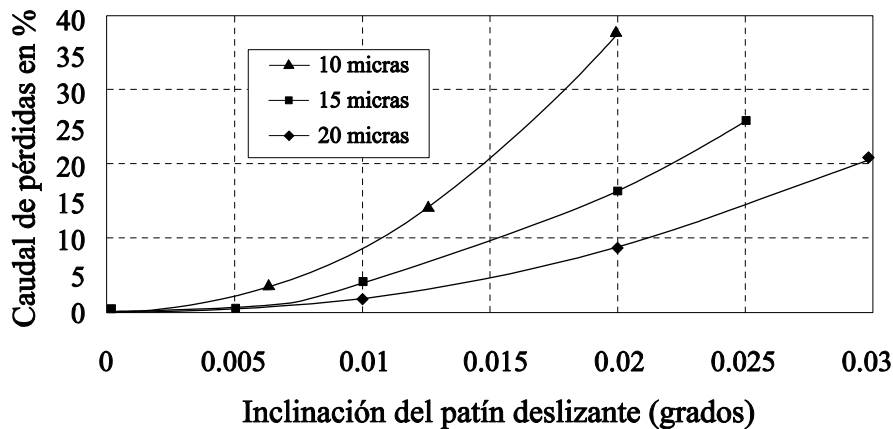
La figura que se muestra a continuación (Fig. 44.2), caracteriza el caudal de fugas existente entre el patín deslizante y la placa base en función de la posición angular del patín y para diferentes ángulos de inclinación del mismo. Esta información se obtiene partiendo de la ecuación 35.

Fig. 44.2  
Caudal de fugas en función de la posición angular del patín.  
Distancia central  $h_{02} = 15$  micras,  
 $P_{\text{alimentación}} = 100$  bar



La figura 44.3 representa el caudal de fugas (en porcentaje respecto al caudal que tendría el patín situado paralelo a la placa base) entre el patín deslizante y la placa base, para diferentes distancias entre la parte central del patín y la placa base, y diferentes inclinaciones del patín. Obsérvese que la variación de caudal en porcentaje es independiente de la presión de alimentación. Esta información se obtiene al integrar la ecuación 35.

Fig. 44.3  
Caudal de fugas del patín deslizante, en porcentaje respecto al caudal cuando el patín está plano



La figura 44.4 presenta la caída de presión en el intersticio patín deslizante/placa base, incluyendo la presión en la parte central del patín y en la ranura tallada sobre el mismo. Este gráfico se obtiene al representar las ecuaciones de la 31 a la 34.

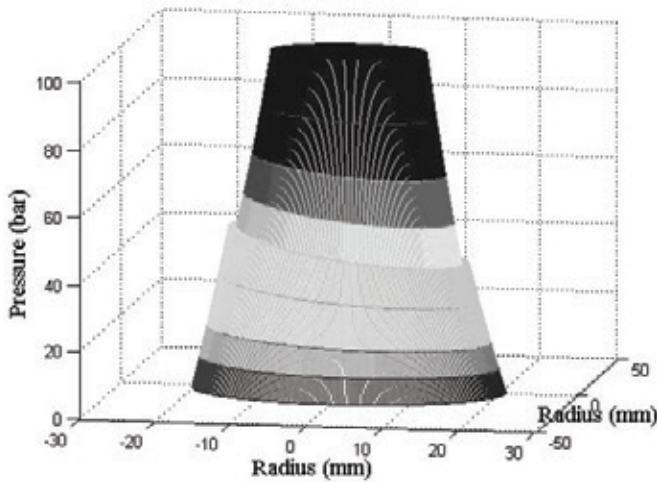


Fig. 44.4  
Distribución de presiones existente entre el patín y la placa base  
 $h_{02}=15$  micras  
 $\alpha = 0,01$  grados  
 $\omega = 25,12$  rad/s

## Problema 45

### Enunciado

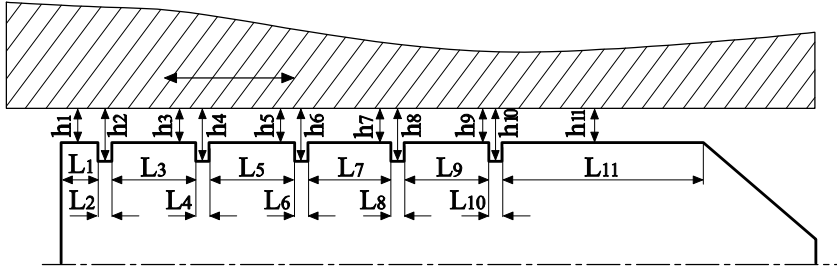
Sea el pistón que se detalla en la figura 45.1, el cual es uno de los nueve pistones que forman parte de una bomba de pistones axiales. El movimiento alternativo del pistón está definido por la ecuación  $u = -R_p \tan \alpha \sin(\omega t)$ , donde  $R_p$  es el radio del plato inclinado,  $\alpha$  es la inclinación de dicho plato inclinado y  $\omega$  es la velocidad angular a la que gira la bomba, parámetros que son constantes y conocidos. Las dimensiones del pistón se especifican en la figura 45.2. Determine el caudal temporal de fugas entre pistón y camisa, así como la distribución de presiones a lo largo del mismo. Deben tenerse en cuenta las entallas talladas en el pistón.



Fig. 45.1  
Pistón objeto de estudio. Cortesía de Oilgear Towler



Fig. 45.2  
Esquema del pistón  
y camisa con sus  
dimensiones  
consideradas



## Resolución

En este caso particular, para desarrollar las ecuaciones requeridas, se partirá de la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas y flujo unidireccional, bidimensional. El flujo entre pistón y camisa se caracteriza como flujo de Couette – Poiseuille. Véase, en la figura 45.2, que la distancia entre pistón y camisa se considera constante en todo punto, lo cual es una idealización de la realidad.

Las hipótesis de partida consideradas para este problema son:

El flujo se considera laminar en todo punto.

El flujo se considera bidimensional.

Existe movimiento relativo entre pistón y camisa.

El espacio existente entre pistón y camisa se simula como flujo entre dos placas planas paralelas.

No se considera la excentricidad existente entre pistón y camisa.

Cada una de las superficies del pistón, como las ranuras, se modelizarán como placas planas.

Las dimensiones conocidas del pistón son:

$$h_1 = h_3 = h_5 = h_7 = h_9 = h_{11} = 2,5 \text{ micras.}$$

$$h_2 = h_4 = h_6 = h_8 = h_{10} = h_1 + 0,4 \text{ mm.}$$

$$L_1 = 1,42 \text{ mm}$$

$$L_{11} = 19,5 \text{ mm}$$

$$L_2 = L_4 = L_6 = L_8 = L_{10} = 0,88 \text{ mm}$$

$$L_3 = L_5 = L_7 = L_9 = 4 \text{ mm}$$



La ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas puede ser dada como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (1)$$

Su integración da lugar a:

$$P = \frac{A\mu}{h^3} x + B \quad (2)$$

La ecuación 2 proporciona la distribución de presiones a lo largo del eje x, eje principal del pistón; las constantes A y B deben ser halladas mediante las condiciones de contorno.

El flujo de Couette – Poiseuille entre dos placas planas paralelas se define como:

$$\dot{V} = \frac{h u}{2} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^3}{12\mu} \quad (3)$$

Sustituyendo la primera integración de la ecuación 1 en la ecuación 3, se obtiene

$$\dot{V} = \frac{h u}{2} - \frac{A}{12} \quad (4)$$

Las ecuaciones 2 y 4 son aplicables a cualquier par de placas planas paralelas, con lo que, para el primero de los pares de placas planas definidos en la figura 45.2, se establece:

$$P_1 = \frac{A\mu}{h^3} x + B \quad (5)$$

$$\dot{V}_1 = \frac{h_1 u}{2} - \frac{A}{12} \quad (6)$$

El rango de aplicabilidad de estas dos ecuaciones es para  $0 \leq X \leq l_1$ .

Para el último de los pares de placas definido en la figura 45.2, se tiene

$$P_{11} = \frac{U\mu}{h_{11}^3} x + V \quad (7)$$

$$\dot{V}_{11} = \frac{h_{11} u}{2} - \frac{U}{12} \quad (8)$$



El rango de aplicabilidad de estas dos ecuaciones es

$$\left( \sum_{i=1}^{i=10} l_i \right) \leq x \leq \left( \sum_{i=1}^{i=11} l_i \right) \quad (9)$$

Obsérvese que, para el caso en estudio, aparecen ecuaciones similares a las presentadas para los nueve pares de placas planas que se encuentran entre la primera y la última definidas aquí

Las constantes A...V deben ser halladas mediante las condiciones de contorno.

Para el presente estudio, se observa que aparecen un total de 22 ecuaciones con 22 constantes a determinar. En cada una de las dos superficies planas, se pueden definir las condiciones de contorno como

$$x = \sum_{j=1}^{j=i} l_j ; \quad P_i = P_{i+1}; \quad \dot{V}_i = \dot{V}_{i+1}; \quad 1 \leq i \leq 10 \quad (10)$$

Asumiendo que las dimensiones son

$$l_2=l_4=l_6=l_8=l_{10}; \quad l_3=l_5=l_7=l_9; \quad h_1=h_3=h_5=h_7=h_9=h_{11}; \quad h_2=h_4=h_6=h_8=h_{10}; \quad (11)$$

El valor de cada una de las 22 constantes será

$$A = \frac{P_{\text{tanque}} - P_{\text{cilindro}} - C_{A2}}{\frac{\mu}{h_{11}^3} \sum_{i=1}^{i=11} l_i + C_{A1}} \quad (12)$$

$$\text{Para el caso en estudio, se cumple que } A=E=I=M=Q=U; \quad B = P_{\text{cilindro}}; \quad (13)$$

donde se tiene que

$$C_{A1} = \mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \quad (14)$$

$$C_{A2} = 6\mu \left[ \frac{h_{10} - h_1}{h_{10}^3} (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \right] \quad (15)$$

De acuerdo con las especificaciones precedentes, se tiene:

$$C = K = G = O = S = 6u (h_2 - h_1) + A \quad (16)$$



$$D = A\mu \left[ \frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-l_1) + B; \quad (17)$$

$$F = A\mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] * (l_2) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (l_2) + B; \quad (18)$$

$$H = A\mu \left[ \frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1 + l_3) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-(l_1 + l_3)) + B; \quad (19)$$

$$J = A\mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] * (l_2 + l_4) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (l_2 + l_4) + B \quad (20)$$

$$L = A\mu \left[ \frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1 + l_3 + l_5) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-(l_1 + l_3 + l_5)) + B; \quad (21)$$

$$N = A\mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6) + B; \quad (22)$$

$$P = A\mu \left[ \frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1 + l_3 + l_5 + l_7) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-(l_1 + l_3 + l_5 + l_7)) + B \quad (23)$$

$$R = A\mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6 + l_8) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6 + l_8) + B; \quad (24)$$

$$T = A\mu \left[ \frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1 + l_3 + l_5 + l_7 + l_9) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-(l_1 + l_3 + l_5 + l_7 + l_9)) + B \quad (25)$$

$$V = A\mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) + B; \quad (26)$$

Con este colectivo de ecuaciones, es ahora posible hallar la distribución de presiones a lo largo de la longitud del pistón, teniendo además en cuenta las cinco ranuras talladas en el mismo. De hecho, estas ecuaciones permiten investigar, el incremento de presión creado en cada una de las ranuras, en función de las dimensiones de las mismas y de la velocidad del pistón.

Tradicionalmente, se asume que el caudal de fugas entre pistón y camisa es constante, y sigue una relación lineal con la diferencia de presiones existente entre extremos del pistón. De las ecuaciones acabadas de hallar, se observa que el caudal de fugas entre pistón y camisa es altamente dependiente del movimiento relativo del pistón. Obsérvese que la velocidad del pistón tiene forma senoidal y está definida por la ecuación establecida en el enunciado:



$$u = -R_p \tan \alpha \operatorname{sen}(\omega t) \omega \quad (27)$$

Sustituyendo las constantes determinadas en cada una de las 11 ecuaciones del caudal de fugas, y teniendo en cuenta además la ecuación 27, se obtiene una ecuación que caracteriza el caudal de fugas temporal entre pistón y camisa.

$$q_p = \pi d \left[ \frac{h_1 R_p \tan \alpha (-\operatorname{sen}(\omega t)) \omega}{2} \right] - \frac{\pi d}{12} \left[ \frac{P_{\text{Tank}} - P_{\text{interior}} - 6R_p \tan \alpha (-\operatorname{sen}(\omega t)) \omega \mu \left[ \frac{h_{10} - h_1}{h_{10}^3} \right] (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10})}{\frac{\mu}{h_{11}^3} (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{11}) + \mu \left[ \left( \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right) (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \right]} \right] \quad (28)$$

En realidad, el caudal total de fugas entre pistón y camisa, es la suma de los caudales de fugas de cada uno de los pistones que en un momento dado están sometidos a presión, con lo que este caudal total se puede dar como

$$q_t = \sum_{p=1}^{p=n} q_p \quad (29)$$

donde  $n$  es el número de pistones que en cada instante están sometidos a presión.

La ecuación (28) asume que la totalidad del pistón está en todo momento, en el interior del barril, aunque en realidad esto no es así, dado que la parte inferior de los pistones sale fuera del barril cuando los pistones están en su punto muerto inferior.

Con el fin de considerar la longitud real del pistón que en todo momento está en el interior del barril, se ha creado la ecuación 30.

$$q_p = \pi d \left[ \frac{h_1 R_p \tan \alpha (-\operatorname{sen}(\omega t)) \omega}{2} \right] - \frac{\pi d}{12} \left[ \frac{P_{\text{Tank}} - P_{\text{interior}} - 6R_p \tan \alpha (-\operatorname{sen}(\omega t)) \omega \mu \left[ \frac{h_{10} - h_1}{h_{10}^3} \right] (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10})}{\frac{\mu}{h_{11}^3} \left( l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{11} - \frac{0.0195}{2} - R_p \tan \alpha \cos(\omega t) \right) + \mu \left[ \left( \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right) (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \right]} \right] \quad (30)$$

La ecuación 30 caracteriza el caudal temporal de fugas entre pistón y camisa, en función del intersticio existente entre ambos, del gradiente de presiones entre extremos del pistón, de la velocidad de rotación de la bomba y de las características geométricas del pistón y la bomba, (plato inclinado). En esta ecuación se ha de entender que, para  $t=0$ , el pistón está situado en su punto muerto inferior.





La distribución de presiones a lo largo del eje del pistón se determinará al sustituir las constantes halladas en las ecuaciones 5, 7 y sus nueve ecuaciones equivalentes. La representación gráfica de esta distribución de presiones para el caso en que existan las 5 ranuras cortadas a lo largo del eje del pistón y para el caso en que no exista ranura alguna se presenta en la figura 45.3, donde se puede apreciar claramente el efecto que las ranuras causan sobre dicha distribución de presiones.

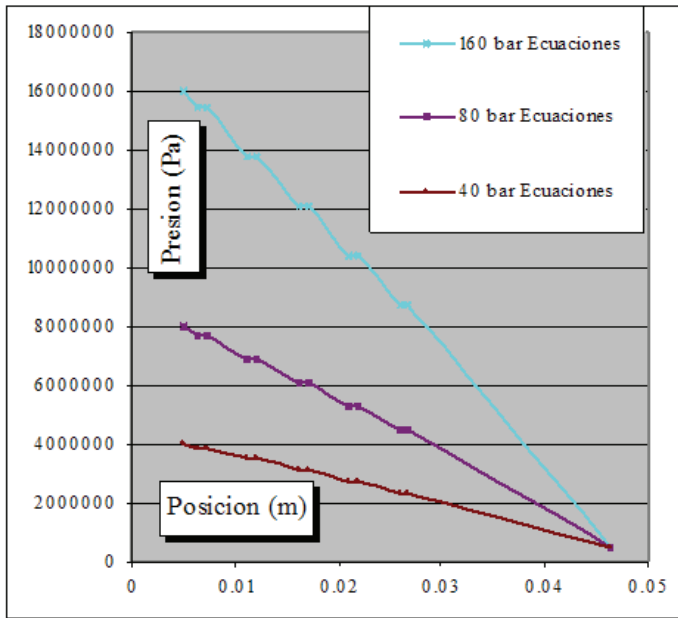


Fig. 45.3  
Distribución de presiones a lo largo del eje del pistón

La figura 45.4 muestra el caudal de fugas existente entre pistón y camisa, en función de la velocidad del pistón y para diferentes presiones de la cámara del cilindro. Obsérvese que el flujo de Couette, asociado a la velocidad de desplazamiento del pistón, es el preponderante.

En la figura 45.5, se presenta el caudal de fugas, suma de la aportación de los 4-5 pistones que constantemente están en contacto con la cámara del cilindro sometida a presión. Obsérvese que en realidad, el caudal de fugas es hacia la cámara del pistón, es decir, negativo. En este mismo gráfico, se presenta la aportación del número de pistones cuya cámara del cilindro está en contacto con el tanque y que están yendo del punto muerto superior al punto muerto inferior, véase que el caudal neto para este caso es hacia el tanque.

Por último, la figura 45.6 muestra el caudal de fugas dinámico, resultante de incluir la aportación de los nueve pistones que forman la bomba, véase que el caudal resultante es hacia el tanque. Dicho caudal de fugas resultante, es mayor a medida que la presión a la que trabaja la bomba aumenta, resultado que era de esperar.



Fig. 45.4  
Caudal de fugas de un único pistón

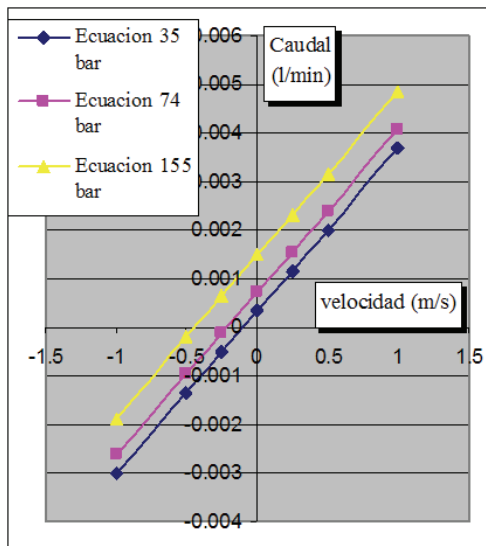


Fig. 45.5  
Caudal de fugas para 4-5 pistones

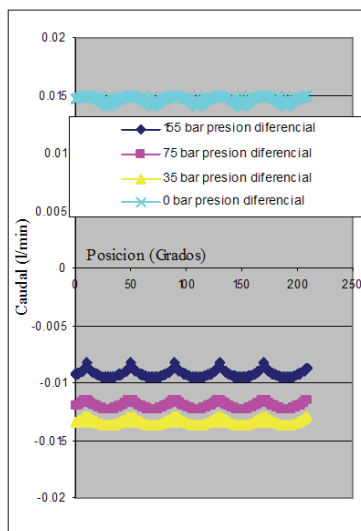
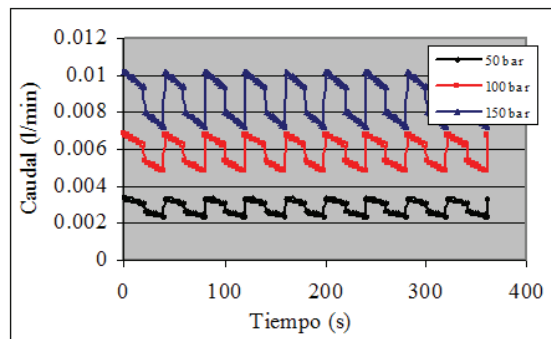


Fig. 45.6  
Caudal de fugas para los 9 pistones



## Problema 46

### Enunciado

Un tanque de grandes dimensiones se vacía mediante la tubería que se esquematiza en la figura. Determine la velocidad del agua a la salida del conducto en función del tiempo, una vez que se abra la válvula, la cual está situada en el extremo del conducto más alejado del tanque. Se supone que el conducto descarga a la atmósfera.

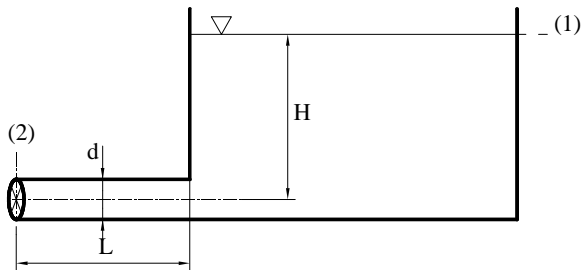


Fig. 46.1

Considérese que:

- la sección del tanque es muy superior a la sección del conducto.
- el flujo en el interior del conducto es uniforme.

### Resolución

Se distinguen tres zonas características: depósito, entrada conducto, y conducto.

Si “u” es la velocidad del fluido en cualquier punto del conducto, los tiempos de residencia del fluido en el conducto se pueden definir como:

$$T_{\text{conducto}} = \frac{L}{u}$$

$$T_{\text{entrada conducto}} = \frac{D}{u}$$

$$T_{\text{de residencia en el depósito}} = \frac{\nabla}{D^2 u}$$

donde L= longitud del conducto; D= diámetro del conducto;  $\nabla$ = volumen del depósito.



Relacionando estos tiempos, se observa que:

$$\frac{T_{\text{conducto}}}{T_{\text{tiempo de residencia en el depósito}}} = \frac{L D^2 u}{u \nabla} = \frac{L D^2}{\nabla} \ll 1$$

Puesto que el volumen del fluido en el depósito es mucho mayor que el volumen de fluido en el conducto, el tiempo de residencia del fluido en el depósito será mucho mayor que el tiempo en el conducto.

$$\frac{T_{\text{entrada al conducto}}}{T_{\text{conducto}}} = \frac{D u}{u L} = \frac{D}{L} \ll 1$$

Dado que la longitud del conducto es mucho mayor que su diámetro, el tiempo de residencia del fluido en el conducto será mucho mayor que el tiempo que se necesita para que el fluido atraviese la entrada del conducto.

Obsérvese que aparecen tres escalas de tiempos:  $T_{\text{depósito}} \gg T_{\text{conducto}} \gg T_{\text{entrada al conducto}}$

De la aplicación de la ecuación de continuidad entre el nivel del depósito y el extremo del conducto se puede obtener el orden de magnitud de las velocidades en el conducto y en el depósito:

$$D_{\text{dep}}^2 \cdot u_{\text{dep}} = u_c \cdot D^2$$

Puesto que el diámetro del depósito es muy superior al del conducto, se puede concluir que la velocidad del fluido en el depósito es despreciable. Así pues, en el estudio de la aceleración del fluido en el conducto, la altura del depósito se considerará constante.

La ecuación de cantidad de movimiento aplicada a lo largo del conducto establece:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + \rho g + \nabla \tau$$

Considerando flujo ideal (esfuerzos cortantes despreciables), flujo irrotacional y unidireccional, se obtiene:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left( P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z \right) = 0$$

Para fluido incompresible y en dirección del movimiento, (eje x) se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z \right) = 0$$



Integrando entre las secciones de entrada y salida del conducto, y recordando que tanto la velocidad como la cota son las mismas en ambos puntos, se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P}{\rho} \right) = 0$$

Ecuación que se puede dar como:

$$\int_0^L \frac{dv}{dt} dx + \int_{P_e}^{P_s} d \left( \frac{P}{\rho} \right) = 0$$

Su integración dará lugar a:

$$L \frac{dv}{dt} + \frac{P_s}{\rho} - \frac{P_e}{\rho} = 0$$

La relación entre la presión estática a la entrada del conducto y la presión dinámica se establece:

$$\frac{P_{\text{fondo del depósito}}}{\rho} + \frac{v_{\text{fondo del depósito}}^2}{2} + gZ_{\text{fondo del depósito}} =$$

$$\frac{P_{\text{entrada al conducto}}}{\rho} + \frac{v_{\text{entrada al conducto}}^2}{2} + gZ_{\text{entrada al conducto}}$$

Si se entiende que la velocidad en el fondo del depósito es nula y que la cota es la misma que la de la entrada del conducto, se tiene.

$$\frac{P_{\text{fondo del depósito}}}{\rho} = \frac{P_{\text{entrada al conducto}}}{\rho} + \frac{v_{\text{entrada al conducto}}^2}{2}$$

Por otro lado, la presión en el fondo del depósito, según la estática de fluidos, es:

$$P_{\text{fondo del depósito}} = \rho g H$$

de donde:

$$\frac{\rho g H}{\rho} = \frac{P_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2}; \quad \frac{P_e}{\rho} = gH - \frac{v_e^2}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial hallada entre la entrada y salida del depósito se tiene:

$$L \frac{dv}{dt} + \frac{P_s}{\rho} - gH + \frac{v_e^2}{2} = 0$$



Suponiendo que la presión a la salida del depósito es la presión atmosférica:

$$\int_0^v \frac{dv}{2gH - v^2} = \int_0^t \frac{dt}{2L}$$

$$\int_0^v \frac{dv}{2gH - v^2} = \int_0^v \frac{dv}{2gH - v^2} \frac{2gH}{2gH}$$

$$\int_0^v \frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right)^2} \frac{1}{2gH} = \frac{1}{\sqrt{2gH}} \operatorname{arctgh}\left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\int_0^t \frac{dt}{2L} = \frac{1}{\sqrt{2gH}} \operatorname{arctgh}\left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right);$$

$$\int_0^t \sqrt{2gH} \frac{dt}{2L} = \operatorname{arctgh}\left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right);$$

$$\operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH} \frac{t}{2L}\right) = \frac{v}{\sqrt{2gH}};$$

$$v = \sqrt{2gH} \cdot \operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH} \frac{t}{2L}\right)$$

ecuación que determina la variación temporal de la velocidad en el conducto.

Un método de resolución alternativo es el siguiente:

Partiendo de la ecuación de Navier Stokes en dirección X:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right);$$

si el fluido es ideal  $\mu = 0$  ;

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x; \quad \text{sabiendo que} \quad g_x = -\nabla(gz)$$

$$g_x = -g \frac{\partial z}{\partial x}$$



$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial z}{\partial x} ;$$

multiplicando por dx:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} dx + u du \right) = -dP - \rho g dz ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx = -\frac{dP}{\rho} - g dz - u du ;$$

$$\int_1^2 \frac{du}{dt} dx = - \left[ \int_1^2 \frac{dP}{\rho} + \int_1^2 g dz + \int_1^2 u du \right] ;$$

$$\int_1^2 \frac{du}{dt} dx = \frac{P_1 - P_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} ;$$

$$\frac{P_1}{\rho} + g z_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + g z_2 + \frac{u_2^2}{2} + \int_1^2 \frac{du}{dt} dx ;$$

Como el depósito es muy grande, sólo aparecerá variación de velocidad en dirección x:

$$\int_1^2 \frac{du_x}{dt} dx = \int_0^L \frac{du_x}{dt} dx$$

$$\int_0^L \frac{du_x}{dt} dx = \int_0^L \frac{du_2}{dt} dx = L \frac{du_2}{dt}$$

Trabajando con presiones relativas  $P_1 \cong P_2 \cong 0$  y asumiendo  $v_1 \cong 0$ :

$$g z_1 = g z_2 + \frac{u_2^2}{2} + L \frac{du_2}{dt}$$

$$g(z_1 - z_2) - \frac{u_2^2}{2} = L \frac{du_2}{dt} ;$$

$$\frac{2gH - u_2^2}{2} = L \frac{du_2}{dt} ;$$

$\frac{dt}{2L} = (2gH - u_2^2)^{-1} du_2$ ; si se soluciona a parte la segunda parte de la ecuación:



$$\int_0^{u_2} \frac{du_2}{2gH - u_2^2} = \int_0^{u_2} \frac{du_2}{2gH - u_2^2} \frac{2gH}{2gH}$$

$$\int_0^{u_2} \frac{du_2}{1 - \left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right)^2} \frac{1}{2gH} = \frac{1}{\sqrt{2gH}} \operatorname{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right)$$

y, sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\int_0^t \frac{dt}{2L} = \frac{1}{\sqrt{2gH}} \operatorname{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right) ;$$

$$\int_0^t \sqrt{2gH} \frac{dt}{2L} = \operatorname{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right) ;$$

$$\operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH} \frac{t}{2L}\right) = \frac{u_2}{\sqrt{2gH}} ;$$

$$u_2 = \sqrt{2gH} \cdot \operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH} \frac{t}{2L}\right)$$

## Problema 47

### Enunciado

Un motor de aviación cuya velocidad de giro es de 10.000 rpm está soportado por dos cojinetes hidrostáticos. La carga dinámica en dirección vertical del motor se ha estimado en 23.800 N y el diámetro del eje principal es de 48 mm.

Si se quiere diseñar los cojinetes utilizando la teoría de longitud infinita, y se prevé que la longitud de cada uno de ellos sea de 50 mm, y conociendo que el radio del estator (en el cojinete) es 20 micras mayor que el radio del eje principal, halle:

1. Cual será el valor del número de Sommerfeld.
2. Si existirá contacto metal-metal entre eje y estator y en cualquier caso, cuál será la excentricidad entre ambos.
3. Si se quiere que la excentricidad máxima sea de 2 micras y se pretende reducir la longitud de cada uno de los cojinetes a 30 mm, determine cuál será la carga máxima en dirección vertical que podrá soportar.



Viscosidad dinámica del aceite lubricante:  $\mu = 0,02 \text{ Kg}/(\text{m s})$

## Resolución

1. El número de Sommerfeld viene definido por:

$$So = Fy \cdot \frac{\psi^2}{\mu \omega R} = 6 \cdot \frac{I_2 \cdot I_5 - I_3 \cdot I_4}{I_3};$$

donde:

$F_y$  = fuerza vertical por unidad de longitud del cojinete;

$$\psi = \frac{R_{\text{ext}} - R_{\text{eje}}}{R_{\text{eje}}} = \frac{\bar{h}}{R_{\text{eje}}} = \frac{0,020 \text{ mm}}{24 \text{ mm}} = 8,33 \cdot 10^{-4};$$

$R$  = radio del eje;

$\omega$  = velocidad angular del eje;

$\mu$  = viscosidad dinámica del fluido de trabajo =  $0,02 \text{ Kg}/(\text{m s})$ ;

$$I_1 = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$I_2 = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$I_3 = \frac{\pi(2+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$I_4 = \frac{I_2 - I_1}{\varepsilon};$$

$$I_5 = \frac{I_3 - I_2}{\varepsilon};$$

$$\varepsilon = \frac{e}{h};$$

El valor del número de Sommerfeld será:

$$\frac{23.800}{2 \cdot 0,05} \cdot \frac{(8,33 \cdot 10^{-4})^2}{0,02 \cdot \frac{10.000 \cdot 2\pi}{60} \cdot 0,024} = \underline{0,3288} = So;$$



2. Una manera de determinar la existencia o no de contacto entre eje y estator será mediante la utilización de un sistema iterativo.

Suponiendo, por ejemplo, que la excentricidad  $e$  fuese de 10  $\mu\text{m}$ , se tiene:

$$\varepsilon = \frac{e}{h} = \frac{10}{20} = 0,5;$$

donde:

$$I_1 = \frac{2\pi}{(1-0,5^2)^{\frac{1}{2}}} = 7,2551;$$

$$I_2 = \frac{2\pi}{(1-0,5^2)^{\frac{3}{2}}} = 9,6735;$$

$$I_3 = \frac{\pi(2+0,5^2)}{(1-0,5^2)^{\frac{5}{2}}} = 14,51039;$$

$$I_4 = \frac{I_2 - I_1}{0,5} = \frac{9,6735 - 7,2551}{0,5} = 4,8368;$$

$$I_5 = \frac{I_3 - I_2}{0,5} = \frac{14,51039 - 9,6735}{0,5} = 9,6737;$$

con lo cual el número de Sommerfeld será:

$$6 \cdot \frac{9,6735 \cdot 9,6737 - 14,51039 \cdot 4,8368}{14,51039} = 9,6736;$$

Puesto que este valor es muy superior al número de Sommerfeld hallado anteriormente, indica que la excentricidad será mucho menor a 10 micras.

Si la excentricidad fuese de 1 micra:

$$\varepsilon = \frac{e}{h} = \frac{1}{20} = 0,05$$

$$I_1 = \frac{2R}{(1-0,05^2)^{\frac{1}{2}}} = 6,291054;$$

$$I_2 = \frac{2R}{(1-0,05^2)^{\frac{3}{2}}} = 6,3068211;$$

$$I_3 = \frac{R(2+0,05^2)}{(1-0,05^2)^{\frac{5}{2}}} = 6,330531;$$



$$I_4 = \frac{I_2 - I_1}{0,05} = \frac{6,3068211 - 6,291054}{0,05} = 0,315342;$$

$$I_5 = \frac{I_3 - I_2}{0,05} = \frac{6,330531 - 6,3068211}{0,05} = 0,4741;$$

$$6 \cdot \frac{6,3068211 \cdot 0,4741 - 6,330531 \cdot 0,315342}{6,330531} = 0,941894;$$

Suponiendo como primera aproximación una función lineal, entrando en la gráfica 1 con el valor del número de Sommerfeld de 0,3288, se obtiene el valor de la excentricidad.

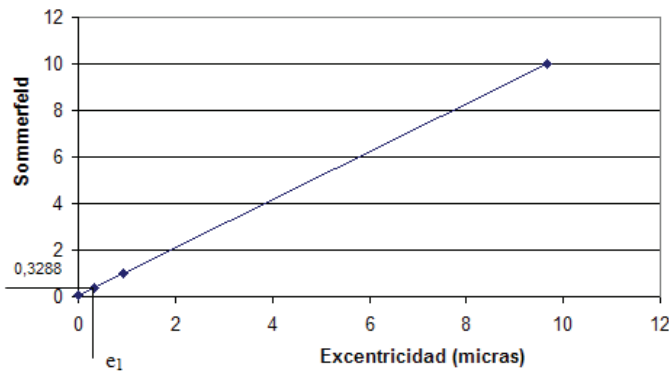


Fig 47.1  
Relación entre el número de Sommerfeld y la excentricidad

Así, el valor de la excentricidad será:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{9,6736 - 0,94184}{10 - 1} = 0,97019;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,94184 - 0,3288}{1 - e_i};$$

$$e_i = 0,3681 \text{ micras}$$

Es la excentricidad aproximada que sufrirá el eje. Por tanto, no existirá contacto metal-metal entre eje y estator ya que la excentricidad es mucho menor de 20 micras.

3. Si la excentricidad máxima se requiere que sea de 2 micras:

$$\varepsilon = \frac{e}{h} = \frac{2}{20} = 0,1$$

$$I_1 = \frac{2\pi}{(1 - 0,1^2)^{\frac{1}{2}}} = 6,31483;$$



$$I_2 = \frac{2\pi}{(1-0,1^2)^{\frac{3}{2}}} = 6,37862;$$

$$I_3 = \frac{\pi(2+0,1^2)}{(1-0,1^2)^{\frac{5}{2}}} = 6,47527;$$

$$I_4 = \frac{I_2 - I_1}{0,1} = \frac{6,37862 - 6,31483}{0,1} = 0,6379;$$

$$I_5 = \frac{I_3 - I_2}{0,1} = \frac{6,47527 - 6,37862}{0,1} = 0,9665;$$

con lo cual, para este caso, el número de Sommerfeld será:

$$6 \cdot \frac{6,37862 \cdot 0,9665 - 6,47527 \cdot 0,6379}{6,47527} = 1,8850;$$

Por otro lado, el número de Sommerfeld para un cojinete de 3 centímetros de longitud se define:

$$\frac{F_y}{0,03} \cdot \frac{(8,33 \cdot 10^{-4})^2}{0,02 \cdot \frac{10.000 \cdot 2\pi}{60} \cdot 0,024} = 1,8850;$$

$$F_y = 40.965,9\text{N}$$

La fuerza que soportarían los dos cojinetes es el doble de la establecida aquí. Obsérvese que un aumento de la excentricidad entre estator y rotor implica un aumento significativo de la fuerza que el cojinete puede soportar.

## Problema 48

### Enunciado

Sea el cojinete cilíndrico de la figura, el cual tiene una ranura longitudinal en donde la presión se considera conocida ( $P_{\text{entrada}}$ ). Aplicando la teoría para cojinetes infinitamente largos, determine:

1. La distribución de velocidades, el caudal circulante y la distribución de presiones en la película de fluido.
2. La fuerza vertical ejercida por la distribución de presiones y el par de giro.



Comente las hipótesis realizadas.

Considerar que las integrales siguientes son conocidas.

$$\int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-1} d\varphi = I_1^*$$

$$\int_{-\theta}^{\theta_1} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = I_{3P}^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = I_2^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \cos \varphi d\varphi = I_4^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = I_3^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \cos \varphi d\varphi = I_5^*$$

$$\int_{-\theta}^{\theta_1} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = I_{2P}^*$$

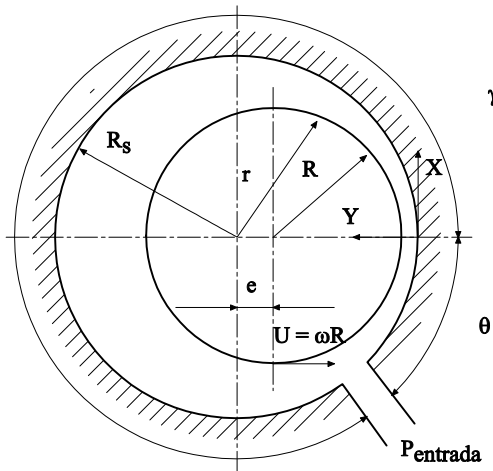


Fig. 48.1  
Conjunto estator-rotor para un cojinete largo

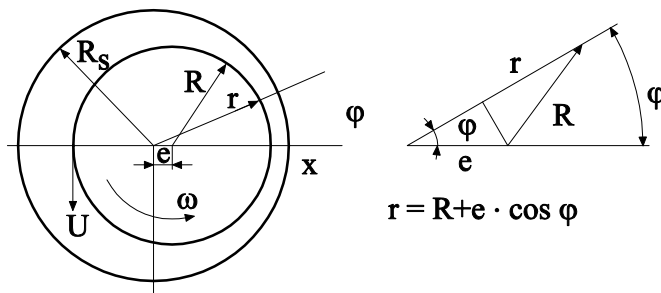


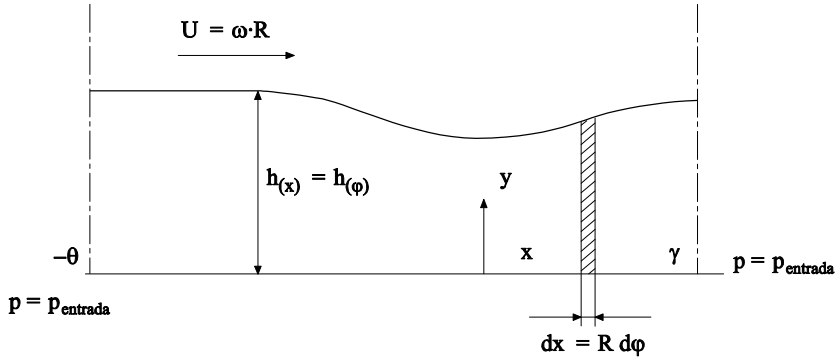
Fig. 48.2  
Esquema de la relación entre radios

### Resolución

Abriendo el cojinete, se observa que éste se puede considerar como una placa plana de altura variable. Algunas de las relaciones directas que se pueden extraer de las figuras representadas son:



Fig. 48.3



$$R_s - R = \bar{h};$$

$$\psi = \frac{\bar{h}}{R};$$

$$r = R + e \cdot \cos \varphi;$$

$$\varepsilon = \frac{e}{\bar{h}}$$

$$h_\varphi = R_s - r = R_s - (R + e \cos \varphi) = R_s - R - e \cos \varphi = \bar{h} - e \cos \varphi = \bar{h}(1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi);$$

La velocidad entre dos placas de fluido que se desplazan con velocidades relativas

$$\omega \cdot R \text{ es: } V_\varphi = \frac{\omega \cdot R \cdot y}{h_\varphi} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot y \cdot (y - h_\varphi)$$

El caudal circulante será:

$$\begin{aligned} \dot{V} = Q &= \int_0^{h_\varphi} V_\varphi dy = \int_0^{h_\varphi} \left[ \frac{\omega \cdot R \cdot y}{h_\varphi} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot y \cdot (y - h_\varphi) \right] dy; \\ \dot{V} &= \frac{\omega \cdot R \cdot h_\varphi}{2} - \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{12\mu} \cdot h_\varphi^3; \end{aligned}$$

Como  $\dot{V}$  ha de ser constante a lo largo de todo el cojinete, despejando  $\frac{\partial P^*}{\partial x}$ , se tiene:

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \left( \frac{\omega \cdot R \cdot h_\varphi}{2} - \dot{V} \right) \cdot \frac{12\mu}{h_\varphi^3} = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R}{h_\varphi^2} - \frac{12\mu \cdot \dot{V}}{h_\varphi^3}$$

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{dP^*}{R \cdot d\varphi};$$



$$\int_{P_0}^{P_\gamma} dP^* = \int_{-\theta}^{\gamma} \left( \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R}{h_\phi^2} - \frac{12\mu \cdot \dot{V}_\theta}{h_\phi^3} \right) R d\phi = 0$$

Véase que la ecuación anterior es igual a cero, puesto que la presión en los puntos  $(-\theta)$  y  $(\gamma)$  es la misma.

Despejando el valor del caudal volumétrico, se tiene:

$$\dot{V} = \int_{-\theta}^{\gamma} \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{h_\phi^2} d\phi \cdot \frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{12\mu \cdot R}{h_\phi^3} d\phi} = \frac{\omega \cdot R}{2} \left[ \frac{\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{d\phi}{h_\phi^2} \cdot \frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{d\phi}{h_\phi^3}} \right];$$

Adimensionalizando las integrales mediante el espesor medio de la película de líquido, se tiene:

$$\dot{V} = \frac{\omega \cdot R \cdot \bar{h}}{2} \left[ \frac{\int_{-\theta}^{\gamma} \left( \frac{\bar{h}}{h_\phi} \right)^2 d\phi \cdot \frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma} \left( \frac{\bar{h}}{h_\phi} \right)^3 d\phi} \right];$$

y denominando:

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \left( \frac{\bar{h}}{h_\phi} \right)^2 d\phi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-2} d\phi = I_2^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \left( \frac{\bar{h}}{h_\phi} \right)^3 d\phi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-3} d\phi = I_3^*$$

Se obtiene:

$$\dot{V} = \frac{\omega \cdot R \cdot \bar{h}}{2} \left[ \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

Conocido el caudal, la distribución de presiones a lo largo del cojinete será:

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{dP^*}{R \cdot d\phi} = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R}{h_\phi^2} - \frac{12\mu \cdot \dot{V}}{h_\phi^3}$$

$$\frac{dP^*}{d\phi} = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{h_\phi^2} - \frac{12\mu \cdot R}{h_\phi^3} \cdot \frac{\omega \cdot R \cdot \bar{h}}{2} \frac{I_2^*}{I_3^*}$$

$$\frac{dP^*}{d\phi} = 6\mu \cdot \omega \cdot R^2 \left[ \frac{1}{h_\phi^2} - \frac{\bar{h}}{h_\phi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$



Integrando entre la sección de entrada y un punto genérico  $\varphi_i$ , se tiene:

$$\int_{P_{\varphi=-\theta}=P_{\text{entrada}}}^{P_{\varphi=\varphi_i}=P_{\text{genérica}}} dP^* = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{\bar{h}^2} \left[ \int_{-\theta}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^2}{h_\varphi^2} d\theta - \int_{-\theta}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^3}{h_\varphi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} d\varphi \right]$$

Denominando:

$$\int_{-\theta}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^2}{h_\varphi^2} d\varphi = \int_{-\theta}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = I_{2P}^*$$

(Véase que la solución de esta integral es función de  $\varphi_i$ .)

$$\int_{-\theta}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^3}{h_\varphi^3} d\varphi = \int_{-\theta}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = I_{3P}^*$$

(Véase que la solución de esta integral es asimismo función de  $\varphi_i$ .)

Sustituyendo en la integral de la distribución de presiones, se llega a:

$$P_i^* - P_{\text{entrada}}^* = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{\bar{h}^2} \left[ I_{2P}^* - I_{3P}^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

(Esta Integral se puede representar para diferentes presiones de entrada, con el fin de evitar que aparezca cavitación).

La fuerza que el fluido a presión ejerce sobre el eje se determina del modo siguiente:

En dirección x:

$$F_x = - \int_{-\theta}^{\gamma} P_i^* \cos \varphi \cdot R \cdot d\varphi$$

Y en dirección y, será:

$$F_y = - \int_{-\theta}^{\gamma} P_i^* \sin \varphi \cdot R \cdot d\varphi$$

Integrando esta ecuación por partes, se obtiene:

$$P_i^* = u \rightarrow du = \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\text{sen } \varphi d\varphi = dv \rightarrow v = -\cos \varphi$$





$$F_y = -R \left[ P_i (-\cos \varphi) \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} -\cos \varphi \frac{dP}{d\varphi} d\varphi \right]$$

de donde, sustituyendo la distribución de presiones:

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos \varphi \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} \cos \varphi \cdot 6\mu \cdot \omega \cdot R^2 \left[ \frac{1}{h_\varphi^2} - \frac{\bar{h}}{h_\varphi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right] d\theta$$

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos \varphi \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{\bar{h}^2} \left[ \frac{\bar{h}^2}{h_\varphi^2} \cos \varphi - \frac{\bar{h}^3}{h_\varphi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \cos \varphi \right] d\varphi$$

Denominando:

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\bar{h}^2}{h_\varphi^2} \cos \varphi d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \cos \varphi d\varphi = I_4^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\bar{h}^3}{h_\varphi^3} \cos \varphi d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \cos \varphi d\varphi = I_5^*$$

Se obtiene:

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos \varphi \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{\bar{h}^2} \left[ I_4^* - I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

El par necesario para hacer girar el eje se puede determinar hallando inicialmente los esfuerzos cortantes que actúan sobre el eje:

$$\tau = \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=h_\varphi} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{2\mu} \cdot y(y - h_\varphi) + \frac{\omega \cdot R \cdot y}{h} \right]_{y=h_\varphi}$$

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[ \frac{1}{h_\varphi} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{2\mu} \frac{h_\varphi}{\omega \cdot R} \right]$$

Sustituyendo  $\frac{\partial P^*}{\partial x}$  por su valor:

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[ \frac{1}{h_\varphi} + 6\mu \cdot \omega \cdot R \left( \frac{1}{h_\varphi^2} - \frac{\bar{h}}{h_\varphi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right) \frac{1}{2\mu} \frac{h_\varphi}{\omega \cdot R} \right]$$

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[ \frac{1}{h_\varphi} + 3 \cdot \left( \frac{1}{h_\varphi} - \frac{\bar{h}}{h_\varphi^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right) \right]$$



$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[ \frac{4}{h_\varphi} - 3 \frac{\bar{h}}{h_\varphi^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

El par sobre el eje, por unidad de longitud, será:

$$T = \int_{-\theta}^{\gamma} \tau \cdot R^2 d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\mu \cdot \omega \cdot R^3}{\bar{h}} \left[ \frac{4}{h_\varphi} - 3 \frac{\bar{h}^2}{h_\varphi^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right] d\varphi$$

$$T = \frac{\mu \cdot \omega \cdot R^3}{\bar{h}} \left[ 4 \cdot I_1^* - 3 \cdot \frac{I_2^{*2}}{I_3^*} \right]$$

donde:

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\bar{h}}{h_\varphi} d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-1} d\varphi = I_1^*$$

Apéndice:

Las integrales no resueltas que han aparecido en este problema son:

$$\int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-1} d\varphi = I_1^* \qquad \int_{-\theta}^{\theta_1} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = I_{3p}^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = I_2^* \qquad \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \cos \varphi d\varphi = I_4^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = I_3^* \qquad \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \cos \varphi d\varphi = I_5^*$$

$$\int_{-\theta}^{\theta_1} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = I_{2p}^*$$

Obsérvese que las integrales  $I_2^*$  e  $I_{2p}^*$  son en realidad la misma integral; únicamente difieren los límites de integración. Lo mismo sucede con las integrales  $I_3^*$  e  $I_{3p}^*$ . Así, en realidad, aparecen cinco tipos de integrales diferentes. A continuación, se da la resolución de estas integrales.

Denominando  $\Gamma$  al término 
$$\frac{\operatorname{arctan} h \left( \frac{(1 + \varepsilon) \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right)}{\sqrt{(-1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)}} \right)}{\sqrt{(-1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)}}$$



Denominando  $\Phi$  al término 
$$\frac{\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right)}{(-1+\varepsilon)\left(\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right)^2+1+\varepsilon\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right)-\varepsilon\right)}$$

Denominando  $\Pi$  al término 
$$\frac{\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right)}{(-1+\varepsilon)\left(\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right)^2+1+\varepsilon\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right)-\varepsilon\right)^2}$$

Las diversas integrales se pueden dar:

$$I_1^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1-\varepsilon \cos \varphi)^{-1} d\varphi = [-2\Gamma]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_2^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1-\varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = \left[ -\frac{2}{(1+\varepsilon)}\Gamma + \frac{4\varepsilon\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(1+\varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_{2p}^* = \int_{-\theta}^{\varphi_1} (1-\varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = \left[ -\frac{2}{(1+\varepsilon)}\Gamma + \frac{4\varepsilon\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(1+\varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\varphi_1)}$$

$$I_3^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1-\varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi =$$

$$= \left[ -\frac{2}{(1+\varepsilon)^2}\Gamma + \frac{8\varepsilon\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{8\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}\left\{-\frac{1}{4}\Pi - \frac{3}{4}\frac{\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(-1+\varepsilon)}\right\} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_{3p}^* = \int_{-\theta}^{\varphi_1} (1-\varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi =$$

$$= \left[ -\frac{2}{(1+\varepsilon)^2}\Gamma + \frac{8\varepsilon\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{8\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}\left\{-\frac{1}{4}\Pi - \frac{3}{4}\frac{\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(-1+\varepsilon)}\right\} \right]_{(-\theta)}^{(\varphi_1)}$$



$$I_4^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \cos \varphi \, d\varphi = \left[ \frac{2}{(1 + \varepsilon)} \Gamma + \frac{4 \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1 + \varepsilon)} \right\}}{(1 + \varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_5^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \cos \varphi \, d\varphi = \left[ \frac{2}{(1 + \varepsilon)^2} \Gamma + \frac{2(2 - 2\varepsilon) \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1 + \varepsilon)} \right\}}{(1 + \varepsilon)^2} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)} + \left[ \frac{8\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2} \left\{ -\frac{1}{4} \Pi - \frac{3}{4} \frac{\left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1 + \varepsilon)} \right\}}{(-1 + \varepsilon)} \right\} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

### Problema 49

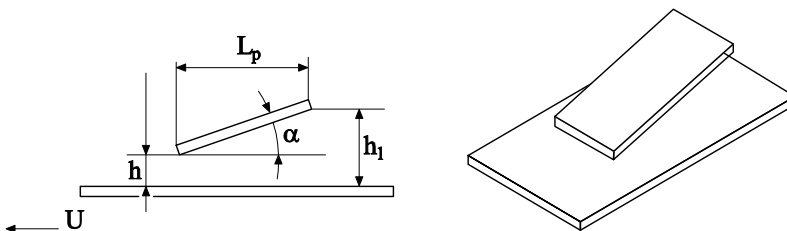
#### Enunciado

Sea un patín deslizante (patín de Michel) que se desplaza a lo largo de una placa plana. La distancia mínima entre placa y patín debe ser de  $h = 0,15 \text{ mm}$  y su inclinación se ha estipulado en  $\alpha = 0,2^\circ$ , su longitud es de  $L_p = 0,05 \text{ m}$ . El patín debe soportar  $850 \text{ N}$ . El fluido entre patín y placa es aceite SAE 10 cuya viscosidad a  $20^\circ$  es  $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Kg}}{\text{ms}}$ .

Si se desea que la velocidad de desplazamiento del patín sea de  $80 \text{ m/s}$ . Halle:

1. La profundidad que deberá tener dicho patín.
2. La fuerza de arrastre necesaria para desplazar dicho patín.
3. ¿Está dicho patín optimizado?. ¿Por qué?

Fig. 49.1  
Esquema del patín de Michel propuesto



## Resolución

1. Se establece la relación:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_1 - h}{L_p} = \frac{\Delta h}{L_p}$$

$$\Delta h = 0,05 \operatorname{tg}(0,2) = 0,000174 \text{ m}$$

La relación de alturas es:  $K = \frac{h_1}{h} = \frac{0,00032}{0,00015} = 2,13$

La fuerza de sustentación por unidad de profundidad y en forma paramétrica viene dada por la ecuación (parámetro K).

$$L = \frac{1}{h^2} \frac{6\mu U L_p^2}{(K-1)^2} \left[ \ln(K) - \frac{2(K-1)}{K+1} \right]$$

$$L = \frac{1}{0,00015^2} \frac{6 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot U \cdot 0,05^2}{(2,13-1)^2} \left[ \ln(2,13) - \frac{2(2,13-1)}{2,13+1} \right]$$

$$L = 515,95 \cdot 80 = 41.276,64 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Si el patín ha de soportar un total de 8500 N, la profundidad del mismo será:

$$\frac{850}{41276,64} = 0,0206 \text{ m}$$

2. La fuerza de arrastre en forma paramétrica viene dada por:

$$D = \frac{2\mu U L_p}{(K-1)h} \left[ 2 \ln(K) - \frac{3(K-1)}{K+1} \right]$$

$$D = \frac{2 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 0,05}{(2,13-1) \cdot 0,00015} \left[ 2 \ln(2,13) - \frac{3(2,13-1)}{2,13+1} \right]$$

$$D = 587,09 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



Teniendo en cuenta la profundidad del patín, se obtiene una fuerza de arrastre de:

$$D_{\text{total}} = 587,09 \cdot 0,0206 = 12,08 \text{ N}$$

3. Un patín se considera optimizado cuando la fuerza de sustentación respecto al parámetro  $K = \frac{h_1}{h}$  es máxima; si se deriva  $\frac{dL}{dK} = 0$ , se obtendrá el valor de  $K$  óptimo, que es de  $\boxed{K = 2,2}$

Para este problema se tiene que  $\boxed{K = 2,13}$ , con lo cual se establece que el patín de Michel no está optimizado, aunque no está lejos de estarlo.

## Problema 50

### Enunciado

El esquema de la figura 50.1 muestra un patín deslizante, formado por una placa inclinada y una placa plana. El patín se desplaza por encima de una superficie lisa plana a una velocidad constante  $U$ . Se sabe que la distribución de presiones a lo largo del eje  $X$ , en la zona de la placa inclinada, está dada por:

$$P_1^* = \frac{-\mu 6U}{(Tg\alpha)^2} \left[ \frac{h_1}{Tg\alpha} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{Tg\alpha} - X \right)^2} - \frac{1}{\left( \frac{h_1}{Tg\alpha} - X \right)} \right] - \frac{C_3 \mu}{(Tg\alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{Tg\alpha} - X \right)^2} + C_4$$

donde  $C_3$  y  $C_4$  son constantes por determinar.

De la aplicación de la ecuación de la lubricación de Reynolds para la zona donde la placa está inclinada se obtiene:

$$-6UTg\alpha X = \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial X} + C_3$$

donde  $h$  es la altura entre placas para una posición genérica de  $X$  (zona de placa inclinada).

Considere como datos:  $\alpha, h_1, h_2, L_1, L_2, \mu, U$

Halle:

La ecuación que da la distribución de presiones a lo largo del eje X, tanto para la zona de la placa inclinada como para la zona de la placa plana. Determine las constantes de integración.

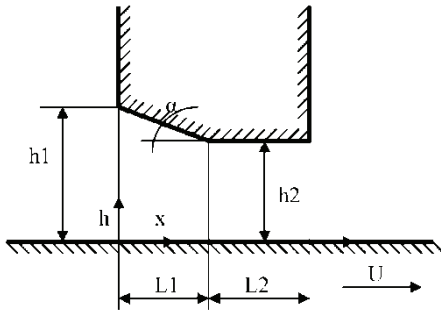
La fuerza ascensorial o capacidad de carga por unidad de longitud del cojinete.

### Resolución

La ecuación de la lubricación de Reynolds para flujo unidimensional es:

$$6U \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x} \right) \quad (1)$$

Fig. 50.1



en la zona de la placa plana  $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ :

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x} = C_1 \quad (3)$$

Distribución de presiones a lo largo de una placa:

$$P_2^* = \frac{C_1 \mu}{h^3} x + C_2 \quad (4)$$

Condiciones de contorno

$$x = (L_1 + L_2); P_2^* = 0$$

$$x = L_1; P_2^* = P_1^*$$







$$x = A + B \left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} - x \right) + C \left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} - x \right)^2$$

$$x = A + B \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} - Bx + C \left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} \right)^2 - 2 \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} xC + Cx^2$$

$$0 = C \quad C = 0$$

$$1 = -B - 2 \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} C \quad B = -1$$

$$0 = A + B \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} + C \left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} \right)^2 \quad A = \frac{h_1}{\text{tg}\alpha}$$

$$\int \frac{x dx}{\left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} - x \right)^3} = \int \frac{\frac{h_1}{\text{tg}\alpha} dx}{\left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} - x \right)^3} + \int \frac{-dx}{\left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} - x \right)^2} = \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} \frac{\left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} - x \right)^{-3+1}}{-3+1} (-1) + \frac{\left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} - x \right)^{-2+1}}{-2+1} \quad (9)$$

de donde la distribución de presiones queda en la zona de placa inclinada

$$P_1^* = \frac{-\mu_6 U}{(\text{tg}\alpha)^2} \left[ \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} - X \right)^2} - \frac{1}{\left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} - X \right)} \right] - \frac{C_3 \mu}{(\text{tg}\alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\text{tg}\alpha} - X \right)^2} + C_4 \quad (\text{dato del problema}) \quad (10)$$

Condiciones de contorno:

$$x = 0; \quad P_1^* = 0$$

$$x = L_1; \quad P_1^* = P_2^*$$

El caudal másico en la placa plana viene dado por la expresión:

$$\dot{m} = \rho U \frac{h}{2} - \rho \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{12\mu} h^3$$

según la ecuación (3), como  $C_1 = \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x}$ :

$$\dot{m}_2 = \rho \frac{U h}{2} - \frac{C_1}{12} \rho$$



El caudal másico para una placa inclinada:

$$\dot{m}_1 = \rho U \frac{h(x)}{2} - \rho \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{12\mu} h^3(x)$$

Según la ecuación (7):

$$-6 \operatorname{tg} \alpha \ x = \frac{h^3(x)}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x} + C_3$$

$$\dot{m}_1 = \rho U \frac{h(x)}{2} - \rho \frac{1}{12} (-6 U \operatorname{Tg} \alpha \ x - C_3)$$

$$x \operatorname{tg} \alpha = h_1$$

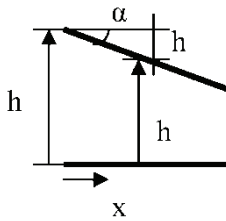
$$h(x) = h_1 - x \operatorname{tg} \alpha$$

$$x \operatorname{tg} \alpha = h_1 - h(x)$$

$$\dot{m}_1 = \rho U \frac{h(x)}{2} - \frac{\rho}{12} (-6U(h_1 - h(x)) - C_3)$$

$$\dot{m}_1 = \rho U \frac{h(x)}{2} + \frac{\rho}{12} 6U(h_1 - h(x)) + \frac{\rho}{12} C_3$$

Fig. 50.2



Puesto que el caudal másico ha de mantenerse, se ha de cumplir  $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$  para  $h(x) = h_2$ , punto de intersección de las dos placas.

$$\rho \frac{U h_2}{2} - \rho \frac{C_1}{12} = \rho \frac{U h_2}{2} + \frac{\rho}{12} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\rho}{12} C_3$$

$$-\rho \frac{C_1}{12} = \frac{\rho}{12} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\rho}{12} C_3$$

$$-C_1 - C_3 = 6U(h_1 - h_2) \quad (11)$$

Aplicando las condiciones de contorno en la ecuación (4)

$$x = (L_1 + L_2); \quad P_2^* = 0$$

$$0 = \frac{C_1 \mu}{h_2^3} (L_1 + L_2) + C_2 \quad (12)$$

Haciendo lo mismo para la ecuación (10)

$$x = 0; \quad P_1^* = 0$$



$$0 = \frac{-\mu 6U}{(\operatorname{tg}\alpha)^2} \left[ \frac{h_1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)} \right] - \frac{C_3\mu}{(\operatorname{tg}\alpha)^3} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2} + C_4$$

$$0 = \frac{-\mu 6U}{(\operatorname{tg}\alpha)^2} \left[ \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2h_1} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{h_1} \right] - \frac{C_3\mu}{h_1^2 \operatorname{tg}\alpha} \frac{1}{2} + C_4$$

$$0 = \frac{\mu 6U}{\operatorname{tg}\alpha} \frac{1}{2h_1} - \frac{C_3\mu}{h_1^2 \operatorname{tg}\alpha} \frac{1}{2} + C_4 \quad (13)$$

La última de las condiciones se establece cuando:

$$x = L_1; \quad P_1^* = P_2^*$$

$$\frac{-\mu 6U \operatorname{Tg}\alpha}{(\operatorname{Tg}\alpha)^3} \left[ \frac{h_1}{\operatorname{Tg}\alpha} - \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{Tg}\alpha} - L_1\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{h_1}{\operatorname{Tg}\alpha} - L_1\right)} \right] - \frac{C_3\mu}{(\operatorname{Tg}\alpha)^3} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{Tg}\alpha} - L_1\right)^2} + C_4 = \frac{C_1\mu}{h_2^3} L_1 + C_2 \quad (14)$$

Sustituyendo (11), (12) y (13) en (14), se obtiene lo siguiente:

Sustituyendo primero la (12):

$$\underbrace{\frac{-\mu 6U \operatorname{tg}\alpha}{(\operatorname{tg}\alpha)^3} \left[ \frac{h_1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg}\alpha} - L_1\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg}\alpha} - L_1\right)} \right]}_A - \frac{C_3\mu}{(\operatorname{tg}\alpha)^3} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg}\alpha} - L_1\right)^2} + C_4 = \frac{C_1\mu}{h_2^3} L_1 - \frac{C_1\mu}{h_2^3} (L_1 + L_2) = -\frac{C_1\mu}{h_2^3} L_2$$

Utilizando ahora la (11) y la (13):

$$A - \frac{C_3\mu}{(\operatorname{tg}\alpha)^3} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg}\alpha} - L_1\right)^2} + \frac{C_3\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg}\alpha} - \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\mu L_2}{h_2^3} [6U(h_1 - h_2) + C_3]$$

despejando  $C_3$

$$A + C_3 \left[ -\frac{\mu}{(\operatorname{tg}\alpha)^3} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg}\alpha} - L_1\right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg}\alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3} \right] = \frac{\mu L_2}{h_2^3} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg}\alpha}$$

con lo cual:



$$C_3 = \frac{\frac{\mu L_2}{h_2^3} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg} \alpha} - A}{-\frac{\mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1\right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3}}$$

de (11):  $C_1 = -C_3 - 6U(h_1 - h_2)$

$$C_1 = -\frac{+\frac{\mu L_2}{h_2^3} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg} \alpha} - A}{-\frac{\mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1\right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3}} - 6U(h_1 - h_2)$$

de (12):  $C_2 = -\frac{C_1 \mu}{h_2^3} (L_1 + L_2)$

$$C_2 = -\frac{\mu(L_1 + L_2)}{h_2^3} \left[ \frac{-\frac{\mu L_2}{h_2^3} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg} \alpha} - A}{-\frac{\mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1\right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3}} - 6U(h_1 - h_2) \right]$$

de (13)  $C_4 = \frac{C_3 \mu}{h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu 6U}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2h_1}$

$$C_4 = \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{\frac{\mu L_2}{h_2^3} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg} \alpha} - A}{-\frac{\mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1\right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3}} - \frac{\mu 6U}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2h_1}$$

La fuerza ascensorial o capacidad de carga por unidad de longitud vale:

$$F_y = \int_{x=0}^{x=l_1} P_1^* dx + \int_{x=l_1}^{x=(l_1+l_2)} P_2^* dx$$

$$F_y = \int_{x=0}^{x=l_1} \frac{-\mu 6U}{(\operatorname{tg} \alpha)^2} \left[ \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x\right)} \right] dx - \int_{x=0}^{x=l_1} \left( \frac{C_3 \mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x\right)^2} + C_4 \right) dx + \int_{x=l_1}^{x=(l_1+l_2)} \left( \frac{C_1 \mu}{h_2^3} x + C_2 \right) dx$$



$$F_y = \frac{-\mu 6U \operatorname{tg} \alpha}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \left[ \frac{h_1}{2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{\left(\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x\right)} + \ln \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right) \right]_{x=0}^{x=L_1} - \frac{C_3 \mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x} \right]_{x=0}^{x=L_1} + C_4 [x]_{x=0}^{x=L_1} + \left[ \frac{C_1 \mu}{h_2^3} \frac{x^2}{2} + C_2 x \right]_{x=L_1}^{x=(L_1+L_2)}$$

### Problema 51

#### Enunciado

Sea la válvula de asiento cónico descrita en la figura 51.1. Considérese la longitud del asiento,  $l$ , mucho mayor que la distancia entre placas,  $H$  ( $l \gg H$ ), tal que el flujo a través del intersticio pueda considerarse laminar.

Determine las ecuaciones que rigen:

1. El caudal que fluye a través de la válvula, si se conocen las presiones a la entrada y salida de la misma.
2. La distribución de presiones a lo largo del asiento cónico.
3. La fuerza que el fluido ejerce sobre la corredera.

#### Resolución

Considérese la válvula de asiento cónico de la figura 51.1.

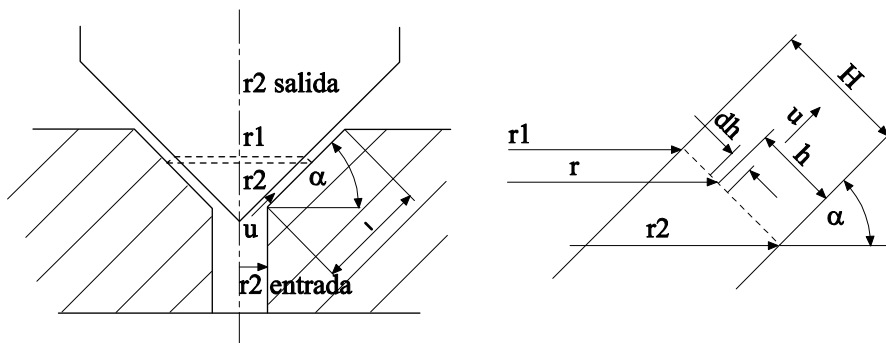


Fig. 51.1  
Vista general de una válvula de asiento cónico



1. El diferencial de superficie se puede establecer como:

$$ds = 2\pi r dh$$

El flujo volumétrico a través del intersticio será:

$$Q = \int_0^H V 2\pi r dh$$

$$Q = \int_0^H V 2\pi (r_2 - h \cos(90 - \alpha)) dh \quad (1)$$

y se cumplirá  $r = r_2$ ,  $h = 0$  y  $r = r_1$ ,  $h = H$

La distribución de velocidades entre las dos placas, de acuerdo con la ecuación de Poiseuille se define:

$$v = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h}{2} (H - h) \quad (2)$$

De donde el flujo a través del intersticio cónico será:

$$Q = \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h}{2} (H - h) 2\pi (r_2 - h \cos(90 - \alpha)) dh \quad (3)$$

cuya integración da lugar a:

$$Q = -\frac{\pi}{\mu} \frac{dp}{dx} \left[ r_2 H^3 \frac{1}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12} \right] \quad (4)$$

La distribución de presiones a lo largo del asiento cónico se define:

$$\int_0^L \frac{dx}{r_2 H^3 \frac{1}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}} = \int_{P_{entrada}}^{P_{salida}} -\frac{\pi}{\mu} \frac{dp}{Q} \quad (5)$$

Conociendo que  $x=0$ ,  $r_2 = r_2$  (entrada); y  $x=L$ ,  $r_2 = r_2$  (salida).

$$\cos \alpha = \frac{r_2(\text{salida}) - r_2(\text{entrada})}{L}; \cos \alpha = \frac{r_2 - r_2(\text{entrada})}{x}; r_2 = \cos \alpha x + r_2(\text{entrada}); \quad (6)$$

con lo cual la distribución de presión queda:

$$\int_0^L \frac{dx}{(\cos \alpha x + r_2(\text{entrada})) H^3 \frac{1}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}} = \int_{P_{entrada}}^{P_{salida}} -\frac{\pi}{\mu} \frac{dp}{Q} \quad (7)$$

De la integración se llega a:



$$Q = (P_{(entrada)} - P_{(salida)}) \frac{\pi}{\mu} \cos \alpha \frac{H^3}{6} \frac{1}{\ln \left[ \frac{L \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}} \right]} \quad (8)$$

2. Si la presión en un punto genérico situado a una distancia x del origen de coordenadas es P, se define:

$$Q = (P_{(entrada)} - P) \frac{\pi}{\mu} \cos \alpha \frac{H^3}{6} \frac{1}{\ln \left[ \frac{x \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}} \right]} \quad (9)$$

Utilizando las ecuaciones (8) y (9), se puede concluir:

$$P = P_{(entrada)} - (P_{(entrada)} - P_{(salida)}) \frac{\ln \left[ \frac{x \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}} \right]}{\ln \left[ \frac{L \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}} \right]} \quad (10)$$

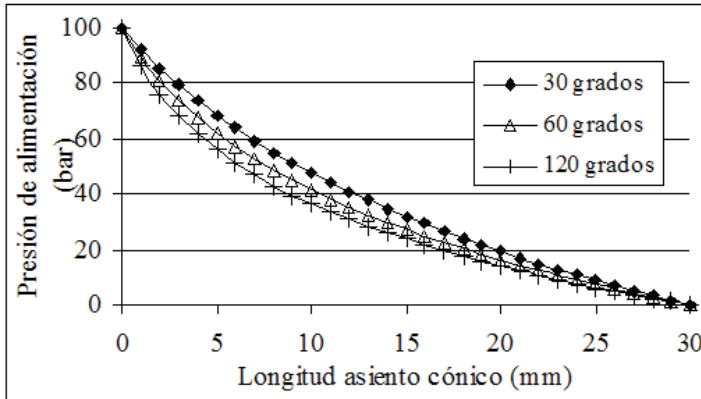
La ecuación (10) da la distribución de presión a lo largo del asiento cónico. La representación de esta ecuación para aceite hidráulico ISO 32, una distancia entre placas de 3 micras, una presión diferencial de 100 bar y todo un colectivo de longitudes de asiento cónico se detalla en la figura 51.2. Obsérvese que la distribución de presiones no es lineal; por otro lado, a medida que el ángulo del cono aumenta, la caída de presión por unidad de longitud es mayor para radios pequeños.

Este comportamiento es perfectamente entendible, puesto que para ángulos de cono pequeños la variación de área con el radio es menor que para ángulos grandes, por tanto, la resistencia al paso de fluido es mayor.

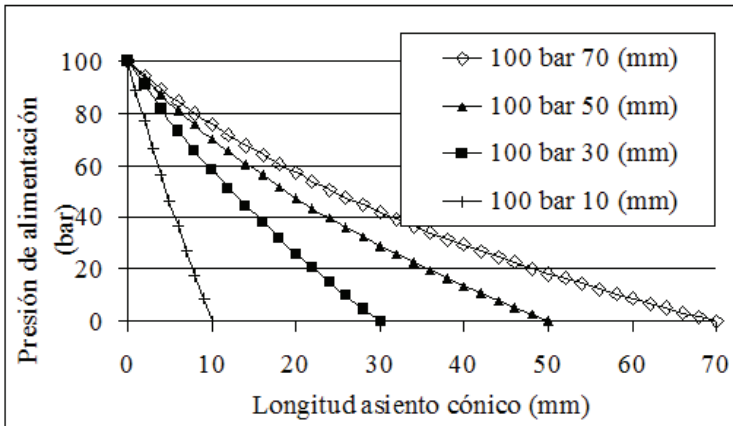
(a) Ángulo del cono: 30°, 60°, 120°



Fig. 51.2  
Variación de la  
distribución de  
presión a lo largo  
del asiento cónico,  
aceite ISO 32  
presión = 100 bar,  
distancia entre  
placas = 3 micras



(b) Longitud del asiento cónico: 10, 30, 50, 70 mm,  $\alpha=45^\circ$



En la figura 51.3 está representada la ecuación (8), la cual muestra el flujo a través de la válvula para un colectivo de distancias entre platos, presiones diferenciales y ángulos de cono, la longitud del asiento cónico se mantuvo constante en 30 mm. Véase que el caudal aumenta con la presión diferencial, la distancia entre placas y el ángulo del cono.

Este comportamiento se explica cuando se tiene en cuenta que, al aumentar el ángulo del cono, la sección de paso aumenta mucho más rápidamente con la distancia respecto al vértice del cono.

Se ha de tener en cuenta además a medida que el ángulo del cono aumenta, el cambio de cantidad de movimiento experimentado será mayor; asimismo, las líneas de corriente a la entrada de la zona cónica se comprimirán. Estos efectos tenderán a disminuir ligeramente el flujo a través de la válvula, a medida que el ángulo aumente, creando además una ligera disminución de presión a la entrada de la parte cónica. Este efecto ya fue descrito por Urata y por Mokhtarzardeh-Dehghan.



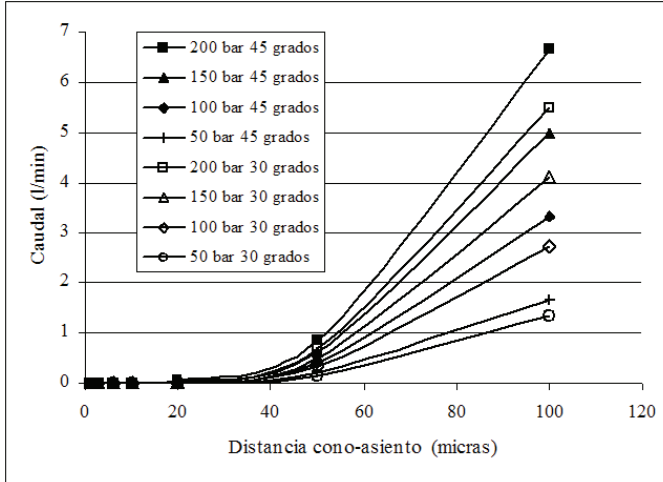


Fig. 51.3 Características de flujo en función de la distancia entre placas, para diferentes presiones de alimentación y ángulos del asiento cónico,  $\alpha = 45^\circ$  y  $30^\circ$

### 3. Fuerzas que actúan sobre la corredera de asiento cónico

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento en dirección del eje de la válvula, tomando como sección entrante la sección anular de la válvula y como sección saliente la sección de la salida del cono de la válvula, se puede establecer:

$$\begin{aligned}
 & \int_{A_{\text{entrada}}} P_{\text{entrada}} d\bar{A} + \int_{A_{\text{salida}}} P_{\text{salida}} d\bar{A} \cos(90 - \alpha) + \int_{A_{\text{cono}}} P_{\text{superficie del cono}} d\bar{A} \cos \alpha + \\
 & \int_{A_{\text{asiento cónico}}} P_{\text{asiento cónico}} d\bar{A} \cos \alpha + \int_{A_{\text{cono \& asiento}}} \bar{\tau} d\bar{A} \sin \alpha + \\
 & + m \vec{g} = \int_{A_{\text{saliente}}} \rho \vec{V}_j \vec{V} d\bar{A} + \int_{A_{\text{entrante}}} \rho \vec{V}_j \vec{V} d\bar{A}
 \end{aligned} \tag{11}$$

despreciando las fuerzas másicas, la fuerza sobre la corredera queda:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{corredera } \hat{j}} = & - \int_{A_{\text{cono}}} P_{\text{superficie cono}} dA \cos \alpha - \int_{A_{\text{cono \& asiento}}} \tau dA \sin \alpha = \int_{A_{\text{salida}}} \rho V_j V dA \\
 & - \int_{A_{\text{entrada}}} \rho V_j V dA - \int_{A_{\text{entrada}}} P_{\text{entrada}} dA + \int_{A_{\text{salida}}} P_{\text{salida}} dA \cos(90 - \alpha) - \\
 & - \int_{A_{\text{asiento cónico}}} P_{\text{asiento cónico}} dA \cos \alpha
 \end{aligned} \tag{12}$$

Stone y Urata indicaron que, para evaluar las fuerzas de flujo sobre una corredera con asiento cónico, es preciso tener en cuenta la distribución de presiones a lo largo del asiento cónico. Véase que el último término de la ecuación (12) proporciona dicha fuerza. Dado que la distribución de presiones a lo largo del asiento cónico está proporcionada por la ecuación (10), su integración dará lugar a las fuerzas de presión sobre el asiento cónico.



Al resolver la ecuación (12), la distribución de velocidades se va a asumir parabólica tanto en la entrada como en la salida del volumen de control, puesto que se considera que el flujo es laminar en todo momento.

En la entrada, la distribución de presión se considera:

$$V = V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_{2\text{ entrada}}} \right)^2 \right] \quad (13)$$

Con lo cual, la fuerza debida a la cantidad de movimiento en la entrada será:

$$-\int_{A_{\text{entrada}}} \rho V_j V dA = -\int_0^{r_{2\text{ entrada}}} \rho V^2 2\pi r dr = -\rho \pi V_0^2 r_{2\text{ entrada}}^2 \frac{4}{3} \quad (14)$$

La cantidad de movimiento en la superficie de salida se determinará partiendo de la distribución de velocidades dada por la ecuación (2) y la distribución de presiones dada por la ecuación (10), cuya derivada es:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{P_{\text{salida}} - P_{\text{entrada}}}{K_3} \frac{K_1}{K_1 + K_2} \quad (15)$$

donde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  son constantes dadas por:

$$K_1 = \cos \alpha \frac{H^3}{6} \quad (16)$$

$$K_2 = r_{2\text{ entrada}} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12} \quad (17)$$

$$K_3 = \ln \left[ \frac{1 \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2\text{ entrada}} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}}{r_{2\text{ entrada}} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}} \right] \quad (18)$$

con lo cual se obtiene:

$$\int_{A_{\text{salida}}} \rho V_j V dA = \int_0^H \rho V^2 \sin \alpha (r_{2\text{ salida}} - h \cos(90 - \alpha)) 2\pi dh = \rho 2\pi \sin(\alpha) \frac{1}{\mu^2} \left[ \frac{K_1^2 (P_{\text{salida}}^2 + P_{\text{entrada}}^2 - 2P_{\text{salida}} P_{\text{entrada}})}{K_3^2 (1K_1 + K_2)^2} \right] \int_0^H \frac{h^2}{4} (H-h)^2 (r_{2\text{ salida}} - h \cos(90 - \alpha)) dh \quad (19)$$

siendo el resultado de la integración:



$$\int_{A_{salida}} \rho V_j V dA = \rho 2 \pi \operatorname{sen}(\alpha) \frac{1}{\mu^2} \left[ \frac{K_1^2 (P_{salida}^2 + P_{entrada}^2 - 2 P_{salida} P_{entrada})}{K_3^2 (1 K_1 + K_2)^2} \right] \quad (20)$$

$$\left( \frac{H^5}{120} r_{2salida} - \cos(90 - \alpha) \frac{H^6}{240} \right)$$

La fuerza debida a la presión a la entrada será:

$$- \int_{A_{entrada}} P_{entrada} dA = - \int_0^{r_{2entrada}} P_{entrada} 2 \pi r dr = - P_{entrada} \pi r_{2entrada}^2 \quad (21)$$

y la fuerza debida a la presión a la salida será:

$$\int_{A_{salida}} P_{salida} dA \cos(90 - \alpha) = \int_0^H P_{salida} 2 \pi (r_{2salida} - h \cos(90 - \alpha)) \cos(90 - \alpha) dh =$$

$$= P_{salida} 2 \pi \cos(90 - \alpha) \left[ r_{2salida} H - \frac{H^2}{2} \cos(90 - \alpha) \right] \quad (22)$$

Tomando en consideración que  $P_{asiento\ cónico}$  está dado por la ecuación (10), las fuerzas sobre el asiento cónico estarán dadas por:

$$- \int_{A_{asiento\ cónico}} P_{asiento\ cónico} dA \cos \alpha = - \int_0^1 P_{asiento\ cónico} 2 \pi \cos \alpha (\cos \alpha x + r_{2entrada}) dx = \quad (23)$$

$$= \int_0^1 \left[ 2 \pi \cos \alpha (\cos \alpha x + r_{2(entrada)}) \right] \{ P_{(entrada)} - (P_{(entrada)} - P_{(salida)}) \}$$

$$\ln \left[ \frac{x \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}} \right]$$

$$\frac{\ln \left[ \frac{1 \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}} \right]}{\ln \left[ \frac{r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}} \right]} \} dx$$

Utilizando las mismas constantes,  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ , representadas en las ecuaciones (16), (17) y (18), el resultado de la integración da:

$$- \int_{A_{asiento\ cónico}} P_{asiento\ cónico} dA \cos \alpha = - 2 \pi \cos \alpha \left\{ P_{entrada} r_{2entrada} + P_{entrada} \cos \alpha \frac{l^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{r_{2entrada}}{k_3} \left[ \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) \ln \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right) - 1 \right] [P_{salida} - P_{entrada}] \right. \quad (24)$$

$$\left. + \frac{\cos \alpha}{k_3} \left[ \frac{1}{2} \left( 1^2 - \frac{k_2^2}{k_1^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{2} - \frac{k_2}{k_1} \right) \right] [P_{salida} - P_{entrada}] \right\}$$



Los esfuerzos cortantes sobre el asiento cónico se pueden expresar:

$$\int_{A_{\text{asiento cónico}}} \tau|_{h=0} dA \operatorname{sen} \alpha \quad (25)$$

Asumiendo fluido newtoniano y utilizando las ecuaciones (2) y (15) los esfuerzos cortantes se pueden dar:

$$\tau|_{h=0} = \frac{(P_{\text{entrada}} - P_{\text{salida}}) k_1}{k_3} \frac{1}{x k_1 + k_2} \frac{H}{2} \quad (26)$$

con lo cual la fuerza debida a los esfuerzos cortantes sobre el cono será:

$$\int_{A_{\text{asiento cónico}}} \tau|_{h=0} dA \operatorname{sen} \alpha = \left[ \frac{(P_{\text{entrada}} - P_{\text{salida}}) k_1}{k_3} \frac{2 \pi H \operatorname{sen} \alpha}{2} \right] * \quad (27)$$

$$* \left[ \frac{r_{2\text{entrada}}}{k_1} \ln \left( \frac{1k_1 + k_2}{k_2} \right) + \cos \alpha \left\{ \frac{1}{k_1} - \frac{k_2}{k_1^2} \ln \left( \frac{1k_1 + k_2}{k_2} \right) \right\} \right]$$

Obsérvese que los esfuerzos cortantes valen cero cuando la longitud del asiento cónico es cero.

La fuerza total que actúa sobre la corredera con asiento cónico requerirá de la adición de los términos de las fuerzas de cantidad de movimiento, los términos de presión estática y los términos debidos a los esfuerzos cortantes sobre el asiento cónico, obteniendo:

$$F_{\text{corredera } j} = \rho 2 \pi \operatorname{sen}(\alpha) \frac{1}{\mu^2} \left[ \frac{K_1^2 (P_{\text{salida}}^2 + P_{\text{entrada}}^2 - 2 P_{\text{salida}} P_{\text{entrada}})}{K_3^2 (1K_1 + K_2)^2} \right]$$

$$\left( \frac{H^5}{120} r_{2\text{salida}} - \cos(90 - \alpha) \frac{H^6}{240} \right)$$

$$- \rho \pi V_0^2 r_{2\text{entrada}}^2 \frac{4}{3} - P_{\text{entrada}} \pi r_{2\text{entrada}}^2 + P_{\text{salida}} 2 \pi \cos(90 - \alpha) [r_{2\text{salida}} H - \frac{H^2}{2} \cos(90 - \alpha)]$$

$$- 2 \pi \cos \alpha P_{\text{entrada}} r_{2\text{entrada}} - 2 \pi \cos \alpha P_{\text{entrada}} \cos \alpha \frac{l^2}{2}$$

$$- 2 \pi \cos \alpha \frac{r_{2\text{entrada}}}{k_3} \left[ \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) \ln \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right) - 1 \right] [P_{\text{salida}} - P_{\text{entrada}}]$$

$$- 2 \pi \cos \alpha \frac{\cos \alpha}{k_3} \left[ \frac{1}{2} \left( 1^2 - \frac{k_2^2}{k_1^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{2} - \frac{k_2}{k_1} l \right) \right] [P_{\text{salida}} - P_{\text{entrada}}] +$$

$$+ \left[ \frac{(P_{\text{entrada}} - P_{\text{salida}}) k_1}{k_3} \frac{2 \pi H \operatorname{sen} \alpha}{2} \right] \left[ \frac{r_{2\text{entrada}}}{k_1} \ln \left( \frac{1k_1 + k_2}{k_2} \right) + \cos \alpha \left\{ \frac{1}{k_1} - \frac{k_2}{k_1^2} \ln \left( \frac{1k_1 + k_2}{k_2} \right) \right\} \right]$$

(28)



De la ecuación (28) se observa que:

- El primer término representa las fuerzas de cantidad de movimiento a la salida del volumen de control.
- El segundo término da las fuerzas de cantidad de movimiento a la entrada.
- El tercer y cuarto términos representan las fuerzas de presión a la entrada y a la salida, respectivamente.
- El resto de los términos, excepto el último, están relacionados con las fuerzas de presión sobre el asiento cónico.
- El último término evalúa los esfuerzos cortantes sobre el asiento cónico.

Todas las figuras que se muestran a continuación tienen los siguientes parámetros comunes:  $r_{2 \text{ entrada}} = 2 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 45 \text{ grados}$ . Todas las fuerzas representadas mantienen el mismo signo que se estableció en la ecuación (28), con lo cual representan las fuerzas de reacción.

La figura 51.4 representa la cantidad de movimiento a la entrada y a la salida del volumen de control en función de la longitud del asiento cónico y para un colectivo de presiones diferenciales y distancias entre platos.

Véase que, para longitudes de asiento pequeñas, de pocos milímetros, la cantidad de movimiento saliente aumenta notoriamente a medida que la longitud del asiento disminuye.

De hecho, la cantidad de movimiento saliente aumenta asimismo con la presión de alimentación y con la distancia entre platos.

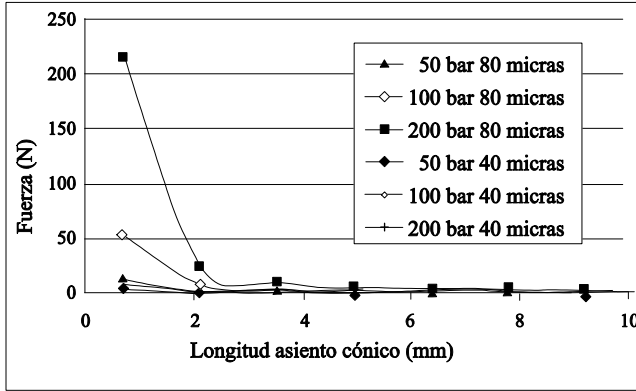
A priori, se observa el mismo efecto sobre la cantidad de movimiento entrante, aunque los signos son opuestos. Por otro lado, la magnitud de la cantidad de movimiento entrante es mucho menor que la saliente.

Las fuerzas de cantidad de movimiento tenderán a cerrar la válvula, esto sucederá en mayor medida para pequeñas longitudes del asiento cónico, altas presiones de alimentación y distancias entre platos grandes.

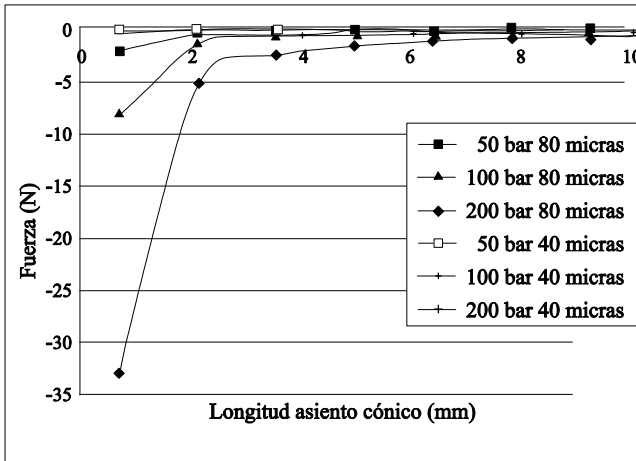
En estos casos, la inestabilidad del flujo se prevé mayor. La relevancia de lo expuesto queda esclarecida si se tiene en cuenta que las válvulas limitadoras se construyen actualmente con longitudes de asiento inferiores a de 3 mm.



Fig. 51.4  
Cantidad de movimiento  
entrante/saliente,  
para  
 $r_2$  entrada = 2 mm,  
distancia entre platos  
80-40 micras  
 $\alpha = 45$  grados,  
presión de  
alimentación 50, 100,  
200 bar



(a) Salida



(b) Entrada

Un término muy importante a tener en cuenta, según Urata, es el que evalúa las fuerzas de presión sobre el asiento cónico. Este término, definido por la ecuación (24) ha sido representado en la figura 51.5. En el mismo gráfico se evalúan asimismo las diferentes fuerzas que actúan sobre la corredera, es decir, todos los términos de la ecuación (28). Obsérvese que la fuerza total sobre la corredera se debe principalmente a la fuerza de presión sobre el asiento cónico, y la actuante sobre la sección de entrada. A medida que la longitud del asiento se incrementa, la fuerza sobre el asiento cónico se vuelve predominante. Por otro lado, cuando la longitud del asiento cónico es inferior a 2 mm, aproximadamente, son las fuerzas de cantidad de movimiento las que juegan un papel decisivo, forzando a la curva de fuerzas resultante a seguir la trayectoria marcada por la curva de fuerzas de cantidad de movimiento. En algunos casos, (v. figura 51.5b), esto conduce a un cambio de signo de la fuerza resultante.



Aunque no queda reflejado en la figura 51.5, se ha de remarcar que las fuerzas sobre el asiento cónico experimentan cambios poco significativos cuando se modifica la distancia entre la corredera y la base cónica. Estas fuerzas, por otro lado, cambian sustancialmente al modificar la presión de alimentación. Este efecto podría predecirse si se comprueba la distribución de presiones a lo largo del asiento cónico, se observa que la distribución de presiones permanece prácticamente constante para el rango de distancias entre platos estudiado y varía drásticamente con la presión de alimentación.

El efecto del diámetro de entrada y el ángulo del cono es estudiado en la figura 51.6, donde se observa que la fuerza resultante sobre la corredera queda afectada al modificar la sección de entrada. Véase que, al aumentar el diámetro de entrada, las curvas no sólo experimentan un desplazamiento, sino que además su pendiente aumenta, (figura 51.6a). De hecho, la pendiente de la curva de fuerzas resultante cambia con la presión de alimentación y con la sección de entrada.

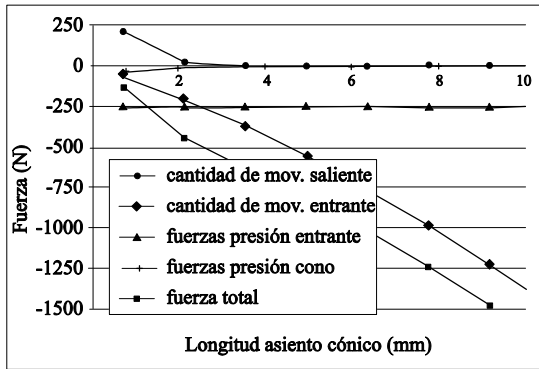
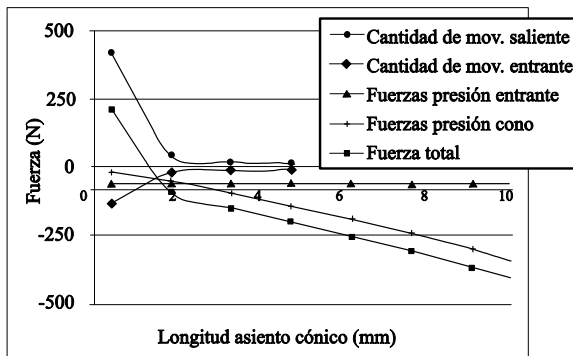


Fig. 51.5  
Fuerzas en  
dirección axial  
sobre la corredera,  
término a término

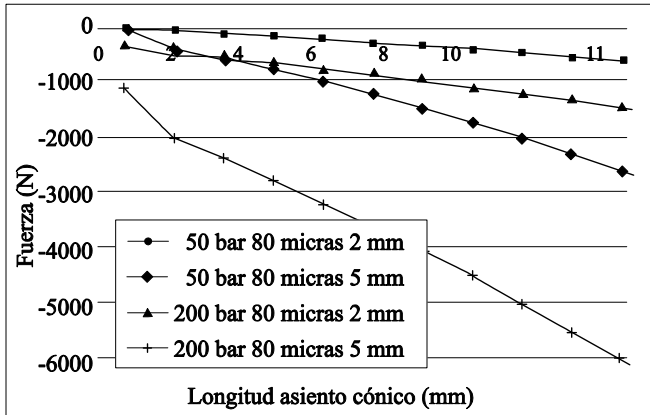
(a) Presión de alimentación 200 bar, distancia cono/asiento 80 micras



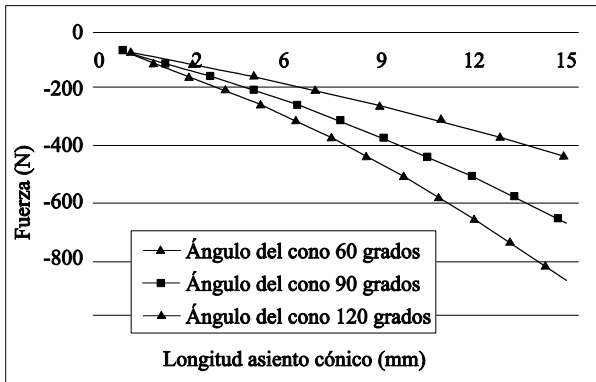
(b) 50 bar, 160 micras



Fig. 51.6  
Fuerza total  
sobre la corredera,  
para una serie  
de diámetros  
de entrada,  
ángulos del cono,  
y una distancia  
cono /asiento de  
80 micras



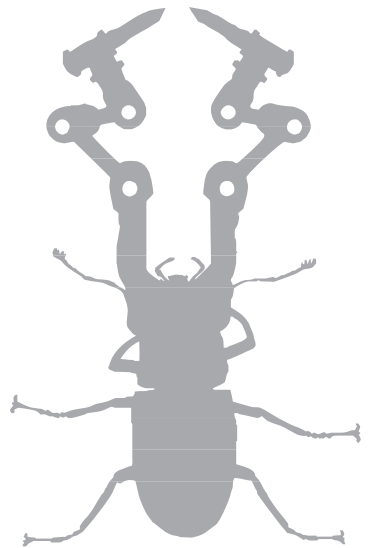
(a) Radio de entrada, 2, 5 mm



(b) Ángulos del cono 60,90,120; presión entrada = 50 bar

La figura 51.6b muestra la fuerza total sobre la corredera en función del ángulo del cono. Véase que, a medida que el ángulo del cono aumenta, aumenta la fuerza sobre la corredera. Para entender mejor este gráfico, se ha de recordar que para una longitud de asiento cónico dada, cuanto mayor sea el ángulo del cono mayor será el radio de salida ( $r_{2 \text{ salida}}$ ). (v. figura 51.1), con lo cual la componente de la fuerza en dirección axial será asimismo mayor.







## Análisis adimensional

### Problema 52

#### Enunciado

Aplique el teorema de  $\pi$  para determinar las pérdidas de energía en una tubería. Realice nuevamente el problema utilizando el método matricial.

Conceptos generales del teorema de  $\pi$  o Buckingham.

Si se sabe que un proceso físico está gobernado por una relación dimensionalmente homogénea que comprenda a “n” parámetros dimensionales, tales como:

$$X_1 = f(X_2, X_3, X_4, \dots);$$

donde las X son variables dimensionales, existe una relación equivalente que contiene un número menor (n-k) de parámetros adimensionales tales como:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{(n-k)});$$

$\pi$ : son grupos adimensionales que se constituyen a partir de las X (variables originales)

K: es generalmente el número de dimensionales fundamentales retenido en las X (variables originales)

K nunca puede ser mayor que dicho número de variables originales.



### Resolución

1. Las variables que influyen en el fenómeno de pérdida de energía en un conducto se establecen:

$$Y = g \cdot h = f(L, D, V, \rho, \mu, \epsilon);$$

$Y = g \cdot h$  : pérdida de energía mecánica entre dos puntos de un conducto.

Utilizando el sistema  $[M, L, T]$ , las dimensiones se expresan:

$$\left[ \frac{L^2}{T^2} \right] = f \left( [L], [L], \left[ \frac{L}{T} \right], \left[ \frac{M}{L^3} \right], \left[ \frac{M}{L \cdot T} \right], [L] \right);$$

2. Determinación del número de parámetros adimensionales que se requieren construir.

El número de dimensiones fundamentales es 3 ( $K=3$ ),  $\rightarrow M; L; T$ .

Si se eligen  $D, \rho, V$ , la masa sólo aparecerá en  $\rho$  y el tiempo sólo en  $V$ , de tal manera que ninguna combinación de  $D, \rho, V$ , puede ser adimensional, con lo cual  $K=3$ ;

El número de parámetros adimensionales que se requiere construir es:

$$n - k = 7 - 3 = 4$$

3. Si se eligen como variables fundamentales  $D, \rho, V$ , los grupos adimensionales serán:

1.º grupo adimensional:  $\pi_1 = y \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[ \frac{L^2}{T^2} \right] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$

como:  $\pi_1 = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow a = 0 \\ L \rightarrow 2 - 3a + b + c = 0 \\ T \rightarrow -2 - b = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{array} \right.$$

Se obtiene:  $\pi_1 = \frac{L^2}{T^2} \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^{-2} = \frac{Y}{V^2}$

2.º grupo adimensional:  $\pi_2 = L \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow a = 0 \\ L \rightarrow -b = 0 \\ T \rightarrow 1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

Se obtiene:  $\boxed{\pi_2 = \frac{L}{D}}$

3.<sup>r</sup> grupo adimensional:  $\pi_3 = \mu \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[ \frac{M}{L \cdot T} \right] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow 1 + a = 0 \\ L \rightarrow -1 - b = 0 \\ T \rightarrow -1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

Se obtiene:  $\boxed{\pi_3 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}}$

4.<sup>o</sup> grupo adimensional:  $\pi_4 = \varepsilon \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow a = 0 \\ L \rightarrow -b = 0 \\ T \rightarrow 1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

Se obtiene:  $\boxed{\pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}}$

con lo cual se obtiene:  $\pi_1 = \pi_2; \pi_3; \pi_4$

$$\frac{Y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}; \frac{\varepsilon}{D}\right) = f\left(\frac{L}{D}; \frac{1}{Re}; \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

4. La ecuación buscada se puede obtener, como ejemplo:

- multiplicando por una constante cualquiera de los grupos adimensionales
- elevando a cualquier potencia cualquiera de los grupos.

con lo cual la relación anterior se puede dar:

$$\frac{2Y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; Re; \frac{\varepsilon}{D}\right).$$



dado que desde el punto de vista adimensional:  $\frac{1}{Re} = Re$ , y también  $\frac{Y}{V^2} \equiv \frac{2 \cdot Y}{V^2}$

El número 2 se obtiene de establecer una contrastación experimental.

puesto que la pérdida de energía es directamente proporcional a la longitud del conducto, se establece:

$$Y = \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2} \cdot f\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

Siendo ésta la ecuación que indica la pérdida de energía a lo largo de un conducto cerrado. El término  $f\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$  ha de ser determinado mediante el diagrama de Moody.

### Resolución del problema utilizando el sistema matricial

Las variables que intervienen en el fenómeno son las mismas que en el caso anterior:

$$Y = f(L, D, V, \rho, \mu, \epsilon)$$

Sistema dimensional [M, L, T]

Las unidades correspondientes a cada parámetro eran:

$$Y = \left[\frac{L^2}{T^2}\right]; \quad D = [L]; \quad \rho = \left[\frac{M}{L^3}\right]; \quad \epsilon = [L];$$

$$L = [L]; \quad V = \left[\frac{L}{T}\right]; \quad \mu = \left[\frac{M}{T \cdot L}\right];$$

Se eligen como variables fundamentales D, ρ, V, obteniéndose la tabla siguiente:

		D	ρ	V	Y	ε	L	μ
(a)	M	0	1	0	0	0	0	1
(b)	L	1	-3	1	2	1	1	-1
(c)	T	0	0	-1	-2	0	0	-1
(3a+b+c)	D	1	0	0	0	1	1	1
(a)	ρ	0	1	0	0	0	0	1
(-c)	V	0	0	1	2	0	0	1

$$\pi_1 = \frac{Y}{V^2} \quad \pi_4 = \frac{\epsilon}{D} \quad \pi_2 = \frac{L}{D} \quad \pi_3 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}$$

Véase que los grupos adimensionales son los mismos que en el caso precedente. Siendo el proceso posterior idéntico.

### Problema 53

#### Enunciado

Determine los grupos adimensionales que caracterizan la caída de presión de un fluido compresible que fluye en el interior de un conducto.

#### Resolución

1. Las variables que influyen en este fenómeno son:

$\Delta p$  = diferencia de presión entre dos puntos del conducto  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$

$l$  = longitud del conducto [m]

$D$  = diámetro del conducto [m]

$\varepsilon$  = rugosidad del tubo [m]

$\rho$  = densidad del fluido  $\left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right]$

$\mu$  = viscosidad absoluta del fluido  $\left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m s}} \right]$

$g$  = aceleración de la gravedad  $\left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

$v$  = velocidad del fluido  $\left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

$\beta$  = módulo de elasticidad del fluido  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$

Eligiendo como magnitudes fundamentales MLT y como variables fundamentales  $D$ ,  $V$ ,  $\rho$ , aparecerán  $9 - 3 = 6$  grupos adimensionales. Estos grupos son:



		D	$\rho$	v	$\Delta p$	l	$\varepsilon$	$\mu$	g	$\beta$
a	M	0	1	0	1	0	0	1	0	1
b	L	1	-3	1	-1	1	1	-1	1	-1
c	T	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	-2
3a+b+c	D	1	0	0	0	1	1	1	-1	0
a	$\rho$	0	1	0	1	0	0	1	0	1
(-c)	v	0	0	1	2	0	0	1	2	2

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} \quad \frac{l}{D} \quad \frac{\varepsilon}{D} \quad \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} \quad \frac{g D}{V^2} \quad \frac{\beta}{\rho V^2}$$

El nombre de estos grupos adimensionales es:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} \quad \text{número de Euler}$$

$$\frac{l}{D} \quad \text{longitud relativa}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} \quad \text{rugosidad relativa}$$

$$\frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} \quad \text{inversa del número de Reynolds}$$

$$\frac{g D}{V^2} \quad \text{inversa del número de Froude}$$

La caída de presión entre dos puntos de un conducto vendrá dada por:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f \left( \frac{\mu}{D \rho V}; \frac{\varepsilon}{D}; \frac{l}{D}; \frac{\beta}{\rho V^2}; \frac{g D}{V^2} \right)$$



## Problema 54

### Enunciado

Determine los grupos adimensionales que caracterizan el comportamiento de una turbo máquina que trabaja con un fluido compresible.

### Resolución

1. Las variables características del fenómeno son:

Variables del fluido:

A la entrada de la máquina:  $P_{01}$  = presión de estancamiento  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$

$T_{01}$  = temperatura de estancamiento [K]

A la salida de la máquina:  $P_{02}$  = presión de estancamiento  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$

$T_{02}$  = temperatura de estancamiento [K]

$\mu$  = viscosidad absoluta del fluido  $\left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m s}} \right]$

$R$  = constante del gas  $\left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} \right]$

$K = \frac{C_p}{C_v}$  relación de calores específicos

Variables de la máquina:

$D$  = diámetro característico [m]

$\Omega$  = velocidad angular  $\left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$

$\dot{m}$  = caudal másico circulante  $\left[ \frac{\text{Kg}}{\text{s}} \right]$



$\eta$  = rendimiento del compresor

Como magnitudes fundamentales, se elegirán M L T  $\theta$ .

Se eligen cuatro variables fundamentales que caracterizan las magnitudes fundamentales elegidas. Dichas variables son:  $\dot{m}$ , D,  $\omega$ ,  $T_{01}$ .

Existirán siete grupos dimensionales que caracterizan el fenómeno. Estos son:

		$\dot{m}$	D	$\omega$	$T_{01}$	$P_{01}$	$\mu$	K	R	$P_{02}$	$\Delta T_0$	$\eta$
a	M	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
b	L	0	1	0	0	-1	-1	0	2	-1	0	0
c	T	-1	0	-1	0	-2	-1	0	-2	-2	0	0
d	$\theta$	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0
a	$\dot{m}$	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
b	D	0	1	0	0	-1	-1	0	2	-1	0	0
(-1)(c+a)	$\omega$	0	0	1	0	1	0	0	2	1	0	0
d	$T_{01}$	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0

$$\pi_1 = \frac{p_{01} D}{\dot{m} \omega}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu D}{\dot{m}} = \frac{\mu D}{Q \rho} = \frac{v D}{s \rho} = \frac{v 4}{\pi D V} \equiv \frac{1}{Re} \quad \text{inversa del número de Reynolds}$$

$\pi_3 = K$  índice de politropía.

$$\pi_4 = \frac{R T_{01}}{D^2 \omega^2}$$

$$\pi_5 = \frac{P_{02} D}{\dot{m} \omega}$$

$$\pi_6 = \frac{\Delta T}{T_{01}} \quad \text{relación de temperaturas}$$

$\pi_7 = \eta$  rendimiento de la máquina

Una combinación de números adimensionales es asimismo un número adimensional, con lo cual se tiene:

$$\frac{\Pi_1}{\sqrt{\Pi_4}} = \frac{\frac{P_{01} D}{\dot{m} \omega}}{\sqrt{\frac{R T_{01}}{D^2 \omega^2}}} = \frac{P_{01} D^2}{\dot{m} \sqrt{R T_{01}}}; \quad \frac{\sqrt{\Pi_4}}{\Pi_1} = \frac{\dot{m} \sqrt{R T_{01}}}{P_{01} D^2}; \quad \frac{\sqrt{\Pi_4}}{\Pi_1} = \frac{\sqrt{R T_{01}}}{\frac{P_{01} D^2}{\dot{m}}}$$

Este nuevo número adimensional es función del número de Mach a la entrada de la máquina.

Por otro lado:

$$\frac{\Pi_5}{\Pi_1} = \frac{\frac{P_{02} D}{\dot{m} \omega}}{\frac{P_{01} D}{\dot{m} \omega}} = \frac{P_{02}}{P_{01}}; \text{ relación de presiones, salida-entrada de la máquina.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Pi_4}} = \sqrt{\frac{D^2 \omega^2}{R T_{01}}} = \frac{\omega D}{\sqrt{R T_{01}}};$$

este número es proporcional a la relación entre la velocidad del álabe y la velocidad del sonido. Vendría a ser el número de Mach del álabe.

Del colectivo de números adimensionales hallados, se eligen tres como básicos, los restantes son función de los elegidos.

Por otro lado, dichos grupos básicos han de definir el comportamiento del fluido. Por tanto incluirán  $P_{02}$ ;  $\eta$ ;  $\Delta T_0$ . Así, se obtiene:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}; \eta; \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = f \left[ \frac{\omega D}{\sqrt{R T_{01}}}; \frac{\dot{m} \sqrt{R T_{01}}}{P_{01} D^2}; \frac{\dot{m}}{\mu D}; K \right]$$

Estos números adimensionales relacionan características de ventiladores que trabajen con: presiones diferentes, temperaturas diferentes, medidas diferentes, gases diferentes, etc.



## Problema 55

### Enunciado

Halle los grupos adimensionales que caracterizan el flujo de un fluido incompresible a través de un vertedero triangular. Determine la altura  $h$  que tendría el líquido diferente al original y para un modelo a escala. Determine asimismo la relación entre el caudal circulante y la viscosidad del fluido entre modelo y prototipo.

### Resolución

1. Las variables que intervienen en el fenómeno son:

Variables geométricas:

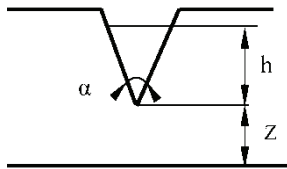
$\alpha$  = ángulo del vertedero

$h$  = altura del nivel del líquido respecto al vértice del vertedero [m]

$Z$  = altura desde la base al vértice del vertedero [m]

Variables cinemáticas:  $Q$  = caudal volumétrico que atraviesa el vertedero.  $\left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$

Fig. 55.1



Variables dinámicas:

$\rho$  = densidad del fluido  $\left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right]$

$\mu$  = viscosidad del fluido  $\left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m s}} \right]$

$g$  = aceleración de la gravedad  $\left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

$P$  = presión  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m s}^2} \right]$

$\sigma$  = tensión superficial  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right] = \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{s}^2} \right]$

Las magnitudes fundamentales elegidas son M, L, T.

Se eligen las variables fundamentales como: h, Q, ρ, con lo cual han de aparecer cinco grupos adimensionales, estos son:

		h	Q	ρ	α	Z	μ	g	P	σ
a	M	0	0	1	0	0	1	0	1	1
b	L	1	3	-3	0	1	-1	1	-1	0
c	T	0	-1	0	0	0	-1	-2	-2	-2
b+3c+3a	h	1	0	0	0	1	-1	-5	-4	-3
-c	Q	0	1	0	0	0	1	2	2	2
a	ρ	0	0	1	0	0	1	0	1	1

$$\alpha \quad \frac{z}{h} \quad \frac{\mu h}{Q \rho} \quad \frac{g h^5}{Q^2} \quad \frac{p h^4}{Q^2 \rho} \quad \frac{\sigma h^3}{Q^2 \rho}$$

Los números adimensionales obtenidos son:

α ángulo del vertedero

$\frac{z}{h}$  longitud relativa

$\frac{\mu h}{Q \rho} = \frac{1}{Re}$  inversa del número de Reynolds

$\frac{g h^5}{Q^2} = \frac{1}{F_r^2}$  inversa del número de Froude al cuadrado

$\frac{p h^4}{Q^2 \rho}$  número de Euler.

(Puesto que se trata de un flujo con superficie libre, el número de Euler se puede desestimar.)

$\frac{\sigma h^3}{Q^2 \rho}$  inversa del número de Weber

(Este número sería relevante si la lámina de fluido fuese delgada.)



2. Suponiendo que la lámina de fluido fuese suficientemente gruesa, los números adimensionales relevantes serían:

$$\frac{\mu h}{Q \rho} = \frac{\mu_1 h_1}{Q_1 \rho_1}; \quad \frac{v h}{Q} = \frac{v_1 h_1}{Q_1}; \quad \frac{v}{v_1} = \frac{Q h_1}{Q_1 h}$$

$$\frac{g h^5}{Q^2} = \frac{g h_1^5}{Q_1^2}; \quad \frac{Q^2}{Q_1^2} = \frac{h^5}{h_1^5};$$

de donde

$$\frac{v}{v_1} = \frac{h_1}{h} \frac{h^{\frac{5}{2}}}{h_1^{\frac{5}{2}}} = \frac{h^{\frac{3}{2}}}{h_1^{\frac{3}{2}}};$$

siendo ésta la relación entre las viscosidades cinemáticas y las alturas de la lámina de fluido.

3. La relación entre el caudal circulante y la viscosidad del fluido para dos vertederos a escala es:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{h_1}{h} \frac{Q}{Q_1}; \quad \frac{h}{h_1} = \frac{Q^{\frac{2}{5}}}{Q_1^{\frac{2}{5}}};$$

así:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{Q_1^{\frac{2}{5}}}{Q^{\frac{2}{5}}} \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q^{\frac{3}{5}}}{Q_1^{\frac{3}{5}}};$$

## Problema 56

### Enunciado

Se quiere realizar un ensayo con un barco a escala 1/30 con el fin de calcular la potencia necesaria en los motores del prototipo. Se conoce que el prototipo tiene una longitud de 30 m y que ha de desplazarse a una velocidad de 30 km/h. Si las variables que intervienen en el fenómeno son:

Longitud del barco, L.

Velocidad del barco, V.

Fuerza de arrastre del barco,  $F$ .

Densidad del fluido,  $\rho$ .

Viscosidad absoluta del fluido,  $\mu$ .

Gravedad,  $g$ .

Determine:

1. Los grupos adimensionales que caracterizan dicho fenómeno.
2. La potencia necesaria en los motores del prototipo, suponiendo que se conoce para el modelo la fuerza de arrastre medida en la balanza.

Considere para el agua  $\nu = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

### Resolución

1 Utilizando como magnitudes fundamentales  $M$ ,  $L$ ,  $T$ , se tiene que las variables que intervienen en el fenómeno se pueden representar:

	$F$	$V$	$L$	$\rho$	$\mu$	$g$
$M$	1	0	0	1	1	0
$L$	1	1	1	-3	-1	1
$T$	-2	-1	0	0	-1	-2

Se eligen como variables fundamentales, las cuales contienen todas las magnitudes fundamentales, como:  $L$ ,  $\rho$ ,  $V$ . El número de grupos adimensionales que caracterizan el fenómeno es de tres, los cuales se obtienen:

	$L$	$\rho$	$V$	$F$	$\mu$	$g$
$M$	0	1	0	1	1	0
$L$	1	-3	1	1	-1	1
$T$	0	0	-1	-2	-1	-2
$L$	1	0	0	2	1	-1
$\rho$	0	1	0	1	1	0
$\nu$	0	0	1	2	1	2
				$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$



con lo que los grupos adimensionales tienen la forma:

$$\Pi_1 = \frac{F}{L^2 \cdot \rho \cdot V^2} \longrightarrow \text{Este número es el coeficiente de arrastre } C_D.$$

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{L \cdot \rho \cdot V} = \frac{v}{V \cdot L} \longrightarrow \text{Es la inversa del número de Reynolds } \frac{1}{Re} ;$$

$$\Pi_3 = \frac{g \cdot L}{V^2} \longrightarrow \text{Es la inversa del número de Froude al cuadrado, } \frac{1}{F_r^2} .$$

Los grupos adimensionales obtenidos permiten establecer relaciones entre modelo y prototipo.

Puesto que se ha de cumplir similitud geométrica en lo que respecta a la porción sumergida del barco, es necesario que se cumpla el número de Froude:

$$\left. \frac{v}{\sqrt{g \cdot L}} \right|_m = \left. \frac{v}{\sqrt{g \cdot L}} \right|_p$$

de donde:

$$v_m = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} v_p ; \quad v_m = \sqrt{\frac{1}{30} \cdot \frac{30}{3,6}} = 1,521 \frac{m}{s}$$

Esta es la velocidad a la que ha de desplazarse el modelo durante el ensayo.

Asumiendo que el fluido de trabajo para el modelo y el prototipo es el mismo, los números de Reynolds para el modelo y el prototipo valen:

$$R_{e_m} = \left. \frac{v \cdot L}{\nu} \right|_m = \frac{1,521}{1,02 \cdot 10^{-6}} = 1.491.176$$

$$R_{e_p} = \left. \frac{v \cdot L}{\nu} \right|_p = \frac{\frac{30}{3,6} \cdot 30}{1,02 \cdot 10^{-6}} = 245.098.039$$

Se observa que el valor del número de Reynolds para el modelo y el prototipo son, en ambos casos, muy elevados, es decir, en ambos casos la zona de trabajo es la característica para flujo turbulento desarrollado. Y aunque es cierto que ambos valores del número de Reynolds no son iguales, en ambos casos las fuerzas de inercia son las únicas relevantes, con lo que el fenómeno a estudiar es similar en ambos casos. Se entiende que la no igualdad del número de Reynolds no afecta al transporte de



información entre modelo y prototipo y, por tanto, el número de Reynolds no aporta información adicional.

De la igualación de los coeficientes de arrastre se tiene:

$$\frac{F}{L^2 \cdot \rho \cdot v^2} \Big|_m = \frac{F}{L^2 \cdot \rho \cdot v^2} \Big|_p$$

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{L_p^2 \cdot v_p^2}{L_m^2 \cdot v_m^2}$$

Del número de Froude, se ha obtenido la relación:

$$\frac{v_p}{v_m} = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}};$$

con lo que:

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{L_p^2}{L_m^2} \cdot \frac{L_p}{L_m} = \frac{L_p^3}{L_m^3};$$

La potencia a la que se quiere para desplazar el prototipo será:

$$Na_p = v_p F_p = v_m \left( \frac{L_p}{L_m} \right)^{\frac{1}{2}} F_m \left( \frac{L_p}{L_m} \right)^3 = v_m \cdot F_m \left( \frac{L_p}{L_m} \right)^{\frac{7}{2}} = 1,521 F_m (30)^{\frac{7}{2}} = 224933,2 F_m \cdot$$

Cuando en esta ecuación se sustituye la fuerza medida sobre el modelo, se obtiene la potencia necesaria en los motores del prototipo para que la velocidad del mismo sea de 30 km/h.

→ 10

## Sistemas de tuberías

### Problema 57

#### Enunciado

Sea el conjunto depósitos y conductos que se expone en los esquemas siguientes. Si se conoce: la potencia que la bomba comunica al fluido  $W_{\text{bomba}}$ , las longitudes, diámetros y rugosidades absolutas de todos los tramos, determinar el caudal que circula por las dos instalaciones y por cada uno de los tramos. Supóngase que los tramos situados a la entrada y salida de la bomba son muy cortos y se puede despreciar su efecto.

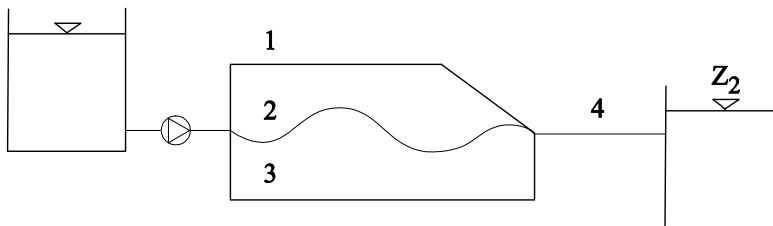


Fig. 57.1  
Esquema de la instalación para el primer caso

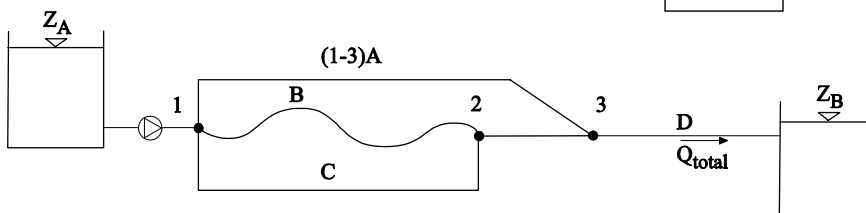


Fig. 57.2  
Esquema de la instalación para el segundo caso

La ecuación que deberá utilizarse para determinar las pérdidas de carga en cada tramo es la de Darcy Weisbach.



$$\Delta Y_i = f_i \frac{L_i}{D_i^5} \frac{8Q_i^2}{\pi^2}$$

Tomar como primera aproximación, el factor de fricción “f” función de la rugosidad relativa  $\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)$ .

### Resolución

Aplicando la ecuación de la energía entre las superficies libres de los dos depósitos se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gZ_1 + Y_B = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gZ_2 + \Delta Y_{12}$$

Trabajando en presiones relativas, y considerando que la superficie de los dos depósitos es muy grande, se tiene:

$$\frac{W}{\rho Q} = Y_B = g(z_2 - z_1) + \Delta Y_{12} \quad ; \quad \Delta Y_{12} = \Delta Y_{\text{paralelo}} + \Delta Y_4 \quad ; \quad \Delta Y_{\text{paralelo}} = \Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \Delta Y_3 \quad ;$$

$$\Delta Y_1 = K_1 Q_1^2 \quad ; \quad \Delta Y_2 = K_2 Q_2^2 \quad ; \quad \Delta Y_3 = K_3 Q_3^2 \quad ;$$

Obsérvese que la constante  $K_i$  representa todos los términos excepto el caudal, de la ecuación de Darcy Weisbach. Dicha constante depende del factor de fricción que asimismo es función de la rugosidad relativa y del número de Reynolds. Estas constantes se supondrán en todo momento conocidas, puesto que como primera aproximación se va a suponer que el régimen es en todo momento turbulento desarrollado.

La ecuación de continuidad establece:

$$Q_4 = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_1}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_2}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_3}} \quad ;$$

Definiendo como  $K_{\text{ef}}$  a la constante equivalente de pérdidas del conjunto de la tres ramas en paralelo, se tiene:

$$\Delta Y_{\text{paralelo}} = K_{\text{ef}} Q_4^2 = K_{\text{ef}} \left( \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_1}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_2}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_3}} \right)^2 \quad ;$$

$$\Delta Y_{\text{paralelo}} = K_{\text{ef}} \Delta Y_{\text{paralelo}} \left( \frac{1}{\sqrt{K_1}} + \frac{1}{\sqrt{K_2}} + \frac{1}{\sqrt{K_3}} \right)^2 ;$$

$$K_{\text{ef}} = \frac{1}{\left( \frac{1}{\sqrt{K_1}} + \frac{1}{\sqrt{K_2}} + \frac{1}{\sqrt{K_3}} \right)^2} ;$$

La constante para la tubería 4 será:

$$\Delta Y_4 = K_4 Q_4^2$$

Con lo que la ecuación general de la energía quedará:

$$\left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \frac{W}{\rho Q_4} = g(z_2 - z_1) + K_{\text{ef}} Q_4^2 + K_4 Q_4^2$$

De esta ecuación se obtiene  $Q_4$  ;

La pérdidas de carga en el tramo 4 y en las tres ramas en paralelo serán:  $\Delta Y_4 = K_4 Q_4^2$  ;

$$\Delta Y_{\text{paralelo}} = K_{\text{ef}} Q_4^2$$

El caudal en cada uno de los tramos de las tres ramas en paralelo se obtendrá:

$$\Delta Y_{\text{paralelo}} = K_{\text{ef}} Q_4^2 = K_1 Q_1^2 = K_2 Q_2^2 = K_3 Q_3^2 ;$$

De esta ecuación se extraen los valores de  $Q_1$  ;  $Q_2$  ;  $Q_3$  ;

Para la segunda de las instalaciones, el proceso a seguir será:

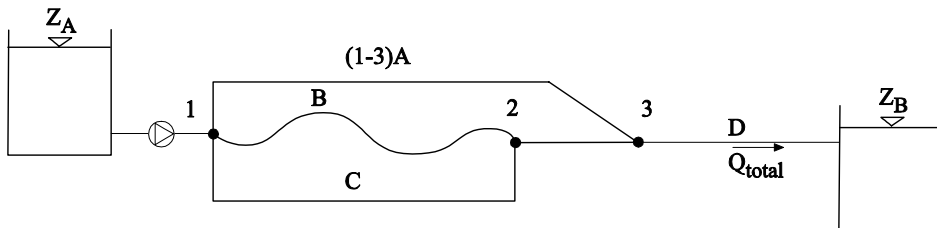


Fig. 57.3

Aplicando la ecuación de la energía entre las superficies libres de los dos depósitos se obtiene:

$$\frac{W}{\rho Q_{\text{total}}} = Y_B = g(z_B - z_A) + \Delta Y_{AB}$$



Donde ahora, las pérdidas de energía en la instalación se definirán como:

$$\Delta Y_{AB} = \Delta Y_{\text{paralelo } 1-3} + \Delta Y_{\text{tramo (D)}} ;$$

El tramo en paralelo se define:

$$\Delta Y_{\text{paralelo } 1-3} = \Delta Y_{(1-3)A} = \Delta Y_{\text{paralelo } 1-2} + \Delta Y_{2-3} = K_{\text{ef}(1-3)} Q_{\text{total}}^2 ;$$

$$Q_{\text{total}} = Q_{(1-3)A} + Q_{23} = Q_{(1-3)A} + Q_{(1-2)B} + Q_{(1-2)C} ;$$

$$Q_{(1-2)B} + Q_{(1-2)C} = Q_{2-3} ;$$

$$\Delta Y_{12} = \Delta Y_{(1-2)B} = \Delta Y_{(1-2)C} ; \quad \Delta Y_{(1-2)B} = K_{(1-2)B} Q_{(1-2)B}^2 ; \quad \Delta Y_{(1-2)C} = K_{(1-2)C} Q_{(1-2)C}^2 ;$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad entre los puntos 1 y 2.

$$Q_{2-3} = \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-2)B}}{K_{(1-2)B}}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-2)C}}{K_{(1-2)C}}} ;$$

$$\Delta Y_{12} = K_{(1-2)\text{equiva}} Q_{2-3}^2 = K_{(1-2)B} Q_{(1-2)B}^2 = K_{(1-2)C} Q_{(1-2)C}^2 ;$$

$$\Delta Y_{12} = K_{(1-2)\text{equiva}} Q_{2-3}^2 = K_{(1-2)\text{equiva}} \Delta Y_{(1-2)} \left( \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)B}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)C}}} \right)^2 ;$$

$$K_{(1-2)\text{equiva}} = \frac{1}{\left( \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)B}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)C}}} \right)^2} ;$$

Por otro lado se tiene:

$$\Delta Y_{(1-3)\text{paralelo}} = K_{\text{eq}(1-3)} Q_{\text{total}}^2 = \Delta Y_{(1-3)A} = \Delta Y_{\text{paralelo}(1-2)} + \Delta Y_{(2-3)} ;$$

$$K_{\text{equiv}(1-3)} Q_{\text{total}}^2 = K_{(1-3)A} Q_{(1-3)A}^2 = K_{(1-2)\text{equiv}} Q_{2-3}^2 + K_{(2-3)} Q_{2-3}^2 ;$$

$$K_{\text{equiv}(1-3)} Q_{\text{total}}^2 = K_{(1-3)A} Q_{(1-3)A}^2 = Q_{2-3}^2 (K_{(1-2)\text{equiv}} + K_{(2-3)}) = \Delta Y_{1-3 \text{ tramo superior}} = \Delta Y_{1-3 \text{ tramo inferior}} ;$$

$$K_{(1-2)\text{equiv}} + K_{(2-3)} = \frac{1}{\left( \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)B}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)C}}} \right)^2} + K_{(2-3)} = K_{(1-3) \text{ tramo inferior}}$$

Recordando que:

$$K_{\text{equiv}(1-3)} Q_{\text{total}}^2 = K_{(1-3)\text{tramo inferior}} Q_{(2-3)}^2 = K_{(1-3)A} Q_{(1-3)A}^2$$

$$Q_{\text{total}} = Q_{(2-3)} + Q_{(1-3)A} = \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3)\text{tramo inferior}}}{K_{(1-2)\text{equivalente}} + K_{(2-3)}}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3)A}}{K_{(1-3)A}}}$$

$$K_{(1-3)\text{equivalente}} Q_{\text{total}}^2 = \Delta Y_{(1-3)\text{equivalente}} = K_{(1-3)\text{equivalente}} \left[ \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3)\text{tramo inferior}}}{K_{(1-2)\text{equiva}} + K_{(2-3)}}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3)A}}{K_{(1-3)A}}} \right]^2$$

$$\Delta Y_{(1-3)\text{equivalente}} = K_{(1-3)\text{equivalente}} \Delta Y_{(1-3)\text{equivalente}} \left[ \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)\text{equivalente}} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}} \right]^2 ;$$

$$K_{(1-3)\text{equivalente}} = \frac{1}{\left[ \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)\text{equiva}} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}} \right]^2} ;$$

$$\Delta Y_{AB} = K_{(1-3)\text{equivalent}} Q_{\text{total}}^2 + K_D Q_{\text{total}}^2 ;$$

$$\frac{W}{\rho Q_t} = g(z_B - z_A) + Q_t^2 [K_{(1-3)\text{equivalent}} + K_D] ;$$

$$\frac{W}{\rho} = g(z_B - z_A) Q_t + Q_t^3 [K_{(1-3)\text{equivalente}} + K_D] ;$$

De aquí se obtiene  $Q_t$  ;

La pérdida de carga en cada uno de los tramos 1-3 será:

$$Q_{\text{total}}^2 = \Delta Y_{(1-3)} \left[ \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)\text{equivalente}} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}} \right]^2 ;$$

$$\Delta Y_{(1-3)} = \frac{Q_{\text{total}}^2}{\left[ \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)\text{equivalente}} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}} \right]^2}$$

Los caudales en cada uno de los tramos 1-3 se determinarán:



$$\Delta Y_{1-3} = K_{(1-3)A} Q_{(1-3)A}^2 \rightarrow \text{se despeja } Q_{(1-3)A}$$

$$\Delta Y_{1-3} = \left( K_{(1-2)\text{equiva}} + K_{(2-3)} \right) Q_{(2-3)}^2 \rightarrow \text{se despeja } Q_{(2-3)}$$

Por último, el caudal circulante entre los puntos 1-2 en la tubería B y el circulante entre estos dos mismos puntos en la tubería C se obtienen:

$$Q_{2-3} = Q_{(1-2)B} + Q_{(1-2)C} ;$$

$$\Delta Y_{(1-3)} = \Delta Y_{2-3} + \Delta Y_{(1-2)\text{equivalente}} ;$$

$$\Delta Y_{2-3} = K_{2-3} Q_{2-3}^2 \text{ se obtiene } \Delta Y_{2-3}$$

$$\Delta Y_{(1-2)\text{equivalente}} = \Delta Y_{(1-3)} - \Delta Y_{(2-3)} \text{ de aquí se obtiene } \Delta Y_{(1-2)\text{equivalent}}$$

$$\Delta Y_{(1-2)\text{equivalente}} = \Delta Y_{(1-2)B} = \Delta Y_{(1-2)C} ;$$

$$\Delta Y_{(1-2)B} = K_{(1-2)B} Q_{(1-2)B}^2 ; \text{ siendo la incógnita } Q_{(1-2)B}$$

$$\Delta Y_{(1-2)C} = K_{(1-2)C} Q_{(1-2)C}^2 ; \text{ obteniendo } Q_{(1-2)C}$$

## Problema 58

### Enunciado

Se tienen dos depósitos de grandes dimensiones, separados por una altura de 25 m. La presión relativa en el depósito inferior es de 200.000 Pa, mientras que en el depósito superior se tiene presión atmosférica. Se desea conectar ambos depósitos mediante un conducto de PVC de 400 m de longitud y con la ayuda de una bomba de 25 kW de potencia se pretende trasvasar un caudal de 0,2 m<sup>3</sup>/s de agua del depósito inferior al superior.

Halle:

1. El diámetro del conducto que se ha de utilizar para cumplir con los requerimientos establecidos.
2. Debido a la mala colocación de una brida situada cuatro metros antes de que el tubo llegue al depósito superior, aparece una fuga de agua en este punto. Si se conoce que la pérdida de energía que el agua experimenta al pasar a través de la brida es de



$\Delta h = 100 Q_b^2$ , siendo  $Q_b$  el caudal de agua que se fuga a través de la brida, halle el nuevo caudal que fluye ahora por la instalación.

Considere que la brida está a la misma altura que el nivel del líquido en el depósito superior. Se puede despreciar la energía cinética a la salida de la brida.

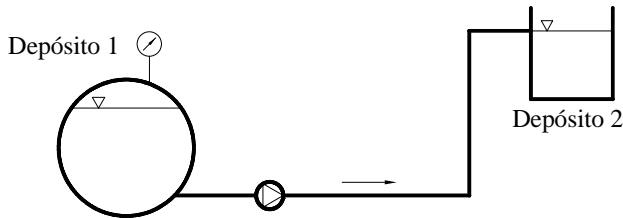


Fig. 58.1  
Esquema de la instalación

## Resolución

1. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las superficies libres de los dos depósitos, se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + H = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \Delta h_{12}$$

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + \frac{W}{\rho \cdot g \cdot Q} = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}$$

siendo  $\Delta h = f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}$  la expresión para la pérdida de carga en tuberías, en función

de la longitud  $L$ , el diámetro  $D$ , el caudal  $Q$  y el coeficiente de fricción  $f$ , y  $H = \frac{W}{\rho \cdot g \cdot Q}$

la altura de elevación de la bomba en función de la potencia ( $W$ ) y el caudal.

Tomando un valor inicial para  $f$  de 0,02 (valor estándar para tuberías), se puede obtener el valor del diámetro  $D$ :

$$\begin{aligned} & \frac{200.000 \text{ Pa}}{1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + 0 + 0 + \frac{25.000 \text{ W}}{1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = \\ & = 0 + 25 \text{ m} + 0 + 0,02 \cdot \frac{400 \text{ m}}{D^5 \text{ m}^5} \cdot \frac{8 \cdot 0,2^2 \frac{\text{m}^6}{\text{s}^2}}{\pi^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \end{aligned}$$

Aislado la  $D$  de la ecuación, se obtiene:  $D = 0,318 \text{ m}$



El valor del número de Reynolds para este diámetro es:

$$Re = V \cdot \frac{D}{\nu} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} \cdot \frac{D}{\nu} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D \cdot \nu} = \frac{4 \cdot 0,2 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \cdot 0,318 \text{ m} \cdot 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 785.051,3$$

A través del gráfico de Moody, se halla un valor del coeficiente de fricción correspondiente a este número de Reynolds de  $f = 0,0125$ .

Con el nuevo valor de  $f$  se determina de nuevo la pérdida de carga en función del diámetro:

$$\Delta h = f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} = 0,0125 \cdot \frac{400 \text{ m}}{D^5 \text{ m}^5} \cdot \frac{8 \cdot 0,2^2 \text{ m}^6/\text{s}^2}{\pi^2 \cdot 9,81 \text{ m}/\text{s}^2} = 0,01653 \cdot \frac{1}{D^5} \text{ m}$$

Utilizando la ecuación de Bernoulli, se halla nuevamente el valor de  $D$  para la nueva  $\Delta h$ :

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + H = z_2 + \Delta h_{12}$$

$$\Delta h_{12} = -z_2 + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + H = -25 \text{ m} + \frac{200.000 \text{ Pa}}{1.000 \text{ kg}/\text{m}^3 \cdot 9,81 \text{ m}/\text{s}^2} + \frac{25.000 \text{ W}}{1.000 \text{ kg}/\text{m}^3 \cdot 9,81 \text{ m}/\text{s}^2 \cdot 0,2 \text{ m}^3/\text{s}} = 8,129 \text{ m}$$

$$0,01653 \cdot \frac{1}{D^5} \text{ m} = 8,129 \text{ m}$$

Aislado  $D$  de la ecuación, se obtiene el nuevo valor:  $D = 0,289 \text{ m}$

El valor del número de Reynolds será:

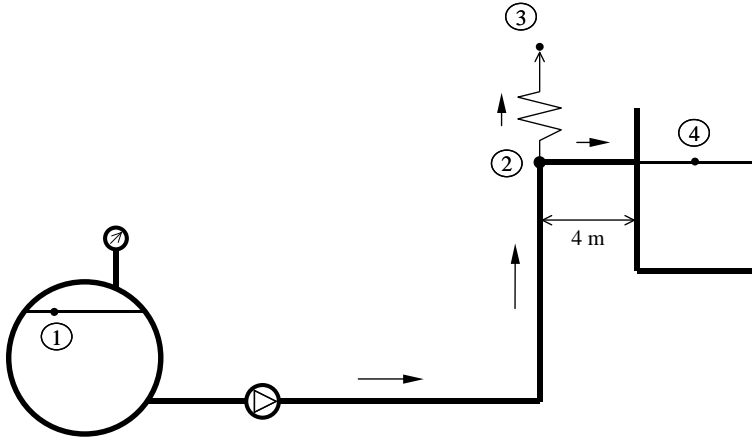
$$Re = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D \cdot \nu} = \frac{4 \cdot 0,2 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \cdot 0,289 \text{ m} \cdot 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 863.857,5$$

Y, según Moody,  $f = 0,012$ ; considerando que el valor del factor de fricción es prácticamente el mismo que el obtenido con anterioridad, se concluye que el diámetro será:

$$\boxed{D = 0,289 \text{ m}}$$

2. El esquema de la instalación para este segundo caso será:

Fig. 58.2  
Esquema de  
la instalación



Las ecuaciones que se tienen en este caso son:

aplicando Bernoulli entre 2 y 3:

$$E_2 = E_3 + \Delta h_{23} = E_3 + 100 \cdot Q_b^2$$

Entre los puntos 2 y 4, se concluye:

$$E_2 = E_4 + \Delta h_{24} = E_4 + f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{24}^2}{\pi^2 \cdot g} = E_4 + 0,012 \cdot \frac{4 \text{ m}}{0,289^5 \text{ m}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{24}^2 \frac{\text{m}^6}{\text{s}^2}}{\pi^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = E_4 + 1,967 \cdot Q_{24}^2$$

Y entre los puntos 1 y 2:

$$E_1 + H = E_2 + \Delta h_{12} = E_2 + f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_T^2}{\pi^2 \cdot g} = E_2 + 0,012 \cdot \frac{396 \text{ m}}{0,289^5 \text{ m}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_T^2 \frac{\text{m}^6}{\text{s}^2}}{\pi^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = E_2 + 194,764 \cdot Q_T^2$$

Según la ecuación de continuidad:

$$Q_T = Q_b + Q_{24}$$

Si se desprecia la energía cinética en la fuga de la brida (punto 3 de la figura):

$$E_3 = z_3 = 25 \text{ m}$$

$$E_4 = z_4 = 25 \text{ m}$$

Y los valores de  $E_1$  y  $H$ :

$$E_1 = \frac{P_1}{\rho \cdot g} = \frac{200.000 \text{ Pa}}{1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 20,387 \text{ m}$$



$$H = \frac{25.000 \text{ W}}{1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot Q_T \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = \frac{2,54841}{Q_T}$$

Se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas ( $Q_T$ ,  $Q_b$ ,  $Q_{24}$ ,  $E_2$ ).

$$E_2 = 25 + 100 \cdot Q_b^2 \rightarrow \text{ecuación 1}$$

$$E_2 = 25 + 1,967 \cdot Q_{24}^2 \rightarrow \text{ecuación 2}$$

$$20,387 + \frac{2,54841}{Q_T} = E_2 + 194,764 \cdot Q_T^2 \rightarrow \text{ecuación 3}$$

$$Q_T = Q_b + Q_{24} \rightarrow \text{ecuación 4}$$

Aislando  $Q_b$  y  $Q_{24}$  de las ecuaciones 1 y 2, y sustituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación 4, se tiene:

$$Q_T = \sqrt{\frac{E_2 - 25}{100}} + \sqrt{\frac{E_2 - 25}{1,967}} = 0,813 \cdot \sqrt{E_2 - 25}$$

$$Q_T^2 = 0,661 \cdot (E_2 - 25)$$

Sustituyendo el valor de  $Q_T$  en la ecuación 3 se obtiene:

$$Q_T^3 194,764 + Q_T (E_2 - 20,387) - 2,5484 = 0$$

$$0,813^3 (E_2 - 25)^{\frac{3}{2}} 194,764 + 0,813 (E_2 - 25)^{\frac{1}{2}} (E_2 - 20,387) - 2,5484 = 0$$

De donde el valor de la energía en el punto 2 será:

$$E_2 = 25,0617 \text{ m}$$

Con lo que el valor de los tres caudales vendrá a ser:

$$Q_{24} = 0,1771 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_b = 0,0248 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$\boxed{Q_T = 0,2019 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}$$

que es el nuevo caudal total que se pedía en el enunciado.

## Problema 59

### Enunciado

En una central térmica de producción de energía eléctrica se tiene una instalación cuyo esquema se muestra a continuación, siendo el fluido de trabajo agua.

Se sabe que la presión y la temperatura en la caldera de vapor son de  $P = 2$  bar (absoluta),  $T = 400^\circ\text{C}$ , y que en la turbina se produce una expansión adiabático-isentrópica con un salto entálpico de  $777$  KJ/Kg. (Considérese este salto entre los puntos 3 y 6.)

Si las pérdidas de carga en la tubería de aspiración son  $\Delta h = 104 Q^2$  y en la tubería de impulsión  $\Delta h = 312 Q^2$ , siendo  $Q$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ],  $\Delta h$  [m columna de agua], y sabiendo que la bomba que se utiliza es el modelo 150/315, con un diámetro de rodete de  $270$  mm, (y se considera que la cota del nivel del líquido del condensador está  $1$  m por encima de la cota del nivel del líquido de la caldera,) se pide hallar:

1. El punto de funcionamiento de la bomba.
2. La cota  $Z$  (respecto al nivel del líquido del condensador) a la que hay que colocar la bomba para que no se produzca cavitación.
3. Debido a que se ha hecho un reajuste en el proceso, se precisa aumentar el caudal en un  $20\%$ . Si al motor de accionamiento de la bomba se le acopla un variador de frecuencia, determine a qué revoluciones debería girar para que la bomba suministre el nuevo caudal. ¿Con qué rendimiento trabaja ahora la bomba?

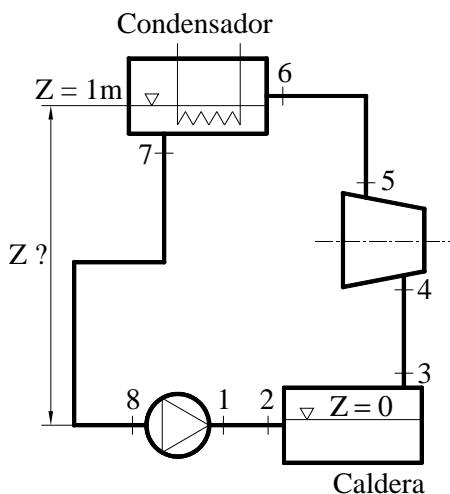


Fig.59.1  
Esquema del  
circuito en  
estudio



Fig. 59.2  
Gráfica de la  
curva  
característica  
de la bomba.  
Cortesía de  
bombas ITUR

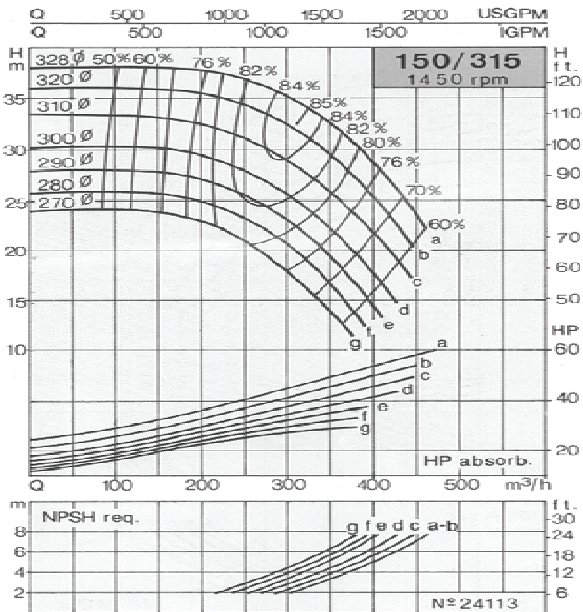
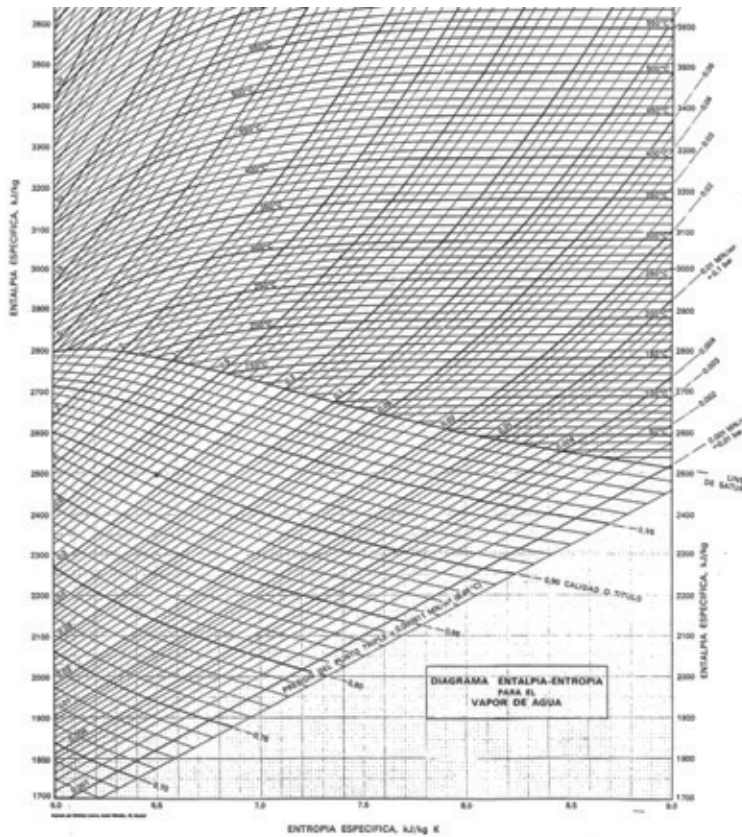


Fig. 59.3  
Diagrama  
entalpía-entropía  
para el vapor de  
agua.  
Fuente:  
José Segura,  
*Termodinámica  
técnica*



## Resolución

Las condiciones termodinámicas en la caldera son:

$$P_3 \text{ absoluta} = 2 \text{ bar}$$

$$T_3 = 400^\circ\text{C}$$

Entrando con estas condiciones en el diagrama de Molier, se obtiene:

$$h_3 = 3.277 \text{ KJ/Kg}$$

Si el salto entálpico entre 3 y 6 es de 777 KJ/Kg, y considerando la evolución adiabática isoentrópica, las condiciones termodinámicas en el punto 6 serán (resultado extraído del diagrama de Molier):

$$P_6 = 0,05 \text{ bar}$$

$$T_6 = 35^\circ\text{C}$$

$$h_6 = 2.500 \text{ KJ/Kg}$$

1. Para hallar el punto de funcionamiento, se aplicará la ecuación de Bernoulli entre las superficies libres de condensador y la caldera; así:

$$\frac{P_{\text{con}}}{\rho g} + Z_{\text{con}} + \frac{V_{\text{con}}^2}{2g} + H = \frac{P_{\text{cal}}}{\rho g} + Z_{\text{cal}} + \frac{V_{\text{cal}}^2}{2g} + \Delta h_{72}$$

$$H = \frac{P_{\text{cal}} - P_{\text{con}}}{\rho g} + Z_{\text{cal}} - Z_{\text{con}} + \frac{V_{\text{cal}}^2 - V_{\text{con}}^2}{2g} + \Delta h_{72}$$

Sustituyendo, y considerando las energías cinéticas en las superficies libres de los depósitos despreciables, se tiene:

$$H = \frac{(2 - 0,05)10^5}{1.000 \times 9,8} - 1 + 416Q^2$$

$$H = 18,88 + 416Q^2$$

$$H[\text{m}]; \quad Q \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

La intersección entre esta curva y la curva característica de la bomba da lugar al punto de funcionamiento, y se obtiene:

$$Q = 250 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$H = 20,88 \text{ m}$$



2. Cálculo de la cota Z:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre del condensador y la brida de aspiración de la bomba, se llega a:

$$\frac{P_{\text{con}}}{\rho g} + Z_{\text{con}} + \frac{V_{\text{con}}^2}{2g} = \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} + \Delta h_{78}$$

$$Z_{\text{con}} - Z_8 = \frac{P_8 - P_{\text{con}}}{\rho g} + \frac{V_8^2 - V_{\text{con}}^2}{2g} + \Delta h_{78}$$

El término de energía cinética en la brida de aspiración es mucho mayor que en el condensador pero, puesto que no se conoce el diámetro del conducto, a priori se desprecian ambos términos; así, la definición de  $NPSH_d$  queda:

$$NPSH_d = \frac{P_8}{\rho g} - \frac{P_{\text{vapor}}}{\rho g}$$

de donde, sustituyendo en la ecuación de Bernoulli entre condensador y brida de aspiración, se tiene:

$$Z_{\text{con}} - Z_8 = NPSH_d + \frac{P_{\text{vapor}}}{\rho g} - \frac{P_{\text{con}}}{\rho g} + \Delta h_{78}$$

En el punto de cavitación incipiente se ha de cumplir que

$$NPSH_d = NPSH_R$$

En la gráfica de la curva característica de la bomba (fig. 48.2) se observa que, para un caudal de  $Q=250\text{ m}^3/\text{h}$ , el valor de la altura neta requerida es  $NPSH_R = 3\text{ m}$ .

Suponiendo que la temperatura del líquido en el condensador sea la misma que en la brida de aspiración de la bomba, es decir  $35\text{ }^\circ\text{C}$ , la presión de vapor será la misma que la presión que existe en el condensador,  $0,05\text{ bar}$ , de donde:

$$Z_{\text{con}} - Z_8 = 3 + 104 \left( \frac{250}{3.600} \right)^2 + \frac{0,05 \times 10^5}{\rho g} - \frac{0,05 \times 10^5}{\rho g} = 3,5\text{ m}$$

La bomba debe ser colocada a una distancia de  $3,5\text{ m} + 0,5\text{ m}$  (de seguridad) =  $4\text{ m}$  por debajo del nivel del líquido del condensador.

3. La figura 59.4 define el nuevo punto de funcionamiento para este apartado, que se obtiene de la intersección de la curva del sistema con el nuevo caudal circulante  $250 * 1,2 = 300\text{ m}^3/\text{h}$  (punto 1, figura 59.4).



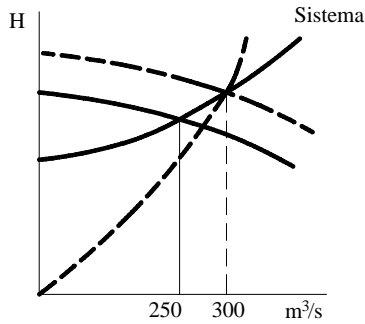


Fig. 59.4  
Esquema del nuevo punto de funcionamiento del sistema con la curva de afinidad

Si  $Q=300 \text{ m}^3/\text{h}$ , la altura del nuevo punto de funcionamiento será:

$$H=18,88+416\left(\frac{300}{3.600}\right)^2$$

$$H=21,76 \text{ m}$$

La constante de una curva que pase por el punto  $H = 21,76 \text{ m}$  y  $Q=300 \text{ m}^3/\text{h}$ , denominada curva de afinidad, se halla:

$$\Delta h=KQ^2$$

$$K=\frac{21,76}{\left(\frac{300}{3.600}\right)^2}=3.134,72$$

Esta curva corta con la curva característica inicial de la bomba en el punto 2, cuyas características son:

$$H = 18,95 \text{ m}; \quad Q=280 \text{ m}^3/\text{h}$$

Entre los puntos  $H = 21,76 \text{ m}$ ,  $Q=300 \text{ m}^3/\text{h}$ , y  $H = 18,95 \text{ m}$ ,  $Q=280 \text{ m}^3/\text{h}$ , se pueden aplicar los grupos adimensionales, cifra característica, altura de elevación  $\psi$ , y cifra característica de caudal  $\Phi$ .

$$\frac{H_1}{\omega_1^2 D_1^2} = \frac{H_2}{\omega_2^2 D_2^2} \quad \frac{21,76}{\omega_1^2 \varnothing_1^2} = \frac{18,95}{1.450^2 \varnothing_2^2} \quad \omega_1^2 = \frac{21,76 \times 1.450^2}{18,95};$$

$$\omega_1 = 1.553,79 \text{ rpm}$$

$$\frac{Q_1}{\omega_1 D^3} = \frac{Q_2}{\omega_2 D^3} \quad \omega_1 = \frac{Q_1 \omega_2 \varnothing^3}{Q_2 \varnothing^3} \quad \omega_1 = \frac{300 \times 1450}{280} = 1.553,57 \text{ rpm.}$$



Obsérvese que, utilizando cualquiera de las dos cifras características, se obtiene prácticamente el mismo resultado. Por otro lado, el rendimiento al que trabajará la bomba en el nuevo punto de funcionamiento, punto 1, será prácticamente el mismo que el existente en el punto 2, siendo éste del 77% según se observa en la figura 59.2.

## Problema 60

### Enunciado

Sea el esquema del grupo de bombeo que se muestra en la figura 53.1, en donde se conoce que las pérdidas por fricción en cada tramo son:

$$H_{\text{aspiración}} = H_{4-2} = 6.480 Q^2$$

$$H_{\text{impulsión hasta el punto 4}} = 25.920 Q^2$$

$$H_{4-3} = 19.440 Q^2$$

La velocidad de giro de todas las bombas es de 2.900 rpm.

En todos los casos,  $H$  (m);  $Q$  (m<sup>3</sup>/s)

Las bombas B2, B3 y B4 son idénticas.

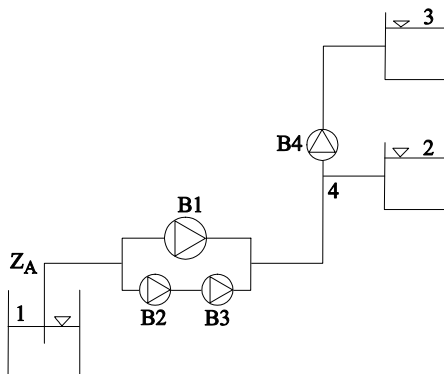
Las cotas de los puntos 2, 3 y 4 respecto al punto 1 son:

$$Z_2 = 50 \text{ m}; Z_3 = 100 \text{ m}; Z_4 = 40 \text{ m}.$$

La bomba 1 es del modelo 5026, con un diámetro de rodete de 235 mm.

El resto de bombas, 2,3,4, son del modelo 5020, con un diámetro de rodete de 195 mm.

Fig. 60.1  
Esquema de la  
instalación.



Se pide determinar:

1. El caudal circulante en cada uno de los tramos y el punto de funcionamiento de cada una de las bombas.
2. La cota del punto A para que exista cavitación incipiente. Especifique las hipótesis realizadas.
3. Determine la velocidad de giro de la bomba 4 para que el caudal que circula por el tramo 1-4 disminuya en un 2,5%.

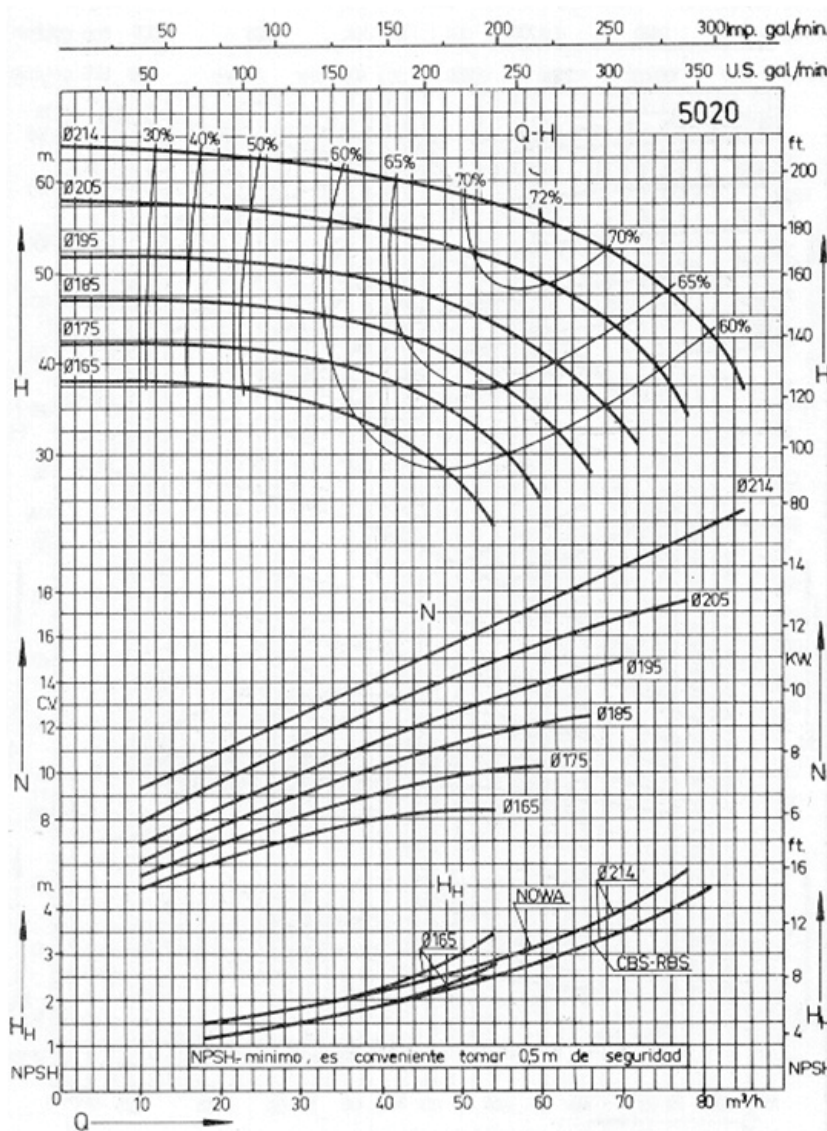
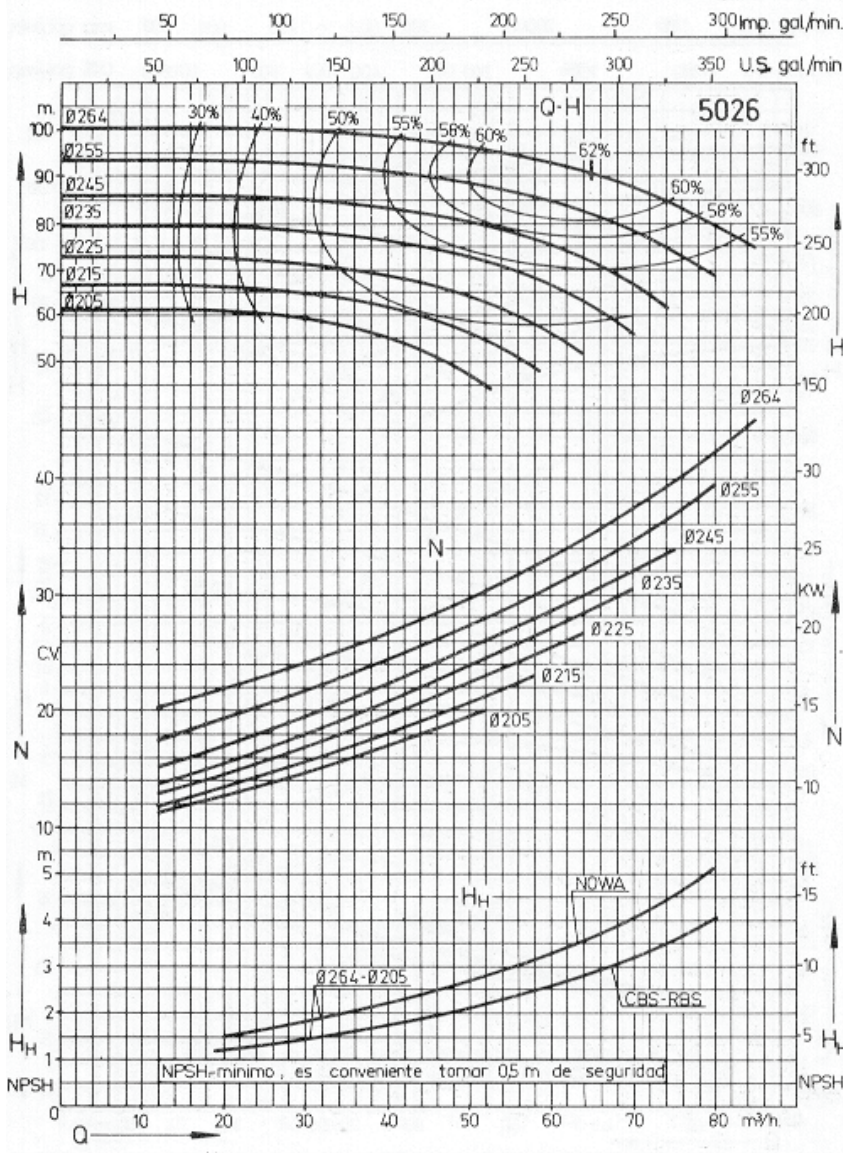


Fig. 60.2  
Curva  
característica de  
las bombas 2, 3  
y 4 modelo 5020.  
Cortesía de  
bombas SIHI



Fig. 60.3  
Curva  
característica de  
la bomba 1,  
modelo 5026.  
Cortesía de  
bombas SIHI



### Resolución

1. Caudal circulante en cada uno de los tramos y punto de funcionamiento de cada una de las bombas.

Suponiendo que no hay pérdidas de caudal en los diferentes tramos, se tiene que

$$Q_{14} = Q_{42} + Q_{43}$$

Aplicando Bernoulli entre los puntos siguientes (1-4 , 4-2 y 4-3), se obtiene:

Tramo 1-4:

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + H_{\text{grupo}} = \frac{P_4}{\rho g} + z_4 + \frac{v_4^2}{2g} + \Delta h_{14}$$

Tramo 4-2:

$$\frac{P_4}{\rho g} + z_4 + \frac{v_4^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta h_{42}$$

Tramo 4-3:

$$\frac{P_4}{\rho g} + z_4 + \frac{v_4^2}{2g} + H_{B4} = \frac{P_3}{\rho g} + z_3 + \frac{v_3^2}{2g} + \Delta h_{43}$$

Tomando como plano de referencia el situado en  $z_1$  (cota cero) trabajando en presiones relativas y despreciando el término de energía cinética en el punto 4, se tiene:

$$\frac{P_4}{\rho g} = H_{\text{grupo}} - z_4 - k_{14} Q_{14}^2 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$\frac{P_4}{\rho g} = z_2 - z_4 + k_{42} Q_{42}^2 \quad (\text{ecuación 2})$$

$$\frac{P_4}{\rho g} = z_3 - z_4 - H_{B4} + k_{43} Q_{43}^2 \quad (\text{ecuación 3})$$

Las ecuaciones definitorias del sistema cuando el caudal se da en  $[\text{m}^3/\text{h}]$  vendrán dadas por:

$$\frac{P_4}{\rho g} = H_{\text{grupo}} - z_4 - \left( \frac{6.480 + 25.920}{3.600^2} \right) Q_{14}^2 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$\frac{P_4}{\rho g} = z_2 - z_4 + \left( \frac{6.480}{3.600^2} \right) Q_{42}^2 \quad (\text{ecuación 2})$$

$$\frac{P_4}{\rho g} = z_3 - z_4 - H_{B4} + \left( \frac{19.440}{3.600^2} \right) Q_{43}^2 \quad (\text{ecuación 3})$$

$$Q_{14} = Q_{42} + Q_{43} \quad (\text{ecuación 4})$$



Las ecuaciones 1,2,3,4 forman un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. Las incógnitas son:

$$\frac{P_4}{\rho g}; Q_{1-4}; Q_{4-2}; Q_{4-3}.$$

Un modo de resolución del sistema de ecuaciones hallado sería el gráfico, para ello, se representarán inicialmente las ecuaciones 2 y 3, se sumarán en paralelo y la curva resultante se sustituirá en la ecuación 1.

En la resolución gráfica, se ha de tener en cuenta que las curvas características de las bombas están dadas por:

Bomba 1, modelo 5026, con diámetro de rodete de 235 mm.

Bombas 2, 3, 4, modelo 5020, con diámetro de rodete de 195 mm.

El grupo de bombeo se determinará sumando en serie las características de las bombas 2 y 3. Su resultado se sumará en paralelo con la característica de la bomba 1 (v. figura 60.4).

El proceso de obtención de la curva característica del sistema se ha representado paso a paso en las figuras 60.5 a 60.9.

La figura 60.5 representa las pérdidas de carga en función del caudal para el tramo 1-4:

$$\Delta h_{1-4} = K_{1-4} Q_{1-4}^2 = H_{\text{aspiración}} + H_{\text{impulsión}}.$$

En la figura 60.6 se representa la ecuación 1 al completo, es decir, el valor de

$$\frac{P_4}{\rho g} \Big|_{\text{tramo 1-4}}.$$

Obsérvese que a la curva característica del grupo de bombeo, obtenida en la

figura 60.4, se le ha restado el valor de la cota en el punto 4 y también las pérdidas por rozamiento en el tramo de tubería entre los puntos 1 y 4, curva representada en la figura 60.5.

Para hallar la curva característica que representa la energía por unidad de peso debida a la presión que existe en el punto 4 en función de las características del tramo 4-2 (ecuación 2), hay que sumar a las pérdidas de carga del tramo 4-2 la cota del punto 2 y restarle la del punto 4. La curva resultante se detalla en la figura 60.7.

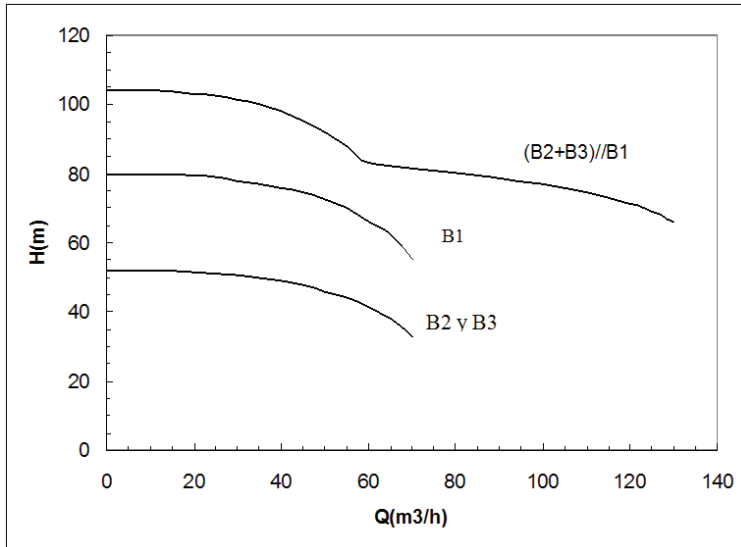


Fig. 60.4  
Curva  
característica del  
grupo de  
bombeo

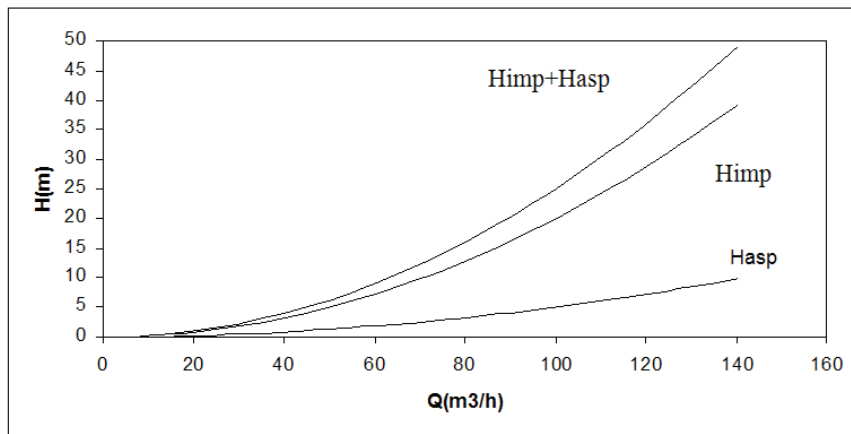


Fig. 60.5  
Pérdidas de  
carga en función  
del caudal para  
el tramo 1-4

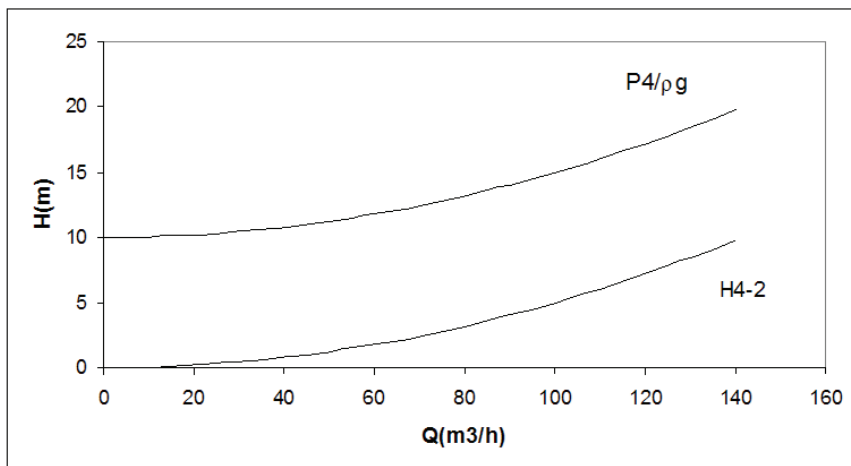


Fig. 60.7  
Representación  
gráfica de la  
ecuación 2.  
Energía por  
unidad de masa  
existente en el  
punto 4, según el  
tramo 4-2



La tercera y última de las curvas a representar es la que corresponde a la ecuación 3. En la figura 60.8 se detallan cada uno de los términos de esta ecuación, cuya suma en serie se especifica en la figura 60.9.

Fig. 60.6  
Representación  
gráfica de la  
ecuación 1

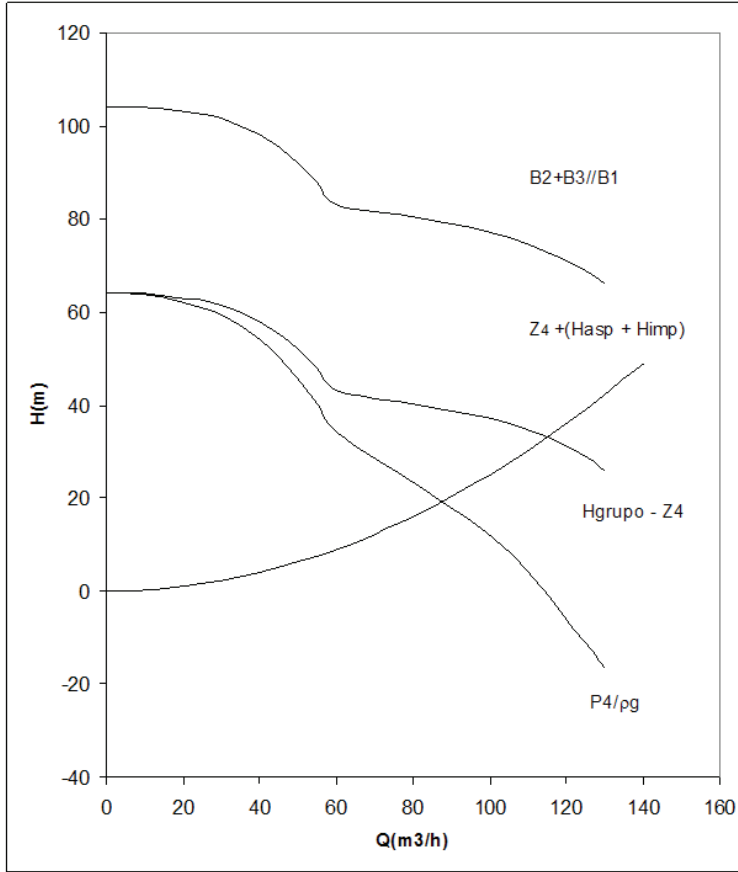
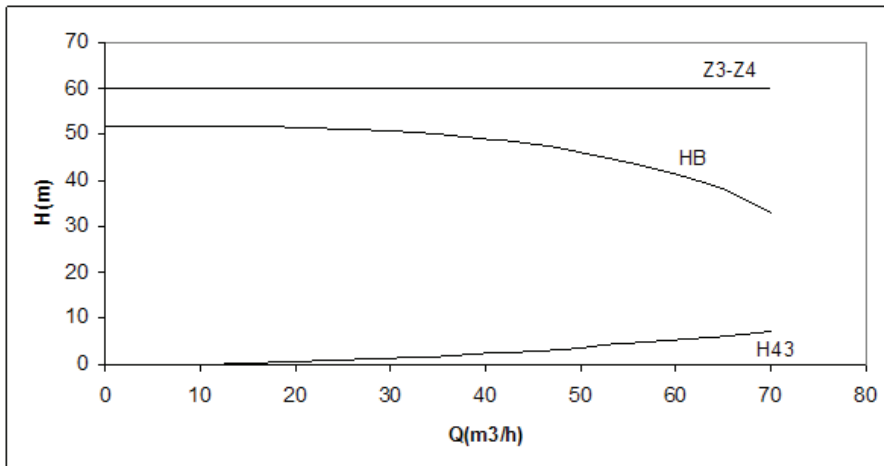


Fig 60.8  
Representación  
gráfica de los  
diversos  
términos que  
componen la  
curva 3





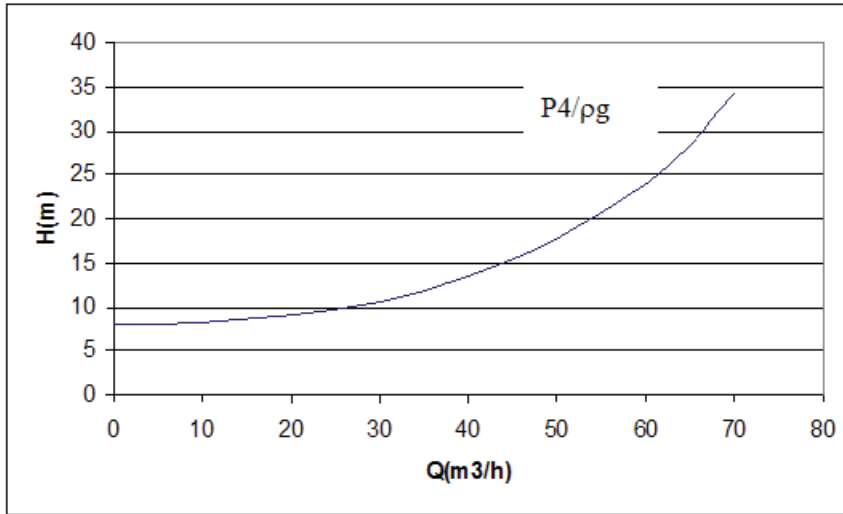


Fig. 60.9  
Energía  
resultante en el  
punto 4 según el  
tramo 4-3,  
curva 3

El punto de funcionamiento se encontrará como el punto de intersección entre las curvas resultantes de sumar las ecuaciones 2 y 3 en paralelo (curvas de las figuras 60.7 y 60.9) y la curva resultante de la ecuación 1 (figura 60.6). La representación de dichas diversas curvas y su punto de intersección se encuentra en la figura 60.10.

En el punto de intersección, se leen en la figura 60.10 las características siguientes.

$$Q_{1-4} = 100 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\frac{P_4}{\rho g} = H_4 = 12 \text{ m}$$

Al deshacer las curvas partiendo del punto de intersección, se obtienen los caudales que fluyen por cada uno de los tramos restantes (v. figura 60.10). Los valores resultantes son (obsérvese que se cumple la ecuación de continuidad):

$$Q_{4-2} = 63 \text{ m}^3/\text{h} \quad Q_{4-3} = 37 \text{ m}^3/\text{h}$$

De la figura 60.11 se obtienen los puntos de funcionamiento para las bombas 1, 2 y 3, siendo:

Bomba 1:  $H = 78 \text{ m}$ ;  $Q = 35 \text{ m}^3/\text{h}$ .

Bomba 2 = Bomba 3;  $H = 39 \text{ m}$ ;  $Q = 65 \text{ m}^3/\text{h}$

Obsérvese que en todo momento se cumple la ecuación de continuidad, además, la altura de elevación de las bombas 2 y 3 en serie es la misma que la de la bomba 1, como era de esperar.



Para hallar el punto de funcionamiento de la bomba 4, basta con entrar con el caudal circulante en el tramo 4-3, que era de  $Q_{4-3} = 37 \text{ m}^3/\text{h}$ , a la curva característica de la bomba 4 (figura 60.2), y se obtiene:

$$H_{\text{bomba 4}} = 49 \text{ m}; Q_{\text{bomba 4}} = Q_{4-3} = 37 \text{ m}^3/\text{h}.$$

El mismo resultado se habría obtenido si se hubiesen sustituido los valores del punto de funcionamiento en las ecuaciones 1, 2, 3 y 4.

## 2. Determinación de la cota del grupo de bombeo.

Se aplica Bernoulli entre el nivel del líquido en el depósito 1 y las bridas de aspiración de la bomba 1 y la bomba 2:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{\text{asp1}}}{\rho g} + z_{B1} + \frac{v_{B1}^2}{2g} + \Delta h_{1B1}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{\text{asp2}}}{\rho g} + z_{B2} + \frac{v_{B2}^2}{2g} + \Delta h_{1B2}$$

Puesto que  $z_1 = 0$ ; y  $\frac{v_1^2}{2g} = 0$ ; trabajando con presiones absolutas, se tiene:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_{\text{brida1}}}{\rho g} + z_{B1} + \frac{v_{B1}^2}{2g} + \Delta h_{1B1}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_{\text{brida2}}}{\rho g} + z_{B2} + \frac{v_{B2}^2}{2g} + \Delta h_{1B2}$$

Según la definición de la altura de aspiración neta disponible, se tiene:

$$\text{NPSHd} = \frac{p_{\text{Brida}}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} - \frac{p_{\text{vapor}}}{\rho g}$$

de donde, para cada una de las dos bombas:

$$\text{NPSHd} = \frac{p_1}{\rho g} - \left( \frac{p_{\text{vapor}}}{\rho g} + z + \Delta h_{\text{aspiración}} \right)$$

Por falta de datos, se despreciarán las pérdidas de carga desde la brida de aspiración de las bombas B1 y B2, hasta el punto de intersección con el conducto de aspiración común.

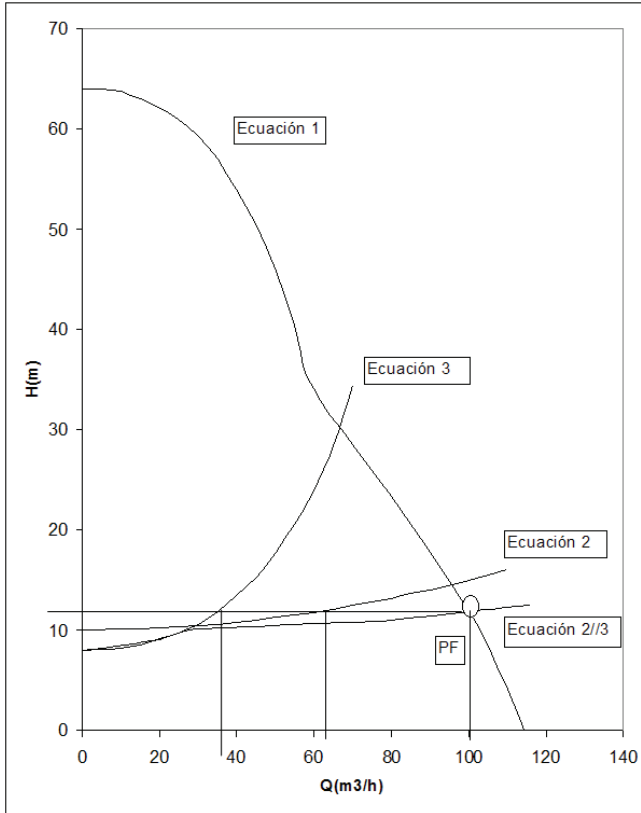


Fig. 60.10  
Representación  
de las curvas  
resultantes de  
las ecuaciones 1,  
2 y 3, y su punto  
de intersección

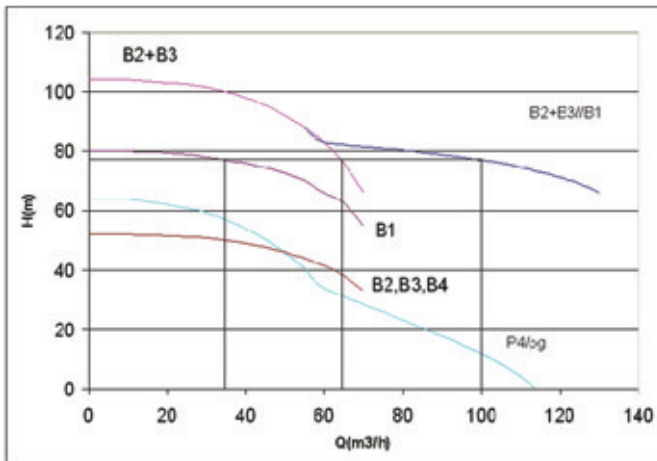


Fig. 60.11  
Caudales  
circulantes en  
cada tramo

Puesto que se conoce el caudal que circula por cada una de las bombas,  $B_1$  y  $B_2$ , cuyo valor es:



$Q_1 = 35 \text{ m}^3/\text{h}$ . Y  $Q_2 = 65 \text{ m}^3/\text{h}$ , Entrando con dichos valores en las gráficas de las bombas, (figuras 60.2 y 60.3), se obtiene:

NPSHr1: 2 m

NPSHr2: 3,5 m

La condición de no cavitación para cualquier bomba es  $\text{NPSHd} > \text{NPSHr}$ . El caso más desfavorable aparece en la bomba 2, con lo cual, si esta bomba no cavita, no cavitará la 1.

Datos necesarios:

Presión de vapor del agua a  $20^\circ\text{C} = 2.337 \text{ Pa}$

Densidad del agua =  $1.000 \text{ kg/m}^3$

Presión atmosférica, en metros de columna mercurio =  $0,76 \text{ m}$

Densidad del mercurio =  $13.600 \text{ kg/m}^3$

En consecuencia:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{0,76 * 13.600 * 9,8}{1.000 * 9,8} = 10,34 \text{ m}$$

$$\Delta h_{1B} = 6.480 Q^2 \left( "Q \text{ en } \frac{\text{m}^3}{\text{s}} " \right) = \frac{6.480}{3.600^2} Q^2 \left( "Q \text{ en } \frac{\text{m}^3}{\text{h}} " \right) = 0,0005 Q^2 = 0,0005 * 100^2 = 5 \text{ m}$$

$$\frac{p_v}{\rho g} = \frac{2.337}{1.000 * 9,8} = 0,24 \text{ m}$$

$$z = \frac{p_1}{\rho g} - \left( \frac{p_v}{\rho g} + \text{NPSHd} + \Delta h_{1asp} \right) = 10,34 - (5 + 3,5 + 0,24) = 1,6 \text{ m}$$

Si el grupo de bombeo se sitúa  $1,6 \text{ m}$  por encima del nivel del líquido del depósito inferior, la bomba 2 cavitará. Si se toma como margen de seguridad admisible  $0,5 \text{ m}$ , el grupo de bombeo debería estar situado como máximo a  $1,1 \text{ m}$  por encima del nivel del líquido del depósito 1.

3. Determine la velocidad de giro de la bomba 4 para que el caudal que circula por el tramo 1-4 disminuya en un  $2,5\%$ .

Para encontrar la velocidad de giro de la bomba 4 cuando el caudal que circula por 1-4 disminuye, se debe hallar el nuevo punto de funcionamiento del sistema. Este nuevo

punto será el punto de intersección de la curva de la ecuación 1 y el nuevo caudal ( $Q'=97,5 \text{ m}^3/\text{h}$ ). La altura correspondiente a este caudal es:  $H'=13,5 \text{ m}$ . (v. figura 60.12).

Puesto que la curva característica para el tramo 4-2 ha de ser la misma que la obtenida en el primer apartado, desplazándose horizontalmente para  $H'=13,5 \text{ m}$ , se obtiene el caudal que circula por el tramo 4-2.

$$Q'_{4-2} = 82,5 \text{ m}^3/\text{h}$$

Según la ecuación de continuidad:

$$Q_{4-1} = Q_{4-2} + Q_{4-3}$$

con lo cual, la curva característica del tramo 4-3 deberá pasar por el punto:

$$Q'_{4-3} = 15 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$H'_{4-3} = P_4/\rho g = 13,5 \text{ m}$$

Para que la curva característica del tramo 4-3 pase por este punto, será necesario que la bomba 4 tenga una altura de elevación de  $H_{B4} = 46,83 \text{ m}$  (v. figura 60.8 y ecuación 3).

$$H_{B4} = z_3 - z_4 - \frac{P_4}{\rho g} + \frac{19.440}{3.600^2} Q_{4-3}^2 = 60 - 13,5 + \frac{19.440}{3.600^2} 15^2 = 46,83 \text{ m}$$

Se debe ahora trazar una curva de afinidad que pase por el punto  $H = 46,83 \text{ m}$ ,  $Q = 15 \text{ m}^3/\text{h}$ .

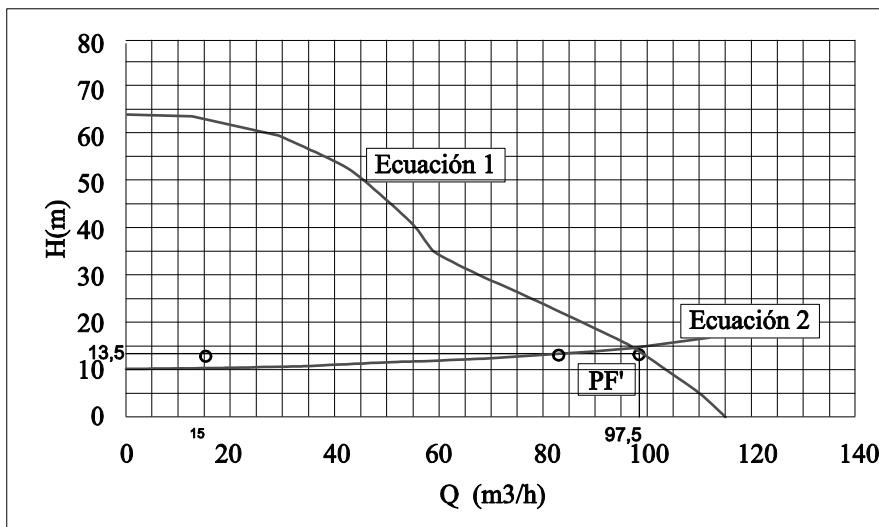


Fig. 60.12  
Nuevo punto de funcionamiento

La ecuación de la curva de afinidad será:



$$H = k Q_{4-3}^2$$

$$H = \frac{46,83}{15^2} Q_{4-3}^2 = 0,2081 Q_{4-3}^2$$

La curva de afinidad cortará en un determinado punto a la curva característica de la bomba 4. Dicho punto se detalla en la figura 60.13 y tiene por valores:  $H = 52$  m,  $Q = 16$  m<sup>3</sup>/h.

Entre los puntos  $H = 52$  m,  $Q = 16$  m<sup>3</sup>/h, y  $H = 46,83$  m,  $Q = 15$  m<sup>3</sup>/h, ambos pertenecientes a la curva de afinidad, se podrán aplicar las leyes de semejanza.

Igualando las cifras características de altura de elevación, se tiene:

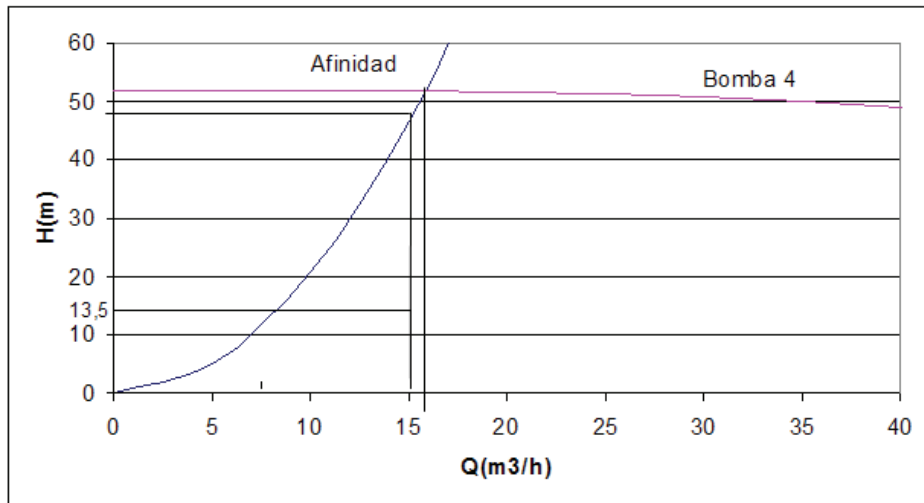
$$\frac{H_g}{\omega_4^2 D^2} = \frac{H' g}{\omega_4'^2 D^2}$$

Sabiendo que  $D=195$  mm;  $\omega_4=2.900$  rpm.

$$\omega_4'^2 = \frac{H' \omega_4^2}{H} = \frac{46,83 * 2.900^2}{52}$$

$$\omega_4' = 2.752 \text{ rpm}$$

Fig. 60.13  
Puntos entre los  
cuales se aplica  
semejanza



1.b Método alternativo para la resolución del apartado primero de este problema. Se trata de resolver directamente el sistema de ecuaciones hallado, en lugar de realizar la representación grafica. El sistema de ecuaciones que caracteriza el apartado 1 del problema constaba de las ecuaciones siguientes:

$$H_{\text{grupo}} = \frac{P_4}{\rho g} + z_4 + k_{14} Q_{14}^2 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$\frac{P_4}{\rho g} = z_2 - z_4 + k_{42} Q_{42}^2 \quad (\text{ecuación 2})$$

$$\frac{P_4}{\rho g} = z_3 - z_4 - H_{B4} + k_{43} Q_{43}^2 \quad (\text{ecuación 3})$$

$$Q_{14} = Q_{42} + Q_{43} \quad (\text{ecuación 4})$$

Obsérvese que, este sistema de ecuaciones, que define el comportamiento del fluido en el apartado 1 (sistema definido en la figura 60.1), consta de cuatro incógnitas,  $Q_{14}$ ,  $Q_{42}$ ,  $Q_{43}$  y  $P_4$ . No obstante, la energía comunicada por el grupo de bombeo constituido por las bombas 1,2,3 y denominado en la ecuación 1 como  $H_{\text{grupo}}$ , así como la energía comunicada por la bomba 4,  $H_{B4}$ , no son conocidas en forma de ecuación, sino en forma gráfica; de aquí que el apartado 1 se resolviese gráficamente.

Para resolver de nuevo este apartado en forma analítica, será necesario determinar la ecuación que caracteriza la energía comunicada al fluido por el grupo de bombeo  $H_{\text{grupo}}$  y por la bomba 4  $H_{B4}$ .

La curva altura/caudal, característica de la bomba 4 viene dada por la figura 60.2 para un diámetro de rodete de 195 mm. La interpolación de esta curva, para un caudal dado en  $[m^3/s]$ , da lugar a la ecuación siguiente:

$$H_{B4} = 52 - 5301439,4951 Q_{43}^3 + 76933,0569 Q_{43}^2 - 472,3481 Q_{43},$$

donde  $H$  [m];  $Q$   $[m^3/s]$ ;

Por otro lado, la curva altura/caudal del grupo de bombeo,  $H_{\text{grupo}}$ , representa el comportamiento de las bombas 2 y 3 en serie, y estas en paralelo con la bomba 1. La curva característica del grupo de bombeo se ha representado

en la figura 60.4, donde se le ha dado el nombre de (B2+B3)//B1. La interpolación de dicha curva cuando el caudal se mide en  $m^3/s$ , ha dado lugar a la ecuación siguiente:

$$H_{\text{grupo}} = 103,9861 + 353699107344,00 Q_{14}^6 - 33844751212,00 Q_{14}^5 + 832219232,75 Q_{14}^4 + 7983219,3945 Q_{14}^3 - 497404,4859 Q_{14}^2 + 3146,0543 Q_{14}$$

donde  $H$  [m];  $Q$   $[m^3/s]$ .

Véase, por otro lado, que cada uno de los términos de las ecuaciones 1, 2 y 3 representa la energía por unidad de peso asociada al fluido  $\left[ \frac{J}{Kg * g} \right] = [m]$ ; las constantes  $K_{14}$ ,



$K_{42}$  y  $K_{43}$  están definidas en el enunciado del problema y valen:  $K_{14} = 25920 \left[ \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5} \right]$ ,

$K_{42} = 6480 \left[ \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5} \right]$ ,  $K_{43} = 19440 \left[ \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5} \right]$ , siendo las unidades de los caudales definidos

en las ecuaciones 1, 2, 3, 4,  $H_4$  y  $H_{\text{grupo}}$  de  $\left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$ . Es decir, el sistema de unidades

utilizado para definir dichas ecuaciones es el sistema internacional.

Sustituyendo todos los términos en las cuatro ecuaciones constitutivas, se obtiene: (Obsérvese que, al igual que se ha hecho en la resolución precedente, el término que caracteriza la energía cinética en el punto 4 se ha despreciado.)

$$\begin{aligned} &103,9861 + 353699107344,0 Q_{14}^6 - 33844751212,0 Q_{14}^5 + \\ &+ 832219232,75 Q_{14}^4 + 7983219,3945 Q_{14}^3 - 497404,4859 Q_{14}^2 \\ &+ 3146,0543 Q_{14} = \frac{P_4}{\rho g} + 40 + (6480 + 25920) Q_{14}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{P_4}{\rho g} - 10 = 6480 Q_{42}^2 \quad (2)$$

$$\frac{P_4}{\rho g} - 60 + 52 - 5301439,4951 Q_{43}^3 + 76933,0569 Q_{43}^2 - 472,3481 Q_{43} = 19440 Q_{43}^2 \quad (3)$$

$$Q_{14} = Q_{42} + Q_{43} \quad (4)$$

En principio, la resolución de este sistema de ecuaciones no debería conllevar mayor problema, aunque, debido a que algunas de las variables están elevadas a la sexta potencia, otras al cubo y otras al cuadrado, aparecen ciertos problemas matemáticos que ciertos software no pueden resolver, con lo que, para la resolución de este apartado, se ha optado por reducir el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, a una ecuación con una sola incógnita, resolviendo la ecuación resultante mediante aproximaciones sucesivas.

Inicialmente, se ha sustituido la ecuación 2 en 1 y en 3, y se ha obtenido

$$\begin{aligned} &103,9861 + 353699107344,0 Q_{14}^6 - 33844751212,0 Q_{14}^5 + 832219232,75 Q_{14}^4 \\ &+ 7983219,3945 Q_{14}^3 - 497404,4859 Q_{14}^2 \\ &+ 3146,0543 Q_{14} = +10 + 6480 Q_{42}^2 + 40 + (6480 + 25920) Q_{14}^2 \end{aligned} \quad (5)$$



$$10 + 6480 Q_{42}^2 - 60 + 52 - 5301439,4951 Q_{43}^3 + 76933,0569 Q_{43}^2 - 472,3481 Q_{43} = 19440 Q_{43}^2 \quad (6)$$

Despejando  $Q_{42}$  de la ecuación 6 y sustituyéndolo en 4 y 5 se obtiene:

$$Q_{14} = \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \quad (7)$$

$$53,98 + 353699107344,0 Q_{14}^6 - 33844751212,0 Q_{14}^5 + 832219232,75 Q_{14}^4 + 7983219,3945 Q_{14}^3 - 529804,48 Q_{14}^2 + 3146,05 Q_{14} = -2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43} \quad (8)$$

Sustituyendo, por último la ecuación 7 en la 8, se obtiene una ecuación que depende únicamente de  $Q_{43}$ :

$$53,98 + 353699107344,0 \left\{ \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\}^6 - 33844751212,0 \left\{ \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\}^5 + 832219232,75 \left\{ \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\}^4 + 7983219,3945 \left\{ \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\}^3 - 529804,48 \left\{ \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\}^2 + 3146,05 \left\{ Q_{14} = \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\} - 2 + 5301439,49 Q_{43}^3 + 57493,05 Q_{43}^2 - 472,34 Q_{43} = 0$$

De la resolución de esta ecuación, se obtiene como una de las posibles soluciones:  $Q_{43}$

$$= 0,00978125 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right].$$



Sustituyendo el valor de  $Q_{43}$  en la ecuación 7, se obtiene  $Q_{14} = 0,02770013 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$ ; al sustituir estos dos valores en la ecuación 4 se obtendrá  $Q_{42} = 0,01791888 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$ . Por último, al sustituir el valor de  $Q_{42}$  en la ecuación 2, se determina  $\frac{P_4}{\rho g} = 12,08 \text{ [m]}$ .

Dando los caudales hallados en  $\left[ \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]$ , se obtiene

$$Q_{43} = 35,2125 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]; \quad Q_{14} = 99,7204 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]; \quad Q_{42} = 64,5079 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right].$$

Obsérvese que el resultado obtenido es prácticamente idéntico al hallado en el apartado inicial del problema.

## Problema 61

### Enunciado

El esquema definido en la figura 61.1 muestra una instalación de bombeo de agua. Sabiendo que las longitudes y los diámetros de cada tramo de conducto son conocidos, halle:

1. El caudal circulante en cada tramo, así como las presiones en cada uno de los nudos.
2. Realice de nuevo el problema, modificando el diámetro de los conductos para que la velocidad de circulación del fluido en los mismos sea de aproximadamente 1-2 m/s. Deben utilizarse, en todo momento, las bombas que se definen en este enunciado, entendiéndose además, que las cotas de los nudos y los depósitos no se pueden modificar.

Las longitudes de cada uno de los conductos son

$$\begin{aligned} L_{1-3} &= 200 \text{ m}, & L_{2-3} &= 250 \text{ m}, & L_{3-4} &= 50 \text{ m}, & L_{4-5} &= 200 \text{ m}, & L_{4-6} &= 300 \text{ m}, \\ L_{7-6} &= 70 \text{ m}, & L_{6-8} &= 200 \text{ m}, & L_{8-9} &= 300 \text{ m}, & L_{8-10} &= 200 \text{ m}. \end{aligned}$$

Las cotas de los diversos puntos son

$$\begin{aligned} Z_1 &= 260 \text{ m}, & Z_2 &= 250 \text{ m}, & Z_3 &= 200 \text{ m}, & Z_4 &= 180 \text{ m}, & Z_5 &= 135 \text{ m}, & Z_6 &= 140 \text{ m}, \\ Z_7 &= 80 \text{ m}, & Z_8 &= 140 \text{ m}, & Z_9 &= 160 \text{ m}, & Z_{10} &= 150 \text{ m}. \end{aligned}$$

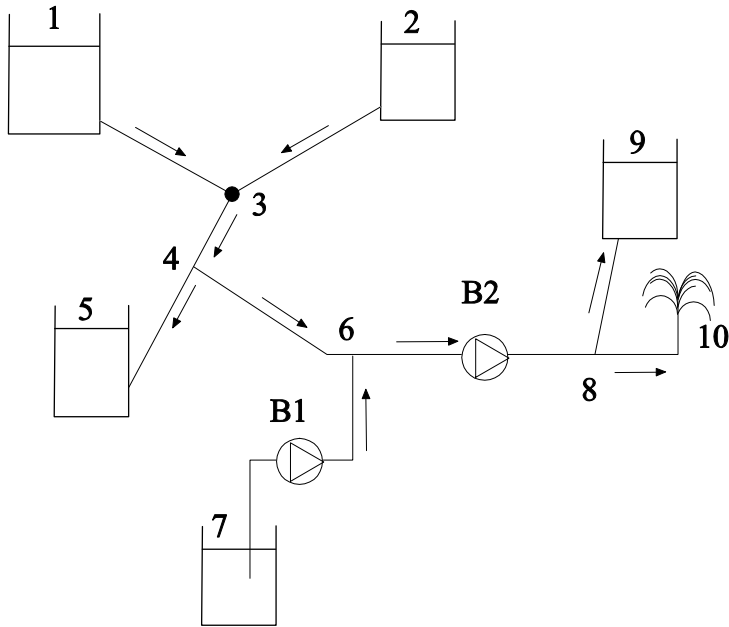


Fig. 61.1  
Esquema de la  
instalación de  
bombeo a  
estudiar

Considere que la bomba 1 está muy cercana al depósito 7 y que la bomba 2 está situada a la misma cota que los puntos 6 y 8.

Las curvas características de cada una de estas dos bombas vienen dadas por las ecuaciones

$$H_{B1} = -81973 \cdot Q_{76}^2 + 100$$

$$H_{B2} = -30116 \cdot Q_{68}^2 + 50,037$$

Considere, para el apartado 1, que el diámetro de cada uno de los tubos es de 0,1 m. La tobera de salida del punto 10, tiene un diámetro de 0,05 m. La tubería se considerará lisa en todos los tramos.

Las direcciones de los diversos flujos son conocidas y vienen dadas en la figura.

## Resolución

1. Puesto que la dirección del flujo en cada tramo se da en el enunciado del problema (Fig. 61.1), se puede definir el sistema de ecuaciones característico del conjunto de conductos del siguiente modo:

$$\text{Se denomina } E_i = \frac{P_i}{\rho g} + Z_i + \frac{V_i^2}{2g} \quad \text{y} \quad \Delta h_{ij} = \frac{1}{g} \cdot f_{ij} \cdot \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \cdot \frac{8 \cdot Q_{ij}^2}{\pi^2}, \quad \frac{V_i^2}{2g} = \frac{8 Q_i^2}{\pi^2 D^4 g}.$$



Aplicando la ecuación de la energía entre los extremos de los diversos tramos, se tiene:

Tubería 1-3.

$$E_1 = E_3 + \Delta h_{13} \Rightarrow Z_1 = \frac{P_3}{\rho g} + Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{13} \cdot \frac{L_{13}}{D_{13}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{13}^2}{\pi^2}$$

Tubería 2-3.

$$E_2 = E_3 + \Delta h_{23} \Rightarrow Z_2 = \frac{P_3}{\rho g} + Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{23} \cdot \frac{L_{23}}{D_{23}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{23}^2}{\pi^2}$$

Tubería 3-4.

$$E_3 = E_4 + \Delta h_{34} \Rightarrow \frac{P_3}{\rho g} + Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} = \frac{P_4}{\rho g} + Z_4 + \frac{V_4^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{34} \cdot \frac{L_{34}}{D_{34}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{34}^2}{\pi^2}$$

Tubería 4-5.

$$E_4 = E_5 + \Delta h_{45} \Rightarrow \frac{P_4}{\rho g} + Z_4 + \frac{V_4^2}{2g} = Z_5 + \frac{1}{g} \cdot f_{45} \cdot \frac{L_{45}}{D_{45}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{45}^2}{\pi^2}$$

Tubería 4-6.

$$E_4 = E_6 + \Delta h_{46} \Rightarrow \frac{P_4}{\rho g} + Z_4 + \frac{V_4^2}{2g} = \frac{P_6}{\rho g} + Z_6 + \frac{V_6^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{46} \cdot \frac{L_{46}}{D_{46}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{46}^2}{\pi^2}$$

Tubería 7-6.

$$\begin{aligned} E_7 + H_{B1} = E_6 + \Delta h_{76} &\Rightarrow Z_7 + (-81973 \cdot Q_{76}^2 + 100) = \\ &= \frac{P_6}{\rho g} + Z_6 + \frac{V_6^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{76} \cdot \frac{L_{76}}{D_{76}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{76}^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

Tubería 6-8.

$$\begin{aligned} E_6 + H_{B2} = E_8 + \Delta h_{68} &\Rightarrow \frac{P_6}{\rho g} + Z_6 + \frac{V_6^2}{2g} + (-30116 \cdot Q_{68}^2 + 50,037) = \\ &= \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{68} \cdot \frac{L_{68}}{D_{68}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{68}^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

Tubería 8-9.

$$E_8 = E_9 + \Delta h_{89} \Rightarrow \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} = Z_9 + \frac{1}{g} \cdot f_{89} \cdot \frac{L_{89}}{D_{89}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{89}^2}{\pi^2}$$

Tubería 8-10.

$$E_8 = E_{10} + \Delta h_{810} \Rightarrow \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} = Z_{10} + \frac{V_{10}^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{810} \cdot \frac{L_{810}}{D_{810}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{810}^2}{\pi^2}$$

De aplicar la ecuación de continuidad en cada nudo, se obtiene:

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Los factores de fricción  $f_{ij}$  en cada tramo se deben determinar mediante el diagrama de Moody, en función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa. El valor del número de Reynolds es desconocido, puesto que depende del caudal circulante en cada tramo, con lo que, para determinar los factores de fricción, se puede bien suponer que la tubería es lisa y el número de Reynolds es muy elevado, característico de flujo turbulento desarrollado, o bien dar un valor arbitrario a cada factor de fricción. En ambos casos, será necesario corregir el valor del factor de fricción una vez se haya determinado la solución del sistema de ecuaciones. Para el presente estudio, se ha elegido un valor del factor de fricción inicial de 0,02 en todos los tramos.

Obsérvese que, para el circuito objeto de estudio, se crea un sistema de 13 ecuaciones con 13 incógnitas. Las incógnitas son el caudal en cada uno de los tramos, en total 9, y la presión del fluido en cada nudo, en total 4.

Sustituyendo el valor de los parámetros conocidos en las ecuaciones determinadas, se obtiene

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 33911,578 Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 42182,695 Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + 8271,11 Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + 32257,35 Q_{45}^2 - 45$$



$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + 49626,702 Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 94379,67 Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 63200,468 Q_{68}^2 - 50,037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 48799,592 Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 45491,145 Q_{8-10}^2 + 10$$

Por supuesto, las ecuaciones de balance de flujo volumétrico permanecen invariables.

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones establecido, se obtiene como resultado:

$$Q_{13} = 0,0342 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{23} = 0,0265 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{34} = 0,0608 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{45} = 0,0412 \text{ m}^3/\text{s};$$

$$Q_{46} = 0,0196 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{76} = 0,0099 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{68} = 0,0295 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{89} = 0,0109 \text{ m}^3/\text{s};$$

$$Q_{810} = 0,0186 \text{ m}^3/\text{s};$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 20,27 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 9,73 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 30,71 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 25,77 \text{ m},$$

La velocidad de circulación y el número de Reynolds para cada uno de los tramos es

$$V_{13} = 4,35 \text{ m/s}; \quad V_{23} = 3,37 \text{ m/s}; \quad V_{34} = 7,74 \text{ m/s}; \quad V_{45} = 5,24 \text{ m/s};$$

$$V_{46} = 2,49 \text{ m/s}; \quad V_{76} = 1,26 \text{ m/s}; \quad V_{68} = 3,75 \text{ m/s}; \quad V_{89} = 1,38 \text{ m/s}; \quad V_{810} = 2,36 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 433725,86; R_{23} = 336074,13; R_{34} = 771068,2; R_{45} = 522500,16; R_{46} = 248568,03;$$

$$R_{76} = 125552,22; R_{68} = 374120,26; R_{89} = 138234,26; R_{810} = 235885,99.$$

Obsérvese que las velocidades de circulación son, en la mayoría de los casos, demasiado elevadas, con lo que sería necesario modificar el diámetro de los conductos con el fin de disminuir dichas velocidades de circulación.

Esto se va a realizar en el segundo apartado del problema.

Partiendo del valor del número de Reynolds hallado en cada tramo y considerando la tubería como lisa, se determinará utilizando el diagrama Moody, el factor de fricción, que será

$$f_{13} = 0,0137, f_{23} = 0,0142, f_{34} = 0,0122, f_{45} = 0,0132, f_{46} = 0,0151, f_{76} = 0,0175,$$

$$f_{68} = 0,0139, f_{89} = 0,017, f_{8-10} = 0,0154.$$

Sustituyendo estos nuevos valores del factor de fricción en las ecuaciones precedentes, se obtiene

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 23489,98 Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 30198,58 Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + 5045,38 Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + 21008,64 Q_{45}^2 - 45$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + 37468,17 Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 92932,23 Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 53109,71 Q_{68}^2 - 50,037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 41355,60 Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 37881,73 Q_{8-10}^2 + 10$$



Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, se obtienen unos caudales circulantes y una presión en cada nudo de

$$Q_{13} = 0,042 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0323 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0743 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{45} = 0,0515 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{46} = 0,0227 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{76} = 0,0096 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0324 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{89} = 0,0119 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0,0205 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 18,57 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 10,76 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 31,40 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 25,85 \text{ m},$$

La velocidad de circulación y el número de Reynolds para cada uno de los tramos serán ahora:

$$V_{13} = 5,34 \text{ m/s}, \quad V_{23} = 4,11 \text{ m/s}, \quad V_{34} = 9,46 \text{ m/s}, \quad V_{45} = 6,55 \text{ m/s}, \quad V_{46} = 2,89 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,22 \text{ m/s}, \quad V_{68} = 4,12 \text{ m/s}, \quad V_{89} = 1,51 \text{ m/s}, \quad V_{810} = 2,61 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 532645,79; \quad R_{23} = 409629,98; \quad R_{34} = 942275,78; \quad R_{45} = 653125,2; \quad R_{46} = 287882,37;$$

$$R_{76} = 121747,61; \quad R_{68} = 410898,18; \quad R_{89} = 150916,30; \quad R_{810} = 259981,87.$$

Mediante el diagrama de Moody, y procediendo del mismo modo que para el caso precedente, se obtiene:

$$f_{13} = 0,013; \quad f_{23} = 0,0138; \quad f_{34} = 0,0118; \quad f_{45} = 0,0126; \quad f_{46} = 0,0145; \quad f_{76} = 0,0177;$$

$$f_{68} = 0,01385; \quad f_{89} = 0,0167; \quad f_{810} = 0,015.$$

Obsérvese que el valor de los factores de fricción es ahora muy similar al obtenido en la iteración anterior. No obstante, se decide con estos nuevos valores realizar una nueva iteración, y se obtienen las siguientes constantes para las ecuaciones características:

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 22332,02 Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 29362,47 Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + 4879,96 Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + 20016,11 Q_{45}^2 - 45$$



$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + 35979,37 Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 93048,03 Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 53027,003 Q_{68}^2 - 50,037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 40611,20 Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 37220,04 Q_{8-10}^2 + 10$$

De la resolución de estas nueve ecuaciones, más las cuatro ecuaciones de continuidad, se obtiene

$$Q_{13} = 0,043 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0327 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0757 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{45} = 0,0527 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{46} = 0,0230 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{76} = 0,0095 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0325 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{89} = 0,0119 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0,0206 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 18,63 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 10,65 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 31,63 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 25,75 \text{ m}$$

Las velocidades y los números de Reynolds correspondientes a cada tramo de conducto son

$$V_{13} = 5,47 \text{ m/s}, \quad V_{23} = 4,16 \text{ m/s}, \quad V_{34} = 9,63 \text{ m/s}, \quad V_{45} = 6,71 \text{ m/s}, \quad V_{46} = 2,92 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,209 \text{ m/s}, \quad V_{68} = 4,13 \text{ m/s}, \quad V_{89} = 1,51 \text{ m/s}, \quad V_{810} = 2,62 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 545327,84; \quad R_{23} = 414702,79; \quad R_{34} = 960030,64; \quad R_{45} = 668343,65;$$

$$R_{46} = 291686,98; \quad R_{76} = 120479,407; \quad R_{68} = 412166,39;$$

$$R_{89} = 150916,30; \quad R_{810} = 261250,08.$$

Los valores de los factores de fricción, según el diagrama de Moody, serán

$$f_{13} = 0,01295; \quad f_{23} = 0,01375; \quad f_{34} = 0,0117; \quad f_{45} = 0,0125; \quad f_{46} = 0,01445;$$

$$f_{76} = 0,0177; \quad f_{68} = 0,01385; \quad f_{89} = 0,0167; \quad f_{810} = 0,015.$$



Se observa que los valores acabados de hallar son prácticamente los mismos que los obtenidos en la iteración precedente, con lo que se podrían dar como válidos los valores de los caudales y las presiones determinados en la iteración anterior. No obstante, si se procede a realizar una última iteración, se obtiene

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 22249,31 Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 29259,08 Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + 4838,60 Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + 19850,68 Q_{45}^2 - 45$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + 35855,30 Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 93048,03 Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 53027,003 Q_{68}^2 - 50,037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 40611,20 Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 37220,04 Q_{8-10}^2 + 10$$

cuya resolución da lugar a:

$$Q_{13} = 0,0432 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0328 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0759 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{45} = 0,0529 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{46} = 0,0230 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{76} = 0,0095 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0325 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{89} = 0,0119 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{8-10} = 0,0206 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 18,54 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 10,63 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 31,65 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 25,75 \text{ m},$$

Las velocidades y los números de Reynolds correspondientes a cada tramo de conducto son

$$V_{13} = 5,50 \text{ m/s}, V_{23} = 4,17 \text{ m/s}, V_{34} = 9,66 \text{ m/s}, V_{45} = 6,73 \text{ m/s}, V_{46} = 2,92 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,209 \text{ m/s}, V_{68} = 4,13 \text{ m/s}, V_{89} = 1,51 \text{ m/s}, V_{810} = 2,62 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 547864,24; R_{23} = 415971,004; R_{34} = 962567,04; R_{45} = 670880,06;$$

$$R_{46} = 291686,98; R_{76} = 120479,407; R_{68} = 412166,39; R_{89} = 150916,30;$$

$$R_{810} = 261250,08.$$

Entrando con estos valores de los números de Reynolds en el diagrama de Moody, se obtienen exactamente los mismos valores de los factores de fricción que para el caso precedente, con lo que los valores finales del caudal circulante y las presiones en cada nudo son los últimos hallados.

Cabe destacar que las velocidades de circulación del agua para muchos de los tramos son demasiado elevadas, por lo que sería interesante modificar los diámetros de los conductos con el fin de disminuir dicha velocidad.

2A. En el primer apartado, se ha observado que las velocidades de circulación en muchos de los tramos es demasiado elevada. En el presente apartado se redefinirá el diámetro de cada tramo con el fin de que la velocidad de circulación sea de alrededor de 1-2 m/s.

Partiendo de los flujos volumétricos hallados en el apartado 1, y aplicando la ecuación de continuidad en cada tramo, se obtendrá el diámetro del conducto más apropiado. El diámetro se aproximará al valor normalizado más próximo.

A priori, la ecuación para hallar el diámetro será  $D = \sqrt{\frac{Q}{V} \frac{4}{\pi}}$ , siendo la velocidad considerada, de 1m/s.

Caudal (m <sup>3</sup> /s)	Q <sub>13</sub> = 0,0432	Q <sub>23</sub> = 0,0328	Q <sub>34</sub> = 0,0759	Q <sub>45</sub> = 0,0529	Q <sub>46</sub> = 0,0230	Q <sub>76</sub> = 0,095	Q <sub>68</sub> = 0,0325	Q <sub>89</sub> = 0,0119	Q <sub>810</sub> = 0,0206
Diámetro (m)	0,234	0,204	0,310	0,259	0,171	0,109	0,203	0,123	0,161
Diámetro normalizado (m)	0,25	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1	0,2	0,15	0,15
Factor de fricción, f	0,0129	0,0137	0,0117	0,0125	0,0144	0,0177	0,0138	0,0167	0,015



Sustituyendo en las ecuaciones que caracterizan el flujo en cada tramo, los valores de los diámetros normalizados, y utilizando para empezar el valor del factor de fricción obtenido en la última iteración del primer apartado del problema, se obtiene:

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2 0,25^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,01295 \frac{200}{0,25^5} \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho g} - 60 + 240,53 Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2 0,2^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,01375 \frac{250}{0,2^5} \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho g} - 50 + 940,19 Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,0117 \frac{50}{0,3^5} \frac{8 Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} - 20 + 19,91 Q_{34}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2 0,25^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0125 \frac{200}{0,25^5} \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho g} - 45 + 190,56 Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,01445 \frac{300}{0,15^5} \frac{8 Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 4721,68 Q_{46}^2$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81973 Q_{76}^2 + \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2 0,1^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0177 \frac{70}{0,1^5} \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 93048,03 Q_{76}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30116 Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,01385 \frac{200}{0,2^5} \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 50,037 = \\ &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 50,037 + 30831,96 Q_{68}^2 \end{aligned}$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 - \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2 0,15^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0167 \frac{300}{0,15^5} \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 + 5293,51 Q_{89}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 - \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,15^4 9,8} + \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,05^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,015 \frac{200}{0,15^5} \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2} = \\ &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 + 16338,01 Q_{810}^2 \end{aligned}$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Sistema de ecuaciones que, conjuntamente con las cuatro ecuaciones de continuidad aplicadas a cada nudo, da lugar a un sistema de 13 ecuaciones con 13 incógnitas. De su resolución se obtiene

$$Q_{13} = 0,4565 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,2069 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,6354 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{45} = 0,5830 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{46} = 0,0663 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = -0,0034 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0346 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{89} = 0,0779 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = -0,0508 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 9,73 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 19,81 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 39,04 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 52,12 \text{ m}$$

Obsérvese que dos de los caudales son negativos. Esto implica que los sentidos del flujo en estos conductos son contrarios a los establecidos inicialmente. En definitiva, ninguno de los valores acabados de hallar puede considerarse válido. Se observa, asimismo, que uno de los caudales que es negativo es el del conducto 7-6, con lo que parece que la bomba 1 no suministre suficiente altura de elevación. Se observa, por otro lado, que en la parte izquierda del circuito (tuberías 1-3; 2-3; 3-4; 4-5 y 4-6), al aumentar el diámetro de los conductos parece que aumenten muchísimo los caudales circulantes. Este hecho es el que da lugar a que ahora la presión en el punto 6 sea considerablemente mayor que en el caso precedente y, por consiguiente, que la bomba B1 no suministre suficiente energía al fluido como para elevarlo del punto 7 al punto 6. Una manera de solucionar este problema es modificando la bomba B1 y tal vez la B2, puesto que el caudal 8-10 también es negativo, para que den mayor altura de elevación. Aunque en el enunciado se establece que no se deben modificar las bombas existentes, se procede a modificar las mismas con el fin de poder seguir por el camino indicado.

Eligiendo una característica para las bombas de  $H_{B1} = 120 - 81973 Q^2$ ;

$H_{B2} = 120 - 30116 Q^2$ ; las ecuaciones para los tramos 7-6 y 6-8 tomarán la forma:

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81973 Q_{76}^2 + \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2 0,1^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0177 \frac{70}{0,1^5} \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho g} - 60 + 93048,03 Q_{76}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30116 Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,01385 \frac{200}{0,2^5} \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 50,037 = \\ &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 120 + 30831,96 Q_{68}^2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de los siete conductos restantes, así como las de continuidad en cada nudo, se mantienen invariables. Resolviendo el nuevo sistema de ecuaciones, se obtiene



$$Q_{13} = 0,4499 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,2029 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,6528 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{45} = 0,5966 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{46} = 0,0563 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = 0,0114 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{68} = 0,0677 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{89} = 0,0357 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0,0320 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 11,30 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 22,81 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 47,87 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 26,73 \text{ m}.$$

Para los diámetros de los conductos establecidos en este segundo apartado, se obtienen unas velocidades de circulación, números de Reynolds y factores de fricción de

$$V_{13} = 9,16 \text{ m/s}, \quad V_{23} = 6,45 \text{ m/s}, \quad V_{34} = 9,23 \text{ m/s}, \quad V_{45} = 12,15 \text{ m/s}, \quad V_{46} = 3,18 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,45 \text{ m/s}, \quad V_{68} = 2,15 \text{ m/s}, \quad V_{89} = 2,02 \text{ m/s}, \quad V_{810} = 1,81 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 2282260,42; \quad R_{23} = 1286593,24; \quad R_{34} = 2759612,51; \quad R_{45} = 3026442,69;$$

$$R_{46} = 475999,33; \quad R_{76} = 144575,28; \quad R_{68} = 429287,14;$$

$$R_{89} = 301832,61; \quad R_{810} = 270550,24.$$

$$f_{13} = 0,0102; \quad f_{23} = 0,0112; \quad f_{34} = 0,0096; \quad f_{45} = 0,0094; \quad f_{46} = 0,0132;$$

$$f_{76} = 0,0168; \quad f_{68} = 0,0135; \quad f_{89} = 0,0145; \quad f_{810} = 0,0148.$$

El diámetro de los conductos para la siguiente iteración se determinará con los nuevos caudales y utilizando la ecuación  $D = \sqrt{\frac{Q}{V} \frac{4}{\pi}}$ . De nuevo, se considerará una velocidad de circulación de 1m/s.

Caudal (m <sup>3</sup> /s)	Q <sub>13</sub> = 0,4499	Q <sub>23</sub> = 0,2029	Q <sub>34</sub> = 0,6528	Q <sub>45</sub> = 0,5966	Q <sub>46</sub> = 0,0563	Q <sub>76</sub> = 0,0114	Q <sub>68</sub> = 0,0677	Q <sub>89</sub> = 0,0357	Q <sub>810</sub> = 0,0320
Diámetro (m)	0,756	0,508	0,911	0,871	0,267	0,120	0,2935	0,213	0,201
Diámetro normalizado (m)	0,75	0,5	1	0,9	0,25	0,1	0,3	0,2	0,2

Con estos nuevos diámetros y utilizando el nuevo factor de fricción acabado de hallar, se obtiene el siguiente colectivo de ecuaciones: (Véase que se mantiene la nueva configuración para las bombas B1 y B2.)

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2 0,75^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0102 \frac{200}{0,75^5} \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho g} - 60 + 0,97243 Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2 0,5^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0112 \frac{250}{0,5^5} \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho g} - 50 + 8,734 Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,0096 \frac{50}{1^5} \frac{8 Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} - 20 + 0,039 Q_{34}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2 0,9^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0094 \frac{200}{0,9^5} \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho g} - 45 + 0,137 Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,0132 \frac{300}{0,25^5} \frac{8 Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 335,39 Q_{46}^2$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81973 Q_{76}^2 + \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2 0,1^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0168 \frac{70}{0,1^5} \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_6}{\rho g} - 60 + 92526,94 Q_{76}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30116 Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,0135 \frac{200}{0,3^5} \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 120 = \\ &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 120 + 30207,90 Q_{68}^2 \end{aligned}$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 - \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2 0,2^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0145 \frac{300}{0,2^5} \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 + 1072,66 Q_{89}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 - \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,2^4 9,8} + \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,05^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0148 \frac{200}{0,2^5} \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2} = \\ &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 + 13947,17 Q_{810}^2 \end{aligned}$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Para este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$Q_{13} = 10,89 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{23} = -3,47 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{34} = 7,41 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{45} = 7,38 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{46} = 0,0305 \text{ m}^3/\text{s},$$



$$Q_{76} = 0,0250 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{68} = 0,0555 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{89} = 0,0926 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{810} = -0,0371 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = -55,37 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = -37,52 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 2,16 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 29,19 \text{ m}.$$

Véase que, de nuevo, se tienen ciertos caudales y presiones negativos, lo cual invalida este resultado. No obstante, se ha de denotar que las presiones en los puntos 3 y 4 son negativas y también lo es el caudal 2-3, con lo que cabe pensar que alguna modificación de diámetros alrededor de los puntos 3 y 4 es necesaria. Cabe, asimismo destacar que los caudales son muy grandes. Si se disminuye el diámetro de los conductos 1-3, 3-4 y 4-5 a 0,6 m, 0,9 m y 0,6 m, respectivamente, se observa que tanto las presiones en los puntos 3 y 4 como el caudal en el tramo 2-3 pasan a ser positivos. Por otro lado, y puesto que el caudal en el tramo 8-10 es asimismo negativo, se concluye que se deberá reducir el diámetro del conducto 8-9 hasta un valor de 0,12 m.

La resolución del sistema de ecuaciones con estos nuevos valores da lugar a

$$Q_{13} = 4,551 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 2,348 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 6,900 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{45} = 6,836 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{46} = 0,0639 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = 0,0054 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0693 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{89} = 0,0294 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0,0399 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 1,83 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 18,63 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 57,26 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 32,17 \text{ m},$$

Véase que algunos de los caudales son enormes. Recuérdese, además, que las bombas B1 y B2 han sido modificadas. Las velocidades de circulación para cada tramo serán

$$V_{13} = 16,09 \text{ m/s}, \quad V_{23} = 11,95 \text{ m/s}, \quad V_{34} = 10,84 \text{ m/s}, \quad V_{45} = 24,17 \text{ m/s}, \quad V_{46} = 1,30 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 0,68 \text{ m/s}, \quad V_{68} = 0,98 \text{ m/s}, \quad V_{89} = 2,59 \text{ m/s}, \quad V_{810} = 1,27 \text{ m/s}.$$

Si, para estos caudales acabados de hallar, se quisiese determinar el diámetro de conducto para que la velocidad de circulación sea de 1 m/s, se obtendría:

Caudal (m <sup>3</sup> /s)	Q <sub>13</sub> = 4,55	Q <sub>23</sub> = 2,34	Q <sub>34</sub> = 6,90	Q <sub>45</sub> = 6,83	Q <sub>46</sub> = 0,0639	Q <sub>76</sub> = 0,0054	Q <sub>68</sub> = 0,0693	Q <sub>89</sub> = 0,0294	Q <sub>810</sub> = 0,0399
Diámetro (m)	2,4	1,72	2,96	2,95	0,28	0,08	0,29	0,19	0,225
Diámetro normalizado (m)	2,4	1,7	3	3	0,25	0,1	0,3	0,2	0,2

Se observa que, cada vez las velocidades van aumentando. Los diámetros de los conductos, especialmente los que unen los depósitos 1, 2 y 5 también aumentan. Ello da lugar a diámetros muy grandes, especialmente para las bombas de que se dispone.



Recuérdese, por otro lado, que las características de las bombas han sido modificadas y, según el enunciado del problema, esto no estaba permitido. Así pues, esta manera de proceder no parece acertada. Se observa, por otro lado, que existe una cierta independencia entre los flujos que circulan por los conductos que unen los tres depósitos de la izquierda y los conductos situados en la parte derecha del punto 6. De hecho, para estos últimos se observa ya una cierta estabilidad.

2B. A partir de este punto, y con el fin de obtener resultados que estén en concordancia con las directrices del problema, se procederá a modificar los diámetros de los conductos mediante el sistema de prueba-error. Se partirá de los datos obtenidos en el primer apartado.

Se empezará, reduciendo, de manera considerable, el diámetro de los conductos 1-3, 2-3, 3-4, 4-5 y 5-6, respecto a los dados en el apartado 1 del problema, y manteniendo constante o disminuyendo ligeramente el diámetro del resto de los conductos. Estos primeros valores se han deducido mediante el sistema de prueba y error. Se partirá, asimismo, de los factores de fricción hallados en el apartado 1 de este problema, es decir

$$f_{13} = 0,01295; f_{23} = 0,01375; f_{34} = 0,0117; f_{45} = 0,0125; f_{46} = 0,01445; f_{76} = 0,0177;$$

$$f_{68} = 0,01385; f_{89} = 0,0167; f_{810} = 0,015.$$

Los diámetros elegidos son

$$D_{13} = 0,015 \text{ m}; \quad D_{23} = 0,015 \text{ m}; \quad D_{34} = 0,02 \text{ m}; \quad D_{45} = 0,01 \text{ m};$$

$$D_{46} = 0,015 \text{ m}; \quad D_{76} = 0,1 \text{ m}; \quad D_{68} = 0,08 \text{ m}; \quad D_{89} = 0,07 \text{ m};$$

$$D_{810} = 0,07 \text{ m}.$$

El sistema de ecuaciones que se genera con estos datos es

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2 0,015^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,01295 \frac{200}{0,015^5} \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho g} - 60 + 283736873,5 Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2 0,015^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,01375 \frac{250}{0,015^5} \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho g} - 50 + 376046662,5 Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,0117 \frac{50}{0,02^5} \frac{8 Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} - 20 + 15120642,12 Q_{34}^2$$



$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2 0,01^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0125 \frac{200}{0,01^5} \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho g} - 45 + 2059508998 Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,01445 \frac{300}{0,015^5} \frac{8 Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 472168655,2 Q_{46}^2$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81973 Q_{76}^2 + \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2 0,1^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0177 \frac{70}{0,1^5} \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 93048,03 Q_{76}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30116 Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,01385 \frac{200}{0,08^5} \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 50,037 = \\ &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 50,037 + 100034,83 Q_{68}^2 \end{aligned}$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 - \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2 0,07^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0167 \frac{300}{0,07^5} \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 + 243109,03 Q_{89}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 - \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,07^4 9,8} + \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,05^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,015 \frac{200}{0,07^5} \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2} = \\ &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 + 157425,99 Q_{810}^2 \end{aligned}$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones da lugar a

$$Q_{13} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0006 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{45} = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{46} = 0,0004 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = 0,0174 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0178 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{89} = 0,0065 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0,0113 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 26,87 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 41,62 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 11,80 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 30,17 \text{ m}.$$

Las velocidades de circulación para cada tramo serán

$$V_{13} = 1,69 \text{ m/s}, V_{23} = 1,13 \text{ m/s}, V_{34} = 1,9 \text{ m/s}, V_{45} = 2,54 \text{ m/s}, V_{46} = 2,26 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 2,21 \text{ m/s}, V_{68} = 3,54 \text{ m/s}, V_{89} = 1,68 \text{ m/s}, V_{810} = 2,93 \text{ m/s}.$$

Obsérvese que varios de los conductos ya tienen velocidades por debajo de los 2 m/s, aunque otros están aún por encima de este nivel. Los valores del número de Reynolds y del factor de fricción para cada conducto serán de:

$$R_{13} = 25364,08; R_{23} = 16909,39; R_{34} = 38046,12; R_{45} = 25364,08; R_{46} = 33818,78;$$

$$R_{76} = 220667,54; R_{68} = 282175,45; R_{89} = 117761,82; R_{810} = 204724,405.$$

$$f_{13} = 0,0245; f_{23} = 0,0276; f_{34} = 0,022; f_{45} = 0,0245; f_{46} = 0,023; f_{76} = 0,0156;$$

$$f_{68} = 0,0147; f_{89} = 0,018; f_{810} = 0,0158.$$

Estos factores de fricción son los que se van a utilizar para la siguiente iteración. Se va a proceder a modificar algunos diámetros mediante el sistema de prueba y error, con el fin de conseguir que las velocidades de circulación sean en, todos los conductos, menores a 2 m/s. Puesto que las velocidades de circulación de los conductos 7-6 y 6-8 son demasiado grandes, se procederá a aumentar estos diámetros. La velocidad en el tramo 8-10 es también grande. En este caso, lo que se va a hacer es aumentar el diámetro del conducto 8-9, dado que está en paralelo con el 8-10. Se disminuirá asimismo el diámetro del tramo 8-10. Se eligen los siguientes diámetros:

$$D_{13} = 0,015 \text{ m}; D_{23} = 0,015 \text{ m}; D_{34} = 0,02 \text{ m}; D_{45} = 0,01 \text{ m}; D_{46} = 0,015 \text{ m};$$

$$D_{76} = 0,14 \text{ m}; D_{68} = 0,12 \text{ m}; D_{89} = 0,09 \text{ m}; D_{810} = 0,05 \text{ m}.$$

El sistema de ecuaciones para este caso queda del modo siguiente:

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2 0,015^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0245 \frac{200}{0,015^5} \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho g} - 60 + 535342316,1 Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2 0,015^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0276 \frac{250}{0,015^5} \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho g} - 50 + 753182526,1 Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,022 \frac{50}{0,02^5} \frac{8 Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} - 20 + 28431976,63 Q_{34}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2 0,01^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0245 \frac{200}{0,01^5} \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho g} - 45 + 4044577912 Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,023 \frac{300}{0,015^5} \frac{8 Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 751548724,5 Q_{46}^2$$



$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81973 Q_{76}^2 + \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2 0,14^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0156 \frac{70}{0,14^5} \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 83867,67 Q_{76}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30116 Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,0147 \frac{200}{0,12^5} \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 50,037 = \\ &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 50,037 + 39888,49 Q_{68}^2 \end{aligned}$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 - \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2 0,1^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,018 \frac{300}{0,1^5} \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 + 43836,93 Q_{89}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 - \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,05^4 9,8} + \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,05^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0158 \frac{200}{0,05^5} \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2} = \\ &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 + 836375,7 Q_{810}^2 \end{aligned}$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

de donde se obtienen unos caudales y velocidades de circulación de

$$Q_{13} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0005 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{45} = 0,0001 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{46} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = 0,0215 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0218 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{89} = 0,0167 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{810} = 0,0052 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 22,24 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 36,28 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 1,17 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 32,19 \text{ m}.$$

$$V_{13} = 1,69 \text{ m/s}, \quad V_{23} = 1,13 \text{ m/s}, \quad V_{34} = 1,59 \text{ m/s}, \quad V_{45} = 1,27 \text{ m/s}, \quad V_{46} = 1,69 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,39 \text{ m/s}, \quad V_{68} = 1,92 \text{ m/s}, \quad V_{89} = 2,12 \text{ m/s}, \quad V_{810} = 2,64 \text{ m/s}.$$

Obsérvese que ahora en casi todos los conductos se tiene una velocidad de circulación menor o igual a 2 m/s, con lo que esta solución ya se podría considerar válida. Si así lo hacemos, será ahora únicamente necesario calcular los nuevos factores de fricción con

los últimos datos obtenidos, manteniendo los últimos diámetros utilizados. Los nuevos números de Reynolds y factores de fricción para cada tramo serán

$$R_{13} = 25364,08; R_{23} = 16909,39; R_{34} = 31705,1; R_{45} = 12682,04; R_{46} = 25364,08;$$

$$R_{76} = 194759,94; R_{68} = 230390,44; R_{89} = 211790,11; R_{810} = 131893,24.$$

$$f_{13} = 0,0245; f_{23} = 0,0276; f_{34} = 0,0234; f_{45} = 0,03; f_{46} = 0,0245; f_{76} = 0,0158;$$

$$f_{68} = 0,0153; f_{89} = 0,0157; f_{810} = 0,017.$$

Sustituyendo los valores del factor de fricción en el sistema de ecuaciones precedente y resolviéndolo, se obtiene

$$Q_{13} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0004 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{45} = 0,0001 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{46} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = 0,0217 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,022 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{89} = 0,0171 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0,0049 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 24,45 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 38,54 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 0,613 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 31,18 \text{ m}.$$

Las velocidades de circulación, los números de Reynolds y los factores de fricción con estos nuevos datos son

$$V_{13} = 1,69 \text{ m/s}, \quad V_{23} = 1,13 \text{ m/s}, \quad V_{34} = 1,27 \text{ m/s}, \quad V_{45} = 1,27 \text{ m/s}, \quad V_{46} = 1,69 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,40 \text{ m/s}, \quad V_{68} = 1,94 \text{ m/s}, \quad V_{89} = 2,17 \text{ m/s}, \quad V_{810} = 2,49 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 25364,08; R_{23} = 16909,39; R_{34} = 25364,08; R_{45} = 12682,04; R_{46} = 25364,08;$$

$$R_{76} = 196571,66; R_{68} = 232504,11; R_{89} = 216862,93; R_{810} = 124284,01.$$

$$f_{13} = 0,0245; f_{23} = 0,0276; f_{34} = 0,0247; f_{45} = 0,03; f_{46} = 0,0245; f_{76} = 0,0158;$$

$$f_{68} = 0,0153; f_{89} = 0,0157; f_{810} = 0,0169.$$

Obsérvese que los factores de fricción son prácticamente los mismos que los obtenidos en el apartado anterior, exceptuando, tal vez, el de la tubería 3-4, factor que en realidad ha variado debido a la poca precisión con la que se está calculando este caudal, más que por una variación real del mismo. Así pues, se puede concluir que los últimos caudales, las presiones en los nudos, las velocidades de circulación y los factores de fricción hallados son los definitivos.

Es necesario remarcar que, con el fin de alcanzar los objetivos establecidos en el enunciado del problema, se han tenido que reducir muchísimo los diámetros de los



conductos situados a la izquierda del punto 6. El flujo en estos conductos es debido a la acción gravitatoria y, ya se observó en el apartado 2A, que en dichos conductos, el aumento del diámetro daba lugar a velocidades mayores a las requeridas. No obstante, los diámetros obtenidos para estos conductos, en el presente apartado, son demasiado pequeños y sería poco apropiado utilizarlos en realidad. Lo lógico sería utilizar diámetros mayores y regular el caudal circulante en cada tramo, mediante válvulas de regulación situadas en el extremo inferior de cada tramo. Es también relevante comentar que las bombas proporcionadas en el enunciado dan una altura de elevación pequeña, con lo que la utilización de bombas que proporcionasen mayor altura de elevación, daría lugar a poder trabajar con mayores caudales y, consecuentemente, con mayores diámetros, incluso para los conductos situados a la izquierda del punto 6.

Cabe señalar que existen programas de simulación capaces de resolver este problema, aunque la base matemática de resolución es la misma que la que aquí se ha detallado, es decir, es necesario resolver el sistema de ecuaciones que se genera. En el presente problema, se ha resuelto el sistema de ecuaciones mediante MATLAB.



→ 11



## Capa límite - Flujo externo

### Problema 62

#### Enunciado

Si se conoce que la superficie mojada de una embarcación es de  $70 \text{ m}^2$ , su longitud es de  $15 \text{ m}$  y se desplaza a una velocidad de  $20 \text{ Km/h}$ , halle:

1. El espesor de la capa límite a una distancia de  $3 \text{ m}$  de la proa. El valor del coeficiente de resistencia en la zona turbulenta de la placa. ¿Cuál es la fuerza de fricción que se opone al movimiento del barco?

Datos:  $v_{\text{agua}} = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ; densidad =  $1.150 \text{ kg/m}^3$

2. Al navegar, el barco se encuentra con una mancha de petróleo. Si se conoce que en aquel instante las velas comunican al barco una fuerza de  $5.000 \text{ N}$  en la dirección del movimiento, determine a qué velocidad se podrá mover dicho velero a través de la mancha. Considere que la superficie mojada no varía y que toda ella está, en todo momento, en contacto con el petróleo.

Datos:  $v_{\text{petróleo}} = 1,076 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ; densidad =  $860 \text{ kg/m}^3$

#### Resolución

1. Se asimilará la superficie mojada del barco a una placa plana de longitud  $15 \text{ m}$ . Se halla inicialmente el valor del número de Reynolds a una distancia de  $3 \text{ m}$  de la proa.

$$V = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5,56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$Re_{3m} = \frac{V \cdot X}{\nu} = \frac{5,56 \frac{m}{s} \times 3 m}{1,3 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}} = 1.282.051,3;$$

$$X_{tr} = \frac{500000 \cdot \nu}{V} = \frac{500000 \cdot 1,3 \cdot 10^{-5}}{5,56} = 1,1691 m$$

Como  $Re_{3m} > 500.000$  en este punto se tiene capa límite turbulenta, las expresiones para el espesor de la capa límite y el coeficiente de resistencia serán:

$$\delta = 0,37 \cdot Re_x^{-\frac{1}{5}}$$

donde  $\delta$  es el espesor de la capa límite a una distancia  $x$  del inicio de la placa, teniendo en cuenta que el valor mínimo que puede tener la “X” es la X de transición,  $X_{tr}$ .

$$C_D = 0,072 \cdot Re_L^{-\frac{1}{5}}$$

donde  $C_D$  es el coeficiente de resistencia para la zona turbulenta (y  $Re_L$  es el valor del número de Reynolds en el extremo final de la placa).

$$C_D = \frac{0,074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1,740}{Re_L}$$

donde  $C_D$  es el coeficiente de resistencia para placa plana con zona turbulenta y zona laminar (función de  $Re_L$ ).

Procediendo al cálculo:

$$Re_L = \frac{V \cdot x}{\nu} = \frac{5,56 \frac{m}{s} \cdot 15 m}{1,3 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}} = 6.410.256,4$$

$$\delta_3 = 0,37 \cdot 1.282.051,3^{-\frac{1}{5}} \cdot 3 m = 0,066 m$$

$$C_{D_{Turbulento}} = 0,072 \cdot 6.410.256,4^{-\frac{1}{5}} = 3,133 \times 10^{-3}$$

$$C_{D_{Turbulento + laminar}} = \frac{0,074}{6.410.256,4^{\frac{1}{5}}} - \frac{1,740}{6.410.256,4} = 2,949 \cdot 10^{-3}$$

La fuerza de fricción total que se opone al movimiento del barco es:



$$F = C_D S \rho \frac{V_\infty^2}{2} = 2,949 \cdot 10^{-3} \cdot 70 \text{ m}^2 \cdot 1.150 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{5,56^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2} = 3.662,96 \text{ N}$$

2. El valor del número de Reynolds en el extremo final del barco cuando navega en petróleo con una velocidad  $V$  es:

$$\text{Re}_L = \frac{V \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15 \text{ m}}{1,076 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 13.940,52 V \quad (\text{A})$$

Considerando a priori que a lo largo de la longitud del barco tendremos únicamente capa límite laminar:

$$C_{D_{\text{Laminar}}} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}} = \frac{1,328}{\sqrt{13.940,52 \times V}}$$

Se impone la condición de que la fuerza de fricción que ha de vencer el barco es de 5.000 N:

$$F = C_D \times S \times \rho \times \frac{V_\infty^2}{2}$$

$$5.000 \text{ N} = \frac{1,328}{\sqrt{13.940,52 \times V}} \cdot 70 \text{ m}^2 \cdot 860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{V^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2}$$

obteniendo el valor de la velocidad:  $V = 3,79 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Se determina el número de Reynolds en el extremo de la placa con el fin de corroborar la hipótesis de régimen laminar en todo el dominio.

$$\text{Re}_L = \frac{3,79 \cdot 15}{1,076 \cdot 10^{-3}} = 52.834,5$$

## Problema 63

### Enunciado

Se quiere determinar la fuerza que un aeroplano opone al movimiento, debido a la fricción entre fluido y superficie. Para ello, y únicamente como primera aproximación, se va a considerar la superficie del aeroplano como una placa plana. Dicha placa tendrá 18 metros de ancho por 70 metros de largo (supóngase que el fluido pasa por un lado de la placa).



Si la velocidad de crucero del avión es de 750 Km/h; determine:

La fuerza que se opone al movimiento cuando dicho aeroplano está volando a 500 metros de altura, donde  $\mu = 1,7737 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/m s}^2$  y  $\rho = 1,1673 \text{ Kg/m}^3$ , y cuando vuela a 20.000 metros donde:  $\mu = 1,4216 \cdot 10^{-5}$  y  $\rho = 0,08891 \text{ Kg/m}^3$ .

Determine en ambos casos el punto de transición entre la capa límite laminar y turbulenta, así como el espesor de la capa límite en este punto.

### Resolución

1. Se calculan las fuerzas que se oponen al movimiento a las alturas de 500 y 20.000 metros

a) Vuelo a 500 metros de altura

El objetivo del ejercicio es calcular la fuerza que se opone al movimiento del avión. Suponiendo el avión como una placa plana (tal como dice el enunciado), el valor de la fuerza viene dada por la expresión siguiente:

$$F_D = C_D \cdot B \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{V_\infty^2}{2}$$

donde:

$C_D$  : coeficiente de resistencia o de arrastre

$B$  : anchura de la placa

$L$  : longitud de la placa

$\rho$  : densidad del fluido en contacto con la placa.

$V_\infty$  : velocidad de la placa

Antes de calcular el coeficiente de resistencia, se determinará que zona de la placa se encuentra en régimen laminar y en régimen turbulento. Para ello, se utiliza:

$$500.000 = \frac{V_\infty \cdot X_{tr}}{v}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:  $X_{tr} = 0,0364 \text{ m}$



Se observa que la mayor parte de la placa está sujeta a régimen turbulento; de todas maneras, y con el fin de trabajar con la mayor precisión, se va a utilizar la ecuación del coeficiente de resistencia, que considera tanto la zona laminar como la turbulenta.

$$C_D = \frac{0,072}{(\text{Re}_L)^{0,2}} - \frac{1,700}{\text{Re}_L}$$

de donde:

$$750 \text{ Km h}^{-1} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \cdot \frac{1.000 \text{ m}}{1 \text{ Km}} = 208,333 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{Re}_L = \frac{\rho \cdot v_\infty \cdot L}{\mu} = \frac{1,1673 \cdot 208,333 \cdot 70}{1,17737 \cdot 10^{-5}} = 959.750.677,285$$

El coeficiente de resistencia quedará:

$$C_D = \frac{0,072}{(959.750.677,285)^{0,2}} - \frac{1,700}{959.750.677,285} = 1,148 \cdot 10^{-3}$$

Siendo la fuerza:

$$F(h = 500 \text{ m}) = 1,148 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 70 \cdot 1,1673 \cdot \frac{(208,333)^2}{2}$$

$$F(h = 500 \text{ m}) = 36.666,618 \text{ N}$$

b) Vuelo a 20.000 metros de altura

De la misma manera que en el apartado anterior, se calculará el  $\text{Re}_L$  para poder determinar el coeficiente de resistencia,  $C_D$ .

$$\text{Re}_L = \frac{\rho \cdot v_\infty \cdot L}{\mu} = \frac{0,08891 \cdot 208,33 \cdot 70}{1,4216 \cdot 10^{-5}} = 91.207.237,767$$

La zona laminar y turbulenta de la placa, quedarán definidas:

$$500.000 = \frac{V_\infty X_{tr}}{v} = \frac{208,33 X_{tr}}{\frac{1,4216 \cdot 10^{-5}}{0,08891}}$$

$$X_{tr} = 0,38 \text{ m}$$



En este caso, es más necesario que antes utilizar la ecuación genérica con el fin de determinar el coeficiente de arrastre; así:

$$C_D = \frac{0,072}{(91.207.237,767)^{0,2}} - \frac{1.700}{91.207.237,767} = 1,8235 \cdot 10^{-3}$$

la fuerza será:

$$F(h = 20.000\text{m}) = 1,8235 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 70 \cdot 0,08891 \cdot \frac{(208,333)^2}{2}$$

$$F(h = 20.000\text{m}) = 4,433,2\text{N}$$

Véase la notable disminución de la fuerza de arrastre con la altura.

2. Cálculo del punto de transición entre régimen laminar y turbulento, así como el espesor de la capa límite en este punto.

a) Vuelo a 500 metros de altura

El punto de transición ha sido hallado anteriormente, y su valor era:

$$X_{tr\ 500} = 0,0364\ \text{m}$$

$$X_{tr\ 20.000} = 0,38\ \text{m}$$

El espesor de la capa límite entre estos dos puntos vendrá dado por la expresión:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

donde:

$\delta$ : espesor de la capa límite

$x$ : punto  $n$  donde se quiere calcular el espesor de la capa límite

$Re_x$  : número adimensional de Reynolds evaluado en el punto de estudio

Así:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5 \cdot 0,03646}{\sqrt{5 \cdot 10^5}}$$

$$\delta(h = 500\text{m}) = 2,578 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

b) Vuelo a 20.000 metros

Operando de la misma manera que en el caso anterior:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5 \cdot 0,38374}{\sqrt{5 \cdot 10^5}}$$

$$\delta (h = 20.000 \text{ m}) = 2,713 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

## Problema 64

### Enunciado

En la fase de ejecución de la obra de un oleoducto submarino, se ha pensado que para el transporte de los conductos hasta la zona donde han de ser soldados se utilizará un mini submarino. Se pretende que el submarino arrastre conductos de 50 m de longitud y 2 m de diámetro. Se entenderá que los conductos llevan unas boyas que los mantiene sumergidos y en posición horizontal.

Considérese los conductos como placas planas.

Viscosidad cinemática del agua =  $1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Densidad del agua =  $1.100 \text{ Kg/m}^3$

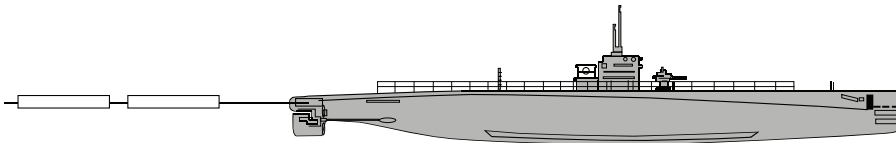


Fig. 64.1

1. Determine el número de conductos que puede llevar a la vez el mini submarino en función de la velocidad de desplazamiento (1-10 km/h) conociendo que puede realizar una fuerza de arrastre adicional de 500 N.
2. Cuál es el valor de los esfuerzos cortantes en la zona de transición de la capa límite.

### Resolución

$$\nu = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\rho = 1.100 \text{ Kg/m}^3$$

$$1.- \text{ Si } V = 1 \text{ Km/h} = 0,27 \text{ m/s}$$



La zona de separación entre el régimen laminar y turbulento de la placa viene dada por:

$$Re = \frac{V X_{tr}}{\nu} = \frac{0,27 X_{tr}}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 500.000$$

$$X_{tr} = 2,16 \text{ m}$$

Para el resto de velocidades posibles:

V (Km/h)	V (m/s)	X <sub>tr</sub> (m)
1	0,277	2,16
2	0,555	1,08
3	0,833	0,72
4	1,111	0,54
5	1,388	0,43
6	1,666	0,36
7	1,944	0,308
8	2,222	0,27
9	2,5	0,24
10	2,777	0,216

Obsérvese que la zona laminar de la placa es prácticamente relevante en todos los casos, con lo cual se utilizará para el cálculo la ecuación genérica del coeficiente de resistencia.

El coeficiente de resistencia para una placa, teniendo en cuenta la zona laminar y turbulenta, se expresa:

$$C_D = \frac{0,074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1.740}{Re_L}$$

Cuando el submarino se desplaza a la velocidad mínima, se tiene:

$$Re_L = \frac{0,277 \cdot 50}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 11.574.074,1$$

$$C_D = \frac{0,074}{11.574.074,1^{\frac{1}{5}}} - \frac{1.740}{11.574.074,1} = 2,7107 \cdot 10^{-3}$$

$$F = C_D \cdot b \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2} = 2,7107 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 50 \cdot 1100 \cdot \frac{0,2777^2}{2} = 36,14 \text{ N}$$



Puesto que hay dos superficies de contacto,  $F = 2 \cdot 36,14 = 72,28 \text{ N}$

Cuando el submarino se desplaza a la velocidad máxima:

$$\text{Re}_L = \frac{2,77 \cdot 50}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 1,154 \cdot 10^8$$

$$C_D = \frac{0,074}{\text{Re}_L^{1/5}} - \frac{1,740}{\text{Re}_L} = 1,7902 \cdot 10^{-3}$$

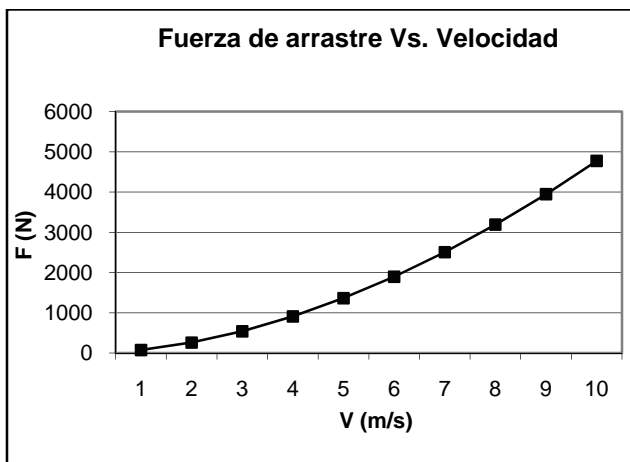
$$F = C_D \cdot b \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{V_\infty^2}{2} = 1,7902 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 50 \cdot 1.100 \cdot \frac{2,777^2}{2} = 2.386,76 \text{ N}$$

$$F_T = 2F = 4.773,53 \text{ N}$$

Puesto que la fuerza de arrastre en función de la velocidad del submarino venia definida por:

$$F = C_D b L \rho \frac{V^2}{2}$$

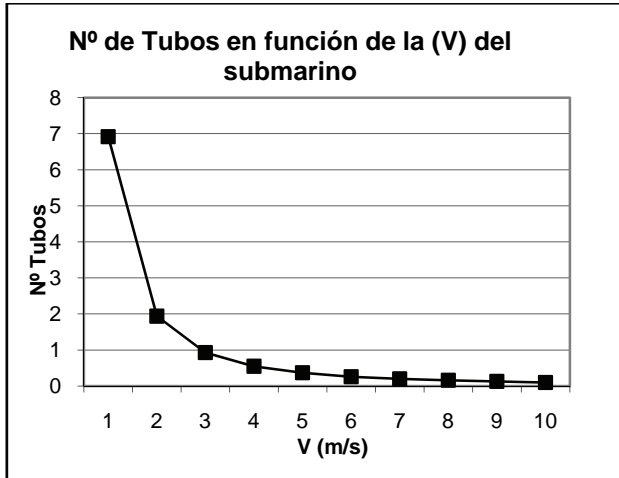
sustituyendo los valores para el resto de velocidades del submarino, se obtiene:



V (m/s)	F (N)
0,27	72,28
0,55	257,63
0,83	539,13
1,11	909,02
1,38	1.362,27
1,66	1.895,2
1,94	2.504,94
2,22	3.189,16
2,5	3.945,87
2,77	4.773,53

El número de conductos en función de la velocidad se establece:

$$N.^\circ \text{ de tubos} = \frac{F \rightarrow \text{arrastre}}{F \leftarrow \text{necesaria}}$$



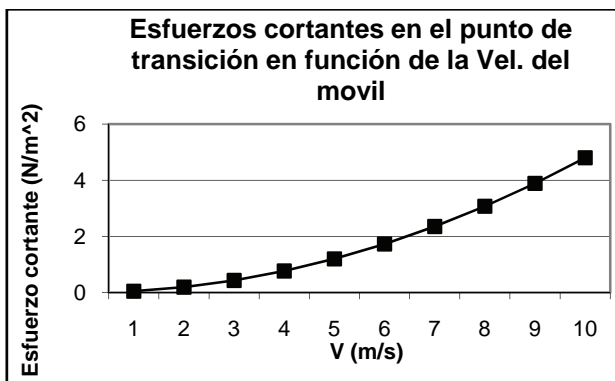
V(m/s)	N.º Tubos
0,27	6,92
0,55	1,94
0,83	0,93
1,11	0,55
1,38	0,37
1,66	0,26
1,94	0,2
2,22	0,16
2,50	0,13
2,77	0,1

Obsérvese que el submarino sólo podrá transportar tubos cuando se desplace a baja velocidad.

2. La variación del esfuerzo cortante en el punto de transición para las diferentes velocidades se define:

$$\tau_w = \frac{2 \mu V_\infty}{\delta} = \frac{2 v \rho V_\infty}{5 \sqrt{\frac{v X_{tr}}{V_\infty}}}$$

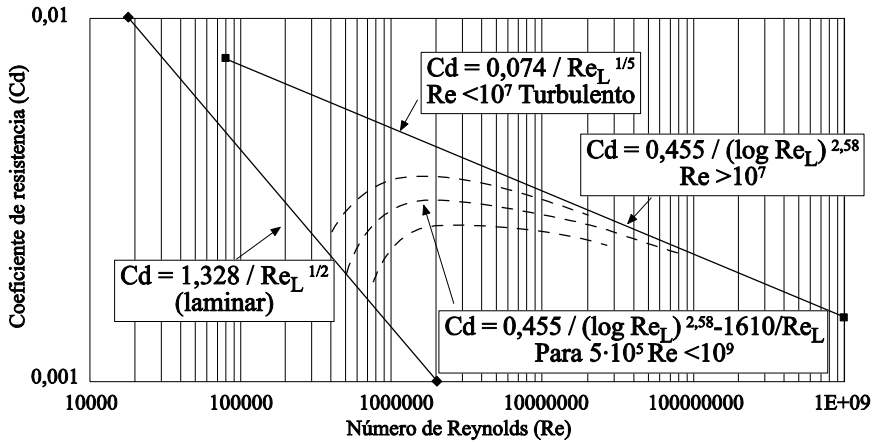
de donde, sustituyendo para los valores determinados anteriormente, se tiene:



V (m/s)	$\tau_w$ (N/m^2)
0,27	0,048
0,55	0,192
0,83	0,432
1,11	0,768
1,38	1,2
1,66	1,728
1,94	2,353
2,22	3,073
2,5	3,889
2,77	4,801

A modo de ejemplo en la figura siguiente se detalla, el valor del coeficiente de arrastre hallado experimentalmente para placas planas lisas, en función del número de Reynolds.

Véase que los valores del coeficiente de arrastre obtenidos para sendos valores del número de Reynolds se podrían haber obtenido utilizando dicho diagrama.



## Problema 65

### Enunciado

Se desea construir un barco que utilice el efecto, Magnus, con el fin de producir el desplazamiento del mismo.

Las condiciones del navío son:

Velocidad del crucero, 10 km/h; superficie en contacto con el agua,  $80 \text{ m}^2$  ( $4 \times 20 \text{ m}$ )

La velocidad del crucero debería alcanzarse para una velocidad del viento de 6m/s.

Debido al diseño del barco se prevé que se puedan instalar, como máximo, dos mástiles de 15 m de altura, y 0,5 m de diámetro.

Determine:

1. La velocidad de giro de dichos mástiles para conseguir la velocidad de crucero deseada. Se puede considerar despreciable la velocidad relativa del barco, así como el rozamiento del aire sobre el mismo. Considere que el viento actúa ortogonalmente al eje principal del barco.



2. Qué ángulo ha de formar el eje del barco respecto al viento, con el fin de aprovechar al máximo la fuerza resultante del efecto Magnus.

3. Determine la potencia mínima necesaria para hacer girar los cilindros.

Propiedades del agua:  $\nu = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

$$\rho = 1.150 \text{ Kg/m}^3$$

Propiedades del aire:  $P = 100.000 \text{ Pa}$

$$T = 293 \text{ K}$$

$$\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

### Resolución

1. El primer paso es determinar la fuerza que se opone al movimiento del barco. Considerando la superficie mojada del mismo como una placa plana, se debe hallar inicialmente qué zona de la placa está en régimen laminar y qué zona está en régimen turbulento; para ello, se determinará la distancia de transición.

$$\text{Re}_x = 500.000 = \frac{10 \cdot \frac{1.000}{3.600} \cdot X_{tr}}{1,3 \cdot 10^{-5}} ; X_{tr} = 2,34 \text{ m}$$

Como la placa tiene 20 m de longitud, ha de considerar que la capa límite tiene una zona laminar y una turbulenta, con lo cual se utilizará la expresión del coeficiente de arrastre que considera tanto la capa límite laminar como la turbulenta.

$$C_D = 0,072 \cdot \text{Re}_L^{-\frac{1}{5}} - \frac{1.700}{\text{Re}_L}$$

de donde:

$$\text{Re}_L = \frac{10 \cdot \frac{1.000}{3.600} \cdot 20}{1,3 \cdot 10^{-5}} = 4.273.504,2$$

sustituyendo, se obtiene:

$$C_D = 3,3976 \cdot 10^{-3} - 3,978 \cdot 10^{-4} = 2,9998 \cdot 10^{-3}$$

Así pues, la fuerza necesaria para mover la embarcación a la velocidad requerida es:



$$F = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho \cdot v_\infty^2 \cdot b \cdot l = 2,9998 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.150 \cdot \left(10 \frac{1}{3,6}\right)^2 \cdot 4 \cdot 20 = 1.064,75 \text{ N}$$

Esta fuerza en la dirección del movimiento ha de ser comunicada por los cilindros con efecto Magnus.

Dado que la relación  $\frac{u}{v_\infty} = \frac{\omega \cdot r}{v_\infty} = \frac{\omega \cdot 0,25}{6}$  no es conocida, se partirá de la fuerza necesaria para determinar la velocidad angular.

Puesto que la dirección del viento es lateral, la fuerza en la dirección del movimiento será la *lift* creada por los dos cilindros:

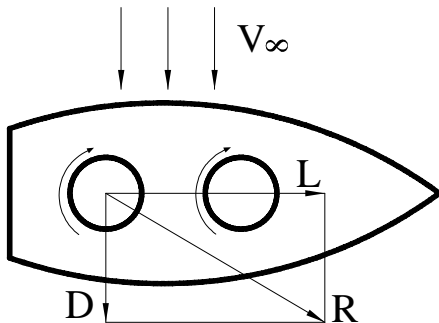


Fig. 65.1  
Esquema del barco  
y las fuerzas  
actuantes sobre el  
mismo

$$L_{1 \text{ cilindro}} = C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty^2 \cdot S$$

$$F = 2 \cdot L_{1 \text{ cilindro}} = 2 \cdot C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty^2 \cdot S$$

$$C_{L1 \text{ cilindro}} = \frac{F}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty^2 \cdot S} = \frac{1.064,75}{1,189 \cdot 6^2 \cdot 15 \cdot 0,5} = \frac{1.064,75}{321,03} = 3,316$$

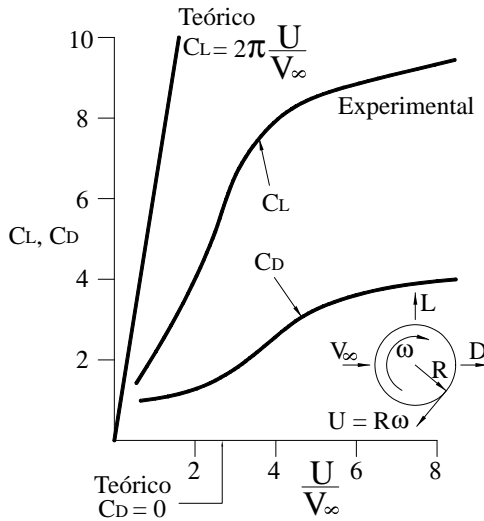
La densidad del aire se ha obtenido:  $\rho = \frac{P}{RT} = \frac{100.000}{287 \cdot 293} = 1,189 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$  considerando presión atmosférica y temperatura de 20°C.

Con el valor del coeficiente de sustentación, se obtienen de la figura 65.2 los valores:

$$\frac{u}{v_\infty} = 1,7; \quad C_D = 1,4;$$



Fig. 65.2  
Valores del  
coeficiente de  
arrastre y  
sustentación en  
función  
de la relación de  
velocidades  
tangencial y no  
perturbada



Consecuentemente, la velocidad de giro de los cilindros será:

$$\frac{u}{v_{\infty}} = \frac{\omega \cdot r}{v_{\infty}} = \frac{\omega \cdot 0,25}{6} = 1,7$$

$$\omega = 40,8 \text{ rad/s} \cong 389,6 \text{ rpm}$$

2. Para determinar el ángulo que el eje del barco ha de formar respecto a la corriente no perturbada, con el fin de aprovechar al máximo el efecto Magnus, se deberá determinar la dirección de la fuerza resultante.

Así, la fuerza de arrastre valdrá:

$$C_D = 1,4 = \frac{D_{1 \text{ cilindro}}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\infty}^2 \cdot S}$$

$$D_{1 \text{ cilindro}} = 1,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\infty}^2 \cdot S = 1,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,189 \cdot 6^2 \cdot 0,5 \cdot 15 = 224,721 \text{ N}$$

$$D_{2 \text{ cilindros}} = 449,442 \text{ N}$$

de donde la fuerza resultante será:

$$R = \sqrt{D_2^2 + L_2^2} = \sqrt{449,44^2 + 1.064,75^2} = 1.155,72 \text{ N}$$

La cual forma un ángulo respecto la dirección inicial del movimiento de:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{449,44}{1.064,75} = 0,4221 \quad ; \quad \alpha = 22,88^\circ$$

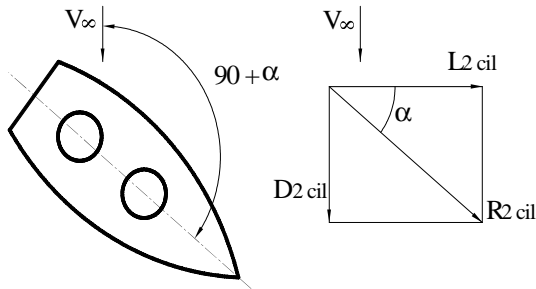


Fig. 65.3  
Angulo óptimo para aprovechar al máximo el efecto Magnus

Con lo cual, el ángulo que el eje del barco ha de formar respecto al viento para aprovechar al máximo el efecto Magnus ha de ser de  $112,88^\circ$ . Obsérvese que este ángulo será diferente para cada valor de velocidad del viento y velocidad de giro de los cilindros.

3. Para hallar la potencia que ha de tener cada uno de los motores eléctricos que hace girar los cilindros, (y dado que no se dispone de la distribución de velocidades del fluido en dirección radial partiendo de la velocidad en la pared del cilindro), se considerará cada cilindro como una placa plana que se desplaza con una velocidad igual a la velocidad tangencial del cilindro. No obstante, ha de tenerse en cuenta que se está realizando una somera aproximación a la realidad.

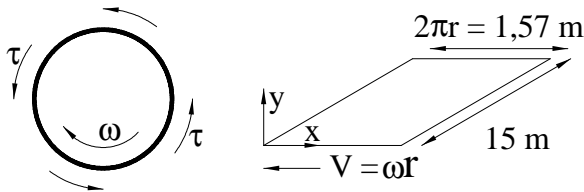


Fig. 65.4  
Similar de los esfuerzos sobre el fluido en forma de placa plana

Los esfuerzos cortantes alrededor del cilindro se pueden dar:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial \omega}{\partial n} \approx \mu \cdot \frac{v - 0}{\delta} = \mu \cdot \frac{\omega \cdot r}{\delta}$$

$\delta$  = espesor de la capa límite, el cual variará en cada punto.

Puesto que no se tiene conocimiento del espesor, se procederá a asimilar el cilindro a una placa plana, la cual se desplaza a una velocidad  $v = \omega r$ .

La distancia respecto al origen para la cual la capa límite dejará de ser laminar es:



$$Re_e = \frac{\omega \cdot r \cdot x}{v_{\text{aire}}} = \frac{40,8 \cdot 0,25 \cdot x}{1,5 \cdot 10^{-5}} = 500.000 ; \quad x = 0,7352 \text{ m};$$

El número de Reynolds en el extremo de la placa vendrá dado por:

$$Re_L = \frac{40,8 \cdot 0,25 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,25}{1,5 \cdot 10^{-5}} = 1.068.141,5$$

Por tanto, el coeficiente de arrastre y la fuerza necesaria para desplazar esta placa ficticia serán:

$$C_D = 0,072 \cdot Re_L^{-1/2} - \frac{1.700}{Re_L} = 0,072 \cdot 1.068.141,5^{-1/2} - \frac{1.700}{1.068.141,5} =$$

$$= 0,0044833 - 0,0015915 = 0,0028918$$

$$F = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\infty}^2 \cdot b \cdot l = 0,0028918 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,189 \cdot (\omega \cdot r)^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,25 \cdot 15 = 4,21 \text{ N}$$

La potencia necesaria para mover esta placa ficticia sería:

$$N = F \cdot V_{\infty} = F \cdot \omega \cdot r = 4,21 \cdot 40,8 \cdot 0,25 = 42,98 \text{ W}$$

La potencia necesaria para mover los dos cilindros sería de 85,97 W.

En realidad, no sólo hay que tener en cuenta que el símil de la placa plana es poco satisfactorio, sino que además se deberían evaluar los esfuerzos debidos a los rozamientos mecánicos.

## Problema 66

### Enunciado

El ojo de un tornado tiene un radio de 30 m, la velocidad tangencial del viento para este radio es de 50 m/s. Asumiendo que la variación de velocidad desde el eje central del tornado al susodicho radio es la característica a la de un vórtice forzado, mientras que desde el radio del ojo hasta el radio exterior del tornado la distribución de velocidades puede considerarse como de un vórtice libre.

Determine la distribución de presiones en función del radio del tornado.

Se puede despreciar el efecto de las fuerzas másicas.





## Resolución

Lo primero que es necesario recordar es la ecuación característica de un vórtice libre y un vórtice forzado:

Para un vórtice libre, se cumple:  $v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r}$

Para un vórtice forzado:  $v_{\theta} = \omega \cdot r$

Donde  $r$ , es el radio genérico,  $\omega$  es la velocidad de giro del aire y  $\Gamma$  es la circulación del vector velocidad a lo largo de una curva cerrada genérica.

Según el enunciado, la representación gráfica de la distribución de velocidades alrededor del ojo del tornado es:

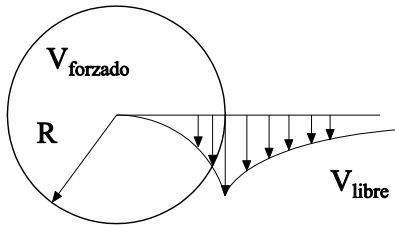


Fig. 66.1

Para el radio exterior del ojo del tornado ( $r = R$ ), el vórtice forzado y el libre se encuentran, con lo que se puede decir:

$$\omega \cdot R = \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Despejando el valor de la circulación del fluido, se obtiene:

$$\Gamma = 2 \pi \omega R^2$$

con lo cual las ecuaciones para el vórtice forzado y libre se darán:

Vórtice forzado:  $v_{\theta} = \omega \cdot r$ ; ecuación válida para  $r \leq R$ ;

Vórtice libre:  $v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2 \pi r} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot R^2}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{\omega \cdot R^2}{r}$ ; ecuación válida para  $r \geq R$

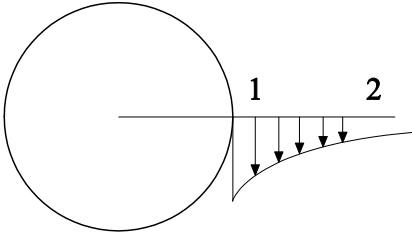
El valor de la velocidad angular puede calcularse:

$$v_{\theta} = \omega \cdot r; \quad 50 = \omega \cdot 30; \quad \omega = \frac{5}{3} = 1,66 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right];$$



En la zona donde existe el vórtice libre, se va a aplicar la ecuación de la energía entre los puntos 1 y 2 que se detallan en la figura siguiente. Entendiendo que el punto 2 está situado suficientemente alejado del centro del tornado y por tanto, la velocidad del aire se puede considerar cero y la presión es la atmosférica, se tiene:

Fig. 66.2



$$\frac{P_1}{\rho} + g \cdot z_1 + \frac{v_\theta^2}{2} = \frac{P_{atm}}{\rho} + g \cdot z_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

Puesto que la velocidad del aire en un punto suficientemente alejado del centro del tornado se puede considerar nula, se tiene:

$$\frac{v_\theta^2}{2} = \frac{P_{atm} - P_1}{\rho}$$

Sustituyendo la ecuación del vórtice libre en la ecuación anterior, se obtiene:

$$P_1 = P_{atm} - \frac{\rho \cdot v_\theta^2}{2} = P_{atm} - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot R^4}{r^2}; \text{ ecuación válida para } r \geq R$$

Por otro lado, en el ojo del huracán se puede aplicar la ecuación de Euler en coordenadas cilíndricas y flujo bidimensional, y se obtiene:

En dirección radial:  $-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + g_r$

En dirección angular:  $0 = -\frac{1}{\rho \cdot r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + g_\theta$

Según el enunciado, los términos de fuerzas másicas pueden ser despreciados, con lo que la ecuación en dirección angular es:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0; \text{ con lo que la presión ha de ser constante respecto a } \theta;$$

Del término de la ecuación de Euler en dirección radial, se tiene:



$$-\frac{v_{\theta}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

cuya integración da lugar a:

$$\int dP = \int \frac{v_{\theta}^2}{r} \cdot \rho \cdot dr = \int \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} \cdot \rho \cdot dr$$

$$P = \omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{r^2}{2} + \text{cte}$$

Para determinar la constante, se necesita una condición de contorno. Dicha condición se obtiene al igualar la presión, en el contorno del ojo del tornado.

Igualando la presión en el punto  $r = R$ , desde el punto de vista de las dos distribuciones de presiones, se obtiene:

$$\omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{R^2}{2} + \text{cte} = P_{\text{atm}} - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot R^4}{R^2};$$

$$\text{cte} = P_{\text{atm}} - \rho \cdot \omega^2 \cdot R^2$$

con lo que la distribución de presiones para la zona de vórtice forzado queda:

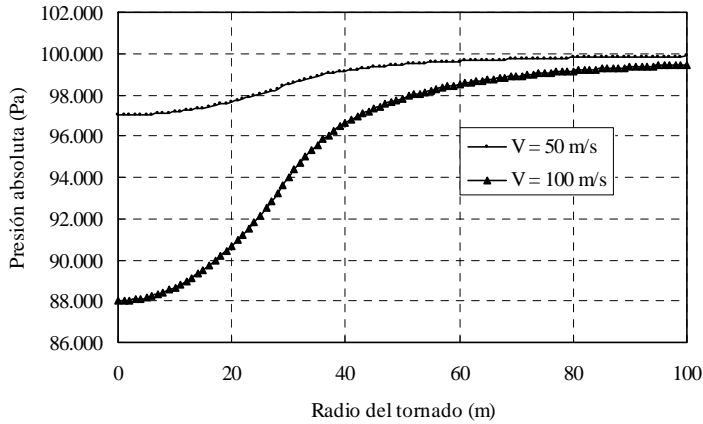
$$P = \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot r^2}{2} + P_{\text{atm}} - \rho \cdot \omega^2 R^2$$

$P = P_{\text{atm}} + \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[ \frac{r^2}{2} - R^2 \right]$ ; el límite de validez de esta ecuación es:  $r \leq R$ ;

Obsérvese que tanto la ecuación que caracteriza la distribución de presiones para vórtice forzado como la de vórtice libre dan lugar a distribuciones de presión menores que la atmosférica. Obsérvese que cuanto mayor es la velocidad angular del tornado, mayor será la depresión creada. A modo de ejemplo, en la figura siguiente se muestra cómo varía la presión a lo largo del radio del tornado para dos velocidades angulares diferentes, que corresponden a una velocidad tangencial de 50 y 100 m/s para un radio del ojo del tornado de 30 m.



Fig. 66.3



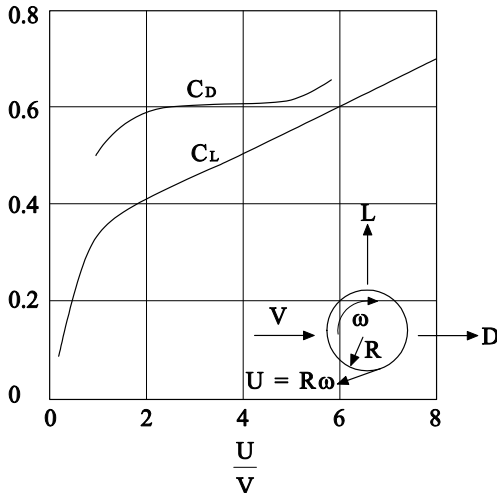
### Problema 67

#### Enunciado

Una máquina de entrenamiento para tenistas tiene una boca de salida situada a  $Y$  metros del suelo. La máquina lanza paralelamente al suelo una pelota con una velocidad  $V_{\text{inicial}}$  y una rotación en sentido de las agujas del reloj de  $\omega$  radianes/segundo. Determine la posición de la pelota cuando llegue al tenista, el cual está situado a una distancia  $X$  de la máquina. Consideren conocido el diámetro de la pelota  $D$  y la masa de la pelota  $m$ .

Los valores de los coeficientes de arrastre y sustentación para una esfera que gira sobre sí misma se detallan en la figura siguiente.

Fig. 67.1  
Coeficientes de arrastre y sustentación para una esfera sometida al efecto Magnus



## Resolución

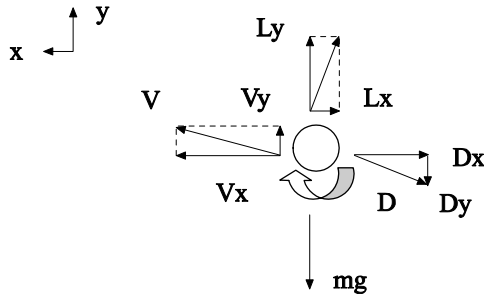
La velocidad tangencial de la pelota, debida a su rotación, será:

$$U = \omega \frac{D}{2}; \quad \frac{m}{s}$$

La velocidad con la que la pelota sale de la máquina es la velocidad no perturbada  $V_{\infty}$ .

El cociente entre ambas velocidades  $\frac{U}{V_{\infty}}$  es el valor con que se entra en el diagrama inicial, y se obtienen los valores del coeficiente de arrastre y sustentación:  $C_D$ ;  $C_L$ ;

El diagrama del cuerpo libre para la pelota, en un punto genérico de su movimiento, sería:



De la aplicación de la segunda ecuación de Newton en las dos direcciones del movimiento, se tiene:

$$\sum F_x = m \cdot \bar{a}_x$$

$$\sum F_y = m \cdot \bar{a}_y$$

Sustituyendo las componentes de las fuerzas actuantes, se tiene:

$$-L_x - D_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt}; \quad L_y - D_y - mg = m \frac{dV_y}{dt};$$

de donde la relación entre los coeficientes de arrastre y sustentación y las fuerzas se pueden dar como:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_{\infty}^2 \cdot S} = \frac{D}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_x^2 \cdot S}; \quad C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_{\infty}^2 \cdot S} = \frac{L}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_x^2 \cdot S}$$



siendo:  $S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ ;

Para un tiempo inicial, justamente cuando la pelota sale de la máquinas, se cumple:  $V_y = 0$ ;  $D_x \gg L_x$ ;  $L_y \gg D_y$ ; con lo que la segunda ecuación de Newton en las dos direcciones del movimiento será:

$$-D_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt}$$

$$L_y - m \cdot g = m \frac{dV_y}{dt}$$

La integración de la ecuación del movimiento en dirección X da lugar a:

$$\int_{t=0}^t -C_D \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot dt = \int_{V_{x\text{inicial}}}^{V_x} m \cdot \frac{dV_x}{V_x^2}$$

$$-C_D \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot t = -m \left[ \frac{1}{V_x} \right]_{V_{x\text{inicial}}}^{V_x} = -m \cdot \left[ \frac{1}{V_x} - \frac{1}{V_{x\text{inicial}}} \right]$$

$$C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} = \frac{1}{V_x} - \frac{1}{V_{x\text{inicial}}}$$

$$V_x = \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x\text{inicial}}}};$$

Ecuación que da la velocidad de la pelota en dirección X y en función del tiempo.

De la integración de la ecuación del movimiento en dirección Y, se obtiene:

$$C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_x^2 \cdot S - m \cdot g = m \cdot \frac{dV_y}{dt}$$

$$C_L \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot \left[ \frac{1}{C_D \cdot \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x\text{inicial}}}} \right]^2 - m \cdot g = m \cdot \frac{dV_y}{dt}$$

$$\int_{V_{y\text{inicial}}=0}^{V_y} dV_y = \int_{t=0}^{t=t} \left[ -g + \frac{C_L \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S}{m} \left[ \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x\text{inicial}}}} \right]^2 \right] dt$$



$$V_y = -g t - \frac{C_L \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S}{m} \cdot \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S}{m}} \cdot \left[ \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}} \right]_{t=0}^t$$

$$V_y = -g \cdot t - \frac{C_L}{C_D} \left[ \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}} - V_{x_{inicial}} \right]$$

Ésta es la ecuación que caracteriza la velocidad en dirección vertical en función del tiempo. Obsérvese que para el tiempo  $t = 0$ , se ha considerado que la velocidad  $V_y$  es asimismo nula.

La posición temporal de la pelota en dirección X se obtiene de la ecuación:

$$V_x = \frac{dx}{dt};$$

de donde:

$$\int_{x=0}^{x=x} dx = V_x dt = \int_{t=0}^t \frac{dt}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}} = \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S}{m}} \cdot \ln \left[ \frac{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}}{\frac{1}{V_{x_{inicial}}}} \right];$$

$$X \cdot C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S}{m} = \ln \left( \frac{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}}{\frac{1}{V_{x_{inicial}}}} \right)$$

$$\left[ \frac{1}{V_{x_{inicial}}} e^{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot X}{m}} - \frac{1}{V_{x_{inicial}}} \right] \cdot \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S}{m}} = t \quad (A)$$

Esta ecuación caracteriza el tiempo que tarda la pelota en recorrer la distancia entre la máquina y el tenista (X).

La posición de la pelota en dirección vertical se determina:

$$V_y = \frac{dy}{dt};$$



$$\int_{y=y_{\text{inicial}}}^{y=y} dy = \int_{t=0}^{t=t} \left[ -g \cdot t - \frac{C_L}{C_D} \cdot \left[ \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{\text{inicial}}}}} - V_{x_{\text{inicial}}} \right] \right] dt$$

$$Y - Y_{\text{inicial}} = -g \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{C_L}{C_D} V_{x_{\text{inicial}}} \cdot t - \frac{C_L}{C_D} \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S}{m}} \cdot \ln \left[ C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{\text{inicial}}}} \right] \Bigg|_{t=0}^{t=t}$$

$$Y - Y_{\text{inicial}} = -g \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{C_L}{C_D} V_{x_{\text{inicial}}} \cdot t - \frac{C_L}{C_D} \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S}{m}} \cdot \ln \left[ \frac{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{\text{inicial}}}}}{\frac{1}{V_{x_{\text{inicial}}}}} \right] \quad (\text{B})$$

Esta ecuación caracteriza la posición vertical de la pelota en función del tiempo.

El proceso a seguir para obtener la información deseada es: de la ecuación (A), para la distancia X entre la máquina y el tenista se obtiene el tiempo necesario para que la pelota recorra dicha distancia. Este tiempo debe ser sustituido en la ecuación (B) y se obtendrá como resultado la altura final a la que se encontrará la pelota cuando ésta llegue al tenista.

Cabe remarcar, no obstante, que el proceso de resolución seguido no es estrictamente correcto, puesto que no se han utilizado todos los términos involucrados en la segunda ecuación de Newton en las direcciones X e Y.

Un proceso más correcto sería si se utilizase el procedimiento descrito para determinar la posición Y, el tiempo y las velocidades de la pelota  $V_{x1}$ ,  $V_{y1}$ , cuando se ha recorrido una distancia pequeña,  $\Delta X$  (en el límite sería una distancia infinitesimal), respecto a la posición de la máquina. No obstante, se supone que en todo momento la velocidad de giro de la pelota sobre sí misma se mantiene.

Así, cuando la pelota haya recorrido la distancia  $\Delta X$ , se podrán determinar los nuevos coeficientes de arrastre y sustentación entrando con el valor de:  $\frac{U}{V_{x1}}$  en la gráfica inicial, y se obtendrán  $C_{Ly1}$ ,  $C_{Dx1}$ .

Por otro lado, gracias a la relación  $\frac{U}{V_{y1}}$ , se puede determinar la relación  $C_{Lx1}$ ,  $C_{Dy1}$ .

Gracias al conocimiento de estos cuatro coeficientes, se pueden utilizar las ecuaciones del movimiento al completo:



$$-L_x - D_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt};$$

$$L_y - D_y - mg = m \frac{dV_y}{dt};$$

y se obtiene:

$$-C_{Lx} \frac{1}{2} \rho V_{y1}^2 S - C_{Dx} \frac{1}{2} \rho V_{x1}^2 S = m \frac{dV_x}{dt} \approx m \frac{V_{x2} - V_{x1}}{\Delta t}$$

$$-C_{Ly} \frac{1}{2} \rho V_{x1}^2 S - C_{Dy} \frac{1}{2} \rho V_{y1}^2 S = m \frac{dV_y}{dt} \approx m \frac{V_{y2} - V_{y1}}{\Delta t}$$

De la resolución de estas ecuaciones, se obtiene:  $V_{x2}$ ,  $V_{y2}$ , para el segundo diferencial de tiempo, y dan paso a  $\frac{U}{V_{x2}}$ ,  $\frac{U}{V_{y2}}$ , dando lugar a unos coeficientes  $C_{Ly2}$ ,  $C_{Dx2}$ ,  $C_{Lx2}$ ,

$C_{Dy2}$ ; sustituyendo los valores de los nuevos coeficientes y las velocidades en las ecuaciones análogas a las dos precedentes se obtendrían las características en el diferencial de posición siguiente.  $V_{x3}$ ,  $V_{y3}$ . El proceso seguiría de manera homóloga.

→ 12



## Flujo no estacionario en conductos

### Problema 68

#### Enunciado

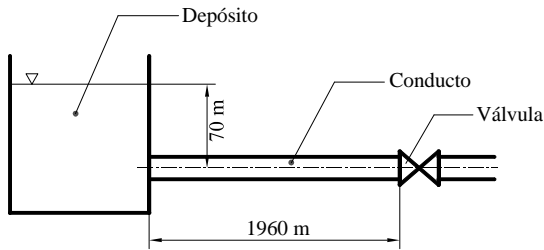
Sea un sistema de distribución de agua formado por un depósito y un conducto de 1.965 m de longitud. En el extremo inferior del conducto está instalada una válvula de descarga a la atmósfera; el nivel de la superficie libre del depósito respecto de la válvula es de 70 m y se conoce que la velocidad de propagación de la onda de presión en la instalación es de 1.310 m/s. Se ha observado que la velocidad de circulación del fluido por el conducto es de 2,5 m/s, cuando la válvula está totalmente abierta.

Determine:

1. El diámetro del conducto que satisfaga las condiciones establecidas anteriormente, sabiendo que el factor de fricción se puede considerar de  $f = 0,02$
2. Si se considera que el proceso de cierre de la válvula es lineal con el tiempo, y el tiempo de cierre es de 6 s, determine el diagrama de variación temporal de la presión en la entrada de la válvula en función del tiempo. Considere despreciables, como primera aproximación, las pérdidas de energía por rozamiento. Se puede asimismo considerar que el proceso de cierre se ejecuta en 6 pasos.
3. A la vista de los resultados, comente las anomalías encontradas en el diseño de la instalación y proporcione posibles soluciones al problema. ¿Qué sucedería si el conducto fuese de 0,5 m de diámetro?



Fig. 68.1  
Esquema de la instalación



### Resolución

1. En primer lugar, se observa que se trata de un problema de golpe de ariete, para la resolución del cual se determinará el diámetro del conducto mediante la aplicación de la ecuación de Bernoulli entre la superficie del depósito y el extremo del conducto, de modo que:

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta h_{12} \quad [m]$$

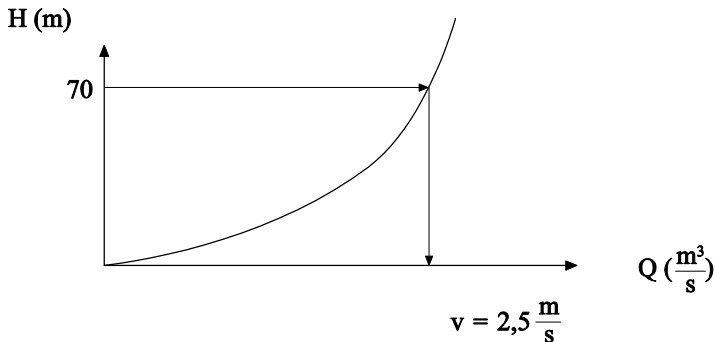
y queda

$$z_1 - z_2 = 70 \text{ m} = \frac{v_2^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{2,5^2}{2 \times 9,8} + 0,02 \frac{1.965}{D} \times \frac{2,5^2}{2 \times 9,8}$$

$$\frac{1}{D} = \frac{70 - \frac{2,5^2}{2 \times 9,8}}{0,02 \times 1.965 \times \frac{2,5^2}{2 \times 9,8}} \Rightarrow D = 0,1798 \text{ m}$$

La curva característica de la instalación en forma gráfica se puede dar como:

Fig. 68.2



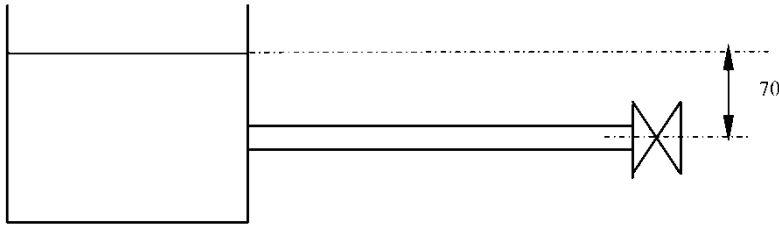


Fig.68.3

2. Las características iniciales del sistema, que son el punto de partida para la realización del análisis dinámico, son:

$$V_{\text{fluido}} = 2,5 \text{ m/s} \quad \text{Pérdidas por fricción despreciables}$$

$$H = 70 \text{ m} \quad L_{\text{tubería}} = 1.965 \text{ m}$$

$$C = 1.310 \text{ m/s}$$

Suponiendo cierre uniforme en seis pasos y en 6 s, se tiene:

$$\Delta P = \rho C (V_f - V_o) = -\rho C \Delta V$$

$$\frac{\Delta P}{\rho g} = \Delta h = -\frac{C}{g} \Delta V \Rightarrow h_f - h_o = \frac{C}{g} (V_o - V_f)$$

Aplicando la ecuación de continuidad entre el conducto y la válvula, considerando además que, entre la entrada y la salida de la válvula, la energía de presión en la entrada se convierte en energía cinética a la salida, se tiene:

$$S_{\text{tubo}} \times V_{\text{tubo}} = Q = S_v \times V_{\text{válvula}} = C_d \times S_v \sqrt{2gh}$$

$$V_{\text{tubo}} = \frac{C_d S_v}{S_{\text{tubo}}} \sqrt{2gh}$$

en forma genérica, esta ecuación se puede dar:

$$V = \Omega \times \sqrt{h} \Rightarrow \Omega = \frac{C_d S_v}{S_{\text{tubo}}} \sqrt{2g}, \text{ considerando el coeficiente de descarga (Cd)}$$

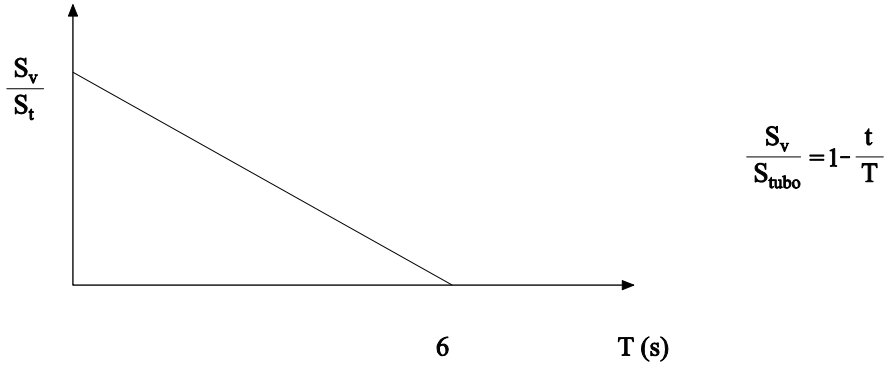
constante

La variación de la sección de la válvula con el tiempo presenta la forma siguiente:

$$\frac{S_v}{S_{\text{tubo}}} = 1 - \frac{t}{T} \text{ y se verifica:}$$

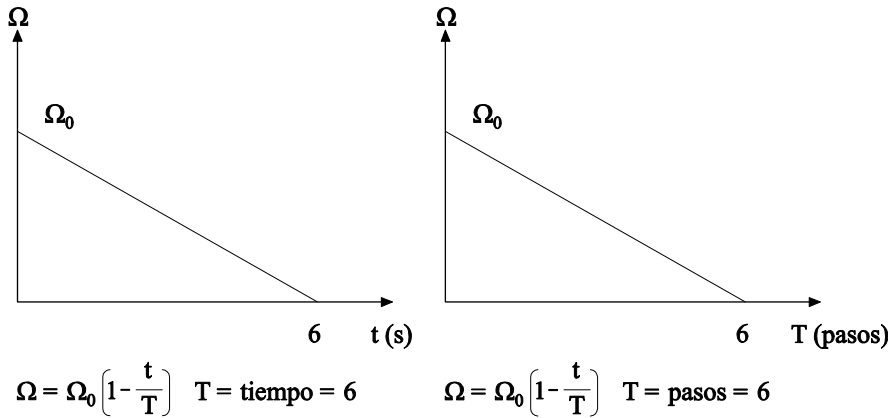


Fig. 68.4



Véase, a continuación, cómo varía la constante de tiempo  $\Omega$  con el tiempo respecto al número de segundos transcurridos y al número de pasos realizados hasta su cierre.

Fig. 68.5



Para el estado inicial, se tiene:

$$V_i = \Omega_0 \sqrt{H} \Rightarrow 2,5 = \Omega_0 \sqrt{70}, \text{ donde } \Omega_0 = 0,2988 \left[ \frac{\text{m}^{\frac{1}{2}}}{\text{s}} \right]$$

En la tabla siguiente, se muestra el conjunto de valores de la constante de tiempo, en función de las diferentes posiciones de abertura de la válvula.

t(s)	T(pasos)	Posición de la válvula	$\Omega = 0,2988 \left(1 - \frac{t}{6}\right) \left[ \frac{\text{m}^{\frac{1}{2}}}{\text{s}} \right]$
0	0	Abierta	0,2988
1	1	1/6 cerrada	0,2490
2	2	2/6 cerrada	0,1992



3	3	3/6 cerrada	0,1494
4	4	4/6 cerrada	0,0996
5	5	5/6 cerrada	0,0498
6	6	cerrada	0

Las ecuaciones que se utilizarán para la determinación de las velocidades y los incrementos temporales de presión serán:

$$\Delta h = \frac{C}{g}(V_0 - V)$$

$$V = \Omega \sqrt{h_i + \Delta h}$$

Para el primer paso, cuando  $t = 1$  (s), se tiene:

$$\Delta h = 133,67(2,5 - V)$$

$$V = 0,249 \sqrt{70 + \Delta h}$$

Estas dos ecuaciones se satisfacen para los valores de  $V = 2,354$  m/s y  $\Delta h = 19,21$  m.

En la tabla que se encuentra a continuación, se resumen estos resultados y los obtenidos para tiempos sucesivos.

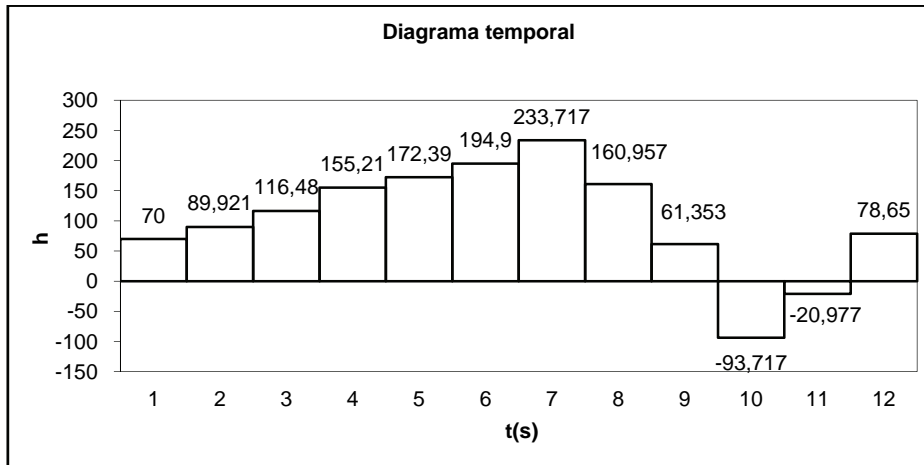
t(s)	$\Omega$	v	$\Delta h$	$h_i + \Delta h$	Total
0	0,2988	2,5	0	70	70
1	0,2490	2,35	19,21	70+19,21	89,2100
2	0,1992	2,15	27,27	70+19,21+27,27	116,480
3	0,1494	1,86235	38,74	70+19,21+27,27+38,74	155,220
4	0,0996	1,4464	55,59	70-19,21+27,27+38,74+55,59	172,390
5	0,0498	0,8697	77,072	70-19,21- 27,27+38,74+55,59+77,072	194,922
6	0	0	116,27	70-19,21-27,27- 38,74+55,59+77,072+116,275	233,717
7	0	0	-	70+19,21-27,27-38,74- 55,59+77,072+116,275	160,957



8	0	0	-	70+19,21+27,27-38,74-55,59-77,072+116,275	61,3530
9	0	0	-	70+19,21+27,27+38,74-55,59-77,072-116,275	-93,7170
10	0	0	-	70-19,21+27,27+38,74+55,59-77,072-116,275	-20,9570
11	0	0	-	70-19,21-27,27+38,74+55,59+77,072-116,275	78,6470

Por tanto el diagrama temporal será:

Fig. 68.6



Obsérvese que las ecuaciones explícitas para la determinación en cada paso, además de la velocidad de circulación del fluido, son:

$V = \Omega \sqrt{h_i + \Delta h}$ ,  $h_i$  y  $v_i$  son la presión en forma de altura de elevación y la velocidad a la entrada de la válvula utilizadas para la iteración.

$$\Delta h = 133,67(V_i - V)$$

$$V = \Omega \sqrt{h_i + 133,67(V_i - V)}$$

$$V^2 = \Omega^2 [h_i + 133,67(V_i - V)]$$

$$V^2 = h_i \Omega^2 + 133,67 V_i \Omega^2 - \Omega^2 133,67 V$$





$$V^2 + \Omega^2 133,67V - \Omega^2 (h_i + 133,67V_i) = 0$$

$$V = \frac{-\Omega^2 133,67 \pm \sqrt{(\Omega^2 \times 133,67)^2 + 4\Omega^2 (h_i + 133,67V_i)}}{2}$$

De modo que para la primera iteración se tendrá:

$$V = \frac{-0,2479^2 \times 133,67 \pm \sqrt{(0,2479^2 \times 133,67)^2 + 4 \times 0,2479^2 (70 + 133,67 \times 2,5)}}{2} = 2,356 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por tanto:

$$\Delta h = 133,67 (2,5 - 2,356) = 19,21 \text{ m}$$

3. Se observa que el aumento de presión respecto al estado de régimen permanente es de unas tres veces, lo cual no causaría grandes problemas en la instalación, pero, por otro lado, las presiones negativas que aparecen en el diagrama temporal son demasiado elevadas y no sólo causarían cavitación en la instalación, sino que muy probablemente destrucción de la misma. En definitiva, sería más que recomendable disminuir la velocidad de cierre de la válvula, aumentando su tiempo de cierre. En un primer paso, se podría aumentar el tiempo de cierre a 10 segundos en lugar de los seis actuales. Una vez realizado el diagrama temporal, se podría ver si este aumento en el tiempo de cierre es suficiente o no.

Por otro lado, si el diámetro del conducto aumenta a 0,5 m la fuerza de inercia asociada al mismo aumenta y consecuentemente, aumentarán las sobrepresiones; consecuentemente el tiempo de cierre debería aumentar con el fin de mantener el aumento de presión a un nivel aceptable.

## Problema 69

### Enunciado

Sea el sistema depósito-conducto esquematizado en la figura 69.1. En el extremo del conducto, existe una válvula cuyo cierre será lento y progresivo. La sección de paso de la válvula adimensionalizada en función de las cuatro etapas de cierre se define en la tabla 1. En la tabla 2 se define la constante de pérdidas de la válvula para las diversas etapas de cierre. Dicha constante se entenderá que obedece a la ecuación.



$$\Delta h_{\text{válvula}} = K \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta h \text{ [m]}$$

v = velocidad del fluido en el conducto

g = aceleración gravitatoria

Conociendo que:

Factor de fricción,  $f = 0,02$

Longitud del conducto, 1.250 m

Diámetro del conducto,  $D = 0,2 \text{ m}$

Celeridad de la onda de presión,  $C = 1.250 \text{ m/s}$

Diferencia de alturas geométricas entre el nivel de líquido del depósito y la válvula:  
100 m

El extremo del conducto descarga a la atmósfera.

Determine:

1. La velocidad de circulación del fluido por el conducto en las cuatro etapas de cierre.
2. La variación temporal de la altura de elevación en la entrada de la válvula. Comente los resultados obtenidos.

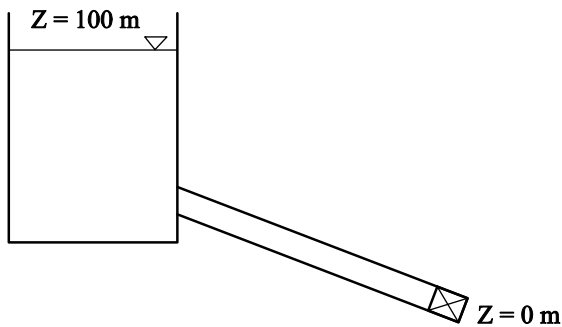
Tabla 1

S/S <sub>total</sub>	Tc/(L/C)
1	0
0,8	1
0,6	2
0,4	3
0	4

Tabla 2

Tc/(L/C)	K
0	1.000
1	5.000
2	10.000
3	18.000
4	$\infty$

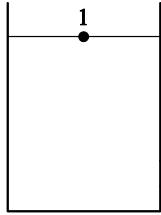
Fig. 69.1





### Resolución

1. Aplicando Bernoulli entre los puntos 1 y 2, se tiene:



$$\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + K \frac{v^2}{2g} \quad \text{Fig. 69.2}$$

$$Z_1 - Z_2 = \frac{Q^2}{S_2^2 \cdot 2 \cdot g} + f \frac{L}{D} \cdot \frac{Q^2}{S_T^2 \cdot 2 \cdot g} + K \frac{Q^2}{S_T^2 \cdot 2 \cdot g}$$

$$Q^2 = \frac{Z_1 - Z_2}{\frac{1}{S_2^2 \cdot 2 \cdot g} + f \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{S_T^2 \cdot 2 \cdot g} + K \frac{1}{S_T^2 \cdot 2 \cdot g}}$$

Para las diferentes posiciones de la válvula, se tiene:

Abierta	$S_2 = S_T \cdot 1$	$K = 1.000$
1	$S_2 = S_T \cdot 0,8$	$K = 5.000$
2	$S_2 = S_T \cdot 0,6$	$K = 10.000$
3	$S_2 = S_T \cdot 0,4$	$K = 18.000$
4	$S_2 = S_T \cdot 0$	$K = \infty$

Sustituyendo para los diferentes casos en la expresión del caudal, se obtiene:

$$v_{abierta} = \frac{Q}{S} = 1,319 \text{ m/s}$$

$$v_1 = 0,618 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 0,439 \text{ m/s}$$

$$v_3 = 0,3287 \text{ m/s}$$

$$v_4 = 0 \text{ m/s ;}$$

Adimensionalizando los valores de la velocidad:

$$v^* = \frac{v}{v_o} = \frac{v}{1,319}$$

$v^*$	$T_c / \frac{L}{C}$
1	0
0,468	1
0,3328	2
0,2486	3
0	4



Adimensionalizando el término de pérdidas de carga en el conducto:

$$\frac{H_o}{H_o} \Delta h = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{v_o^2}{v_o^2}$$

$$\Delta h^* = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^{*2}}{2g} \cdot \frac{v_o^2}{H_o}$$

$$\Delta h^* = 0,11095 \cdot v^{*2}$$

Adimensionalizando allievi:

$$h - h_i = -\frac{c}{g} (v - v_i)$$

$$\frac{H_o}{H_o} \Delta h = -\frac{c}{g} \Delta v \frac{v_o}{v_o}$$

$$\Delta h^* = -\frac{c \cdot v_o}{g \cdot H_o} \Delta v^*$$

Sustituyendo por:

$$v_o = 1,319 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c = 1250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$H_o = 100 \text{ m}$$

Se obtiene:

$$\Delta h^* = -1,68 \cdot \Delta v^*$$

En la gráfica adjunta, se representan las variaciones de la presión en función del tiempo. En ella se observa que el incremento de presión más preponderante se da en el segundo espacio temporal. La mayor depresión se da en el séptimo espacio temporal, aunque no se llegan a registrar presiones negativas, con lo que a priori queda descartada la aparición de cavitación.

Para disminuir el pico de presión en el segundo espacio temporal, se debería utilizar una válvula en la que la constante de pérdidas en el primer y el segundo espacios temporales fuese menor.

Fig. 69.3  
Gráfica  
adimensional para  
los diferentes  
tiempos de cierre

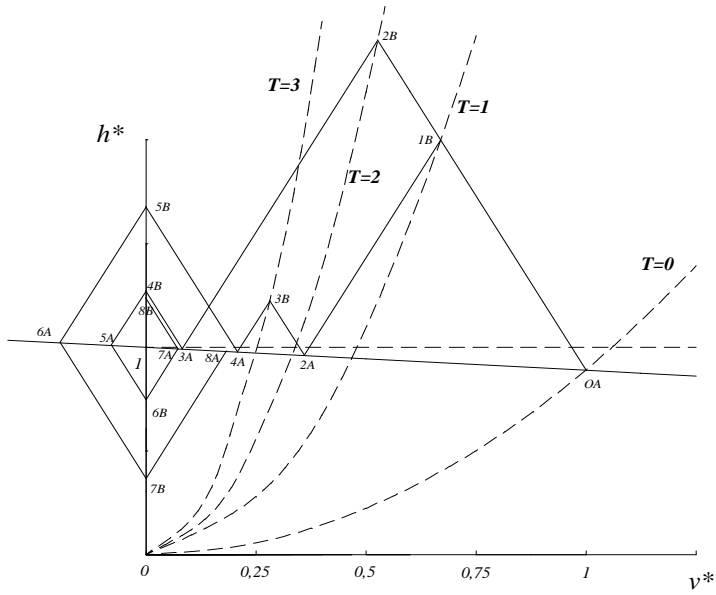
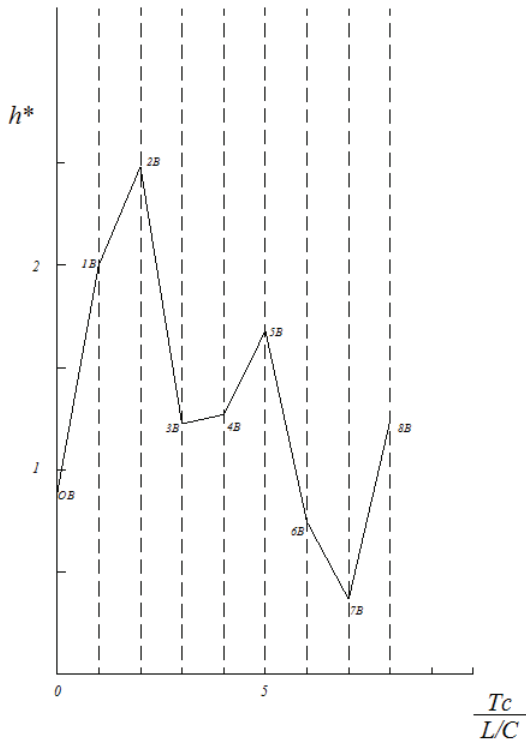


Fig. 69.4  
Variación temporal  
de la presión en la  
válvula



→ 13

## Gas dinámica

### Problema 70

#### Enunciado

Con el fin de suministrar vapor recalentado a un colectivo de máquinas de una industria textil, se instala una caldera de vapor, encontrándose a la salida de la misma un tanque de almacenamiento, (v. figura 70.1). Las condiciones del fluido a la entrada de la caldera son:  $P_{1c} = 1$  bar (abs);  $T_{1c} = 100$  °C;  $h_{1c} = 2.676$  KJ/Kg, siendo la velocidad del fluido a la entrada de 5m/s. En la caldera, el vapor se calienta hasta adquirir una temperatura de  $T_{2c} = 350$ °C y una presión de  $P_{2c} = 5 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> (abs).

Considérese:  $R = 287$  J/Kg K;  $\gamma = 1,4$ ;  $\mu_{\text{vapor}} = 1,086 \cdot 10^{-5}$  N. s /m<sup>2</sup>;  $C_p = 1,8641$  KJ/Kg K.

Halle:

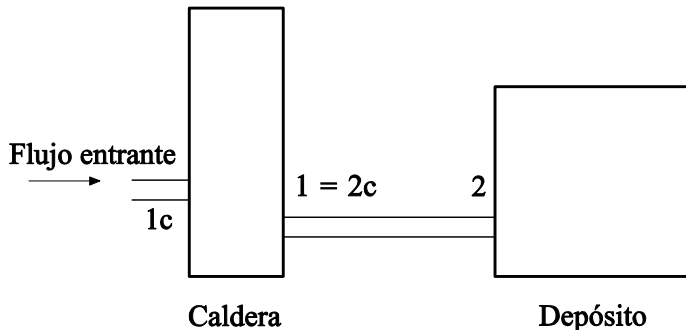
1. El número de Mach a la salida de la caldera  $M_{2c}$ , sabiendo que el calor comunicado al fluido es de 500 KJ/Kg.
2. Si el tubo que une los dos depósitos tiene un diámetro de 0,02 m y su coeficiente de fricción medio es de  $4 C_f = f = 0,02$ ; halle la longitud del conducto para que a la entrada del segundo tanque el número de Mach sea de 0,9. Indique las hipótesis realizadas.
3. El flujo másico circulante entre los dos depósitos.
4. La presión a la entrada del segundo depósito.



5. El número de Mach a la salida del conducto para que la presión estática en el extremo de éste sea de 250.000 Pa.

6. Si se decide unir los dos depósitos mediante una tubería de 5 m de longitud, y se quiere que las presiones absolutas de estancamiento en los depósitos sean:  $P_{01} = 5 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>;  $P_{02} = 0,5 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>, con el caudal másico máximo a transferir de 1 Kg/s y la rugosidad del tubo  $\varepsilon = 0,01$  mm halle el diámetro del conducto. Considérese que la temperatura de estancamiento en la caldera es la misma que en los apartados anteriores.

Fig. 70.1  
Esquema de la  
instalación



Datos:

$$P_{1c} = 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$T_{1c} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$h_{1c} = 2.676 \text{ KJ/Kg} = 2,676 \cdot 10^6 \text{ J/Kg}$$

$$\gamma = 1,4$$

$$v_{e1c} = 5 \text{ m/s}$$

$$C_p = 1,8641 \text{ KJ/KgK} = 1.864,1 \text{ J/KgK}$$

$$Q_{caldera} = 500 \text{ KJ/Kg}$$

$$T_{2c} = 350 \text{ }^\circ\text{C} = 623 \text{ K}$$

$$P_{2c} = 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

### Resolución

1. Número de Mach a la salida de la caldera

Se calculará inicialmente la temperatura y la entalpía de estancamiento a la entrada de la caldera.



$$T_{01c} = T_{1c} + \frac{v^2}{2 \cdot C_p} = (100 + 273) + \frac{5^2}{2 \cdot 1.864,1} = 373,006 \text{ K}$$

$$h_{01} = h_1 + \frac{v^2}{2} = 2.676.000 + \frac{5^2}{2} = 2.676.012,5 \text{ J/Kg}$$

Según la ecuación de la energía, se conoce:

$$q + h_{01} = h_{02}$$

donde la entalpía de estancamiento a la salida de la caldera será:

$$h_{02} = 500.000 + 2.676.012,5 = 3.176.012,5 \text{ J/Kg}$$

Para un gas ideal, se cumple:

$$\int_{h_{01}}^{h_{02}} dh = \int_{T_{01}}^{T_{02}} C_p \cdot dT$$

de donde el valor de  $T_{02}$  se obtiene:

$$q = h_{02} - h_{01} = C_p(T_{02} - T_{01})$$

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{C_p} = 373,006 + \frac{500}{1,8641} = 641,21 \text{ K}$$

El siguiente paso será calcular la velocidad del fluido a la salida de la caldera y la velocidad del fluido en este mismo punto.

$$T_{02} = T_2 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p}$$

$$T_{02} - T_2 = \frac{v^2}{2 \cdot C_p}$$

$$v^2 = (T_{02} - T_2) \cdot 2 \cdot C_p$$

$$v = \sqrt{(T_{02} - T_2) \cdot 2 \cdot C_p}$$

$$v = \sqrt{(641,21 - (350 + 273)) \cdot 2 \cdot 1864,1} = 260,5 \text{ m/s}$$



$$C_2 = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_2} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 623} = 500,32$$

$$M_2 = \frac{v}{C_2} = \frac{260,5}{500,32} = 0,5206$$

El número de Mach a la salida de la caldera es  $M_{2c} = 0,5206$

2. Si el conducto es de diámetro ( $\Phi = 0,02$  m) y  $f = 4 \cdot C_f = 0,02$ , la longitud del conducto, para que  $M = 0,9$  en su extremo, será:

Suponiendo flujo de Fanno,

de tablas se tiene:

$$M_1 = 0,52 \longrightarrow \frac{4 \cdot C_f \cdot L_1^*}{D} = 0,9174$$

$$M_2 = 0,9 \longrightarrow \frac{4 \cdot C_f \cdot L_2^*}{D} = 0,014$$

$$M_1 = M_{2c} = 0,5206 \qquad M_2 = 0,9$$

$$\frac{4 \cdot C_f \cdot \Delta L}{D} = \frac{4 \cdot C_f \cdot L_1^*}{D} - \frac{4 \cdot C_f \cdot L_2^*}{D} = 0,9174 - 0,014 = 0,903$$

$$\Delta L = \frac{0,903 \cdot D}{4 \cdot C_f} = \frac{0,903 \cdot 0,02}{0,02} = 0,903 \text{ m}$$

La longitud del conducto ha de ser de 0,903 m

3. El flujo másico se puede determinar:

$$\dot{m} = \rho \cdot s \cdot v = \frac{P}{R \cdot T} \cdot \frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} \cdot 260,5 = \frac{5 \cdot 10^5}{287 \cdot (350 + 273)} \cdot \frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} \cdot 260,5 = 0,228 \text{ Kg/s}$$

flujo másico circulante entre los depósitos es de 0,228 Kg/s

4. Dado que la presión en el extremo del conducto será la misma que a la entrada del segundo depósito:

Para  $M_2 = 0,9$ , (Fanno):

$$\frac{P_2}{P^*} = 1,129$$

$$\frac{P_{02}}{P_0^*} = 1,0089$$

Para  $M_1 = M_{20} = 0,52$  (Fanno):

$$\frac{P_1}{P^*} = 2,0519 \qquad \frac{P_{01}}{P_0^*} = 1,3034$$

Para  $M_2 = 0,9$  (tabla de flujo isentrópico):

$$\frac{P_2}{P_{02}} = 0,59126$$

Con lo cual se puede establecer:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}}{\frac{P_2}{P^*}} = \frac{2,0519}{1,129} = 1,817$$

$$P_2 = \frac{P_1}{1,817} = \frac{5 \cdot 10^5}{1,817} = 275.178,8 \text{ N/m}^2$$

$$P_{02} = \frac{P_2}{0,59126} = 465.410,9 \text{ N/m}^2$$

La presión a la entrada del segundo depósito será de  $275.178,8 \text{ N/m}^2$

5. Si la presión a la salida del conducto se quiere que sea de  $250.000 \text{ Pa}$ , halle el número de Mach en este punto:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{500.000}{250.000} = 2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}(M_1)}{\frac{P_2}{P^*}(M_2)};$$

A la entrada del conducto, se ha visto que:

$$M_1 = 0,52, \text{ (Fanno): } \frac{P_1}{P^*} = 2,0519$$



$$\frac{P_2}{P^*}(M_2) = \frac{\frac{P_1}{P^*}(M_1)}{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{2,0519}{2} = 1,02595$$

Entrando en las tablas de Fanno para  $\frac{P_2}{P^*}(M_2) = 1,02595 \rightarrow M_2 \cong 0,98$ ,

se obtiene que el número de Mach a la salida del conducto es de 0,98.

6. Datos en los puntos de entrada (1) y salida (2) del conducto:

$$P_{01} = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{02} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\dot{m} = 1 \text{ Kg/s}$$

$$\varepsilon = 0,01 \text{ mm}$$

$$T_{01} = 641 \text{ K}$$

Se va a considerar que para estas condiciones se tiene flujo bloqueado.

Se calcula el número de Reynolds en función del diámetro:

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{Q \cdot D \cdot \rho}{S \cdot \mu} = \frac{\dot{m} D}{S \cdot \mu} = \frac{\dot{m} D}{\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \mu} = 4 \cdot \frac{\dot{m}}{\pi \cdot \mu \cdot D}$$

$$Re = 4 \cdot \frac{\dot{m}}{\pi \cdot \mu \cdot D} = 4 \cdot \frac{1}{\pi \cdot (1,086 \cdot 10^{-5}) \cdot D} = \frac{117.241,2}{D}$$

El cálculo del diámetro se realizará aplicando la ecuación para régimen sónico.

$$\dot{m} = \sqrt{\gamma} \cdot \frac{P_{01} \cdot A}{\sqrt{R \cdot T_{01}}} \cdot M_1 \left[ 1 + \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) M_1^2 \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}, \text{ siendo } A = \frac{\pi \cdot D^2}{4},$$

Despejando el diámetro:

$$D^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\dot{m} \sqrt{R \cdot T_{01}}}{P_{01} \cdot \sqrt{\gamma}} \cdot \frac{1}{M_1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

Puesto que

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

con lo cual se obtiene:

$$D^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\dot{m} \sqrt{R \cdot T_{01}}}{P_{01} \cdot \sqrt{\gamma}} \cdot \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \frac{A}{A^*} (M_1)$$

Sustituyendo valores:

$$D^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{287 \cdot 641}}{5 \cdot 10^5 \sqrt{1,4}} \cdot \left( \frac{1,4+1}{2} \right)^{\frac{1,4+1}{2(1,4-1)}} \cdot \frac{A}{A^*} (M_1)$$

$$D = 0,0399 \sqrt{\frac{A}{A^*}} (M_1)$$

Se conoce, además, que para este apartado:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{0,5 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^5} = 0,1$$

Hipótesis:

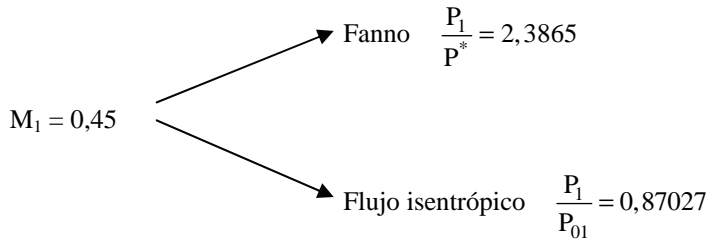
Suponiendo que  $M_1 = 0,5$ , de tablas de flujo isentrópico se obtiene:  $\frac{A_1}{A^*} = 1,34$

$$D = 0,0399 \sqrt{1,34} = 0,04618 \text{ m}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} = \frac{117.241,2}{0,04618} = 2.538.370,2 \\ \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,01 \cdot 10^{-3}}{0,04618} = 2,1 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Por el diagrama de Moody}$$

$$f = 0,0145 = 4 \cdot C_f$$

$$4 \cdot C_f \cdot \frac{L^*}{D} = 0,0145 \cdot \frac{5}{0,04618} = 1,5699, \text{ de las tablas para flujo de Fanno se obtiene } M_1 = 0,45.$$



$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2^*}{P_{01}} = \frac{P_1}{\frac{P_1}{P^*}} = \frac{0,87027}{2,3865} = 0,36568 > 0,1 \quad \text{Se concluye que el flujo está bloqueado.}$$

Es necesario realizar una segunda iteración.

Realizando una media aritmética de  $M_1$  (obtenida y supuesta):

$$M_1' = \frac{0,5 + 0,45}{2} = 0,475 \text{ de las tablas para flujo isentrópico; se obtiene } \frac{A}{A^*} = 1,39$$

$$D = 0,0399\sqrt{1,39} = 0,04704 \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re} = 2.492.297,9 \\ \frac{\varepsilon}{D} = 2,12 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Por el diagrama de Moody}$$

$$f = 0,0145$$

$$4 \cdot C_f \cdot \frac{L^*}{D} = 0,0145 \cdot \frac{5}{0,04704} = 1,541$$

De las tablas para flujo de Fanno, se determina:  $M_1 = 0,451$ .

Llegado a este punto, no hace falta seguir, puesto que obtendríamos los mismos valores que en la iteración anterior.

El diámetro del tubo será de  $D = 0,047$  m; el flujo está bloqueado.

Tabla para flujo isoentrópico  $\gamma = 1,4$

M	M*	t / T <sub>0</sub>	p / P <sub>0</sub>	$\rho / \rho_0$	A / A*
0,00	0,00000	0,10000+1	0,10000+1	0,10000+1	$\infty$
0,01	0,01095	0,99998+0	0,99993+0	0,99995+0	0,57874+2
0,02	0,02191	0,99992+0	0,99997+0	0,99980+0	0,28942+2
0,03	0,03286	0,99982+0	0,99937+0	0,99955+0	0,19301+2
0,04	0,04381	0,99968+0	0,99888+0	0,99920+0	0,14481+2
0,05	0,05476	0,99950+0	0,99825+0	0,99875+0	0,11591+2
0,06	0,06570	0,99928+0	0,99748+0	0,99820+0	0,96659+1
0,07	0,07664	0,99902+0	0,99658+0	0,99755+0	0,82915+1
0,08	0,08758	0,99872+0	0,99653+0	0,99681+0	0,72616+1
0,09	0,09851	0,99838+0	0,99435+0	0,99596+0	0,64613+1
0,10	0,10944	0,99800+0	0,99303+0	0,99502+0	0,58218+1
0,11	0,12035	0,99759+0	0,99158+0	0,99398+0	0,52992+1
0,12	0,13126	0,99713+0	0,98998+0	0,99284+0	0,48643+1
0,13	0,14217	0,99663+0	0,98826+0	0,99160+0	0,44969+1
0,14	0,15306	0,99610+0	0,98640+0	0,99027+0	0,41824+1
0,15	0,16395	0,99552+0	0,98441+0	0,98884+0	0,39103+1
0,16	0,17482	0,99491+0	0,98228+0	0,98731+0	0,36727+1
0,17	0,18569	0,99425+0	0,98003+0	0,98569+0	0,34635+1
0,18	0,19654	0,99356+0	0,97765+0	0,98398+0	0,32779+1
0,19	0,20739	0,99283+0	0,97514+0	0,98218+0	0,31123+1
0,20	0,21822	0,99206+0	0,97250+0	0,98028+0	0,29635+1
0,21	0,22904	0,99126+0	0,96973+0	0,97829+0	0,28293+1
0,22	0,23984	0,99041+0	0,96685+0	0,97620+0	0,27076+1
0,23	0,25063	0,98953+0	0,96383+0	0,97403+0	0,25968+1
0,24	0,26141	0,98861+0	0,96070+0	0,97177+0	0,24956+1
0,25	0,27217	0,98765+0	0,95745+0	0,96942+0	0,24027+1
0,26	0,28291	0,98666+0	0,95408+0	0,96698+0	0,23173+1



0,27	0,29364	0,98563+0	0,95060+0	0,96446+0	0,22385+1
0,28	0,30435	0,98456+0	0,94700+0	0,96185+0	0,21565+1
0,29	0,31504	0,98346+0	0,94329+0	0,95916+0	0,20979+1
0,30	0,32572	0,98232+0	0,93947+0	0,95638+0	0,20351+1
0,31	0,33637	0,98114+0	0,93554+0	0,95352+0	0,19765+1
0,32	0,34701	0,97993+0	0,93150+0	0,95058+0	0,19219+1
0,33	0,35762	0,97868+0	0,92735+0	0,94756+0	0,18707+1
0,34	0,36822	0,97740+0	0,92312+0	0,94446+0	0,18229+1
0,35	0,37879	0,97609+0	0,91877+0	0,94128+0	0,17780+1
0,36	0,38935	0,97473+0	0,91433+0	0,93803+0	0,17358+1
0,37	0,39938	0,97335+0	0,90979+0	0,93470+0	0,16961+1
0,38	0,41039	0,97193+0	0,90516+0	0,93130+0	0,16587+1
0,39	0,42087	0,97048+0	0,90043+0	0,92782+0	0,16234+1
0,40	0,43133	0,96899+0	0,89561+0	0,92427+0	0,15901+1
0,41	0,44177	0,96747+0	0,89071+0	0,92066+0	0,15587+1
0,42	0,45218	0,96592+0	0,88572+0	0,91647+0	0,15289+1
0,43	0,46257	0,96434+0	0,88056+0	0,91322+0	0,15007+1
0,44	0,47293	0,96272+0	0,87550+0	0,90940+0	0,14740+1
0,45	0,48326	0,96108+0	0,87027+0	0,90551+0	0,14487+1
0,46	0,49357	0,95940+0	0,86496+0	0,90157+0	0,14246+1
0,47	0,50385	0,95769+0	0,85958+0	0,89756+0	0,14018+1
0,48	0,51410	0,95595+0	0,85413+0	0,89349+0	0,13801+1
0,49	0,52433	0,95418+0	0,84861+0	0,88936+0	0,13595+1
0,50	0,53452	0,95238+0	0,84302+0	0,88517+0	0,13398+1
0,51	0,54469	0,95055+0	0,83737+0	0,88093+0	0,13212+1
0,52	0,55483	0,94869+0	0,83165+0	0,87663+0	0,13034+1
0,53	0,56493	0,94681+0	0,82588+0	0,87228+0	0,12865+1
0,54	0,57501	0,94489+0	0,82005+0	0,86788+0	0,12703+1
0,55	0,58506	0,94295+0	0,81417+0	0,86342+0	0,12549+1
0,56	0,59507	0,94098+0	0,80823+0	0,85892+0	0,12403+1
0,57	0,60505	0,93898+0	0,8024+0	0,85437+0	0,12263+1



0,58	0,61501	0,93696+0	0,79621+0	0,84978+0	0,12130+1
0,59	0,62492	0,93491+0	0,79013+0	0,84514+0	0,12003+1
0,60	0,63491	0,93284+0	0,78400+0	0,84045+0	0,11882+1
0,61	0,64466	0,93073+0	0,77784+0	0,83573+0	0,11767+1
0,62	0,65448	0,92861+0	0,77164+0	0,83096+0	0,11656+1
0,63	0,66427	0,92646+0	0,76540+0	0,82616+0	0,11552+1
0,64	0,67402	0,92428+0	0,75913+0	0,82132+0	0,11451+1
0,65	0,68374	0,92208+0	0,75283+0	0,81644+0	0,11356+1
0,66	0,69342	0,91986+0	0,74650+0	0,81153+0	0,11256+1
0,67	0,70307	0,91762+0	0,74014+0	0,80659+0	0,11179+1
0,68	0,71268	0,91535+0	0,73376+0	0,80162+0	0,11097+1
0,69	0,72225	0,91305+0	0,72735+0	0,79661+0	0,11018+1
0,70	0,73179	0,91075+0	0,72093+0	0,79158+0	0,10944+1
0,71	0,74129	0,90841+0	0,71448+0	0,78652+0	0,10873+1
0,72	0,75076	0,90606+0	0,70803+0	0,78143+0	0,10806+1
0,73	0,76019	0,90369+0	0,70155+0	0,77632+0	0,10742+1
0,74	0,76958	0,90129+0	0,69507+0	0,77119+0	0,10681+1
0,75	0,77894	0,89888+0	0,68859+0	0,76604+0	0,10624+1
0,76	0,78825	0,89644+0	0,68207+0	0,76086+0	0,10570+1
0,77	0,79753	0,89399+0	0,67556+0	0,75567+0	0,10519+1
0,78	0,80677	0,89152+0	0,66905+0	0,75046+0	0,10471+1
0,79	0,81597	0,88903+0	0,66254+0	0,74523+0	0,10425+1
0,80	0,82514	0,88652+0	0,65602+0	0,73999+0	0,10382+1
0,81	0,83426	0,88400+0	0,64951+0	0,73474+0	0,10342+1
0,82	0,84335	0,88146+0	0,64300+0	0,72947+0	0,10305+1
0,83	0,85239	0,87898+0	0,63650+0	0,72419+0	0,10270+1
0,84	0,86140	0,87633+0	0,63000+0	0,71891+0	0,10237+1
0,85	0,87037	0,87374+0	0,62351+0	0,71361+0	0,10207+1
0,86	0,87929	0,87114+0	0,61703+0	0,70831+0	0,10179+1
0,87	0,88818	0,85852+0	0,61057+0	0,70300+0	0,10153+1
0,88	0,89703	0,86589+0	0,60412+0	0,69768+0	0,10129+1



0,89	0,90583	0,86324+0	0,59768+0	0,69236+0	0,10108+1
0,90	0,91460	0,86059+0	0,59126+0	0,68704+0	0,10089+1
0,91	0,92333	0,85791+0	0,58486+0	0,68172+0	0,10071+1
0,92	0,93201	0,85523+0	0,57848+0	0,67640+0	0,10056+1
0,93	0,94065	0,85253+0	0,57211+0	0,67108+0	0,10043+1
0,94	0,94925	0,84982+0	0,56578+0	0,66576+0	0,10031+1
0,95	0,95781	0,84710+0	0,55946+0	0,66044+0	0,10021+1
0,96	0,96633	0,84437+0	0,55317+0	0,65513+0	0,10014+1
0,97	0,97481	0,84162+0	0,54691+0	0,64982+0	0,10008+1
0,98	0,98325	0,83887+0	0,54067+0	0,64452+0	0,10003+1
0,99	0,99165	0,83611+0	0,53446+0	0,63923+0	0,10001+1
1,00	1,00000	0,83333+0	0,52828+0	0,63394+0	0,10000+1
1,01	1,00831	0,83055+0	0,52213+0	0,62866+0	0,10001+1
1,02	1,01658	0,82776+0	0,51602+0	0,62339+0	0,10003+1
1,03	1,02481	0,82496+0	0,50994+0	0,61813+0	0,10007+1
1,04	1,03300	0,82215+0	0,50389+0	0,61289+0	0,10013+1
1,05	1,04114	0,81934+0	0,49787+0	0,60775+0	0,10020+1
1,06	1,04925	0,81651+0	0,49189+0	0,60243+0	0,10029+1
1,07	1,05731	0,81368+0	0,48595+0	0,59722+0	0,10039+1
1,08	1,06533	0,81085+0	0,48005+0	0,59203+0	0,10059+1
1,09	1,07331	0,80800+0	0,47418+0	0,58686+0	0,10064+1
1,10	1,08124	0,80515+0	0,46835+0	0,58170+0	0,10079+1
1,11	1,08913	0,80230+0	0,46257+0	0,57655+0	0,10095+1
1,12	1,09699	0,79944+0	0,45682+0	0,57143+0	0,10113+1
1,13	1,10479	0,79657+0	0,45111+0	0,56632+0	0,10132+1
1,14	1,11256	0,79370+0	0,44545+0	0,56123+0	0,10153+1
1,15	1,12029	0,79083+0	0,43983+0	0,55616+0	0,10175+1
1,16	1,12797	0,78795+0	0,43425+0	0,55112+0	0,10189+1
1,17	1,13561	0,78506+0	0,42872+0	0,54609+0	0,10222+1
1,18	1,14321	0,78218+0	0,42322+0	0,54108+0	0,10248+1
1,19	1,15077	0,77929+0	0,41778+0	0,53610+0	0,10276+1

1,20	1,15828	0,77640+0	0,41238+0	0,53114+0	0,10304+1
1,21	1,15575	0,77350+0	0,40702+0	0,52620+0	0,10334+1
1,22	1,17319	0,77061+0	0,40171+0	0,52129+0	0,10366+1
1,23	1,18057	0,76771+0	0,39645+0	0,51640+0	0,10398+1
1,24	1,18792	0,76481+0	0,39123+0	0,51154+0	0,10432+1
1,25	1,19523	0,76190+0	0,38606+0	0,50670+0	0,10468+1
1,26	1,20249	0,75900+0	0,38093+0	0,50189+0	0,10504+1
1,27	1,20972	0,75610+0	0,37586+0	0,49710+0	0,10542+1
1,28	1,21690	0,75319+0	0,37083+0	0,49234+0	0,10581+1
1,29	1,22404	0,75029+0	0,36585+0	0,48761+0	0,10621+1
1,30	1,23114	0,74738+0	0,36091+0	0,48290+0	0,10663+1
1,31	1,23819	0,74448+0	0,35603+0	0,47822+0	0,10706+1
1,32	1,24521	0,74158+0	0,35119+0	0,47357+0	0,10750+1
1,33	1,25218	0,73867+0	0,34640+0	0,46895+0	0,10796+1
1,34	1,25912	0,73577+0	0,34166+0	0,46436+0	0,10842+1
1,35	1,26601	0,73287+0	0,33697+0	0,45980+0	0,10890+1
1,36	1,27286	0,72997+0	0,33233+0	0,45526+0	0,10940+1
1,37	1,27968	0,72707+0	0,32773+0	0,45076+0	0,10990+1
1,38	1,28645	0,72418+0	0,32319+0	0,44628+0	0,11042+1
1,39	1,29318	0,72128+0	0,31869+0	0,44184+0	0,11095+1
1,40	1,29987	0,71839+0	0,31424+0	0,43742+0	0,11149+1
1,41	1,30652	0,71550+0	0,30984+0	0,43304+0	0,11205+1
1,42	1,31313	0,75262+0	0,30549+0	0,42869+0	0,11262+1
1,43	1,31970	0,70973+0	0,30118+0	0,42436+0	0,11320+1
1,44	1,32623	0,70685+0	0,29693+0	0,42007+0	0,11379+1
1,45	1,33272	0,70398+0	0,29272+0	0,41581+0	0,11440+1
1,46	1,33917	0,70110+0	0,28856+0	0,41158+0	0,11501+1
1,47	1,34558	0,69824+0	0,28445+0	0,40739+0	0,11565+1
1,48	1,35195	0,69537+0	0,28039+0	0,40322+0	0,11629+1
1,49	1,35828	0,69251+0	0,27637+0	0,39909+0	0,11695+1
1,50	1,36458	0,68966+0	0,27240+0	0,39948+0	0,11762+1



1,51	1,37083	0,68680+0	0,26848+0	0,39091+0	0,11830+1
1,52	1,37705	0,68396+0	0,26491+0	0,38688+0	0,11899+1
1,53	1,38322	0,68111+0	0,26078+0	0,38287+0	0,11977+1
1,54	1,38936	0,67828+0	0,25700+0	0,37890+0	0,12042+1
1,55	1,39546	0,67545+0	0,25326+0	0,37495+0	0,12116+1
1,56	1,40152	0,67262+0	0,24957+0	0,37105+0	0,12190+1
1,57	1,40755	0,66980+0	0,24593+0	0,36717+0	0,12266+1
1,58	1,41353	0,66699+0	0,24233+0	0,36332+0	0,12344+1
1,59	1,41948	0,66418+0	0,23878+0	0,35951+0	0,12422+1
1,60	1,42539	0,66138+0	0,23527+0	0,35573+0	0,12502+1
1,61	1,43127	0,65858+0	0,23181+0	0,35198+0	0,12584+1
1,62	1,43710	0,65579+0	0,22839+0	0,34827+0	0,12666+1
1,63	1,44290	0,65301+0	0,22501+0	0,34458+0	0,12750+1
1,64	1,44866	0,65023+0	0,22168+0	0,34093+0	0,12836+1
1,65	1,45439	0,64746+0	0,21839+0	0,33731+0	0,12922+1
1,66	1,46008	0,64470+0	0,21515+0	0,33372+0	0,13010+1
1,67	1,46573	0,64194+0	0,21195+0	0,33017+0	0,13100+1
1,68	1,47135	0,63919+0	0,20879+0	0,32664+0	0,13190+1
1,69	1,47693	0,63645+0	0,20567+0	0,32315+0	0,13283+1
1,70	1,48247	0,63371+0	0,20259+0	0,31969+0	0,13376+1
1,71	1,48798	0,63099+0	0,19956+0	0,31626+0	0,13471+1
1,72	1,49345	0,62827+0	0,19656+0	0,31287+0	0,13567+1
1,73	1,49889	0,62556+0	0,19361+0	0,30950+0	0,13665+1
1,74	1,50429	0,62285+0	0,19070+0	0,30617+0	0,13764+1
1,75	1,50966	0,62016+0	0,18782+0	0,30287+0	0,13865+1
1,76	1,51499	0,61747+0	0,18499+0	0,29959+0	0,13967+1
1,77	1,52029	0,61479+0	0,18219+0	0,29635+0	0,14070+1
1,78	1,52555	0,61211+0	0,17944+0	0,29315+0	0,14176+1
1,79	1,53078	0,60945+0	0,17672+0	0,28997+0	0,14281+1
1,80	1,53598	0,60680+0	0,17404+0	0,28682+0	0,14390+1
1,81	1,54114	0,60415+0	0,17140+0	0,28370+0	0,14499+1

1,82	1,54626	0,60151+0	0,16879+0	0,28061+0	0,14610+1
1,83	1,55136	0,59888+0	0,16622+0	0,27756+0	0,14723+1
1,84	1,55642	0,59626+0	0,16369+0	0,27453+0	0,14836+1
1,85	1,56145	0,59365+0	0,16119+0	0,27153+0	0,14952+1
1,86	1,56640	0,59104+0	0,15873+0	0,26857+0	0,15069+1
1,87	1,57140	0,58845+0	0,15631+0	0,26563+0	0,15187+1
1,88	1,57639	0,58586+0	0,15392+0	0,26272+0	0,15308+1
1,89	1,58123	0,58329+0	0,15156+0	0,25984+0	0,15429+1
1,90	1,58609	0,58072+0	0,14924+0	0,25699+0	0,15553+1
1,91	1,59092	0,57816+0	0,14695+0	0,25417+0	0,15677+1
1,92	1,59572	0,57561+0	0,14470+0	0,25138+0	0,15804+1
1,93	1,60049	0,57307+0	0,14247+0	0,24861+0	0,15932+1
1,94	1,60523	0,57054+0	0,14028+0	0,24588+0	0,16062+1
1,95	1,60993	0,56802+0	0,13813+0	0,24317+0	0,16193+1
1,96	1,6146	0,56551+0	0,13600+0	0,24049+0	0,16326+1
1,97	1,61925	0,56301+0	0,13390+0	0,23784+0	0,16461+1
1,98	1,62385	0,56051+0	0,13184+0	0,23521+0	0,16597+1
1,99	1,62844	0,55803+0	0,12981+0	0,23262+0	0,16735+1
2,00	1,63299	0,55556+0	0,12780+0	0,23005+0	0,16875+1
2,02	1,64201	0,55064+0	0,12389+0	0,22499+0	0,17160+1
2,04	1,65090	0,54576+0	0,12009+0	0,22004+0	0,17451+1
2,06	1,65967	0,54091+0	0,11640+0	0,21519+0	0,17750+1
2,08	1,66833	0,53611+0	0,11282+0	0,21045+0	0,18056+1
2,10	1,67687	0,53135+0	0,10935+0	0,20580+0	0,18369+1
2,12	1,68530	0,52663+0	0,10599+0	0,20126+0	0,18690+1
2,14	1,69392	0,52194+0	0,10273+0	0,19681+0	0,19018+1
2,16	1,70183	0,51730+0	0,99562 -1	0,19247+0	0,19354+1
2,18	1,70992	0,51269+0	0,96495 -1	0,18821+0	0,19698+1
2,20	1,71791	0,50813+0	0,93622 -1	0,18405+0	0,20050+1
2,22	1,72579	0,50361+0	0,90640 -1	0,17998+0	0,20409+1
2,24	1,73357	0,49912+0	0,87846 -1	0,17600+0	0,20777+1



2,26	1,74125	0,49468+0	0,85139 -1	0,17211+0	0,21153+1
2,28	1,74882	0,49027+0	0,82515 -1	0,16830+0	0,21538+1
2,30	1,75629	0,48591+0	0,79973 -1	0,16458+0	0,21931+1
2,32	1,76366	0,48158+0	0,77509 -1	0,16095+0	0,22333+1
2,34	1,77093	0,47730+0	0,75122 -1	0,15739+0	0,22744+1
2,36	1,77811	0,47305+0	0,72810 -1	0,15391+0	0,23164+1
2,38	1,78519	0,46885+0	0,70570 -1	0,15052+0	0,23593+1
2,40	1,79218	0,46468+0	0,68399 -1	0,14720+0	0,24031+1
2,42	1,79907	0,46056+0	0,66297 -1	0,14395+0	0,24479+1
2,44	1,80587	0,45647+0	0,64261 -1	0,14078+0	0,24936+1
2,46	1,81256	0,45242+0	0,62288 -1	0,13768+0	0,25403+1
2,48	1,81921	0,44841+0	0,60378 -1	0,13465+0	0,25880+1
2,50	1,82574	0,44444+0	0,58528 -1	0,13169+0	0,25637+1
2,52	1,83219	0,44051+0	0,56736 -1	0,12879+0	0,26865+1
2,54	1,83585	0,43662+0	0,55000 -1	0,12597+0	0,27372+1
2,56	1,84483	0,43277+0	0,53319 -1	0,12321+0	0,27891+1
2,58	1,85103	0,42895+0	0,51692 -1	0,12051+0	0,28420+1
2,60	1,85714	0,42517+0	0,50115 -1	0,11787+0	0,28960+1
2,62	1,86318	0,42143+0	0,48598 -1	0,11530+0	0,29511+1
2,64	1,86913	0,41772+0	0,47110 -1	0,11278+0	0,30073+1
2,66	1,87501	0,41406+0	0,45679 -1	0,11032+0	0,30647+1
2,68	1,88081	0,41043+0	0,44282 -1	0,10792+0	0,31233+1
2,70	1,88653	0,40683+0	0,42950 -1	0,10557+0	0,31830+1
2,72	1,89218	0,40328+0	0,45650 -1	0,10328+0	0,32440+1
2,74	1,89775	0,39976+0	0,40391 -1	0,10104+0	0,32061+1
2,76	1,90325	0,39627+0	0,39172 -1	0,98851 -1	0,33695+1
2,78	1,90868	0,39282+0	0,37992 -1	0,96714 -1	0,34342+1
2,80	1,91404	0,38941+0	0,36848 -1	0,94626 -1	0,35001+1
2,82	1,91933	0,38603+0	0,35741 -1	0,92587 -1	0,35674+1
2,84	1,92455	0,38268+0	0,34669 -1	0,90594 -1	0,36359+1
2,86	1,92970	0,37937+0	0,33631 -1	0,88648 -1	0,37058+1

2,88	1,93479	0,37610+0	0,32625 -1	0,86747 -1	0,37771+1
2,90	1,93981	0,37286+0	0,31651 -1	0,84886 -1	0,38498+1
2,92	1,94477	0,36965+0	0,30708 -1	0,83075 -1	0,39238+1
2,94	1,94966	0,36647+0	0,29795 -1	0,81302 -1	0,39993+1
2,96	1,95449	0,36333+0	0,28910 -1	0,79571 -1	0,40763+1
2,98	1,95925	0,36022+0	0,28054 -1	0,77879 -1	0,41547+1
3,00	1,96396	0,35714+0	0,27224 -1	0,76226 -1	0,42346+1
3,10	1,98661	0,34223+0	0,23449 -1	0,68517 -1	0,46573+1
3,20	2,00786	0,32808+0	0,20228 -1	0,61654 -1	0,51210+1
3,30	2,02781	0,31466+0	0,17477 -1	0,55541 -1	0,56286+1
3,40	2,04656	0,30193+0	0,15125 -1	0,50093 -1	0,61837+1
3,50	2,06419	0,28986+0	0,13111 -1	0,45233 -1	0,67896+1
3,60	2,08077	0,27840+0	0,11385 -1	0,40894 -1	0,74501+1
3,70	2,09639	0,26752+0	0,99029 -2	0,37017 -1	0,81691+1
3,80	2,11111	0,25720+0	0,86290 -2	0,33549 -1	0,89506+1
3,90	2,12499	0,24740+0	0,75320 -2	0,30445 -1	0,97990+1
4,00	2,13809	0,23810+0	0,65861 -2	0,27662 -1	0,10719+2
4,10	2,15046	0,22925+0	0,57690 -2	0,25164 -1	0,11715+2
4,20	2,16215	0,22085+0	0,50621 -2	0,22921 -1	0,12792+2
4,30	2,17321	0,21286+0	0,44494 -2	0,20903 -1	0,13955+2
4,40	2,18368	0,20525+0	0,39176 -2	0,19087 -1	0,15210+2
4,50	2,19360	0,19802+0	0,34553 -2	0,17449 -1	0,16562+2
4,60	2,20300	0,19113+0	0,30526 -2	0,15971 -1	0,18018+2
4,70	2,21192	0,18457+0	0,27012 -2	0,14635 -1	0,19583+2
4,80	2,22038	0,17832+0	0,23943 -2	0,13427 -1	0,21264+2
4,90	2,22842	0,17235+0	0,21256 -2	0,12333 -1	0,23067+2
5,00	2,23607	0,16667+0	0,18900 -2	0,11340 -1	0,25000+2
5,10	2,24334	0,16124+0	0,16832 -2	0,10439 -1	0,27070+2
5,20	2,25026	0,15605+0	0,15013 -2	0,96204 -2	0,29283+2
5,30	2,26685	0,15110+0	0,13411 -2	0,88753 -2	0,31649+2
5,40	2,26313	0,14637+0	0,11997 -2	0,81965 -2	0,34175+2



5,50	2,26913	0,14184+0	0,10748 -2	0,75775 -2	0,36869+2
5,60	2,27487	0,13751+0	0,96430 -3	0,70124 -2	0,39740+2
5,70	2,28030	0,13337+0	0,86635 -3	0,64959 -2	0,42797+2
5,80	2,28552	0,12940+0	0,77941 -3	0,60233 -2	0,46050+2
5,90	2,29051	0,12650+0	0,70214 -3	0,55904 -2	0,49507+2
6,00	2,29528	0,12195+0	0,63336 -3	0,51936 -2	0,53180+2
6,50	2,31626	0,10582+0	0,38547 -3	0,36427 -2	0,75134+2
7,00	2,33333	0,92593 -1	0,24156 -3	0,26088 -2	0,10414+3
7,50	2,34738	0,81633 -1	0,15549 -3	0,19040 -2	0,14184+3
8,00	2,35907	0,72464 -1	0,10243 -3	0,14135 -2	0,19011+3
8,50	2,36899	0,64725 -1	0,68984 -4	0,10658 -2	0,25109+3
9,00	2,37722	0,58140 -1	0,47386 -4	0,81504 -3	0,32719+3
9,50	2,38433	0,52493 -1	0,33141 -4	0,63134 -3	0,42113+3
10,00	2,39046	0,47619 -1	0,23563 -4	0,49483 -3	0,53594+3
11,00	2,40040	0,39683 -1	0,12448 -4	0,31369 -3	0,84191+3
12,00	2,40804	0,33557 -1	0,69222 -5	0,20628 -3	0,12762+4
13,00	2,41404	0,28736 -1	0,40223 -5	0,13998 -3	0,18761+4
14,00	2,41883	0,24876 -1	0,24278 -5	0,97597 -4	0,26854+4
15,00	2,42272	0,21739 -1	0,15148 -5	0,69680 -4	0,37552+4
16,00	2,42591	0,19157 -1	0,97309 -6	0,50795 -4	0,51446+4
17,00	2,42857	0,17007 -1	0,64147 -6	0,37719 -4	0,69205+4
18,00	2,43081	0,15198 -1	0,43272 -6	0,28473 -4	0,91593+4
19,00	2,4327	0,13661 -1	0,29800 -6	0,21813 -4	0,11946+5
20,00	2,43432	0,12346 -1	0,20908 -6	0,16935 -4	0,15377+5
$\infty$	2,44949	0	0	0	$\infty$



Tabla para flujo de Fanno  $\gamma=1,4$

(Flujo adiabático)

M	$M^*=\rho^*/\rho_0$	$t/t^*$	$p/p^*$	$P/P^*$	$(4fL^*)/D$
0,00	0,00000	0,12000+1	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0,01	0,01095	0,12000+1	0,10954+3	0,57874+2	0,71344+4
0,02	0,02191	0,11999+1	0,54770+2	0,28942+2	0,17784+4
0,03	0,03286	0,11998+1	0,36512+2	0,19301+2	0,78708+3
0,04	0,04381	0,11996+1	0,27382+2	0,14481+2	0,44035+3
0,05	0,05476	0,11994+1	0,21903+2	0,11591+2	0,28002+3
0,06	0,06570	0,11991+1	0,18251+2	0,96659+1	0,19303+3
0,07	0,07664	0,11988+1	0,15642+2	0,82915+1	0,14066+3
0,08	0,08758	0,11985+1	0,13684+2	0,72616+1	0,10672+3
0,09	0,09851	0,11981+1	0,12162+2	0,64613+1	0,83496+2
0,10	0,10944	0,11976+1	0,10944+2	0,58218+1	0,66922+2
0,11	0,12035	0,11971+1	0,99466+1	0,52992+1	0,54688+2
0,12	0,13126	0,11966+1	0,91156+1	0,48643+1	0,54408+2
0,13	0,14217	0,11960+1	0,84123+1	0,44969+1	0,38207+2
0,14	0,15306	0,11953+1	0,78093+1	0,41824+1	0,32511+2
0,15	0,16395	0,11946+1	0,72866+1	0,39103+1	0,27932+2
0,16	0,17482	0,11939+1	0,68291+1	0,36727+1	0,24198+2
0,17	0,18569	0,11931+1	0,64253+1	0,34635+1	0,21115+2
0,18	0,19654	0,11923+1	0,60662+1	0,32779+1	0,18543+2
0,19	0,20739	0,11914+1	0,57448+1	0,31123+1	0,16375+2
0,20	0,21822	0,11905+1	0,54554+1	0,29635+1	0,14533+2
0,21	0,22904	0,11895+1	0,51936+1	0,28293+1	0,12956+2
0,22	0,23984	0,11885+1	0,49554+1	0,27076+1	0,11596+2
0,23	0,25063	0,11874+1	0,47378+1	0,25968+1	0,10416+2
0,24	0,26141	0,11863+1	0,45383+1	0,24956+1	0,93865+1
0,25	0,27217	0,11852+1	0,43546+1	0,24027+1	0,84834+1



0,26	0,28291	0,11840+1	0,41851+1	0,23173+1	0,76876+1
0,27	0,29364	0,11828+1	0,40279+1	0,22385+1	0,69832+1
0,28	0,30435	0,11815+1	0,38819+1	0,21656+1	0,63572+1
0,29	0,31504	0,11801+1	0,37459+1	0,20979+1	0,57989+1
0,30	0,32572	0,11788+1	0,36191+1	0,20351+1	0,52993+1
0,31	0,33637	0,11774+1	0,35002+1	0,19765+1	0,48507+1
0,32	0,34701	0,11759+1	0,35887+1	0,19219+1	0,44467+1
0,33	0,35762	0,11744+1	0,32839+1	0,18707+1	0,40821+1
0,34	0,32822	0,11729+1	0,31853+1	0,18229+1	0,37519+1
0,35	0,37879	0,11713+1	0,30922+1	0,17779+1	0,34525+1
0,36	0,38935	0,11697+1	0,30042+1	0,17358+1	0,31801+1
0,37	0,39988	0,11680+1	0,29209+1	0,16961+1	0,29319+1
0,38	0,41039	0,11663+1	0,28419+1	0,16587+1	0,27054+1
0,39	0,42087	0,11646+1	0,27671+1	0,16234+1	0,24983+1
0,40	0,43133	0,11628+1	0,26958+1	0,15901+1	0,23085+1
0,41	0,44177	0,11610+1	0,26279+1	0,15587+1	0,21344+1
0,42	0,45218	0,11591+1	0,25634+1	0,15289+1	0,19744+1
0,43	0,46257	0,11572+1	0,25017+1	0,15007+1	0,18272+1
0,44	0,47293	0,11553+1	0,24428+1	0,14739+1	0,16915+1
0,45	0,48326	0,11533+1	0,23865+1	0,14487+1	0,15664+1
0,46	0,49357	0,11513+1	0,23326+1	0,14246+1	0,14509+1
0,47	0,50385	0,11492+1	0,22809+1	0,14018+1	0,13441+1
0,48	0,51410	0,11471+1	0,22313+1	0,13801+1	0,12353+1
0,49	0,52433	0,11450+1	0,21838+1	0,13595+1	0,11539+1
0,50	0,53452	0,11429+1	0,21381+1	0,13398+1	0,10691+1
0,52	0,55483	0,11384+1	0,20519+1	0,13034+1	0,91742+0
0,54	0,57501	0,11339+1	0,19719+1	0,12703+1	0,78663+0
0,56	0,59507	0,11292+1	0,18975+1	0,12403+1	0,67357+0
0,58	0,61501	0,11244+1	0,18282+1	0,12129+1	0,57568+0
0,60	0,63481	0,11194+1	0,17634+1	0,11882+1	0,49082+0
0,62	0,65448	0,11143+1	0,17026+1	0,11656+1	0,41719+0

0,64	0,67402	0,11091+1	0,16456+1	0,11451+1	0,3533+0
0,66	0,69342	0,11038+1	0,15919+1	0,11256+1	0,29785+0
0,68	0,71268	0,10984+1	0,15913+1	0,11097+1	0,24978+0
0,70	0,73179	0,10929+1	0,14935+1	0,10944+1	0,20814+0
0,72	0,75076	0,10873+1	0,14482+1	0,10806+1	0,17215+0
0,74	0,76958	0,10815+1	0,14054+1	0,10681+1	0,14112+0
0,76	0,78825	0,10757+1	0,13647+1	0,10569+1	0,11447+0
0,78	0,80677	0,10698+1	0,13261+1	0,10147+1	0,91675 -1
0,80	0,82514	0,10638+1	0,12893+1	0,10382+1	0,72289 -1
0,82	0,84335	0,10578+1	0,12542+1	0,10305+1	0,55932 -1
0,84	0,86140	0,10516+1	0,12208+1	0,10237+1	0,42256 -1
0,86	0,87929	0,10454+1	0,11989+1	0,10179+1	0,30965 -1
0,88	0,89703	0,10391+1	0,11583+1	0,10129+1	0,21795 -1
0,90	0,91460	0,10327+1	0,11251+1	0,10089+1	0,14512 -1
0,92	0,93201	0,10263+1	0,11011+1	0,10056+1	0,89133 -2
0,94	0,94925	0,10198+1	0,10743+1	0,10031+1	0,48154 -2
0,96	0,96633	0,10132+1	0,10485+1	0,10014+1	0,20571 -2
0,98	0,98325	0,10066+1	0,10238+1	0,10003+1	0,49469 -3
1,00	1,00000	0,10000+1	0,10000+1	0,10000+1	0,0
1,02	1,01658	0,99331+0	0,97711+0	0,10003+1	0,45869 -3
1,04	1,03300	0,98658+0	0,95507+0	0,10013+1	0,17685 -2
1,06	1,04925	0,97982+0	0,93383+0	0,10029+1	0,38379 -2
1,08	1,06533	0,97302+0	0,91335+0	0,10051+1	0,65846 -2
1,10	1,08124	0,96618+0	0,89359+0	0,10079+1	0,99349 -2
1,12	1,09699	0,95932+0	0,87451+0	0,10113+1	0,13823 -1
1,14	1,11256	0,95244+0	0,85608+0	0,10153+1	0,18188 -1
1,16	1,12797	0,94554+0	0,83826+0	0,10198+1	0,22977 -1
1,18	1,14321	0,93861+0	0,82103+0	0,10248+1	0,28142 -1
1,20	1,15828	0,93168+0	0,80436+0	0,10304+1	0,33638 -1
1,22	1,17319	0,92473+0	0,78822+0	0,10366+1	0,39426 -1
1,24	1,18792	0,91777+0	0,77258+0	0,10432+1	0,45471 -1



1,26	1,20249	0,91080+0	0,75743+0	0,10504+1	0,51739 -1
1,28	1,21690	0,90383+0	0,74274+0	0,10581+1	0,58201 -1
1,30	1,23114	0,89686+0	0,72848+0	0,10663+1	0,64832 -1
1,32	1,24521	0,88989+0	0,71465+0	0,10749+1	0,71607 -1
1,34	1,25912	0,88292+0	0,70122+0	0,10842+1	0,78504 -1
1,36	1,27286	0,87596+0	0,68818+0	0,10939+1	0,85503 -1
1,38	1,28645	0,86901+0	0,67751+0	0,11042+1	0,92586 -1
1,40	1,29987	0,86207+0	0,66319+0	0,11149+1	0,99738 -1
1,42	1,31313	0,85514+0	0,65122+0	0,11262+1	0,10694+0
1,44	1,32623	0,84822+0	0,63958+0	0,11379+1	0,11419+0
1,46	1,33917	0,84133+0	0,62825+0	0,11501+1	0,12146+0
1,48	1,35195	0,83445+0	0,61722+0	0,11629+1	0,12875+0
1,50	1,36458	0,82759+0	0,60648+0	0,11762+1	0,13605+0
1,55	1,39546	0,81054+0	0,58084+0	0,12116+1	0,15427+0
1,60	1,42539	0,79365+0	0,55679+0	0,12502+1	0,17236+0
1,65	1,45439	0,77695+0	0,53421+0	0,12922+1	0,19023+0
1,70	1,48247	0,76046+0	0,51297+0	0,13376+1	0,20779+0
1,75	1,50966	0,74419+0	0,49295+0	0,13865+1	0,22504+0
1,80	1,53598	0,72816+0	0,47407+0	0,14389+1	0,24189+0
1,85	1,55145	0,71838+0	0,45623+0	0,14952+1	0,25832+0
1,90	1,58609	0,69686+0	0,43936+0	0,15553+1	0,27433+0
1,95	1,60993	0,68162+0	0,42339+0	0,16193+1	0,28989+0
2,00	1,63299	0,66667+0	0,40825+0	0,16875+1	0,30500+0
2,10	1,67687	0,63762+0	0,38024+0	0,18369+1	0,33785+0
2,20	1,71791	0,60979+6	0,35494+0	0,20049+1	0,36091+0
2,30	1,75629	0,68309+0	0,33200+0	0,21931+1	0,38623+0
2,40	1,79218	0,55762+0	0,31114+0	0,24031+1	0,40989+0
2,50	1,82574	0,53333+0	0,29212+0	0,26367+1	0,43198+0
2,60	1,85714	0,51020+0	0,27473+0	0,28959+1	0,45259+0
2,70	1,88653	0,48820+0	0,25878+0	0,31829+1	0,47182+0
2,80	1,91404	0,46729+0	0,24414+0	0,35001+1	0,48976+0

2,90	1,93981	0,44743+0	0,23066+0	0,38498+1	0,50652+0
3,00	1,96396	0,42857+0	0,21822+0	0,42346+1	0,52216+0
3,10	1,98661	0,41068+0	0,20672+0	0,46573+1	0,53678+0
3,20	2,00786	0,39370+0	0,19608+0	0,51209+1	0,55044+0
3,30	2,02781	0,37760+0	0,18621+0	0,56286+1	0,56323+0
3,40	2,04656	0,36232+0	0,17704+0	0,61837+1	0,57521+0
3,50	2,06419	0,34783+0	0,16851+0	0,67896+1	0,58643+0
3,60	2,08077	0,33408+0	0,16055+0	0,74701+1	0,59695+0
3,70	2,09639	0,32103+0	0,15313+0	0,81691+1	0,60684+0
3,80	2,11111	0,30864+0	0,14620+0	0,89506+1	0,61612+0
3,90	2,12499	0,29688+0	0,13971+0	0,97989+1	0,62485+0
4,00	2,13809	0,28571+0	0,13363+0	0,10719+2	0,63306+0
4,50	2,19359	0,23762+0	0,10833+0	0,16562+2	0,66763+0
5,00	2,23607	0,20000+0	0,89443 -1	0,25000+2	0,69379+0
5,50	2,26913	0,17021+0	0,75012 -1	0,36869+2	0,71700+0
6,00	2,29528	0,14634+0	0,63758 -1	0,53180+2	0,72988+0
6,50	2,31626	0,12698+0	0,54823 -1	0,75134+2	0,74254+0
7,00	2,33333	0,11111+0	0,47619 -1	0,10414+3	0,75279+0
7,50	2,34738	0,97959 -1	0,41731 -1	0,14184+3	0,76121+0
8,00	2,35907	0,86957 -1	0,36860 -1	0,19011+3	0,76819+0
8,50	2,36889	0,77670 -1	0,32787 -1	0,25109+3	0,77404+0
9,00	2,37722	0,69767 -1	0,29348 -1	0,32719+3	0,77899+0
9,50	2,38433	0,62992 -1	0,26419 -1	0,42113+3	0,78319+0
10,00	2,39046	0,57143 -1	0,23905 -1	0,53594+3	0,78683+0
11,00	2,40039	0,47619 -1	0,19838 -1	0,84191+3	0,79270+0
12,00	2,40804	0,40268 -1	0,16723 -1	0,12762+4	0,79721+0
13,00	2,41404	0,34483 -1	0,14284 -1	0,18761+4	0,80074+0
14,00	2,41883	0,29851 -1	0,12341 -1	0,26854+4	0,80356+0
15,00	2,42272	0,26087 -1	0,10768 -1	0,37552+4	0,80584+0
∞	2,44949	0,0	0,0	∞	0,82151+0



## Problema 71

### Enunciado

Sea un sistema de extinción de incendios destinado a buques, que consta de dos rociadores con un diámetro de 36 mm cada uno, ambos rociadores están conectados por un conducto de 14 m de longitud en cuyo extremo opuesto están situados los tanques de agente extintor. Si se quiere que el caudal másico total que circula por los rociadores sea de 7 Kg/s y la presión de estancamiento en los tanques de 17 bar, que se considerará constante durante el tiempo en que actúen los rociadores, determine el diámetro del conducto necesario.

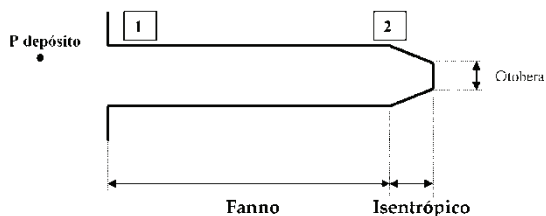
Considérese en primera aproximación:

Que el fluido circulante tiene las mismas propiedades que el aire

Que en el extremo del conducto existe un sólo rociador cuya sección es la suma de secciones de los rociadores iniciales

Que en el conducto se tiene flujo de Fanno con  $C_f=0,005$

Que la unión entre la sección resultante de los rociadores y el conducto se realiza mediante una tobera convergente donde el flujo se considera isentrópico



Datos:

$\varnothing$  tobera L longitud del conducto (m)

P depósito f factor de fricción =0,005

T temperatura del aire  $\dot{m}$  caudal másico circulante requerido

La sección de salida de la tobera será igual a la sección de la suma de agujeros de la tobera o toberas instaladas.

$$R_{\text{AIRE}} = 287,04 \left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} \right]$$





y se obtendrá:  $P_0 = 1.481.035 \text{ [Pa]} \cong 14,8 \text{ [bar]}$

Esta sería la presión de estancamiento en la tobera convergente para que a la salida de la misma se tenga flujo bloqueado.

2. Determinación de las condiciones estáticas y de estancamiento a la entrada de la tobera y, por ende, determinación del diámetro del conducto:

En la tobera convergente se cumple:  $P_0 = \text{cte}$ ;  $T_0 = \text{cte}$

El proceso de cálculo empleado es iterativo. Se supondrá inicialmente un diámetro del conducto, hallándose la presión de estancamiento necesaria en los depósitos de alimentación, si ésta es superior a la presión existente, se deberá aumentar el diámetro del conducto.

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A_C}{A_T} = \frac{\frac{R \cdot D_C}{4}}{\frac{R \cdot D_T}{4}} = \left( \frac{D_C}{D_T} \right)^2$$

Si  $\varnothing$  conducto  $\cong 3'' \cong 76,2 \text{ mm}$ ;

$$\frac{A}{A^*} = \left( \frac{D_C}{D_T} \right)^2 = \left( \frac{76,2}{50,8} \right)^2 = 2,25$$

El numero de Mach a la entrada de la tobera será:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A_C}{A_T} = \frac{1}{M} \left[ \left( \frac{2}{\gamma+1} \right) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

De esta ecuación, para un valor dado de  $\frac{A}{A^*}$  hay que despejar M: (que será el número de Mach a la entrada de la tobera).

De la tabla de flujo isoentrópico para  $\frac{A}{A^*} = 2,25$   $\xrightarrow{\text{SE OBTIENE}}$   $M_2 = 0,27$

Nota. El valor de  $M_2$  ha de ser siempre inferior a la unidad.

En la sección de entrada de la tobera, donde se tiene  $M_2=0,27$ , se cumple:

$$\frac{T_{02}}{T_2} = t \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right); \quad \text{relación de las temperaturas de estancamiento y estática a la entrada de la tobera}$$



$$\frac{P_{02}}{P_2} = t \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} ; \quad \text{relación presión estancamiento y presión estática a la entrada de la tobera}$$

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_2} = t \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} ; \quad \text{relación de densidades}$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores el valor de  $M_2=0,27$ , se halla:

$$\frac{T_{02}}{T_2} = 0,98563 \quad \frac{P_{02}}{P_2} = 0,95060 \quad \frac{\rho_{02}}{\rho_2} = 0,96446$$

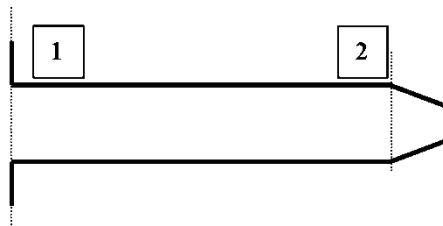
de donde:

$$P_2 = 0,95060 * 1.481.035 = 1.407.871,9 \text{ Pa}$$

3. La presión a la entrada del conducto,  $P_{\text{depósito}}$  se obtiene:

Puesto que el flujo en el conducto es de Fanno, se cumplirá:

$$\frac{4Cf l^*}{D} \Big|_1 = \frac{4Cf l^*}{D} \Big|_2 + 4Cf \frac{\Delta x}{D}$$



donde:

$$\frac{4\overline{Cf} l^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \left( \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right) \text{Ln} \left\{ M^2 \left[ \left( \frac{2}{\gamma+1} \right) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{-1} \right\} \quad (A)$$

Para  $M_2=0,27$ ; de la tabla para flujo de Fanno  $\xrightarrow{\text{SE OBTIENE}}$   $\frac{4f l^*}{D} \Big|_2 = 6,9832$

Por otro lado:

$$4Cf \frac{\Delta x}{D_{\text{estimado del tubo}}} = 4 * 0,005 * \frac{14}{0,0762} = 3,6745$$

con lo cual:



$$\left. \frac{4Cf l^*}{D} \right|_1 = 6,9832 + 3,6745 = 10,6577$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo de Fanno, o bien sustituyendo M en la ecuación (A), se obtiene el valor de Mach en el punto 1.

Así:  $M_1 = 0,229$

Este valor siempre tiene que ser menor que M2.

Las presiones estática y de estancamiento a la entrada del conducto se determinan (de la tabla de flujo de Fanno).

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\left. \frac{P}{P^*} \right|_{M1}}{\left. \frac{P}{P^*} \right|_{M2}} = \frac{4,7378}{4,0279} \xrightarrow{\text{SE OBTIENE}} P_1 = 1.407.871,9 \frac{4,7378}{4,0279} = 1.656.003,2 \text{ (Pa)}$$

La relación entre la presión estática y la de estancamiento, para un número de Mach dado, se puede obtener aplicando asimismo la ecuación:

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M} \left[ \left( \frac{2}{\gamma+1} \right) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

La presión de estancamiento en el punto 1 se obtendrá:

$$\frac{P_{01}}{P_1} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \xrightarrow{\text{DE DONDE}} P_{01} = \frac{P_1}{0,964141} = 1.717.594,4 \text{ (Pa)}$$

O bien de la tabla de flujo isentrópico para  $M_1 = 0,299$ :  $\left. \frac{P_1}{P_{01}} \right|_{M1} = 0,964132$

Si esta presión es superior a la presión de estancamiento de las botellas de alimentación que se ha considerado como constante e igual a 17 bar, será necesario aumentar la

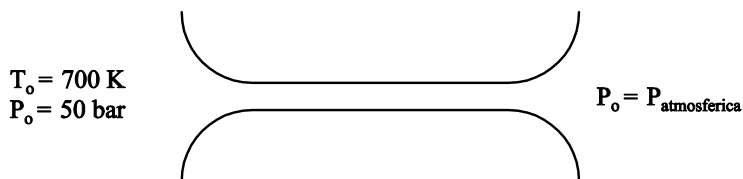
relación  $\frac{A}{A^*} = \frac{A_C}{A_T}$ , es decir, aumentar la sección del conducto. En realidad, puesto que

la presión de estancamiento obtenida en 1 es ligeramente superior a 17 bar, se debería repetir el problema para un diámetro de conducto ligeramente superior.

## Problema 72

### Enunciado

Se tienen dos depósitos unidos por un conducto de diámetro 0,2 m y una longitud de 2 m, en cuyos extremos se encuentran sendas toberas. En el primero de los depósitos, las características termodinámicas del fluido de trabajo son:  $P_o = 50 \text{ bar}$   $T_o = 700 \text{ K}$  mientras que en el depósito de salida se puede considerar que la presión es la atmosférica.

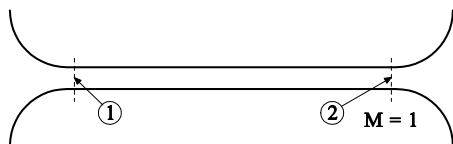


Determine:

1. Si el fluido de trabajo es aire, el conducto es rugoso, con una rugosidad absoluta de  $\epsilon = 0,00003 \text{ m}$  determine las características de presión y temperatura a la entrada y a la salida del conducto. Halle asimismo el caudal másico circulante. Considere el índice de adiabaticidad  $\gamma = 1,4$  en todo el problema.
2. ¿Cuál sería el caudal másico circulante si se considerase la tubería como lisa y el flujo a lo largo de la misma como isentrópico?
3. Si el fluido de trabajo es vapor recalentado y se desea que el caudal circulante sea el 75 % del caudal hallado en el primer apartado, determine: el calor que hay que suministrar al conducto con el fin de que se tenga flujo bloqueado. Considere el conducto sin rugosidad. Considere, además, para este apartado que la presión y la temperatura del depósito inicial se pueden tomar en primera aproximación como estáticas. R vapor de agua =  $461,52 \text{ J}/(\text{kg K})$ .

### Resolución

1. A priori, se supone que el flujo está bloqueado, con lo que el valor del número de Mach a la salida del conducto, punto 2, será la unidad.





Según Fanno, entre los puntos 1 y 2 se ha de cumplir:  $\frac{4C_f L_1^*}{D} = \frac{4C_f L_2^*}{D} + \frac{4C_f \Delta L^*}{D}$

Puesto que, según la hipótesis en el punto 2 el número de Mach es la unidad, se tiene:

$$\frac{4C_f L_1^*}{D} = \frac{4C_f \Delta L^*}{D}$$

El factor de fricción se puede determinar partiendo de:  $\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,00003}{0,2} = 0,00015$

Suponiendo flujo turbulento desarrollado, del diagrama de Moody se obtiene  $f = 0,013 = 4 C_f$ , con lo que:

$$\frac{4C_f L_1^*}{D} = \frac{4C_f \Delta L^*}{D} = \frac{0,013}{0,2} \cdot 2 = 0,13$$

Entrando con este valor en las tablas de flujo de Fanno, se obtiene:

$$M_1 = 0,746; \quad \frac{P}{P^*} = 1,413; \quad \frac{P_0}{P_0^*} = 1,064; \quad \frac{T}{T^*} = 1,079; \quad \frac{\rho}{\rho^*} = 0,773;$$

Para  $M_1 = 0,746$  de las tablas de flujo isentrópico, se tiene:

$$\frac{T}{T_0} = 0,8995; \quad \frac{P}{P_0} = 0,692; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 0,7685;$$

Puesto que  $P_0$  y  $T_0$  son conocidas y se mantienen a lo largo de la tobera de entrada, se tiene que:

$$P_1 = 0,692 \cdot 5.000.000 = 3.460.000 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 0,8995 \cdot 700 = 629,65 \text{ K}$$

La presión y temperatura estática a la salida del conducto, donde  $M = 1$  (hipótesis)

$$P_2^* = \frac{P_1}{1,413} = \frac{3.460.000}{1,413} = 2.448.690,72 \text{ Pa}$$

$$P_{02}^* = \frac{P_{01}}{1,064} = \frac{5.000.000}{1,064} = 4.699.248,1 \text{ Pa}$$

$$T^* = \frac{T_1}{1,079} = \frac{629,65}{1,079} = 583,54 \text{ K}$$

Para  $M = 1$  de la tabla de flujo isentrópico, se tiene:

$$\frac{T}{T_0} = 0,83333 \quad T_{02} = \frac{T_2}{0,83333} = \frac{583,54}{0,83333} = 700 \text{ K}$$

Obsérvese que la temperatura de estancamiento se mantiene; ésta es una característica del flujo de Fanno.

Se comprueba, por otro lado, que la diferencia de presiones que en realidad existe entre los dos depósitos es mucho mayor que la diferencia de presiones necesaria para que exista flujo bloqueado; por tanto, se concluye que la hipótesis realizada al principio de este problema es acertada: el flujo está bloqueado.

El caudal másico se determinará mediante la expresión:

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{P_0A} = \sqrt{\gamma} \cdot M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Para  $M = 1$  y  $\gamma = 1,4$ ; se obtiene:

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{P_0A} = 0,6847;$$

de donde:

$$\dot{m} = 0,6847 \cdot 4699248,1 \cdot \frac{1}{\sqrt{287 \cdot 700}} \cdot \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} = 225,47 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Éste es el caudal másico máximo que, para las condiciones de entrada dadas, puede fluir por esta instalación.

El caudal másico por unidad de superficie será:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = 7.176,93 \text{ kg /sm}^2$$

Dicho caudal másico se puede determinar, asimismo:

$$C = V^* = \sqrt{\gamma RT^*} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 583,54} = 484,21 \text{ m/s}$$

$$\rho_2^* = \frac{P_2}{RT} = \frac{2.448.690,72}{287 \cdot 583,5495} = 14,62 \text{ kg/m}^3$$



$$\dot{m} = \rho_2^* AV^* = 14,62 \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} \cdot 484,21 = 222,401 \text{ kg / s}$$

Véase que el caudal másico obtenido es prácticamente el mismo por los dos métodos.

2. Si el flujo se considera adiabático en todo punto,  $P_0$  y  $T_0$  se mantienen. Así, el caudal másico será:

$$\dot{m} = \frac{P_0 A}{\sqrt{RT_0}} 0,6847 = \frac{5.000.000 \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4}}{\sqrt{287 \cdot 700}} 0,6847 = 236,77 \text{ kg / s ;}$$

Obsérvese que si el flujo es ideal, el caudal másico máximo circulante es mayor.

3. En este apartado, el fluido circulante es vapor de agua, gas real; el flujo se considera sin fricción y con transferencia de calor, flujo de Rayleigh.

Según el enunciado, el caudal máximo que se quiere que circule por la instalación es:

$$G = 0,75 \cdot G_{(\text{apartado 1})}$$

$$G = 0,75 \cdot 7.176,93 = 5.382,69 \text{ kg / (s m}^2\text{)}$$

La ecuación de la curva característica de Rayleigh será:

$$\frac{1}{\rho_2} = v_2 = \frac{P_1 + G^2 v_1 - P_2}{G^2} ;$$

El enunciado dice que, como primera aproximación, se puede considerar la presión y la temperatura de estancamiento en el depósito inicial como estáticas. Por consiguiente, entrando con los valores de  $P = 50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  y  $T = 700 \text{ K}$  en el diagrama de Molière para el vapor de agua, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} = v = 0,062 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$h = 3.275 \text{ kJ / kg}$$

$$s = 6,73 \text{ kJ / kg K}$$

Sustituyendo en la ecuación característica para flujo de Rayleigh, se tiene:

$$\frac{1}{\rho_2} = v_2 = \frac{P_1 + G^2 v_1 - P_2}{G^2} = \frac{5.000.000 + 5.382,59^2 \cdot 0,062 - P_2}{5.382,59^2}$$

Sustituyendo en la expresión anterior los valores conocidos y dando valores arbitrarios a  $P_2$ , se obtendrán sendos valores del volumen específico. Entrando con los valores de la presión y el volumen específico en el punto 2 (extremo final del tubo), en el diagrama de Molière se obtendrá el valor de la temperatura, entalpía y entropía en este punto.

Parámetros de entrada diagrama de Molière		Parámetros de salida obtenidos mediante el diagrama de Molière		
$P_2$ (Pa)	$v_2$ (m <sup>3</sup> /kg)	$T_2$ (°C)	$h_2$ (kJ/kgK)	$S_2$ (kJ/kgK)
$52 \cdot 10^5$	0,05509	390	3180	6,58
$50 \cdot 10^5$	0,062	427	3275	6,74
$46 \cdot 10^5$	0,0758	520	3490	7,06
$40 \cdot 10^5$	0,09651	580	3630	7,29
$32 \cdot 10^5$	0,12412	584	3650	7,43
$30 \cdot 10^5$	0,13102	583	3650	7,45
$26 \cdot 10^5$	0,14483	520	3600	7,44
$22 \cdot 10^5$	0,158	480	3425	7,31

Los puntos definidos en esta tabla formarían la denominada línea de Rayleigh, que es el lugar geométrico de todos los estados posibles para flujo sin fricción, con transferencia de calor y para el flujo másico deseado.

El flujo bloqueado se obtendrá en el punto de entropía máxima.

La velocidad del fluido en la zona de bloqueo se puede obtener como:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \frac{\rho VA}{A} = \rho V \qquad V = \frac{G}{\rho} = \frac{G}{\frac{1}{v}} = \frac{5.382,69}{0,13102} = 705,28 \text{ m/s}$$

La velocidad del fluido a la entrada del conducto será:



$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho V \quad V = \frac{G}{\rho} = \frac{5.382,69}{0,062} = 333,727 \text{ m/s}$$

El número de Mach a la entrada será:

$$C = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1,4 \cdot 461,52 \cdot 700} = 672,52 \text{ m/s}$$

$$M = \frac{333,72}{672,52} = 0,4962$$

A la salida del conducto, el número de Mach será:

$$C = \sqrt{1,4 \cdot 461,52 \cdot (583 + 273)} = 743,69 \text{ m/s}$$

$$M = \frac{705,28}{743,69} = 0,948$$

El número de Mach debería dar la unidad. Esta desviación es debida a que los puntos arbitrarios definidos en la tabla anterior no tienen porqué coincidir con la entropía máxima real; y por otro lado, se tiene poca precisión al utilizar el diagrama de Molière.

El calor comunicado al fluido se puede determinar:

$$Q + h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$Q + 3.275.000 + \frac{333,72^2}{2} = 3.650.000 + \frac{705,28^2}{2}$$

$$Q = 568.023,08 \text{ J/kg}$$

Puesto que las condiciones estáticas a la entrada del conducto en realidad se han supuesto, el problema debe repetirse para los nuevos valores de la presión y temperatura estáticas a la entrada del conducto.

El nuevo número de Mach determinado a la entrada del conducto es:  $M_1 = 0,496$ .

Entrando con este número de Mach en la tabla de flujo isentrópico, se obtiene:

$$\frac{T}{T_0} = 0,9531; \quad \frac{P}{P_0} = 0,845256; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 0,886846$$

con lo que la nueva presión y temperatura estáticas en el punto 1 serán:

$$P = 50 \cdot 10^5 \cdot 0,845256 = 4.226.280 \text{ Pa}$$



$$T_1 = 700 \cdot 0,9531 = 667,17 \text{ K}$$

Entrando en el diagrama de Molière con estos dos valores se obtienen el valor del volumen específico, la entalpía y la entropía.

Sustituyendo estos valores en  $\frac{1}{\rho_2} = v_2 = \frac{P_1 + G^2 v_1 - P_2}{G^2}$ , se puede obtener una tabla

similar a la obtenida para los valores precedentes, de donde se obtendrá un nuevo punto de entropía máxima, un nuevo número de Mach a la entrada y un nuevo calor comunicado. El proceso seguirá hasta que se obtenga convergencia.

### Problema 73

#### Enunciado

Se requiere diseñar un prototipo de avión supersónico. A priori, se pretende que vuele a 10.000 y 20.000 m de altura, y se requiere estudiar la posibilidad de que vuele a  $M=2$  y  $M=5$ . Como primera aproximación, se entenderá que el coeficiente de arrastre del avión está básicamente influenciado por las fuerzas que actúan sobre la estructura cónica de la parte frontal del avión. Determine para las condiciones de vuelo establecidas, cuál es la potencia requerida en los motores del avión, suponiendo que el ángulo del cono pueda ser de  $30^\circ$  o bien de  $20^\circ$ . Considere el diámetro de la base del cono de 1,5 m  $\gamma=1,4$ .

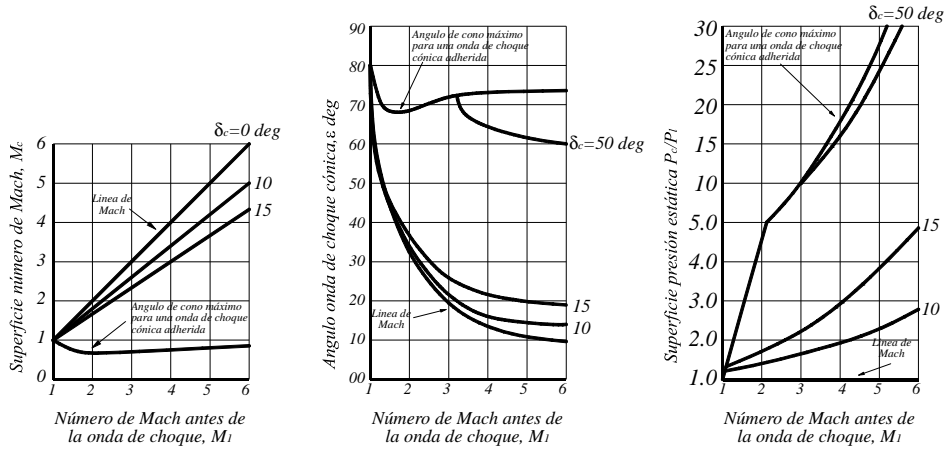
¿Cuál es el valor de la presión de estancamiento en la superficie del cono y de la corriente no perturbada?

¿Qué conclusiones se extraen de los resultados obtenidos?

Propiedades de la atmósfera:	a 10.000 m.	a 20.000 m.
T (K)	223,25	216,65
P (Pa)	$2,65 \cdot 10^4$	$5,5293 \cdot 10^3$
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	0,41351	0,088910
$\mu$ (Kg/(ms))	$1,4577 \cdot 10^{-5}$	$1,4216 \cdot 10^{-5}$



Fig. 73.1  
Diferentes  
diagramas de  
trabajo



### Resolución

De las gráficas del enunciado, se obtiene:

$$M_1 = 2; \delta_c = 15^\circ; \rightarrow \quad \epsilon = 34^\circ; \quad M_c = 1,7; \quad P_c/P_1 = 1,5$$

$$M_1 = 2; \delta_c = 10^\circ; \rightarrow \quad \epsilon = 31,5^\circ; \quad M_c = 1,82; \quad P_c/P_1 = 1,25$$

$$M_1 = 5; \delta_c = 15^\circ; \rightarrow \quad \epsilon = 20^\circ; \quad M_c = 3,8; \quad P_c/P_1 = 3,7$$

$$M_1 = 5; \delta_c = 10^\circ; \rightarrow \quad \epsilon = 16^\circ; \quad M_c = 4,3; \quad P_c/P_1 = 2,35$$

La fuerza sobre la estructura cónica vendrá dada por el producto de la presión estática sobre la superficie del cono por el área del mismo.

1. Para una altura de 10.000 m:

$$M = 2; \delta_c = 15^\circ; \quad P_c = 1,5 * 2,65 * 10^4 = 39.750 \text{ Pa}$$

$$M = 2; \delta_c = 10^\circ; \quad P_c = 1,25 * 2,65 * 10^4 = 33.125 \text{ Pa}$$

$$M = 5; \delta_c = 15^\circ; \quad P_c = 3,7 * 2,65 * 10^4 = 98.050 \text{ Pa}$$

$$M = 5; \delta_c = 10^\circ; \quad P_c = 2,35 * 2,65 * 10^4 = 62.275 \text{ Pa}$$

La presión de estancamiento en la superficie del cono, que se obtiene tabla de flujo isentrópico es:

$$M_c = 1,7; \rightarrow \quad P_c/P_{oc} = 0,20259; \quad P_{oc} = 39.750 / 0,20259 = 196.209 \text{ Pa}$$

$$M_c = 1,82; \rightarrow \quad P_c/P_{oc} = 0,16879; \quad P_{oc} = 33.125 / 0,16879 = 196.249 \text{ Pa}$$

$$M_c = 3,8; \rightarrow P_c/P_{oc} = 0,0086290; \quad P_{oc} = 98.050 / 0,0086290 = 11.362.846,2 \text{ Pa}$$

$$M_c = 4,3; \rightarrow P_c/P_{oc} = 0,0044494; \quad P_{oc} = 62.275 / 0,0044494 = 13.996.269 \text{ Pa}$$

La presión de estancamiento antes de la onda de choque que se obtiene yendo a la tabla de flujo isentrópico responde a la relación:

$$M = 2; \rightarrow P_1/P_{01} = 0,12780; \quad P_{01} = 2,65 * 10^4 / 0,12780 = 207.355,2 \text{ Pa}$$

$$M = 5; \rightarrow P_1/P_{01} = 0,00189; \quad P_{01} = 2,65 * 10^4 / 0,00189 = 14.021.164 \text{ Pa}$$

La superficie sobre la que actúa la presión es  $\pi * 1,5^2 / 4 = 1,7671 \text{ m}^2$

La fuerza en la estructura será:

$$39.750 * 1,7671 = 70.244 \text{ N} \quad M = 2; \quad \delta_c = 15^\circ;$$

$$33.125 * 1,7671 = 58.536 \text{ N} \quad M = 2; \quad \delta_c = 10^\circ;$$

$$98.050 * 1,7671 = 173.268 \text{ N} \quad M = 5; \quad \delta_c = 15^\circ;$$

$$62.275 * 1,7671 = 110.049 \text{ N} \quad M = 5; \quad \delta_c = 10^\circ;$$

de donde la potencia:

$$P = F * V; \quad C = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1,4 * 287 * 223,25} = 299,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$M = V / C;$$

$$M = 2; \quad \delta_c = 15^\circ; \quad 70.244 * 2 * 299,5 = 42.076.156 \text{ W}$$

$$M = 2; \quad \delta_c = 10^\circ; \quad 58.536 * 2 * 299,5 = 35.063.064 \text{ W}$$

$$M = 5; \quad \delta_c = 15^\circ; \quad 173.268 * 2 * 299,5 = 259.468.830 \text{ W}$$

$$M = 5; \quad \delta_c = 10^\circ; \quad 110.049 * 2 * 299,5 = 164.798.377 \text{ W}$$

2. Para una altura de 20.000 m:

$$M = 2; \quad \delta_c = 15^\circ; \quad P_c = 1,5 * 5,5293 * 10^3 = 8.293,9 \text{ Pa}$$

$$M = 2; \quad \delta_c = 10^\circ; \quad P_c = 1,25 * 5,5293 * 10^3 = 6.911,6 \text{ Pa}$$

$$M = 5; \quad \delta_c = 15^\circ; \quad P_c = 3,7 * 5,5293 * 10^3 = 20.458,4 \text{ Pa}$$

$$M = 5; \quad \delta_c = 10^\circ; \quad P_c = 2,35 * 5,5293 * 10^3 = 12.993,8 \text{ Pa}$$



La presión de estancamiento en la superficie del cono será:

$$P_{oc} = 8.293,9 / 0,20259 = 40.939,3 \text{ Pa}$$

$$P_{oc} = 6.911,62 / 0,16879 = 40.948,0 \text{ Pa}$$

$$P_{oc} = 20.458,4 / 0,008629 = 2.370.888,8 \text{ Pa}$$

$$P_{oc} = 12.993,8 / 0,0044494 = 2.920.348,8 \text{ Pa}$$

La presión de estancamiento antes de la onda de choque vale:

$$P_{01} = 5,5293 * 10^3 / 0,12780 = 43.265,2 \text{ Pa}$$

$$P_{01} = 5,5293 * 10^3 / 0,00189 = 2.925.555,5 \text{ Pa}$$

La fuerza actuante será:

$$8.293,9 * 1,7671 = 14.656 \text{ N}$$

$$6.911,62 * 1,7671 = 12.213 \text{ N}$$

$$20.458,4 * 1,7671 = 36.152 \text{ N}$$

$$12.993,8 * 1,7671 = 22.961,3 \text{ N}$$

La velocidad del sonido a 20.000 m se determina:

$$C = \sqrt{1,4 * 287 * 216,65} = 295,04 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La potencia requerida será:

$$14.656 * 2 * 295,04 = 8.648.212 \text{ W}$$

$$12.213 * 2 * 295,04 = 7.206.647 \text{ W}$$

$$36.152 * 5 * 295,04 = 53.331.430 \text{ W}$$

$$22.961,3 * 5 * 295,04 = 33.872.509 \text{ W}$$

Obsérvese que la disminución del ángulo del cono da lugar a una disminución notoria de la potencia requerida.

Por otro lado, al aumentar la altura de vuelo, disminuye la potencia necesaria en los motores.

En realidad, para determinar la potencia total, será necesario tener en cuenta las fuerzas debidas a la fricción y a la distribución de presiones sobre los demás elementos componentes del avión.

## Problema 74

### Enunciado

Sea el motor de cohete que se muestra en la figura. Las dimensiones principales del mismo son: diámetro de la cámara de combustión 40 cm; diámetro de la garganta de la tobera 25 cm; diámetro de la salida de la tobera supersónica 100 cm. Se sabe que la tobera está adaptada a una altura de 3.000 m.  $\gamma = 1,4$ .

Determine:

1. La presión estática en la cámara de combustión necesaria para que exista la adaptación requerida.
2. El caudal másico circulante bajo las condiciones de adaptación.
3. El empuje del motor en estas condiciones.
4. La ecuación que determina la aceleración temporal del cohete en la zona subsónica de velocidad.
5. La ecuación de la aceleración del cohete en régimen supersónico.

Comente en cada caso las hipótesis realizadas.

Considere la temperatura estática en la cámara de combustión de 900 K.

Variación de la temperatura del aire atmosférico con la altura:  $T=288,16 - 0,0065 Z$ .

P atmosférica a nivel del mar: 100.000 Pa.

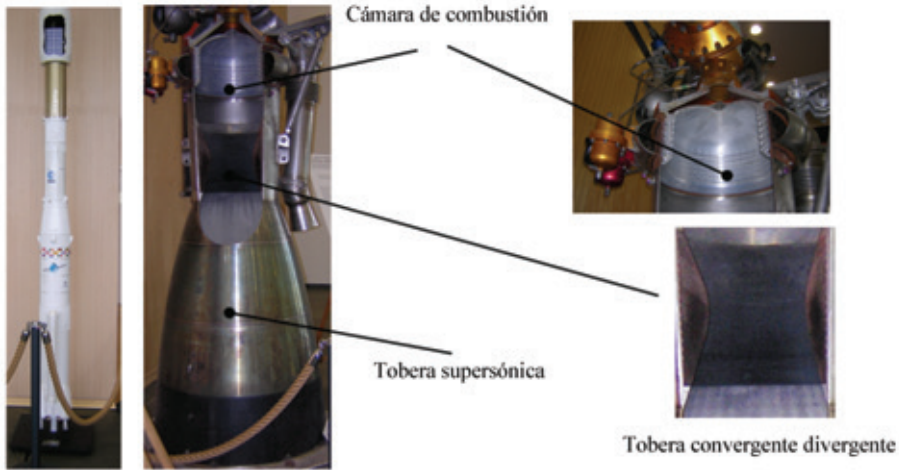
Ángulo del cono de la punta del cohete 30°.

Como primera aproximación, tome la constante del gas (R) como la del aire.

Supóngase conocido el coeficiente de arrastre  $C_D$ .



Fig. 74.1  
Conjunto motor de  
cohete



## Resolución

La presión del aire atmosférico a una altura de 3.000 m se determina:

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz$$

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T$$

$$T = T_0 - Bz$$

$$T_0 = 288,16 \text{ K}$$

$$B = 0,00650 \frac{\text{K}}{\text{m}}$$

$$R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$$

La presión a 3000 m de altura será:

$$\int_{P_{\text{atm}}}^{P_{3000}} \frac{dp}{p} = - \int_{z_0=0}^{z=3000} \frac{g}{R(T_0 - Bz)} dz$$

$$\ln \left( \frac{P_{3000}}{P_{\text{atm}}} \right) = \frac{g}{R \cdot B} \ln \left( \frac{T_0 - BZ_{3000}}{T_0 - BZ_0} \right)$$

$$P_{3000} = P_{atm} \cdot \left( \frac{T_o - BZ_{3000}}{T_o - BZ_o} \right)^{\frac{g}{R \cdot B}}$$

$$P_{3000} = 10^5 \cdot \left( \frac{288,16 - 0,0065 \cdot 3000}{288,16} \right)^{\frac{9,8}{0,0065 \cdot 287}}$$

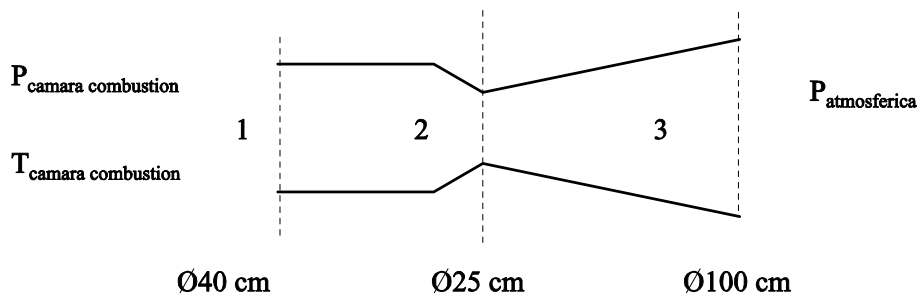
$$P_{3000} = 10^5 \cdot 0,932329^{5,2532}$$

$$P_{3000} = 10^5 \cdot 0,69205 = 69205,54 \text{ Pa}$$

Una vez se conoce la presión atmosférica a 3.000 m de altura, se puede determinar la presión mínima necesaria en la cámara de combustión. Para ello, será necesario recordar el concepto de adaptación de presión en una tobera supersónica.

Una tobera se dice esta adaptada, cuando la presión estática a la salida de la tobera, coincide con la presión atmosférica a la altura a la que esta realizada dicha adaptación, no existiendo bajo estas condiciones onda de choque alguna a la salida de la tobera.

Para la resolución de este problema no obstante, se considerará que la adaptación a la que hace referencia el enunciado, es tal que, la presión estática a la salida de la tobera coincide con la presión atmosférica a una altura de 3000 m, pero si que existe una onda de choque plana a la salida de la tobera. Esta consideración se realiza con el fin de incluir en el problema el tratamiento de ondas de choque planas.



Puesto que en el punto 2, garganta de la tobera, el número de Mach será  $M_2 = 1$ ; de la tabla de flujo isentrópico, entrando con la relación de áreas:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{0,4^2}{0,25^2} = 2,56$$

Se obtiene:

$$M_1 = 0,233; \quad \left. \frac{T}{T_o} \right|_1 = 0,9892; \quad \left. \frac{P}{P_o} \right|_1 = 0,9627;$$



Entre los puntos 2 y 3 la relación de áreas es:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1^2}{0,25^2} = 16$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo isentrópico:

$$\frac{T}{T_0} = 0,201056 ; \quad \frac{P}{P_0} = 0,00364946 ; \quad M_3 = 4,458 ;$$

Puesto que en las condiciones de diseño a la salida de la tobera se supone que aparece una onda de choque plana, entrando en la tabla de ondas de choque planas para un número de Mach de  $M_3 = 4,458$  se obtienen las condiciones entre la entrada y la salida de la onda de choque.

$M_3$  antes de la onda de choque = 4,458

$M_3$  después de la onda de choque = 0,42426

$$\frac{T_{3 \text{ despues}}}{T_{3 \text{ antes}}} = 4,802272 ; \quad \frac{P_{3 \text{ despues}}}{P_{3 \text{ antes}}} = 23,022 ;$$

La presión  $P_{\text{después}}$  se considera que es la presión atmosférica a una altura de 3.000 m.

$$P_{3 \text{ antes}} = \frac{P_{3 \text{ despues}}}{23,022} = \frac{69.205,54}{23,022} = 3.006,061 \text{ Pa}$$

La presión de estancamiento delante y detrás de la onda de choque se calcula:

Entrando con el valor de  $M_3 \text{ despues} = 0,42426$  en la tabla de flujo isentrópico se tiene:

$$\left. \frac{P}{P_0} \right|_{3 \text{ despues}} = 0,88277 ; \quad P_{03 \text{ despues}} = \frac{69205,54}{0,88277} = 78.395,89 \text{ Pa}$$

A la entrada de la onda de choque, donde  $M_3 \text{ entrada} = 4,458$  de la tabla de flujo isentrópico, se tiene:

$$\left. \frac{P}{P_0} \right|_{3 \text{ antes}} = 0,00364946 ; \quad P_{03 \text{ antes}} = \frac{3006,061}{0,00364946} = 823.700,21 \text{ Pa}$$

Cabe recordar que la presión de estancamiento determinada a la entrada de la onda de choque se mantiene constante a lo largo de toda la tobera.



La presión estática en la garganta se determina mediante la relación  $\left. \frac{P}{P_0} \right|_2$ , la cual se obtiene de la tabla de flujo isentrópico, entrando con un número de Mach igual a la unidad.  $M_2=1$ , y se obtiene:

$$\left. \frac{P}{P_0} \right|_2 = 0,52828$$

$$P_2 = P_0 \cdot 0,52828 = 823700,21 \cdot 0,52828 = 435144,34 \text{ Pa}$$

Entrando con el valor del número de Mach de  $M_1 = 0,233$  en la tabla de flujo isentrópico, se obtiene la relación:

$$\left. \frac{P}{P_0} \right|_1 = 0,9627$$

de donde:

$$P_1 = 823700,21 \cdot 0,9627 = 792976,19 \text{ Pa}$$

Ésta es la presión estática necesaria en la cámara de combustión para que se cumplan las condiciones establecidas en el enunciado.

El flujo másico que circula por la tobera, para un  $\gamma = 1,4$ , es de:

$$\frac{\dot{m} \cdot \sqrt{RT_0}}{P_0 \cdot A^*} = 0,6847;$$

$$\dot{m} = \frac{P_0 \cdot A^* \cdot 0,6847}{\sqrt{RT_0}}$$

El enunciado establece que la temperatura estática del gas en la cámara de combustión es de 900 K con lo que la temperatura de estancamiento se determinará: Entrando con el número de Mach  $M = 0,223$  en la tabla de flujo isentrópico se llega.

$$\frac{T}{T_0} = 0,9892 ; \quad T_0 = \frac{900}{0,9892} = 909,82 \text{ K} ;$$

Recordando que la presión y la temperatura de estancamiento se mantienen a lo largo de toda la tobera, se tiene:

$$\dot{m} = \frac{823.700,21 \cdot \frac{\pi \cdot 0,25^2}{4} \cdot 0,6847}{\sqrt{287 \cdot 909,82}} = 54,177 \frac{\text{Kg}}{\text{S}}$$



La fuerza de empuje de la tobera se determina por la expresión:  
 $F = \dot{m}V + A_T(P_{\text{salida}} - P_{\text{atm}})$ ; donde  $A_T$  es la sección de salida de la tobera,  $P_{\text{salida}}$  es la presión estática a la salida de la tobera, y  $P_{\text{atm}}$  es la presión atmosférica en las condiciones en las que se produce la adaptación de la tobera. Para el caso de una tobera adaptada la fuerza de empuje es simplemente  $F = \dot{m}V$ .

Si se realiza el cálculo de la fuerza de empuje delante de la onda de choque se tiene:

$$M_{3 \text{ antes}} = 4,458 = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{\gamma RT}}$$

La temperatura estática del fluido antes de la onda de choque, donde  $M_3 = 4,453$ , se obtiene mediante la relación de temperaturas que se obtendrá de la tabla de flujo isentrópico.

$$\left. \frac{T}{T_0} \right|_{3 \text{ antes}} = 0,201056 ;$$

$$T = T_0 \cdot 0,201056 = 909,82 \cdot 0,201056 = 182,92 \text{ K} ;$$

$$v = M_3 \cdot \sqrt{\gamma RT} = 4,458 \cdot \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 182,92} = 1208,59 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El empuje de la tobera será:

$$F_y = 54,177 \cdot 1.208,59 + \frac{\pi 1^2}{4} (3006,06 - 69205,54) = 13.484,83 \text{ N}$$

Si se calcula la fuerza de empuje a la salida de la onda de choque se obtendrá:

$$T_{3 \text{ despues}} = T_{3 \text{ antes}} * 4,802272 = 182,92 * 4,802272 = 878,43 \text{ K} ;$$

$$V_{3 \text{ despues}} = 0,42426 * \sqrt{\gamma R T_{3 \text{ despues}}} = 0,42426 * \sqrt{1,4 * 287 * 878,43} = 252,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$F_y = 54,177 \cdot 252,05 = 13.655,44 \text{ N}$  ; Dado que para este caso  $P_{\text{salida}} = P_{\text{atm}} = 69205,54 \text{ Pa}$ .

Obsérvese que, tal y como cabía esperar, ambos resultados son prácticamente idénticos.

Es necesario remarcar que, el empuje que bajo estas condiciones ejerce la tobera, es considerablemente menor que el que ejercería si la tobera estuviera adaptada.

Suponiendo que el cohete sigue una trayectoria ascendente con una inclinación de  $75^\circ$  respecto a la horizontal, la aceleración del mismo vendrá dada por la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas no inerciales de coordenadas.

$$-\dot{m} \cdot V_{\text{gases escape}} + m_{\text{cohete}} \cdot \ddot{a} = -\int_{sc} P \cdot d\vec{S} + \int_{sc} \vec{\tau} \cdot d\vec{S} + \int_{vc} \rho \vec{g} dV$$

Para flujo subsónico, las fuerzas de presión y esfuerzos cortantes actuantes sobre el cohete se pueden dar como:

$$D = C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot S \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2}$$

Considerando que la variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control se puede despreciar, la ecuación anterior se puede dar como:

$$m_{\text{cohete}} \cdot \ddot{a} = -C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot S \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2} - m_{\text{cohete}} \cdot g \cos 15 + \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}}$$

$$m_{\text{cohete}} \cdot \frac{dV_{\text{cohete}}}{dt} = -C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot S \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2} - m_{\text{cohete}} \cdot g \cos 15 + \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}}$$

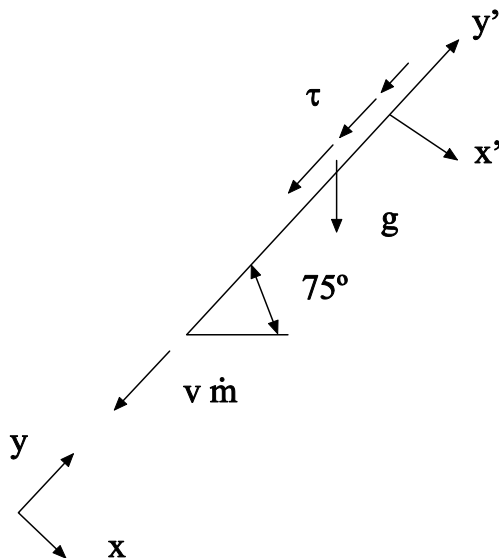


Fig. 74.2  
Esquema de las  
fuerzas que actúan  
sobre el cohete

En la ecuación diferencial anterior, obsérvese que la variable que se busca es la velocidad de cohete; no obstante, ha de tenerse en cuenta que la masa del cohete depende del tiempo y, asimismo, la densidad del aire atmosférico que se encuentra en el término del coeficiente de arrastre es función de la altura a la que se encuentre el cohete.



A priori, se considera que la densidad del aire es la que existe a 3.000 m de altura y se mantiene constante.

La masa del cohete variable será:

$$m_{\text{cohete}} = m_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot t$$

con lo que:

$$\begin{aligned} (m_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot t) \cdot \frac{dV_{\text{cohete}}}{dt} = -C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot S \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2} \\ -(m_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot t) \cdot g \cos 15 + \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}} \end{aligned} \quad (\text{A})$$

ecuación diferencial que permite determinar la velocidad del cohete partiendo de un punto que a priori debe estar situado a 3.000 m, con lo cual es necesario conocer la velocidad del cohete a dicha altura. No obstante, esta ecuación podría utilizarse para hallar la velocidad del cohete partiendo del reposo.

Una vez que la velocidad del cohete llegue a ser sónica, es decir,  $M_{\text{cohete}} = 1$ , aparecerá en la punta cónica del cohete una onda de choque oblicua.

A partir de este momento, las fuerzas de arrastre, antagonistas al movimiento del cohete, serán mayormente debidas a la sobrepresión que actúa sobre la punta cónica del cohete. Dicha sobrepresión será mayor cuanto mayor sea el número de Mach del cohete.

A modo de ejemplo, la presión que actúa sobre la superficie cónica del cohete será:

Para Mach del cohete igual a  $M_{\text{cohete}} = 2$  y semiángulo del cono de 15 grados, de la figura (73-1) (problema anterior), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{P_c}{P_1} &= 1,5 \\ P_c &= P_1 \cdot 1,5 \end{aligned}$$

Si el número de Mach fuese de  $M_{\text{cohete}} = 4$ , la relación de presiones sería  $\frac{P_c}{P_1} = 2,75$

Véase que  $P_1$  representa la presión antes de la onda de choque en cada caso (presión atmosférica a la altura a la que se encuentre el cohete en cada instante).

La ecuación de cantidad de movimiento, teniendo en cuenta la sobrepresión que actúa en la punta del cohete, queda:

$$\begin{aligned} & (\dot{m}_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot t) \cdot \frac{dV_{\text{cohete}}}{dt} = -C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot S_{P_{\text{cohete}}} \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2} \\ & -(\dot{m}_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot t) \cdot g \cos 15 - P_{S_{\text{cono}}} \cdot S_{\text{cono cohete}} + \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}} \end{aligned} \quad (B)$$

Tal y como se ha representado esta ecuación, el coeficiente de arrastre  $C_D$  que se halla en la parte derecha de la misma, no puede tener el mismo valor que para el flujo subsónico, puesto que ahora las fuerzas de presión, que actúan sobre la punta cónica se evalúan por separado; de hecho, el coeficiente de arrastre  $C_D$  ahora, sería el que evaluase mayormente los esfuerzos cortantes actuantes sobre la superficie lateral del cohete. Al respecto, es necesario indicar que, a medida que el número de Mach del cohete aumente, este término llegará a ser mucho menor que el debido a la presión actuante sobre la superficie cónica de la punta del cohete.

Por otro lado, la presión sobre el cono depende asimismo de la altura a la que se encuentra el cohete, puesto que a cada altura existe una presión atmosférica diferente, siendo la velocidad del cohete asimismo diferente y, por tanto, lo es también el número de Mach.

Así, la primera de las ecuaciones de cantidad de movimiento hallada, la ecuación (A), deberá ser utilizada hasta que la velocidad del cohete llegue a ser sónica. La segunda de las ecuaciones de cantidad de movimiento, la ecuación (B), se utilizará una vez se llegue a la velocidad sónica, recordando que la presión sobre la punta cónica varía en función del número de Mach del cohete en cada instante.

Consiguientemente, el proceso para determinar la velocidad y la aceleración del cohete en cada instante ha de seguir los pasos siguientes:

Considerando las características que se conocen a 3.000 m de altura, se determina  $\dot{m}_{\text{saliente}}$  y  $V_{\text{gases escape}}$ . En la práctica, estos dos valores se pueden considerar constantes para todo el problema o, lo que es lo mismo, se puede considerar que el empuje de la tobera es constante. (Esta consideración no es estrictamente cierta.) Mediante la resolución de la ecuación diferencial (A), se pueden determinar la velocidad temporal del cohete, su aceleración y su posición. Dicha ecuación diferencial (A) se podrá aplicar partiendo del reposo o partiendo de la velocidad del cohete para una altura de 3.000 m; en este segundo caso, la velocidad del cohete a dicha altura deberá ser conocida.

Cuando la velocidad del cohete llegue a ser la sónica, aparecerá una onda de choque oblicua en la punta cónica del cohete. Esto causará una sobre presión sobre la punta cónica. Dicha sobre presión aumentará con el número de Mach del cohete. A partir del punto donde  $M_{\text{cohete}} > 1$ , el cálculo de la velocidad del mismo seguirá utilizando la ecuación (B). Hay que remarcar, no obstante, que el coeficiente de arrastre  $C_D$ , ligado a la ecuación (B) estará asociado únicamente a los esfuerzos de fricción actuantes sobre



el cohete, puesto que el efecto de la distribución de presiones actuantes sobre el extremo cónico del cohete, y debido a la onda de choque cónica, está considerado por separado. Obsérvese que los coeficientes de arrastre  $C_D$  asociados a las ecuaciones (A) y (B) han de hallarse experimentalmente.

El proceso de cálculo mediante la ecuación (B) será: cuando mediante la ecuación (A) se haya calculado la velocidad del cohete, su aceleración y su posición, y se cumpla que  $M_{\text{cohete}} > 1$ , mediante la gráfica 73.1 se calculará la relación de presiones  $P_c / P_1$ , puesto que  $P_1$  es la presión de la atmósfera a la altura a la que se encuentre el cohete. Se determinará esta presión, que a su vez permitirá determinar la presión actuante sobre el cono del cohete  $P_c$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación (B), se hallará la velocidad temporal del cohete partiendo de este punto. Así, para un diferencial de tiempo posterior, se conocerán la nueva velocidad del cohete, su nueva aceleración y su posición, se podrá asimismo determinar el nuevo número de Mach del cohete, y la nueva presión  $P_c$  sobre el mismo. (Si se observa relevante, se puede asimismo hallar el nuevo valor de  $C_D$ .) Sustituyendo estos datos en la ecuación (B), permitirá hallar la velocidad del cohete para el tiempo  $t + 2\Delta t$ . El proceso expuesto se repite a partir de este punto.







## Nomenclatura

$a$  = Aceleración. [ $\text{m/s}^2$ ]

$C_d$  = Coeficiente de descarga.

$C_p$  = Calor específico a presión constante. [ $\text{J/Kg K}$ ]

$C_v$  = Calor específico a volumen constante. [ $\text{J/Kg K}$ ]

$C_D$  = Coeficiente de arrastre. Coeficiente de resistencia para la capa límite.

$C_L$  = Coeficiente de sustentación.

$D$  = Fuerza de sustentación. [ $\text{N}$ ]

$D$  = Diámetro. [ $\text{m}$ ]

$D_h$  = Diámetro hidráulico. [ $\text{m}$ ]

$F$  = Fuerza. [ $\text{N}$ ].

$f$  = Coeficiente de fricción.

$g$  = Aceleración gravitatoria. [ $\text{m/s}^2$ ]

$H$  = Energía por unidad de peso. [ $\text{J/Kg g}$ ]

$H=h=Z$  = Nivel de referencia, (cota). [ $\text{m}$ ]

$h$  = Entalpía. [ $\text{J/Kg}$ ]



$L$  = Longitud. [m]

$L$  = Fuerza de arrastre. [N]

$M$  = Par. [N m]

$\dot{m}$  = Caudal másico. [Kg/s]

$N = \dot{W}$  Potencia. [W] [Kw]

NPSH = Altura neta positiva de aspiración. [m]

$P$  = Presión. [Pa]

$P^*$  = Presión reducida. [Pa]

$R, r$  = Radio. [m]

$R$  = Constante característica de cada gas. [J / Kg K]

$Re$  = Número de Reynolds.

$S$  = Sección de paso. [m<sup>2</sup>]

$Q$  = Caudal volumétrico. [m<sup>3</sup>/s]

$\dot{Q}$  = Flujo de calor. [J/s]

$T$  = Temperatura [°C; K]

$t$  = Tiempo. [s]

$U = V$  = Velocidad del fluido. [m/s]

$u$  = Energía interna. [J/Kg]

$V$  = Velocidad. [m/s]

$\dot{W}$  = Potencia. [W] [Kw]

$\nabla$  = Volumen. [m<sup>3</sup>]

$Y$  = Energía por unidad de masa. [J/Kg]

$Y_T$  = Energía teórica por unidad de masa. [J/Kg]

$Z$  = Nivel de referencia, (cota). [m]

$\alpha_T$  = Coeficiente de expansión térmica. [ $K^{-1}$ ]

$\beta$  = Módulo de compresibilidad volumétrica. [ $N/m^2$ ]

$\Delta h$  = Pérdidas de carga por rozamiento. [ $m^2/s^2$ ]

$\Delta P$  = Variación de presión. [ $N/m^2$ ].

$\Delta x$  = Variación de posición [m].

$\nabla$  = operador diferencial nabra. Gradiente para un escalar, divergencia para un vector.

$\nabla^2$  = operador diferencial laplaciano.

$\Gamma$  = circulación. [ $m^2/s$ ]

$\varepsilon$  = Rugosidad. [m]

$\eta$  = Rendimiento.

$\mu$  = Viscosidad dinámica. [ $Kg /s m$ ]

$\nu$  = Viscosidad cinemática. [ $m^2/s$ ]

$\rho$  = Densidad. [ $Kg /m^3$ ]

$\delta$  = espesor de la capa límite. [m]

$\sigma$  = Tensión superficial. [ $N/m$ ].

$\tau$  = Esfuerzo cortante. [ $N/m^2$ ].

$\Phi$  = Velocidad de deformación angular. [ $s^{-1}$ ]

$\Omega = \xi$  = Vorticidad.

$\omega = \Omega$  = Velocidad angular [rad / s]



## Bibliografía

BARRERO RIPOLL, ANTONIO; PÉREZ-SABORID SÁNCHEZ-PASTOR, MIGUEL. “*Fundamentos y Aplicaciones de Mecánica de Fluidos*”. McGraw Hill. 2005.

CRESPO, ANTONIO. “*Mecánica de Fluidos*”. Thomson. 2006.

DOUGLAS, J.F.; GASIOREK, J.M; SWAFFIELD, J.A. “*Fluid Mechanics*”. Longman. 1998.

FOX R.W; McDONALD, A.T. “*Introducción a la Mecánica de Fluidos*”. McGraw Hill. 1995.

GERHART, .P; GROSS, R; HOCHSTEIN, J. “*Fundamentos de Mecánica de Fluidos*”. Addison Wesley 1995.

LIÑÁN MARTÍNEZ, A; RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M; HIGUERA ANTÓN, F. “*Mecánica de Fluidos*”. (Primera parte). 2000.

LIÑÁN MARTÍNEZ, A; RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M; “*Mecánica de Fluidos*”. (Segunda parte). 2000.

LOPEZ HERRERA, JM; HERRADA, MA; PÉREZ-SABORID, M; BARRERO, A. “*Problemas resueltos de Mecánica de Fluidos*”. McGraw Hill. 2005.

MASSEY, BS. “*Fluid Mechanics*”. Chapman & Hall. 1989.

PNUELI, D; GUTFINGER, C. “*Fluid Mechanics*”. Cambridge University press. 1997.

RESEARCH AND EDUCATION ASSOCIATION. “*Fluid Mechanics*” Problem Solvers REA. 1996.

SHAMES, IH. “*Mecánica de Fluidos*”. McGraw Hill. 1995.



SPURK, JOSEPH H. “*Fluid Mechanics*”. Springer 1997.

SPURK, JOSEPH H. “*Fluid Mechanics Problems and Solutions*”. Springer 1997.

VIRTO, L. “*Mecánica de Fluidos. Problemas resueltos*”. Edicions UPC. 1991.

WATTON, J. “*Fundamentals of Fluid Power control*”. Cambridge University Press. 2009.

WHITE, FRANK M. “*Mecánica de Fluidos*”. McGraw Hill. 1988.

WHITE, FRANK M. “*Mecánica de Fluidos*”. McGraw Hill. 2004.

ZUCROW, M.J; HOFFMAN, J.D. “*Gas Dynamics Volume I*”. John Wiley & Sons 1976.



