

POLITEXT

Javier Bará Temes

# Circuits de microones amb línies de transmissió

EDICIONS UPC

# **Circuits de microones amb línies de transmissió**

Javier Bará Temes

Primera edició: setembre de 1993  
Reimpresión: setembre de 1995

Aquesta publicació s'acull a la política de normalització lingüística i ha comptat amb la col.laboració del Departament de Cultura i de la Direcció General d'Universitats de la Generalitat de Catalunya.

En col.laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC  
Traducció: Xavier Fustagueras  
Revisió lingüística: Elisenda Cisa

Disseny de la coberta: Antoni Gutiérrez

© Javier Bará Temes, 1993  
© Edicions UPC, 1993  
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL  
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona

Producció: Servei de Publicacions de la UPC  
i CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)  
La Cup. C. Gran Capità s/n, 08034 Barcelona

Dipòsit legal: B-22.191-93  
ISBN 84-7653-338-1

## Presentació

Les microones entren en el món de les comunicacions de la mà del radar (c. 1936-1943) i de les noves tecnologies, que en el seu moment signifiquen: generadors de potència de freqüència superior a 1 GHz (magnetrons, avui protagonistes dels forns de microones), guiaones, acobladors direccionals, filtres construïts amb cavitats ressonants, antenes de botzina, reflectors, etc. En conseqüència, la disciplina es configura bàsicament com una aplicació de la teoria electromagnètica, i com a tal ha condicionat els llibres de text durant molts anys.

Els últims vint anys han consagrat, en canvi, un extraordinari creixement de les aplicacions de les microones basat en línies de transmissió de tipus pla (*microstrip* i *stripline*), elements concentrats (sobretot condensadors i resistències), transistors, cables coaxials i connectors, circuits monolítics etc., tots analitzables generalment en termes convencionals de tensió i de corrent, amb l'única consideració especial del retard o del temps de propagació, però sense que hi calgui un tractament electromagnètic específic.

Aquest llibre pretén fer una introducció a les microones arribant tan lluny com sigui possible sense haver de recórrer a l'anàlisi electromagnètica dels elements implicats. El llibre comença amb un estudi de les línies de transmissió a partir dels conceptes de circuits, la carta de Smith i les seves aplicacions i línies de transmissió més comunes, per continuar amb la descripció dels circuits de microones amb l'ajut dels paràmetres de dispersió (*scattering*). L'anàlisi general es concreta en xarxes de dos accessos (inversors d'impedàncies, atenuadors, filtres), divisors i combinadors de potència, acobladors direccionals i híbrids, i circuits basats en línies de transmissió acoblades.

Queden excloses d'aquest llibre les aplicacions concretes al disseny de circuits actius (amplificadors, mescladors, etc.) i, òbviament, els guiaones, les cavitats ressonants, els ressonadors dielèctrics i altres elements o subsistemes que requereixen una anàlisi electromagnètica detallada.

El llibre s'ha generat a partir de les notes de classe de l'assignatura de microones de la E.T.S d'Enginyers de Telecomunicació de Barcelona, la qual vaig impartir durant bastants anys. Unes notes que ocupen, sobre una base anual, aproximadament la meitat del

programa; de manera que es pot utilitzar com a punt de partida per a una assignatura quadrimestral de 60 hores sobre fonaments de línies de transmissió i circuits passius de microones.

Una de les causes de l'origen del llibre com a notes de classe és la manca de referències, la qual cosa no vol dir que el llibre no tingui deutes evidents amb molts i il·lustres predecessors als qui l'autor expressa el seu agraïment de forma genèrica.

# Índex

## Presentació

### Capítol 1 Introducció

|     |                               |    |
|-----|-------------------------------|----|
| 1.1 | Què són les microones? .....  | 9  |
| 1.2 | Bagatge electromagnètic ..... | 10 |

### Capítol 2 Línies de transmissió (I). La línia ideal

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | Introducció .....                              | 13 |
| 2.2  | Equacions bàsiques .....                       | 13 |
| 2.3  | Exemples elementals .....                      | 18 |
| 2.4  | Reflexions en càrregues reactives .....        | 26 |
| 2.5  | Senyals sinusoidals .....                      | 32 |
| 2.6  | Ones estacionàries .....                       | 40 |
| 2.7  | La carta de Smith .....                        | 43 |
| 2.8  | Propietats bàsiques de la carta de Smith ..... | 48 |
| 2.9  | Adaptació d'impedàncies .....                  | 54 |
| 2.10 | Comportament amb la freqüència .....           | 63 |

### Capítol 3 Línies de transmissió (II). Pèrdues, dispersió i línies més comunes

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.1 | Introducció .....                          | 73 |
| 3.2 | Línia amb cèl·lula elemental general ..... | 73 |
| 3.3 | Relació entre potències i energies .....   | 78 |
| 3.4 | Línia amb pèrdues baixes .....             | 79 |
| 3.5 | Dispersió .....                            | 81 |

|     |                                  |     |
|-----|----------------------------------|-----|
| 3.6 | Velocitat de grup                | 88  |
| 3.7 | Línies amb dielèctric homogeni   | 94  |
| 3.8 | Línies amb dielèctric inhomogeni | 102 |

#### Capítol 4 Circuits ressonants

|     |                                    |     |
|-----|------------------------------------|-----|
| 4.1 | Introducció                        | 107 |
| 4.2 | Propietats bàsiques                | 107 |
| 4.3 | Factor de qualitat i admitància    | 110 |
| 4.4 | Més sobre pèrdues                  | 112 |
| 4.5 | Pertorbació d'un sistema ressonant | 117 |
| 4.6 | Ressonància en línies              | 120 |
| 4.7 | Ressonància i ones estacionàries   | 125 |
| 4.8 | Efecte de les pèrdues              | 131 |

#### Capítol 5 Circuits de microones (I). Propietats generals. Xarxes de dos accessos (quadripols)

|     |                                      |     |
|-----|--------------------------------------|-----|
| 5.1 | Introducció                          | 137 |
| 5.2 | Definicions i propietats bàsiques    | 137 |
| 5.3 | Matriu de dispersió                  | 140 |
| 5.4 | Propietats de la matriu de dispersió | 144 |
| 5.5 | Xarxes de dos accessos               | 153 |
| 5.6 | Inversors d'immitàncies              | 166 |
| 5.7 | Cadenes de dos accessos              | 177 |

#### Capítol 6 Circuits de microones (II). Xarxes de més de dos accessos. Filtres

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 6.1  | Propietats de simetria                                     | 183 |
| 6.2  | Xarxes de tres accessos                                    | 192 |
| 6.3  | El divisor de Wilkinson                                    | 197 |
| 6.4  | Circuladors  | 202 |
| 6.5  | Xarxes de quatre accessos                                  | 205 |
| 6.6  | Híbrids  | 211 |
| 6.7  | Realització d'acobladors direccionals                      | 217 |
| 6.8  | Línies acoblades simètriques                               | 226 |
| 6.9  | Realització d'inversos amb línies acoblades                | 235 |
| 6.10 | Filtres passa-banda amb inversors en línies de transmissió | 239 |

## Capítol 1 Introducció

### 1.1 ¿Què són les microones?

Un sistema de comunicacions genera un senyal portador sinusoidal sobre el qual, mitjançant modificacions de la seva amplitud, freqüència o fase, s'introdueix un missatge segons unes normes de codificació. Aquest senyal es transmet a un punt llunyà per mitjà d'ones a l'espai lliure o bé d'un cable, i en el receptor es realitza un procés invers al del transmissor mitjançant el qual es recupera el missatge original.

En tots aquests processos s'utilitzen dispositius electrònics (transistors, díodes, tubs de buit), elements passius que afecten l'amplitud dels senyals (resistències) o bé la seva fase (inductàncies i condensadors), i fils o tires conductores que transporten la tensió i els corrents d'uns elements a uns altres.

Tot això es fa en marges de freqüència que van des d'alguns kilohertz (radiodifusió en *AM*) fins a l'infraroig o el marge visible, passant per les bandes de *VHF* i *UHF* (des de desenes de megahertz fins als 900 MHz), suport de la radiodifusió en *FM* i la televisió; i les bandes que cobreixen des d'alguns gigahertz fins a desenes de gigahertz (1 GHz = 1000 MHz), vehicle de les comunicacions per satèl·lit i de la detecció mitjançant el radar.

Les diferències en les realitzacions tecnològiques dels sistemes anteriors sorgeixen, sobretot, dels marges de freqüència en els quals operen. Quan comencem a superar freqüències de treball de les desenes de megahertz apareixen de forma progressiva dificultats entre les quals, si ens restringim als elements passius, destaquen les següents:

a) El comportament dels elements concentrats habituals comença a variar. Les resistències modifiquen el seu valor i exhibeixen una part inductiva de valor creixent, les pèrdues de les inductàncies s'incrementen i la seva reactància varia de forma imprevisible; i el mateix passa amb els condensadors, que poden sorprendre'ns amb una impedància amb resistència molt alta i reactància inductiva(!).



b) Els desfasaments entre punts diferents no són conseqüència només de les inductàncies i dels condensadors, sinó que cal considerar el temps que tarden els senyals electromagnètics a propagar-se d'un punt a un altre del circuit. Com que aquesta propagació a través dels conductors té lloc a la velocitat de la llum,  $c=3 \cdot 10^{10}$  cm/s (qüestió la discussió de la qual és un dels primers objectius d'aquest llibre), un tros de conductor de  $L$  cm de llargària introdueix un retard de:

$$\tau = \frac{L}{c} = 33.3 \times L \text{ ps}$$

De manera que si  $L = 10$  cm i la freqüència de treball és 750 MHz (període  $= T = 1.33$  ns; longitud d'ona  $= \lambda = c \cdot T = 40$  cm), el retard introduït correspon a un quart de període ( $90^\circ$ ), és a dir, el que correspon a una inductància o a un condensador ideals.

Per tant, és evident que no només cal controlar els conductors meticulosament, sinó que els mateixos conductors poden desenvolupar un paper actiu en el circuit similar al dels elements reactius convencionals. I també és evident que aquest efecte es produeix quan el retard comença a ser comparable amb el període del senyal (podem dir, més gran que  $T/20$ ):

$$\tau \geq \frac{T}{20} \rightarrow c\tau \geq c \frac{T}{20} \rightarrow L \geq \frac{\lambda}{20} = 0.05 \lambda$$

Aquesta conclusió ens condueix a una definició relativa de les microones com *aquelles bandes de freqüències en què les dimensions dels components, circuits o sistemes implicats són comparables a una fracció de la longitud d'ona del senyal*.

En la pràctica, i quan tenim en compte altres factors tecnològics que afecten els dispositius actius, les característiques dels components passius (resistències, inductàncies, condensadors) comercials, i els processos de fabricació de circuits, es pot dir prou correctament que, a un sistema, li cal l'aplicació d'eines de càlcul específiques de microones, o que és *de microones* si la seva freqüència de treball està per sobre del marge d'1-2 gigahertz.

## 1.2 Bagatge electromagnètic

Si bé, com hem advertit en el pròleg, en el llibre es renuncia a descriure aquells elements als quals cal una anàlisi electromagnètica detallada, se suposa que el lector ha seguit un

curs bàsic d'electricitat i magnetisme, preferiblement incloent-hi les equacions de Maxwell en forma diferencial (si bé la referència explícita que es fa a l'apartat 1.1 es pot ometre sense una pèrdua greu d'informació) i les condicions de contorn dels camps elèctric i magnètic a la superfície d'un conductor ideal (utilitzades a l'apartat 6.1).

En tot cas, se suposa del lector un bon domini dels conceptes de capacitat, inductància i energies elèctrica i magnètica, i de la utilització i les limitacions del de diferència de potencial que, essent un concepte bàsicament estàtic, la seva utilització s'estén a senyals variables amb el temps amb algun risc d'error conceptual i pràctic a freqüències altes.

## Capítol 2 Línies de transmissió (I). La línia ideal

### 2.1 Introducció

El retard, és a dir, la consideració del temps finit que les perturbacions electromagnètiques tarden a propagar-se d'un punt a un altre constitueix l'essència de les tècniques de microones. Si bé el retard, de manera rigorosa i general, és conseqüència de les equacions de Maxwell (1864), la propagació de tensions i corrents per dos filaments paral·lels pot estudiar-se de manera senzilla partint dels conceptes elementals d'inductància i capacitat, segons que va establir per primera vegada W. Thomson (lord Kelvin) abans de la teoria electromagnètica de Maxwell.

En aquest capítol presentem les propietats de les línies de transmissió ideals, posant particular atenció en el seu comportament en règim sinusoidal, i introduint un ajut gràfic de força utilitat conegut com a *carta de Smith* (*Smith chart*).

Les propietats de les línies de transmissió ens acompanyaran contínuament en els capítols restants, i més endavant veurem que qualsevol circuit de microones admet un circuit equivalent format per elements concentrats i línies de transmissió.

### 2.2 Equacions bàsiques

Definirem com a línia de transmissió ideal el sistema de dos conductors perfectes immersos en un medi dielèctric sense pèrdues, de manera que la secció transversal del sistema no canviï al llarg del seu recorregut. Les línies de transmissió més comunes estan formades per dos filaments idèntics de secció circular que discorren paral·lels (*línia bifilar*) o per un conductor circular envoltat per un altre de concèntric (*línia coaxial*). En qualsevol cas, nosaltres la representarem com dos filaments paral·lels tals que, en cada pla transversal  $z$  tenen corrents  $i_1(z,t)$ ,  $i_2(z,t)$ , i diferència de potencial  $v(z,t)$ , com a la figura 2.1.

A la mateixa figura es pot comprovar que aquesta situació general es pot descompondre en dues altres, simètrica i antisimètrica en el corrent. La figura 2.1b, en la qual ambdós conductors transporten el mateix corrent en la mateixa direcció, no té gens d'interès ja que els dos filaments es comporten com un únic conductor, per la qual cosa, sense pèrdua de generalitat, suposarem una distribució de corrents com en el cas a.

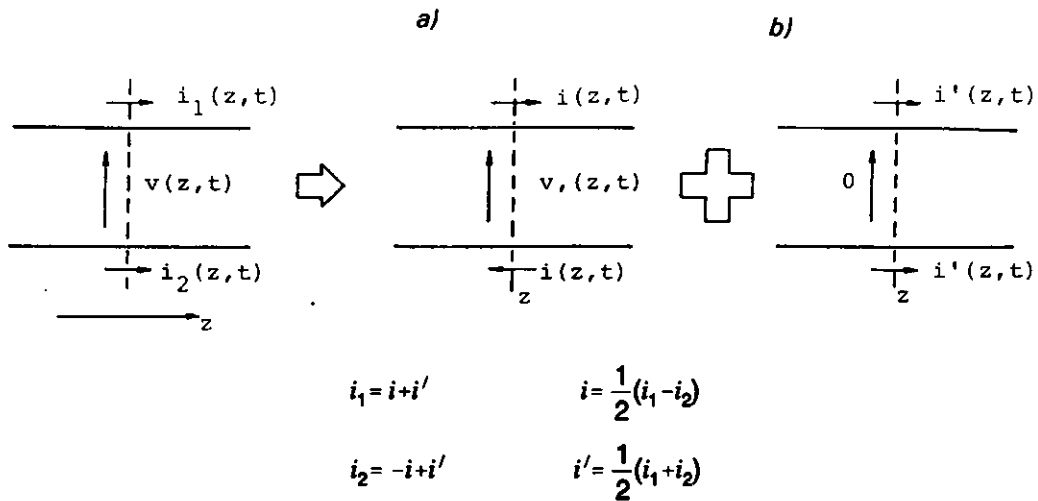


Fig. 2.1 Definició de magnituds i descomposició de la situació més general en la superposició d'una de simètrica, b, i una d'antisimètrica, a.

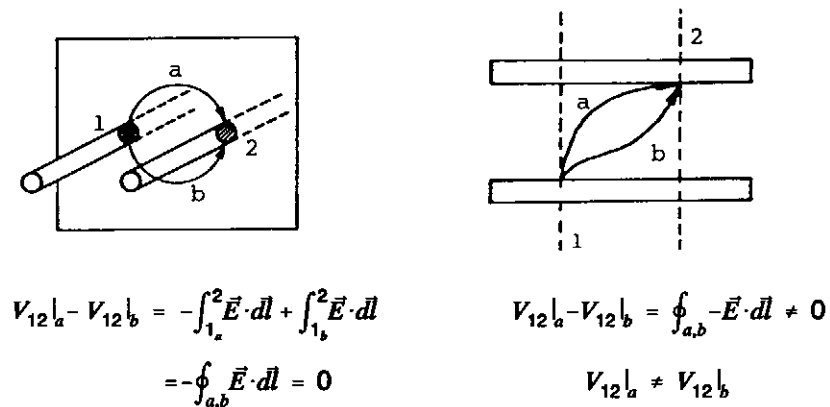


Fig. 2.2 La ddp entre els conductors només té sentit si es defineix entre punts situats en el mateix pla transversal.

Per analitzar el comportament de la línia la descompondrem en seccions elementals de  $dz$  de llargària, i plantejarem les hipòtesis següents: entre dues seccions elementals qualsevol:

- 1) No existeix influència elèctrica, la qual cosa equival a suposar que no estan unides per línies de camp elèctric i, per tant, aquestes han d'estar contingudes en plans transversals (per exemple,  $E$  no té component axial).
- 2) Tampoc no existeix acoblament magnètic, és a dir, no existeixen línies de camp magnètic que abastin simultàniament dues seccions elementals; això suposa que aquestes han d'estar contingudes en plans transversals.

Noteu que aquestes hipòtesis garanteixen la validesa del concepte de diferència de potencial ( $ddp$ ), que és un concepte estàtic només si ens limitem a definir-lo entre punts d'una mateixa secció transversal (fig. 2.2). En efecte, en aquest cas:

$$V_{12}|_a - V_{12}|_b = -\oint_{a,b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \nabla_x \vec{E} \cdot \hat{n} dS = +\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (2.1)$$

ja que  $S$  és una superfície continguda en un pla transversal i per la hipòtesi 2 no està travessada per flux magnètic. Això no és així en el cas de punts continguts en seccions transversals diferents, perquè ara la superfície  $S$ , limitada per les línies  $a$  i  $b$ , sí que és travessada per línies de camp magnètic, amb el resultat que la  $ddp$  entre 1 i 2 dependria del camí triat per a la seva definició.

Amb aquestes precaucions,  $v(z,t)$  i  $i(z,t)$  a cada secció elemental només estan afectades per la capacitat entre els conductors i pel flux magnètic que es tradueix en un coeficient d'autoinducció. D'aquesta manera obtenim, per a una secció elemental de  $dz$  de llargària, el circuit equivalent de la figura 2.3. Advertiu que, per preservar la simetria de la secció, el condensador hauria d'estar en el punt mitjà de la inductància, o bé estar repartit uniformement a l'entrada i la sortida, però la diferència amb el que hem dibuixat és d'infinitesims de segon ordre i proporciona les mateixes solucions.

A la figura 2.3,  $L$  i  $C$  representen la inductància i la capacitat de la línia per unitat de longitud. De la consideració de les caigudes de tensió i corrent s'obtenen immediatament:

$$\frac{\partial v}{\partial z} dz = -(L dz) \frac{\partial i}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.2) \\ \frac{\partial i}{\partial z} dz = -(C dz) \frac{\partial v}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.3) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

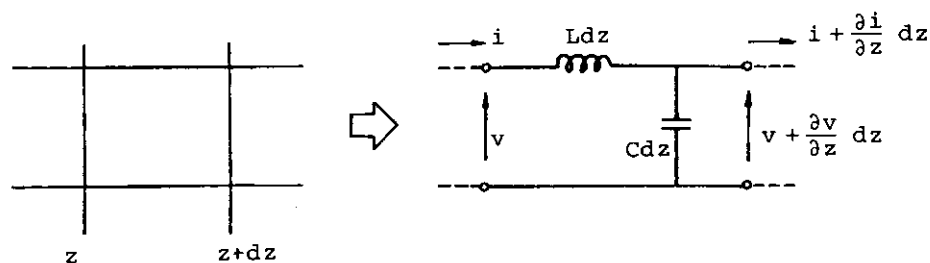
equacions que governen amb tota generalitat el comportament de  $v(z,t)$  i  $i(z,t)$ . Per a la seva resolució podem, per exemple, eliminar el corrent derivant (2.2) respecte a  $z$  i (2.3) respecte a  $t$ . Obtenim:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (c^2 = \frac{1}{LC}) \quad (2.4)$$

que és l'equació d'ones en una dimensió. La seva solució més general és (D'Alembert, 1747):

$$v(z,t) = F_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + F_2\left(t + \frac{z}{c}\right) \quad (2.5)$$

amb  $F_1$  i  $F_2$  funcions arbitràries.



$L$  = inductància/unitat de longitud  
 $C$  = capacitat/unitat de longitud

Fig. 2.3 Circuit equivalent d'una secció elemental de línia.

$F_1(t-z/c)$  representa una ona de tensió que es propaga amb velocitat  $c$  en el sentit de les  $z$  creixents. Amb això volem dir que un observador que es desplaçés al llarg de la línia en el sentit indicat, amb velocitat  $c$ , mesuraria permanentment una tensió constant (abscissa

de l'observador:  $z = z_0 + ct$ ):

$$F_1 \left[ t - \frac{1}{c} (z_0 + ct) \right] = F_1 \left( -\frac{z_0}{c} \right) \quad (2.6)$$

Alhora, tots els punts de la línia experimenten la mateixa variació  $F_1(t)$ , però amb un retard més gran els més allunyats segons les  $z$  creixents.

Anàlogament, parlem de  $F_2$  com d'una ona que es propaga en el sentit de les  $z$  decreixents, de manera que en qualsevol punt de la línia, en qualsevol instant, la tensió mesurada és la suma dels valors de les dues ones. Noteu que a partir de les mesures realitzades en un sol pla de la línia no és possible determinar  $F_1$  i  $F_2$ .

La solució per a  $i(z,t)$  es pot obtenir per substitució de (2.5) a (2.2) i integració posterior respecte al temps:

$$i(z,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \left[ F_1 \left( t - \frac{z}{c} \right) - F_2 \left( t + \frac{z}{c} \right) \right] + f(z) \quad (2.7)$$

Es pot comprovar, per substitució a (2.3), que la constant d'integració (respecte al temps)  $f(z)$  tampoc depèn de  $z$  i, per tant, representa un corrent continu sobreposat a la línia del qual prescindirem. Amb una notació i una nomenclatura més usuals escriurem:

$$F_1 \left( t - \frac{z}{c} \right) = v^+ \left( t - \frac{z}{c} \right) = v^+ \quad (\text{ona positiva}) \quad (2.8)$$

$$F_2 \left( t + \frac{z}{c} \right) = v^- \left( t + \frac{z}{c} \right) = v^- \quad (\text{ona negativa}) \quad (2.9)$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0 \quad (\text{impedància característica en ohms}) \quad (2.10)$$

Les expressions (2.5) i (2.7) queden:

$$v = v^+ + v^- \quad (2.11)$$

$$i = i^+ + i^- = \frac{1}{Z_0} (v^+ - v^-) \quad (2.12)$$

A cada instant i a cada pla, la potència que es propaga a la línia cap a la dreta, segons la convenció de sentits de tensions i corrents (fig. 2.3) val:

$$p(z,t) = v i = \frac{1}{Z_0} |(v^+)^2 - (v^-)^2| = p^+ - p^- \quad (2.13)$$

és a dir, la potència neta és la diferència de les potències associades amb les ones positiva i negativa.

### 2.3 Exemples elementals

Considerem primer un generador de tensió  $v_g(t)$  amb resistència interna  $R_g$  connectat a una línia infinita (fig. 2.4). Si la línia està inicialment en repòs ( $v=i=0$ ) no existeix ona negativa, i el generador excita unes ones positives de tensió i corrent que vénen donades per:

$$v^+(z,t) = \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} v_g\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad i^+ = \frac{v^+}{Z_0} \quad (2.14)$$

ja que per a una ona positiva (o negativa) el quocient entre tensió i corrent és  $Z_0$  i la línia presenta, per tant, una impedància d'entrada en qualsevol pla, de  $Z_0$ . De manera que si interrompem la línia en qualsevol punt i li connectem una resistència de valor  $R_L = Z_0$  (fig. 2.5) la situació a la seva esquerra serà indistingible del cas de la línia infinita i no hi haurà ona negativa. Diem, llavors, que la línia està adaptada i en aquesta situació favorable la càrrega  $R_L$  absorbeix tota la potència que el generador lliura a la línia.

En el cas més general de la figura 2.5, la presència de  $R_L$  en  $z = \ell$  i la llei d'Ohm exigeixen que:

$$R_L = \frac{v(\ell,t)}{i(\ell,t)} = Z_0 \frac{v^+ + v^-}{v^+ - v^-} \Bigg|_{z=\ell} \quad (2.15)$$



d'on s'obté:

$$\frac{v^-}{v^+} \Big|_{z=t} = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L} = - \frac{i^-}{i^+} \Big|_{z=t} \equiv \rho_L \quad (2.16)$$

És a dir, a  $R_L$  l'ona negativa (o, des del punt de vista de la càrrega, l'ona reflectida) està relacionada amb l'ona positiva (o incident) mitjançant una constant  $\rho_L$  anomenada *coeficient de reflexió a la càrrega*.

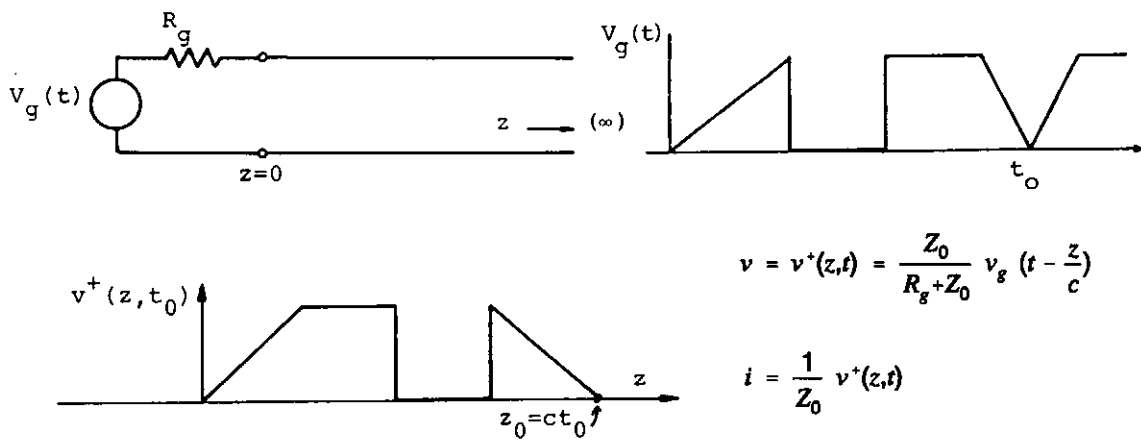
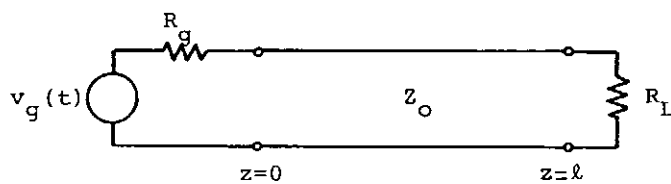


Fig. 2.4 Línia infinita alimentada per un generador amb senyal arbitrari  $v_g(t)$  i distribució de tensió a la línia en un determinat instant  $t_0$ .



$$\begin{array}{ll} R_L = Z_0 & ; \quad v = v^+ \\ R_L \neq Z_0 & ; \quad v = v^+ + v^- \end{array} \quad \frac{v^-}{v^+} \Big|_{z=l} = \rho_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

Fig. 2.5 Línia acabada en una resistència.

**Exemple 1** Suposem la situació esquematitzada a la figura 2.6a, per a la qual, a l' instant  $t=0$ , es tanca l' interruptor i s' hi genera una ona positiva de tensió  $v_1^+$ . A l' instant  $T = \ell/c$  assoleix la resistència de càrrega i es genera llavors una ona negativa  $v_1^- = \rho_L \cdot v_1^+$ , que a l' instant  $t=2T$  assoleix l' extrem generador i pertorba l' equilibri existent, per la qual cosa s' ha de generar una nova ona positiva  $v_2^+$  tal que es restableixi el compliment de la llei d' Ohm a l' entrada de la línia ( $z=0$ ) a l' instant  $t=2T+$ :

$$V_0 - R_G \cdot i(0) = v(0) \quad \rightarrow \quad V_0 - R_G \frac{1}{Z_0} (v_1^+ - v_1^- + v_2^+) = v_1^+ + v_1^- + v_2^+ \quad (2.17)$$

Si d' aquesta igualtat li restem la que es complia a  $t < 2T$ :

$$V_0 - R_G \frac{1}{Z_0} v_1^+ = v_1^+ \quad (2.18)$$

s' obté, a  $z=0$ :

$$\frac{R_G}{Z_0} (v_1^- - v_2^+) = v_1^- + v_2^+ \quad , \quad \left. \frac{v_2^+}{v_1^-} \right|_{z=0} = \frac{R_G - Z_0}{R_G + Z_0} \equiv \rho_G \quad (2.19)$$

expressió que ens serveix per definir el coeficient de reflexió en el generador com a quocient entre l' ona que es genera i la que arriba<sup>1</sup>.

El seguiment de les successives ones positives i negatives es pot realitzar mitjançant un diagrama espai-temps com el de la figura 2.6b. A cada pla i a cada instant, la tensió total serà la suma de totes les ones que hagin assolit el pla.

A la figura 2.7 es representen les tensions i els corrents en el punt mitjà de la línia per a  $R_G=0$  i diferents valors de  $R_L$ ;  $R_L=0$ ,  $R_L=\infty$ ,  $R_L < Z_0$  i  $R_L > Z_0$ . Advertiu els aspectes següents:

- 1) En el cas del curt circuit *a*, el corrent creix de manera esglaonada, però indefinidament.
- 2) En el del circuit obert *b*, el valor mitjà del corrent és zero i també el flux mitjà de potència; aquesta flueix cap a la dreta ( $v_i > 0$ ) als intervals imparells de corrent i cap a l' esquerra, i amb el mateix valor, als parells.

<sup>1</sup> Noteu que la conclusió sobre el concepte de  $\rho_G$  i el seu valor és vàlida en el cas més general d' un generador de tensió arbitrària  $v_G(t)$ , com es pot comprovar fàcilment reinserint la variació temporal en les variables.

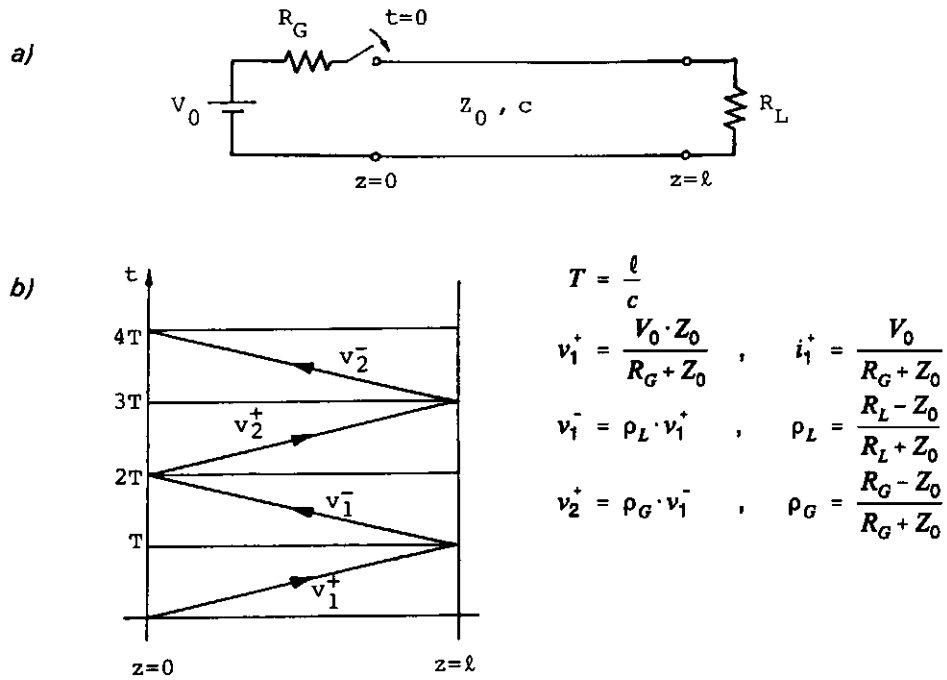


Fig. 2.6 Procés de generació successiva d'ones positives i negatives a partir del tancament de l'interruptor a  $t=0$ .

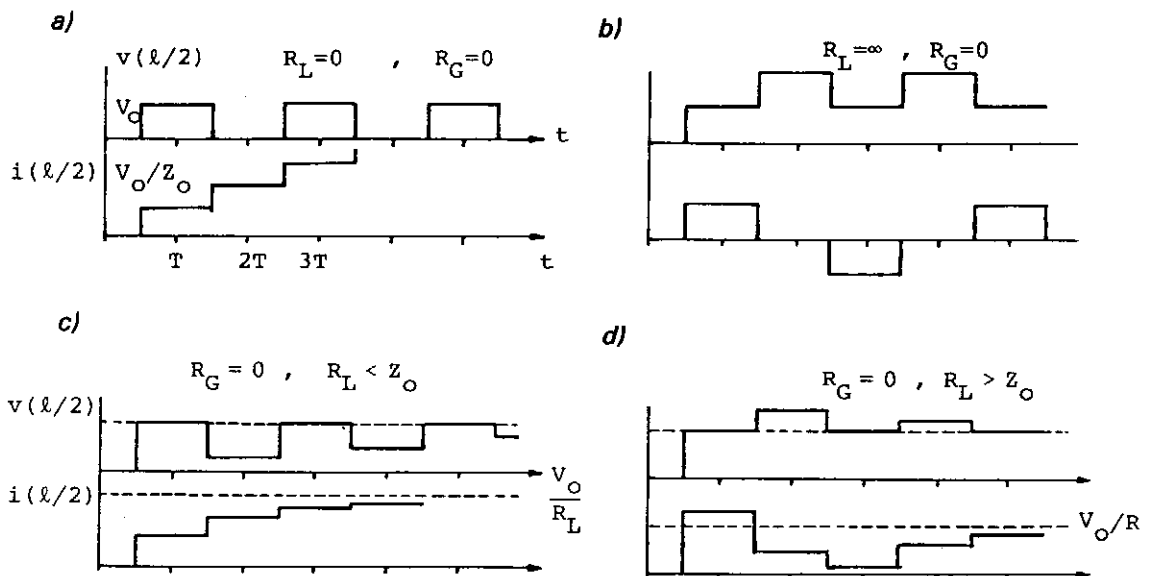


Fig. 2.7 Tensió i corrent en el punt mitjà de la línia de la figura 2.6 en funció del temps per a  $R_G=0$  i diferents valors de  $R_L$ .

- 3) Si  $R_L \neq 0$ , en els casos *c* i *d*, les successives ones reflectides en la càrrega van tenint amplituds cada vegada menors perquè  $|\rho_L| < 1$ . A més, quan  $t \rightarrow \infty$  (suposant, per generalitat,  $R_G \neq 0$ ):

$$\begin{aligned}
 v\left(\frac{\ell}{2}\right) &= v_1^+ + v_1^- + v_2^+ + v_2^- + \dots = v_1^+ \left[ 1 + \rho_L + \rho_L \rho_G + \rho_L^2 \rho_G^2 + \rho_L^2 \rho_G^2 + \dots \right] = \\
 &= \frac{V_0 \cdot Z_0}{R_G + Z_0} \left[ (1 + \rho_L \rho_G + \rho_L^2 \rho_G^2 + \dots) + \rho_L (1 + \rho_L \rho_G + \rho_L^2 \rho_G^2 + \dots) \right] = \\
 &= \frac{V_0 \cdot Z_0}{Z_0 + R_G} \left( \frac{1}{1 - \rho_L \rho_G} + \frac{\rho_L}{1 - \rho_L \rho_G} \right) = \\
 &= \frac{V_0 \cdot Z_0}{Z_0 + R_G} \cdot \frac{1 + \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}}{1 - \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \cdot \frac{R_G - Z_0}{R_G + Z_0}} = \frac{V_0 \cdot R_L}{R_G + R_L} \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

És a dir, el règim permanent coincideix, evidentment, amb la tensió calculada en règim de corrent continu. ■

**Exemple 2** A la figura 2.8 s'analitza la incidència d'un impuls quadrat en un curt circuit. La situació és evidentment equivalent a la de la figura 2.8b, ja que garanteix la condició de curt circuit en la càrrega,  $v(\ell, t) \equiv 0$ . L'obtenció dels gràfics de distribució de tensió a les proximitats del curt circuit és immediata, i es podria realitzar una anàlisi semblant per a diferents ones incidents de tensió. ■

**Exemple 3** La instal·lació d'una resistència en paral·lel en una línia de transmissió produeix una sèrie de reflexions múltiples tal com es resumeix a la figura 2.9 on, per una major generalitat, es considera que les seccions de línia a ambdós costats de la resistència tenen diferents impedàncies característiques. La diferència amb els exemples anteriors comença quan, a l'instant  $t = \ell_1/c$ , l'ona incident assoleix la resistència  $R$  i es reflecteix parcialment amb un coeficient de reflexió:

$$\rho_a(0) = \frac{Y_{01} - (G + Y_{02})}{Y_{01} + G + Y_{02}} \quad (2.21)$$

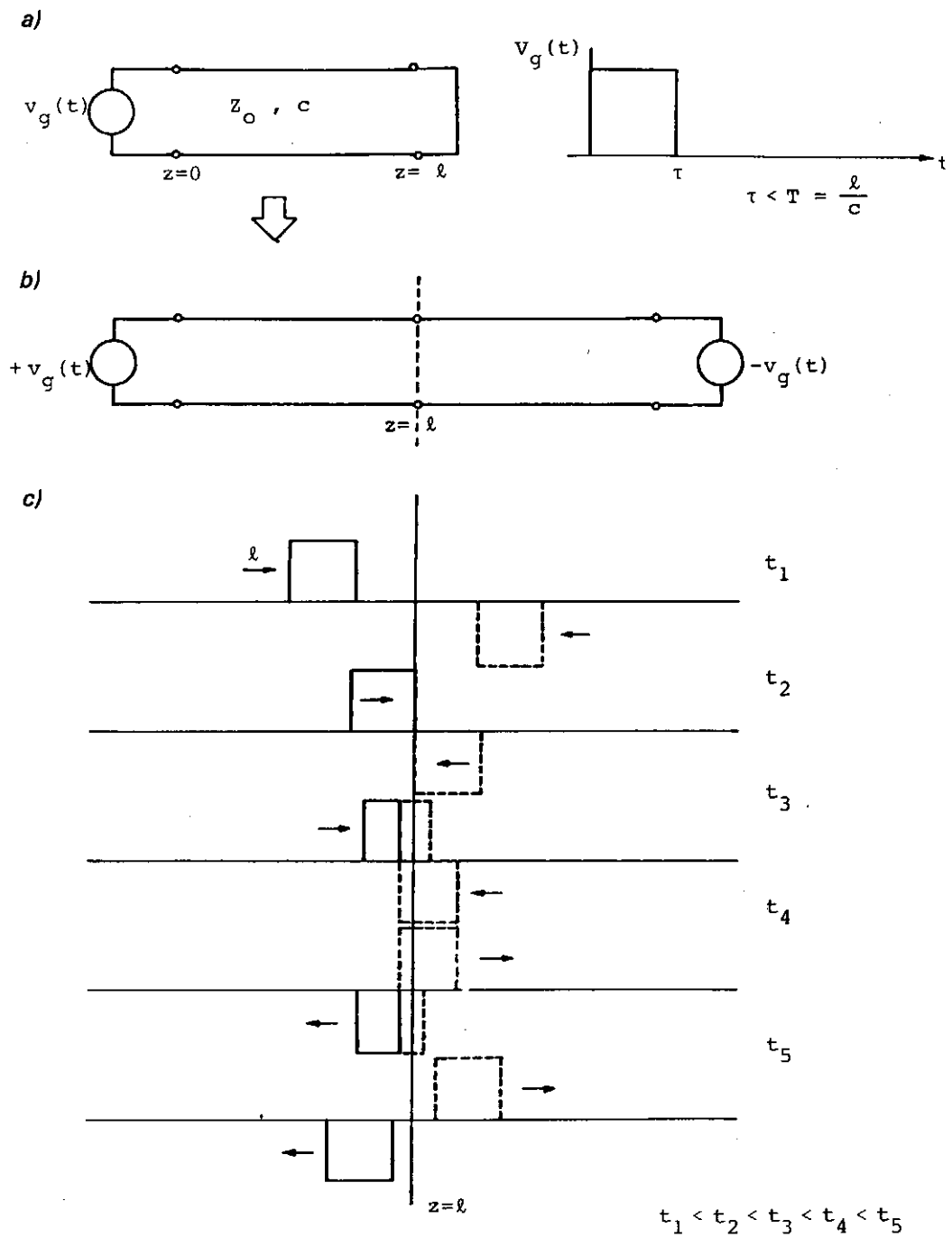
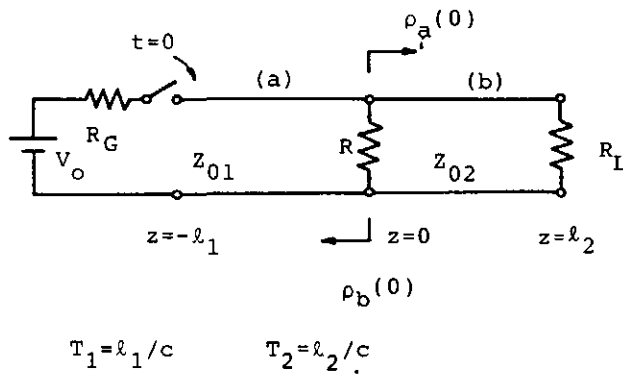


Fig. 2.8 Incidència d'un impuls rectangular en un curt circuit. a) Configuració en estudi. b) Circuit equivalent utilitzat. c) Distribució de tensió a les proximitats del c.c. en instants successius.



$$\rho_a(0) = \frac{Y_{01} - (G + Y_{02})}{Y_{01} + (G + Y_{02})}$$

$$\rho_b(0) = \frac{Y_{02} - (G + Y_{01})}{Y_{02} + (G + Y_{01})}$$

$$\tau_{ab} = \frac{v_{b1}^+}{v_{a1}^+} = \frac{v_{a1}^+ + v_{a1}^-}{v_{a1}^+} = 1 + \rho_a(0)$$

Anàlogament,

$$\tau_{ab} = \frac{v_{a2}^-}{v_{b1}^-} = 1 + \rho_b(0)$$

$$v_{b1}^+ = \tau_{ab} v_{a1}^+$$

$$v_{b2}^+ = \tau_{ab} v_{a2}^+$$

.....

$$v_{a2}^- = \tau_{ba} v_{b1}^-$$

etc.

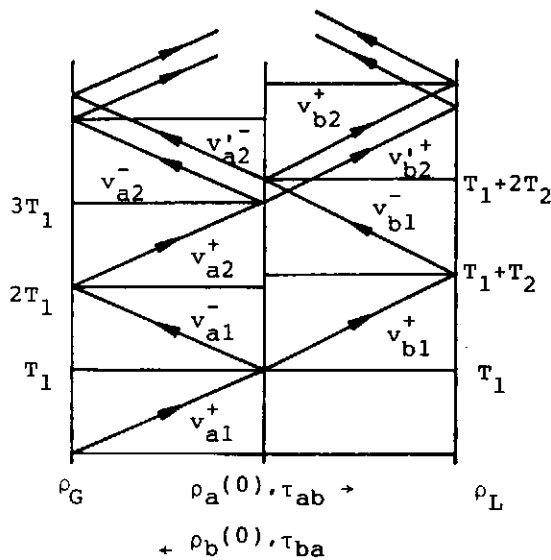


Fig. 2.9 Situació de reflexions múltiples creades per una resistència en paral·lel en la unió de dues línies de transmissió.

Alhora es transmet una fracció d'ona incident a la línia a la dreta, l'amplària de la qual es pot calcular en virtut de la continuïtat de tensions en el pla  $z=0$ :

$$v_{a1}^+ + v_{a1}^- = v_{b1}^+ \quad (2.22)$$

(el subíndex *a* fa referència a la línia a l'esquerra i el *b* a la línia a la dreta), d'on:

$$\tau_{ab} \equiv \frac{v_{b1}^+}{v_{a1}^+} = 1 + \frac{v_{a1}^-}{v_{a1}^+} = 1 + \rho_a(0) = \frac{2Y_{01}}{Y_{01} + G + Y_{02}} \quad (2.23)$$

Al quocient definit així se l'anomena *coeficient de transmissió* i relaciona l'ona emergent a la dreta amb la incident des de l'esquerra. Altrament, quan una ona reflectida en la càrrega incideix des de la dreta en la resistència en paral·lel té un coeficient de reflexió:

$$\rho_b(0) = \frac{Y_{02} - (G + Y_{01})}{Y_{02} + G + Y_{01}} \quad (2.24)$$

i, conseqüentment, un coeficient de transmissió cap a l'esquerra:

$$\tau_{ba} = 1 + \rho_b(0) = \frac{2Y_{02}}{Y_{02} + G + Y_{01}} \quad (2.25)$$

El procés de reflexions i transmissions assoleix ara una certa complexitat, però es pot seguir sistemàticament i sense dificultat amb el diagrama *z-t* de la figura 2.9.

Si la resistència està en sèrie en comptes d'en paral·lel, com a la figura 2.10, el problema es pot resoldre per analogia amb l'anterior si ens adonem que ara a *z=0* hi ha continuïtat de corrents en lloc de tensions:

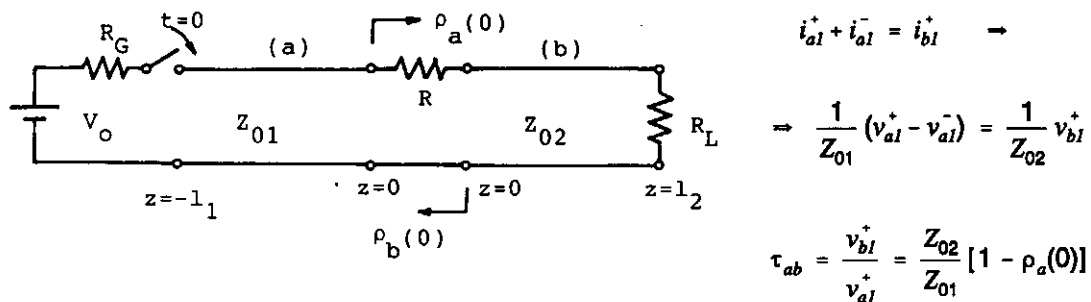
$$i_{a1}^+ + i_{a1}^- = i_{b1}^+ \quad ; \quad \frac{1}{Z_{01}} (v_{a1}^+ - v_{a1}^-) = \frac{1}{Z_{02}} v_{b1}^+$$

$$\tau_{ab} \equiv \frac{v_{bl}^+}{v_{al}^+} = \frac{Z_{02}}{Z_{01}} [1 - \rho_a(0)] \quad (2.26)$$

Anàlogament, el coeficient de transmissió de dreta a esquerra val:

$$\tau_{ba} = \frac{Z_{01}}{Z_{02}} [1 - \rho_b(0)] \quad (2.28)$$

Noteu que, si fem  $R = \infty$  a la figura 2.9 o  $R = 0$  a la figura 2.10, ambdós exemples queden reduïts al problema de connexió de dues línies de transmissió d'impedàncies característiques diferents. ■



(Anàlogament per a  $\tau_{ba}$ )

Fig. 2.10 El mateix problema de la figura anterior, però amb una resistència en sèrie (sense retard) entre les línies.

## 2.4 Reflexions en càrregues reactives

Als exemples anteriors l'anàlisi de les reflexions era particularment senzilla perquè també ho era la relació entre  $v$  i  $i$  en una resistència. Considerem ara la incidència d'una ona de tensió  $v^+$  en una inductància (fig. 2.11). La relació que ha de complir ara en la càrrega ( $z=0$ ) és:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad v^+ + v^- = \frac{L}{Z_0} \left( \frac{dv^+}{dt} - \frac{dv^-}{dt} \right) \quad (2.29)$$



Si suposem condicions inicials nul·les (és a dir, condicions de línia en repòs) i prenem la transformada de Laplace de (2.29), obtenim:

$$v^+(s) + v^-(s) = \frac{s \cdot L}{Z_0} [v^+(s) - v^-(s)] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v^-(s)}{v^+(s)} = \frac{s \cdot L - Z_0}{s \cdot L + Z_0} \equiv \rho(s) \quad (2.30)$$

on hem introduït el coeficient de reflexió en la càrrega  $\rho(s)$  en el domini de les tensions transformades  $V^\pm(s)$ . La conclusió es pot generalitzar de manera evident per a les càrregues reactives més generals descrites per la seva impedància  $Z(s)$ :

$$\frac{v^-(s)}{v^+(s)} = \frac{Z(s) - Z_0}{Z(s) + Z_0} \rightarrow v^-(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ v^+(s) \frac{Z(s) - Z_0}{Z(s) + Z_0} \right\} \quad (2.31)$$

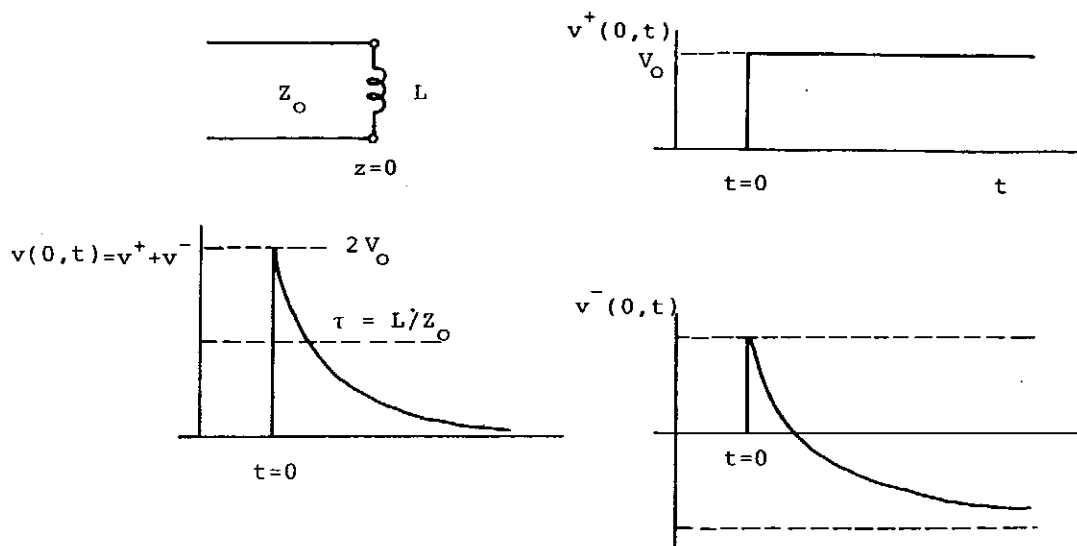


Fig. 2.11 Incidència d'un esglaió de tensió sobre una inductància.

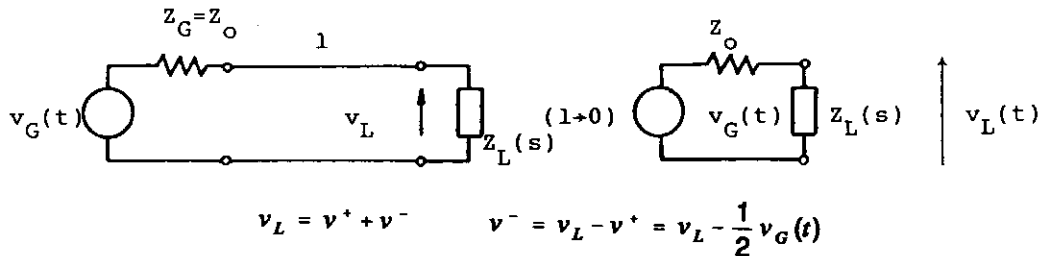
Si, com a exemple, tornem a la inductància i prenem com a ona incident un esglaó:

$$v^+(0,t) = V_0 \cdot u(t) \quad , \quad V^+(s) = \frac{V_0}{s} \quad (2.32)$$

resulta:

$$\begin{aligned} v^-(0,t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{V_0}{s} \cdot \frac{sL - Z_0}{sL + Z_0} \right\} = V_0 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} + \frac{2}{\left(s + \frac{Z_0}{L}\right)} \right\} = \\ &= V_0 \left[ 2 \cdot e^{-\frac{Z_0}{L}t} - 1 \right] u(t) \quad (2.33) \end{aligned}$$

La forma de  $V^-$  en qualsevol punt de la línia s'obté substituint  $t$  per  $t+z/c$ . El càlcul de les ones generades en una càrrega reactiva es pot simplificar si, com a la figura 2.10, imaginem un generador adaptat a la línia i fem que la seva longitud tendeixi a zero. Ens quedem així amb un circuit convencional amb l'anàlisi del qual podem obtenir la tensió total a la càrrega  $v_L(t)$  i, a partir d'aquesta, la reflectida per subtracció de la incident (fig. 2.12). Noteu que la condició d'adaptació del generador en aquest procés és essencial per evitar reflexions múltiples.



Exemple

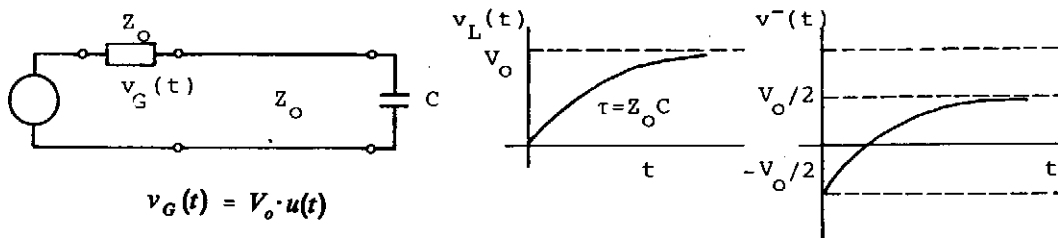
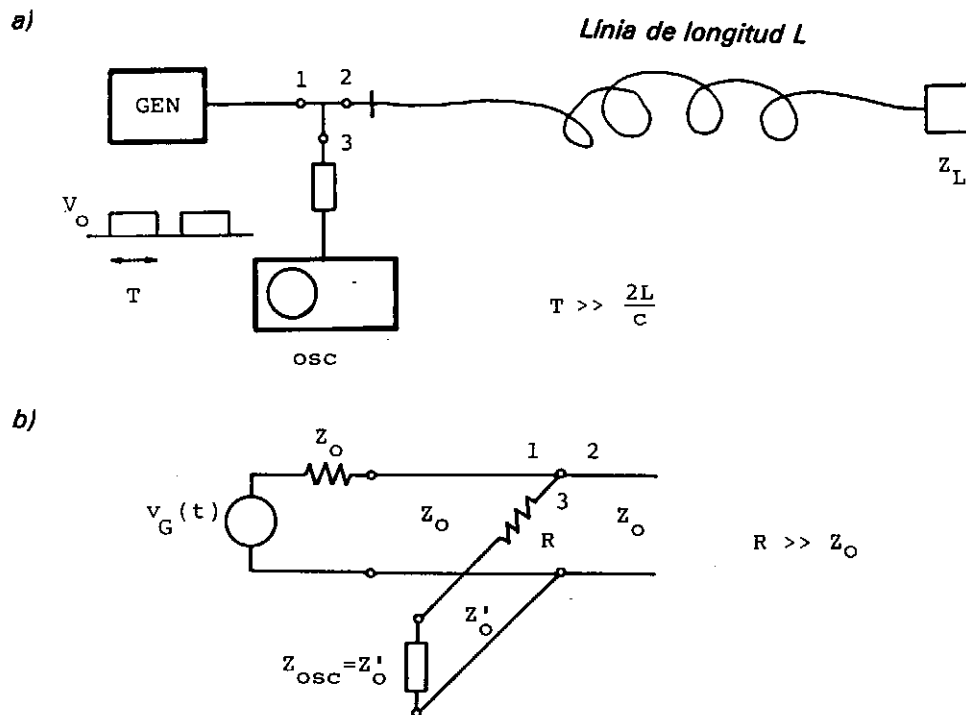


Fig. 2.12 Reducció del càlcul de l'ona reflectida en el domini de  $t$  per a una càrrega no resistiva en el cas d'un circuit sense retard.

**Exemple Reflectòmetre temporal**

A la figura 2.13, s'esquematitza un muntatge de laboratori senzill que permet observar reflexions de càrregues reactives com les que hem descrit. El generador produeix trens d'impulsos rectangulars de durada prou llarga, comparada amb els trànsits dels senyals en la línia ( $T \gg 2L/c$ ), com per suposar cada impuls com un esglaió de tensió  $v_o \cdot u(t)$ . Alhora, el generador ha d'estar adaptat a la línia per absorbir les reflexions que provinguin de la càrrega i no produir-ne de secundàries. De la mateixa manera, tampoc no ha de produir reflexions la derivació de l'oscil·loscopi, cosa que es pot aconseguir amb una resistència molt elevada ( $R \gg Z_o$ ) com a la figura 2.13b. D'aquesta manera, amb l'oscil·loscopi sincronitzat al tren d'impulsos del generador, a la seva pantalla s'observa la tensió en el pla de connexió a la línia, que consisteix en l'ona positiva (esglaió de tensió) més la reflectida en la càrrega retardada un temps  $2L/c$ .



**Fig. 2.13** Reflectòmetre temporal de laboratori. Cal que la durada dels impulsos sigui molt llarga comparada amb el temps de trànsit dels senyals en la línia, que el generador estigui adaptat per tal de no produir reflexions secundàries i que la derivació de l'oscil·loscopi tingui, per la mateixa raó, resistència elevada (fig. b).

A la figura 2.14 es resumeix l'aspecte de les respostes de diferents càrregues d'estructura senzilla.

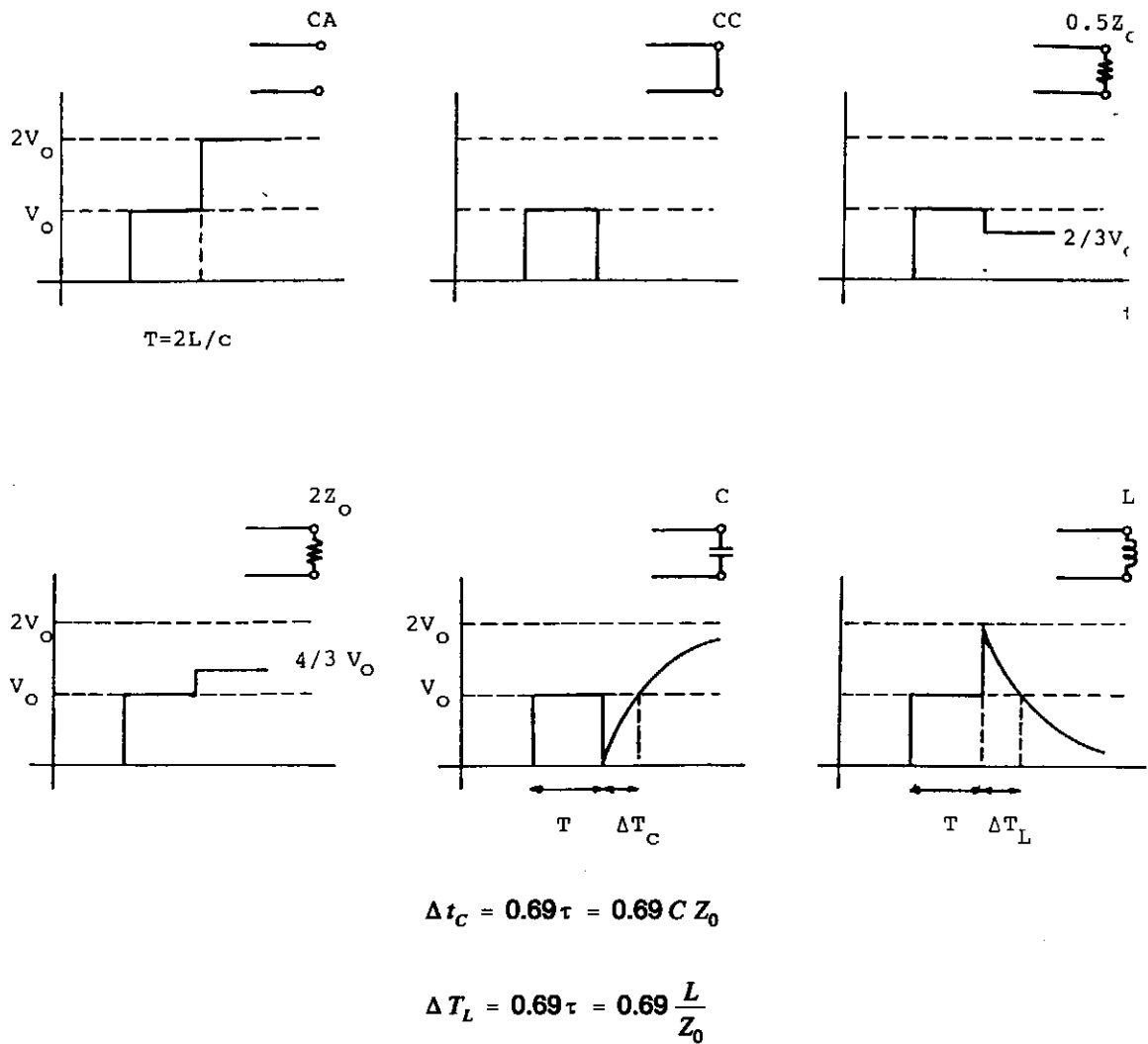


Fig 2.14a Visualització en el reflectòmetre de la figura 2.11 de les tensions a l'entrada de la línia carregada amb impedàncies senzilles.

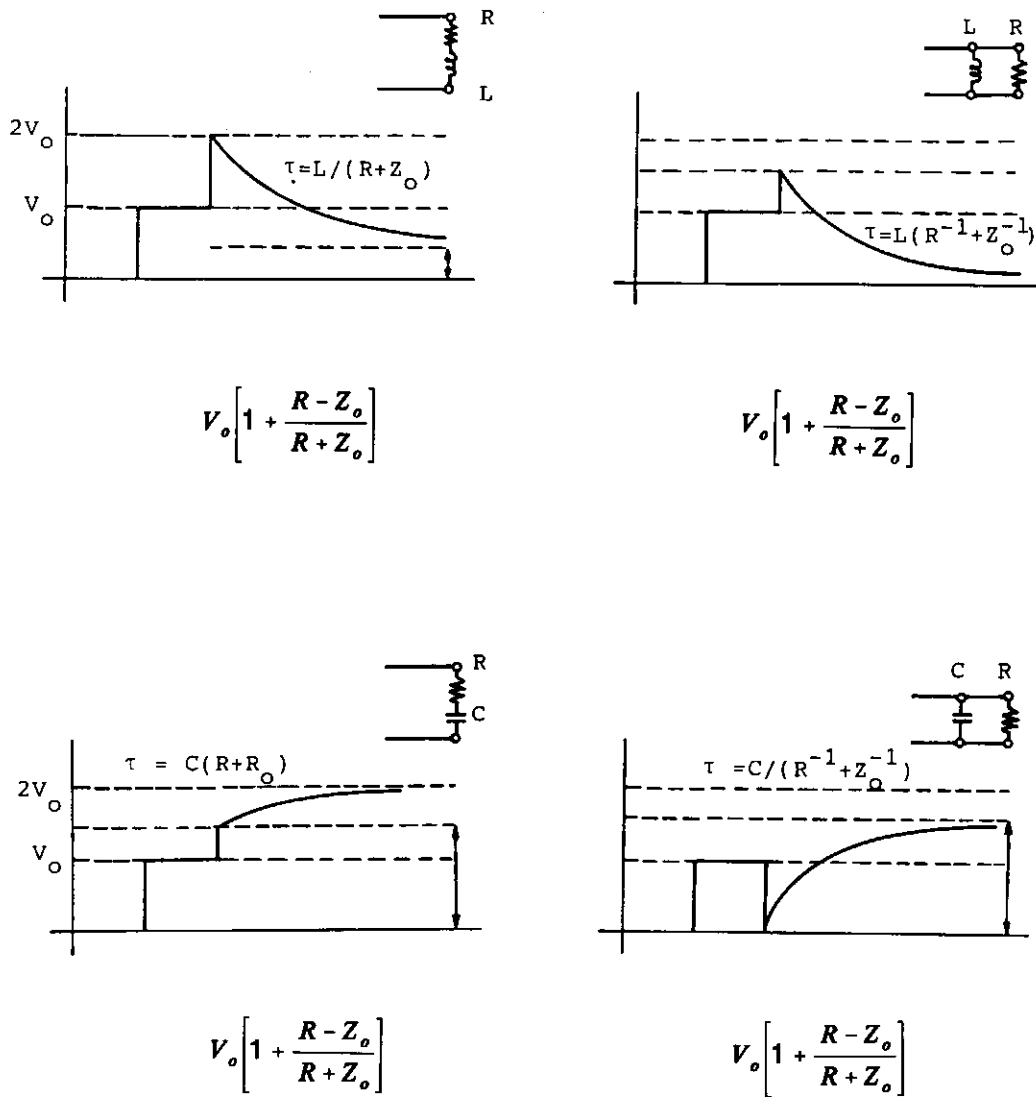


Fig. 2.14b Continuació de la figura 2.14a.

## 2.5 Senyals sinusoidals

A continuació, considerarem el cas important de línies excitades per generadors sinusoidals en règim permanent. Tots els senyals seran de la forma  $A \cdot \sin(\omega t + \phi)$ , o en notació complexa,  $A \cdot \exp[j\omega t + j\phi] = C \cdot \exp[j\omega t]$ , essent  $C = A \cdot \exp[j\phi]$ . Aquesta última constant complexa conté tota la informació necessària (amplitud i fase) una vegada coneguda la freqüència.

En aquest cas,  $v^+(t-z/c)$  és  $V^+ \cdot \exp[j\omega(t-z/c)]$  i anàlogament per a  $v^-(t+z/c)$ , per la qual cosa (2.11) i (2.12) prenen la forma complexa (prescindint del factor  $\exp[j\omega t]$  comú a tots els termes):

$$V = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \quad (2.34)$$

$$I = \frac{1}{Z_0} [V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{\gamma z}] \quad (2.35)$$

essent  $\gamma = j(\omega/c) = j\beta$  (constant de propagació, en radians per segon).

L'ona positiva en el domini del temps pren la forma explícita:

$$v^+(z,t) = |V^+| \sin(\omega t - \beta z + \phi^+) \quad (2.36)$$

$$i^+(z,t) = \frac{|V^+|}{Z_0} \sin(\omega t - \beta z + \phi^+) \quad (2.37)$$

$$\text{amb } V^+ = |V^+| e^{j\phi^+}$$

Les expressions (2.36) i (2.37) indiquen que el voltatge (i el corrent) en tots els punts de la línia experimenten el mateix tipus de variació sinusoidal, i són tant més retardats en la seva oscil·lació com més a la dreta estiguin ( $z$  major). El retard entre dos punts separats un  $\Delta z$  és el temps que tardaria un observador a desplaçar-se d'un punt a l'altre a velocitat  $c$ , i per aquesta raó se l'anomena *velocitat de fase* (l'observador que es desplaça cap a la dreta a aquesta velocitat va passant per punts de fase  $(\omega t - \beta z + \phi^+)$  idèntica).

La distància mínima entre dos punts de la línia que estiguin sempre en fase, l'anomenem *longitud d'ona* ( $\lambda$ ). Evidentment,  $\beta\lambda = 2\pi$ , és a dir:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{f} \quad (2.38)$$

Tornant a les expressions complexes (2.34) i (2.35) cal observar que la representació de (2.34) en el pla complex dóna  $V$  com a suma de dos vectors que giren en els sentits indicats (fig. 2.15) a raó de  $360^\circ$  cada longitud d'ona quan ens movem al llarg de la línia (amb  $z$  creixent), per la qual cosa  $|V|$  variarà entre un màxim, quan ambdós vectors se sumin en fase (mateixa direcció), i un mínim, quan ho facin en oposició de fase (direccions oposades). Altrament, dels signes de l'expressió (2.35), en podem concloure tot seguit que quan  $|V|$  és màxim  $|I|$  és mínim, i viceversa, per la qual cosa la impedància al llarg de la línia variarà. Per calcular-la considerem una secció de línia de longitud  $\ell$  carregada amb una impedància (en general complexa)  $Z_L$ . Per conveniència fixarem l'origen de coordenades en la càrrega (fig. 2.16).

Definim el *coeficient de reflexió*  $\rho(z)$  com abans:

$$\rho(z) = \frac{v^-}{v^+} = \frac{V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} = \rho_L e^{2j\beta z} \quad (2.39)$$

on s'ha tingut en compte que a la càrrega ( $z=0$ ),  $\rho(0) = \rho_L = V^-/V^+$ .

Altrament, i per un càlcul idèntic a l'efectuat en el cas de càrrega resistiva (fig. 2.5),  $\rho_L$  val:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (2.40)$$

Per tant, la impedància d'entrada val:

$$\begin{aligned} Z_i &= Z_0 \left. \frac{V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z}} \right|_{z=-\ell} = \\ &= Z_0 \frac{e^{j\beta \ell} + \rho_L e^{-j\beta \ell}}{e^{j\beta \ell} - \rho_L e^{-j\beta \ell}} \end{aligned}$$

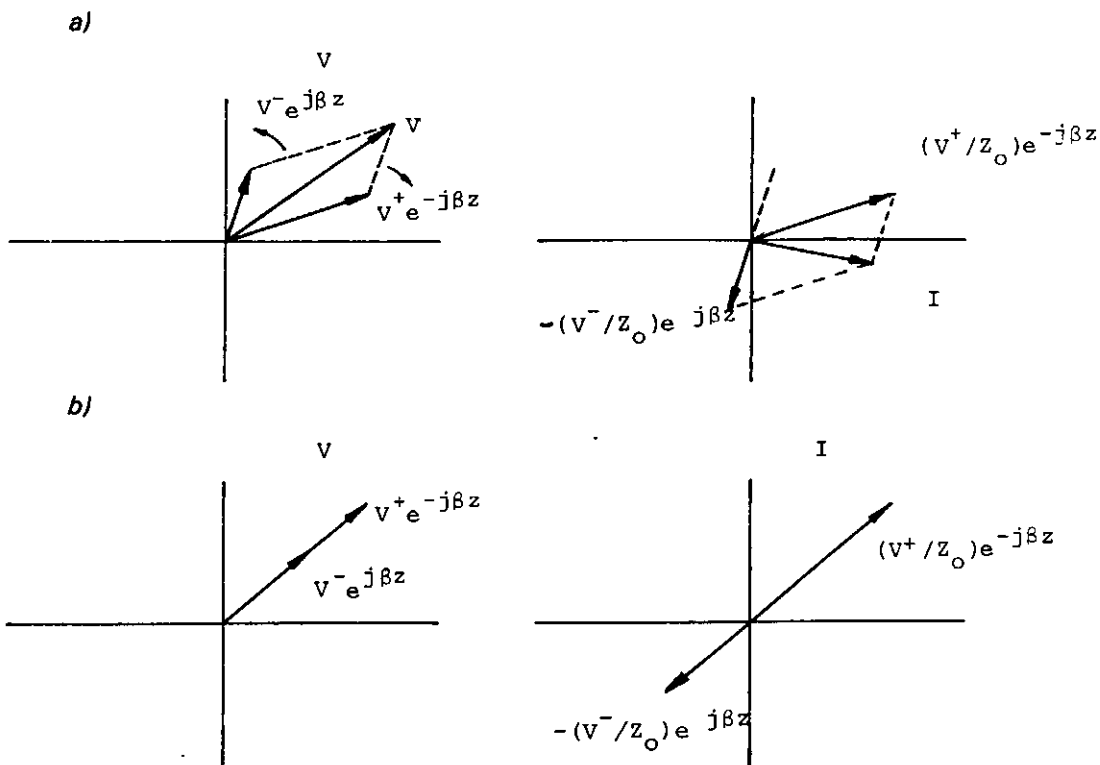
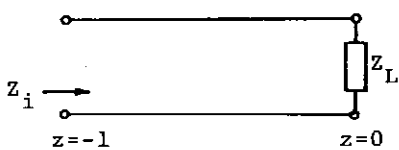


Fig. 2.15 Composició en el pla complex de  $V$  i  $I$  a partir de les corresponents ones positives i negatives. (b) Cas particular de  $|V|_{m\grave{a}x}$  i  $|I|_{m\grave{m}n}$ .



$$\rho_L = \frac{V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} \Bigg|_{\text{c\grave{a}rrega}} = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Fig. 2.16 Situació emprada per al càlcul de la impedància d'entrada d'una línia,  $Z_i(\omega)$ .



que, tenint en compte (2.39) i després d'unes senzilles operacions, es pot escriure:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta \ell + jZ_0 \sin \beta \ell}{Z_0 \cos \beta \ell + jZ_L \sin \beta \ell} \quad (2.41)$$

Aquesta expressió és més senzilla de recordar expressada de la forma següent:

$$Z_i = Z_0 \tanh(\gamma \ell + \delta_Z) \quad , \quad \text{essent} \quad \tanh \delta_Z = \frac{Z_L}{Z_0} \quad (2.42)$$

com es pot comprovar desenvolupant la fórmula de la tangent hiperbòlica d'una suma:

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \quad (2.43)$$

Per a l'admitància s'obté una expressió idèntica:

$$Y_i = Y_0 \tanh(\gamma \ell + \delta_Y) \quad , \quad \text{essent} \quad \tanh \delta_Y = \frac{Y_L}{Y_0} \quad (2.44)$$

S'observa a (2.41) que la impedància és una funció periòdica de la longitud  $\ell$ , de període  $\ell = \lambda/2$ . Això vol dir que la impedància d'entrada de la línia que considerem no varia si s'insereix un tros de línia d'un nombre enter de  $\lambda/2$ . Tenen un interès particular les impedàncies d'entrada de les línies en curt circuit o en circuit obert:

$$\begin{aligned} (Z_L = 0) \quad Z_{cc} &= jZ_0 \tan \beta \ell = jX_{cc} \\ (Y_L = 0) \quad Y_{co} &= jY_0 \tan \beta \ell = jB_{co} \end{aligned} \quad (2.45)$$

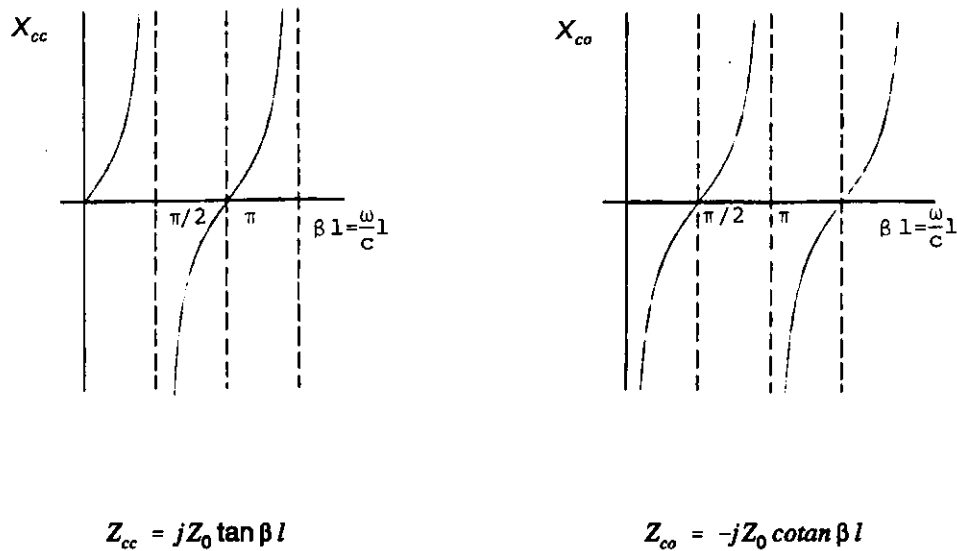


Fig. 2.17 Reactància d'entrada de línies en curt circuit ( $Z_{cc}$ ) o en circuit obert ( $Z_{co}$ ) en funció de  $\beta l = \omega l/c$ .

En aquests casos la impedància d'entrada és sempre reactiva i la seva reactància varia entre  $(-\infty)$  i  $(+\infty)$  segons la longitud de la línia. És representada gràficament a la figura 2.17 on, a més, es pot observar que ambdues corbes són idèntiques llevat d'un desplaçament de  $\pi/2$  radians:

$$Z_{cc}(\beta l) = Z_{co}\left(\beta l + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.46)$$

Aquesta conclusió és conseqüència de la propietat més general de les línies de transmissió d'actuar com a inversors d'impedàncies (fig. 2.18). En efecte, cada vegada que avancem o retrocedim  $\lambda/4$  en la línia, la impedància vista cap a la dreta, referida a  $Z_0$ , canvia exactament a la seva inversa. En el cas de la línia en c.o., a  $\lambda/4$  del mateix s'obté un c.c., de manera que  $Z_{co}(\beta l)$  és la mateixa que  $Z_{cc}(\beta l - \pi/2)$ . Noteu que les transformacions d'impedàncies en línies de transmissió prenen un aspecte més general si fem servir impedàncies normalitzades a la característica de la línia:

$$\bar{Z}_l = \frac{Z_l}{Z_0} = \tanh(\beta \ell + \delta_Z) \quad (2.47)$$

$$\bar{Y}_l = \frac{Y_l}{Y_0} = \tanh(\beta \ell + \delta_Y) \quad (2.48)$$

**Exemple** Com a exercici d'utilització dels conceptes d'aquest apartat, a la figura 2.19 es calcula l'ona positiva a l'entrada d'una línia de transmissió en funció dels paràmetres del generador i del coeficient de reflexió a l'entrada de la línia.

Evidentment,  $V^+ = V_G Z_0 / (Z_G + Z_0)$  quan la línia està adaptada ( $\rho_L = 0$ ). Però això també succeeix encara que la línia estigui desadaptada, si ho està l'extrem generador ( $Z_S = Z_0$ ;  $\rho_G = 0$ ).

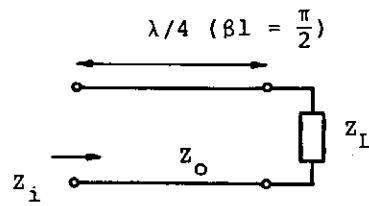
Aquesta mateixa expressió es pot obtenir de manera molt instructiva examinant com s'estableix el règim permanent. En efecte, imaginem-nos un interruptor en el generador, com a la figura 2.20, que es tanca a l'instant inicial, amb la línia prèviament en estat de repòs. A  $t = 0$  es genera una ona sinusoidal positiva de valor:

$$V_1^+ = \frac{V_G Z_0}{Z_G + Z_0} \quad (2.49)$$

i successivament s'hi generen, com en exemples anteriors, ones positives i negatives les amplituds de les quals, avaluades en els plans de generador i càrrega, es calculen fàcilment considerant únicament el desfasament introduït per la longitud recorreguda i el coeficient de reflexió corresponent (fig. 2.20). D'aquesta manera, l'ona positiva en règim estacionari en el pla  $z = 0$  ve donada com la suma de totes les ones positives generades:

$$V^+ = \sum_{i=1}^{\infty} V_i^+ \quad (2.50)$$

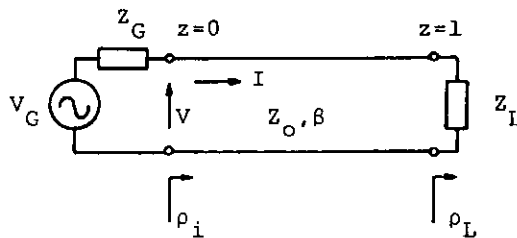
que és la suma d'una progressió geomètrica de raó  $\rho_G \rho_L e^{-2\beta \ell}$  (menor que la unitat si  $R_L$  i  $R_G$  són positives), i s'obté de nou el valor trobat anteriorment per a  $V^+$ . ■



$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L \cos \frac{\pi}{2} + j Z_0 \sin \frac{\pi}{2}}{Z_0 \cos \frac{\pi}{2} + j Z_L \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

$$\frac{Z_i}{Z_0} = \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_0}} \quad \rightarrow \quad \bar{Z}_i = \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_0}}$$

Fig. 2.18 Efecte inversor d'impedàncies d'una secció de línia de longitud  $\lambda/4$ .



$$V = V_G - Z_G I \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow V^+ + V^- = V_G - Z_G \left( \frac{V^+}{Z_0} - \frac{V^-}{Z_0} \right)$$

$$\frac{V^-}{V^+} = \rho_i = \rho_L e^{-2j\beta l} \quad \text{s'obté:} \quad V^+ = \frac{V_G Z_0}{Z_G + Z_0} \cdot \frac{1}{1 - \rho_i \rho_G}$$

$$\text{amb} \quad \rho_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0}$$

Fig. 2.19 Càlcul de l'ona positiva de tensió en una situació general.

Acabarem aquest apartat amb les observacions següents:

a) La potència mitjana neta que flueix en la línia cap a la dreta val:

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V(z) I^*(z)] = \\
 &= \frac{1}{2Z_0} \operatorname{Re} \{ (V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}) [(V^+)^* e^{j\beta z} - (V^-)^* e^{-j\beta z}] \} = \\
 &= \frac{1}{2Z_0} \operatorname{Re} [ |V^+|^2 - |V^-|^2 - V^+ (V^-)^* e^{-2j\beta z} + V^- (V^+)^* e^{2j\beta z} ] = \\
 &= \frac{1}{2Z_0} \operatorname{Re} [ |V^+|^2 + 2j|V^+||V^-| \sin(2\beta z + \phi_- - \phi_+) ] = \\
 &= \frac{1}{2Z_0} (|V^+|^2 - |V^-|^2) = P^+ - P^- \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

amb les evidents definicions per a les potències  $P^+$  i  $P^-$  associades amb l'ona positiva i la negativa, respectivament. En termes del coeficient de reflexió:

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \frac{|V^+|^2}{2Z_0} (1 - |\rho(z)|^2) = \\
 &= \frac{|V^+|^2}{2Z_0} (1 - |\rho_L|^2) = P^+ (1 - |\rho_L|^2) \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

ja que  $|\rho(z)|$  és constant en tota la línia.

b) Per a càrregues passives ( $Z_L = R_L + jX_L$ , essent  $R_L > 0$ )  $|\rho_L| < 1$ ; en efecte:

$$|\rho_L|^2 = \frac{(R_L - Z_0)^2 + X_L^2}{(R_L + Z_0)^2 + X_L^2} \leq 1 \quad (2.53)$$

la qual cosa és conseqüent amb el resultat anterior per a  $P$ ; la potència reflectida mai no pot ser més gran que la incident.

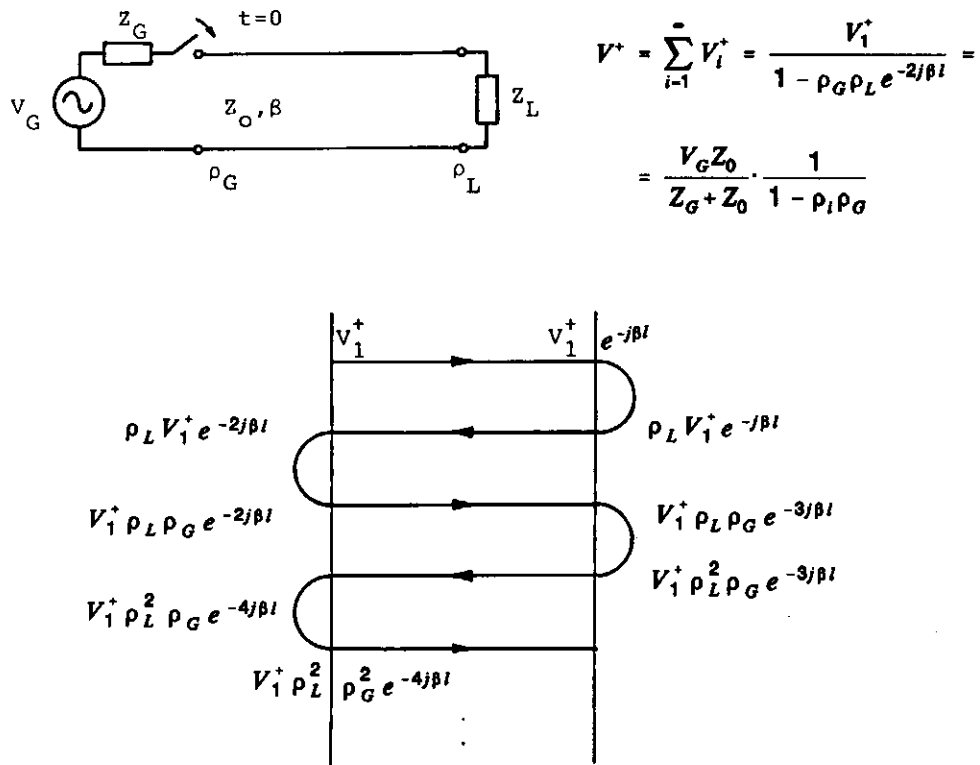


Fig. 2.20 Repetició del càlcul de la figura anterior, considerant el règim transitori generat a partir del tancament de l'interruptor.

## 2.6 Ones estacionàries

Quan en una línia en règim sinusoidal està excitada només una ona progressiva (positiva o negativa), un observador pot identificar experimentalment la situació amb un voltímetre (que mesura l'amplitud o el valor eficaç de la tensió de r.f.) ja que en desplaçar-se al llarg de la línia la lectura romandrà constant:

$$|V(z)| = |V^+ e^{-j\beta z}| = |V^+| \quad (2.54)$$

Tanmateix, en la situació més general, quan en la línia es propaguen simultàniament una ona positiva i una altra de negativa, hem vist en el paràgraf anterior que el mòdul de la tensió fluctua entre un valor màxim:

$$|V|_{\max} = |V^+| + |V^-| \quad (2.55)$$

que es produeix quan els vectors  $V^+ e^{-j\beta z}$  i  $V^- e^{j\beta z}$  se sumen en fase, i un valor mínim:

$$|V|_{\min} = |V^+| - |V^-| \quad (2.56)$$

que es produeix justament a una distància de  $\lambda/4$  a la dreta o a l'esquerra de la situació del valor màxim, com es pot comprovar fàcilment a partir de la interpretació gràfica de la figura 2.15, ja que cada vector avança o retrocedeix  $\pi/2$ , i s'hi acumula un desfasament relatiu de  $\pi$  radians.

De manera més precisa, en aquesta situació general tindrem:

$$V(z) = V^+ [e^{-j\beta z} + \rho(0) e^{j\beta z}] = V^+ e^{-j\beta z} [1 + |\rho(0)| e^{2j\beta z + j\theta}] \quad (2.57)$$

essent  $\rho(0) = |\rho(0)| \exp(j\theta)$  i, en conseqüència:

$$|V(z)|^2 = |V^+|^2 [1 + |\rho(0)|^2 + 2|\rho(0)| \cos(2\beta z + \theta)] \quad (2.58)$$

situació que està representada a la figura 2.21 i a la qual ens referirem com a *ona estacionària*. Si bé una ona estacionària queda ben definida mitjançant el mòdul del coeficient de reflexió, acostuma a caracteritzar-se a partir del quocient:

$$S = \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} = \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (2.59)$$

anomenat *relació d'ona estacionària* (en anglès, *VSWR* o *Voltage Standing Wave Ratio*), la magnitud de la qual varia entre els valors 1 per a una línia adaptada (sense reflexions) i  $\infty$  si en la línia hi ha un obstacle que reflecteix tota l'energia incident,  $|\rho| = 1$ . Freqüentment, el seu valor ve donat en decibels (recordeu que  $S$  representa un quocient de tensions):

$$S(\text{dB}) = 20 \log S \quad (2.60)$$

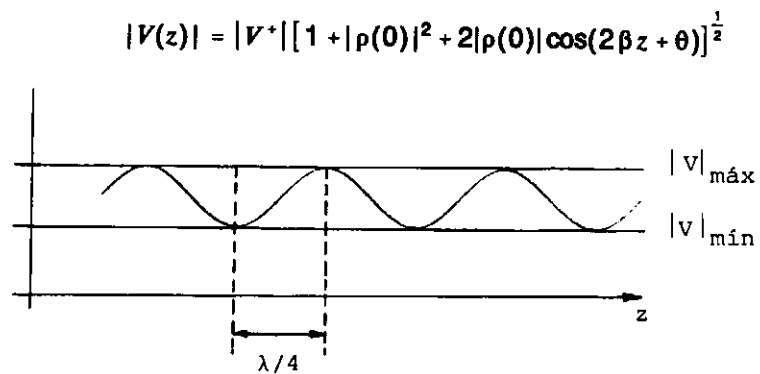


Fig. 2.21 Distribució de l'amplitud de la tensió en una línia amb ones estacionàries.

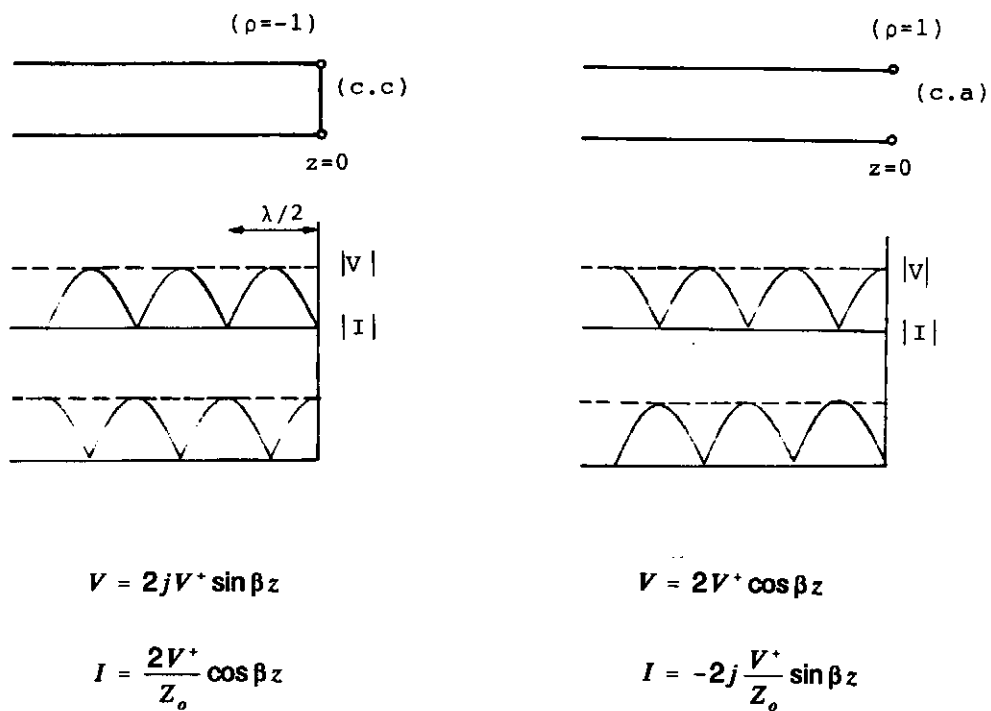


Fig. 2.22 Distribució de la tensió i del corrent en una línia de transmissió en curt circuit i en circuit obert.



Dues situacions analíticament senzilles i de força interès són les d'una línia en curt circuit i en circuit obert (fig. 2.22), a les quals tornarem més endavant quan parlem de línies ressonants. Observeu que en aquest cas les tensions i els corrents estan en quadratura i proporcionen potència mitjana nul·la cap a la dreta. Alhora, ha desaparegut tot vestigi de propagació, ja que, per exemple, en el cas de c.c.:

$$v(z,t) = 2|V^+| \sin(\beta z) \cdot \cos\left(\omega t + \phi^+ + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.61)$$

És a dir, tots els punts de la línia estan simultàniament en fase, independentment de la seva posició.

## 2.7 La carta de Smith

L'expressió (2.41) que dona la transformació d'impedàncies en tota una línia no solament és de càlcul molest (qüestió poc greu avui gràcies a les calculadores i als ordinadors), sinó que és de difícil interpretació i no permet treure conclusions senzilles sense recórrer a càlculs complexos. Un ajut gràfic de força utilitat és el proposat per P.H. Smith al 1939 (els russos l'atribueixen a Volpert, que sembla que el va proposar, independentment de Smith, al mateix any, a la Unió Soviètica) i que descriurem a continuació.

Descartat el pla de  $Z=R+jX$  com a base, ja que valors infinits de  $R$  i  $X$  formen part de situacions pràctiques, la conveniència d'utilitzar el pla de coeficients de reflexió  $\rho$  és immediata, ja que totes les impedàncies (passives) produeixen  $|\rho| < 1$  i, per tant, totes estan contingudes a l'interior d'un cercle de radi unitat.

Per tant, la transformació:

$$\rho = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1} \quad , \quad \bar{Z} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (2.62)$$

(noteu que utilitzem impedàncies normalitzades a  $Z_0$ ) transforma punts del pla complex  $\bar{Z} = \bar{R} + j\bar{X}$  en punts del pla complex  $\rho = u + jv$  amb la propietat important següent: qualsevol circumferència en el pla  $\bar{Z}$  es transforma en una altra circumferència del pla  $\rho$ . Recordeu que les línies rectes són un cas particular de circumferències en les quals el seu radi es fa infinit.

Aquesta propietat es pot verificar fàcilment si recordem (fig. 2.23) que l'equació (a partir d'ara prescindirem de la barra sobre la  $Z$  per indicar normalització)

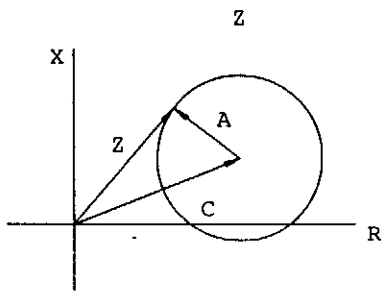
$$|z|^2 - (ZC^* + Z^*C) + B = 0 \quad (2.63)$$

amb  $C$  complex i  $B$  real, representa una circumferència de centre  $C$  (coeficient de  $Z^*$  canviat de signe) i radi:

$$|A| = \sqrt{|C|^2 - B} \quad (2.64)$$

Si tornem a (2.62) i suposem que  $Z$  pertany a una circumferència, llavors:

$$Z = \frac{1+\rho}{1-\rho} = C + A \quad \frac{1+\rho}{1-\rho} - C = \frac{(1-C) + \rho(1+C)}{1-\rho} = A \quad (2.65)$$



$$Z = C + A$$

$$|Z - C|^2 = |A|^2 \rightarrow (Z - C)(Z^* - C^*) = |A|^2$$

$$\rightarrow |Z|^2 - (ZC^* + Z^*C) + |C|^2 - |A|^2 = 0$$

Fig. 2.23 Equació, en el pla complex de les  $Z$ , d'una circumferència de centre  $C$  i radi  $|A|$ .

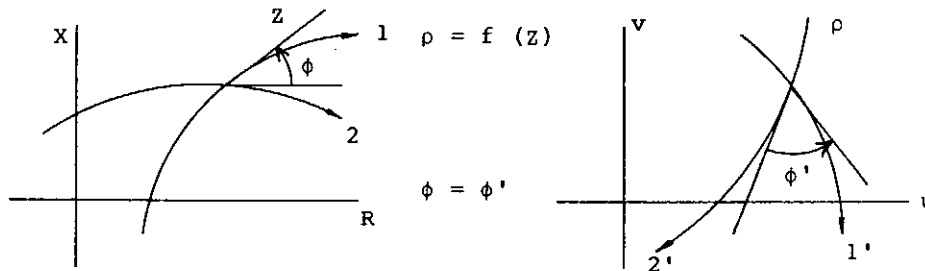


Fig. 2.24 Propietat de conformitat de les transformacions del pla complex,  $\rho = f(z)$ . Els angles transformats  $\phi$  i  $\phi'$  són iguals.

Si prenem el mòdul en ambdós membres resulta:

$$\begin{aligned} |A|^2 [|\rho|^2 + 1 - (\rho + \rho^*)] &= \\ = |1 - c|^2 + |\rho|^2 |1 + c|^2 + \rho(1 + c)(1 - c^*) + \rho^*(1 + c^*)(1 - c) \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} |\rho|^2 - \frac{\rho [ |A|^2 + (1 - c)(1 + c) ] + \rho^* [ |A|^2 + (1 - c^*)(1 + c^*) ]}{|A|^2 - |1 + c|^2} + \\ + \frac{|A|^2 - |1 - c|^2}{|A|^2 - |1 + c|^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

equació identificable amb la d'una circumferència en el pla de  $\rho$ , de centre i radi calculables immediatament, com volfem demostrar.

En general, tota transformació complexa té, a més, la propietat de ser conforme excepte en punts singulars; és a dir, si dues corbes es tallen formant un cert angle en el pla  $Z$ , les seves transformades es tallen formant el mateix angle en magnitud i sentit (fig. 2.24).

La construcció de les línies de resistència constant i reactància constant en el pla de  $\rho$  (carta de Smith) es podria realitzar a partir de l'expressió (2.67), però és més senzill i instructiu fer-ho segons les consideracions següents:

- a) Una circumferència queda determinada si en coneixem tres punts. Si, a més, tenim informació suplementària (per exemple, coneixem la recta en la qual es troba el seu centre) el nombre de punts es pot reduir (per exemple, les dues interseccions amb la recta del centre, que determinen un diàmetre).
- b) A tots els punts de l'infinit del pla  $Z$  ( $R \rightarrow \infty$ ,  $X \rightarrow \infty$  o ambdós) els correspon  $\rho = 1$ .
- c) A valors de  $Z$  simètrics respecte a l'eix de les abscisses els corresponen valors de  $\rho$  també simètrics respecte a l'eix d'abscisses:

$$Z_2 = Z_1^* \quad , \quad \rho_2 = \frac{Z_2 - 1}{Z_2 + 1} = \frac{Z_1^* - 1}{Z_1^* + 1} = \rho_1^* \quad (2.68)$$

Per tant, a corbes simètriques respecte a l'eix  $R$  en  $Z$  també corresponen corbes en  $\rho$  amb la mateixa simetria. En particular, les línies de resistència constant en  $Z$  seran transformades en cercles en  $\rho$  amb un diàmetre sobre l'eix real (fig. 2.25), per la qual cosa la seva identificació només requereix dos punts, un dels quals és  $\rho = 1$ .

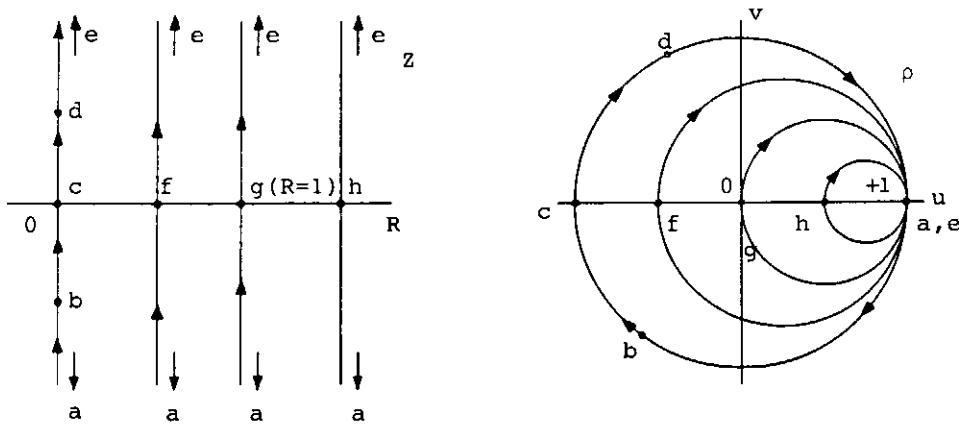
Amb tot això, la construcció dels cercles de resistència constant de la figura 2.25 és molt senzilla i no requereix explicacions addicionals. Per construir els de reactància constant, una vegada es tenen els anteriors, n'hi ha prou amb partir dels punts  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  i  $e$  (fig. 2.26), i recordar que, en virtut de la conformitat, han de tallar ortogonalment les línies  $R = ct$  i confluir en el transformat del punt de l'infinit del pla  $Z$ , és a dir, el punt  $\rho = 1$ .

Que totes aquestes circumferències de  $X = ct$  tinguin el seu centre en la recta  $u = 1$  (recta vertical tangent a la carta de Smith per la dreta) es pot veure de la manera següent: si  $Z_1 = R + jX$  i  $Z_2 = -(R + 2) + jX$ , llavors:

$$\rho_1 - 1 = \frac{R + jX - 1}{R + jX + 1} - 1 = \frac{-2}{(1 + R) + jX}$$

$$\rho_2 - 1 = \frac{-2}{-(1 + R) + jX} \quad (2.69)$$

és a dir,  $\rho_1$  i  $\rho_2$  són simètrics respecte a la recta  $u = 1$ . Per tant, la circumferència completa transformada de la recta  $x = ct$  ( $-\infty < R < \infty$ ) ha de ser simètrica respecte a aquesta recta i tenir-hi el seu centre.



$R=0, |\rho|=1$ , cercle de radi unitat. El punt  $c (R=0, X=0)$  correspon a  $\rho=-1$ .  
 Als punts de l'infinit  $(a, e)$  els correspon  $\rho=1$ .

$R \neq 0, R < 1$ : al punt  $f$  li correspon  $\rho = (R-1)/(R+1) < 0$

$R \neq 0, R = 1$ : al punt  $g$  li correspon  $\rho = 0$

$R > 1$ : al punt  $h$  li correspon  $\rho = (R-1)/(R+1) > 0$

Fig. 2.25 Construcció de les línies de resistència constant en la carta de Smith.

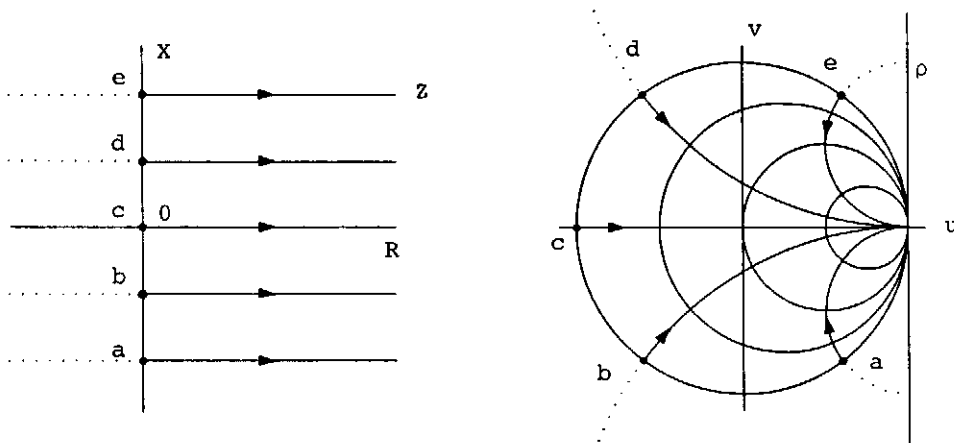


Fig. 2.26 Construcció de les línies de reactància constant.

D'aquesta manera ens trobem amb la construcció de la figura 2.27, que és la versió de la carta de Smith emprada més sovint.

Referint-nos a la transformació d'admitàncies:

$$\rho = \frac{1 - Y}{1 + Y} \quad (2.70)$$

s'observa que és idèntica a la d'impedàncies (2.62) excepte per un canvi de signe que suposa un gir de 180°. No cal, per tant, tornar-la a dibuixar.

Idealment, seria bo disposar d'una carta que tingués dibuixades simultàniament les malles de línies de  $Z$  i de  $Y$  (fig. 2.28). D'aquesta manera, donat un cert valor de  $\rho$ , la seva localització a la carta de Smith ens proporcionarà simultàniament, per lectura directa, els valors de  $Z$  i  $Y$  als quals correspon.

## 2.8 Propietats bàsiques de la carta de Smith

Hem vist que hi ha una correspondència biunívoca (excepte per als punts de l'infinit) entre els punts del pla de  $\rho$  i els del pla de  $Z$  o  $Y$ , de manera que la situació d'un valor particular de  $\rho$  a la carta de Smith ens proporciona per lectura en les malles de línies de  $Z$  o  $Y$  els valors corresponents. Recíprocament, la situació d'un valor particular de  $Z$  (o bé  $Y$ ) en la malla corresponent coincideix amb l'extrem del vector de  $\rho$  associat, que es pot llegir tenint en compte que el radi de la carta de Smith es correspon amb  $|\rho| = 1$  (vegeu una de les escales interiors), i que la perifèria de la carta de Smith està marcada en graus sexagesimals. Pel que fa a la carta de les  $Z$ , noteu les propietats bàsiques següents:

- 1) La part superior,  $v > 0$ , correspon a impedàncies inductives,  $X > 0$ , i la inferior a capacitives,  $X < 0$ .
- 2) Les resistències més grans que la unitat,  $R > 1$ , estan contingudes dins del cercle de resistència constant que passa per l'origen. Aquest últim (punt  $R = 1$ ) es correspon amb la impedància (resistència) que adapta la línia.
- 3) El coeficient de reflexió en una línia val:

$$\rho(z) = \rho(0) e^{2j\beta z} \quad (2.71)$$

De manera que quan ens movem per tota la línia  $|\rho(z)|$  resta constant, mentre que la seva fase varia linealment amb la longitud a raó d'una circumferència completa (360°) cada mitja longitud d'ona. D'aquesta manera, el vector representatiu a la carta de Smith gira i es pot llegir en cada moment la impedància  $Z(z)$  sobre la malla de línies de la carta de Smith (fig. 2.29). Observeu que el sentit de gir és positiu (antihorari) si ens movem cap a la dreta (cap a la càrrega) i negatiu (horari) si ens movem cap a l'esquerra (cap al generador). Noteu (fig. 2.27) que la perifèria de la carta de Smith està graduada també en longituds d'ona i que els sentits de gir (generador i càrrega) hi són també indicats.

4) En els punts en què  $|V|$  és màxim,  $|I|$  és mínim i la impedància és resistiva i pren el valor màxim donat per:

$$|Z(z)|_{\max} = R_m = S \quad (2.72)$$

En efecte,  $|V|$  és màxim quan  $V^+ \exp[-j\beta z]$  i  $V^- \exp[j\beta z]$  se sumen en fase, i llavors  $I^+ = V^+/Z_0$  i  $I^- = -V^-/Z_0$  se sumen en oposició de fase i produeixen un vector  $I$  col·lineal amb el vector  $V$  (fig. 2.15).

De manera que:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} Z_0 = SZ_0 \quad (2.73)$$

Amb  $Z_0 = 1$  (valors normalitzats) resulta  $Z = S$ , com volíem demostrar.

Anàlogament, on  $|V|$  és mínim,  $|I|$  és màxim i la impedància torna a ser resistiva i, aquesta vegada, mínima i de valor:

$$|Z(z)|_{\min} = R_m = \frac{1}{S} \quad (2.74)$$

Aquests punts es corresponen a la carta de Smith amb l'eix real (reactància nul·la).

Pel que fa a la carta d'admitàncies, ja hem indicat anteriorment que és la mateixa que la d'impedàncies girada 180°, i que seria bo disposar d'una malla doble com la de la figura 2.28. A la pràctica, aquestes malles dobles són molt molestes, i resulta més senzill, per calcular el valor de l'admitància, llegir el valor de l'oposat per l'origen a la mateixa carta de  $Z$  (fig. 2.30). En aquest cas, cal anar amb compte amb els signes de la susceptància  $B$  i recordar que són oposats als del valor corresponent de  $X$ .

|                                  |   |            |
|----------------------------------|---|------------|
| NAME                             | TITLE   | DWG. NO. A |
| SMITH CHART, FORM 82-B5PR (9-66) | KAY ELECTRIC COMPANY, PINE BROOK, N.J. © 1966 PRINTED IN U.S.A. | DATE       |

IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

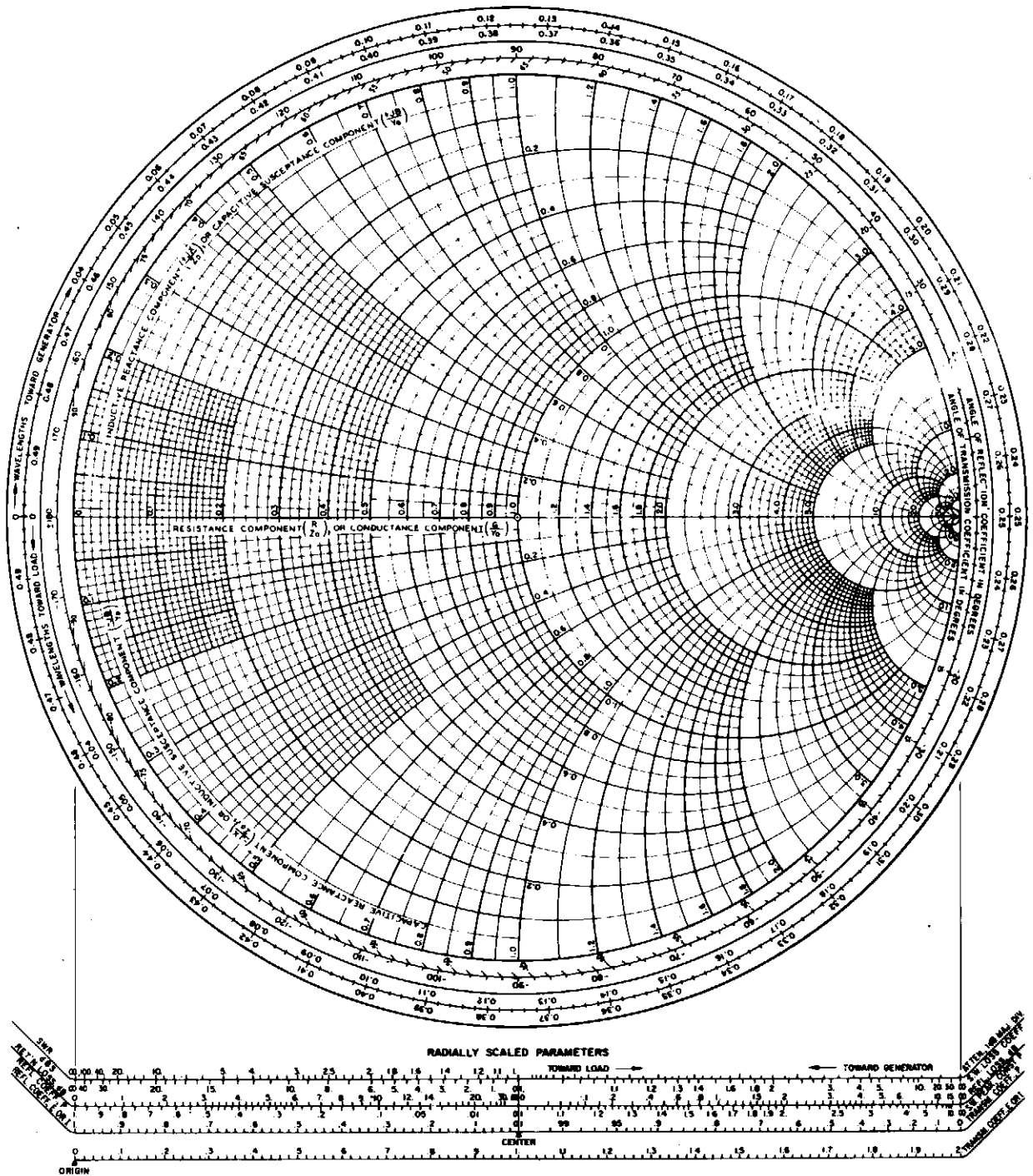


Fig. 2.27 Carta de Smith.



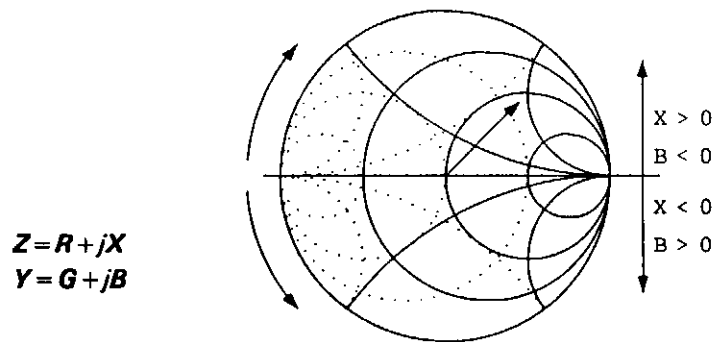


Fig. 2.28 Carta de Smith amb malles de línies de  $Z$  (línies contínues) i de  $Y$  (línies discontinües)

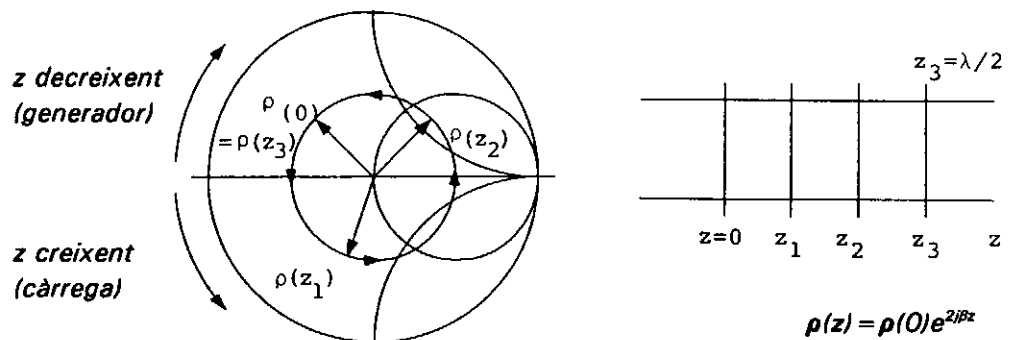


Fig. 2.29 Evolució de  $\rho(z)$  a la carta de Smith quan ens movem per tota la línia.

**Exemple 1** El procés bàsic en què es basa la utilització de la carta de Smith és el següent: Suposem una línia carregada amb una impedància (normalitzada)  $Z = 1 + j$ . Aquest punt es localitza a la carta de Smith (punt A, fig. 2.30); el coeficient de reflexió  $\rho$  ve donat en mòdul i en fase pel vector complex  $OA$  (en aquest cas  $OA = 0.45 \cdot e^{j1.11}$ ). Si ara ens movem cap al generador, segons (2.71) el punt representatiu es mou a la carta de Smith al llarg

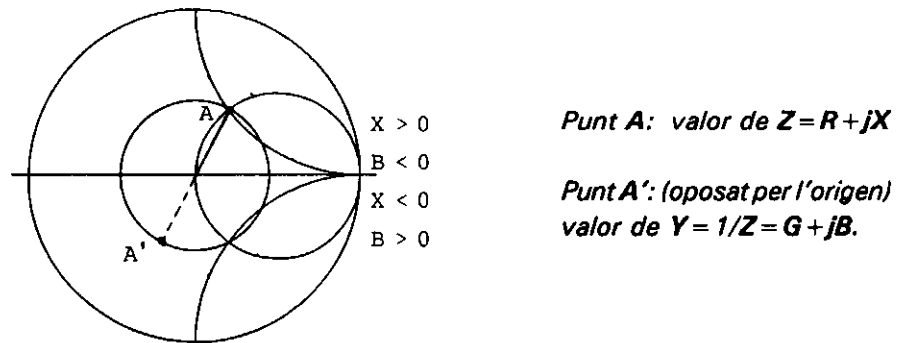


Fig. 2.30 Lectura del valor de l'admitància corresponent a un punt A.

de la circumferència centrada a l'origen i que passa per A en el sentit de les busques del rellotge i que indica, per a cada valor de la posició en la línia z, el corresponent valor de la impedància. Noteu que quan es recorre  $\lambda/2$  el punt torna a la mateixa posició en la carta, la qual cosa es correspon amb el fet que la impedància al llarg de la línia és periòdica de període  $\lambda/2$ . ■

#### Exemple 2 Determinació d'impedàncies en el laboratori

Suposem que al laboratori es fan els mesuraments següents en una línia de transmissió de  $Z_0 = 50\Omega$  a 500 Mhz:

$$|V|_{m\grave{a}x} = 6.0 \text{ V};$$

$$|V|_{m\grave{i}n} = 3.0 \text{ V};$$

distància d'un cert mínim de voltatge a la càrrega: 142.5cm.

Volem calcular el valor de la impedància de càrrega  $Z_L$ .

En primer lloc obtenim S:  $S = |V|_{m\grave{a}x} / |V|_{m\grave{i}n} = 2$ .

D'aquí podem obtenir  $|\rho| = (S-1)/(S+1) = 1/3$ , però també podem localitzar-lo directament a la carta tenint en compte que  $S = R_M$ , amb la qual cosa situem immediatament el cercle sobre el qual ens hem de moure (fig. 2.31; punt A). D'altra banda, a 500 Mhz ( $\lambda = 60 \text{ cm}$ ), 142.5 cm són  $2\lambda + (3\lambda/8)$ , que alhora, a efectes d'impedància, equivalen a  $3\lambda/8$ .

|      |       |            |
|------|-------|------------|
| NAME | TITLE | DWG. NO. A |
|      |       | DATE       |

IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

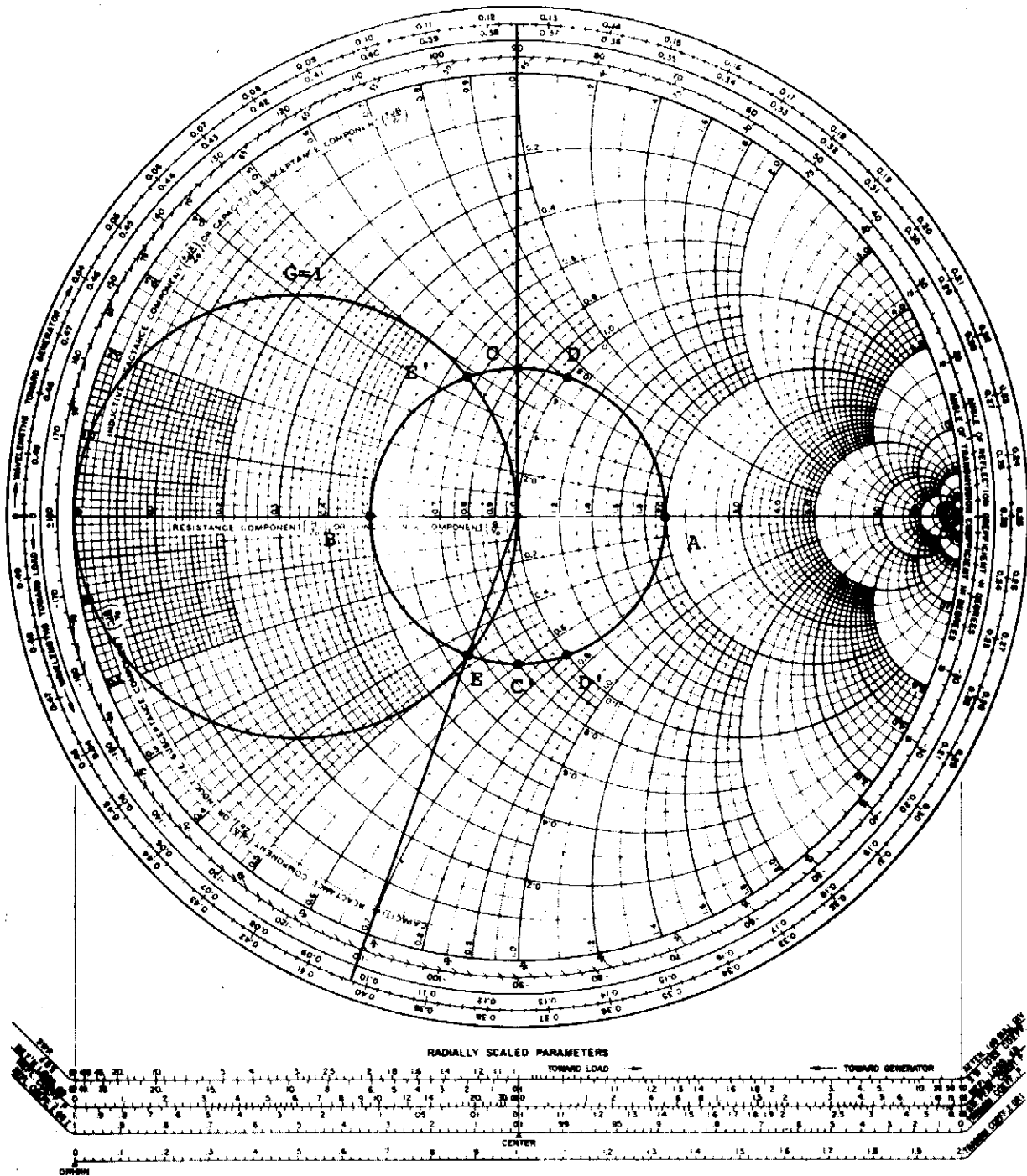


Fig. 2.31 Utilització bàsica de la carta de Smith per adaptar impedàncies (exemple 2).

Localitzat a la carta el punt corresponent a un mínim de voltatge (punt *B*, mínim d'impedància) la impedància de càrrega cercada s'obté girant en sentit contrari a les busques del rellotge l'angle equivalent a  $3\lambda/8$  ( $3/4$  de circumferència) fins a arribar a *C*; llegim llavors  $Z_L = (0.8 + j0.6)$ , és a dir,  $Z_L = (40 + j30)\Omega$ . Si volem obtenir el valor de l'admitància corresponent, ho podem fer per lectura directa de la carta (punt *C'*):  $Y_L = 0.8 - j0.6 = (16 - j12) \text{ mS}$ .

En molts casos no és possible determinar amb precisió la distància entre la zona de mesurament i la càrrega. En aquest cas, si se substitueix aquesta càrrega per un curt circuit, n'hi ha prou, a efectes de càlcul d'impedàncies, amb suposar la càrrega en un punt de tensió nul·la a la zona de mesurament, ja que la distància d'aquest punt a la càrrega serà un nombre enter de semilongituds d'ona. ■

## 2.9 Adaptació d'impedàncies

Fixem-nos en el punt *D* de la figura 2.31 de l'exemple anterior. Correspon a tots els punts de la línia que es troben a una distància de  $0.027\lambda + n\lambda/2$ , amb  $n=0,1,2,\dots$  i en ells  $Z = 1 + j0.7$ . Si en un d'aquests punts qualsevol hi introduïm en sèrie amb la línia una impedància reactiva  $jX = -0.7$ , la línia queda adaptada (fig. 2.32) ja que immediatament a l'esquerra d'aquesta impedància afegida tenim:

$$Z = (1 + j0.7) - j0.7 = 1 \quad (2.75)$$

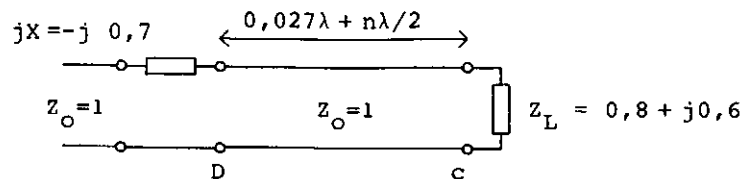
Hauríem pogut procedir anàlogament en els punts de la línia corresponent a *D'*; per a ells  $Z = 1 - j0.7$  i la impedància que s'hauria d'afegir seria inductiva,  $jX = j0.7$ .

Aquest procediment d'adaptar impedàncies no acostuma a ser el més utilitzat, ja que normalment és més fàcil introduir elements en paral·lel en una línia de transmissió que no pas en sèrie (ja que requereix la interrupció dels dos conductors de la línia). En aquest cas hauríem de fixar-nos en el punt *E* (fig. 2.31) per al qual  $Y = 1 + j0.7$ . El pla corresponent es troba a  $0.277\lambda (+n\lambda/2)$  de la càrrega i si en aquest pla hi afegim en paral·lel una susceptància de valor  $jB = -j0.7$ , l'admitància que es veu immediatament a la seva esquerra serà  $Y = 1$  (fig. 2.32) i la línia també queda adaptada. Noteu que, com que l'element adaptador és reactiu, tant en un cas com en l'altre tota la potència lliurada pel generador a la línia de l'esquerra és absorbida per  $Z_L$ . Altrament, en el tros de la línia a la dreta de  $jX$ , o  $jB$ , hi ha una ona estacionària amb un coeficient de reflexió:

$$\rho_L = \frac{(Z_L - 1)}{(Z_L + 1)} \quad (2.76)$$

També hem de dir que, normalment, la susceptància que s'introdueix es realitza amb una secció de línia de transmissió amb el seu extrem en curt circuit o bé en circuit obert amb la qual, com hem vist, es pot aconseguir qualsevol valor de reactància variant la posició del curt circuit o del circuit obert.

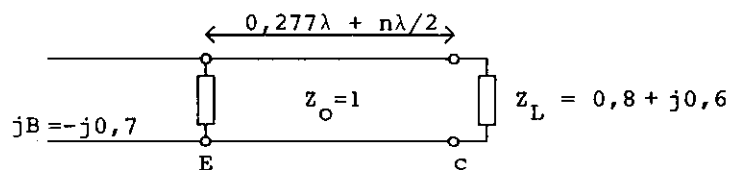
a)



$$Z_i = 1 + j0.7$$

$$Z = Z_i + jX = 1 + j0.7 - j0.7 = 1$$

b)

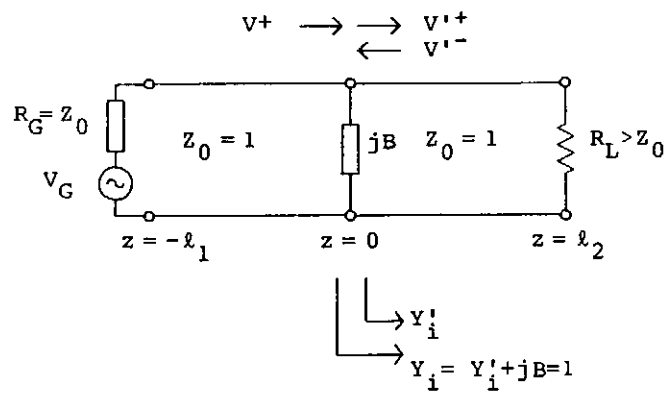


$$Y_i = 1 + j0.7$$

$$Y = Y_i + jB = 1 + j0.7 - j0.7 = 1$$

Fig. 2.32 Adaptació d'impedàncies en una línia. Adaptació amb una reactància en sèrie, a, i amb una susceptància en derivació, b. Els valors indicats fan referència a l'exemple de la figura 2.31.

Exemple 1 Suposem, per simplificar una mica les expressions, que la impedància de càrrega és resistiva i més gran que  $Z_0$ , de manera que  $\rho_L$  sigui real i positiu (fig. 2.33). En el pla de  $jB$  ( $z = 0$ ) tindrem:



$$\rho'_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} > 0$$

$$\rho'(0) = \frac{V'^-}{V'^+} = \rho'_L e^{-2j\beta l_2}$$

$$P = \frac{|V^+|^2}{2}$$

$$P' = \frac{1}{2} (|V'^+|^2 - |V'^-|^2) = \frac{|V'^+|^2}{2} (1 - |\rho'_L|^2)$$

Fig. 2.33 Curt circuit utilitzat com a exemple a l'apartat 2.9. Se suposa que  $jB$  adapta  $R_L$  a la línia.

$$\rho'(0) = \frac{V'^-}{V'^+} = \rho'_L e^{-2j\beta \ell_2} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} Y_i &= \frac{1 - \rho'_L e^{-2j\beta \ell_2}}{1 + \rho'_L e^{-2j\beta \ell_2}} = \frac{(1 - \rho'_L e^{-2j\beta \ell_2})(1 + \rho'_L e^{2j\beta \ell_2})}{(1 + \rho'_L e^{-2j\beta \ell_2})(1 + \rho'_L e^{2j\beta \ell_2})} = \\ &= \frac{1 - \rho'^2_L + 2j\rho'_L \sin 2\beta \ell_2}{1 + \rho'^2_L + 2\rho'_L \cos 2\beta \ell_2} = 1 - jB \quad (2.78) \end{aligned}$$

De manera que :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \rho'^2_L}{1 + \rho'^2_L + 2\rho'_L \cos 2\beta \ell_2} &= 1 \\ -B &= \frac{2\rho'_L \sin 2\beta \ell_2}{1 + \rho'^2_L + 2\rho'_L \cos 2\beta \ell_2} = \frac{2\rho'_L \sin 2\beta \ell_2}{1 - \rho'^2_L} \quad (2.79) \end{aligned}$$

De la primera també s'obté:

$$\cos 2\beta \ell_2 = -\rho'_L \quad (2.80)$$

equació que, evidentment, té dues solucions (punts  $E$  i  $E'$  de la figura 2.31). Si per exemple escollim la que es troba al segon quadrant ( $90^\circ < 2\beta \ell_2 < 180^\circ$ ), de manera que el  $\sin(2\beta \ell_2)$  sigui positiu, resulta:

$$\sin(2\beta \ell_2) = \sqrt{1 - \cos^2(2\beta \ell_2)} = \sqrt{1 - \rho'^2_L} \quad (2.81)$$

i, per tant,

$$B = -\frac{2\rho'_L}{\sqrt{1 - \rho'^2_L}} \quad (2.82)$$

Aquest resultat posa de manifest la propietat evident a la carta de Smith (fig. 2.31) que si el coeficient de reflexió a adaptar és proper a la unitat, la reactància necessària pren

valors molt grans. En aquest cas també succeeix que l'adaptació és molt sensible a la freqüència, i petites variacions d'aquest tipus desadapten fortament la línia.

Considerem ara el balanç de potència en ambdós trossos de línia:

$$P = \frac{|V^+|^2}{2} \quad P' = \frac{1}{2} (|V'^+|^2 - |V'^-|^2) = \frac{|V'^+|^2}{2} (1 - |\rho'_L|^2) \quad (2.83)$$

Per continuïtat de tensions en  $z=0$ :

$$V^+ = V'^+ + V'^- = V'^+ (1 + \rho'(0)) = V'^+ (1 + \rho'_L e^{-2j\beta l_2}) \quad (2.84)$$

de manera que:

$$|V'^+|^2 = \frac{|V^+|^2}{|1 + \rho'_L e^{-2j\beta l_2}|^2} = \frac{|V^+|^2}{1 + \rho'^2_L + 2\rho'_L \cos(2\beta l_2)} \quad (2.85)$$

expressió que, en vista de (2.79), també es pot escriure

$$|V'^+|^2 = \frac{|V^+|^2}{1 - \rho'^2_L} \quad (2.86)$$

de manera que  $P = P'$ , com calia esperar.

Juntament al procediment d'adaptació exposat n'hi ha d'altres, també utilitzats molt freqüentment, que descriurem a continuació:

#### 1) Transformador en $\lambda/4$

Hem vist abans la propietat inversora d'impedàncies d'una secció de línia en  $\lambda/4$ . D'aquesta manera, una càrrega resistiva  $R_L$  es pot adaptar a una línia d'impedància característica  $Z_0$  mitjançant una d'aquestes seccions (transformador en  $\lambda/4$ ) d'impedància característica  $(Z_0')^2 = Z_0 R_L$  (fig. 2.34a).

Si la càrrega no és resistiva hi ha dues opcions. Una consisteix a inserir el transformador en un pla on la impedància d'entrada sigui resistiva (plans 1 o 2, fig. 2.34b). L'altra consisteix a cancel·lar la part reactiva de la impedància de càrrega amb un element reactiu en sèrie o en paral·lel i afegir-hi després el transformador (fig. 2.34c).



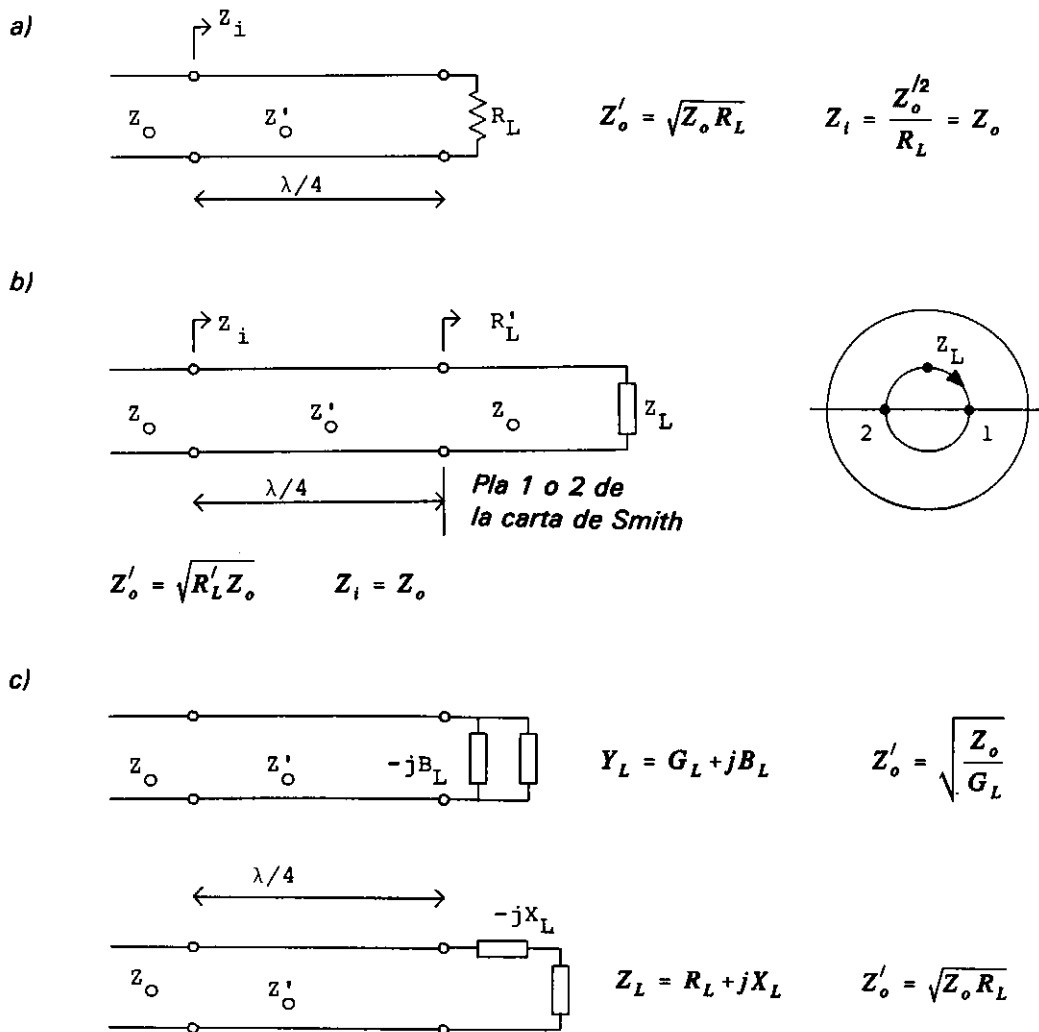


Fig. 2.34 Adaptació d'impedàncies amb transformadors en  $\lambda/4$ :

- a) D'una càrrega resistiva.
- b) D'una càrrega complexa.
- c) Ídem per cancel·lació de la part reactiva i reducció del cas a.

2) Sintonitzador doble

En aquest cas es disposen a la línia, en posicions fixes, dues reactàncies variables construïdes normalment amb seccions de línia en c.c. de longitud variable. D'aquesta manera, si es canvia la impedància de càrrega o es varia la freqüència, l'adaptació es pot refer canviant només la posició dels curt circuits de les línies connectades en paral·lel.

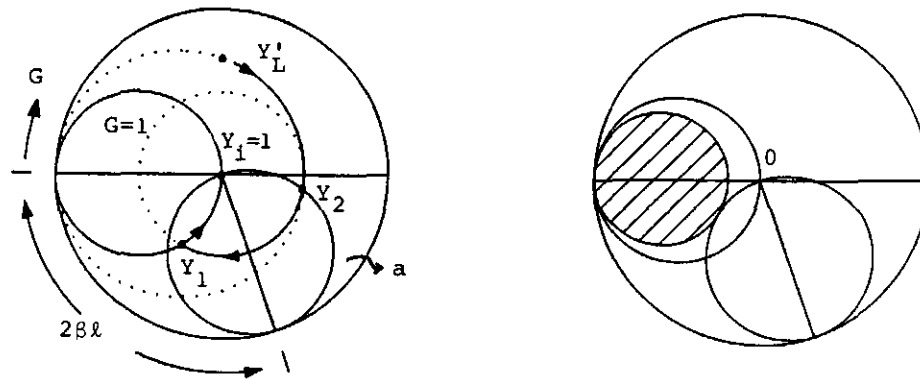
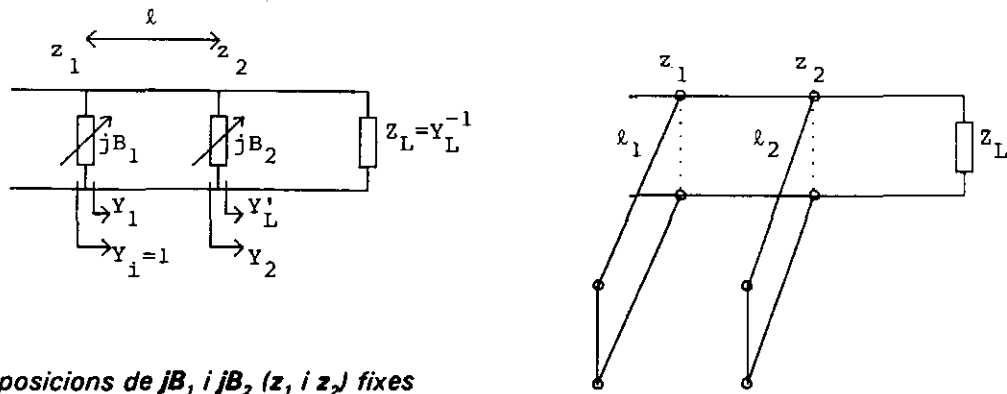


Fig. 2.35 Adaptació d'una impedància amb un sintonitzador doble. La zona ratllada és el lloc geomètric de les  $Y_L'$  que no es poden adaptar.

El procediment d'adaptació és senzill de comprendre amb l'ajut de la carta de Smith (fig. 2.35). Primerament, emprarem el valor d'admitància  $Y_L'$  en el pla  $z_2$ , ja que la seva transformació des de  $Y_L$  a la carta de Smith és evident. En segon lloc, cal dibuixar el cercle  $a$  obtingut en girar el  $G=1$  la distància  $l$  en direcció cap a la càrrega.

Considerem ara l'admitància vista immediatament a l'esquerra de  $jB_2$ :

$$Y_2 = Y_L' + jB_2 \quad (2.87)$$

Aquest valor estarà situat sobre el cercle de  $G$  constant que passa per  $Y_L'$ . Si fem que  $jB_2$  sigui tal que  $Y_2$  estigui també en el cercle  $a$ , l'admitància  $Y_1$ , vista des de la dreta de  $jB_1$ ,

estarà situada sobre el cercle  $G=1$  (per la mateixa construcció del cercle  $a$ ). És a dir:

$$Y_i = 1 + jB \quad (2.88)$$

i només resta fer  $B_i = -B$  per aconseguir l'adaptació que buscàvem.

En aquest procés queda palesa la necessitat que el cercle de  $G=ct$  que passa per  $Y_L'$  talli el cercle  $a$ . Per tant, totes les admittàncies  $Y_L'$  que estiguin a l'interior del cercle de  $G=ct$  tangent al cercle  $a$  no podran ser adaptades (fig. 2.35, zona ratllada).

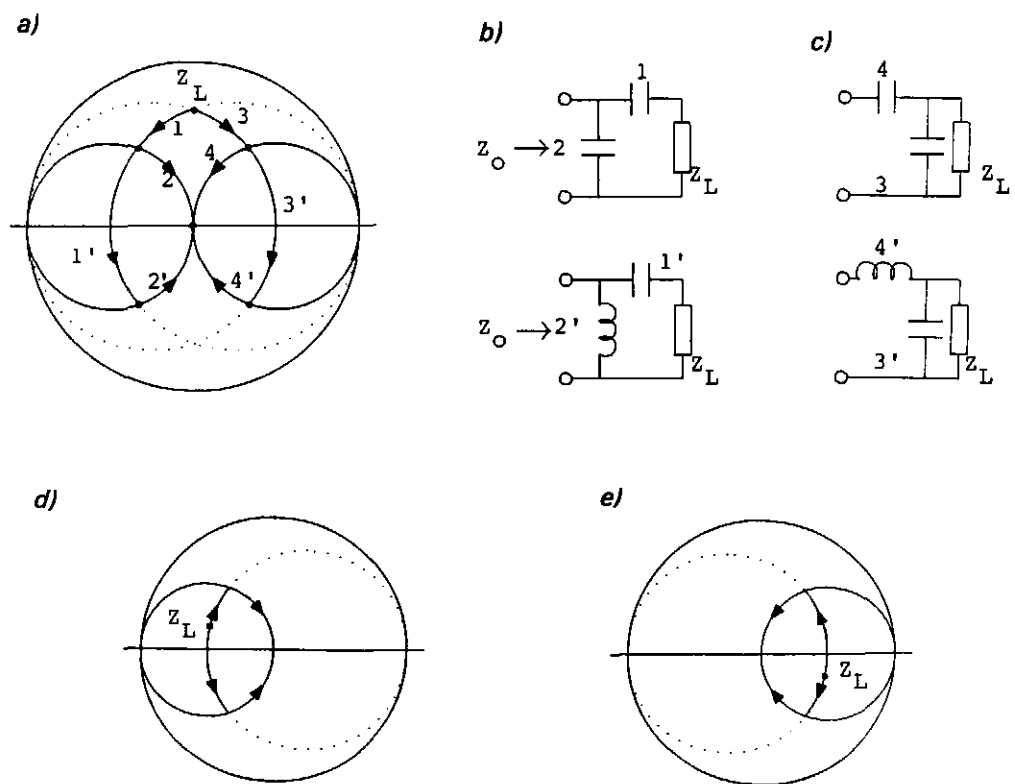
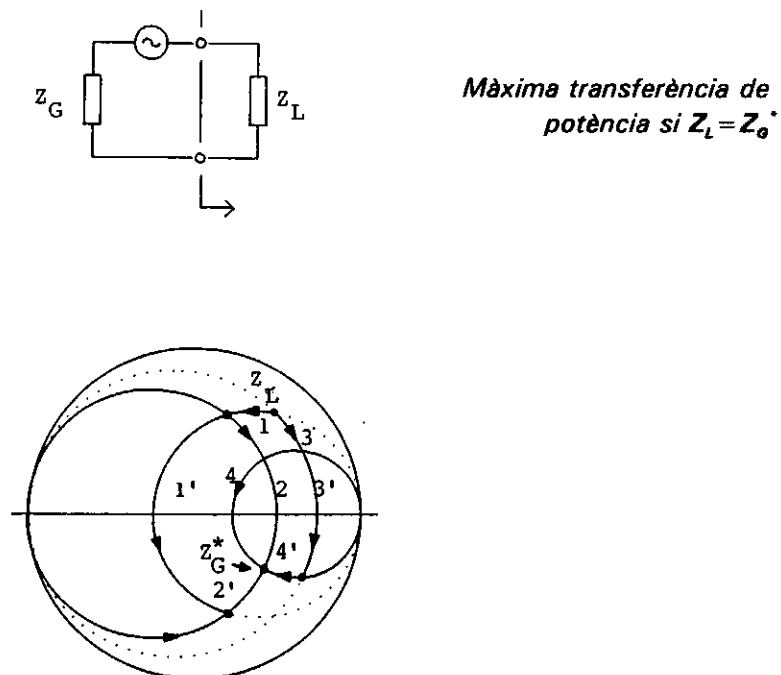


Fig. 2.36 Adaptació d'impedàncies amb xarxes reactives en L:

a) Camins possibles dibuixats sobre la carta de Smith que condueixen a dues solucions en sèrie i en paral·lel (1-2, 1'-2', fig. b) o dues solucions en paral·lel i en sèrie (3-4, 3'-4', fig. c).

d) Situació en la qual desapareixen les solucions en paral·lel i en sèrie ( $G_L > 1$ ).

e) Situació en la qual desapareixen les solucions en sèrie i en paral·lel ( $R_L > 1$ ).



*Fig. 2.37 Modificació del procés d'adaptació de la figura anterior per aconseguir una adaptació de màxima transferència de potència a un generador arbitrari. Noteu que la impedància de referència ( $Z_0$ ) és irrellevant en aquest problema.*

### 3) Xarxes reactives en L

Recordem que, si a una càrrega  $Z_L$  li afegim una reactància en sèrie, el punt representatiu sobre la carta de Smith es mou sobre el cercle de  $R$  constant que passa per  $Z_L$ ; i si l'afegim en paral·lel, ho fa sobre el cercle de  $G$  constant.

Amb aquestes normes bàsiques la figura 2.36 és autoexplicativa; l'addició successiva d'elements en sèrie i en paral·lel, o viceversa, ens porta de  $Z_L$  a l'origen ( $\rho=0$ ) a través de línies de  $R$  constant- $G$  constant, si els valors de les reactàncies s'escullen adequadament. S'obtenen així quatre possibles solucions de xarxes adaptadores.

Altrament, si la impedància que s'ha d'adaptar està dins del cercle de  $G=1$  (fig. 2.36d), o dins del de  $R=1$  (fig. 2.36e), és evident que el nombre de possibles xarxes solució es redueix a només dues.

## 2.10 Comportament amb la freqüència

Fins ara, els processos d'adaptació d'impedàncies els hem realitzat a freqüència constant, sense ocupar-nos del seu comportament quan la freqüència varia. Com a exemple considerem la figura 2.38 la qual mostra un transformador en  $\lambda/4$  a la freqüència  $f_0$ , i estudiem com canvia el coeficient de reflexió en la línia d'entrada immediatament abans del transformador,  $\rho_1$ .

Tindrem que:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{Z_i - Z_{01}}{Z_i + Z_{01}} \quad ; \quad Z_i = Z_{02} \frac{1 + \rho_i}{1 - \rho_i} \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \rho_1 &= \frac{Z_{02}(1 + \rho_i) - Z_{01}(1 - \rho_i)}{Z_{02}(1 + \rho_i) + Z_{01}(1 - \rho_i)} = \\ &= \frac{(Z_{02} - Z_{01}) + \rho_i(Z_{02} + Z_{01})}{(Z_{02} + Z_{01}) + \rho_i(Z_{02} - Z_{01})} = \frac{\rho_1^0 + \rho_i}{1 + \rho_1^0 \rho_i} \quad (2.89) \end{aligned}$$

on hem definit:

$$\rho_1^0 \equiv \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (2.90)$$

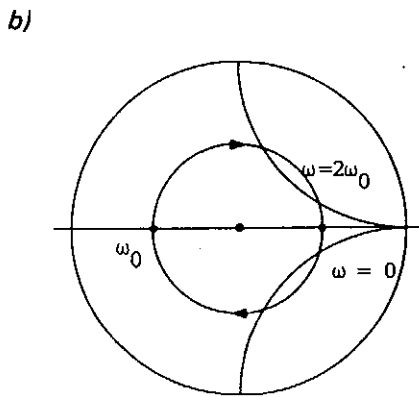
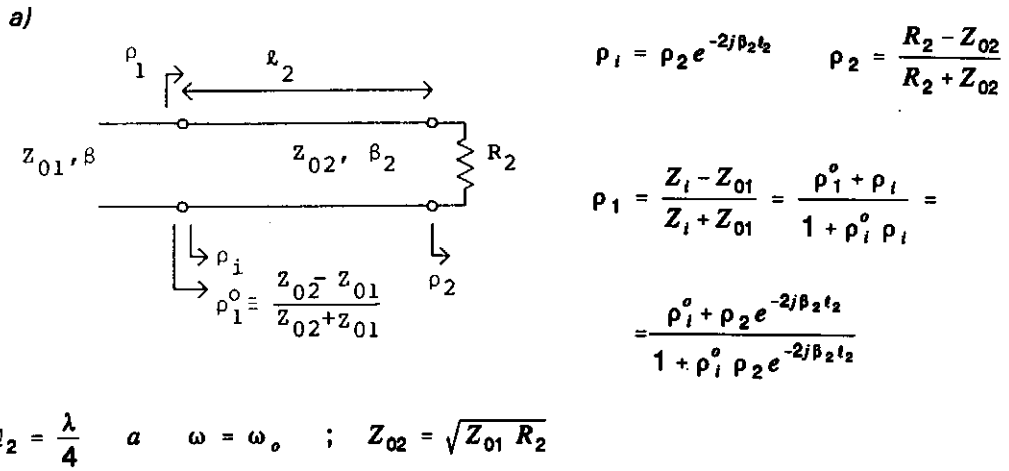
Noteu que ara:

$$\rho_i = \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2} \quad (2.91)$$

en canviar la freqüència, descriu sobre la carta de Smith un cercle de radi  $|\rho_2|$  (fig. 2.38b, on s'ha suposat  $R_2 > Z_{02}$  per fixar idees). Per això, atès que  $\rho_1^0$  és constant i (2.89) és, per tant, una transformació bilineal,  $\rho_1$  també descriu un cercle a la carta de Smith quan canvia la freqüència (fig. 2.38c), de tal manera que per a  $\omega = \omega_0$  (línia en  $\lambda/4$ ) la línia d'entrada està adaptada (centre de la carta de Smith).

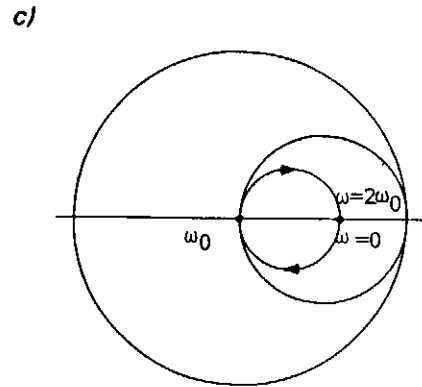
Si bé l'acabament del problema de manera exacta no suposa cap complicació greu, en aquest punt és convenient fer l'aproximació que els coeficients de reflexió implicats són petits; concretament que:

$$|\rho_1^0| \ll 1 \quad , \quad |\rho_2| \ll 1$$



$\rho_i = \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2}$

(Suposant  $R_2 > Z_{02}$ )  
 $\omega_0$  tal que  $\beta_2(\omega_0) l_2 = \pi/2$



$\rho_1 = \frac{\rho_1^0 + \rho_i}{1 + \rho_1^0 \rho_i}$

(Suposant  $R_2 > Z_{02} > Z_{01}$ )

Fig. 2.38 Comportament amb la freqüència d'un transformador en  $\lambda/4$ :  
 a) Definicions i relacions bàsiques.  
 b) Evolució de  $\rho_i$  amb la freqüència a la carta de Smith.  
 c) Ídem per a  $\rho_1$ .

de manera que:

$$1 + \rho_1^0 \rho_i = 1 + \rho_1^0 \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2} = 1 \quad (2.92)$$

En aquest cas, (2.89) se simplifica a:

$$\rho_1 = \rho_1^0 + \rho_i = \rho_1^0 + \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2} \quad (2.93)$$

La representació gràfica a la carta de Smith continua essent un cercle (fig. 2.39), però més fàcil d'interpretar que en el cas general.

Amb aquest grau d'aproximació és evident que, per a aconseguir adaptació (suposem  $R_2 > Z_{02} > Z_{01}$ ):

$$\rho_1^0 = \rho_2 \quad \rightarrow \quad \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{R_2 - Z_{02}}{R_2 + Z_{02}} \quad \rightarrow \quad \frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \frac{R_2}{Z_{02}} \quad (2.94)$$

és a dir,  $Z_{02} = \sqrt{Z_{01} R_2}$ . A més, de (2.93) també s'obté:

$$\begin{aligned} |\rho_1| &= \rho_1^0 |1 + e^{-2j\beta_2 l_2}| = \rho_1^0 |e^{j\beta_2 l_2} + e^{-j\beta_2 l_2}| |e^{-j\beta_2 l_2}| = \\ &= 2\rho_1^0 |\cos \beta_2 l_2| \quad (2.95) \end{aligned}$$

Amb aquesta expressió és fàcil calcular l'amplada de banda del transformador per a un valor màxim permès de  $|\rho|$ ,  $|\rho|_M$  (fig. 2.39).

**Exemple 1** Suposem l'adaptació de 75Ω a 50Ω ( $R_2 = 75\Omega$ ,  $Z_{01} = 50\Omega$ ). En aquest cas:

$$Z_{02} = \sqrt{50 \cdot 75} = 61.24 \Omega$$

$$\rho_1^0 = \rho_2 = 0.101 \quad |\rho_1^0 \rho_2| = 0.010 \quad (2.96)$$

Resulta,  $\rho_1(\omega=0) = 2\rho_1^0 = 0.202$  (el valor exacte és 0.2). Si fixem un valor màxim permisible  $|\rho|_M$  l'amplada de banda relativa és:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{2(\omega_0 - \omega_1)}{\omega_0} = 2 \left| 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{|\rho|_M}{2\rho_1^0} \right) \right| = \\
 &= 2 \frac{\beta_0 \ell_2 - \beta_1 \ell_2}{\beta_0 \ell_2} = 2 \frac{\Delta(\beta \ell_2)}{\beta_0 \ell_2} \quad (2.97)
 \end{aligned}$$

i, en particular,

$$|\rho|_M = 0.01 \quad \rightarrow \quad B = 6.3 \%$$

$$|\rho|_M = 0.02 \quad \rightarrow \quad B = 12.62 \%$$

$$|\rho|_M = 0.05 \quad \rightarrow \quad B = 31.85 \% \quad \text{etc.}$$

Observeu el següent: el transformador també funcionaria a la freqüència  $\omega_0$  si en comptes de  $\lambda/4$  tinguéssim  $3\lambda/4 = (\lambda/4) + (\lambda/2)$  de llargària i, en general, si tinguéssim  $(\lambda/4) + (n\lambda/2)$ . En canvi, en el cas  $3\lambda/4$ , per exemple, la variació de  $|\rho_1|$  amb la freqüència és més ràpida (fig. 2.39, línia de punts) i, per tant, l'amplada de banda aconseguida seria menor. Per ser concrets, es pot comprovar que es redueix a un terç del valor anterior, ja que a (2.97) el numerador  $\Delta(\beta \ell_2)$  (en radians) continua prenent el mateix valor, mentre que el denominador passa de valer  $\pi/2$  a valer  $3\pi/2$ .

Aquesta conclusió és completament general; l'amplada de banda de les estructures en què intervenen línies de transmissió es redueix proporcionalment a la seva longitud quan s'afegeix un nombre enter de semilongituds d'ona. És evident que, si en comptes d'una secció en  $\lambda/4$  n'hi posem més, augmentem els graus de llibertat del sistema i podem modificar l'amplada de banda de l'adaptació, definida com en l'exemple anterior. En particular, podem augmentar el nombre de zeros de  $|\rho|$ , com s'indica en l'exemple següent.

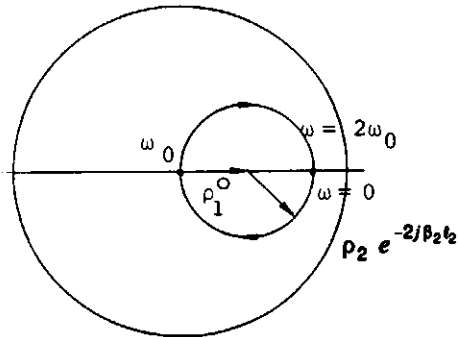
Respecte a la figura 2.40, considerem dues seccions en  $\lambda/4$  a la freqüència  $\omega_0$ , les dues amb la mateixa constant de propagació, per simplificar. Amb les mateixes definicions i aproximacions anteriors tindrem:

$$\rho_2 = \rho_2^0 + \rho_3 e^{-2j\beta \ell} \quad (2.98)$$

$$\rho_1 = \rho_1^0 + \rho_2 e^{-2j\beta \ell} = \rho_1^0 + \rho_2^0 e^{-2j\beta \ell} + \rho_3 e^{-4j\beta \ell}$$

$$\rho_1 = \rho_1^0 + \rho_2^0 s + \rho_3 s^2 \quad \text{amb} \quad s = e^{-2j\beta \ell} \quad (2.99)$$

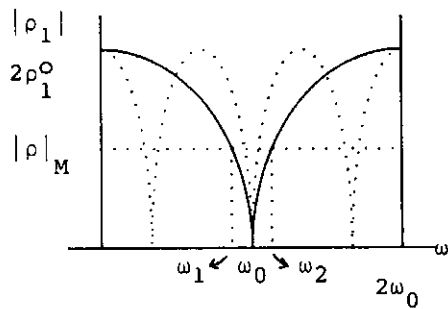




$$\rho_1 = \frac{\rho_1^0 + \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2}}{1 + \rho_1^0 \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2}}$$

$$= \rho_1^0 + \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2}$$

(si  $|\rho_1^0 \rho_2| \ll 1$ )

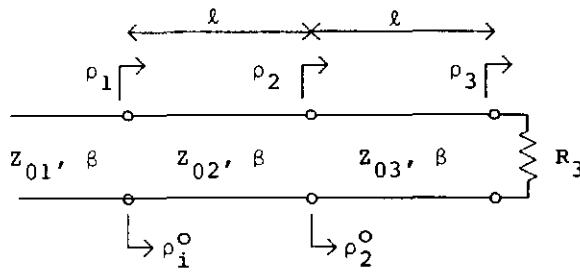


$$|\rho_1| = \rho_1^0 |1 + e^{-2j\beta_2 l_2}| =$$

$$= 2 \rho_1^0 |\cos \beta_2 l_2|$$

(Suposant  $R_2 > Z_{02} > Z_{01}$ )

Fig. 2.39 Versió del cercle de  $\rho_1$  de la figura anterior per al cas de reflexions petites i representació gràfica del mòdul del coeficient de reflexió en funció de la freqüència.



$$\rho_i^o = \frac{Z_{oi+1} - Z_{oi}}{Z_{oi+1} + Z_{oi}}$$

$$(i = 1, 2) ; \rho_3^o = \rho_3$$

$$\rho_1 = \rho_1^o + \rho_2 e^{-2j\beta l}$$

$$\rho_2 = \rho_2^o + \rho_3 e^{-2j\beta l}$$

$$\rho_1 = \rho_1^o + \rho_2^o S + \rho_3^o S^2 \quad \text{amb} \quad S = e^{-2j\beta l}$$

(Suposarem  $R_3 > Z_{03} > Z_{01}$  de manera que els  $\rho_i^o$  siguin positius)

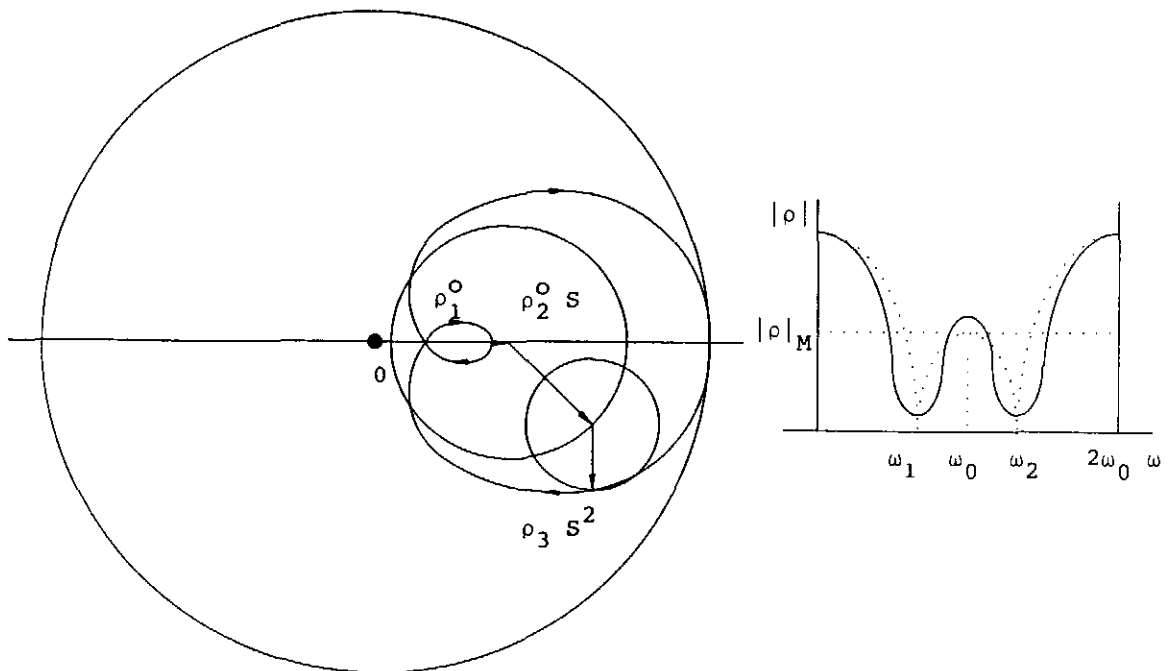


Fig. 2.40 Transformador de dues seccions, construcció gràfica a la carta de Smith per obtenir el coeficient de reflexió, i presentació gràfica de  $|\rho|$  (línia sòlida). La línia de punts per a  $|\rho|$  representa el cas particular de comportament amb dos zeros.

D'aquesta manera,  $\rho_1$ , sobre la carta de Smith, ve donat per la composició de tres vectors  $\rho_1^0$  (fix),  $\rho_2^0$ , que gira a raó d'una volta completa per a  $0 < \omega < 2\omega_0$ , i  $\rho_3$ , que gira dues voltes completes en el mateix marge (a la figura es representa el cas  $R_3 > Z_{03} > Z_{02} > Z_{01}$ , de manera que  $\rho_3, \rho_2, \rho_1 > 0$ ). És evident a la construcció gràfica que  $\rho_1$  descriu una cicloide (en un procés del tot idèntic al que, en el sistema de Ptolomeu, els astrònoms feien girar els planetes per explicar les seves trajectòries aparentment complexes), i es comprèn l'aparició de bucles en la trajectòria, que ens tornarem a trobar més endavant en parlar de circuits ressonants.

Tornant a l'exemple, si volem tenir dos zeros de  $|\rho|$  (línia de punts, fig. 2.40), és a dir, si volem que el vèrtex del bucle passi per l'origen a la carta de Smith, ens cal que:

$$\rho_1^0 + \rho_2^0 s + \rho_3 s^2 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \frac{-\rho_2^0 \pm \sqrt{(\rho_2^0)^2 - 4\rho_1^0 \rho_3}}{2\rho_3} \quad (2.100)$$

Però  $s$  ha de ser complex i tenir de mòdul la unitat:

$$(\rho_2^0)^2 < 4\rho_1^0 \rho_3$$

$$|s|^2 = \left( \frac{\rho_2^0}{2\rho_3} \right)^2 + \frac{4\rho_1^0 \rho_3 - (\rho_2^0)^2}{(2\rho_3)^2} = \frac{\rho_1^0}{\rho_3} = 1 \quad (2.101)$$

Així doncs, tindrem:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_1^0 (1 + e^{-4j\beta \ell}) + \rho_2^0 e^{-2j\beta \ell} = \\ &= e^{-2j\beta \ell} \left[ \rho_1^0 (e^{2j\beta \ell} + e^{-2j\beta \ell}) + \rho_2^0 \right] \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} |\rho_1|^2 &= (\rho_2^0 + 2\rho_1^0 \cos 2\beta \ell)^2 \\ |\rho_1| &= |\rho_2^0 + 2\rho_1^0 \cos 2\beta \ell| \end{aligned} \quad (2.103)$$

mentre que:

$$|\rho_1|_{\mathcal{M}} = |\rho_1(\omega_0)| = |\rho_1^0 - \rho_2^0 + \rho_3^0| = |2\rho_1^0 - \rho_2^0| \quad (2.104) \quad \blacksquare$$

**Exemple 2** Suposem, com a l'exemple 1,  $Z_{01} = 50\Omega$  i  $R_L = R_3 = 75\Omega$ , i  $|\rho|_M = 0.01$ . Tindrem que (noteu que  $\rho_1, \rho_2$  i  $\rho_3 > 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \rho_1^0 + \rho_2^0 + \rho_3^0 &= \rho_2^0 + 2\rho_1^0 = \frac{75 - 50}{75 + 50} = 0.2 \\ 2\rho_1^0 - \rho_2^0 &= 0.01 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \rho_1^0 &= 0.0525 = \rho_3^0 \\ \rho_2^0 &= 0.095 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Per a l'amplada de banda ( $\omega_1 =$  extrem inferior de la banda, fig. 2.40):

$$|\rho_1|_M = \rho_2^0 + 2\rho_1^0 \cos(2\beta_1 \ell)$$

$$\cos(2\beta_1 \ell) = \frac{|\rho_1|_M - \rho_2^0}{2\rho_1^0} \rightarrow \beta_1 \ell = 72.02^\circ$$

$$B = 2 \frac{90^\circ - 72.02^\circ}{90^\circ} 100 = 39.95\% \quad (2.106)$$

Compareu-ho amb un únic transformador (exemple 1), on per al mateix valor de  $|\rho_1|_M$  s'obtenia  $B = 6.3\%$ .

Si haguéssim optat per fer els dos zeros de  $|\rho_1|$  coincidents en  $\omega = \omega_0$  (zero doble):

$$|\rho_1(\omega_0)| = 2\rho_1^0 - \rho_2^0 = 0$$

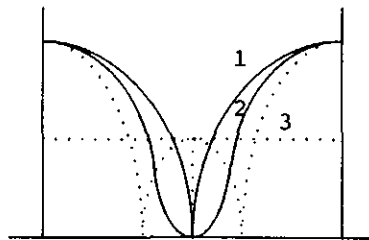
per tant:

$$\left. \begin{aligned} 2\rho_1^0 + \rho_2^0 &= 0.2 \\ 2\rho_1^0 - \rho_2^0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\rho_1^0 = 0.050 \quad \rho_2^0 = 0.10$$

$$\cos(2\beta \ell) = \frac{|\rho_1|_M - \rho_2^0}{2\rho_1^0} \rightarrow \beta_1 \ell = 77.08^\circ ; \quad B = 28.71\% \quad (2.107)$$

El que acabem de fer només és un exemple senzill de síntesi de  $|\rho_c|$  amb resposta de Tchebixev (zeros diferents, arrissada constant) o Butterworth (zeros múltiples, amb resposta maximalment plana). La teoria general de síntesi de transformadors múltiples d'impedàncies és senzilla i es pot trobar en textos de microones més avançats.



*Fig. 2.41 Resposta d'un transformador senzill (1), doble amb dos zeros separats (2) (Tchebixev), i doble amb dos zeros coincidents (3) (Butterworth).*

## Capítol 3 Línies de transmissió (II). Pèrdues, dispersió i línies més comunes

### 3.1 Introducció

Fins ara hem considerat línies ideals, és a dir, hem ignorat la resistència dels conductors i la possible conductivitat (petita, però present) del medi dielèctric. De manera que en comptes de la cèl·lula elemental de la figura 2.3 s'hauria de considerar, més correctament, la de la figura 3.1a, on  $R$  i  $G$  representen la resistència dels conductors per unitat de longitud (és a dir, la resistència que ofereix el bucle format pels dos conductors d'1 metre de línia) i la conductància per unitat de longitud, respectivament. Veurem que una de les conseqüències de la presència de pèrdues en la línia és l'aparició de *dispersió*, és a dir, que senyals sinusoidals de freqüències diferents es propaguen amb velocitats de fase també diferents. D'altra banda, també ens trobem que altres sistemes de propagació d'energia (guies d'ones) presenten dispersió, fins i tot en el cas ideal sense pèrdues. Aquestes guies es poden modelar, a l'efecte de propagació, per una línia de transmissió hipotètica amb cèl·lula elemental com a les figures 3.1b o 3.1c. Tant en aquest cas com a l'anterior, ambdues línies de transmissió corresponen, a l'efecte d'estudi en règim sinusoidal permanent (al qual ens limitarem; l'estudi en el domini del temps es pot fer quan interressi, amb l'ajut de la transformació de Fourier) al tipus de línia més general, la cèl·lula bàsica de la qual presenta impedància en sèrie  $Z$  i admitància en paral·lel  $Y$ , ambdues per unitat de longitud (fig. 3.1d).

### 3.2 Línia amb cel·lula elemental general

Referint-nos a la figura 3.1d amb el mateix conveni de sentits de voltatges i corrents de la figura 2.3, els efectes de la impedància en sèrie i l'admitància en paral·lel es tradueixen en una caiguda de tensió i una derivació de corrents donades per:

$$dV = -(Zdz)I$$

$$dI = -(Ydz)V$$

o bé:

$$\frac{dV}{dz} = -ZI \quad (3.1)$$

$$\frac{dI}{dz} = -YV \quad (3.2)$$

Les derivades són totals perquè no considerem la variació temporal  $e^{j\omega t}$  explícitament. Aquestes dues últimes fórmules són equivalents a la (2.2) i la (2.3) en el cas de variació sinusoidal, com es pot comprovar fàcilment.

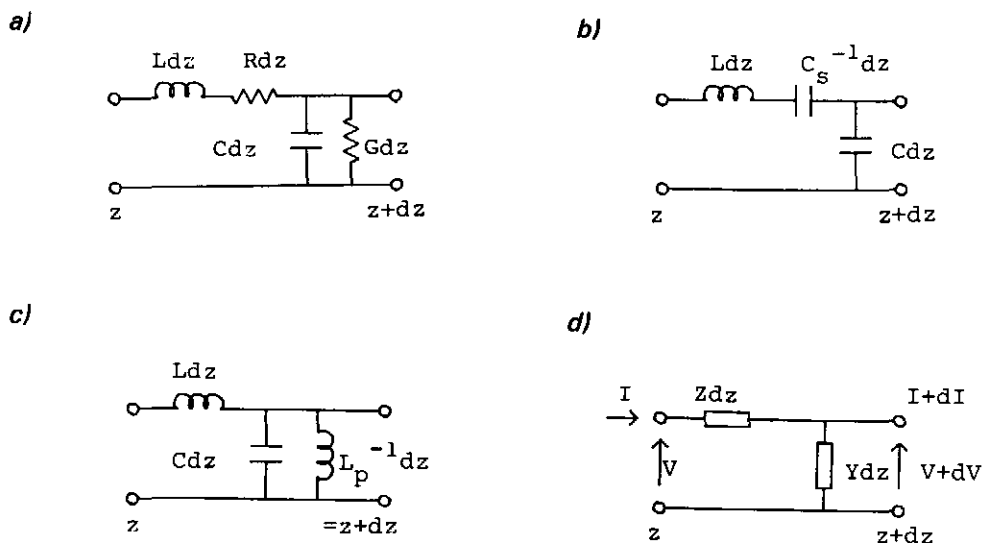


Fig. 3.1 a) Cèl·lula elemental per a una línia de transmissió amb pèrdues.  
 b) i c) Ídem per a línies hipotètiques que descriuen la propagació en guies d'ones.  
 d) Cèl·lula bàsica general que, en règim sinusoidal, resumeix els casos anteriors.

A (3.1) i (3.2) es pot eliminar el corrent per derivació, per exemple, i obtenim:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = (ZY)V \quad (3.3)$$

equació diferencial amb solucions de la forma  $e^{\pm\gamma z}$  :

$$V = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \quad (3.4)$$

amb  $\gamma$  (constant de propagació) definida per:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY} \quad (3.5)$$

(es pren per conveni el signe de l'arrel que proporcioni un valor positiu de  $\alpha$ ), i per substitució de (3.4) en (3.1) s'obté:

$$I = \frac{1}{Z_0} (V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{\gamma z}) \quad (3.6)$$

amb  $Z_0$  (impedància caracterfstica) donada per:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = R_0 + jX_0 \quad (3.7)$$

S'observa que aquestes fórmules són idèntiques a les obtingudes en el cas de la línia ideal, si assignem a la constant de propagació i a la impedància caracterfstica els valors (3.5) i (3.7), valors que abans eren reals ( $Z_0$ ) o bé imaginaris purs ( $\gamma$ ) i que ara, en el cas més general, seran complexos.

En el cas de  $\gamma$ ,  $\beta$  és la constant de fase i les seves dimensions (com abans) són de radian/metre (encara que el radian no té dimensions). Anàlogament,  $\alpha$  és la constant d'atenuació i té dimensions de (metre)<sup>-1</sup>, si bé, com en el cas dels radians, s'introdueix la unitat sense dimensions de *neper* per al producte  $\alpha z$ , de manera que a  $\alpha$  li assignem *neper/metre*.



Totes les fórmules obtingudes per a la línia ideal es poden generalitzar només prenent en consideració el caràcter complex de  $\gamma$  i  $Z_0$ . Per exemple, la impedància d'entrada d'una secció de línia de longitud  $\ell$  carregada amb  $Z_L$  ve donada per:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L \cosh(\gamma \ell) + Z_0 \sinh(\gamma \ell)}{Z_0 \cosh(\gamma \ell) + Z_L \sinh(\gamma \ell)} = Z_0 \tanh(\gamma \ell + \delta_Z) \quad (3.8)$$

on

$$\delta_Z = \tanh^{-1} \left( \frac{Z_L}{Z_0} \right) \quad (3.9)$$

Així mateix, el coeficient de reflexió en funció de la posició val:

$$\rho(z) = \rho(0) e^{2\gamma z} = \rho(0) e^{2\alpha z} e^{2j\beta z} \quad (3.10)$$

i, per tant, la seva representació a la carta de Smith són espirals logarítmiques (el mòdul del vector canvia de magnitud a mesura que gira) en comptes de circumferències.

A la taula 1 es resumeixen algunes propietats importants de les funcions hiperbòliques que utilitzarem sovint a partir d'ara.

Des del punt de vista físic, l'efecte més notable d'una constant de propagació complexa és l'aparició d'atenuació. Per a una ona positiva tenim:

$$V(z) = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (3.11)$$

o, en el domini del temps:

$$v(z,t) = |V^+| e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \phi^+) \quad (3.12)$$

Taula 3.1 Propietats de les funcions hiperbòliques ( $z=x+jy$ )

| Funcions hiperbòliques   |                           |
|--|---------------------------|
| $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$   |                           |
| $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$   |                           |
| $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$  |                           |
| $\sinh(jy) = j \sin y$   |                           |
| $\cosh(jy) = \cos y$   |                           |
| $\tanh(jy) = j \tan y$   |                           |
| $\sinh(z \pm w) = \sinh z \cdot \cosh w \pm \cosh z \cdot \sinh w$           |                           |
| $\cosh(z \pm w) = \cosh z \cdot \cosh w \pm \sinh z \cdot \sinh w$           |                           |
| $\cosh z = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots$                    | ( $ z  < \infty$ )        |
| $\sinh z = z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \dots$                    | ( $ z  < \infty$ )        |
| $\tanh z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 - \frac{17}{315}z^7 + \dots$ | ( $ z  < \frac{\pi}{2}$ ) |

La potència transportada per aquesta ona val:

$$P^+(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(VI^*) = \frac{1}{2} G_0 |V^+|^2 e^{-2\alpha z} = P^+(0) e^{-2\alpha z} \quad (3.13)$$

amb

$$Y_0 = G_0 + jB_0 = Z_0^{-1}$$

L'atenuació experimentada per l'ona entre dos plans (per exemple, el  $z=0$  i el  $z=\ell$ ) ve donada en nepers i decibels, per les expressions següents:

$$L(\text{nepers}) = \alpha \ell = \frac{1}{2} \ln \frac{P^*(0)}{P^*(\ell)} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} L(\text{dB}) &= 10 \log \frac{P^*(0)}{P^*(\ell)} = 10 \log(e^{2\alpha\ell}) = \alpha \ell \cdot 20 \log e = \\ &= 8.686 | \alpha \ell (\text{en nepers}) | \end{aligned} \quad (3.15)$$

Per tant, 1 neper = 8.686 dB

### 3.3 Relació entre potències i energies

Una relació general entre potències i energies es pot obtenir a partir d'1 i 2 si calculem el valor de l'expressió:

$$\frac{d}{dz} (VI^*) = \frac{dV}{dz} I^* + V \frac{dI^*}{dz} \quad (3.16)$$

S'obté fàcilment l'expressió següent:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} (VI^*) + \frac{1}{2} (RII^* + GV V^*) + \frac{j}{2} (XII^* - BV V^*) = 0 \quad (3.17)$$

on hem posat  $Z=R+jX$ ,  $Y=G+jB$ . També podem escriure (3.17) com:

$$\frac{d}{dz} \tilde{P}(z) + P_L(z) + \frac{j}{2} (X|I|^2 - B|V|^2) = 0 \quad (3.18)$$

on:

$$\tilde{P}(z) = \frac{1}{2} VI^* = \text{potència complexa en la línia.}$$

$$P_L(z) = \frac{1}{2} (R|I|^2 + G|V|^2) = \text{potència dissipada per unitat de longitud de línia.}$$

Si prenem la part real i la imaginària a (3.18):

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Re} \tilde{P}(z) = \frac{d}{dz} P(z) = -P_L(z) \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Im} \tilde{P}(z) = \frac{1}{2} (B|V|^2 - X|I|^2) \quad (3.20)$$

L'expressió (3.20), menys òbvia que la (3.19), relaciona la potència reactiva amb les energies emmagatzemades. Si integrem (3.19) entre dos plans de la línia  $z_1$  i  $z_2$ , tindrem:

$$P(z_2) - P(z_1) = -\int_{z_1}^{z_2} P_L(z) dz \quad (3.21)$$

És a dir, la potència neta que surt de la secció de línia  $(z_1, z_2)$  és igual a la potència dissipada.

### 3.4 Línia amb pèrdues baixes

Tornant a la línia amb pèrdues (fig. 3.1a) tindrem:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (3.22)$$

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (3.23)$$

El cas d'interès a freqüències de microones és el de línies amb pèrdues baixes, entenent per això, que es compleixin les desigualtats:

$$R \ll \omega L \quad G \ll \omega C \quad (3.24)$$

En aquestes condicions, es poden obtenir expressions aproximades per a (3.25) i (3.26) d'estructura més simple. Si posem  $u=R/j\omega L$ ,  $v=G/j\omega C$  i recordem que  $u \ll 1$  i  $v \ll 1$ , tindrem:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \sqrt{-\omega^2 LC} \sqrt{(1 - ju)(1 - jv)} = j\omega \sqrt{LC} [1 - uv - j(u + v)]^{\frac{1}{2}} = \\
 &= j\omega \sqrt{LC} [1 - j(u + v)]^{\frac{1}{2}} = \\
 &= j\omega \sqrt{LC} \left[ 1 - \frac{1}{2}j(u + v) + \frac{1}{8}(u + v)^2 + \dots \right] \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

De manera que, retenint termes de primer ordre en  $u, v$ :

$$\alpha = \omega \sqrt{LC} \left( \frac{u + v}{2} \right) = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} + \frac{G\sqrt{\frac{L}{C}}}{2} \quad (3.26)$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (3.27)$$

Anàlogament, s'obté per a  $Z_0$ :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ 1 - \frac{1}{2}j(u - v) \right] = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ 1 - j \left( \frac{R}{2\omega L} - \frac{G}{2\omega C} \right) \right] \quad (3.28)$$

És a dir, els efectes més importants (termes de primer ordre en  $u, v$ ) són l'aparició d'atenuació  $\alpha$  i de part reactiva en la impedància característica, mentre que la variació de la constant de fase  $\beta$  és de segon ordre en  $u, v$  i el seu efecte és imperceptible.

Un procediment alternatiu per al càlcul aproximat de l'atenuació, en el cas de pèrdues baixes, que no requereix el coneixement de l'expressió exacta per a  $\gamma$  es pot obtenir a partir de les expressions (3.19) i (3.13) de la manera següent:

Per a una ona progressiva (per exemple, positiva):

$$P^+(z) = P^+(0) e^{-2\alpha z} \quad (3.13)$$

i, per tant, (3.19) es pot escriure:

$$\frac{d}{dz} P^*(z) = -P_L^* \quad \rightarrow \quad -2\alpha P^*(z) = -P_L^*(z) \quad (3.29)$$

d'on:

$$\alpha = \frac{P_L^*(z)}{2P^*(z)} = \frac{\frac{1}{2}(R|I^*|^2 + G|V^*|^2)}{2 \frac{1}{2} G_0 |V^*|^2} = \frac{R|Y_0|^2 + G}{2G_0} \quad (3.30)$$

Fins aquí l'expressió és exacta, però té l'inconvenient que requereix el coneixement de  $Y_0 = G_0 + jB_0$ . Però atès que les pèrdues són petites, podem aproximar  $|Y_0|^2$  pel valor que prendria si no hi fossin, és a dir, prendre:

$$|Y_0|^2 = |Z_0|^{-2} = \frac{C}{L} = G_0^2 \quad (3.31)$$

amb la qual cosa (3.33) proporciona la mateixa expressió que hem obtingut anteriorment:

$$\alpha = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} + \frac{G\sqrt{\frac{L}{C}}}{2} \quad (3.26)$$

Aquest procediment per calcular l'atenuació partint de (3.30) i el coneixement de la solució del problema sense pèrdues serà essencial per a l'estudi de les guies d'ones amb pèrdues.

### 3.5 Dispersió

Suposem una línia de transmissió general amb  $\gamma = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$  alimentada per un generador de tensió arbitrària  $v_g(t)$  (sense impedància, per simplificar les expressions) expressable

mitjançant una integral de Fourier (o una sèrie de Fourier, si  $v_G$  fos periòdica) de la manera següent (fig. 3.2):

$$v_G(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.32)$$

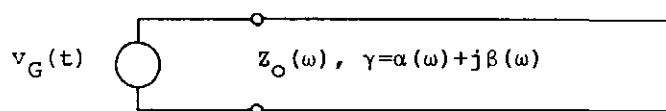
Atès el caràcter real de  $v_G(t)$ ,  $F(-\omega) = F^*(\omega)$  i (3.32) es pot escriure de nou com:

$$v_G(t) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega - \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.33)$$

A l'últim pas, hem prescindit d'indicar el procés de prendre la part real, com és normal en el cas de senyals sinusoidals. Aquesta expressió indica que  $v_G(t)$  és la superposició d'infinits senyals sinusoidals, i atès el comportament lineal de la línia de transmissió podem escriure:

$$v^+(z,t) = \int_0^{\infty} F(\omega) e^{[j\omega t - \gamma z]} d\omega = \int_0^{\infty} F(\omega) e^{[j\omega t - \alpha(\omega)z - j\beta(\omega)z]} d\omega \quad (3.34)$$

Una conclusió important d'aquesta expressió és que, a diferència del cas de la línia ideal,  $v^+(z,t)$  ja no reproduirà en cada pla  $z$  el comportament de  $v_G(t)$ , ja que cada un dels components sinusoidals d'aquesta última variarà la seva amplitud i la seva fase de manera diferent amb la freqüència a mesura que es propaga. Noteu, per poder comparar, que en



$$v_G(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Fig. 3.2 Línia alimentada per un generador de tensió arbitrària,  $v_G(t)$ , expressable com a integral de Fourier, utilitzada per analitzar el fenomen de la dispersió.

el cas de la línia ideal  $\beta = \omega/c$ , i (3.34) proporciona:

$$v^+(z,t) = \int_0^\infty F(\omega) e^{j\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} d\omega = v_G\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad (3.35)$$

resultat obtingut anteriorment a partir de les equacions diferencials de la línia.

**Exemple 1** Tornem a la línia sense pèrdues amb cèl·lula elemental com a la figura 3.1b que, com ja hem indicat, descriu exactament la propagació d'ones electromagnètiques en guies metàl·liques. En aquest cas, tenim:

$$Z = j\omega L - \frac{j}{\omega C_s} \quad , \quad Y = j\omega C \quad (3.36)$$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = j\omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}} \quad , \quad \text{amb} \quad \omega_s^2 = \frac{1}{LC_s} \quad (3.37)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}} \quad (3.38)$$

S'observa que per a  $\omega < \omega_s$  no existeix propagació ja que llavors, per a una ona progressiva, tindrem:

$$\gamma = \alpha = \omega\sqrt{LC} \sqrt{\frac{\omega_s^2}{\omega^2} - 1} \quad (3.39)$$

$$Z_0 = jX_0 = j\sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\omega_s^2}{\omega^2} - 1} \quad (3.40)$$

i, per tant,

$$V(z) = V^+ e^{-\alpha z} \quad , \quad v(z,t) = |V^+| e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \phi_v) \quad (3.41)$$

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(VI^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{|V^+|^2}{jX_0}\right) = 0 \quad (3.42)$$



És a dir, en la línia existeix una perturbació amb decreixement exponencial tal que tots els plans estan en fase i que no transporta potència.

Per a  $\omega > \omega_s$ , sí que existeix propagació, però el diagrama  $\omega$ - $\beta$  (fig. 3.3) no és una recta com en el cas de la línia ideal. Noteu que:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}}} > c \quad (3.43)$$

És a dir, la velocitat de fase és sempre més gran que la velocitat de la llum en el medi (vegeu també la figura 3.3); de fet, quan  $\omega \rightarrow \omega_s$ ,  $v_p \rightarrow \infty$ , cosa que físicament es correspon amb el fet que per a  $\omega = \omega_s$  tots els plans de línia estan en fase. ■

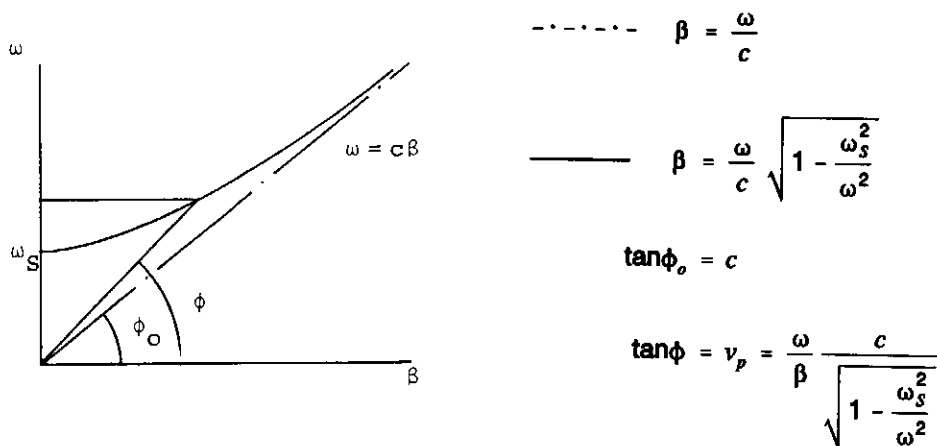


Fig. 3.3 Diagrama  $\omega$ - $\beta$  (corba de dispersió) per a la línia amb cèl·lula elemental com a la figura 3.1b. Observeu que la velocitat de fase és sempre més gran que  $c$ .

**Exemple 2** Suposem que la línia de la figura 3.2 es comporta com la de l'exemple anterior i que el generador produeix una tensió donada per:

$$v_G(t) = J_0(\omega_s t) \quad (3.44)$$

amb  $J_0$  la funció de Bessel de primera espècie i ordre zero, i:

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_s}}$$

L'elecció d'aquesta funció tan singular ve imposada per la simplicitat de l'anàlisi matemàtica posterior, com veurem. En aquest cas, és més convenient treballar amb transformades de Laplace. Formalment, l'anàlisi és la mateixa que amb les de Fourier, però canviant  $j\omega$  per  $S$ . Llavors tenim:

$$\gamma = j\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}} = j\frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_s^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_s^2 - \omega^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_s^2 + S^2} \quad (3.45)$$

La transformada de  $J_0(\omega_s t)$  es troba fàcilment en taules i és:

$$V_G(S) = L\{V_G(t)\} = \frac{1}{\sqrt{S^2 + \omega_s^2}} \quad (3.46)$$

De manera que la solució per a  $v(z,t)$  serà:

$$v(z,t) = L^{-1}\{V_G(S) e^{-\gamma z}\} = L^{-1}\left\{ \frac{e^{-\frac{z}{c} \sqrt{S^2 + \omega_s^2}}}{\sqrt{S^2 + \omega_s^2}} \right\} \quad (3.47)$$

Aquesta transformada també es troba a les taules (això justifica l'elecció de  $v_G(t)$ ), i obtenim:

$$v(z,t) = J_0 \left[ \omega_s \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}} \right] u \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad (3.48)$$

Per a un pla determinat  $z_0$  posem:

$$t_0 = \frac{z_0}{c}, \quad t' = t - t_0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow v(z_0, t) = J_0 \left[ \omega_s \sqrt{t'(t' + 2t_0)} \right] u(t') \quad (3.49)$$

Examinem primer què succeeix per a valors de  $t' \ll t_0$ , és a dir, els instants inicials. L'argument de (3.49) val:

$$\omega_s \sqrt{t'(t'+2t_0)} = \omega_s \sqrt{t'2t_0} \quad (3.50)$$

i, per tant, els primers zeros de  $v(z_0, t)$  prenen els valors:

$$p'_{oi} = \omega_s t' = \frac{p_{oi}^2}{2\omega_s t_0} \quad (3.51)$$

amb  $p_{oi}$  el  $i$ -èsim zero de  $J_0(x)$  (fig. 3.4). Suposem, per fixar idees, que  $t_0$  és cent vegades

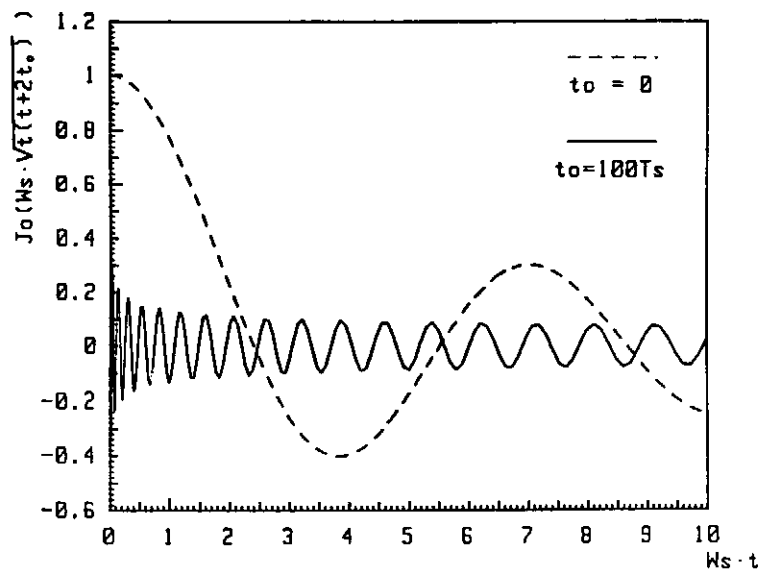


Fig. 3.4 Senyal a l'entrada de la línia dispersiva (línia de punts,  $t_0 = 0$ ), i en un pla  $z_0$  tal que  $t_0 = z_0/c = 100T_s$  (línia contínua).

el període associat a  $\omega_S$ :

$$t_0 = 100 T_S, \quad \omega_S t_0 = \frac{2\pi}{T_S} 100 T_S = 200\pi \rightarrow \omega_S t' = \frac{p_{oi}^2}{400\pi} \quad (3.52)$$

Atès que  $\{p_{oi}\} = \{2.40, 5.52, 8.65, 11.79, \dots\}$ , en aquest cas resulta per als primers zeros de  $v(z_o, t)$ :

$$\{p'_{oi}\} = \{4.6 \times 10^{-3}, 2.42 \times 10^{-2}, 5.95 \times 10^{-2}, 1.11 \times 10^{-1}, \dots\} \quad (3.53)$$

És a dir, s'aglomeren en els primers instants, per la qual cosa  $v(z_o, t)$  pren la forma qualitativa de la figura 3.3. Observeu, per tant, que el senyal al començament de la seva recepció en el pla  $z_o$  està molt distorsionat i, excepte per als seus valors inicials, el seu valor decreix molt de pressa. En canvi, quan  $t' \gg t_o$ :

$$v(z_o, t) \approx J_0(\omega_S t') \quad (3.54)$$

És a dir, el senyal en el pla  $z_o$  segueix fidelment el del generador, només retardat en  $t_o = z_o/c$ . Ens podem fer una idea millor del procés si examinem la relació entre el senyal del generador en un determinat instant i en el pla  $z = z_o$  a l' instant posterior  $t + t_o = t + z_o/c$ . Si definim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(t)} &= \frac{\text{Envolupant de } v_G(t)}{\text{Envolupant de } v(z_o, t + t_o)} = \\ &= \frac{\text{Envolupant de } J_0(\omega_S t)}{\text{Envolupant de } J_0[\omega_S \sqrt{t(t + 2t_o)}]} \end{aligned} \quad (3.55)$$

i tenim en compte que, per a valors grans de l'argument:

$$\text{envolupant de } J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \quad (3.56)$$

(l'error és menor de l'1% per a  $x > P_{o2} = 5,52$ ) tindrem:

$$f(t) = \frac{\sqrt{t}}{[t(t+2t_0)]^{\frac{1}{4}}} = \left(1 + \frac{2t_0}{t}\right)^{-\frac{1}{4}} \quad (3.57)$$

Aquesta funció es representa a la figura 3.5. Noteu que per al valor de  $t_0 = 100T_s$  utilitzat anteriorment, el valor de  $f(t)$ , obtingut a partir del valor aproximat (3.56), té un error menor del 2% per a valors de  $t > 8,8 \cdot 10^{-3} t_0 \approx t_0/100$ . ■

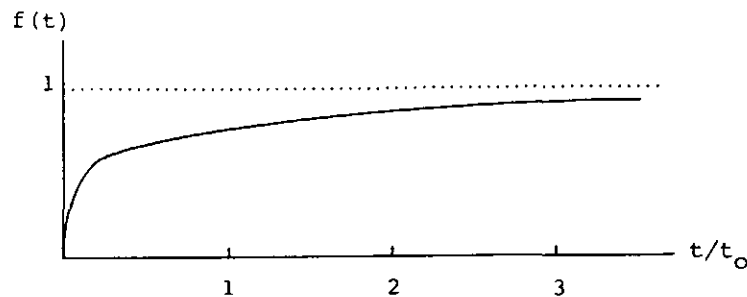


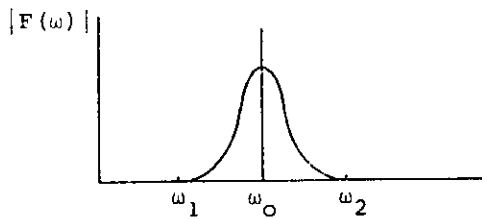
Fig. 3.5 Relació entre les envolupants dels senyals en el pla  $z_0$  i en l'extrem generador en funció del temps (expressions (3.55) i (3.57)).

### 3.6 Velocitat de grup

Hem vist en l'apartat anterior que una línia dispersiva distorsiona els senyals. Un cas particular de gran interès és la propagació en una d'aquestes línies d'un senyal de banda estreta, és a dir, un senyal amb un espectre no nul només en una banda de freqüències  $(\omega_0 - \Delta\omega/2, \omega_0 + \Delta\omega/2)$  (fig. 3.6):

$$\begin{aligned} v_G(t) &= A(t) e^{j\omega_0 t} = \int_0^\infty F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= e^{j\omega_0 t} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} F(\omega) e^{j(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (3.58)$$

a)



$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$$

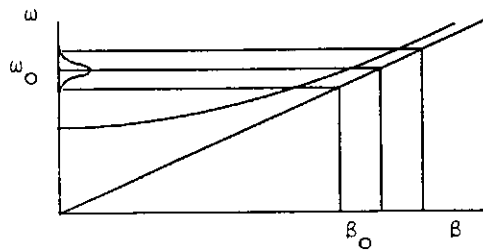
$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$v_G(t) = A(t) e^{j\omega t}$$

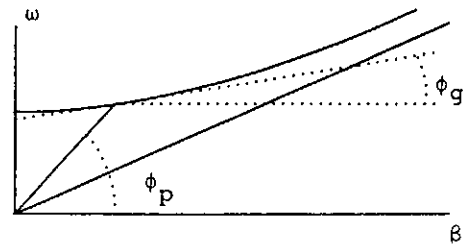
$$A(t) = \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} F(\omega) e^{j(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0)$$

$$A(t) \in \mathfrak{R} \rightarrow F(\omega_0 - \omega) = F^*(\omega - \omega_0)$$

b)



c)



$$\tan\phi_p = v_p \quad \tan\phi_g = v_g$$

Fig. 3.6 a) Senyal de banda estreta utilitzat per introduir la velocitat de grup.  
 b) L'aproximació requerida consisteix a substituir la secció de corba per la seva tangent en  $(\omega_0, \beta_0)$ .  
 c) Interpretació gràfica de les velocitats de fase i de grup.

És conegut que un senyal d'aquest tipus es pot interpretar com una portadora de freqüència  $f_0$ , l'amplitud de la qual  $A(t)$  varia lentament (en relació a  $1/f_0$ ) en el temps.

Per a aquest cas, el terme  $\beta z$  que apareix a l'expressió (3.34) i que dona  $v^+(z, t)$ , es pot escriure:

$$\beta z = z \beta_0 + z \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} z \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (3.59)$$

Ara cal suposar que tots els termes d'aquesta sèrie que segueixen el segon compleixen les condicions següents:

- Són molt més petits que els dos primers, que predominen.
- El seu valor absolut és molt més petit que la unitat.

Noteu que la condició *b*, encara que el senyal sigui de banda estreta (marge de  $\omega - \omega_0$  petit), només es complirà per a un rang limitat de valors de *z*, ja que cada terme creix indefinidament amb *z*.

Segons les hipòtesis anteriors, que suposen aproximar la corba  $\beta(\omega)$  per la tangent traçada en el punt  $(\omega_0, \beta_0)$  (fig. 3.6), tindrem:

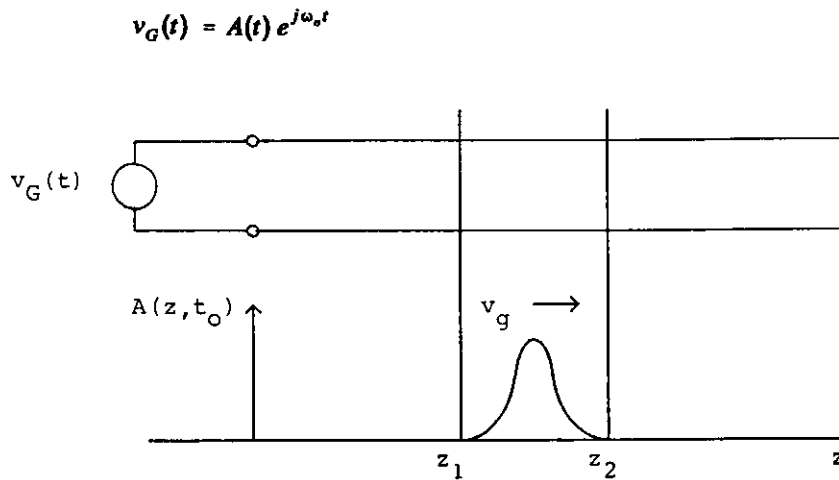
$$\beta z \approx \beta_0 z + \frac{z}{v_g} (\omega - \omega_0) \quad , \quad \text{amb} \quad \frac{1}{v_g} = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \quad (3.60)$$

( $v_g$  així definit és el pendent de la tangent)

$$\begin{aligned} v^+(z,t) &= \int_0^\infty F(\omega) e^{j\left[\omega t - \beta_0 z - \frac{z}{v_g}(\omega - \omega_0)\right]} d\omega = \\ &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} F(\omega) e^{j(\omega - \omega_0)\left(t - \frac{z}{v_g}\right)} d(\omega - \omega_0) = \\ &= A \left(t - \frac{z}{v_g}\right) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \quad (3.61) \end{aligned}$$

És a dir, en cada pla *z* de la línia el senyal reproduïx el senyal del generador, però les variacions de l'amplitud estan retardades el temps  $\tau = z/v_g$ , corresponent a una velocitat de propagació  $v_g = d\omega/d\beta$  que s'anomena *velocitat de grup*. De manera que en aquest problema apareixen de forma natural dos conceptes de velocitat: la de fase, ja introduïda anteriorment, que correspon a la d'un observador que estigués en plans de fase constants en tota la línia, i la de grup, que correspon al seguiment de la "forma" o envoltant del senyal. Aquest concepte de velocitat de grup es pot comprendre més fàcilment si imaginem el seguiment en la línia d'un impuls de durada finita (fig. 3.7).

Noteu que la propagació sense distorsió és una conclusió aproximada per a rangs de distàncies limitats i que, per a distàncies prou grans, la distorsió augmenta indefinidament.



$$U_m(z, t_0) = U_e(z, t_0) = 0 \quad \text{per a} \quad z < z_1, \quad z > z_2$$

*Fig. 3.7 Representació instantània de la propagació d'un impuls de durada finita en una línia dispersiva (aproximacions de propagació sense distorsió). L'energia emmagatzemada en la línia és nul·la, excepte en la zona on es troba el pols, cosa que permet introduir el concepte de velocitat de propagació de l'energia,  $v_E$ . En aquest cas, evidentment,  $v_E = v_g$ .*

**Exemple** Suposem que en una línia dispersiva el generador excita un senyal d'envolupant gaussiana de la forma:

$$v_G(t) = e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} e^{j\omega_0 t} = A(t) e^{j\omega_0 t} \quad (3.62)$$

La seva transformada de Fourier es troba fàcilment a les taules i és:

$$V_G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_G(t) e^{-j\omega t} dt = -\frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \tau^2} \quad (3.63)$$



L'ona positiva de tensió excitada en la línia valdrà, com abans:

$$v^+(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} V_G(\omega) e^{-j[\omega t - \beta(\omega)z]} d\omega \quad (3.64)$$

En aquest exemple, aproximem el desenvolupament en sèrie de Taylor de  $\beta(\omega)$  al voltant de  $\omega_0$  per un terme més:

$$\beta = \beta_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{v_g} (\omega - \omega_0)^2 \quad (3.65)$$

on hem definit la constant  $\epsilon$  (amb dimensions de temps) mitjançant:

$$\frac{\epsilon}{v_g} = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \quad (3.66)$$

Amb l'aproximació anterior:

$$\begin{aligned} v^+(z,t) &= \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \left( \tau^2 + j\epsilon \frac{z}{v_g} \right)} e^{j(\omega - \omega_0) \left( t - \frac{z}{v_g} \right)} d\omega = \\ &= \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega'^2}{2} (\tau^2 + j\epsilon t_0)} e^{j\omega' t'} d\omega' \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\text{amb } \omega - \omega_0 = \omega', \quad t - \frac{z}{v_g} = t', \quad \frac{z}{v_g} = t_0 \quad (3.68)$$

La inversió de la integral és immediata:

$$\begin{aligned} v^+(z,t) &= \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + j\epsilon t_0}} e^{-\frac{t'^2}{2(\tau^2 + j\epsilon t_0)}} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} = \\ &= A(z,t) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z + \phi)} \end{aligned} \quad (3.69)$$

on l'amplitud  $A(z,t)$  ve donada per:

$$\begin{aligned}
 A(z,t) &= \frac{\tau}{(\tau^4 + \epsilon^2 t_0^2)^{\frac{1}{4}}} \cdot e^{-\frac{t^2 \tau^2}{2(\tau^4 + \epsilon^2 t_0^2)}} = \\
 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\epsilon^2}{\tau^4} t_0^2\right)^{\frac{1}{4}}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\tau^2 \left(1 + \frac{\epsilon^2}{\tau^4} t_0^2\right)}} \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

És a dir, l'amplitud del senyal continua essent gaussiana i el seu màxim es desplaça amb la velocitat de grup  $v_g$ , però la *durada* del senyal, que en el generador és de l'ordre de magnitud de  $\tau$ , augmenta progressivament amb  $z$ , segons l'expressió:

$$\tau \sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{\tau^4} t_0^2} = \tau \sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{\tau^4} \cdot \frac{z^2}{v_g^2}} \quad (3.71)$$

Noteu que, per a una dispersió de la línia donada ( $\epsilon$  fix) l'amplitud de l'impuls es distorsiona menys com més gran sigui la seva *durada* inicial,  $\tau$ . ■

Tornem al cas d'un impuls de durada finita que es propaga, aproximadament, sense distorsió en la línia, com a la figura 3.7. És evident que només existeix energia emmagatzemada en la zona de la línia on, en un instant donat, es troba l'impuls. D'aquesta manera,  $v_g$  es pot interpretar també com la *velocitat amb la qual es propaga l'energia*,  $v_E$ .

Aquest concepte es pot aplicar també al cas de la línia en règim sinusoidal si definim, per a una ona progressiva (per exemple, positiva):

$$v_E = \frac{P^+(z)}{U^+(z)} \quad (3.71)$$

amb  $P^+(z)$  la potència transportada per l'ona i  $U^+(z)$  la densitat d'energia emmagatzemada per unitat de longitud, ambdues avaluades en el mateix pla. Per a la línia ideal, aquesta

expressió proporciona, amb càlculs elementals,  $v_g = c$ , com calia esperar. Altrament, per a una línia dispersiva com la de la figura 3.1b, ja utilitzada abans en altres exemples:

$$\begin{aligned}
 P^* &= \frac{1}{2} Z_0 |I^*|^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{L}{C} \left( 1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} |I^*|^2 \\
 U^* &= \frac{1}{4} C |V^*|^2 + \frac{1}{4} L |I^*|^2 + \frac{1}{4} C_s \frac{|I^*|^2}{\omega^2 C_s^2} = \\
 &= \frac{L}{4} \left( \frac{C Z_0^2}{L} + 1 + \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \right) |I^*|^2 = \frac{L}{2} |I^*|^2 \quad (73)
 \end{aligned}$$

de manera que:

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left( 1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} = c \left( 1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.74)$$

D'altra banda, per a aquesta mateixa línia:

$$\beta^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_s^2) \quad , \quad 2\beta \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c^2} 2\omega \quad (3.75)$$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{v_g} = \frac{1}{c^2} \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_p}{c^2} \quad , \quad v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}} = v_g \quad (3.76)$$

És a dir, la velocitat de grup (definida a partir de la propagació d'un senyal de banda estreta) i la de propagació de l'energia (definida en règim sinusoidal) coincideixen. Aquesta coincidència és una propietat general per a totes les pertorbacions electromagnètiques que es propaguen en un medi sense pèrdues.

### 3.7 Línies amb dielèctric homogeni

En aquest apartat, ens referim a aquelles línies constituïdes, a més de per dos conductors, per un sol dielèctric de propietats uniformes. Abans d'entrar en configuracions concretes,

establim les propietats generals següents comunes a totes aquestes línies:

a) Per a tots els dielèctrics  $\mu = \mu_0$  i, per tant, la inductància per unitat de longitud  $L$  és la mateixa que en absència de dielèctrics,  $L = L_0$ .

b) Es pot demostrar que:

$$LC = \mu \varepsilon = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (3.77)$$

i, en conseqüència:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{1}{v_p C} = v_p L$$

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{c}{f \sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (3.78)$$

c) Per a una freqüència de treball donada, les pèrdues en un dielèctric es tradueixen en l'aparició d'una part imaginària negativa en la constant dielèctrica:

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon' \left( 1 - j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right) = \varepsilon' (1 - j \tan \delta_e) \quad (3.79)$$

Normalment es prescindeix de l'apòstrof a  $\varepsilon'$  i escrivim:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r (1 - j \tan \delta_e) \quad (3.80)$$

Els mecanismes físics que produeixen les pèrdues són diversos, però formalment es poden atribuir a una conductivitat equivalent  $\sigma_e$  tal que si fos l'única causa de pèrdues, produiria la mateixa tangent de pèrdues  $\tan \delta_e$ . Aquesta conductivitat es defineix mitjançant

$$\sigma_e = \omega \varepsilon \tan \delta_e \quad (3.81)$$

d) Quan el dielèctric té pèrdues, la línia té una conductància per unitat de longitud  $G$  no nul·la, relacionada amb  $C$  mitjançant l'expressió:

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma_{\epsilon}}{\epsilon} \quad (3.82)$$

En efecte, per a la línia ideal:

$$C = \epsilon F(\text{geometria}) ; \quad Y = j \omega C = j \omega \epsilon F \quad (3.83)$$

amb  $F$  una constant funció de la geometria de la línia. Si el dielèctric té pèrdues:

$$Y = j \omega \epsilon (1 - j \tan \delta_t) F = j \omega \epsilon F + \omega \epsilon \tan \delta_t F = j \omega C + G \quad (3.84)$$

de manera que:

$$\frac{G}{C} = \omega \tan \delta_t = \frac{\sigma_{\epsilon}}{\epsilon}$$

e) Hem vist que, per a pèrdues petites, l'atenuació ve donada per:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{R}{Z_0} + \frac{1}{2} G Z_0 = \alpha_c + \alpha_d \quad \text{amb} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.85)$$

Els subíndexs  $c$  i  $d$  es refereixen a *conductor* i *dielèctric*, respectivament. Per a l'atenuació deguda a pèrdues en el dielèctric:

$$\begin{aligned} \alpha_d &= \frac{1}{2} G \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\epsilon}}{\epsilon} \epsilon \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_{\epsilon}}{\omega \epsilon} \cdot \frac{\omega}{v_p} = \\ &= \frac{1}{2} \beta \tan \delta_t = \frac{\pi}{\lambda} \tan \delta_t \quad (3.86) \end{aligned}$$

A freqüències de microones la tangent de pèrdues varia poc amb la freqüència. Si la suposem constant:

$$\alpha_d \lambda = \pi \tan \delta_t = \text{constant} \quad (3.87)$$

És a dir, l'atenuació per longitud d'ona és, aproximadament, constant. Els valors típics de  $\tan \delta_t$  per a bons dielèctrics són de l'ordre de magnitud de  $10^{-4}$  i, per tant, l'atenuació per longitud d'ona, en *dB* (per a  $\tan \delta_t = 10^{-4}$ ) és:

$$8.686 \times \alpha_d \lambda = 8.686 \pi \tan \delta_t = 2.7 \times 10^{-3} \text{ dB} \quad (3.88)$$

L'atenuació produïda per pèrdues en els conductors,  $\alpha_c$ , requereix el coneixement de  $R$  que, quan la distribució de corrents no és uniforme, és de càlcul difícil.

En vista dels punts anteriors, la informació necessària sobre una línia amb dielèctric homogeni es redueix a la constant dielèctrica, la capacitat per unitat de longitud  $C$  i la resistència per unitat de longitud  $R$ .

El procediment més potent per al càlcul de capacitats d'estructures bidimensionals (és a dir, definides en el pla), com les que ens ocupen, és l'ús de transformacions conformes (de variable complexa), que ometrem en aquest tema.

**Línia de plaques paral·leles** El seu estudi té interès com a model teòric aproximat que proporciona una bona comprensió d'altres línies planes reals. Consisteix en dues tires conductores d'amplada  $W$  que discorren paral·leles, separades una distància  $h$  pel material dielèctric (fig. 3.8a). La seva anàlisi resulta extraordinàriament senzilla si fem l'aproximació de distribució de camp uniforme, és a dir, si ignorem la dispersió de camp elèctric que es produeix a les vores de les tires conductores (l'aproximació és bona només si  $w \gg h$ ), ja que llavors la capacitat es calcula mitjançant l'expressió del condensador pla (fig. 3.8a). Amb aquesta aproximació el corrent també està distribuït uniformement a les tires i el paràmetre  $R$  és:

$$R = 2 \frac{R_s}{W} \quad \left( R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} \right) \quad (3.89)$$

essent  $\sigma$  la conductivitat del conductor i  $\delta$ , la profunditat de penetració en ell, a la freqüència  $f$ :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (3.90)$$

D'aquesta manera obtenim:

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \omega \sqrt{\mu \epsilon} \tan \delta_t \quad (3.91)$$

$$\alpha_c = \frac{1}{2} \frac{R}{Z_0} = R_s \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left( \frac{1}{h} \right) \quad (3.92)$$

D'aquestes expressions s'observa que, si suposem  $\tan \delta_t$  constant amb la freqüència (ja hem dit que per a un bon dielèctric varia poc),  $\alpha_d$  creix amb la freqüència mentre que  $\alpha_c$  ho fa amb la seva arrel quadrada. A freqüències baixes predomina, normalment,  $\alpha_c$ , però a freqüències prou altes  $\alpha_d$  arriba a fer-se més gran que  $\alpha_c$ . Vegem-ho:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_d}{\alpha_c} &= \frac{1}{2} \frac{\omega \mu}{R_s} h \tan \delta_t = \delta_h \left( \frac{\omega \mu \sigma}{2} \right) \tan \delta_t = \\ &= \delta h \frac{1}{\sigma^2} \tan \delta_t = \frac{h}{\delta} \tan \delta_t \quad (3.93) \end{aligned}$$

Per a  $\tan(\delta_t) \approx 2 \cdot 10^{-4}$  i conductor de coure ( $\delta = 66 \text{ mm}/\sqrt{f}$ ),  $\alpha_d = \alpha_c$  per a una freqüència  $f_0$ :

$$\sqrt{f_0} = \frac{66}{2h \times 10^{-4}} \quad \rightarrow \quad f_0 \sim \frac{10^{11}}{h^2} \quad (h \text{ en mm}) \quad (3.94)$$

$$h = 10 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad f_0 = 10^9 = 1 \text{ GHz}$$

$$h = 1 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad f_0 = 100 \text{ GHz} \quad \text{etc.}$$

El resultat anterior, que dóna la freqüència per sota de la qual predominen les pèrdues en els conductors sobre les pèrdues en el dielèctric, es pot utilitzar de forma aproximada (indicativa, si més no, en ordre de magnitud) per a una línia formada per dos conductors qualsevol separats per una distància  $h$ .

**Línia bifilar** Està formada per dos conductors idèntics situats paral·lelament l'un de l'altre (fig. 3.8b), i històricament ha tingut, durant quasi cent anys, un paper exclusiu o predominant en les comunicacions (línies telegràfiques i telefòniques). A freqüències de microones, no té gens d'interès perquè és una estructura oberta i, per tant, subjecta a radiació i a interferències, per la seva atenuació comparativament alta i la dificultat d'obtenir impedàncies característiques baixes (per a  $Z_0 = 50\Omega$  i dielèctric l'aire resulta  $D = 1.09d$ , és a dir, conductors molt propers).

**Línia coaxial** Està constituïda per dos conductors cilíndrics concèntrics (fig. 3.8c), cosa que facilita la fabricació de cables flexibles ja que el conductor exterior es realitza amb una malla de fils fins trenats sobre un nucli dielèctric (tefló o polietilè), que alhora serveix per mantenir centrat el conductor interior. L'altre gran avantatge d'aquesta línia és el caràcter tancat que té (els camps estan continguts a la zona compresa entre els dos conductors) i, per tant, el seu blindatge perfecte evita problemes de radiació i interferències. Per aquesta raó la seva utilització és molt general, des de freqüències molt baixes fins a aproximadament 50 GHz. Atesa la simetria de l'estructura, el càlcul de la capacitat fent servir tècniques elementals, és molt senzill. Per la mateixa raó, el corrent està distribuït uniformement en els conductors, i la resistència unitària resulta:

$$R = \frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (3.95)$$

i, per tant, l'atenuació per pèrdues en els conductors:

$$\alpha_c = \frac{R}{2Z_0} = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r}}{120 \cdot 2\pi a} \cdot \frac{\left(1 + \frac{a}{b}\right)}{\ln \frac{a}{b}} \quad (3.96)$$

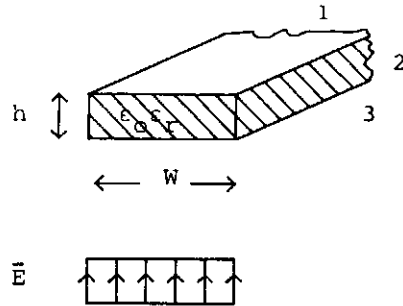
Per a un diàmetre fix del conductor exterior,  $2a$ , aquesta expressió és funció del quocient  $x = a/b$ . Es pot comprovar que pren un valor mínim per a  $a/b = 3.59$ , valor que proporciona les impedàncies característiques següents:

$$\begin{aligned} \text{aire } (\epsilon_r = 1): & \quad Z_0 = 76.7\Omega \\ \text{tefló } (\epsilon_r = 2.05): & \quad Z_0 = 53.6\Omega \\ \text{polietilè } (\epsilon_r = 2.28): & \quad Z_0 = 50.8\Omega \end{aligned}$$

Noteu que, en tot cas, l'atenuació és inversament proporcional al diàmetre del cable i, per tant, per a trams llargs (per exemple, la línia de distribució de televisió per cable) convé fer-lo com més gruixut millor.



a) Línia de plaques paral·leles (aproximació de camp uniforme)



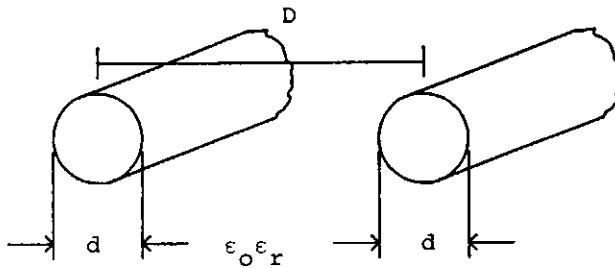
$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{W}{h}$$

$$Z_0 = \frac{1}{v_p C} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c C} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{h}{W}$$

$$R = 2 \frac{R_s}{W} \quad \left( R_s = \frac{1}{\sigma \delta} \right)$$

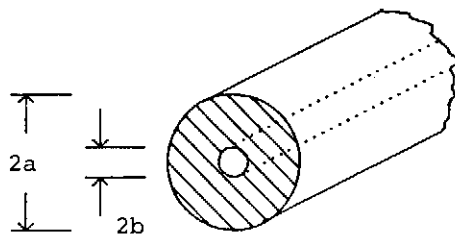
1 i 3: tires conductores  
2: dielèctric

b) Línia bifilar



$$Z_0 = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1} \left( \frac{D}{d} \right)$$

c) Línia coaxial

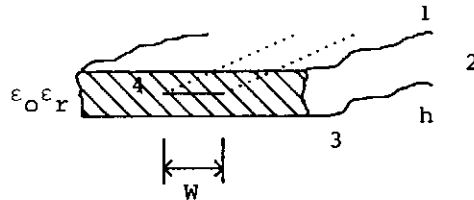


$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{a}{b}$$

$$R = \frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Fig. 3.8 Tipus més importants de línies amb dielèctric homogeni.

## d) Línia triplaca (Stripline)



$$Z_o = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K'(x)}{K(x)}$$

$$x = \tanh\left(\frac{\pi W}{2b}\right)$$

$$K(x) = \text{Integral el·líptica de primera espècie} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \phi}}$$

$$K'(x) = K(\sqrt{1-x^2})$$

1 i 3 : plans (conductors) de massa

2: dielèctric

4: tira conductora

Expressions aproximades (error inferior a 10 ppm):

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{1}{\pi} \cdot \ln \left( 2 \frac{1+\sqrt{x'}}{1-\sqrt{x'}} \right) = F(x') \quad \text{on} \quad x' = \sqrt{1-x^2} ; \quad 0 \leq x^2 \leq 1$$

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{1}{F(x)} \quad 0.5 \leq x^2 \leq 1$$

Fig. 3.8 (Continuació)

**Línia triplaca ("Stripline")** Els avantatges d'aquesta línia, formada per una tira conductora centrada entre dos plans conductors (fig. 3.8d), són el seu caràcter blindat i la facilitat de fabricar circuits complexos mitjançant tècniques fotolitogràfiques, ja que a la pràctica l'estructura està formada per dues làmines dielèctriques amb una de les cares metalitzada (conductors exteriors o plans de massa). D'aquestes dues làmines, una també té a l'altra cara la tira conductora central. Es completa l'estructura posant en contacte les làmines dielèctriques i estrenyent-les fortament.

El seu inconvenient més gran prové precisament del caràcter tancat i, per tant, de la dificultat de fabricar circuits actius que requereixen la inserció de transistors, díodes, condensadors, etc. La impedància característica ve donada en funció d'integrals el·líptiques, però a la pràctica les expressions aproximades de la figura 3.8d proporcionen exactitud més que suficient en tots els casos (error relatiu inferior a 10 ppm, és a dir,  $10^{-5}$ ).

La resistència unitària és de càlcul molt complex, a causa de la distribució no uniforme del corrent en la tira i en els plans de massa; per això l'ometem. Un valor aproximat per a aquesta atenuació es pot obtenir interpretant aquesta línia (si  $w > h/2$ ) com a dues de plaques paral·leles superposades.

### 3.8 Línies amb dielèctric inhomogeni

La presència de dos o més dielèctrics en una línia de transmissió suposa, normalment, la introducció d'una complexitat més gran en el càlcul de la seva capacitat (impedància característica). El seu càlcul només resulta senzill en casos de gran simplicitat i simetria en l'estructura dels dielèctrics. En tots els casos de línies inhomogènies hem de tenir en compte que:

a) Com abans,  $\mu = \mu_0$  per a tots els dielèctrics i, per tant, la inductància unitària  $L$  és la mateixa que si l'estructura estigués buida,  $L = L_0$ .

b) Ara la propietat  $LC = \mu\epsilon$  no es pot aplicar, perquè  $\epsilon$  no està definida de manera única.

Definirem la permitivitat (constant dielèctrica) efectiva  $\epsilon_{ef} = \epsilon_{ref}\epsilon_0$  com:

*La permitivitat que hauria de tenir un dielèctric homogeni per, ocupant ell sol tota l'estructura, proporcionar el mateix valor de capacitat unitària.*

Segons aquesta definició, si anomenem  $C_0$  la capacitat unitària de l'estructura buida (sense dielèctrics), tindrem:

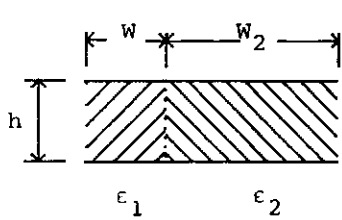
$$C = \epsilon_{ref} C_0 \quad (3.97)$$

i, per tant:

$$LC = L_0 \epsilon_{ref} C_0 = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{ref} = \mu_0 \epsilon_{ef} \quad (3.98)$$

a) Línia de plaques paral·leles

(Condensadors en paral·lel)



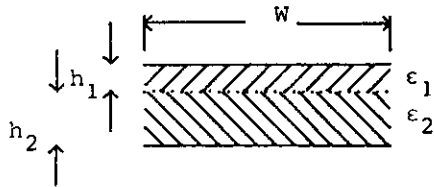
$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_1 \frac{W_1}{h} + \epsilon_2 \frac{W_2}{h} = \frac{\epsilon_{r1} W_1 + \epsilon_{r2} W_2}{W} \epsilon_0 \frac{W}{h}$$

$$\epsilon_{ref} = \frac{\epsilon_{r1} W_1 + \epsilon_{r2} W_2}{W}, \quad \epsilon_{ef} = \epsilon_0 \epsilon_{ref}$$

Resulta  $C = \epsilon_0 \epsilon_{ref} \frac{W}{h} = \epsilon_{ref} C^0$

( $C^0$  = capacitat de la línia amb dielèctric aire)

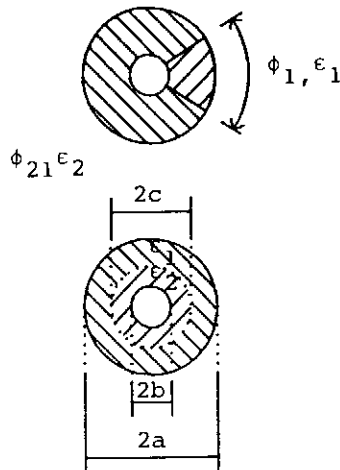
(condensadors en sèrie)



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{h_1}{\epsilon_1 W} + \frac{h_2}{\epsilon_2 W} = \frac{h}{\epsilon_{ef} W}$$

amb  $\epsilon_{ef}^{-1} = (h_1 \epsilon_1^{-1} + h_2 \epsilon_2^{-1})/h$

b) Línia coaxial



$$\epsilon_{ef} = \frac{\phi_1 \epsilon_1 + \phi_2 \epsilon_2}{2\pi} \quad ; \quad C = \frac{2\pi \epsilon_{ef}}{\ln \frac{a}{b}}$$

$$\frac{1}{\epsilon_{ef}} = \frac{\frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{c}{b} + \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{a}{c}}{\ln \frac{a}{b}} \quad ; \quad C = \frac{2\pi \epsilon_{ef}}{\ln \frac{a}{b}}$$

Fig. 3.9 Introducció del concepte de permitivitat efectiva en línies amb dielèctric inhomogeni d'estructura senzilla.

En conseqüència:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{ref}}}} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{v_p C} = v_p L \quad (3.99)$$

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{\text{ref}}}} \quad (3.100)$$

En el cas freqüent de dos dielèctrics diferents,  $\epsilon_1$  i  $\epsilon_2$ , s'introdueix el concepte de factor d'emplenament  $q_1$  i  $q_2$  d'acord amb les condicions:

$$q_1 + q_2 = 1$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{ef}} &= q_1 \epsilon_1 + q_2 \epsilon_2 = q_1 \epsilon_1 + (1 - q_1) \epsilon_2 = q_1 (\epsilon_1 - \epsilon_2) + \epsilon_2 = \\ &= (1 - q_2) \epsilon_1 + q_2 \epsilon_2 = \epsilon_1 + q_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) \end{aligned} \quad (3.101)$$

Òbviament, aquestes definicions es poden aplicar al cas de més de dos dielèctrics.

c) Si els dielèctrics tenen pèrdues:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{ef}} &= q_1 \epsilon_1 (1 - j \tan \delta_1) + (1 - q_1) \epsilon_2 (1 - j \tan \delta_2) = \\ &= [q_1 \epsilon_1 + (1 - q_1) \epsilon_2] - j [q_1 \epsilon_1 \tan \delta_1 + (1 - q_1) \epsilon_2 \tan \delta_2] = \\ &= \epsilon'_{\text{ef}} - j \epsilon''_{\text{ef}} = \epsilon'_{\text{ef}} (1 - j \tan \delta_{\text{ef}}) \end{aligned} \quad (3.102)$$

i, per tant:

$$\begin{aligned} \gamma &= j \omega \sqrt{LC} = L_0 C_0 \sqrt{\epsilon'_{\text{ef}} (1 - j \tan \delta_{\text{ef}})} = \\ &= j \beta \left( 1 - \frac{1}{2} j \tan \delta_{\text{ef}} \right) \end{aligned} \quad (3.103)$$

d'on s'obté:

$$\alpha_D = \frac{1}{2} \beta \tan \delta_d \quad (3.104)$$

**Línia microtira ("Microstrip")** La línia microtira està formada per una tira conductora sobre una làmina dielèctrica que a l'altra cara té un pla de massa (fig. 3.10a) i la seva estructura és similar a la de la línia triplaca. La línia microtira té l'avantatge sobre la línia triplaca de ser oberta (cosa que és útil per fer circuits actius) i de tenir una simplicitat de fabricació més gran. És la línia de transmissió més utilitzada per a la realització de circuits, i el seu ús, juntament amb la disponibilitat de transistors i díodes operatius a freqüències de microones, n'ha revolucionat la tecnologia.

La capacitat es pot calcular amb l'ajut de transformacions conformes, si bé en aquest cas, a causa de la inhomogeneïtat del dielèctric, cal introduir aproximacions simplificadores que fan que les expressions de la figura 3.10a no siguin realment exactes. En tot cas, el seu grau d'error ( $\leq 1\%$ ) acostuma a ser inferior a la precisió de fabricació i a l'exactitud del valor de la permitivitat.

L'atenuació deguda al dielèctric,  $\alpha_D$ , es pot calcular amb el que s'ha dit abans: si assignem el subíndex 1 al dielèctric, 2 a l'aire i fem  $q_1 = q$ , (3.101) i (3.102) queden:

$$\epsilon_{ref} = q(\epsilon_r - 1) + 1 \quad (3.105)$$

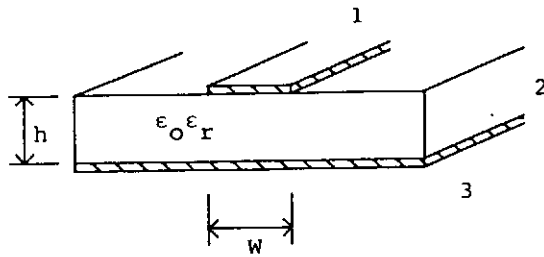
$$\tan \delta_d = q \left( \frac{\epsilon_r}{\epsilon_{ref}} \right) \tan \delta_e \quad (3.106)$$

De (3.105) es pot calcular  $q$ , i  $\tan \delta_e$  en (3.106) es refereix al dielèctric. L'atenuació produïda pels conductors, com en el cas de la línia triplaca, és de càlcul complicat i ometem la seva discussió.

**Línia coplanària** En la línia microtira, els contactes a massa dels transistors, els díodes, etc., s'han de realitzar a través del substrat dielèctric, que s'ha de perforar. Això, en el cas de substrats durs (ceràmica, quars) suposa una certa complicació. Una alternativa a la línia microtira sense que tingui aquest inconvenient, i que s'utilitza cada vegada més, és la formada per una tira conductora i dos semiplans conductors (massa) equidistants d'aquella i situats en el mateix pla (línia coplanària, fig. 3.10b).

Les consideracions realitzades per a  $\alpha_C$  i  $\alpha_D$  en el cas de la línia microtira també es poden aplicar en aquest cas.

## a) Línia microtira (microstrip)



$$\epsilon_{ref} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{10h}{W}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

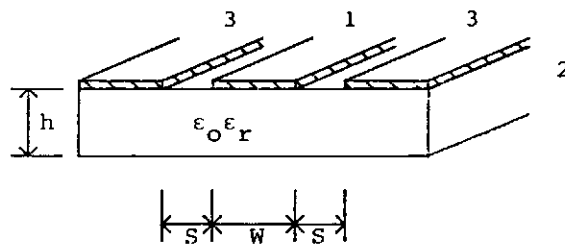
$$Z_o = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \ln \left( \frac{8h}{W} + 0.25 \frac{W}{h} \right) \quad \left( \frac{W}{h} \leq 1 \right)$$

$$Z_o = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \left[ \frac{W}{h} + 1.393 + 0.667 \ln \left( \frac{W}{h} + 1.444 \right) \right]^{-1} \quad \left( \frac{W}{h} \geq 1 \right)$$

(Per a  $W/h = 1$  ambdues expressions difereixen en un 0.4%)

1. Tira conductora 2. Dielèctric 3. Pla de massa

## b) Línia coplanària



$$Z_o = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \frac{K'(x)}{K(x)}$$

$$x = \frac{W}{W + 2S}$$

$$\epsilon_{ref} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} \left\{ \tanh \left[ 0.775 \ln \frac{h}{S} + 1.75 \right] + \frac{xS}{h} \left[ 0.04 - 0.7x + 0.01 (1 - 0.1 \epsilon_r) (0.25 + x) \right] \right\}$$

$K(x)$  = integral el·líptica de primera espècie definida a la figura 3.8d.

1. Tira conductora 2. Dielèctric 3. Plans de massa

Fig. 3.10 Línies de dielèctric més utilitzades per a la realització de circuits de microones.

## Capítol 4 Circuits ressonants

### 4.1 Introducció

Es presenten les propietats de la ressonància en circuits elèctrics posant èmfasi en els conceptes d'energia i pèrdues, que ens seran de gran utilitat des d'ara. Seguint aquesta línia, es presenta d'una manera senzilla el teorema de l'invariant adiabàtic, que permet rederivar gran nombre de les propietats dels circuits ressonants sense necessitat de recórrer a la disposició concreta dels seus elements components ( $R, L, C$ ).

### 4.2 Propietats bàsiques

Considerem el circuit de la figura 4.1 i les relacions bàsiques que el governen. S'obté fàcilment que:

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0 \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (4.1)$$

que amb una elecció adequada de l'origen de temps té com a solució:

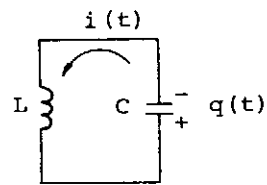
$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t) \quad , \quad i(t) = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad (4.2)$$

Les energies emmagatzemades a la inductància i al condensador valen, a cada instant:

$$u_m(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2C} q_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad (4.3)$$

$$u_e(t) = \frac{1}{2C} q^2(t) = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad (4.4)$$





$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = \dot{q}(t)$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0 \rightarrow L\dot{i} + \frac{1}{C} q = 0$$

Fig. 4.1 Configuració i relacions bàsiques en un circuit ressonant sense pèrdues.

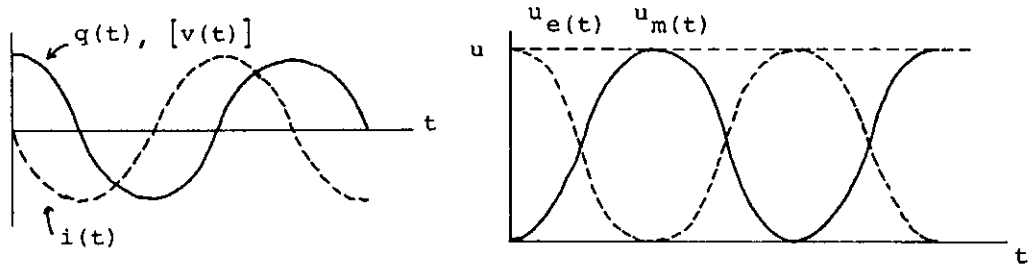
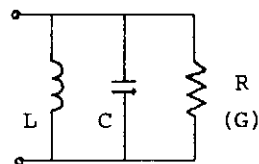


Fig. 4.2 Variació de corrent, càrrega (tensió) i energies elèctrica i magnètica amb el temps en el circuit de la figura 4.1.



$$Gv(t) + C \frac{d}{dt} v(t) + \frac{1}{L} \int v(t) dt = 0$$

$$e^s - G + Cs + \frac{1}{Ls} = 0$$

Fig. 4.3 Circuit ressonant amb pèrdues en paral·lel amb el condensador.

i estan representades a la figura 4.2. Noteu que quan  $u_m$  (o bé  $u_e$ ) s'anul·la, l'altra energia és màxima i estan, per tant, intercanviant-se. Atès que el sistema no té pèrdues, l'energia total,  $u(t) = u_e(t) + u_m(t)$ , ha de ser constant i igual al valor màxim de  $u_m$  o  $u_e$ , cosa que es

pot verificar fàcilment a partir de (4.3) i (4.4).

Si considerem a continuació la inclusió de pèrdues en la forma d'una resistència en paral·lel amb el condensador (que pot representar, per exemple, les pèrdues en el dielèctric del condensador), obtenim fàcilment per a l'exponent  $s$  (fig. 4.3):

$$s = -\frac{G}{2C} \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \frac{G^2}{4C^2}} = -\alpha_r \pm j \omega_{nr} \quad (4.5)$$

de manera que, si escollim adequadament l'origen de temps, els senyals en el circuit són de la forma:

$$e^{-\alpha_r t} \cos(\omega_{nr} t) \quad , \quad \omega_{nr} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{G}{2\omega_0 C}\right)^2} \quad (4.6)$$

on a  $\omega_{nr}$  l'anomenem *freqüència natural de ressonància* i que, evidentment, correspon a les oscil·lacions lliures del circuit.

Si ara el circuit de la figura 4.3 és excitat mitjançant un generador sinusoidal de freqüència  $f$  connectat entre els dos terminals indicats, es defineix la *freqüència de ressonància*  $f_r$  com aquella per a la qual es compleix una de les dues condicions equivalents següents:

- a) La impedància d'entrada del circuit és real.
- b) Les energies mitjanes magnètica,  $U_m$ , i elèctrica,  $U_e$ , emmagatzemades en el circuit són iguals.

L'equivalència entre aquestes dues condicions es demostrarà més endavant. De moment, noteu que si  $U_m = U_e$  la inductància i la capacitat intercanvien les seves energies entre si exactament sense que hi hagi sobrant perceptible pel generador, que es limita a lliurar la potència dissipada a la resistència. Quan la freqüència no coincideix amb  $f_r$  i  $U_m \neq U_e$ , l'excés d'energia que predomina s'intercanvia amb el generador, que percep, per tant, una impedància reactiva.

La utilitat de la condició *b* és deguda al seu caràcter més general, desvinculat del concepte concret d'impedància. A més, noteu que  $f_r$  es defineix en règim permanent i no ha de coincidir, en general, amb  $f_{nr}$ , que es refereix al circuit oscil·lant abandonat a ell mateix.

Tornant al circuit de la figura 4.3, l'aplicació de la condició  $b$  proporciona:

$$U_m = \frac{1}{4} L |I|^2 = \frac{1}{4} L \frac{|V|^2}{\omega_r^2 L^2} \quad ; \quad U_e = \frac{1}{4} C |V|^2 \quad (4.7)$$

d'on, igualant, resulta:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_o$$

### 4.3 Factor de qualitat i admitància

A (4.5) i (4.6) hem suposat implícitament que  $G < 2\omega_o C$  per fer que el radicand sigui positiu.

Normalment és  $G < 2\omega_o C$ , llavors diem que les pèrdues són petites, interpretant  $G$  com les pèrdues (generalment no volgudes) associades al circuit ressonant; en el cas de la figura 4.3, associades concretament al condensador.

La quantificació de les pèrdues d'un circuit ressonant es realitza mitjançant el seu factor de qualitat  $Q$  definit, per a un règim sinusoidal permanent (és a dir, amb el circuit excitat amb un generador sinusoidal) com:

$$Q = \frac{\text{energia mitjana emmagatzemada}}{\text{potència mitjana dissipada}} \Big|_{\omega = \omega_r} \quad (4.8)$$

En virtut d'aquesta definició, per a la figura 4.3 s'obté:

$$Q = \omega_r \frac{U_m + U_e}{P_L} \Big|_{\omega = \omega_r} = \omega_o \frac{2 U_e}{P_L} = \omega_o \frac{2 \frac{1}{4} C |V|^2}{\frac{1}{2} G |V|^2} = \frac{\omega_o C}{G} \quad (4.9)$$

De manera que la condició de pèrdues baixes es pot escriure com  $Q \gg 1$ .

En funció del factor  $Q$ , la freqüència natural de ressonància queda:

$$\omega_{nr} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (4.10)$$

A freqüències de microones és habitual treballar amb valors de  $Q$  que oscil·len des de 100 o 200 fins a 5000 o 10000.

Observeu que fins i tot per a un valor tan baix a la pràctica com  $Q=50$  resulta:

$$\omega_{nr} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{10.000}} \quad (4.11)$$

i, per això, a la pràctica no s'acostuma a distingir entre  $f_r$  i  $f_{nr}$ , i només parlem de *freqüència de ressonància* considerant aquesta com:

$$f_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si ara calculem l'admitància en els borns del condensador (fig. 4.3):

$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\omega_o C \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) = G(1 + 2jQ\Delta) \quad (4.12)$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \quad (4.13)$$

Per a freqüències properes a la de ressonància  $\omega_o$ , l'expressió per a  $\Delta$  es pot linealitzar:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\omega_o\omega} = \frac{(\omega - \omega_o)(\omega + \omega_o)}{2\omega_o\omega} \approx \frac{\omega - \omega_o}{\omega_o} \equiv \delta \quad (4.14)$$

i queda l'expressió aproximada:

$$Y = G(1 + 2jQ\delta) \quad , \quad f = f_o (1 + \delta) \quad (4.15)$$

Noteu que per a  $f = f_o$ ,  $|Y|$  té un mínim ( $|Z|$  un màxim), i que l'amplada de banda relativa  $W$  a 3dB, definida a partir de les freqüències per a les quals  $|Z|$  disminueix en el factor  $\sqrt{2}$  (fig. 4.4), és igual a l'invers del factor  $Q$  del circuit, com es pot calcular fàcilment a partir de (4.15).

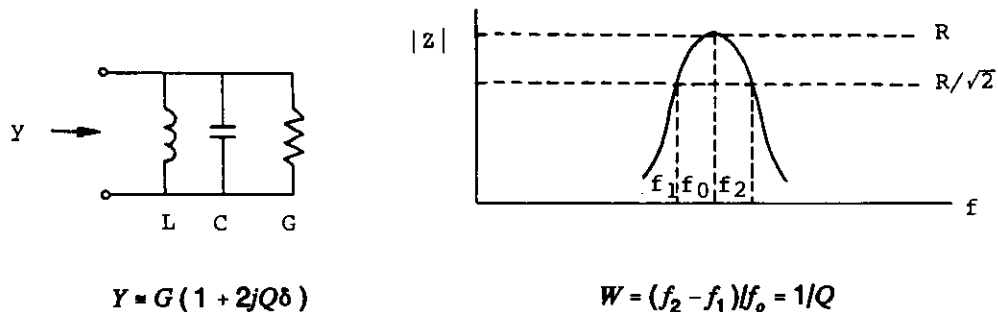


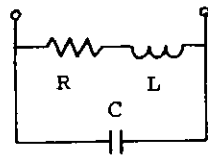
Fig. 4.4 Admitància d'entrada en un circuit ressonant paral·lel.

#### 4.4 Més sobre pèrdues

Fins ara hem considerat que les pèrdues en el circuit es produïen en una resistència en paral·lel amb la  $C$  i la  $L$ . Estudiem què succeeix en el cas d'una resistència en sèrie (figura 4.5). S'obté:

$$s = -\frac{R}{2L} \pm j\omega_o \sqrt{1 - \left(\frac{R}{2\omega_o L}\right)^2} \equiv -\alpha_t \pm j\omega_{nr} \quad (4.16)$$

La freqüència de ressonància en règim permanent  $f$ , es calcula com en el cas anterior (generador entre terminals):



$$Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0$$

$$e^x \rightarrow R + Ls + \frac{1}{Cs} = 0$$

Fig. 4.5 Circuit amb pèrdues en sèrie.

$$U_c = \frac{1}{4} C |V|^2 = U_m = \frac{1}{4} L \frac{|V|^2}{R^2 + \omega_r^2 L^2} \quad (4.17)$$

$$\omega_r = \omega_o \sqrt{1 - \left( \frac{R_L}{\omega_o L} \right)^2} \quad (4.18)$$

Mentre que per al factor de qualitat  $Q$ :

$$Q = \omega_r \frac{U}{P_L} \Big|_{\omega=\omega_r} = \omega_r \frac{2U_m}{P_L} \Big|_{\omega=\omega_r} = \omega_r \frac{2 \frac{1}{4} L |I|^2}{\frac{1}{2} R |I|^2} = \frac{\omega_r L}{R} \quad (4.19)$$

Les freqüències de ressonància es poden rescriure:

$$\omega_{nr} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \omega_r = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \quad (4.20)$$

Com abans, ambdues pràcticament coincideixen amb  $\omega_o$  a la majoria dels casos, per la qual cosa també prendrem:

$$Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R \omega_o C} \quad (4.21)$$

Pel que fa a l'admitància d'entrada del circuit de la figura 4.6a:

$$\begin{aligned}
 Y &= j\omega C + \frac{1}{R+j\omega L} = j\omega C + \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \\
 &= j\omega C + \frac{\frac{1}{R}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 Q^2} - j \frac{\frac{\omega L}{R^2}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 Q^2} \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

expressió que, per a valors de  $\omega$  propers a  $\omega_0$ , i factor  $Q$  elevat, admet dos nivells successius d'aproximació:

$$Y = j\omega C + \frac{1}{RQ^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - \frac{j}{\omega L} = j\omega C + \frac{1}{RQ^2} - \frac{j}{\omega L} \quad (4.23)$$

proporcionant el mateix circuit equivalent de la figura 4.6. La demostració és similar per al cas del circuit de la figura 4.6b.

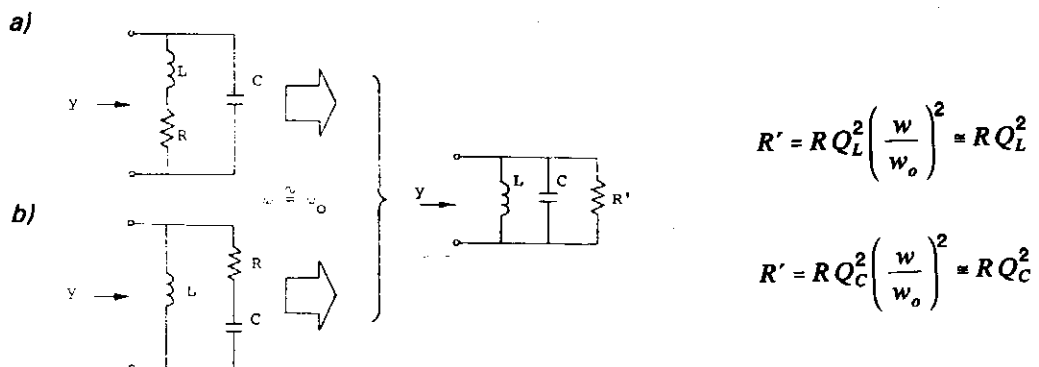
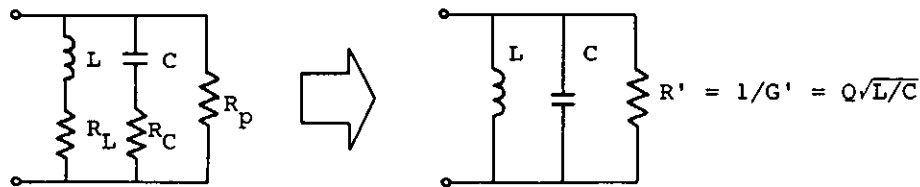


Fig. 4.6 Circuit equivalent aproximat per a pèrdues en sèrie amb la  $L$  o la  $C$ .

En conclusió, si les pèrdues són petites i per a freqüències properes a la de ressonància, les pèrdues en un circuit ressonant paral·lel es poden atribuir a una resistència en paral·lel, amb la  $L$  i la  $C$  amb independència d'on es produeixin físicament (fig. 4.7). Noteu també en aquesta figura que l'invers del factor  $Q$  del circuit és la suma dels inversos de cada resistència considerada per separat, resultat també evident a partir de la definició de  $Q$ :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{\omega_0} \left. \frac{P_L}{U} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (4.8)$$

ja que les pèrdues totals  $P_L$  són la suma de les considerades per separat a cada resistència.



$$Q_L = \omega_0 L / R_L$$

$$Q_C = \omega_0 C R_C$$

$$Q_p = R_p / \omega_0 L$$

$$G' = (R_L Q_L^2)^{-1} + R_p^{-1} = 1/Q_L \omega_0 L + 1/Q_C \omega_0 L + 1/R_p$$

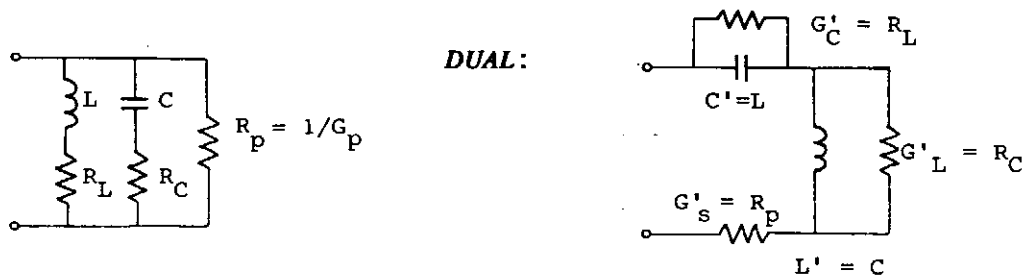
$$\text{per tant } 1/Q = G' / \omega_0 C = G' \omega_0 L = 1/Q_C + 1/Q_p$$

Fig. 4.7 Circuit equivalent i valor del factor  $Q$  d'un circuit ressonant paral·lel amb pèrdues en diferents llocs.

Encara podem obtenir més resultats sense atendre l'estructura particular del circuit que forma el ressonador si fem ús de la propietat que, per a  $Q$  elevats,  $\omega_{nr} = \omega_r = \omega_0$ , és a dir, les freqüències de ressonància són les mateixes en règim permanent o transitori. En efecte, en absència de generador (règim transitori) i a partir de (4.8):

$$P_L = - \frac{dU}{dt} = \frac{\omega_0}{Q} U \quad \rightarrow \quad U(t) = U_0 e^{-\frac{\omega_0}{Q} t} \quad (4.24)$$





$$Q_L = \omega_0 L / R_L$$

$$Q_C = 1 / \omega_0 C R_C = \omega_0 L / R_C$$

$$Q_p = R_p / \omega_0 L$$

$$1/Q = \sum 1/Q_i$$

$$Q'_C = \omega_0 C' / G'_C (= Q_L)$$

$$Q'_L = 1 / G'_L \omega_0 L' (= Q_C)$$

$$Q'_S = \omega_0 L' / R'_S (= Q_p)$$

$$1/Q' = \sum 1/Q'_i (= 1/Q)$$

$$y(\omega) = Z'(\omega) = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{C}{L}} (1 + 2jQ\delta) = \frac{1}{Q'} \sqrt{\frac{L'}{C'}} (1 + 2jQ'\delta)$$

Fig. 4.8 Relació entre circuits en sèrie i en paral·lel utilitzant el concepte de dualitat.

de manera que els senyals en el circuit són de la forma:

$$v(t) \text{ o } i(t) \sim e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_0 t) \sim e^{j\omega_0 \left(1 + \frac{j}{2Q}\right)t} \quad (4.25)$$

És a dir, formalment, l'aparició de pèrdues en el circuit ressonant, amb independència de com i a on es produeixin, es tradueix en una freqüència de ressonància complexa:

$$\Omega_0 = \omega_0 \left(1 + \frac{j}{2Q}\right) \quad (4.26)$$

resultat de gran utilitat a l'anàlisi de pèrdues en situacions ressonants complicades que no admeten un plantejament analític senzill, com en el cas de cavitats ressonants que estudiarem més endavant.

Per il·lustrar la utilitat del resultat anterior, considerem un circuit ressonant sense pèrdues per al qual:

$$Z(\omega) = \frac{\frac{j\omega}{C}}{\omega_o^2 - \omega^2} = \frac{\frac{j\omega}{C}}{(\omega_o - \omega)(\omega_o + \omega)} = \frac{\frac{j}{C}}{2(\omega_o - \omega)} \quad (4.27)$$

sabent que l'última aproximació correspon a freqüències properes a la ressonància. La presència de pèrdues en el circuit modifica el resultat anterior i canvia  $\omega_o$  per  $\Omega_o$ :

$$Z(\omega) = \frac{\frac{j}{C}}{2(\Omega_o - \omega)} = \frac{\frac{j}{C}}{2\omega_o + \frac{j\omega_o}{Q} - 2\omega} = \frac{\left(\frac{Q}{\omega_o C}\right)}{1 + 2jQ\delta} \quad (4.28)$$

expressió idèntica a la (4.15) obtinguda anteriorment.

Advertiu que, si bé fins ara hem escollit un circuit ressonant paral·lel com a model de treball, tots els càlculs i les conclusions es poden traslladar a un circuit en sèrie si recordem la dualitat entre ells, tal com es resumeix a la figura 4.8.

#### 4.5 Pertorbació d'un sistema ressonant

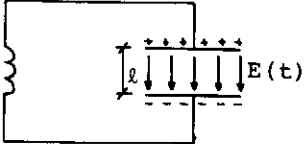
Quan es pertorba un sistema ressonant lleugerament, de manera que la seva energia mitjana variï en  $\delta U$ , la seva freqüència de ressonància varia en  $\delta\omega_o$  de manera que:

$$\frac{\delta\omega_o}{\omega_o} = \frac{\delta U}{U} \quad (4.29)$$

Anem a verificar aquest teorema general de Boltzmann i Ehrenfest, per al cas d'un circuit  $L$ - $C$ , quan pertorbem el condensador (fig. 4.9). Suposem el camp elèctric uniforme (sense efectes de vores).

Si allunyem lentament les plaques del condensador, de manera que a cada instant la situació es pugui considerar d'equilibri i no s'hi produeixin canvis bruscs (per això el nom

$$Q_0 = \sigma_0 S = \epsilon_0 E_0 S \quad E(t) = E_0 \sin \omega_0 t$$

$$Q(t) = Q_0 \sin \omega_0 t$$


$$F(t) = \frac{1}{2} E(t) Q(t) = \frac{1}{2} E_0 Q_0 \sin^2 \omega_0 t$$

$$\langle F(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{1}{4} E_0 Q_0$$

Fig. 4.9 Model de sistema ressonant emprat per demostrar el teorema de l'invariant adiabàtic.  $S$  és la superfície de les plaques del condensador.

d'invariant adiabàtic d'aquest teorema), el sistema realitza un treball mitjà:

$$\delta U = \langle F \rangle \delta l = \frac{1}{4} E_0 Q_0 \delta l = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 S \delta l \quad (*) \quad (4.30)$$

essent  $\langle F \rangle$  el valor mitjà de la força d'atracció entre les plaques i  $\delta l$  el desplaçament (fig. 4.9). Alhora:

$$U = 2U_e = 2 \frac{1}{4} \epsilon_0 \int |E_0|^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 S l \quad (4.31)$$

de manera que:

$$\frac{\delta U}{U} = \frac{\delta l}{2l} \quad (4.32)$$

(\*) Noteu que  $\delta U$  és positiu perquè en incrementar  $l$  un  $\delta l$  es realitza un treball contra la força del sistema i, per tant, s'augmenta la seva energia.

D'altra banda:

$$w_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \ln w_o = -\frac{1}{2}(\ln L + \ln C) \quad (4.33)$$

i modificant l'expressió anterior per a C:

$$\frac{\delta w_o}{w_o} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta C}{C} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta\left(\frac{1}{l}\right)}{\frac{1}{l}} = \frac{1}{2} l \frac{\delta l}{l^2} = \frac{\delta U}{U} \quad q.e.d. \quad (4.34)$$

Noteu que (4.30) es correspon amb l'increment d'energia elèctrica produït en augmentar el volum on hi ha camp elèctric en la quantitat  $S \cdot \delta l$ , observació que ens serà de gran utilitat més endavant per estudiar deformacions de cavitats resonants. Observeu també que si partim de l'expressió:

$$U = \frac{1}{4} C |V|^2 + \frac{1}{4} L |I|^2 \quad (4.35)$$

i suposem que durant la variació de C,  $|V|$  es manté constant (perquè està connectat a un generador, per exemple), obtenim:

$$\delta U_1 = \frac{1}{4} \delta C |V|^2 = \frac{1}{4} \delta \left( \epsilon_o \frac{S}{l} \right) E_o^2 l^2 = -\frac{1}{4} \epsilon_o E_o^2 S \delta l \quad (4.36)$$

que difereix en el signe de l'expressió correcta (4.30). Això és degut al fet que en aquest cas el generador ha de subministrar una quantitat d'energia  $\delta U_2$  per mantenir  $|V|$  constant durant la variació, de manera que:

$$\delta U_1 + \delta U_2 = \delta U \rightarrow \delta U_2 = \frac{1}{2} \epsilon_o E_o^2 S \delta l = -2 \delta U_1 \quad (4.37)$$

Com a il·lustració elemental de la utilitat del teorema, considerem un circuit resonant que té pèrdues en la L i la C:

$$j\omega_0 L \rightarrow j\omega_0 L + R_L \quad , \quad j\omega_0 C \rightarrow j\omega_0 C + G_C \quad (4.38)$$

És a dir, que els valors de  $L$  i  $C$  varien:

$$L \rightarrow L \left( 1 - j \frac{R_L}{\omega_0 L} \right) = L \left( 1 - \frac{j}{Q_L} \right) \quad , \quad \delta L = -j \frac{L}{Q_L} \quad (4.39)$$

$$C \rightarrow C \left( 1 - j \frac{G_C}{\omega_0 C} \right) = C \left( 1 - \frac{j}{Q_C} \right) \quad , \quad \delta C = -j \frac{C}{Q_C} \quad (4.40)$$

(en el cas de la  $C$ , físicament és com si el dielèctric tingués pèrdues i  $\epsilon$  es fes complexa). Si suposem que durant la variació  $|V|$  i  $|I|$  es mantenen constants mitjançant generadors exteriors, a partir de (4.35) s'obté:

$$\begin{aligned} \delta U_1 &= -j \frac{1}{4} C |V|^2 \frac{1}{Q_C} - j \frac{1}{4} L |I|^2 \frac{1}{Q_L} = -j \left( \frac{U_m}{Q_L} + \frac{U_c}{Q_C} \right) = \\ &= -j \frac{U}{2} \left( \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} \right) = -j \frac{U}{2} \frac{1}{Q} \quad (4.41) \end{aligned}$$

Com abans, serà  $\delta U_2 = -2\delta U_1$  i  $\delta U = -\delta U_1$ , de forma que:

$$\frac{\delta \omega_0}{\omega_0} = \frac{\delta U}{U} = \frac{j}{2} \cdot \frac{1}{Q} \quad (4.42)$$

obtenint per a la freqüència de ressonància nova l'expressió ja coneguda:

$$\Omega_0 = \omega_0 + \delta \omega_0 = \omega_0 \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right) \quad , \quad \frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} \quad (4.43)$$

#### 4.6 Ressonància en línies

Per als circuits L-C anteriors hem definit dos conceptes de ressonància:

- a) La situació que es produeix quan se subministra energia inicial al circuit i s'abandona a ell mateix. Aquesta situació es caracteritza per la seva freqüència  $f_{nr}(\omega_{nr})$ .

b) En règim sinusoidal estacionari, la situació que, com a resposta a l'excitació d'un generador, es produeix quan  $U_m = U_o$ . Aquesta situació es caracteritza per la seva freqüència  $f_r(\omega_r)$ .

Hem vist que, quan no hi ha pèrdues,  $f_r = f_{nr}$ , i quan n'hi ha però són baixes,  $f_r$  i  $f_{nr}$  són tan semblants que es poden prendre els seus valors iguals sense cometre cap error important. També hem vist que la situació *b* és igual que requerir valor real per a la immitància d'entrada del circuit.

Aquests conceptes es poden estendre a situacions més generals que les d'una xarxa *L-C* i, en particular, a línies de transmissió.

Considerem novament una secció de longitud  $l$  de línia ideal en curt circuit. Anteriorment hem comprovat que la impedància d'entrada té infinits zeros i infinits pols (immitància d'entrada real, en aquest cas nul·la, fig. 2.17); és a dir, té infinites freqüències de ressonància d'acord amb la condició *b*.

D'altra banda, atès que el circuit és sense pèrdues i els pols i zeros de *Z* (o bé *Y*) estan alternats, admet els dos possibles circuits equivalents de la figura 4.10 (formes de Foster). El de *a* posa de manifest els zeros de *Z*, ( $\omega_{sn}$ , freqüències a les quals  $l = n\lambda/2$  i el de *b*, els de *Y* ( $\omega_{pn}$ , freqüències a les quals  $l = (2n-1)\lambda/4$ ).

Els valors dels elements dels circuits equivalents es poden calcular de la manera següent:

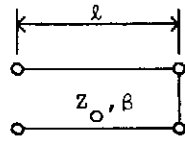
$$\text{per a } \omega = \omega_{sn} = 0, \quad \beta l = \frac{\omega}{c} l < 1,$$

$$Z_i = jZ_o \tan \beta l = jZ_o \beta l = j \sqrt{\frac{L}{C}} \omega \sqrt{LC} l = j\omega L l \quad (4.44)$$

de manera que  $L_o = L l$ .

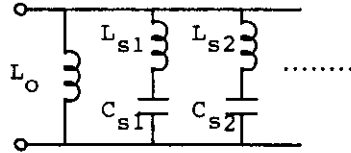
Per a  $\omega = \omega_{pn}$ :

$$Z_i = jZ_o \tan n\pi \left( 1 + \frac{\Delta \omega}{\omega_{sn}} \right) = jZ_o \tan (n\pi + n\pi \delta) = jZ_o \tan (n\pi \delta) \quad (4.45)$$



$$Z_i = jZ_o \tan \beta \ell = j\sqrt{\frac{L}{C}} \tan(\omega\sqrt{LC}\ell)$$

a)



$$\ell = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

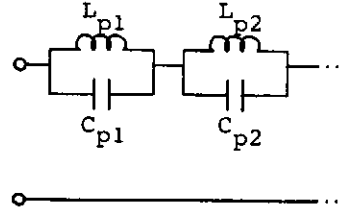
$$\rightarrow \omega_{sn} = \frac{n\pi C}{\ell} = \frac{n\pi}{\sqrt{LC}\ell}$$

$$L_o = L\ell$$

$$L_{sn} = \frac{1}{2} L\ell = \frac{n\pi Z_o}{2\omega_{sn}} \quad (n \neq 0)$$

$$C_{sn} = \frac{2C\ell}{n^2\pi^2} = 2 \frac{Y_o}{n\pi\omega_{sn}} \quad (n \neq 0)$$

b)



$$\ell = (2n - 1) \frac{\lambda}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\omega_{pn} = \frac{(2n - 1)\pi}{2\sqrt{LC}\ell}$$

$$C_{pn} = \frac{1}{2} C\ell = \frac{(2n - 1)\pi Y_o}{4\omega_{pn}}$$

$$L_{pn} = \frac{8L\ell}{(2n - 1)^2\pi^2} = \frac{4Z_o}{(2n - 1)\pi\omega_{pn}}$$

Fig. 4.10 Circuits equivalents possibles per a una secció de línia en curt circuit. El a posa de manifest els zeros de  $Z_i$ , i el b els zeros de  $Y_i = Z_i^{-1}$  (pols de  $Z_i$ ).

amb  $\delta = \Delta\omega/\omega_{sn}$ . Per a  $n\pi\delta \ll 1$ :

$$Z_i \approx jZ_o n\pi\delta \quad (4.46)$$

Al mateix temps, en les proximitats de  $\omega_{sn}$  tots els circuits en sèrie de la figura 4.10a presenten una impedància finita, excepte el format per  $L_{sn}$ - $C_{sn}$ , per al qual es fa arbitràriament petita. Per tant, del circuit equivalent:

$$Z_i = j \left( \omega L_{sn} - \frac{1}{\omega C_{sn}} \right) = j \omega_{sn} L_{sn} \left( \frac{\omega}{\omega_{sn}} - \frac{\omega_{sn}}{\omega} \right) = 2j \omega_{sn} L_{sn} \delta \quad (47)$$

expressió que, en ser igualada amb (4.46), proporciona:

$$L_{sn} = \frac{n\pi Z_o}{2\omega_{sn}} = \frac{n\pi \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{LC\ell}}{2n\pi} = \frac{1}{2} L\ell \quad (4.48)$$

$C_{sn}$  s'obté immediatament a partir de la condició:

$$L_{sn} C_{sn} = \frac{1}{\omega_{sn}^2} \quad (4.49)$$

Els elements del circuit de la figura 4.10b es poden calcular de manera anàloga. Per a aquest últim circuit noteu que, quan  $\omega \rightarrow 0$ , es redueix a una inductància de valor:

$$L'_o = \sum_{i=1}^{\infty} L_{pi} = \frac{8L\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = L\ell = L_o \quad (4.50)$$

resultat que coincideix amb l'examen del circuit a quan  $\omega \rightarrow 0$ .

Les conclusions per al cas d'una línia en circuit obert (fig. 4.11) són anàlogues.

Freqüentment, el comportament d'aquests circuits només interessa en les proximitats d'una determinada ressonància, i llavors el circuit equivalent es pot simplificar considerant únicament aquell circuit  $L$ - $C$  que produeix el zero o pol en qüestió. Si a més, com és normal, les ressonàncies d'interès es limiten a les dues primeres, els circuits equivalents simplificats són els que es recullen a la figura 4.12.

Per acabar aquesta anàlisi, basada en la recerca de zeros i pols d'immitàncies, ens resta comprovar que per a les ressonàncies trobades es compleix la condició  $U_m = U_n$ .



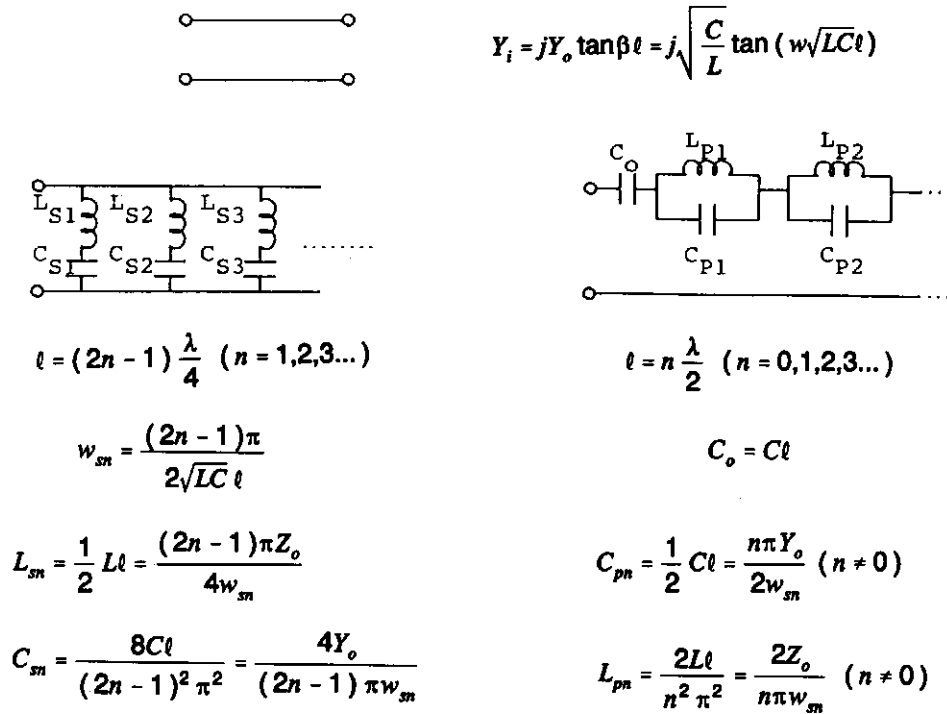


Fig. 4.11 Circuits equivalents per a una secció de línia en circuit obert (vegeu la figura anterior).

En efecte, per a la línia en curt circuit (fig. 4.10) amb l'origen de les Z situat en aquest, tenim:

$$V = -2jV^* \sin \beta z \quad (4.51)$$

$$I = 2 Y_o V^* \cos \beta z \quad (4.52)$$

Per a  $\ell = \lambda/4$  (primera ressonància):

$$U_e = \frac{1}{4} C \int_{-\lambda/4}^0 |V|^2 dz = \frac{C}{4} 4 |V^*|^2 \int_{-\lambda/4}^0 \sin^2 \beta z dz = \frac{1}{8} C |V^*|^2 \lambda \quad (4.53)$$

$$U_m = \frac{1}{4} L \int_{-\lambda/4}^0 |I|^2 dz = \frac{L}{4} 4 Y_o^2 |V^*|^2 \int_{-\lambda/4}^0 \cos^2 \beta z dz = \frac{1}{8} L |V^*|^2 Y_o^2 \lambda \quad (4.54)$$

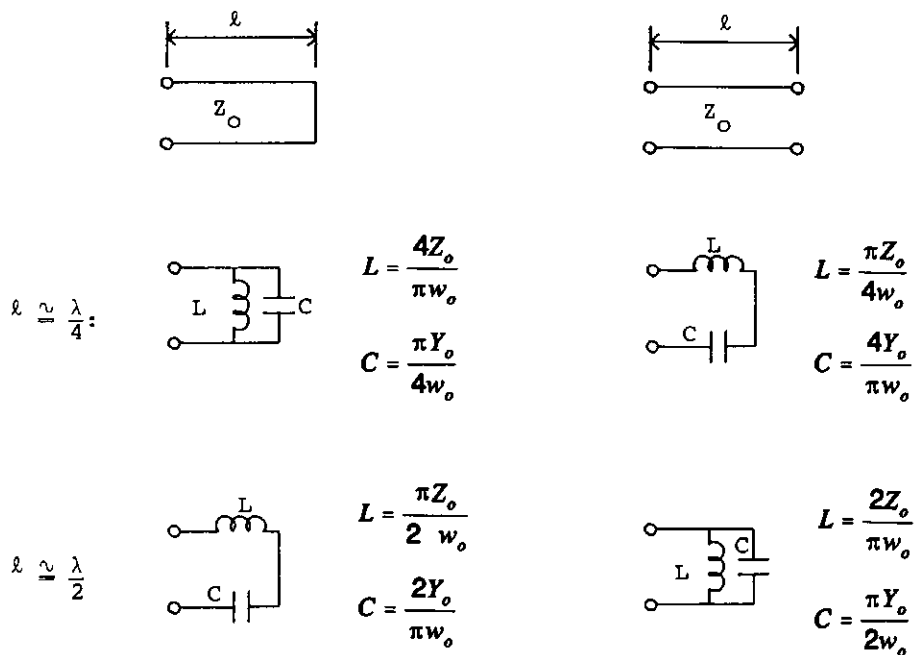


Fig. 4.12 Simplificació dels circuits equivalents de les figures 4.10 i 4.11 a les proximitats de les dues primeres ressonàncies.

que tenint en compte que  $Y_0^2 = C/L$  resulten iguals.

A les restants ressonàncies,  $l$  és un múltiple de  $\lambda/4$ ,  $l = n\lambda/4$ , i el càlcul de  $U_e$  i  $U_m$  proporciona, de forma immediata,  $n$  vegades els valors (4.53) i (4.54), de manera que es continua complint la igualtat.

#### 4.7 Ressonància i ones estacionàries

A l'apartat anterior, hem analitzat les ressonàncies d'una secció de línia per mitjà de la seva immitància d'entrada (condició *b*). Alternativament, podem prendre el punt de vista *a* i preguntar-nos: si considerem una secció de línia ideal amb els seus extrems en *c.c.*, *c.o.* o bé un en cada situació, aïllada de qualsevol altre sistema, sota quines condicions hi podran existir distribucions de tensió i de corrent no nul·les?

Una resposta possible l'obtenim de considerar, per exemple, la distribució estacionària de tensió i corrent en una línia en *c.c.* (fig. 4.13). Per a tots els plans que disten del *c.c.* un

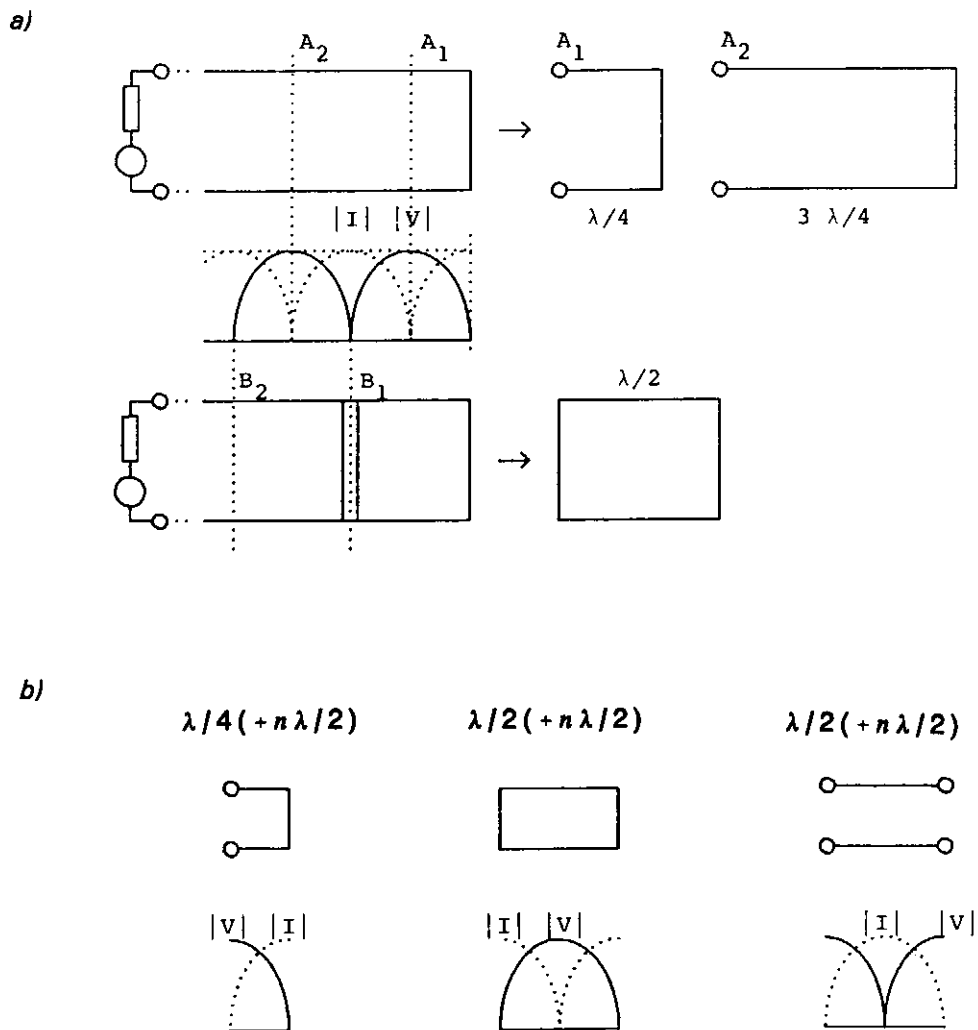


Fig. 4.13 a) Obtenció de seccions de línia ressonants partint d'una distribució estacionària de tensió i corrent.

b) Elements ressonants bàsics. Només hi ha dibuixades les distribucions de  $|I|$  i de  $|V|$  per als modes més baixos ( $n=0$ ).

nombre imparell de  $\lambda/4$  ( $A_1, A_2, \dots$ ) el corrent  $I$  és nul i, per tant, els conductors es poden tallar sense pertorbar el sistema ni a l'esquerra ni a la dreta (fig. 4.13a), i obtenim d'aquesta manera trossos de línia aïllats amb distribucions de corrent i tensió idèntiques a les que tenien abans de tallar.

Anàlogament, en els plans que disten  $n\lambda/2$  del c.c. ( $B_1, B_2, \dots$ ), com que la tensió és nul·la, podem connectar entre si els dos conductors de la línia mitjançant dos fils i, posteriorment, tallar com en el cas anterior (fig. 4.13a). Ara obtenim trossos de línia amb els seus extrems en c.c.

Podríem procedir igualment partint d'una línia en c.o., arribant en definitiva a les tres possibles situacions bàsiques de la figura 4.13b, on s'han dibuixat les distribucions de  $|I|$  i de  $|V|$  per als modes ressonants més baixos. És evident que, des d'aquest punt de vista, hem tornat a trobar les mateixes ressonàncies del paràgraf anterior.

D'altra banda, també hi ha una ona estacionària amb zeros de  $|V|$  i de  $|I|$  si la impedància de càrrega és purament reactiva, ja que també produeix una reflexió total. De manera que, en aquest cas, hauríem pogut fer la construcció de la figura 4.13 més general, amb l'única diferència que ara a la càrrega no hi hauria ni un mínim ni un màxim de  $|V|$  o  $|I|$  i que les seccions obtingudes no serien de longitud  $\lambda/4$  o  $\lambda/2$ .

Per tant, ens podem preguntar per les ressonàncies d'una secció de línia amb dues reactàncies en els seus extrems (fig. 4.14), ja que és una estructura sense pèrdues. La resposta es pot donar, segons els punts anteriors, interpretant la ressonància com una ona

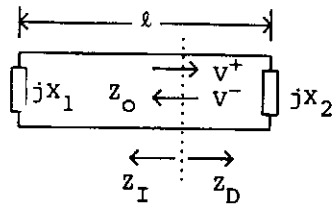
estacionària atrapada entre les dues reflexions totals dels extrems. Si escollim un pla de referència qualsevol i anomenem  $Z_D$  i  $Z_I$  les impedàncies vistes a la dreta i a l'esquerra, respectivament, i  $V^+$  i  $V^-$  les amplituds de l'ona positiva i de la negativa en el pla, tindrem, segons que mirem cap a la dreta o cap a l'esquerra:

$$\frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_D - Z_o}{Z_D + Z_o} \quad \frac{V^+}{V^-} = \frac{Z_I - Z_o}{Z_I + Z_o} \quad \rightarrow \quad (4.55)$$

$$\rightarrow \frac{Z_D - Z_o}{Z_D + Z_o} = \frac{Z_I + Z_o}{Z_I - Z_o} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Z_I \cdot Z_D = 0 & (4.56a) \\ \text{o bé} \\ Z_I \cdot Z_D = \pm j\infty & (4.56b) \end{cases}$$

El compliment de les condicions (4.56a) i (4.56b) ens donarà, per tant, les ressonàncies del circuit.

**Exemple 1** Considerem novament una secció de línia amb els seus extrems en c.c. i longitud  $\ell$ , per a la qual ja sabem que les freqüències de ressonància són aquelles que fan que  $\ell = n\lambda/2$ . Per aplicar les condicions anteriors, podem escollir com a pla de referència

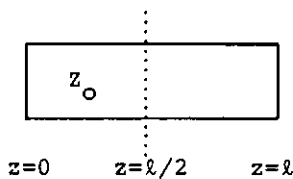


$$\frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_D - Z_0}{Z_D + Z_0}; \quad \frac{V^+}{V^-} = \frac{Z_I - Z_0}{Z_I + Z_0}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Z_I + Z_D = 0 \\ Z_I, Z_D = \pm j\infty \end{cases}$$

Fig. 4.14 Obtenció de les condicions de ressonància per a una secció de línia amb càrregues reactives en els seus extrems (circuit sense pèrdues), a partir de la seva interpretació com a ones estacionàries.

a) Pla  $z = \ell/2$



$$Z_I = Z_D = jZ_0 \tan \beta \frac{\ell}{2}$$

$$Z_I + Z_D = 0 \quad \rightarrow \quad \tan \beta \frac{\ell}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\ell}{2} = n \frac{\lambda}{2}, \quad \ell = 2n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$Z_I, Z_D = \pm j\infty \rightarrow \tan \beta \frac{\ell}{2} = \pm\infty \rightarrow \frac{\ell}{2} = (2n+1) \frac{\lambda}{4}, \quad \ell = (2n+1) \frac{\lambda}{2}$$

b) Pla  $z = 0$

$$Z_I = 0; Z_D = jZ_0 \tan \beta \ell$$

$$Z_I + Z_D = 0 \rightarrow \tan \beta \ell = 0, \quad \ell = n \frac{\lambda}{2}$$

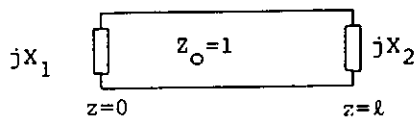
$$Z_I, Z_D = \pm j\infty; \quad \text{No es pot complir}$$

Fig. 4.15 Obtenció de les ressonàncies d'una secció de línia amb els extrems en c.c. a partir de les condicions (4.56a) i (4.56b). Es realitza el càlcul en dos plans diferents.

el de simetria ( $z = \ell/2$ , fig. 4.15a) i obtenir, de (4.56a), que  $\ell$  sigui un nombre parell de  $\lambda/2$ , i de (4.56b), que sigui un nombre imparell (fig. 4.15a). Una altra opció és prendre com a referència un dels extrems, per exemple  $z=0$  (fig. 4.15b). En aquest cas, (4.56a) proporciona la totalitat de solucions, mentre que (4.56b) no es pot aplicar perquè  $Z_1=0$  a causa de la tria del pla. ■

**Exemple 2** La situació de la figura 4.14 es pot tornar a considerar amb més detall, com es resumeix a la figura 4.16. Noteu que prenem  $Z_0=1$  per simplicitat.

a)



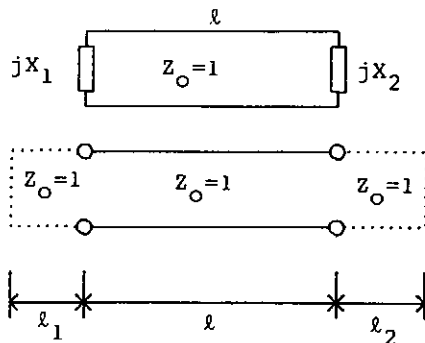
pla  $z=0$

$$Z_1 = jX_1; Z_D = \frac{jX_2 + jS}{1 + jX_2 jS}$$

amb  $S = \tan \beta \ell$

$$Z_1 + Z_D = 0 \rightarrow X_1 + X_2 + S(1 - X_1 X_2) = 0 \rightarrow S = \frac{X_1 + X_2}{X_1 X_2 - 1} = \tan \beta \ell$$

b)



$$jX_1 = j \tan \beta \ell_1$$

$$jX_2 = j \tan \beta \ell_2$$

$$\text{Ressonància : } \ell_1 + \ell + \ell_2 = \frac{\lambda}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \beta (\ell_1 + \ell + \ell_2) = n\pi \rightarrow$$

$$\rightarrow \tan \beta \ell = - \tan \beta (\ell_1 + \ell_2) = - \frac{\tan \beta \ell_1 + \tan \beta \ell_2}{1 - \tan \beta \ell_1 \tan \beta \ell_2} = \frac{X_1 + X_2}{X_1 X_2 - 1}$$

Fig. 4.16 Obtenció de les ressonàncies del circuit de la figura:

a) directament;

b) substituint les càrregues reactives per seccions de línies en curt circuit.

La solució general està descrita a la figura 4.16a i és el resultat de l'aplicació literal de (4.56a). Alternativament, podem substituir les reactàncies  $jX_1$  i  $jX_2$  per seccions de la mateixa línia de transmissió ( $Z_o = 1$ ) en c.c. que proporcionen valors equivalents, i obtenir les resonàncies de la línia resultant, de longitud  $(\ell + \ell_1 + \ell_2)$ , a partir del resultat conegut que és un múltiple de  $\lambda/2$  (fig. 4.16b). ■

**Exemple 3** Quan hi ha involucrades diverses línies de característiques diferents, com a la figura 4.17, es pot entendre millor la utilitat de les expressions (4.56a) i (4.56b). En efecte, en el cas de la figura, de (4.56a) es pot obtenir sense gaire esforç:

$$Z_{o1} \tan\left(\frac{\omega}{c_1} \ell_1\right) + Z_{o2} \tan\left(\frac{\omega}{c_2} \ell_2\right) = 0 \quad (4.57)$$

D'altra banda, 56b proporciona les equacions:

$$\tan\left(\frac{\omega}{c_1} \ell_1\right) = \tan\left(\frac{\omega}{c_2} \ell_2\right) = \pm \infty \quad (4.58)$$

el compliment simultani de les quals és generalment impossible (és a dir, no proporcionen cap solució) llevat que el quocient entre  $\ell_1/c_1$  i  $\ell_2/c_2$  sigui un nombre racional. ■

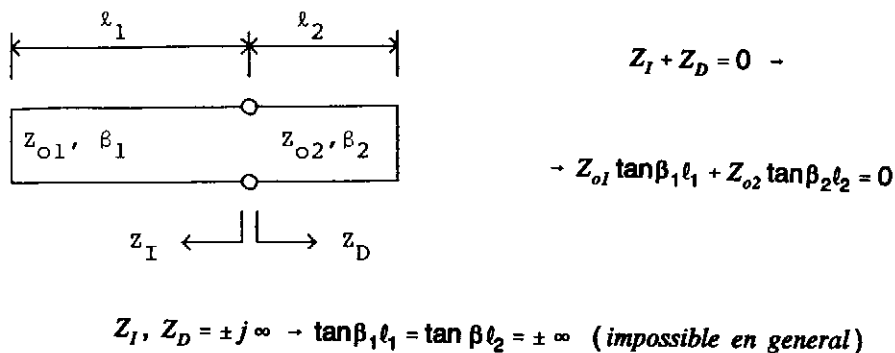


Fig. 4.17 Càlcul de la resonància de l'estructura dibuixada, formada per dues línies de transmissió diferents.

### 4.8 Efecte de les pèrdues

Quan la línia té pèrdues (baixes), cal refer els càlculs que proporcionen els valors dels elements dels circuits equivalents de les figures 4.10, 4.11 i 4.12. Tornant a l'exemple de secció de línia en c.c.:

$$Z_i = Z_o \tanh(\alpha \ell + j\beta \ell) = Z_o \frac{\tanh \alpha \ell + j \tan \beta \ell}{1 + j \tanh \alpha \ell \cdot \tan \beta \ell} \quad (4.59)$$

Si les pèrdues són baixes:

$$\alpha \ell < 1 \quad \rightarrow \quad \tanh \alpha \ell = \alpha \ell \quad (4.60)$$

i si ens trobem en les proximitats de la  $n$ -èsima ressonància en sèrie:

$$\omega = \omega_{sn} = \frac{n\pi}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad \omega = \omega_{sn}(1 + \delta) \quad ; \quad \beta \ell = n\pi(1 + \delta) \quad (4.61)$$

$$\rightarrow \tan \beta \ell = \tan(n\pi + n\pi \delta) = \tan n\pi \delta = n\pi \delta \quad (4.62)$$

L'última aproximació s'ha fet considerant  $n\pi \delta \ll 1$ . De manera que:

$$Z_i = Z_o \frac{\alpha \ell + jn\pi \delta}{1 + j\alpha \ell n\pi \delta} = Z_o (\alpha \ell + jn\pi \delta) = Z_o \alpha \ell (1 + j \frac{n\pi}{\alpha \ell} \delta) \quad (4.63)$$

Aquesta última expressió es pot rescriure de la forma:

$$Z_i = R_{sn} (1 + 2jQ_{sn} \delta)$$

$$\text{on} \quad R_{sn} = Z_o \alpha \ell \quad ; \quad Q_{sn} = \frac{n\pi}{2\alpha \ell} \quad (4.64)$$

que correspon a la impedància d'entrada d'un circuit ressonant en sèrie amb pèrdues.

Els valors de  $R_{sn}$  i  $Q_{sn}$  són consistents, ja que:

$$Q_{sn} = \frac{\omega_{sn} L_{sn}}{R_{sn}} = \frac{n\pi Z_o}{2Z_o \alpha \ell} = \frac{n\pi}{2\alpha \ell} \quad (4.65)$$

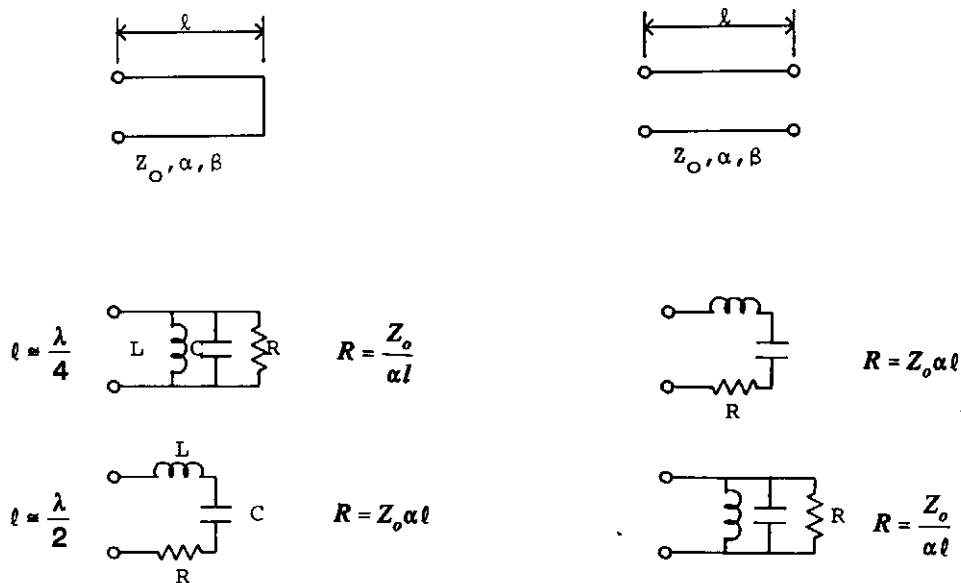


D'altra manera, el valor de  $Q_{sn}$  es pot escriure:

$$Q_{sn} = \frac{n\pi}{2\alpha\ell} = \frac{\beta\ell}{2\alpha\ell} \Big|_{\omega=\omega_{sn}} = \frac{\beta}{2\alpha} \Big|_{\omega=\omega_{sn}} \quad (4.66)$$

Aquesta expressió per al  $Q_{sn}$  és independent de  $n$ , és a dir, de l'ordre de la ressonància, i es pot comprovar que també és vàlida per a les ressonàncies en paral·lel i per a una secció de línia en circuit obert.

En conseqüència, quan la línia té pèrdues, els circuits equivalents de les figures 4.10, 4.11 i 4.12 s'han de modificar introduint resistències de valor adequat en cada circuit ressonant, de manera que proporcionin un valor de  $Q = \beta/2\alpha$ .



En tots els casos  $Q = \beta/2\alpha$

Fig. 4.18 Modificació dels circuits equivalents de la figura 4.12 per al cas de pèrdues en la línia. Els valors de  $L$  i  $C$  són els mateixos que els de la figura 4.12.

És instructiu tornar a obtenir els resultats anteriors pel procediment aproximat de calcular les pèrdues a partir de les distribucions de tensió i corrent en el cas de corrent, ideal sense

pèrdues. Tornant als exemples de línies en *c.c.* o en *c.o.* indiferentment:

$$\begin{aligned}
 P_L &= \frac{1}{2} R \int_{z_1}^{z_2} |I|^2 dz + \frac{1}{2} G \int_{z_1}^{z_2} |V|^2 dz = \\
 &= \frac{1}{2} R Y_o^2 \int_{z_1}^{z_2} |V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z}|^2 dz + \frac{1}{2} G \int_{z_1}^{z_2} |V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}|^2 dz = \\
 &= \frac{1}{2} R Y_o^2 \int_{z_1}^{z_2} (|V^+|^2 + |V^-|^2 \pm 2|V^+ V^-| \cos 2\beta z) dz + \\
 &\quad + \frac{1}{2} G \int_{z_1}^{z_2} (|V^+|^2 + |V^-|^2 \mp 2|V^+ V^-| \cos 2\beta z) dz \quad \begin{pmatrix} \pm = cc \\ \mp = co \end{pmatrix} \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

Quan la secció de línia és un múltiple enter de  $\lambda/4$ , com en els casos ressonants que estudiem, i només en aquest cas:

$$\int_{z_1}^{z_2} \cos 2\beta z dz = 0 \quad ; \quad \left( z_2 = z_1 + n \frac{\lambda}{4} \right) \quad (4.68)$$

i, en conseqüència:

$$P_L = P_L^+ + P_L^- \quad (4.69)$$

on hem definit  $P_L^\pm$ :

$$P_L^\pm = \left( \frac{1}{2} R Y_o^2 + \frac{1}{2} G \right) \int_{z_1}^{z_2} |V^\pm|^2 dz \quad ; \quad \left( z_2 = z_1 + n \frac{\lambda}{4} \right) \quad (4.70)$$

com les potències que dissiparien, per separat, l'ona positiva i la negativa.

Anàlogament, podem posar:

$$U_m = U_m^+ + U_m^- \quad ; \quad U_e = U_e^+ + U_e^- \quad ; \quad U = U^+ + U^- \quad (4.71)$$

D'altra banda, per a un c.c. o un c.o. és  $|V^+| = |V^-|$ , i en conseqüència:

$$P_L^+ = P_L^- \quad ; \quad U^+ = U^- \quad (4.72)$$

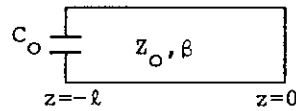
Amb totes aquestes expressions podem calcular el factor  $Q$  d'una secció múltiple enter de  $\lambda/4$ :

$$\begin{aligned} Q &= \omega_o \frac{U}{P_L} = \omega_o \frac{2U^+}{2P_L^+} = \frac{\omega_o V_E U^+}{V_E P_L^+} = \frac{\omega_o P^+}{V_E P_L^+} = \\ &= \frac{\omega_o v_P}{v_P v_E} \frac{1}{2 \frac{P_L^+}{2P^+}} = \frac{v_P \beta}{v_E 2\alpha} = \frac{v_P \beta}{v_E 2\alpha} \quad (4.73) \end{aligned}$$

En aquests càlculs hem utilitzat el concepte de velocitat de propagació de l'energia, ( $v_E = v_g$ ), i l'expressió de  $\alpha$  en funció de  $P_L^+$  i  $P^+$ . Per al cas de línia no dispersiva  $v_p = v_g = c$ , i (4.73) es redueix a (4.66).

**Exemple 1** Considerem el circuit de la figura 4.19. La condició de ressonància s'obté immediatament (vegeu la mateixa figura) però, en el cas de pèrdues, l'expressió  $Q = \beta/2\alpha$  no és vàlida ja que ara el condensador  $C_o$  contribueix a emmagatzemar energia. Per tant, per calcular  $Q$  és preferible l'energia magnètica  $U_m$ :

$$\begin{aligned} U &= 2U_m = 2 \frac{1}{4} L \int_{-l}^0 |I|^2 dz = \frac{1}{2} L Y_o^2 |V^+|^2 \int_{-l}^0 \cos^2 \beta z dz = \\ &= \frac{1}{4} L Y_o^2 |V^+|^2 \int_{-l}^0 (1 + \cos 2\beta z) dz = \\ &= \frac{1}{4} L Y_o^2 |V^+|^2 \left( l + \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta l \right) \quad (4.74) \end{aligned}$$



$$Z_I = \frac{1}{j\omega C_0}, \quad Z_D = jZ_0 \tan \beta \ell$$

$$Z_I + Z_D = 0 \rightarrow Z_0 \tan \beta \ell = \frac{1}{\omega C_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \beta \ell = \tan^{-1} \left( \frac{Y_0}{\omega C_0} \right) \rightarrow \ell < \lambda / 4$$

Fig. 4.19 Circuit resonant de l'exemple 1.

Calculem la potència dissipada avaluant (4.67) a l'interval  $(-\ell, 0)$  i tenint en compte que  $|V^+| = |V^-|$ :

$$P_L = R Y_0^2 |V^+|^2 \left( \ell + \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta \ell \right) + G |V^+|^2 \left( \ell - \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta \ell \right) \quad (4.75)$$

(4.74) i (4.75) ens permeten escriure immediatament l'expressió del factor  $Q$ . ■

**Exemple 2** A l'expressió (4.73), varem obtenir un resultat referit a una línia dispersiva. Ens podem preguntar com hem de modificar tots els resultats anteriors en el cas de dispersió, i en particular en els circuits equivalents.

Per a una línia dispersiva:

$$\beta = \frac{\omega}{v_p}, \quad \text{amb } v_p = v_p(\omega) \quad (4.76)$$

A les proximitats d'una ressonància  $(\omega_0, \beta_0)$ :

$$\begin{aligned} \beta \ell &= \beta_0 \ell + \Delta \beta \ell = \beta_0 \ell + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \Delta \omega \ell = \beta_0 \ell + \frac{\Delta \omega}{v_g} \ell = \\ &= \beta_0 \ell \left( 1 + \frac{\Delta \omega}{v_g} \frac{v_p}{\omega_0} \right) = \beta_0 \ell \left( 1 + \frac{v_p}{v_g} \delta \right) \end{aligned} \quad (4.77)$$

Aquesta expressió es diferencia de l'argument de (4.45) en el factor  $v_p/v_g$  que acompanya  $\delta$ . Per tant, si la línia té dispersió, tots els elements  $L$  i  $C$  dels circuits equivalents obtinguts anteriorment han de ser multiplicats per  $v_p/v_g$  que, per tant, ara depenen de la freqüència.

Hem de fer el mateix amb l'expressió del factor  $Q$ , com ja vàrem trobar a (4.73). En canvi, els valors dels elements resistius equivalents de les pèrdues no es modifiquen. En efecte, per a un circuit ressonant en sèrie, per exemple, abans teníem:

$$Q_{sn} = \frac{\omega_{sn} L_{sn}}{R_{sn}} \quad (4.78)$$

i ara:

$$\frac{v_p}{v_g} Q_{sn} = \frac{\omega_{sn} \left( \frac{v_p}{v_g} \right) L_{sn}}{R_{sn}} \quad (4.79)$$

■

**Exemple 3** L'expressió per al factor  $Q$  d'una secció de línia pren la forma explícita:

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\beta} = \frac{2}{\omega\sqrt{LC}} \left[ \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} + \frac{G}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} \right] = \frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} = \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C}$$

És a dir, el factor  $Q$  de la línia coincideix amb el factor  $Q$  de la seva cèl·lula elemental (fig. 3.1a). ■

## Capítol 5 Circuits de microones (I). Propietats generals Xarxes de dos accessos (quadripols)

### 5.1 Introducció

Històricament, la teoria de circuits de microones sorgeix per la necessitat de donar un tractament senzill als sistemes en guies d'ones i cavitats ressonants, que inicialment només es poden estudiar per mitjà de la seva descripció electromagnètica completa.

Per a nosaltres, que posposem aquests temes fins a la segona part del curs, la tasca consisteix a incorporar les línies de transmissió. Com que el seu funcionament es descriu en termes de tensions i de corrents, la tasca no és complicada; però la peculiaritat del seu comportament (ones positives i negatives, coeficients de reflexió, etc.) suggereix una descripció nova, anomenada paràmetres de dispersió o paràmetres  $S$ , que posa de manifest els aspectes de propagació del circuit que s'estudii.

La importància d'aquests paràmetres  $S$  és molt gran ja que, com veurem, es poden mesurar de manera més directa i senzilla que les impedàncies o les admitàncies, i permetran posteriorment incorporar amb facilitat les guies d'ona, les cavitats i altres elements al món, ben conegut per tots, de circuits equivalents analitzables en termes de tensions i corrents.

### 5.2. Definicions i propietats bàsiques

De moment, considerarem com a *circuit de microones* el circuit format per elements passius concentrats ( $R, L, C$ ), dispositius actius (transistors, díodes) i línies de transmissió. Aquestes últimes són les que tenen en compte el retard degut a una velocitat de propagació finita; és a dir, els efectes de retard seran tinguts en compte, exclusivament, mitjançant la presència de línies de transmissió, tant formant part del circuit com transportant els senyals del circuit o cap al circuit.

Atès que les línies de transmissió són elements passius lineals i recíprocs, les propietats genèriques dels circuits de microones així definides són les mateixes que les dels convencionals.

Recordem, en tot cas, que una xarxa recíproca és aquella en la qual l'intercanvi entre un generador i un mesurador, ambdós sense impedància, no produeix modificació en la lectura del mesurador. També és cert que totes les xarxes passives són recíproques; no obstant això, a freqüències de microones hi ha dispositius (aïlladors, circuladors) formats per materials magnètics (ferrites) que són passius però que no són recíprocs.

És important recalcar que la connexió d'aquest circuit amb l'exterior es realitza exclusivament mitjançant línies de transmissió, que denominarem accessos (en anglès *port*). En cada una d'aquestes línies cal fixar un pla de referència on mesurarem les tensions i els corrents,  $\{V_i, I_i, i=1, 2, \dots\}$ , que serviran per descriure les propietats de la xarxa o circuit (fig. 5.1), amb el conveni de prendre com a positiu el corrent que entra a la xarxa. D'aquesta manera, una xarxa de  $N$  accessos es descriu per les  $2N$  variables  $\{V_i, I_i\}$  de les quals només la meitat són independents.

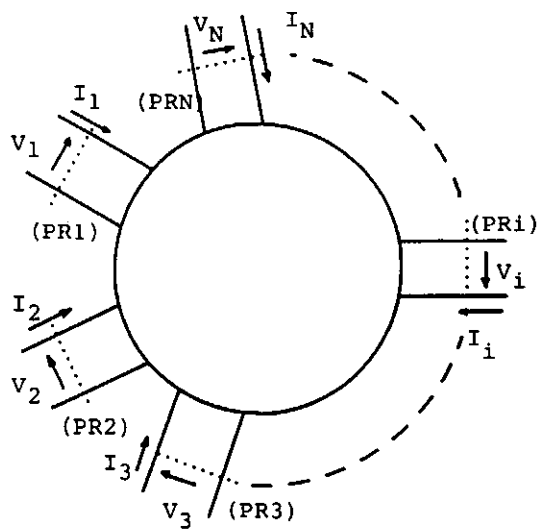
La descripció més freqüent de la xarxa es fa per mitjà de les seves matrius d'impedàncies o admitàncies:

$$\begin{aligned} [V] &= [Z][I] \\ [I] &= [Y][V] \\ [Z] &= [Y]^{-1} \quad (5.1) \end{aligned}$$

on  $[V]$  i  $[I]$  són matrius columna (vectors) de dimensió  $N$ , i  $[Z]$  i  $[Y]$  matrius quadrades  $N \times N$ :

$$[V] = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_N \end{pmatrix} ; \quad [I] = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_N \end{pmatrix} ; \quad [Z] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdot & \cdot & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdot & \cdot & Z_{2N} \\ - & - & - & - & - \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdot & \cdot & Z_{NN} \end{pmatrix}, \quad \text{etc.} \quad (5.2)$$

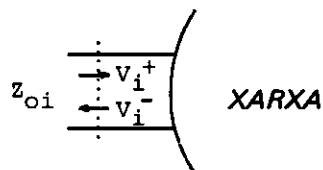
a)



-  $V_i, I_i$ : definides en el pla de referència  $i$  (PR*i*)

-  $I_i$  positiva si flueix cap a la xarxa.

b)



$$V_i = V_i^+ + V_i^-$$

$$I_i = Y_{oi} (V_i^+ - V_i^-)$$

$$\rightarrow V_i^+ = \frac{1}{2} (V_i + Z_{oi} I_i)$$

$$V_i^- = \frac{1}{2} (V_i - Z_{oi} I_i)$$

Fig. 5.1 a) Definició de tensions i corrents en els plans de referència dels accessos a la xarxa.

b) En cada línia d'accés es pren com a ona positiva la que es dirigeix cap a la xarxa.

També es poden definir matrius híbrides, que relacionen vectors mixtos, formats per tensions i corrents.

Les matrius  $[Z]$  i  $[Y]$ , en canvi, a freqüències de microones presenten els inconvenients següents:



a) Un desplaçament dels plans de referència produeix canvis en els valors de  $V_i$  i  $I_i$  governats per expressions no trivials (considereu, per exemple, la variació de la impedància en tota una línia de transmissió) i, per tant, modificacions profundes en la forma de les matrius. De manera que pot resultar molt difícil identificar dues xarxes idèntiques, però amb plans de referència diferents.

b) Els elements  $Z_{ij}$  i  $Y_{ij}$  es mesuren amb circuits oberts o amb curts circuits en els plans de referència, i a freqüències de microones:

- b.1) és difícil produir bons circuits oberts (una línia en circuit obert tendeix a emetre energia i, per tant, presenta una immitància finita);
- b.2) encara que es puguin aconseguir curts circuits i circuits oberts bons, no sempre és possible situar-los en el pla d'interès;
- b.3) en el cas de dispositius actius, un curt circuit o un circuit obert pot produir danys irreversibles, oscil·lacions o altres efectes no volguts.

### 5.3 Matriu de dispersió

Els inconvenients anteriors s'eliminen si, en comptes d'utilitzar les tensions i els corrents en els plans de referència per descriure la xarxa, utilitzem les amplituds de les ones positiva i negativa de tensió:

$$V_i = V_i^+ + V_i^- \quad (5.3)$$

$$I_i = Y_{oi}(V_i^+ - V_i^-) \quad (5.4)$$

D'aquesta manera, també tenim un conjunt de  $2N$  variables  $\{V_i^+, V_i^-, i=1,2,\dots,N\}$  relacionades linealment amb les  $\{V_i, I_i, i=1,2,\dots,N\}$ .

Abans de prosseguir cal introduir els convenis següents:

- 1) Prendrem com a ones positives, en cada accés, les que es dirigeixin cap a la xarxa (fig. 5.1b).
- 2) En comptes de les tensions i els corrents ordinaris emprarem valors normalitzats, definits mitjançant:

$$a_i = \bar{V}_i^+ = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{oi}}} = \sqrt{Y_{oi}} V_i^+ \quad ; \quad b_i = \bar{V}_i^- = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{oi}}} = \sqrt{Y_{oi}} V_i^- \quad (5.5)$$

$$\bar{I}_i^+ = \sqrt{Z_{oi}} I_i^+ = \bar{V}_i^+ \quad ; \quad \bar{I}_i^- = \sqrt{Z_{oi}} I_i^- = -\bar{V}_i^- \quad (5.6)$$

de manera que

$$\bar{V}_i = \sqrt{Y_{oi}} V_i \quad ; \quad \bar{I}_i = \sqrt{Z_{oi}} I_i \quad (5.7)$$

$$P_i^+ = \frac{|V_i^+|^2}{2 Z_{oi}} = \frac{1}{2} |\bar{V}_i^+|^2 = \frac{1}{2} |a_i|^2 \quad ; \quad P_i^- = \frac{1}{2} |\bar{V}_i^-|^2 = \frac{1}{2} |b_i|^2 \quad (5.8)$$

En funció d'aquestes variables, definirem la matriu de dispersió (en anglès, *scattering*),  $[S_{ij}]$ , mitjançant la relació:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdot & \cdot & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdot & \cdot & S_{2N} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdot & \cdot & S_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad [b] = [S][a] \quad (5.9)$$

que proporciona les amplituds (normalitzades) de les ones negatives o reflectides en funció de les amplituds de les positives o incidents.

A partir d'ara, i mentre no hi hagi risc de confusió, prescindirem dels claudàtors per denotar matrius i escriurem

$$b = S a \quad , \quad \bar{V} = S \bar{V}^+ \quad , \quad etc. \quad (5.10)$$

D'acord amb la definició, els elements  $S_{ij}$  vénen donats per:

$$S_{ii} = \left. \frac{b_i}{a_i} \right|_{a_k=0 (k \neq i)} = \left. \frac{\bar{V}_i^-}{\bar{V}_i^+} \right|_{\bar{V}_k^+ = 0 (k \neq i)} \quad (5.11)$$

$$S_{-ji} = \left. \frac{b_j}{a_i} \right|_{a_k=0 (k \neq i)} = \left. \frac{\bar{V}_j^-}{\bar{V}_i^+} \right|_{\bar{V}_k^+ = 0 (k \neq i)} \quad (5.12)$$

La condició  $a_k=0$  en el  $n$ -èsim accés s'aconsegueix, en general, situant en algun pla d'aquest accés una resistència de valor igual a la impedància característica de la línia (figura 5.2a). En aquestes condicions direm que l'accés  $n$ -èsim està *terminat* (se sol utilitzar *terminació* com a sinònim de càrrega adaptada a una línia), concepte que no s'ha de confondre amb el d'accés *adaptat* que reservarem per quan  $S_{kk}=0$ .

Amb aquesta nomenclatura, les definicions (5.11) i (5.12) dels elements  $S_{ij}$  tenen el significat:

- 1)  $S_{ii}$  és el coeficient de reflexió vist des del pla de referència  $i$ -èsim quan situem en aquest accés un generador i tots els altres estan terminats (fig. 5.2b).
- 2)  $S_{ij}$  és el coeficient de transmissió (senyal que surt en el pla de referència  $j$  dividit pel senyal que entra en el pla de referència  $i$ , en la mateixa situació anterior, és a dir, amb un generador a l'accés  $i$ , i tots els altres terminats (figura 5.2b).

Aquest significat dels elements  $S_{ij}$ , a més de proporcionar el procediment per mesurar-los, posa de manifest la desaparició dels inconvenients assenyalats a l'apartat anterior per a les matrius  $Z$  i  $Y$ , atès que:

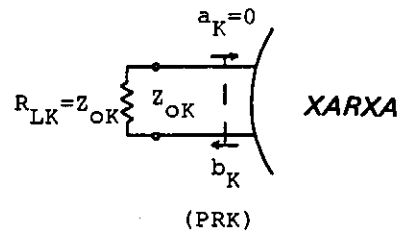
- a) Un desplaçament de plans de referència produeix només canvis de fase de les amplituds de les ones positives i negatives i, per tant, només canvis de fase en els valors de  $S_{ij}$ .
- b) La condició d'*accés terminat* és independent del pla en què se situï la terminació. Respecte als dispositius actius, el mesurament es realitza en condicions de càrrega resistiva, menys perillosa que amb un curt circuit o un circuit obert.

La consideració  $\vartheta$  es pot precisar de la manera següent: suposem que desplaçem tots els plans de referència allunyant-nos de la xarxa de manera que (fig. 5.2c):

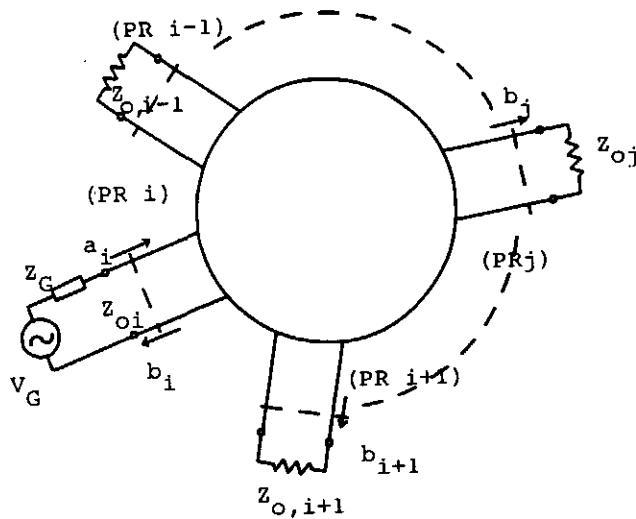
$$\beta_k \ell_k = \phi_k \quad , \quad k = 1, 2, 3 \dots N \quad (5.13)$$

$$a'_k = a_k e^{j\phi_k} \quad , \quad b'_k = b_k e^{-j\phi_k} \quad (5.14)$$

a)



b)



c)

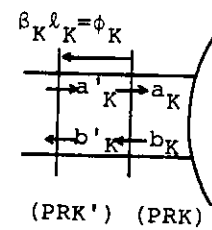


Fig. 5.2 a) Definició del concepte de **terminació** d'un accés (col·locació en la línia exterior d'una càrrega adaptada o terminació).

b) Situació utilitzada per definir els paràmetres  $S_i$  i  $S_r$

c) Desplaçament del pla de referència en l'accés  $k$ -èsim.

En aquestes condicions, tindrem:

$$S'_{ii} = \left. \frac{b'_i}{a'_i} \right|_{a'_k=0} = \left. \frac{b_i}{a_i} e^{-2j\phi_i} \right|_{a_k=0} = S_{ii} e^{-2j\phi_i} \quad (5.15)$$

$$S'_{ji} = \left. \frac{b'_j}{a'_i} \right|_{a'_k=0} = \left. \frac{b_j}{a_i} e^{-j(\phi_i + \phi_j)} \right|_{a_k=0} = S_{ji} e^{-j(\phi_i + \phi_j)} \quad (5.16)$$

**Exemple** La figura 5.3 mostra el càlcul d'una xarxa senzilla, (un quadripol en nomenclatura convencional, o 2-accessos) formada per una admitància connectada en el pla de connexió de dues línies d'impedàncies característiques diferents. Prendrem com a plans de referència a l'entrada i a la sortida el pla de connexió, si bé, per facilitar el dibuix, normalment aquest pla es desdobra en dos d'unitats amb connexions ideals sense retard.

La mateixa figura indica clarament el procediment de càlcul; primer es termina la sortida (és a dir, es carrega amb la seva impedància característica; noteu que en no haver-hi ona reflectida per la terminació, la tria del pla de connexió és irrellevant) i es calculen el coeficient de reflexió a l'entrada i  $S_{21}$ . Per a  $S_{21}$  cal establir una relació entrada-sortida que, en aquest cas, és trivial (continuïtat de tensions).

El procediment es repeteix situant a continuació una terminació (noteu que és diferent de l'anterior) a la línia d'entrada. ■

#### 5.4 Propietats de la matriu de dispersió

Si la xarxa és passiva (encara que no sigui recíproca):

$$|S_{ii}|, |S_{ji}| \leq 1 \quad (5.17)$$

ja que  $S_{ji}$  és un coeficient de reflexió, i en les condicions de definició de  $S_{ji}$  (fig. 5.2b):

$$\frac{1}{2} |b_j|^2 = |S_{ji}|^2 \frac{1}{2} |a_i|^2 \leq \frac{1}{2} |a_i|^2 \quad (5.18)$$

atès que la potència que surt ( $(1/2) |b_j|^2$ ) no pot ser més gran que la que entra ( $(1/2) |a_i|^2$ ).

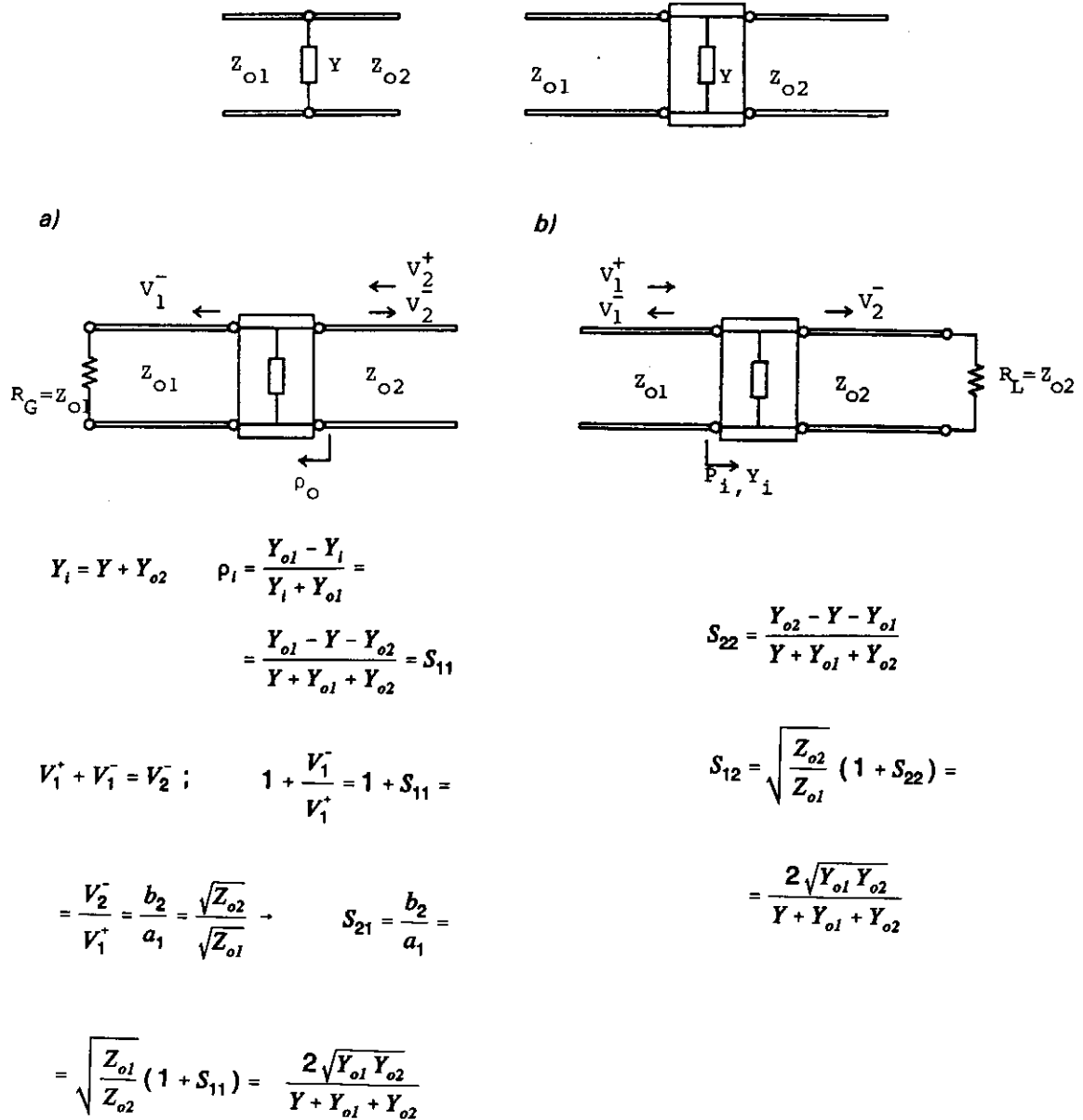


Fig. 5.3 Càlcul de la matriu de dispersió d'una xarxa (quadripol) elemental.

a) Situació, amb la sortida terminada, per al càlcul de  $S_{11}$  i  $S_{21}$ .

b) Situació, ara amb l'entrada terminada, per al càlcul de  $S_{22}$  i  $S_{12}$ .

(Les línies de traçat senzill representen connexions ideals, sense retard; és a dir, l'entrada i la sortida corresponen al mateix pla físic).

Si a més de ser passiva la xarxa no té pèrdues, la potència que entra i la que surt amb generadors arbitraris han de ser iguals:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} |b_i|^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} |a_i|^2 \quad (5.19)$$

Però:

$$\sum_{i=1}^N |b_i|^2 = (b_1^*, b_2^* \dots b_N^*) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_N \end{pmatrix} = [b]^* [b] = b^* b \quad (5.20)$$

on el signe + significa matriu adjunta o conjugada hermitiana, i és igual a la conjugada complexa de la transposada:

$$A^+ = (A^t)^* \quad (5.21)$$

Per tant, podem tornar a escriure (5.19):

$$\begin{aligned} b^* b &= a^* a \quad \rightarrow \quad a^* S^+ S a - a^* a = 0 \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad a^* (S^+ S - 1) a = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

on 1 representa la matriu unitat d'ordre  $N \times N$ . Com que (5.22) s'ha de complir per a qualsevol vector  $a$  arbitrari (podem canviar les seves components a voluntat, manipulant els generadors exteriors) se segueix la condició d'unitarietat:

$$S^+ S = 1 \quad ; \quad S^+ = S^{-1} \quad ; \quad S S^+ = 1 \quad (5.23)$$

És a dir:

$$S^+ S = \begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* & & S_{N1}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & \dots & S_{N2}^* \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ S_{1N}^* & S_{2N}^* & & S_{NN}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2N} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ S_{N1} & S_{N2} & \dots & S_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 + \dots + |S_{N1}|^2 = 1$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 + \dots + |S_{N2}|^2 = 1$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5.25)$$

$$|S_{1N}|^2 + |S_{2N}|^2 + \dots + |S_{NN}|^2 = 1$$

$$S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} + \dots + S_{N1}^* S_{N2} = 0$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$S_{11}^* S_{1N} + S_{21}^* S_{N2} + \dots + S_{N1}^* S_{NN} = 0 \quad (5.26)$$

$$S_{12}^* S_{13} + S_{22}^* S_{23} + \dots + S_{N2}^* S_{N3} = 0$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

O el que és igual, el mòdul de cada vector de  $S$  val la unitat, i el producte escalar d'un vector columna per un altre de paral·lel és zero (si haguéssim partit de  $S \cdot S^+ = 1$  en comptes de  $S^+ S = 1$ , hauríem obtingut les mateixes conclusions per a vectors fila en comptes de columna). Aquesta condició d'unitarietat proporciona un nombre molt elevat d'equacions, evidentment no totes independents. Però, en tot cas, imposen restriccions fortes en el nombre de paràmetres  $S_y$  lliures (és a dir, que es puguin escollir arbitràriament).



**Exemple 1** Considerem un 2-accessos (quadripol) passiu i sense pèrdues (però no necessàriament recíproc). Posem:

$$[S] = \begin{pmatrix} a e^{j\phi_1} & b e^{j\phi_2} \\ c e^{j\phi_3} & d e^{j\phi_4} \end{pmatrix} \quad |a|, |b|, |c|, |d| \leq 1 \quad (5.27)$$

En virtut de la unitarietat:

$$a^2 + b^2 = 1 \quad , \quad c^2 + d^2 = 1 \quad , \quad a^2 + c^2 = 1 \quad , \quad b^2 + d^2 = 1 \quad (5.28)$$

de manera que podem escriure:

$$[S] = \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \sin \tau e^{j\phi_2} \\ \sin \tau e^{j\phi_3} & \cos \tau e^{j\phi_4} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

També per unitarietat:

$$\cos \tau \sin \tau (e^{j(\phi_1 - \phi_3)} + e^{j(\phi_2 - \phi_4)}) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_1 - \phi_3 = \phi_2 - \phi_4 + \pi \quad (5.30)$$

i ens queda finalment:

$$[S] = \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \sin \tau e^{j\phi_2} \\ \sin \tau e^{j\phi_3} & -\cos \tau e^{j(\phi_2 - \phi_1 + \phi_3)} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

expressió més general per a aquest quadripol. Noteu que dels 8 paràmetres inicials (4 nombres complexos) només quatre ( $\tau$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  i  $\phi_3$ ) són lliures. ■

Ens queden per establir les relacions entre la matriu  $S$  i les  $Z$  i  $Y$ .

Si definim les matrius diagonals:

$$\sqrt{Z_o} = \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{o1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{o2}} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & \dots & \dots & \sqrt{Z_{oN}} \end{pmatrix} \quad \sqrt{Y_o} = (\sqrt{Z_o})^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{Y_{o1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{o2}} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & \dots & \dots & \sqrt{Y_{oN}} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

podem tornar a escriure les relacions (5.5), (5.6) i (5.7) de la manera següent:

$$\begin{aligned} a &= \bar{V}^+ = \sqrt{Y_o} V^+ \quad ; \quad b = \bar{V}^- = \sqrt{Y_o} V^- \\ \bar{V} &= \sqrt{Y_o} V \quad ; \quad \bar{I}^+ = \sqrt{Z_o} I^+ = a \\ \bar{I}^- &= \sqrt{Z_o} I^- \quad ; \quad \bar{I} = \sqrt{Z_o} I \end{aligned} \quad (5.33)$$

Es poden definir matrius d'impedàncies i admitàncies normalitzades:

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I} \quad , \quad \bar{I} = \bar{Y} \bar{V} \quad , \quad \bar{Y} = \bar{Z}^{-1} \quad (5.34)$$

relacionades amb les ordinàries mitjançant:

$$\begin{aligned} \sqrt{Y_o} V &= \bar{Z} \sqrt{Z_o} I \quad \rightarrow \quad V = \sqrt{Z_o} \bar{Z} \sqrt{Z_o} I \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad Z &= \sqrt{Z_o} \bar{Z} \sqrt{Z_o} \quad ; \quad \bar{Z} = \sqrt{Y_o} Z \sqrt{Y_o} \\ Y &= \sqrt{Y_o} \bar{Y} \sqrt{Y_o} \quad ; \quad \bar{Y} = \sqrt{Z_o} Y \sqrt{Z_o} \end{aligned} \quad (5.35)$$

D'altra banda, tenim que:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{V}^+ + \bar{V}^- = a + b = (1+S) a \quad ; \quad 2a = \bar{V} + \bar{I} = (\bar{Z}+1) \bar{I} \\ \bar{I} &= \bar{I}^+ + \bar{I}^- = a - b = (1-S) a \quad ; \quad 2b = \bar{V} - \bar{I} = (\bar{Z}-1) \bar{I} \end{aligned} \quad (5.36)$$

és a dir:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= (1+S)(1-S)^{-1}\bar{I} \quad \rightarrow \quad \bar{Z} = (1+S)(1-S)^{-1} \\ b &= (\bar{Z}-1)(\bar{Z}+1)^{-1}a \quad \rightarrow \quad S = (\bar{Z}-1)(\bar{Z}+1)^{-1}\end{aligned}\quad (5.37)$$

i anàlogament:

$$\bar{Y} = (1-S)(1+S)^{-1} \quad ; \quad S = (1-\bar{Y})(1+\bar{Y})^{-1} \quad (5.38)$$

Aquestes relacions són fàcils de recordar ja que, en el cas de dimensió 1 ( $N=1$ , xarxa d'1-accés), la matriu  $S$  es redueix a un escalar que coincideix amb el coeficient de reflexió  $\rho$ , i en aquest cas:

$$\rho = \frac{\bar{Z}-1}{\bar{Z}+1} = \frac{1-\bar{Y}}{1+\bar{Y}} \quad ; \quad \bar{Z} = \frac{1+\rho}{1-\rho} \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{1-\rho}{1+\rho} \quad (5.39)$$

Ahora, heu d'observar que a (5.37) i a (5.38) els productes de matrius commuten; en efecte, si prenem, per exemple:

$$\begin{aligned}S &= (\bar{Z}-1)(\bar{Z}+1)^{-1} = \{[\bar{Z}]+[1]-2[1]\}\{[\bar{Z}]+[1]\}^{-1} = \\ &= [1]-2\{[\bar{Z}]+[1]\}^{-1} = (\bar{Z}+1)^{-1}(\bar{Z}+1)-2(\bar{Z}+1)^{-1} = \\ &= \{[\bar{Z}]+[1]\}^{-1}\{[\bar{Z}]+[1]-2[1]\} = (\bar{Z}+1)^{-1}(\bar{Z}-1)\end{aligned}\quad (5.41)$$

Si la xarxa és recíproca, sabem que  $Z$  i  $Y$  són simètriques:

$$Z = Z' \quad ; \quad Y = Y' \quad (5.40)$$

cosa que implica la simetria de  $Z$  i  $Y$ :

$$\bar{Z}' = (\sqrt{Y_o} Z \sqrt{Y_o})' = \sqrt{Y_o} Z \sqrt{Y_o} = \bar{Z} \quad , \text{ etc.} \quad (5.41)$$

i la de  $S$ :

$$\begin{aligned} S' &= \{(\bar{Z}-1)(\bar{Z}+1)^{-1}\}^t = \{(\bar{Z}+1)^{-1}\}^t (\bar{Z}-1)^t = \\ &= (\bar{Z}+1)^{-1} (\bar{Z}-1) = S \end{aligned} \quad (5.42)$$

Aquesta propietat de simetria de la matriu  $S$  quan la xarxa és recíproca és molt important perquè redueix el nombre de paràmetres que s'han de mesurar o de calcular a la xarxa. Si aquesta, a més, és sense pèrdues, la reducció és encara més gran.

**Exemple 2** Si fem que el quadripol de l'exemple anterior (que és passiu sense pèrdues) sigui també recíproc, la seva matriu  $S$  queda reduïda a:

$$S = \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \sin \tau e^{j\phi_2} \\ \sin \tau e^{j\phi_2} & -\cos \tau e^{j(2\phi_2 - \phi_1)} \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

Si a més el quadripol és simètric, és a dir, si  $S_{11} = S_{22}$ , llavors  $\phi_1 = 2\phi_2 - \phi_1 \pm \pi \rightarrow \phi_2 = \phi_1 \pm \pi/2$  i:

$$S = \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \pm \sin \tau e^{j\phi_1} \\ \pm j \sin \tau e^{j\phi_1} & \cos \tau e^{j\phi_1} \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Noteu que qualsevol quadripol recíproc i sense pèrdues es pot convertir en simètric mitjançant un canvi de plans de referència. En efecte, si allunyem el pla 2 la longitud  $\ell_2$  tal que  $\beta_2 \ell_2 = \phi_2' = \phi_2 - \phi_1 \pm \pi/2$ , (5.44) canvia a:

$$\begin{aligned} S' &= \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \sin \tau e^{j(\phi_2 - \phi_2')} \\ \sin \tau e^{j(\phi_2 - \phi_2')} & -\cos \tau e^{j(2\phi_2 - \phi_1 - 2\phi_2')} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \pm \sin \tau e^{j\phi_1} \\ \pm j \sin \tau e^{j\phi_1} & \cos \tau e^{j\phi_1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Encara més, si ara movem els plans 1 i 2 de manera que  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_2/2$ , (5.46) queda:

$$S' = \begin{pmatrix} \cos \tau & \pm j \sin \tau \\ \pm j \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

que és l'expressió general de la matriu  $S$  per a un quadripol recíproc i sense pèrdues, referit a aquells plans de referència que facin que  $S_{11}$  i  $S_{22}$  siguin reals. ■

**Exemple 3** Comprovem com a exercici els resultats anteriors per a la xarxa analitzada a l'exemple de l'apartat 5.3 (fig. 5.3). Tenim:

$$S_{11} = \frac{Y_{o1} - Y_{o2} - Y}{Y + Y_{o1} + Y_{o2}} \quad S_{22} = \frac{Y_{o2} - Y_{o1} - Y}{Y + Y_{o1} + Y_{o2}}$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{2\sqrt{Y_{o1}Y_{o2}}}{Y + Y_{o1} + Y_{o2}} \quad (5.48)$$

La verificació de reciprocitat (5.43) és automàtica. La identificació amb la forma (5.47) no és tan evident quan l'admitància  $Y$  és reactiva (quadripol sense pèrdues),  $Y = jB$ :

$$S_{11} = \frac{Y_{o1} - Y_{o2} - jB}{Y_{o1} + Y_{o2} + jB} = \sqrt{\frac{(Y_{o1} - Y_{o2})^2 + B^2}{(Y_{o1} + Y_{o2})^2 + B^2}} e^{j\phi_1} \quad (5.49)$$

$$\angle S_{11} = \phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-B}{Y_{o1} - Y_{o2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) \quad (5.50)$$

Es comprova fàcilment que

$$|S_{11}| = |S_{22}| = \cos \tau \quad (5.51)$$

$$|S_{12}|^2 = \frac{4 Y_{o1} Y_{o2}}{(Y_{o1} + Y_{o2})^2 + B^2} = 1 - |S_{11}|^2 = 1 - \cos^2 \tau = \sin^2 \tau \quad (5.52)$$

$$\underline{S}_{12} = -\tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) = \phi_2 \quad (5.53)$$

$$\underline{S}_{22} = \tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o2} - Y_{o1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{-B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) \quad (5.54)$$

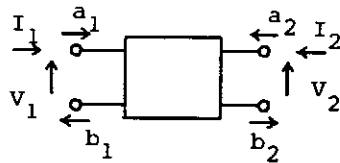
$$\underline{S}_{11} + \underline{S}_{22} = \pi - 2 \tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) = \pi - 2 \phi_1 \quad (5.55)$$

■

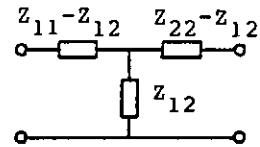
## 5.5 Xarxes de dos accessos

Les anomenarem més breument 2-accessos, i es corresponen amb el concepte familiar de quadripol. La seva definició en termes de matrius d'impedàncies o admittàncies admet, en el cas recíproc, els circuits equivalents coneguts de les figures 5.4b i 5.4c. Recordeu que quan fem paràmetres de dispersió o bé tensions i corrents normalitzats és essencial conèixer les impedàncies característiques de referència a l'entrada i a la sortida,  $Z_{o1}$  i  $Z_{o2}$ .

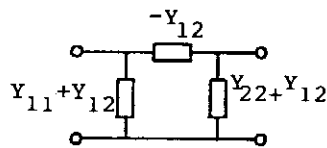
a)



b)



c)



$$V = Z \cdot I \text{ o bé } \bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

$$I = Y \cdot V \text{ o bé } \bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{V}$$

Fig. 5.4 Definició de les magnituds bàsiques d'un 2-accessos (quadripol) i circuits equivalents en T i en pi en el cas de reciprocitat.

Una propietat coneguda de les matrius  $Z$  i  $Y$  és que permeten el càlcul directe per suma de les matrius de quadripols connectats en sèrie (fig. 5.5a) o en paral·lel (fig. 5.5b). Més endavant, veurem que el càlcul de matrius globals de quadripols en cascada es pot realitzar mitjançant el producte de matrius, cosa que permet establir procediments d'anàlisi de xarxes complexes molt potents mitjançant la manipulació de matrius.

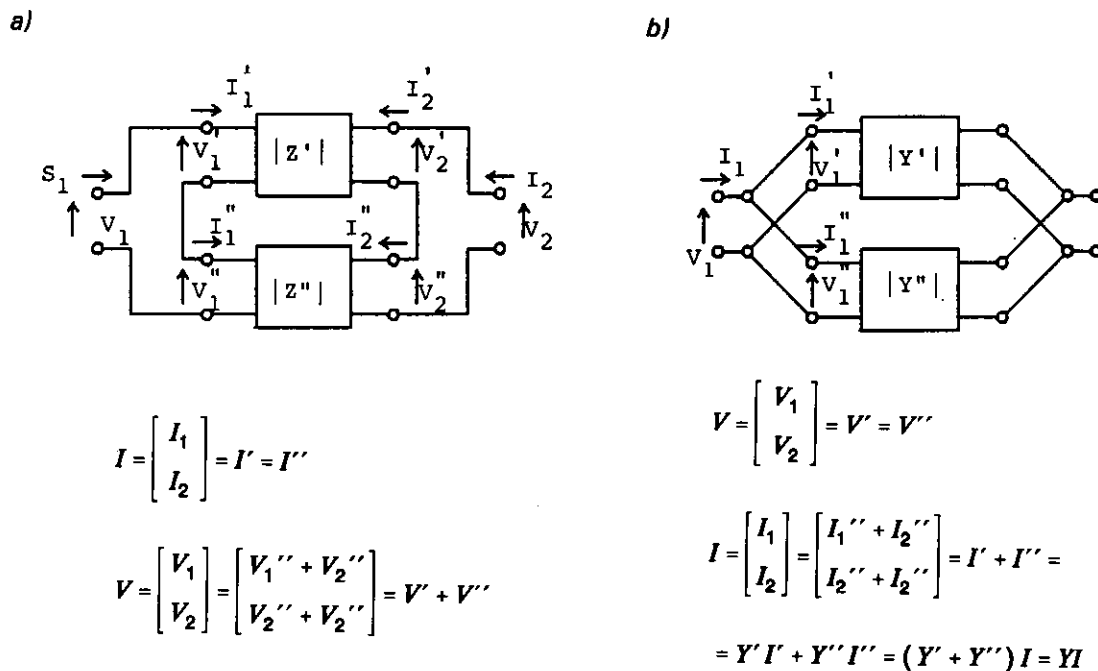


Fig. 5.5 La matriu  $Z$  de dos 2-accessos en sèrie (a) és la suma de les matrius components, i el mateix succeeix amb les matrius  $Y$  en el cas de connexió en paral·lel (b).

**Exemple 1** Calculem la matriu d'admitàncies d'una secció de línia de transmissió de longitud  $l$  i admitància característica  $Y_0$  (fig. 5.6):

$$I_1 = Y_{11} V_1 = Y_{12} V_2 \quad (5.56a)$$

$$I_2 = Y_{12} V_1 + Y_{22} V_2 \quad (5.56b)$$

Immediatament, obtenim:

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = -jY_0 \cotan \phi = Y_{22} \quad (\phi = \beta \ell) \quad (5.57)$$

Per a  $Y_{12}$  tenim:

$$Y_{12} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

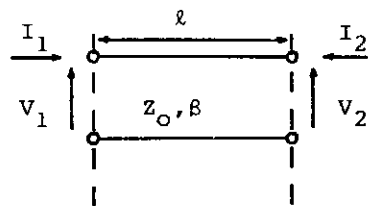
Però quan  $V_2=0$  (curt circuit a la sortida) les distribucions de  $V$  i  $I$  en la línia, amb l'origen en l'accés 2, són:

$$V(z) = -2jV^+ \sin(\beta z) \quad ; \quad V_1 = V(-\ell) = 2jV^+ \sin \phi \quad (5.58a)$$

$$I(z) = 2V^+ Y_0 \cos(\beta z) \quad ; \quad I_2 = -I(0) = -2V^+ Y_0 \quad (5.58b)$$

i obtenim immediatament:

$$Y_{12} = j \frac{Y_0}{\sin \phi} \quad ; \quad Y = \frac{jY_0}{\sin \phi} \begin{pmatrix} -\cos \phi & 1 \\ 1 & -\cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.59)$$



$$\beta \ell = \phi$$

$$[Y] = \frac{jY_0}{\sin \phi} \begin{bmatrix} -\cos \phi & 1 \\ 1 & -\cos \phi \end{bmatrix}$$

Fig. 5.6 Secció de línia de transmissió de longitud  $\ell$  i matriu  $Y$ .



De manera anàloga, o bé per inversió de  $Y$ , s'obté la matriu d'impedàncies:

$$Z = \frac{-jZ_o}{\sin\phi} \begin{pmatrix} \cos\phi & 1 \\ 1 & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

■

L'exemple anterior presenta dues situacions interessants:

a)  $l = \lambda/4$ . En aquest cas  $\phi = \pi/2$  i:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & jY_o \\ jY_o & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & -jZ_o \\ -jZ_o & 0 \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

b)  $l = 3\lambda/4$ . Ara és  $\phi = 3\pi/2$  i:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -jY_o \\ -jY_o & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & jZ_o \\ jZ_o & 0 \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

situacions que admeten els circuits equivalents en  $T$  i en  $\pi$  de la figura 5.7a. Alhora, aquests permeten establir, per a una xarxa arbitrària donada per la seva matriu d'impedàncies o admitàncies, els circuits equivalents de la figura 5.7b, formats per una secció de línia en  $\lambda/4$  o  $3\lambda/4$ , i dues immitàncies en sèrie o en paral·lel a l'entrada i a la sortida.

En aquests circuits, l'elecció de la longitud de línia ( $\lambda/4$  o  $3\lambda/4$ ) s'ha de fer en funció de la realitzabilitat física de les longituds; és a dir,  $Z_o$  i  $Y_o$  han de tenir part real (resistiva o conductiva) positiva. El cas més interessant és el de xarxes amb  $Y_{12}$  ( $Z_{12}$ ) imaginaris, que proporcionen línies de transmissió sense pèrdues ( $Z_o$  i  $Y_o$  reals).

Tampoc no heu d'oblidar que l'equivalència entre els circuits de la figura 5.7b es compleix només per a aquella freqüència en què les línies tenen una longitud definida; és a dir, el procediment de síntesi d'un 2-accessos a partir de la seva matriu  $Z$  o  $Y$  establert anteriorment és vàlid només per a una freqüència fixa.

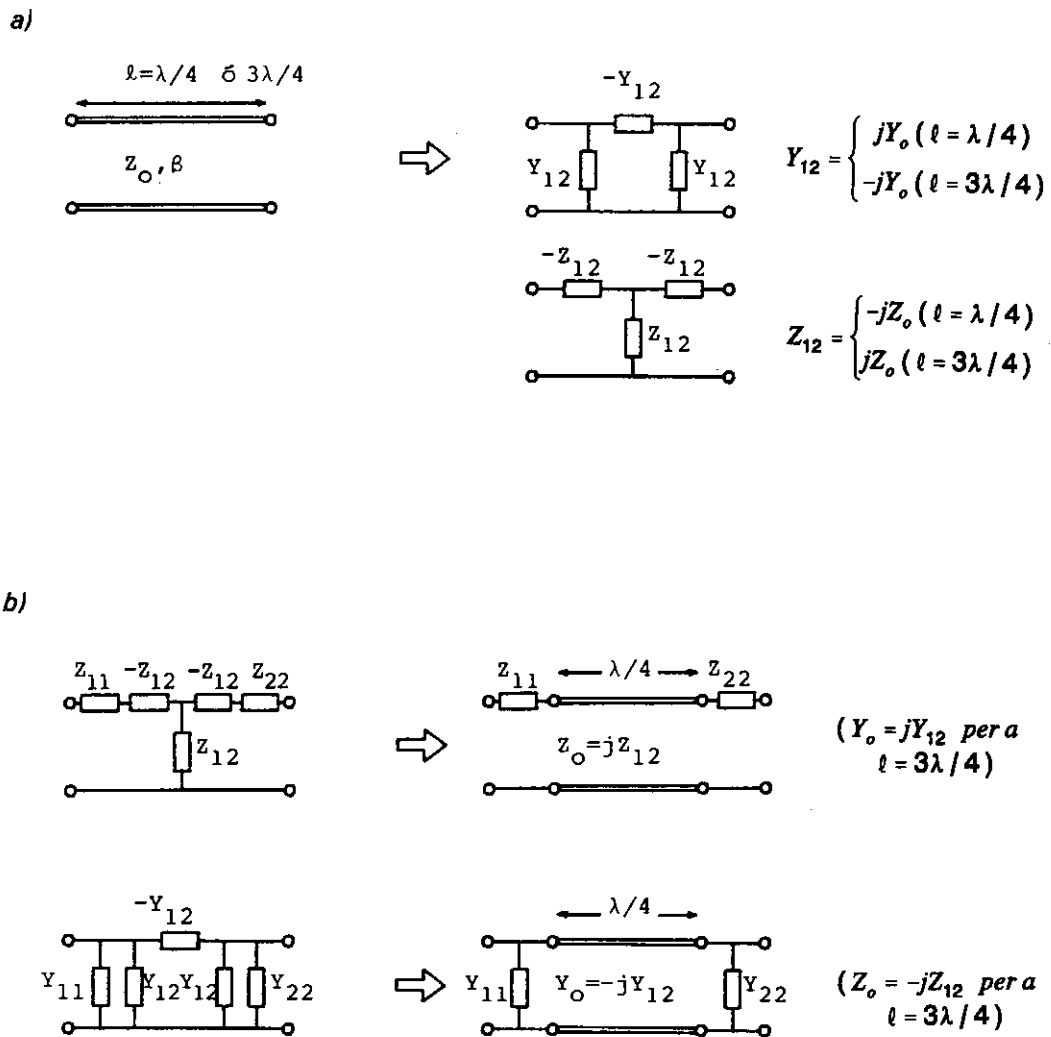


Fig. 5.7 a) Circuits equivalents d'una línia de transmissió en  $\lambda/4$  o en  $3\lambda/4$ .

b) Utilització del resultat anterior per sintetitzar xarxes recíproques arbitràries, a una freqüència donada, mitjançant línies de transmissió en  $\lambda/4$  o en  $3\lambda/4$ .

**Exemple 2** Considerem un 2-accessos recíproc i sense pèrdues donat per la seva matriu d'impedàncies  $Z$ . La potència total d'entrada en la xarxa valdrà (fig. 5.4a):

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (V_1 I_1^* + V_2 I_2^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (I^* V) = \frac{1}{4} (I^* V + V^* I) = \\
 &= \frac{1}{4} (I^* Z I + I^* Z^* I) = \frac{1}{4} I^* (Z + Z^*) I \quad (5.63)
 \end{aligned}$$

Atès que suposarem la xarxa sense pèrdues,  $P=0$  amb independència del valor particular del vector arbitrari  $I$ , de forma que:

$$Z + Z^* \equiv |0| \quad (\text{o també, } Y + Y^* \equiv |0|)$$

És a dir, els elements de la matriu  $Z$  (o bé  $Y$ ) han de ser imaginaris; per tant, qualsevol 2-accessos recíproc i sense pèrdues es pot sintetitzar, a una freqüència donada, mitjançant una secció de línia ideal en  $\lambda/4$  o  $3\lambda/4$  i dues reactàncies (que, al seu torn, es poden realitzar amb línies de transmissió ideal en circuit obert o en curt circuit (fig. 5.8). ■

A continuació, calculem les expressions més importants d'un 2-accessos en funció dels seus paràmetres de dispersió:

1) Impedància (coeficient de reflexió) a l'entrada.

Partim de la relació bàsica:

$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$$

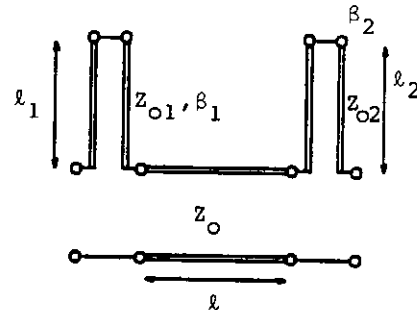
Si la sortida (pla 2 a la figura 5.4a) està carregada amb una impedància  $Z_L$ , llavors:

$$\frac{a_2}{b_2} = \rho_L = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}}$$

i a l'entrada:

$$\rho_i = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + S_{12} \frac{a_2}{a_1} \quad \text{però} \quad \frac{b_2}{a_2} = \frac{1}{\rho_L} = S_{21} \frac{a_1}{a_2} + S_{22}$$

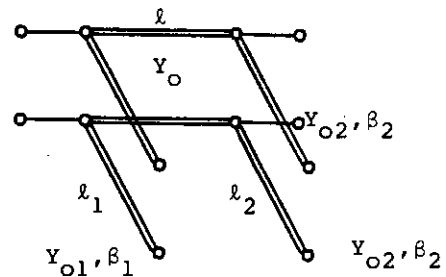
$$Z = \begin{bmatrix} jX_{11} & jX_{12} \\ jX_{12} & jX_{22} \end{bmatrix} \rightarrow$$



$$Z_o = -X_{12} \quad (\ell = \lambda/4) \quad \text{o} \quad +X_{12} \quad (\ell = \lambda/4)$$

$$X_{11} = Z_{o1} \tan \beta_1 \ell_1 \quad X_{22} = Z_{o2} \tan \beta_2 \ell_2$$

$$Y = \begin{bmatrix} jB_{11} & jB_{12} \\ jB_{12} & jB_{22} \end{bmatrix} \rightarrow$$



$$Y_o = B_{12} \quad (\ell = \lambda/4) \quad \text{o} \quad -B_{12} \quad (\ell = 3\lambda/4)$$

$$B_{11} = Y_{o1} \tan \beta_1 \ell_1 \quad B_{22} = Y_{o2} \tan \beta_2 \ell_2$$

Fig. 5.8 Síntesi de 2-accessos recíprocs i sense pèrdues (reactius) mitjançant seccions de línia de transmissió ideals (vegeu l'exemple 2 del text). Noteu que en cada síntesi la tria de c.c. o bé c.o. és arbitrària i que, en tot cas, hi ha un grau de llibertat per fixar arbitràriament dos dels quatre paràmetres ( $Z_{o1}$ ,  $\ell_1$ ,  $Z_{o2}$ ,  $\ell_2$ ).

d'on es pot aïllar el quocient  $a_2/a_1$ , i, finalment, s'obté:

$$\rho_i = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_L}{1 - S_{22} \rho_L} \quad (5.64)$$

2) Impedància (coeficient de reflexió) a la sortida.

La situació és anàloga al cas anterior. Si la impedància del generador és  $Z_s$  i:

$$\rho_s = \frac{Z_s - Z_{01}}{Z_s + Z_{01}}$$

a la sortida tindrem:

$$\rho_o = \frac{b_2}{a_2} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_s}{1 - S_{11} \rho_s} \quad (5.65)$$

3) Guany de transferència de potència  $G_T$  (*Transducer power gain*).

Quan un 2-accessos està carregat, per un costat, amb un generador i, per l'altre, amb una impedància (de càrrega), es defineix la  $G_T$  com el quocient:

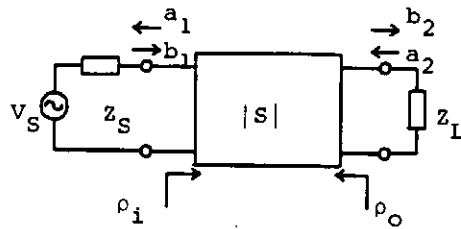
$$G_T = \frac{\text{Potència lliurada a la càrrega}}{\text{Potència disponible del generador}} = \frac{P_L}{P_{avs}} \quad (5.66)$$

essent  $P_{avs}$  la potència lliurada pel generador a una impedància igual a  $Z_s^*$  (la conjugada de la seva impedància interna).

A la figura 5.9 es resumeixen els càlculs bàsics necessaris per calcular  $P_{avs}$  i  $G_T$ . La potència lliurada pel generador a una càrrega (impedància)  $Z_i$  val:

$$P_s = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |\rho_i|^2) = \frac{1}{2} |b_s|^2 \frac{1 - |\rho_i|^2}{|1 - \rho_i \rho_s|^2} \quad (5.67)$$

$$\text{amb } b_s = \frac{V_s \sqrt{Z_{01}}}{Z_s + Z_{01}} \quad (5.68)$$



$$a_1 = \frac{V_1^*}{\sqrt{Z_{o1}}}$$

$$V_1^* = \frac{V_s Z_{o1}}{Z_s + Z_{o1}} \frac{1}{1 - \rho_i \rho_s}$$

$$a_1 = \frac{V_s \sqrt{Z_{o1}}}{Z_s + Z_{o1}} \frac{1}{1 - \rho_i \rho_s} = \frac{b_s}{1 - \rho_i \rho_s}$$

Potència lliurada pel generador  $P_S$ :

$$P_S = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |\rho_1|^2) = \frac{1}{2} |b_s|^2 \frac{1 - |\rho_1|^2}{|1 - \rho_i \rho_s|^2}$$

Potència disponible del generador  $P_{avs}$ :

$$P_{avs} = P_S |_{\rho_i = \rho_s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|b_s|^2}{1 - |\rho_s|^2}$$

Potència lliurada a la càrrega  $P_L$ :

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\rho_L|^2)$$

Guany de transferència de potència  $G_T$ :

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \frac{|b_2|^2}{|b_s|^2} (1 - |\rho_L|^2) (1 - |\rho_s|^2) = \frac{|b_2|^2}{|a_1|^2} \frac{(1 - |\rho_L|^2)(1 - |\rho_s|^2)}{|1 - \rho_i \rho_s|^2}$$

Calculant  $b_2/a_1$ , i  $\rho_s$  s'obté l'expressió final

$$G_T = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |\rho_s|^2) (1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - S_{11} \rho_s)(1 - S_{22} \rho_L) - S_{12} S_{21} \rho_s \rho_L|^2}$$

Fig. 5.9 Circuit i càlculs bàsics utilitzats per obtenir l'expressió del guany de transferència de potència.

$P_{avs}$  s'obté de l'expressió anterior fent  $\rho_i = \rho_s$ :

$$P_{avs} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|b_s|^2}{1 - |\rho_s|^2} \quad (5.69)$$

D'altra banda:

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\rho_L|^2)$$

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \frac{|b_2|^2 (1 - |\rho_L|^2) (1 - |\rho_s|^2)}{|a_1|^2 |1 - \rho_i \rho_s|^2}$$

Per completar l'expressió que busquem, cal substituir en l'anterior valors explícits per a  $b_2/a_1$  i  $\rho_i$  en funció dels paràmetres de dispersió:

$$\rho_i = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_L}{1 - S_{22} \rho_L}$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \rightarrow 1 = S_{21} \frac{a_1}{b_2} + S_{22} \frac{a_2}{b_2} = S_{21} \frac{a_1}{b_2} + S_{22} \rho_L \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{b_2}{a_1} = \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \rho_L}$$

i obtenim, finalment:

$$G_T = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |\rho_s|^2) (1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - S_{11} \rho_s)(1 - S_{22} \rho_L) - S_{12} S_{21} \rho_s \rho_L|^2} \quad (5.70)$$

Aquesta expressió serà més endavant el punt de partida en estudiar els amplificadors amb transistors.

**Exemple 3. Atenuadors**

Idealment, un atenuador és un element que, a més de reduir els nivells del senyal transmès en una quantitat prefixada, hauria de:

- a) Respectar les condicions d'adaptació (de generador i càrrega) del sistema en el qual és inserit.
- b) No introduir desfasaments no volguts, especialment si aquests canviessin amb la freqüència.

Les condicions anteriors se satisfan si la matriu de dispersió de l'atenuador és de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\gamma} \\ e^{-\gamma} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.71)$$

amb  $\gamma$  real menor que la unitat, ja que llavors:

$$\rho_I = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_L}{1 - S_{22} \rho_L} = e^{-2\gamma} \rho_L \quad ; \quad \rho_I = 0 \quad \text{si} \quad \rho_L = 0 \quad (5.72a)$$

$$\rho_O = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_S}{1 - S_{11} \rho_S} = e^{-2\gamma} \rho_S \quad ; \quad \rho_O = 0 \quad \text{si} \quad \rho_S = 0 \quad (5.72b)$$

Al mateix temps:

$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 = e^{-\gamma} a_2 \quad (5.73a)$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 = e^{-\gamma} a_1 \quad (5.73b)$$

i llavors:

$$G_T = \frac{e^{-2\gamma} (1 - |\rho_S|^2) (1 - |\rho_L|^2)}{|1 - e^{-2\gamma} \rho_S \rho_L|^2} \quad (5.74)$$



L'atenuació es defineix en condicions d'adaptació ( $\rho_s = \rho_L = 0$ ) com:

$$L(\text{dB}) = -10 \log G_T = -10 \log e^{-2\gamma} = 20\gamma \log e = 8.686\gamma \quad (5.75)$$

Una manera senzilla de fabricar atenuadors que compleixin aquestes condicions és amb xarxes resistives en  $T$  o en  $\pi$ , com s'indica a la figura 5.10. Amb relació a la xarxa en  $T$  (fig. 5.10a), la condició de  $S_{11} = 0$  és la mateixa que tenir impedància d'entrada igual a la de referència ( $Z_i = 1$ ) quan la sortida està terminada ( $Z_L = 1$ ):

$$\begin{aligned} Z_i = R_s + R' &= R_s + \frac{R_p(R_s + 1)}{R_p + R_s + 1} = 1 \quad \rightarrow \\ \rightarrow R_s(R_s + R_p) &= 1 \quad \rightarrow R_p = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_s} - R_s \right) \quad (5.76) \end{aligned}$$

Per al càlcul de  $S_{21} = S_{12}$  (fig. 5.10a):

$$S_{21} = \left. \frac{V_2^-}{V_1^+} \right|_{V_2^+ = 0}$$

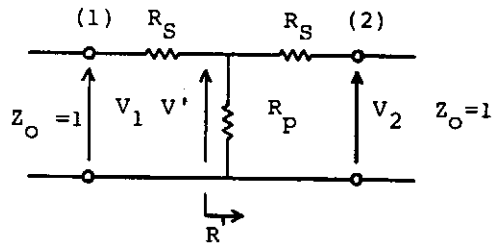
Però, amb la sortida terminada ( $V_2^+ = 0$ ) l'entrada està també adaptada ( $V_1^- = 0$ ) i  $V_1^+ = V_1$  per tant:

$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{V'} \cdot \frac{V'}{V_1} = \frac{1}{(1+R_s)} \cdot \frac{R'}{(R'+R_s)} = \frac{1}{1+R_s} \cdot \frac{1-R_s}{1} = \frac{1-R_s}{1+R_s} \quad (5.77)$$

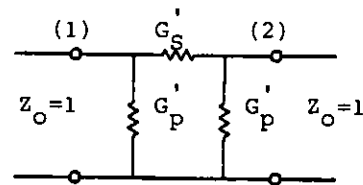
$$L(\text{dB}) = -20 \log S_{21} = 20 \log \left( \frac{1+R_s}{1-R_s} \right) \quad \rightarrow \quad R_s = \frac{10^{\frac{L}{20}} - 1}{10^{\frac{L}{20}} + 1} \quad (5.78)$$

Els càlculs per a la xarxa en  $\pi$  (dual a l'anterior) són completament similars, i l'anàlisi es pot estendre fàcilment al cas d'impedàncies d'entrada i sortida diferents.

a)



b)



Condicció d'adaptació:

$$(S_{11} = S_{22} = 0)$$

$$R_p = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_s} - R_s \right)$$

$$G'_s = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G'_p} - G'_p \right)$$

Valor d'atenuació  $L(\text{dB})$ :

$$L(\text{dB}) = 20 \log \left( \frac{1 + R_s}{1 - R_s} \right)$$

$$L(\text{dB}) = 20 \log \left( \frac{1 + G'_p}{1 - G'_p} \right)$$

Fig. 5.10 Realització d'atenuadors mitjançant xarxes resistives en  $T$  i en  $\pi$ . Advertiu que posar  $Z_0 = 1$  és el mateix que suposar que els valors de  $R_s$ ,  $R_p$ ,  $G'_s$  i  $G'_p$  estan normalitzats a la impedància de referència.

Una propietat interessant dels atenuadors és que redueixen en el factor  $e^{-2\gamma}$  els coeficients de reflexió, cosa que els fa útils per protegir generadors sensibles a reflexions fortes, si bé s'ha de pagar el preu de la pèrdua associada de senyal.

Noteu també de (5.74) que el valor efectiu de l'atenuació introduïda depèn de les desadaptacions de generador i càrrega. ■

## 5.6 Inversors d'immitàncies

El concepte d'inversor d'impedàncies o d'admitàncies (o només inversor) és molt útil en circuits de microones, com veurem en el tema següent quan parlem de filtres. En el cas ideal, el definirem com una xarxa de dos accessos recíproca, sense pèrdues i simètrica tal que, per a una impedància de càrrega  $Z_L(Y_L)$ , a l'entrada veiem (fig. 5.11):

$$Z_i = \frac{K^2}{Z_L} \quad ; \quad Y_i = \frac{J^2}{Y_L} \quad (5.79)$$

amb  $K^2 = J^2$  reals i positives, anomenades constants de l'inversor. Noteu que  $K$  ha de tenir dimensions d'ohm ( $\Omega$ ) i  $J$  de siemens (S).

Atès que la definició d'inversor es realitza a partir del quocient  $V_i/I_i$ , és insensible a desfasaments entre l'entrada i la sortida que actuïn simultàniament sobre  $V$  i  $I$ ; és a dir, de la forma:

$$\begin{aligned} V_2' &= V_2 e^{j\phi} \\ I_2' &= I_2 e^{j\phi} \end{aligned} \quad (5.80)$$

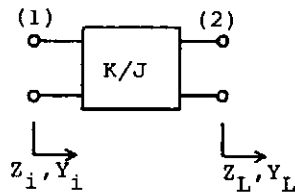
característica que heu de tenir present quan aquesta qüestió sigui escaient (per exemple, si hi ha retroacció implicada). Es pot comprovar immediatament que les xarxes sense pèrdues amb matrius:

$$\begin{aligned} Z &= \begin{pmatrix} 0 & Z_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{12} & 0 \end{pmatrix} \\ (Z_{12} + Z_{12}^* = Y_{12} + Y_{12}^* = 0) & \quad (5.81) \end{aligned}$$

es comporten com a inversors de constants:

$$K^2 = -Z_{12}^2 \quad ; \quad J^2 = -Y_{12}^2$$

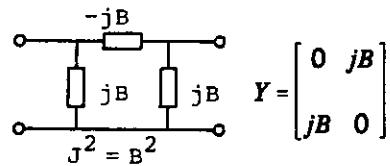
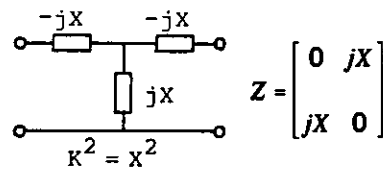
a)



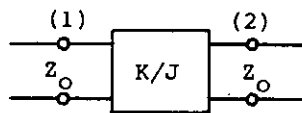
$$Z_i = \frac{K^2}{Z_L}, \quad Y_i = \frac{J^2}{Y_L} \quad (K = J^{-1})$$

$K^2$  (o bé  $J^2$ ) real i positiu.

b)



c)



$$S = \begin{bmatrix} \gamma & \pm j\sqrt{1-\gamma^2} \\ \pm j\sqrt{1-\gamma^2} & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \frac{Z^2 - Z_o^2}{K^2 + Z_o^2} = \frac{Y_o^2 - J^2}{Y_o^2 + J^2}$$

Fig. 5.11 a) Definició d'un inversor d'impedàncies/admitàncies (xarxa simètrica, recíproca, sense pèrdues).

b) Síntesi bàsiques d'inversors obtingudes a partir de les matrius  $Z$  i  $Y$ .

c) Matriu  $S$  referida a impedàncies d'entrada/sortida iguals.

En efecte:

$$V_1 = Z_{12} I_2 \quad ; \quad V_2 = Z_{12} I_1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_{12}^2}{\frac{V_2}{I_2}} \quad \rightarrow \quad Z_i = -\frac{Z_{12}^2}{Z_L} \quad (5.82)$$

Aquesta propietat condueix immediatament a les realitzacions físiques de la figura 5.11b, on  $X$  i  $B$  poden ser positives o negatives. El seu signe afecta la relació de fases entrada/sortida, però no el seu comportament com a inversor.

Per calcular la matriu  $S$  d'un inversor suposarem impedàncies de referència iguals a l'entrada i a la sortida (fig. 5.11c). S'obté immediatament:

$$S_{11} = S_{22} = \frac{\frac{K^2}{Z_0} - Z_0}{\frac{K^2}{Z_0} + Z_0} = \frac{K^2 - Z_0^2}{K^2 + Z_0^2} = \frac{Y_0^2 - J^2}{Y_0^2 + J^2} = \gamma \quad (5.83)$$

Si fem servir la reciprocitat i l'absència de pèrdues, podem posar (vegeu l'equació (5.45)):

$$S_{12} = S_{21} = \pm j\sqrt{1-\gamma^2} \quad (5.84)$$

$$S = \begin{bmatrix} \gamma & \pm j\sqrt{1-\gamma^2} \\ \pm j\sqrt{1-\gamma^2} & \gamma \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

expressió que ens permet afirmar que un inversor és *qualsevol 2-accessos recíproc i sense pèrdues amb  $S_{11} = S_{22}$  reals*.

**Exemple 1** Una línia de transmissió en  $\lambda/4$ , d'impedància caracterfstica  $Z_0'$ , es comporta com un inversor amb:

$$\gamma = \frac{Z_0'^2 - Z_0^2}{Z_0'^2 + Z_0^2} \quad ; \quad K = Z_0' \quad (5.86)$$

La indeterminació de signe de  $S_{12}$  es pot aclarir fàcilment en aquest cas si imaginem que  $Z_0' \rightarrow Z_0$ , ja que llavors:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

i, en conseqüència, el signe que s'aplica és el negatiu:

$$S = \begin{bmatrix} \gamma & -j\sqrt{1-\gamma^2} \\ -j\sqrt{1-\gamma^2} & \gamma \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

■

Una síntesi molt important d'inversors és la formada per una reactància en sèrie o en paral·lel entre dues seccions de línia de transmissió de longitud idèntica (fig. 5.12). Referint-nos al cas en paral·lel (fig. 5.12a) tenim (fig. 5.3, amb  $Z_{o1} = Z_{o2} = 1$  i plans de referència allunyats  $\beta l = \phi$ ):

$$|S| = \frac{e^{-2j\phi}}{2+j\bar{B}} \begin{bmatrix} -j\bar{B} & 2 \\ 2 & -j\bar{B} \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

( $\bar{B}$  és un valor normalitzat com a conseqüència de prendre  $Z_{o1} = Z_{o2} = 1$ ). És a dir:

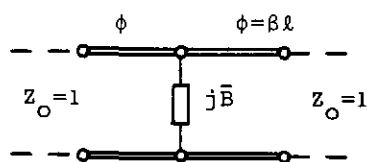
$$S_{11} = e^{-2j\phi} \frac{-j\bar{B}}{2+j\bar{B}} = \frac{-e^{-2j\phi}}{\left(1 + \frac{2}{j\bar{B}}\right)} = \frac{-e^{-2j(\psi-\phi)}}{\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{B}^2}}} \quad (5.90)$$

$$\text{amb } 2\psi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\bar{B}}\right) \quad (5.91)$$

$S_{11}$  serà real i, per tant, el circuit serà un inversor si  $\psi = \phi$ , o sigui, si:

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2}{\bar{B}}\right) \quad (5.92)$$

a)



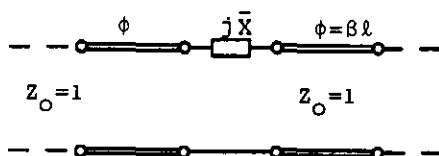
Inversor de constant (normalitzada):

$$\bar{K} = \frac{K}{Z_0} \quad \text{tal que}$$

$$\bar{B} = \frac{1 - \bar{K}^2}{\bar{K}} \quad \text{si} \quad \Phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2}{\bar{B}}$$

$$(\bar{K} < 1)$$

b)



Idem amb

$$|\bar{X}| = \frac{1 - J^{-2}}{J} \quad \text{si} \quad \Phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}}$$

$$(\bar{J} < 1)$$

Fig. 5.12 Realitzacions d'inversors amb elements reactius en sèrie o en paral·lel i seccions de línia de transmissió.

i, llavors:

$$S_{11} = \gamma = \frac{\bar{K}^2 - 1}{\bar{K}^2 + 1} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{B}^2}}} \quad (5.93)$$

d'on se segueix fàcilment que:

$$|\bar{B}| = \frac{1 - \bar{K}^2}{\bar{K}} \quad (5.94)$$

(Noteu que utilitzem una constant d'inversió normalitzada,  $\bar{K} = K/Z_0$ ). De (5.93) i (5.94) se segueix immediatament que  $\bar{K} < 1$ .

L'anàlisi per al circuit de la figura 5.12b (dual del 12a) es pot obtenir per un procediment anàleg o bé directament per dualitat. A la figura 5.13 es representen les realitzacions concretes amb inductàncies i capacitats: es prefereix les que corresponen a longituds de línies negatives (és a dir, tals que afegides a altres trams de línia les escurcen) perquè es comporten millor amb la freqüència. En efecte, referint-nos a la inductància en paral·lel, per exemple, la condició d'inversor  $\underline{S}_{11} = \pi$  es pot escriure:

$$\phi_{11} = 2(\psi - \phi) = 0 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{B}\right) - 2\phi \quad (5.95)$$

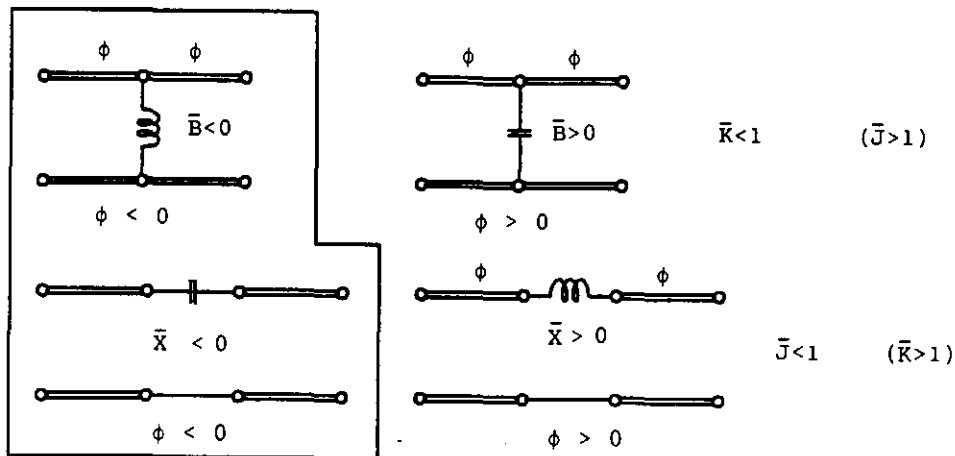


Fig. 5.13 Realitzacions concretes dels models de la figura 5.12. Es prefereix els de l'interior del quadre, amb seccions de línia de longitud negativa, perquè es comporten millor amb la freqüència.

Per al cas important de valors de  $\bar{K} \ll 1$  resulta, per (5.94),  $|\bar{B}| \gg 1$ , i en conseqüència

$$\phi_{11} = \frac{2}{B} - 2\phi = -2\omega L - 2\left(\frac{\omega}{v_p}\right)l \quad (5.96)$$



expressió que, si  $L = -\ell/v_p$ , s'anul·la amb independència de la freqüència. Tanmateix, si utilitzéssim una capacitat en paral·lel, tindríem:

$$\phi_{11} = \frac{2}{\omega C} - 2 \left( \frac{\omega}{v_p} \right) \ell \quad (5.97)$$

que només s'anul·la per a una freqüència donada. Per tant, es prefereixen les realitzacions enquadrades de la figura 5.13 perquè (per a  $\bar{K} \ll 1$  i  $\bar{J} \ll 1$ ) es comporten com a inversors amb independència de la freqüència, encara que la constant de l'inversor variï amb aquesta última:

$$\bar{K} = \frac{1}{|B|} = \omega L \quad ; \quad \bar{J} = \frac{1}{|X|} = \omega C \quad (5.98)$$

**Exemple 2** Per a una secció de línia de longitud  $\ell$  ( $\beta\ell = \phi$ ):

$$\begin{aligned} |Y| &= j \frac{Y_0}{\sin\phi} \begin{pmatrix} -\cos\phi & 1 \\ 1 & -\cos\phi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -jY_0 \cot\phi & 0 \\ 0 & -jY_0 \cot\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & j \frac{Y_0}{\sin\phi} \\ j \frac{Y_0}{\sin\phi} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.99) \end{aligned}$$

De les dues matrius de la dreta, la segona correspon a un inversor de constant

$J^2 = \frac{Y_0^2}{\sin^2\phi}$ , i en vista del circuit equivalent en  $\pi$  (figures 5.4 i 5.14), la secció de línia

admet el circuit equivalent de la figura 5.14b, format per un inversor ideal i dues admitàncies:

$$Y_{11} = Y_{22} = -jY_0 \cot\phi \quad (5.100)$$

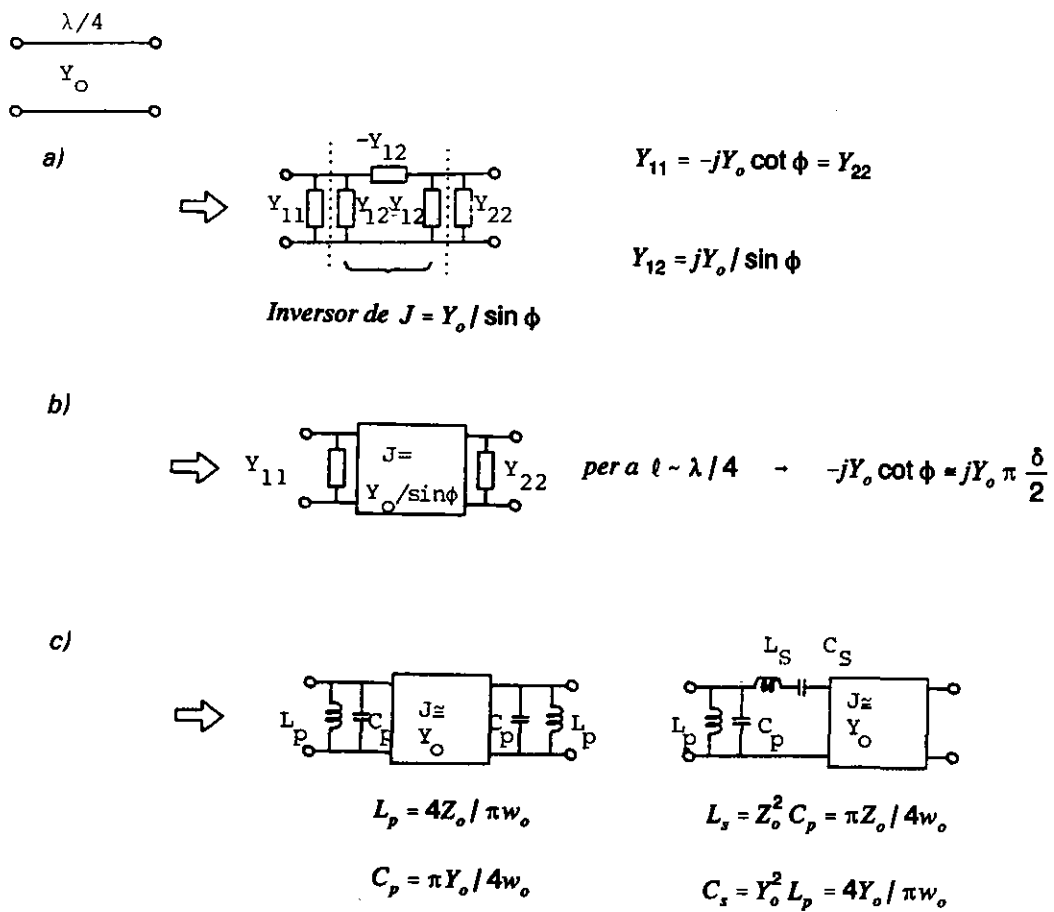


Fig. 5.14 Circuit equivalent d'una secció de línia de longitud  $l$  (a) format per un inversor i dues admittències (b), i el mateix circuit en el cas de freqüències a la proximitat de  $l = \lambda/4$  (c).

A les proximitats de  $l = \lambda/4$  l'expressió anterior pot aproximar-se ( $\delta \ll 1$ ):

$$\cot \phi = \cot \frac{\pi}{2} (1 + \delta) = -\tan \pi \frac{\delta}{2} \approx -\pi \frac{\delta}{2} \quad (5.101)$$

$$Y_{11} = Y_{22} = j Y_0 \pi \frac{\delta}{2} \quad (= 2j \omega_0 C_p \delta) \quad (5.102)$$

expressió igual a la d'un circuit ressonant en paral·lel amb capacitat i inductància equivalents donades per:

$$C_p = \frac{\pi Y_0}{4 \omega_0} \quad ; \quad L_p = \frac{4 Z_0}{\pi \omega_0} \quad (5.103)$$

amb el resultat del circuit equivalent de la figura 5.14c on, a més, s'ha tingut en compte que per a  $\phi = \frac{\pi}{2} \cdot (1 + \delta) \rightarrow \sin \phi = 1$ .

Sobre la qualitat de l'aproximació anterior considereu els següents errors relatius en  $Y_{11} = Y_{22}$  i  $J$ :

Taula 5.1 Errors relatius

| $\delta$ | Error $Y_{11}$ (%) | Error $J$ (%) |
|----------|--------------------|---------------|
| 0.05     | 0.21               | 0.31          |
| 0.10     | 0.82               | 1.25          |
| 0.15     | 1.86               | 2.84          |
| 0.20     | 3.31               | 5.15          |
| 0.25     | 5.19               | 8.24          |

Observeu que l'aproximació és molt bona (errors inferiors al 3%) per a desviacions relatives en freqüència de fins a un 15% (desviació relativa total d'un 30%).

El circuit equivalent per a una línia en  $\lambda/2$  es pot obtenir per juxtaposició de dos dels anteriors, com a la figura 5.15. Noteu que l'efecte de dos inversors consecutius s'anul·la, si bé cal recordar que entre l'entrada i la sortida pot haver-hi un desfasament que l'inversor no indicava. En el cas de la línia en  $\lambda/2$ , es pot comprovar que aquest desfasament correspon a un canvi de sentit de tensió i corrent (n'hi ha prou amb considerar la línia a la freqüència exacta de  $\ell = \lambda/2$ ) que es pot introduir en el circuit equivalent mitjançant un transformador ideal de relació 1:-1 (fig. 5.15).

Els circuits equivalents de les figures 5.14 i 5.15 permeten tornar a obtenir de manera immediata els comportaments de línies en  $\lambda/4$  i  $\lambda/2$  en *c.c.* o en *c.o.* que ja hem vist a l'apartat 4.6 (fig. 4.12). També és evident que la presència de pèrdues baixes a la línia de transmissió es pot tenir en compte mitjançant la inclusió de resistències que proporcionen als circuits resonants el factor  $Q$  corresponent a la línia (vegeu l'apartat 4.8):

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha} \quad (5.104) \quad \blacksquare$$

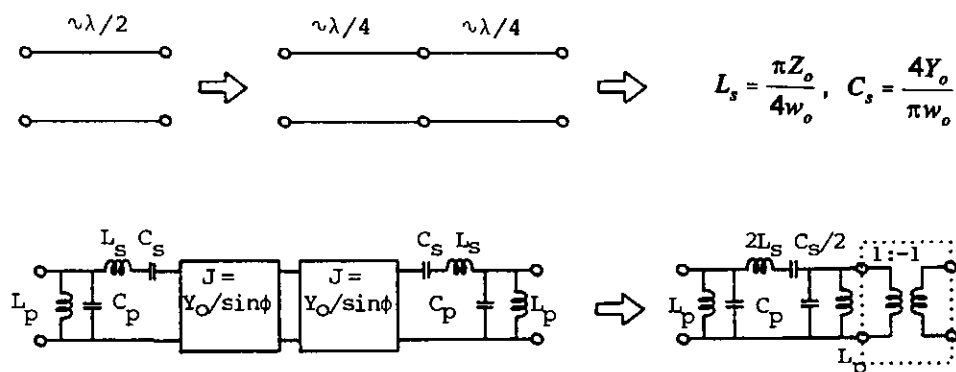


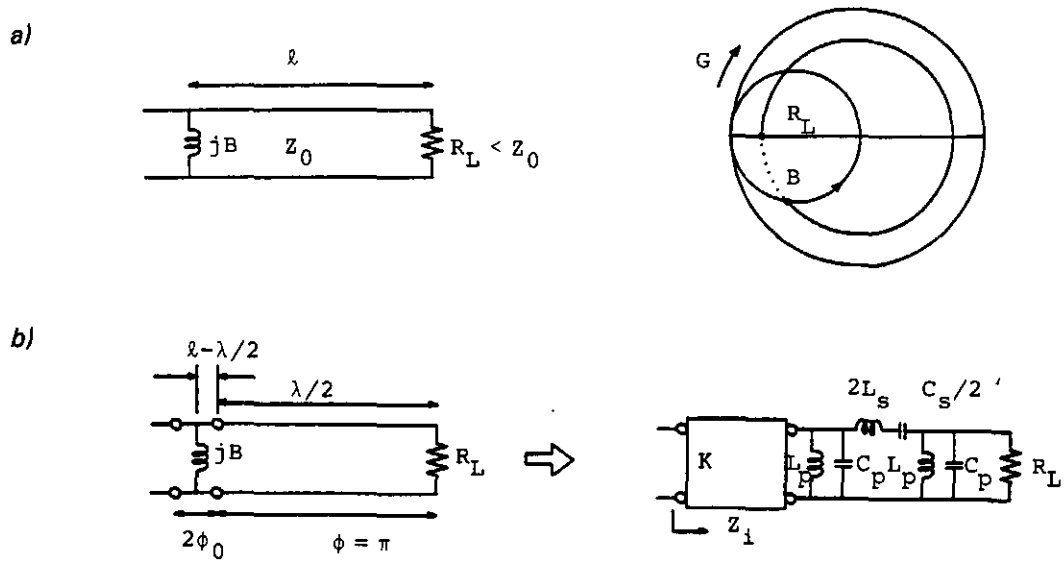
Fig. 5.15 Circuit equivalent d'una línia de  $\ell \approx \lambda/2$  construït a partir de l'equivalència de la figura anterior. Heu d'advertir que el transformador 1:-1 (canvi de signe de  $V$  i  $I$ ) està ocult en els inversors, que no consideren el desfasament entrada/sortida.

**Exemple 3** L'adaptació d'una càrrega amb una reactància en una línia de transmissió és un problema estudiat anteriorment. A la figura 5.16 es dibuixa novament el procés en la carta de Smith per a un cas particular. En aquest problema succeeix que, si  $R_L \ll Z_0$ , el cercle que passa per  $R_L$  està molt proper a la perifèria ( $|\rho| = 1$ ), i el punt  $B$  està situat en una zona de valors de susceptància grans i que, a més, varien molt de pressa. Així, si la freqüència canvia lleugerament, l'adaptació es destrueix i, per tant, el circuit dibuixat és molt sensible a la freqüència.

Un procediment molt senzill i aclaridor per analitzar el problema és l'aplicació del concepte d'inversor de  $Z$  per a la inductància i dos trossos de línia de transmissió adjacents, així com del circuit equivalent per a una línia de longitud propera a  $\lambda/2$  (fig. 5.16b). A la freqüència de disseny  $f_o$ , el circuit es comporta com un inversor ( $K$ ) seguit d'una resistència  $R_L$  i s'obté fàcilment la següent condició d'adaptació, així com el valor de la longitud  $\ell$ , també indicada a la figura 5.16.

$$Z_i = \frac{K^2}{R_L} \equiv Z_0 \quad \rightarrow \quad K^2 = R_L Z_0 \quad ; \quad \bar{K}^2 = \bar{R}_L \quad (5.105)$$

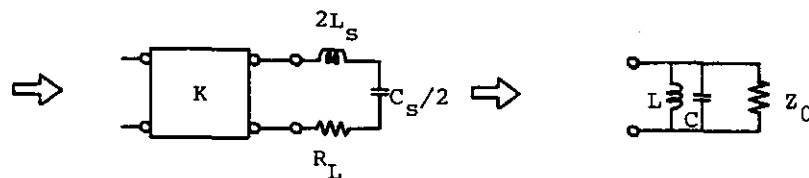
$$|\bar{B}| = \frac{1 - \bar{K}^2}{K} = \frac{1 - \bar{R}_L}{\sqrt{R_L}} \quad (5.106)$$



per a  $f = f_0 \quad \left( \ell = \frac{\lambda}{2} \right) ; Z_i = \frac{K^2}{R_L} = Z_0 ; |\bar{B}| = \frac{1 - K^2}{K}$

$$|\bar{B}| = \frac{1 - \bar{R}_L}{\sqrt{\bar{R}_L}} ; \ell = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2}{\bar{B}} \right) = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\bar{R}_L}}{1 - \bar{R}_L} \right)$$

c) En les proximitats de  $f_0$  :



$$L = K^2 \frac{C_s}{2} = Z_0 R_L \frac{2 Y_0}{\pi \omega_0} = \frac{2 R_L}{\pi \omega_0} ; C = \frac{\pi}{2 R_L \omega_0} ; Q = \frac{Z_0}{\omega_0 L} = \frac{\pi Z_0}{2 R_L}$$

Fig. 5.16 a) Adaptació de  $R_L$  mitjançant la carta de Smith.  
 b) Anàlisi del mateix problema utilitzant un inversor d'impedàncies i el circuit equivalent d'una línia en  $\lambda/2$ .  
 c) Circuit equivalent vist a l'entrada en les proximitats de la freqüència d'adaptació  $f_0$ .

A més, per a  $f = f_0 (1 + \delta)$  amb  $\delta$  petit, els circuits ressonants en paral·lel ( $L_p, C_p$ ) presenten una impedància elevada i es poden negligir respecte del circuit en sèrie ( $2L_s, C_s/2$ ) i  $R_L \ll Z_0$ . D'aquesta manera, obtenim el circuit equivalent de la figura 5.16c, un circuit ressonant en paral·lel amb els valors indicats per a  $L, C$  i  $Q$ . En particular:

$$Q = \frac{\pi Z_0}{2R_L} = \frac{\pi}{2R_L} \quad (5.107)$$

expressió que confirma la sensibilitat del circuit amb la freqüència ( $Q$  gran) quan la resistència normalitzada de càrrega és petita. ■

## 5.7 Cadenes de 2-accessos

Quan dues o més xarxes de dos accessos s'encadenen o es connecten en cascada és més convenient descriure-les mitjançant matrius que relacionen paràmetres d'entrada/sortida, ja que d'aquesta manera la matriu total d'una cadena ve donada pel producte de les matrius components.

Les més comunes d'aquestes matrius de transferència són la  $(ABCD)$ , anomenada per abreviar  $A$ , i la de transmissió  $T$ , definides mitjançant les relacions (fig. 5.4a):

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_2 \\ -\bar{I}_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (5.108)$$

D'aquesta manera, si tenim diferents 2-accessos en cascada descrits, d'esquerra a dreta, per  $A^1, A^2 \dots A^N$  o  $T^1, T^2 \dots T^N$ , les matrius totals de la cadena seran:

$$A = A^1 A^2 \dots A^N \quad ; \quad T = T^1 T^2 \dots T^N \quad (5.109)$$

Noteu que a (5.108) les definicions utilitzen valors normalitzats de tensió/corrent o ones positives/negatives, iguals que els introduïts a (5.5)-(5.7). Això pressuposa que, com en el cas dels paràmetres  $S$ , haguem definit impedàncies de referència a l'entrada i a la sortida del 2-accessos, cosa que exigeix, per poder aplicar (5.109), que la impedància de referència de sortida d'una xarxa coincideixi amb la de referència d'entrada de la següent, ja que si no els paràmetres de sortida del primer no coincidirien amb els d'entrada del

segon. És fàcil d'establir la relació entre les matrius  $A$  i  $T$ :

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \bar{V}_2 \\ -\bar{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + b_2 \\ -a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (5.110)$$

Per tant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (5.111)$$

és a dir:

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A+B+C+D & A-B+C-D \\ A+B-C-D & A-B-C+D \end{pmatrix} \quad (5.112)$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22} & T_{11} - T_{12} + T_{21} - T_{22} \\ T_{11} + T_{12} - T_{21} - T_{22} & T_{11} - T_{12} - T_{21} + T_{22} \end{pmatrix} \quad (5.113)$$

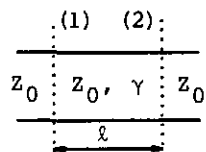
No es poden establir les relacions entre matrius dels grups  $(A, T)$  i  $(S, Z, Y)$  per aquest procediment, ja que no existeixen relacions lineals (expressables mitjançant matrius) entre els vectors representatius perquè a  $(A, T)$  estan barrejats, en un mateix vector, paràmetres d'entrada i sortida, cosa que no passa a  $(S, Z, Y)$ . En tot cas, és molt fàcil calcular, per exemple, que:

$$T = \frac{1}{S_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & -\Delta_S \end{pmatrix} \quad ; \quad S = \frac{1}{T_{11}} \begin{pmatrix} T_{21} & \Delta_T \\ 1 & -T_{12} \end{pmatrix} \quad (5.114)$$

$$A = \frac{1}{Y_{21}} \begin{pmatrix} -\bar{Y}_{22} & -1 \\ -\Delta_Y & -\bar{Y}_{11} \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} D & -\Delta_A \\ -1 & A \end{pmatrix} \quad (5.115)$$

amb  $\Delta_S = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} = \det[S]$ , etc. A la figura 5.17, s'indiquen les matrius de transferència de quatre elements bàsics que permeten calcular, per multiplicacions successives, la de qualsevol 2-accessos format per línies de transmissió i elements concentrats  $(R, L, C)$ . Tant el seu càlcul com la seva utilització són molt senzills i s'il·lustren en els exemples següents.

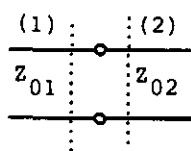
a)



$$A = \begin{pmatrix} \cosh \gamma \ell & \sinh \gamma \ell \\ \sinh \gamma \ell & \cosh \gamma \ell \end{pmatrix}$$

$$\gamma = j\beta \rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos(\beta \ell) & j \sin(\beta \ell) \\ j \sin(\beta \ell) & \cos(\beta \ell) \end{pmatrix} ; T = \begin{pmatrix} e^{\gamma \ell} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma \ell} \end{pmatrix}$$

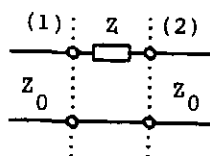
b)



$$A = \begin{pmatrix} (Z_{02}/Z_{01})^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (Z_{01}/Z_{02})^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

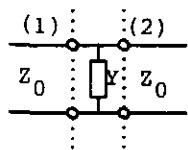
$$T = \frac{1}{\sqrt{Z_{01} Z_{02}}} \begin{pmatrix} Z_{02} + Z_{01} & Z_{02} - Z_{01} \\ Z_{02} - Z_{01} & Z_{02} + Z_{01} \end{pmatrix}$$

c)



$$A = \begin{pmatrix} 1 & \bar{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{Z} = \frac{Z}{Z_0} \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + \bar{Z} & -\bar{Z} \\ \bar{Z} & 2 - \bar{Z} \end{pmatrix}$$

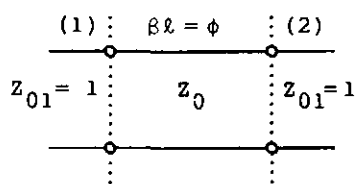
d)



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{Y} & 1 \end{pmatrix}, \bar{Y} = \frac{Y}{Y_0} \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + \bar{Y} & \bar{Y} \\ -\bar{Y} & 2 - \bar{Y} \end{pmatrix}$$

Fig. 5.17 Matrius de transferència entrada-sortida per a quatre elements bàsics.





$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} \sqrt{Z_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & j \sin \phi \\ j \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Y_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_0} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & j Z_0 \sin \phi \\ j Y_0 \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.18 Exemple de càlcul de matriu  $A$  a partir de la seva descomposició en elements continguts a la figura 5.17.

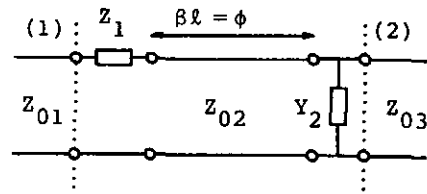
**Exemple** Considerem la figura 5.18: una secció de línia de transmissió d'impedància  $Z_0$  referida a impedàncies d'entrada i sortida unitat. Veient el quadre de la figura 5.17, podem descompondre aquesta xarxa en una secció de línia com a la figura 5.17a amb dos canvis d'impedància a l'entrada i a la sortida com a la figura 5.17b, de manera que la matriu  $A$  es pot calcular com s'indica a la mateixa figura 5.18 i obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & j Z_0 \sin \phi \\ j Y_0 \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.116)$$

A més, també podem utilitzar les transformacions (5.112)-(5.115) i obtenir successivament:

$$T = \begin{pmatrix} \cos \phi + \frac{1}{2} j (Z_0 + Y_0) \sin \phi & j (Z_0 - Y_0) \sin \phi \\ j (Y_0 - Z_0) \sin \phi & \cos \phi - \frac{1}{2} j (Z_0 + Y_0) \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5.117)$$

$$S = \frac{1}{\cos \phi + \frac{1}{2} j (Z_0 + Y_0) \sin \phi} \begin{pmatrix} j (Z_0 - Y_0) \sin \phi & 1 \\ 1 & j (Z_0 - Y_0) \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5.118)$$



$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{Z_1}{Z_{01}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & j \sin \phi \\ j \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{Y_2}{Y_{02}} & 1 \end{pmatrix} \\
 &\cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Z_{03}}{Z_{02}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{03}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\
 A &= \left( \sqrt{\frac{Z_{03}}{Z_{02}}} + Y_2 Z_1 \sqrt{Z_{03} Z_{01}} \right) \cos \phi + \frac{Z_1}{Z_{02}} \sqrt{\frac{Z_{03}}{Z_{01}}} j \sin \phi + j \sqrt{\frac{Z_{03}}{Z_{01}}} \cdot \frac{Y_2}{Y_{02}} \\
 B &= \dots \quad C = \dots \quad D = \dots
 \end{aligned}$$

Fig. 5.19 Exemple addicional de càlcul de matriu A.

Noteu que la matriu  $S$  de l'exemple que estudiem no és trivial i que el seu càlcul directe és també difícil (podeu fer el càlcul com a exercici).

Finalment, la figura 5.19 proposa un exemple d'estructura més complexa l'anàlisi de la qual, pel procediment anterior, no té cap dificultat conceptual. ■

## Capítol 6 Circuits de microones (II)

### Xarxes de més de dos accessos

### Filtres

#### 6.1 Propietats de simetria

Una situació freqüent és la de circuits simètrics respecte d'algun pla. Per analitzar-los, ens cal recordar els conceptes de paret magnètica i elèctrica (fig. 6.1):

##### Parets elèctriques i magnètiques

a) Entenem per paret elèctrica una superfície plana conductora ideal en la qual el camp elèctric tangencial s'anul·la:

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad (6.1)$$

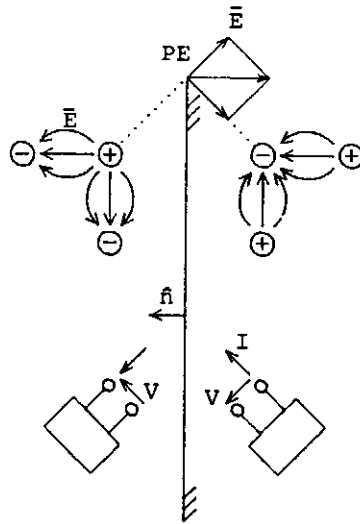
(on  $\hat{n}$  vector normal a la superfície)

i, com a conseqüència del que s'ha dit, també s'ha d'anul·lar la inducció magnètica normal:

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.2)$$

És ben conegut en la teoria electromagnètica que la situació d'un semispai davant d'una paret elèctrica és idèntica a la de l'espai complet en què s'ha eliminat la paret i s'han introduït *imatges* de les càrregues i els corrents. En electrostàtica, el concepte de càrregues imatge i com aquestes càrregues produeixen camp elèctric normal a la superfície on es trobarà la paret és immediat (fig. 6.1a). D'altra banda, la imatge d'un corrent es

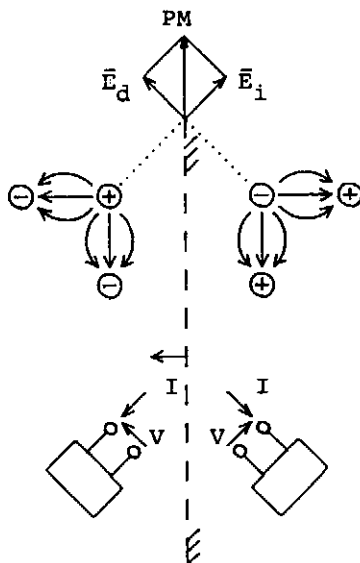
a)

**Paret elèctrica***En la superfície del conductor* $\hat{n} \times \vec{E} = 0$ ,  $\vec{E}$  normal a la superfície.

→ DDP entre dos punts qualssevol de la superfície nul·la.

 $\hat{n} \cdot \vec{B} = 0$ ,  $\vec{B}$  tangent a la superfície.→ Corrent contingut en la paret elèctrica de  $\vec{J} = \hat{n} \times \vec{B}$  de valor.

b)

**Paret magnètica***En la superfície* $\hat{n} \times \vec{B} = 0$ ,  $\vec{B}$  normal a la superfície.

→ Corrent en la paret magnètica nul·la.

 $\hat{n} \cdot \vec{E} = 0$ ,  $\vec{E}$  tangent a la superfície.

Fig. 6.1 Definicions de paret elèctrica i magnètica i les seves propietats de simetria/antisimetria amb relació a tensions i corrents.

pot obtenir amb facilitat a partir de la imatge del camp elèctric, si tenim en compte que:

$$\vec{i} = \sigma \vec{E} \quad (6.3)$$

D'aquesta manera, arribem a la conclusió que una xarxa (en el cas de la figura 6.1a, una xarxa d'un accés) davant d'una paret elèctrica és equivalent a una situació sense paret i amb una xarxa imatge amb els corrents i les tensions calculats com les imatges de l'original (imatge especular seguida d'una inversió de sentit).

b) Es defineix com a paret magnètica una superfície (sense existència real) tal que s'hi compleix que el camp magnètic tangencial s'anul·li:

$$\hat{n} \times \vec{H} = 0 \quad (6.4)$$

i, com a conseqüència, també s'anul·larà el desplaçament elèctric normal:

$$\hat{n} \cdot \vec{D} = 0 \quad (6.5)$$

Aquest cas és similar a l'anterior, però amb càrregues imatge del mateix signe en lloc del signe contrari (fig. 6.1b), i per a xarxes en les quals intervenen tensions i corrents, les imatges es calculen com les imatges especulars de les originals.

De les definicions i les propietats anteriors es dedueix que:

1) Entre dos punts qualssevol de la paret elèctrica (o de la superfície que ocupa quan la substituïm per les imatges corresponents) la diferència de potencial és zero. És evident, ja que no hi ha camp elèctric contingut en la superfície.

Al mateix temps, la superfície que ocupa en el problema equivalent pot contenir o pot ser travessada perpendicularment per corrents elèctrics, ja que aquestes situacions són compatibles amb la simetria requerida (reflexió especular i inversió de sentit).

2) En una paret magnètica (o en la superfície que ocupa quan la substituïm per les seves imatges) no hi ha corrents elèctrics; en efecte, la densitat de corrent superficial  $\vec{J}$  està

relacionada amb el camp magnètic  $\vec{H}$  mitjançant la relació:

$$\vec{J} = \hat{n} \times \vec{H} = 0 \quad \text{en la p.m.} \quad (6.6)$$

També es pot veure que no és possible que la superfície que ocupa sigui travessada perpendicularment per corrents, ja que aquesta situació és incompatible amb la simetria imposada sobre aquestes superfícies (reflexió especular).

És a dir, una paret elèctrica introdueix *condicions de curt circuit* en el pla que ocupa, mentre que una paret magnètica les introdueix de *circuit obert* (interrupció dels corrents que circularan en la superfície o a través de la superfície).

#### Xarxes simètriques (nombre parell d'accessos)

Considerem ara una xarxa amb un nombre parell d'accessos  $2N$ , dotada d'un pla de simetria bilateral que no talla ni conté cap dels accessos (fig. 6.2). Numerarem aquests accessos de forma que els  $(1, N)$  estiguin a un costat del pla i els  $(N+1, 2N)$ , a l'altre, i de forma que el pla  $i$  i el pla  $N+i$  siguin simètrics. Amb aquesta numeració és fàcil de veure que si escrivim la matriu  $S$  en forma de blocs:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & | & S_2 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ S_3 & | & S_4 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

amb  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_4$  matrius quadrades d'ordre  $N \times N$ , es compleix que:

$$S_1 = S_4 \quad | \quad S_2 = S_3 \quad (6.8)$$

ja que, per la simetria:

$$\begin{aligned} S_{ij} (i \leq N, j \leq N) &= (\text{coeficients de transmissió entre dos accessos de la meitat esquerra}) = \\ &= S_{1+N, j+N} = \begin{pmatrix} \text{coeficient de transmissió entre els accessos simètrics dels anteriors} \\ \text{a la meitat dreta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$S_{ij} \ (i \leq N, N+1 \leq j \leq 2N) = \begin{pmatrix} \text{coeficient de transmissió entre un accés de l'esquerra} \\ \text{I un de la dreta} \end{pmatrix} =$$

$$= S_{i+N, j-N} = \begin{pmatrix} \text{coeficient de transmissió entre els accessos} \\ \text{simètrics dels anteriors} \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & | & S_2 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ S_2 & | & S_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} b_i \\ \text{---} \\ b_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & | & S_2 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ S_2 & | & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ \text{---} \\ a_d \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

on  $[a_i], [b_i]$  i  $[a_d], [b_d]$  són vectors de dimensió  $N$  referits a la meitat esquerra i a la dreta de la xarxa, respectivament.

Si excitem la xarxa amb generadors idèntics i en posició simètrica en els accessos simètrics, de manera que  $a_i (1 \leq i \leq N) = a_{i+N}$  (fig. 6.2b), pel que hem vist abans podem substituir, per exemple, la meitat dreta de la xarxa per una paret magnètica, i per tant:

$$[a_i] = [a_d] \quad \rightarrow \quad [b_i] = [b_d] \quad (6.10)$$

$$\begin{pmatrix} b_i \\ \text{---} \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & | & S_2 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ S_2 & | & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ \text{---} \\ a_i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad [b_i] = [S_1 + S_2] [a_i] \quad (6.11)$$

Però al mateix temps podem posar:

$$[b_i] = [S^e] [a_i] \quad (S^e \text{ d'ordre } N \times N) \quad (6.12)$$

on  $S^e$  representa la matriu  $S$  de la xarxa de  $N$  accessos formada pels de l'esquerra, per exemple, i una paret magnètica instal·lada en el pla de simetria. De manera que:

$$S^e = S_1 + S_2 \quad (6.13)$$

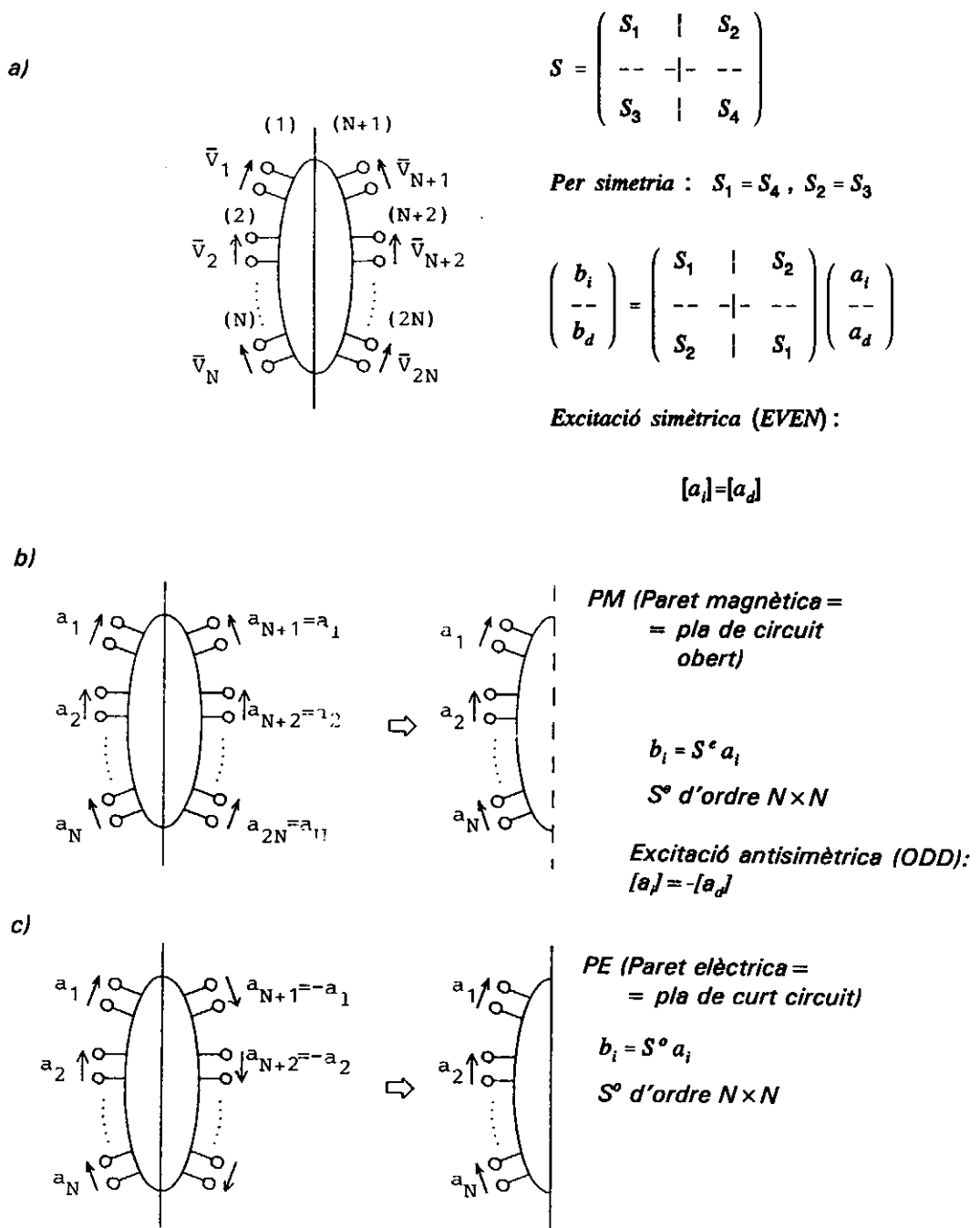


Fig. 6.2 a) Ordre de numeració requerit per a una anàlisi d'una estructura simètrica.  
 b) Excitació amb generadors organitzats de manera simètrica (paret magnètica).  
 c) Idem de manera antisimètrica (paret elèctrica).



Si ara excitem la xarxa amb generadors idèntics però amb posició antisimètrica, de manera que  $[a_i] = -[a_d]$  (fig. 6.2c), podem substituir la meitat dreta de la xarxa per una paret elèctrica i, per tant:

$$[a_i] = -[a_d] \quad \rightarrow \quad [b_i] = -[b_d] \quad (6.14)$$

$$\begin{pmatrix} b_i \\ - \\ -b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & | & S_2 \\ - & - & - \\ S_2 & | & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ - \\ -a_i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad [b_i] = [S_1 - S_2][a_i] \quad (6.15)$$

D'altra banda, si  $S^0$  representa la matriu  $S$  de la xarxa de  $N$  accessos formada pels de l'esquerra, per exemple, i una paret elèctrica en el pla de simetria:

$$[b_i] = [S^0][a_i] \quad \rightarrow \quad S^0 = S_1 - S_2 \quad (6.16)$$

De (6.13) i (6.16) s'obté:

$$S_1 = \frac{1}{2}(S^e + S^0) \quad ; \quad S_2 = \frac{1}{2}(S^e - S^0)$$

i, finalment:

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^e + S^0 & | & S^e - S^0 \\ - & - & - \\ S^e - S^0 & | & S^e + S^0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

D'aquesta manera, hem reduït el càlcul de la matriu  $2N \times 2N$  original al de dues matrius  $N \times N$ ,  $S^0$  i  $S^e$  representatives de la meitat de la xarxa amb parets elèctrica i magnètica, respectivament.

**Exemple 1** Tornem a l'exemple de l'apartat 5.7. Es tracta de calcular la matriu  $S$  d'una línia de transmissió de longitud  $\ell$  referida a una impedància diferent de la seva pròpia (fig. 6.3).

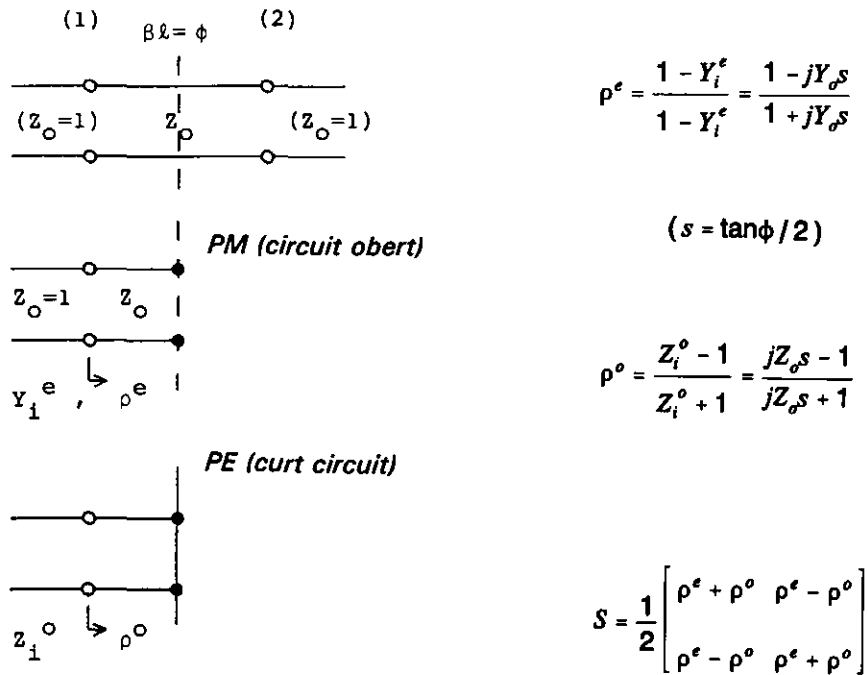


Fig. 6.3 Utilització de les propietats de simetria en el càlcul de la matriu S d'una secció de línia de transmissió.

En aquest cas, reduïm el càlcul d'un 2-accessos al de dues xarxes d'un accés, i per a un d'aquests la matriu S es redueix a un escalar (el seu coeficient de reflexió). Per tant, hem de deixar el pla de simetria en circuit obert (paret magnètica) i calcular el coeficient de reflexió del tros de línia resultant com a la figura 6.3,  $\rho^e$ , i, posteriorment, curtcircuitar el pla de simetria (paret elèctrica) i calcular el coeficient de reflexió  $\rho^o$ . Finalment tindrem

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho^e + \rho^o & \rho^e - \rho^o \\ \rho^e - \rho^o & \rho^e + \rho^o \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Es proposa com a exercici verificar que els valors obtinguts per a  $S_{11}$  i  $S_{12}$  coincideixen amb els calculats a l'exemple de l'apartat 5.7. ■

**Exemple 2** La figura 6.4 mostra un circuit d'anàlisi similar a l'anterior i que és interessant per a estructures més complexes que veurem més endavant.

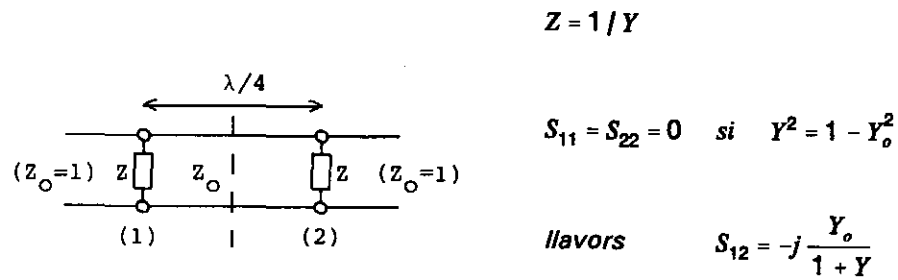


Fig. 6.4 Circuit discutit a l'exemple 2.

Per a les situacions simètriques (*even*, paret magnètica) i antisimètrica (*odd*, paret elèctrica), tindrem:

$$\rho^e = \frac{1 - (Y + jY_0)}{1 + Y + jY_0} \quad ; \quad \rho^o = \frac{1 - (Y - jY_0)}{1 + Y - jY_0} \quad (6.19)$$

i, per tant:

$$2S_{11} = \rho^e + \rho^o = 2 \frac{1 - Y^2 - Y_0^2}{(1 + Y)^2 + Y_0^2} \quad (6.20)$$

$$2S_{12} = \rho^e - \rho^o = -2 \frac{2jY_0}{(1 + Y)^2 + Y_0^2} \quad (6.21)$$

La xarxa estarà completament adaptada ( $S_{11} = S_{22} = 0$ ) si:

$$Y^2 = 1 - Y_0^2 \quad \rightarrow \quad Y = \pm \sqrt{1 - Y_0^2} \quad (6.22)$$

i, llavors:

$$S_{12} = -j \frac{Y_0}{1 + Y} \quad (6.23)$$

A més, la xarxa serà sense pèrdues si  $Y_0 > 1$  i en aquest cas:

$$Y = jB = \pm j\sqrt{Y_0^2 - 1} \quad ; \quad S_{12} = \frac{-jY_0}{1 \pm j\sqrt{Y_0^2 - 1}} \quad ; \quad |S_{12}| = 1 \quad (6.24)$$

■

## 6.2 Xarxes de tres accessos

Recordem que una xarxa està completament adaptada si tots els elements diagonals de la seva matriu  $S$ ,  $S_{ii}$ , s'anul·len.

És fàcil demostrar que no és possible fer que un 3-accessos recíproc i sense pèrdues estigui completament adaptat. En efecte, suposem que ho està:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Les condicions d'unitarietat són:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (6.26a) \quad \beta\gamma^* = 0 \quad (6.26d)$$

$$|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \quad (6.26b) \quad \alpha\gamma^* = 0 \quad (6.26e)$$

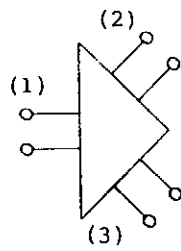
$$|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \quad (6.26c) \quad \alpha\beta^* = 0 \quad (6.26f)$$

Si suposem, per exemple, que  $\beta=0$  llavors:

$$(6.26a) \rightarrow |\alpha| = 1 \quad , \quad (6.26b) \rightarrow |\gamma| = 0 \quad , \quad (6.26c) \rightarrow 0 = 1$$

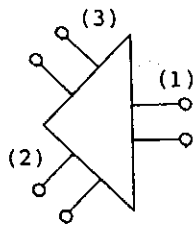
és a dir, la forma (6.25) per a  $S$  condueix a una contradicció insalvable.

Els dispositius recíprocs de 3 accessos més comuns són els divisors i els combinadors de potència. Per als primers, si prenem l'accés 1 com el de potència incident a dividir, la seva



*Divisor de potència simètric  
(sense pèrdues):*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \gamma & -\gamma \\ \alpha & -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |\gamma| = \frac{1}{2}$$



*Combinador de potència simètric  
(sense pèrdues). No pot fer-se  
que 2 i 3 estiguin adaptats  
simultàniament,  $S_{22} = S_{33} = 0$*

*Fig. 6.5 Xarxes de tres accessos sense pèrdues; divisors i combinadors de potència i propietats bàsiques de les seves matrius  $S$ .*

matriu  $S$  convé que sigui de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & \gamma & \delta \\ \beta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Aquí  $|\alpha|^2$  i  $|\beta|^2$  representen les fraccions de potència incident que es reparteixen als accessos 2 i 3, respectivament. Si el divisor és simètric,  $\alpha = \beta$ ,  $\gamma = \varepsilon$  i, en aquest cas, la unitarietat requereix una matriu de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \gamma & -\gamma \\ \alpha & -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{amb} \quad |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad |\gamma| = \frac{1}{2} \quad (6.28)$$

Per a un combinador de freqüència interessaria (entrades de potència a combinar per 2 i 3, sortida per 1):

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

forma que és impossible, ja que la unitarietat requereix (fila 2 x fila 3)  $\beta\beta^* = |\beta|^2 = 0$ . És a dir, els accessos 2 i 3 estarien aïllats de l'1, contràriament al que volíem. Per tant, les xarxes sense pèrdues no són adequades per realitzar combinadors de potència de característiques acceptables.

La construcció de divisors de potència amb seccions de línia de transmissió, utilitzant transformadors en  $\lambda/4$  per adaptar l'entrada, és immediata i s'analitza amb detall en els exemples següents.

**Exemple 1** La figura 6.6 representa dues realitzacions possibles que condueixen a  $S_{11} = 0$  i, per tant, es corresponen amb la forma (6.28).

El càlcul detallat de la configuració de la figura 6.6a es pot fer amb l'ajut de la figura 6.6c:

$$S_{12} = S_{21} = \frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{-jV^+ + jV^-}{V^+ + V^-} = -j \frac{V^+ - V^-}{V^+ + V^-} = -j \frac{\left(1 - \frac{V^-}{V^+}\right)}{\left(1 + \frac{V^-}{V^+}\right)} = -j \frac{1 - \rho_i}{1 + \rho_i}$$

$$\rho_i = \frac{\left(Z_i - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(Z_i + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad ; \quad S_{12} = S_{21} = -\frac{j}{\sqrt{2}} \quad (6.30)$$

La impedància d'entrada que es pot veure des de 2 quan 1 i 3 estan terminats (carregats amb  $R=1$ ) és 1 en paral·lel amb  $1/2$ , és a dir,  $Y=3$  i, per tant:

$$S_{22} = S_{33} = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j\sqrt{2} & -j\sqrt{2} \\ -j\sqrt{2} & -1 & 1 \\ -j\sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

De manera similar, es pot calcular  $S$  per al circuit de la figura 6.6b, i obtenim

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j\sqrt{2} & -j\sqrt{2} \\ -j\sqrt{2} & 1 & -1 \\ -j\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

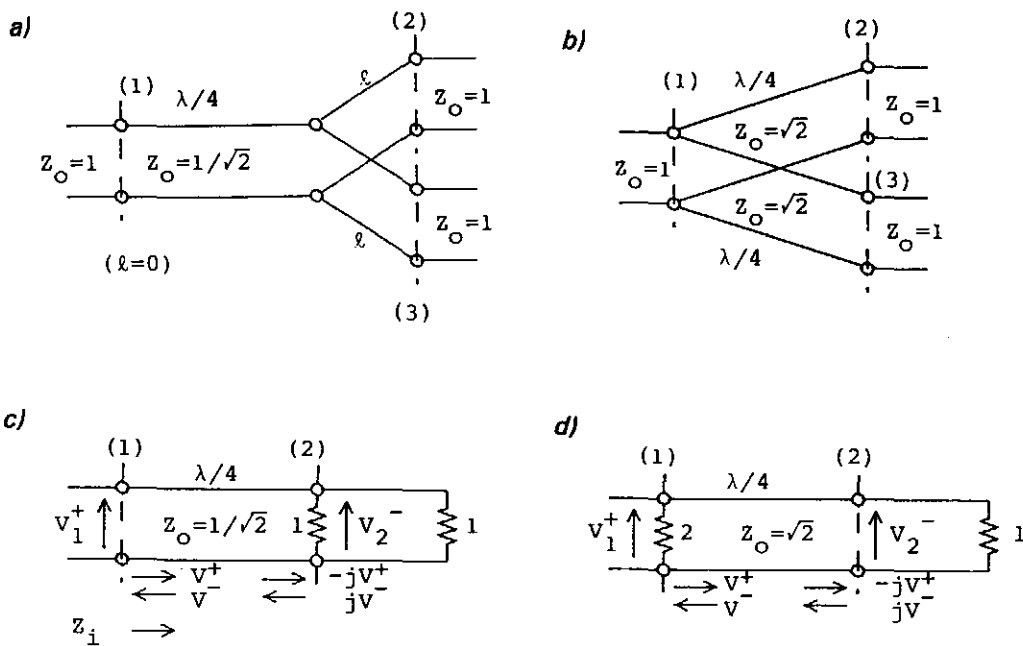


Fig. 6.6 Divisors de potència realitzats amb transformadors d'impedàncies (línies en  $\lambda/4$ ) i els seus circuits equivalents per al càlcul de  $S_{12} = S_{21}$ .

**Exemple 2** Suposem que el divisor de la figura 6.6b no té els accessos 2 i 3 terminats, sinó carregats amb impedàncies  $Z_2$  i  $Z_3$  tals que:

$$\rho_2 = \frac{Z_2 - 1}{Z_2 + 1} = \frac{a_2}{b_2} \quad ; \quad \rho_3 = \frac{Z_3 - 1}{Z_3 + 1} = \frac{a_3}{b_3}$$

Tindrem:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \rho_2 b_2 \\ \rho_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (S \text{ donat per (6.32)}) \quad (6.33)$$

De les tres equacions anteriors, es pot aïllar  $b_1$ ,  $b_2$  i  $b_3$  en funció de  $a_1$  i obtenim:

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\rho_2 + \rho_3 - 2\rho_2\rho_3}{2 - \rho_2 - \rho_3} a_1 \\ b_2 &= \frac{-j\sqrt{2}(1 - \rho_3)}{2 - \rho_2 - \rho_3} a_1 \\ b_3 &= \frac{-j\sqrt{2}(1 - \rho_2)}{2 - \rho_2 - \rho_3} a_1 \end{aligned} \quad (6.34)$$

expressions que defineixen completament la situació. Suposem, per exemple, que:

$$Z_2 = 3 \quad \left( \rho_2 = \frac{1}{2} \right) \quad ; \quad Z_3 = \frac{1}{3} \quad \left( \rho_3 = -\frac{1}{2} \right)$$

En aquest cas, s'obté:

$$b_1 = -\frac{1}{4} a_1 \quad ; \quad b_2 = -j\frac{3\sqrt{2}}{4} a_1 \quad ; \quad b_3 = -j\frac{\sqrt{2}}{4} a_1$$



Pot cridar l'atenció que  $|b_2| = 1.061 |a_1| > |a_1|$ , és a dir, que la potència de l'ona positiva que surt en la línia de transmissió de l'accés 2 sigui més gran que la potència de l'ona incident a 1. Però, podem provar que el balanç de potències es manté (cosa que ja estava garantida pel caràcter unitari de  $S$ ):

$$P_{11} = \frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{2} |b_1|^2 = \frac{1}{2} |a_1|^2 \left( 1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{30}{64} |a_1|^2$$

$$P_{02} = \frac{1}{2} |b_2|^2 - \frac{1}{2} |a_2|^2 = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\rho_2|^2) = \frac{27}{64} |a_1|^2$$

$$P_{03} = \frac{1}{2} |b_3|^2 - \frac{1}{2} |a_3|^2 = \frac{1}{2} |b_3|^2 (1 - |\rho_3|^2) = \frac{3}{64} |a_1|^2$$

i, evidentment,  $P_{11} = P_{02} + P_{03}$ . ■

### Divisors resistius

La figura 6.7 mostra dos tipus de divisors construïts només amb resistències. En el cas *a*, s'indica el càlcul de la matriu  $S$  a la mateixa figura; el del cas *b*, es pot fer de manera anàloga, però d'una forma encara més senzilla, atès que per la simetria del circuit,  $S_{13} = S_{12} = S_{23}$ .

En ambdós casos heu de notar, d'una banda, que no podem usar les propietats d'unitarietat de la matriu  $S$  per al seu càlcul, ja que les xarxes tenien pèrdues; i de l'altra, que la potència que surt per 2 i 3 (quan hi ha adaptació) és una quarta part de la que entra per 1 (-6 dB), en comptes de ser la meitat (-3 dB) com en el cas dels divisors realitzats amb línies de  $\lambda/4$ . És a dir, aquests divisors desaprofiten la meitat de la potència incident; però en contrapartida, el seu caràcter resistiu fa que el seu comportament com a divisors sigui independent de la freqüència, per la qual cosa són àmpliament utilitzats al laboratori com a elements auxiliars d'instrumentació.

### 6.3 El divisor de Wilkinson

Tant en els divisors resistius com en els realitzats amb seccions de línia en  $\lambda/4$ , estudiats anteriorment, els accessos de sortida (2 i 3) no estan aïllats ( $S_{23} \neq 0$ ) i, a més, la simetria

en la divisió de potència es destrueix si els accessos 2 i 3 es carreguen de manera asimètrica.

Aquests inconvenients s'eliminarien en un divisor que tingués la matriu  $S$  de la forma següent:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \rho_2 b_2 \\ \rho_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

amb  $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ja que en aquest cas tindríem  $b_2 = \alpha a_1$  i  $b_3 = \alpha a_1$ , independentment de  $\rho_2$  i  $\rho_3$ . Alhora, aquest dispositiu es comporta com un combinador ideal ja que, si instal·lem generadors a 2 i 3, tindrem:

$$b_1 = \alpha (a_2 + a_3)$$

La matriu  $S$  donada per (6.35) no és unitària, per la qual cosa no es pot sintetitzar amb elements sense pèrdues. Podem comprovar que el circuit de la figura 6.8, un divisor amb dos transformadors en  $\lambda/4$  al qual s'ha afegit una resistència de valor normalitzat 2 connectada entre els accessos 2 i 3 (divisor de Wilkinson), té una matriu  $S$  de la forma (6.35).

Aquest circuit és difícil d'analitzar a partir de la definició dels paràmetres  $S$  per la retroacció que hem introduït; però podem utilitzar la seva simetria de la manera següent:

Considerem una xarxa simètrica de  $2N+1$  accessos tals que un d'ells, amb els seus dos terminals, estigui connectat en el pla de simetria (fig. 6.9a); si aquest accés particular anomenat 0 a la figura 6.9 es termina, la xarxa de  $2N$  accessos resultant té una matriu  $S'$  que coincideix amb l'original, amb la primera fila i la primera columna suprimides. D'altra banda, aquesta matriu  $S'$  pot calcular-se utilitzant les propietats de simetria de l'apartat 6.1 sense cap altra precaució que descompondre la terminació (resistència) de l'accés 0 en dues resistències en paral·lel (fig. 6.9c) a fi de poder inserir plans de circuit obert i curt circuit.

Evidentment, no podem calcular els elements  $S_{0i}$  amb aquest procediment, sinó que s'han d'avaluar directament. Si apliquem això al divisor de Wilkinson, tenint en compte que el pla de simetria conté l'accés que hem anomenat 1 a la figura 6.8 i que talla per la meitat

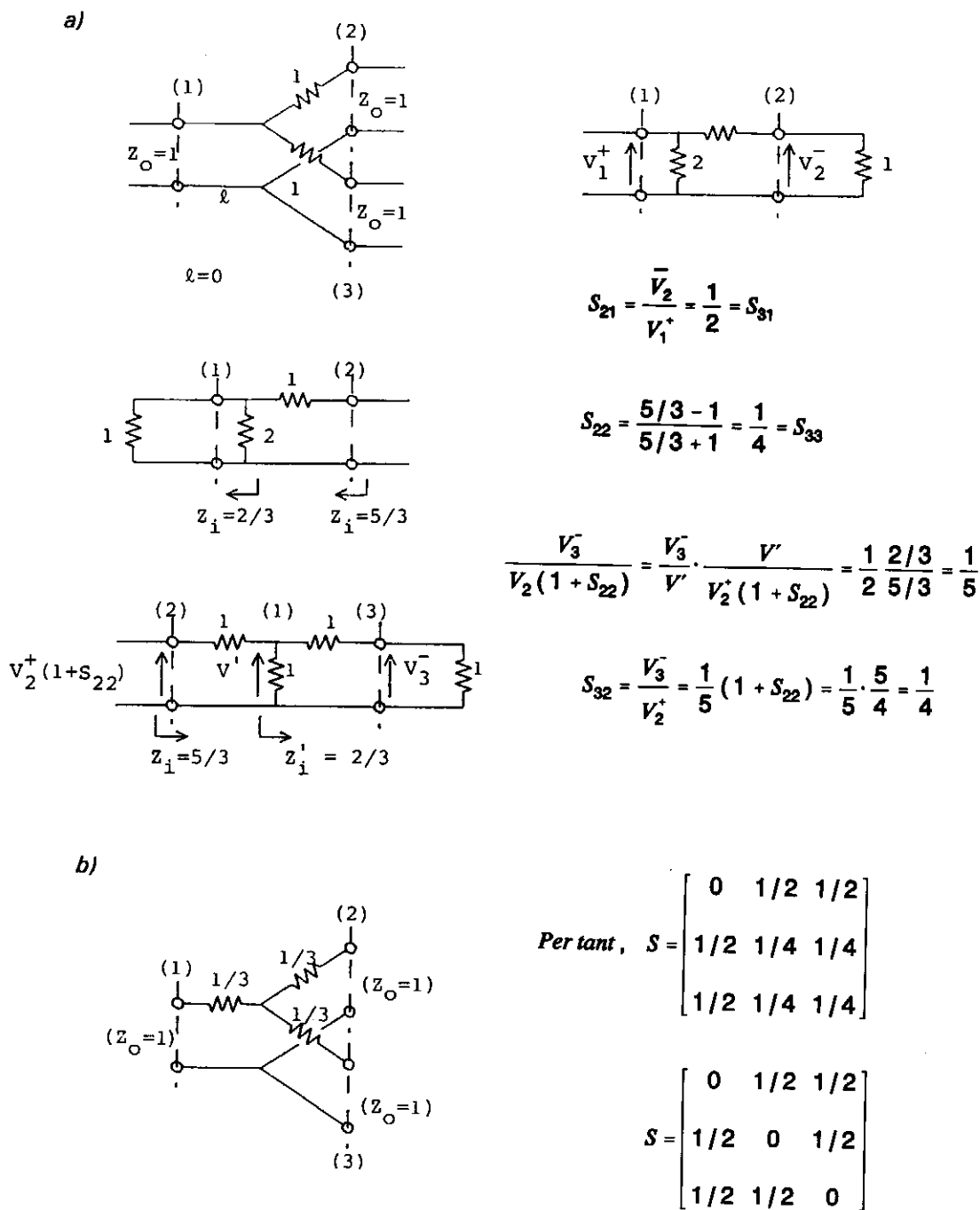


Fig. 6.7 Exemples de realitzacions de divisors de potència resistius i càlcul dels seus paràmetres S. La forma a és superior pel que fa a l'aïllament entre els accessos 2 i 3, i la b és superior pel que fa a l'adaptació d'aquests accessos.

Línies no equilibrades (un conductor a massa)

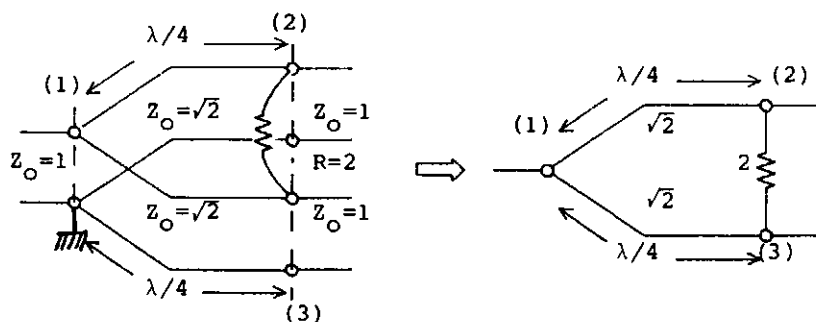


Fig. 6.8 Divisor de Wilkinson i el seu dibuix simplificat on s'ha omès un dels conductors de les línies de transmissió (per exemple, en sistemes de línia microtira, el pla de massa).

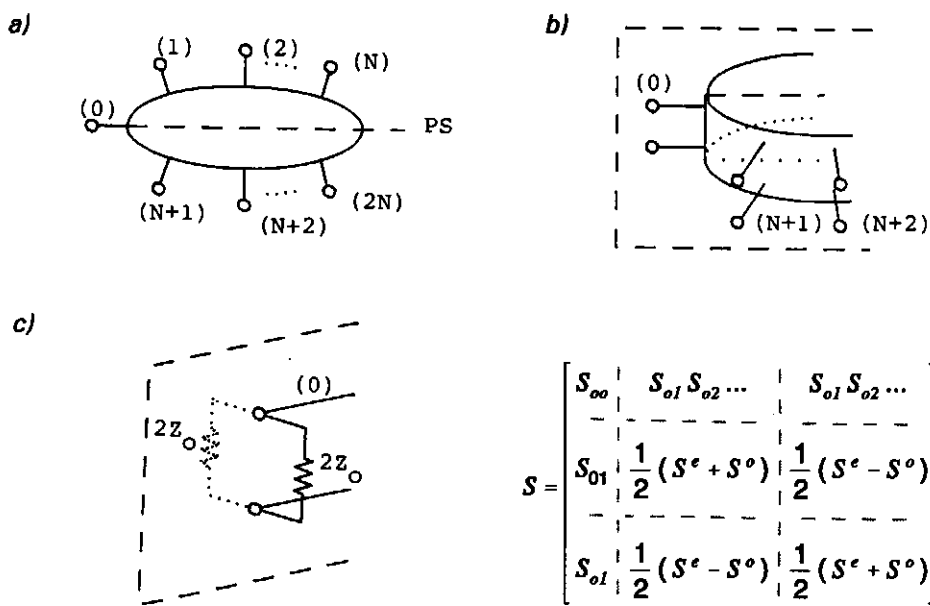
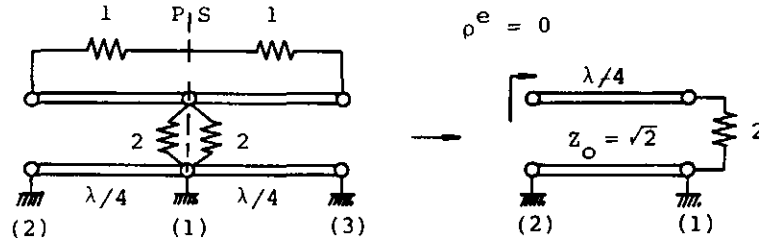
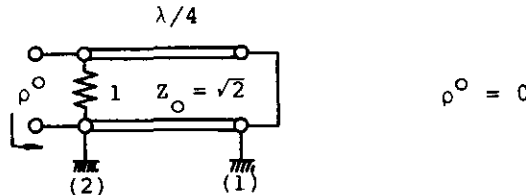


Fig. 6.9 a) Circuit simètric amb un pla de simetria (PS) i un accés (els dos conductors) contingut al circuit (noteu que cada accés està representat per una sola línia). b) Diagrama tridimensional del circuit anterior. c) Descomposició d'una terminació  $Z_0$  en dues resistències en paral·lel, una a cada costat del pla PS.

a) Paret magnètica/circuit obert (situació parella, even)



b) Paret elèctrica/curt circuit (situació imparella, odd)



Per tant, 
$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -j & -j \\ -j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fig. 6.10 Anàlisi del divisor de Wilkinson utilitzant el pla de simetria que conté l' accés 1 (advertiu que a la figura 6.9 l'anomenàvem accés 0).

la resistència de valor normalitzat 2, tenim:

1)  $S_{11}$ ,  $S_{21}$  i  $S_{31}$  valen el mateix que si no hi hagués la resistència, ja que per calcular-los s'han de terminar els accessos 2 i 3, i per simetria els punts en què està connectada s'han de mantenir al mateix potencial i no hi circularà cap corrent. Per tant, sabem de moment que:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-j}{\sqrt{2}} & \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ \frac{-j}{\sqrt{2}} & S_{22} & S_{23} \\ \frac{-j}{\sqrt{2}} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

2) Per calcular la submatriu d'ordre 2x2 que encara desconeixem, terminem l'accés 1 amb dues resistències de valor normalitzat 2 en paral·lel, una a cada costat del pla de simetria, i instal·lem una paret magnètica a la xarxa simètrica resultant (fig. 6.10a) i una altra d'elèctrica (fig. 6.10b) successivament, i obtenim per als coeficients de reflexió en l'accés 2 (o en el 3):

$$\rho^e = \rho^o = 0$$

Obtenim, finalment, per al divisor:

$$S = -\frac{j}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

#### 6.4 Circuladors

S'anomena circulador ideal una xarxa de tres accessos (també n'existeixen de quatre, però el seu ús és menys freqüent) sense pèrdues i *no* recíproca, la matriu  $S$  de la qual valgui:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.38a) \quad ; \quad \text{o bé} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.38b)$$

Les matrius anteriors són, evidentment, no simètriques i unitàries, i la xarxa té la propietat que, en condicions d'accessos terminats, el senyal que s'injecta en un d'ells surt només per un dels dos restants, mentre que per l'altre no surt res i es manté, per tant, aïllat.

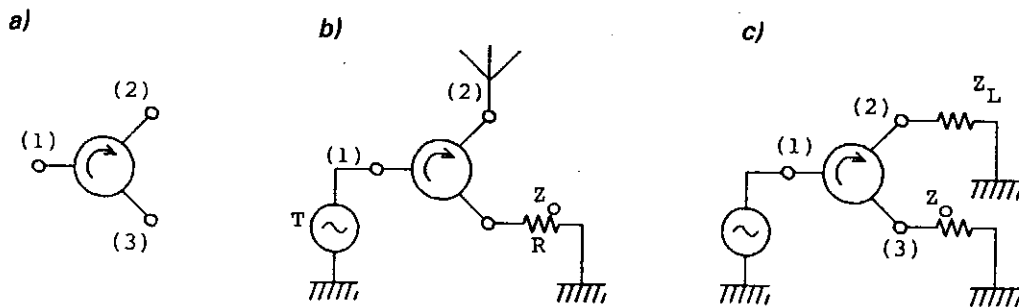


Fig. 6.11 a) Diagrama de circulator.  
 b) Utilització com a duplexor d'antena.  
 c) Utilització per aïllar un generador de les reflexions de la càrrega  $Z_L$  (aïllador).

La figura 6.11a representa esquemàticament un circulator amb matriu  $S$  de la forma (6.38a). La fletxa corba interior representa el *sentit de circulació* o de flux de senyals entre accessos. En aquest cas:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b_1 = a_3 \\ b_2 = a_1 \\ b_3 = a_2 \end{cases} \quad (6.39)$$

És evident que la forma (6.38b) correspon al sentit oposat de circulació.

Una aplicació típica dels circulators és com a duplexors d'antena (fig. 6.11b): la mateixa antena serveix simultàniament per a transmissor ( $T$ ) i receptor ( $R$ ), i el circulator s'encarrega del correcte adreçament dels senyals.

En l'altra aplicació important, el circulator s'utilitza per aïllar un generador dels senyals reflectits per una càrrega desadaptada (fig. 6.11c); aquestes càrregues són dirigides cap a la terminació de l'accés 3, on són absorbides. D'aquesta manera, el generador no percep mai reflexions i, en conseqüència, és com si estigués sempre connectat a una càrrega adaptada.

En aquesta configuració, la xarxa de dos accessos resultant de considerar només els 1 i 2 (amb el 3 terminat), se l'anomena aïllador i, com acabem de veure, es caracteritza

perquè permet el pas de senyals sense impediment d'1 a 2 i no ho permet en sentit invers. La seva matriu  $S$  serà, per tant:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Els circuladors es construeixen amb ferrites (materials ceràmics no conductors, però amb propietats magnètiques molt intenses) sotmeses a l'acció d'un camp magnètic estàtic. Veurem que el seu comportament és no recíproc.

En la realitat, les matrius  $S$  no prenen la forma ideal (6.38), ja que, d'una banda, els circuladors presenten pèrdues, i de l'altra, els accessos aïllats no ho estan completament. És a dir,

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad \text{amb} \quad \begin{array}{l} |S_{11}|, |S_{22}|, |S_{33}| < 1 \quad (\approx 0) \\ |S_{13}|, |S_{21}|, |S_{32}| < 1 \quad (\approx 1) \\ |S_{12}|, |S_{23}|, |S_{31}| < 1 \quad (\approx 0) \end{array}$$

En aquest cas, es defineixen:

a) Per a un accés, la *pèrdua de retorn* o mesura de la desviació d'adaptació mitjançant:

$$L_R \text{ (dB)} = -20 \log |S_{ii}| \quad (i=1,2,3) \quad (6.41)$$

(Si l'accés està adaptat,  $|S_{ii}| = 0$  i  $L_R \rightarrow \infty$  )

b) Entre dos accessos entre els quals hi ha transferència de senyal, la *pèrdua d'inserció* mitjançant:

$$L_I \text{ (dB)} = -20 \log |S_{ij}| \quad (6.42)$$

(idealment  $|S_{ij}| = 1$  i  $L_I = 0 \text{ dB}$  )



c) Entre dos accessos idealment aïllats, l'aïllament mitjançant:

$$I \text{ (dB)} = -20 \log |S_{ij}| \quad (6.43)$$

$$\text{o bé } I \text{ (dB)} = -2 \log |S_{ij}| - L_l \text{ (dB)} \quad (6.44)$$

La segona definició és més correcta que la primera, ja que té en consideració les pèrdues d'inserció en la direcció volguda i, per tant, ens diu el nivell (en dB) del senyal no volgut relatiu o per sota del volgut. En la pràctica, si les pèrdues d'inserció són petites (0,2 dB és un valor corrent) i l'aïllament és gran (25 dB també és corrent), la diferència entre (6.43) i (6.44) es fa irrellevant.

## 6.5 Xarxes de quatre accessos

Les xarxes passives de quatre accessos més importants són els acobladors direccionals (AD), elements que permeten mesurar per separat ones positives i negatives de manera directa. La propietat definidora d'un AD és la de tenir *dos parells d'accessos desacoblats*, és a dir, quatre elements de la seva matriu  $S$ , que no pertanyin a la diagonal principal, nuls.

Ara, ens interessa demostrar la proposició següent:

**Prop.** Si un 4-accessos recíproc i sense pèrdues està completament adaptat, és a dir, si  $S_{ii}=0$  ( $i=1,2,3,4$ ), és un acoblador direccional. (És a dir,  $S$  té quatre elements més nuls).

En efecte, suposem:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \delta & e \\ \beta & \delta & 0 & \sigma \\ \gamma & e & \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

Per unitarietat:

$$1f \times 2f^* \rightarrow \beta\delta^* + \gamma e^* = 0 \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} 1f \times 3f^* &\rightarrow \alpha\delta^* + \gamma\sigma^* = 0 \\ 1f \times 4f^* &\rightarrow \alpha\epsilon^* + \beta\sigma^* = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} \delta^* & \gamma \\ \epsilon^* & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \sigma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

En el sistema (6.47), si el determinant  $\Delta$  és no nul:

$$\Delta = \delta^*\beta - \gamma\epsilon^* \neq 0 \quad (6.48)$$

llavors  $\alpha = \sigma = 0$  i la proposició quedaria demostrada. D'altra banda, si  $\Delta = 0$ , llavors, sumant i restant de (6.46), s'obté:

$$\beta\delta^* = \gamma\epsilon^* = 0 \quad (6.49)$$

i necessàriament tindrem un altre parell de valors d'entre  $(\beta, \delta, \gamma, \epsilon)$  nuls.

Obtenim d'aquesta manera una matriu  $S$  amb 8 elements nuls que, mitjançant un canvi de numeració dels accessos si cal, sempre es pot posar de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \epsilon \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ \gamma & \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline -- & -- \\ B^t & 0 \end{array} \right) \quad (6.50)$$

(És a dir, hem assignat els números 1-2 i 3-4 als dos parells d'accessos desacoblats. Numeracions diferents situen els zeros en altres posicions, però de moment farem servir sempre matrius com la (6.50)).

Donada l'estructura de (6.50), és fàcil de veure que les submatrius  $2 \times 2$  no nul·les han de ser també unitàries:

$$SS^* = \left( \begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline -- & -- \\ B^t & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 0 & B^* \\ \hline -- & -- \\ B^+ & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} BB^+ & 0 \\ \hline -- & -- \\ 0 & B^t B^* \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -- & -- \\ 0 & 1 \end{array} \right) \quad (6.51)$$

i, per tant, es poden escriure:

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha e^{j\phi_1} & \sin\alpha e^{j\phi_2} \\ \sin\alpha e^{j\phi_2} & -\cos\alpha e^{j(2\phi_2-\phi_1)} \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

Si movem adequadament els plans de referència 1 o 3 podem fer  $\phi_1=0$ , i si movem 2 o 4, podem fer  $\phi_2=0$ . Per tant, per a aquests plans de referència particulars, tindrem:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.53a)$$

De manera anàloga, també podríem haver posat:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\alpha & j\sin\alpha \\ 0 & 0 & j\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & j\sin\alpha & 0 & 0 \\ j\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.53b)$$

Advertiu que, una vegada escollits els plans de referència adequats, la xarxa queda definida per un únic paràmetre, l'escalar  $\alpha$ .

**Exemple 1** Considerem un *AD* amb *S* de la forma (6.53a) connectat com a la figura 6.12a: un generador en 1, una càrrega  $Z_3$  en 3, i 2 i 4 terminats. Per simplificar, suposarem inicialment  $\alpha < 1$  (encara que això no invalida les conclusions que volem obtenir) i, per tant,  $\cos\alpha \approx 1$ ,  $\sin\alpha \approx \alpha$  :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & -1 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} b_1 = a_3 \\ b_2 = \alpha a_3 \\ b_3 = a_1 \\ b_4 = \alpha a_1 \end{matrix} \quad (6.54)$$

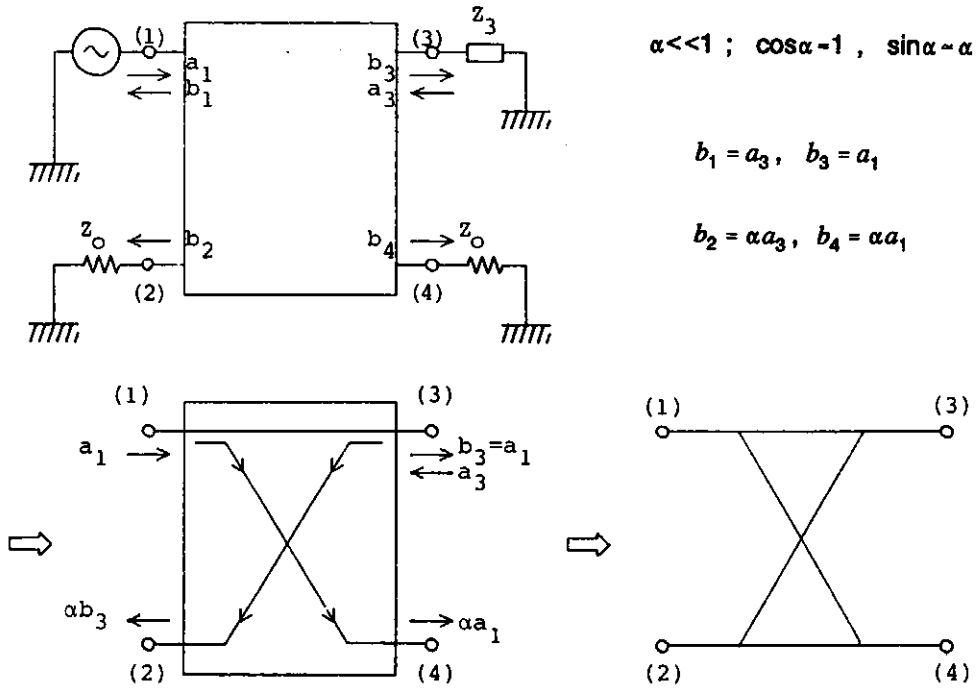


Fig. 6.12 a) Exemple d'utilització d'un AD. Els senyals a 2 i 4 són proporcionals, respectivament, a les ones positiva i negativa a la branca superior 2-3 (fig. b).  
 c) Esquema simbòlic de l'AD.

És a dir, el senyal es transmet per la branca superior 1-3 sense pertorbació, mentre que a 2 i 4 obtenim senyals proporcionals a les ones positiva i negativa en la branca superior (fig. 12b); per això el nom d'acoblador direccional.

Observeu a més que:

$$\frac{b_2}{b_4} = \frac{\alpha a_3}{\alpha a_1} = \frac{\rho_3 b_3}{a_1} = \rho_3 \tag{6.55}$$

és a dir, que podem obtenir una indicació directa del coeficient de reflexió de la impedància  $Z_3$ . En l'anàlisi anterior hem de tenir en compte que:

1) Donada la simetria de  $S$  (equació (6.54)) les branques 1-3 i 2-4 són equivalents. És a dir, es pot intercanviar la branca principal i l'acoblada sense que les conclusions canviïn, raó per la qual l'esquema simbòlic de la figura 12c les representa simètriques.

2) Si  $\alpha$  no és molt petit i no podem fer aproximacions, tindrem, en comptes de (6.54):

$$b_1 = \cos\alpha \cdot a_3, \quad b_2 = \sin\alpha \cdot a_3, \quad b_3 = \cos\alpha \cdot a_1, \quad b_4 = \sin\alpha \cdot a_1 \quad (6.56)$$

En aquest cas, l'ona que surt de la branca principal,  $b_3$ , no es pot aproximar per  $a_1$ , ja que no podem negligir la fracció de potència que s'extreu per 4. En comptes de (6.55), ara tenim:

$$\frac{b_2}{b_4} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{\rho_3 b_3}{\left(\frac{b_3}{\cos\alpha}\right)} = \cos\alpha \cdot \rho_3 \quad (6.57)$$

expressió que també caracteritza  $\rho_3$  una vegada conegut  $\alpha$ . ■

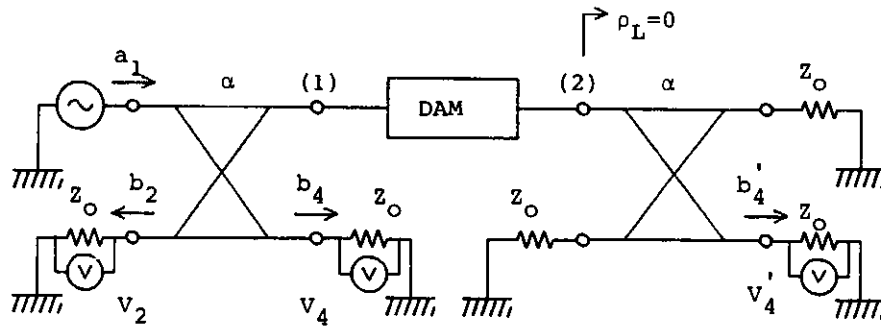
**Exemple 2** La figura 6.13 mostra com dos acobladors direccionals iguals, juntament amb tres voltímetres adaptats al sistema (és a dir, d'impedància interna  $Z_0$ ) i dues terminacions addicionals, formen un sistema bàsic de mesura dels paràmetres de  $S$  d'un 2-accessos (o bé un  $n$ -accessos en general).

Noteu que la sortida del dispositiu a mesurar està terminada, ja que també ho estan les tres branques de l'AD. Les expressions que donen  $S_{11}$  i  $S_{21}$  en funció de les tensions mesurades ( $V_2, V_4, V_4'$ ) són d'obtenció immediata.

Per mesurar  $S_{22}$  i  $S_{12}$  n'hi ha prou amb invertir la posició en què està instal·lat el dispositiu en el sistema. ■

Per a un AD es defineix l'acoblament  $C$  en dB mitjançant l'expressió:

$$C = -20 \log |S_{14}| = -20 \log (\sin\alpha) \quad (6.58)$$



DAM = Dispositiu a mesurar    V = Voltímetre ideal ( $Z_m = \infty$ )

$$S_{11} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{b_2}{b_4} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{V_2}{V_4} \quad ; \quad S_{21} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{b'_4}{b_4} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{V'_4}{V_4}$$

Fig. 6.13 Disposició de dos AD iguals i voltímetres ideals com a sistema bàsic de mesura de paràmetres S. Per mesurar  $S_{22}$  i  $S_{12}$  s'inverteix el DAM.

Si els accessos no estan perfectament adaptats ni aïllats:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{11} & S_{14} & -S_{13} \\ S_{13} & S_{14} & S_{11} & S_{12} \\ S_{14} & -S_{13} & S_{12} & S_{11} \end{pmatrix}$$

es defineixen també les pèrdues de retorn en qualsevol accés (que hem suposat iguals)  $L_R$ , i a la directivitat,  $D$ , mitjançant les expressions:

$$L_R = -20 \log |S_{11}| \quad (6.59) \quad (\text{pèrdua de retorn en dB})$$

$$D = 20 \log \frac{|S_{14}|}{|S_{12}|} \quad (6.60) \quad (\text{directivitat en dB})$$

La directivitat indica el nivell (en dB) del senyal no volgut en l'accés que hauria d'estar desacoblat en relació amb el senyal acoblat.

## 6.6 Híbrids

Un AD de 3 dB ( $C=3$  dB) se l'anomena *circuit híbrid* o híbrid. En aquest cas:

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

i les formes canòniques per a la matriu  $S$  donades per (6.53) queden:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & j & 1 \\ 1 & j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.61a,b)$$

Quan el circuit respon a la forma (6.61a) se sol anomenar *híbrid de 180°*, i si respon a la (6.61b), *híbrid de 90°* (fig. 6.14), si bé és evident que podem passar d'un a l'altre, a una freqüència determinada, mitjançant un canvi de pla de referència.

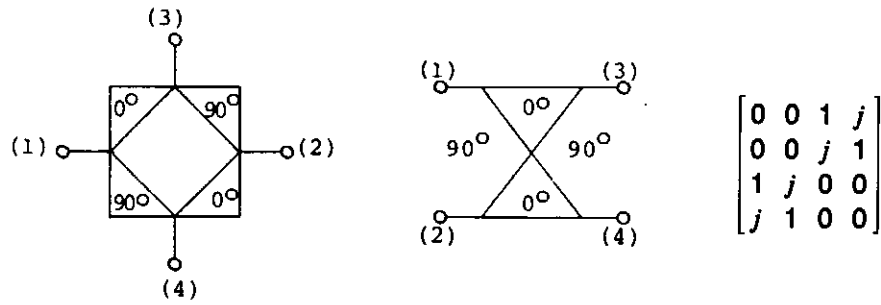
En un híbrid de 180°, els accessos desacoblats també se'ls anomena suma ( $\Sigma$ ) i diferència ( $\Delta$ ); vegeu la figura 6.14c on, si s'injecten senyals per 1 i 2,  $b_3$  és proporcional a la seva suma, i  $b_4$ , a la seva diferència. Evidentment, la denominació també s'aplica a 1 i a 2 si injectem els senyals des de 3 i 4.

A continuació, considerem tres exemples bàsics d'aplicació de l'híbrid de 180°.

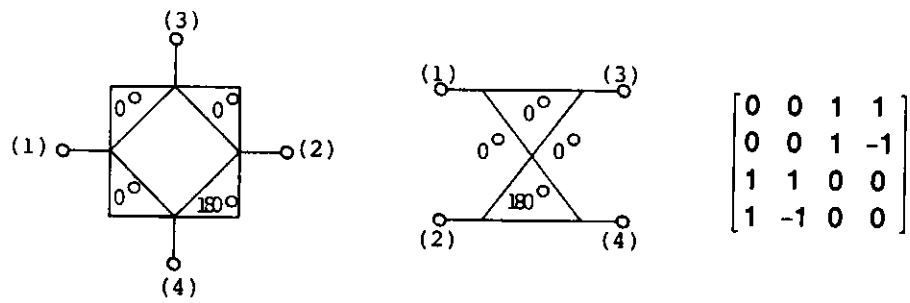
### Exemple 1 Pont d'impedàncies

Suposem un híbrid de 180° amb un generador en 1, 2 terminat, i 3 i 4 carregats arbitràriament (fig. 6.15a). A la mateixa figura es calcula el valor de  $b_2$ :

a)



b)



c)

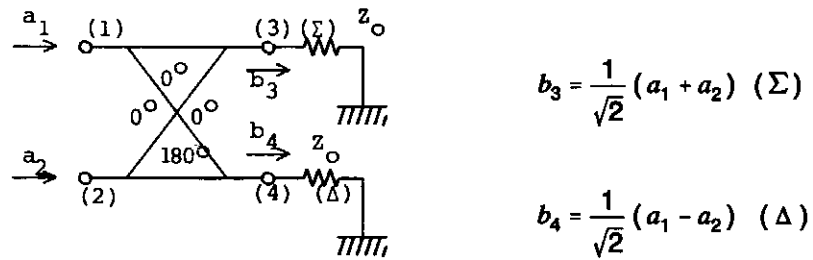
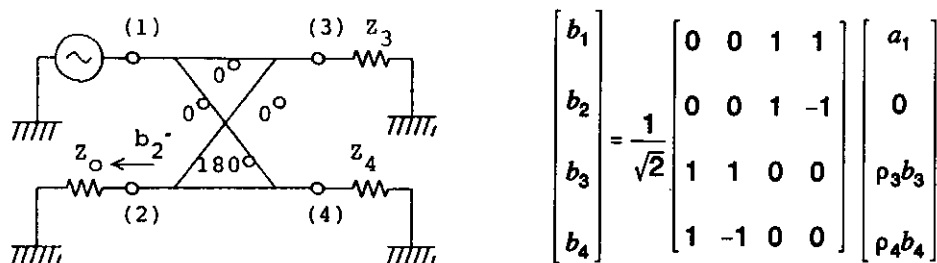


Fig. 6.14 Esquemes simbòlics d'híbrids de 90° a, i de 180°, b. Els accessos 3 i 4 d'un híbrid de 180° també solen denominar-se Σ (suma) i Δ (diferència), respectivament.



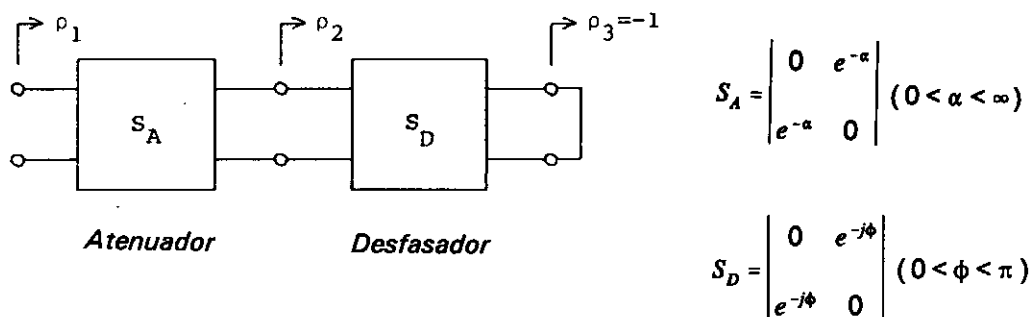
a)



$$b_3 = b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 \quad ; \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_3 b_3 - \rho_4 b_4) = \frac{1}{2} (\rho_3 - \rho_4) a_1$$

$$\text{si } Z_3 = Z_4 \rightarrow \rho_3 = \rho_4 \rightarrow b_2 = 0 \quad (\text{pont d'impedàncies})$$

b)



$$\rho_i = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_L}{1 - S_{22} \rho_L}$$

$$\rho_2 = -e^{-2j\phi} \quad ; \quad \rho_1 = -e^{-2\alpha} e^{-2j\phi}$$

Fig. 6.15 a) Un híbrid de 180° com a pont d'impedàncies: si  $Z_3 = Z_4$ , en l'accés 2 la tensió s'anul·la.

b) Síntesi d'una impedància arbitrària (coeficient de reflexió  $\rho_i$  arbitrari) mitjançant un atenuador variable i un desfasador variable.

$$b_2 = \frac{1}{2}(\rho_3 - \rho_4)a_1 \quad (6.62)$$

on  $\rho_3$  i  $\rho_4$  són els coeficients de reflexió associats amb  $Z_3$  i  $Z_4$ . De manera que si  $Z_3 = Z_4$ ,  $b_2 = 0$ , i per tant un voltímetre (adaptat al sistema) detectaria un zero de tensió.

D'aquesta manera, si  $Z_3$ , per exemple, és desconeguda i podem variar  $Z_4$  de forma coneguda (referència), sabrem que  $Z_3 = Z_4$  quan haurem obtingut un zero de tensió en 2 (pont d'impedàncies).

La figura 6.15b indica la manera de realitzar una impedància arbitrària amb un atenuador variable i un desfasador variable; el coeficient de reflexió a l'entrada val:

$$\rho_1 = -e^{-2\alpha} e^{-2j\phi} \quad (6.63)$$

variant  $\alpha$  entre  $(0, \infty)$  i  $\phi$  entre  $(0, \pi)$ . Si ambdós, atenuador i desfasador, estan calibrats (és a dir, si coneixem els valors de  $\alpha$  i  $\phi$  en cada moment) també coneixerem el valor de  $\rho_1$ . ■

### Exemple 2 Divisor de potència

Si, com a l'exemple anterior, l'accés 2 està terminat, per als tres accessos resultants podem escriure (respectant la numeració de l'híbrid):

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (6.64)$$

És a dir, el 3-accessos resultant es comporta com un divisor/combinador de potència ideal. ■

### Exemple 3 Detector de fase

Suposem ara que en els accessos 1 i 2 injectem senyals coherents de la mateixa amplitud, però amb fase diferent (fig. 6.16):

A més, la xarxa serà sense pèrdues si  $Y_0 > 1$  i en aquest cas:

$$a_1 = a e^{j\phi_1} \quad a_2 = a e^{j\phi_2} \quad (6.65)$$

A la figura 6.16 també es calculen els valors de  $b_3$  i  $b_4$ :

$$b_3 = \frac{2a}{\sqrt{2}} \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)} \quad (6.66a)$$

$$b_4 = j \frac{2a}{\sqrt{2}} \sin \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)} \quad (6.66b)$$

És a dir, les fraccions de senyal que es desvien a 3 i 4 depenen del desfasament  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$  entre  $a_1$  i  $a_2$ . Encara més, s'observa que:

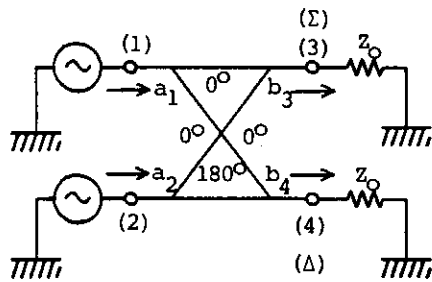
$$|b_3|^2 - |b_4|^2 = 2|a|^2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (6.67)$$

De forma que si a 3 i 4 col·loquem detectors quadràtics (d'impedància interna  $Z_0$ ) i restem les seves sortides, el senyal resultant és proporcional a  $\cos(\Delta\phi)$  (detector de fase). ■

Diguem, finalment, que un híbrid de 180° es comporta, bàsicament, com la bobina híbrida utilitzada a telefonia, i que consisteix en un transformador amb una presa simètrica en el debanat secundari (fig. 6.17). És fàcil de veure que, amb  $Z_{o3} = Z_{o4}$ , 1 i 2 estan aïllats, i un generador en 1 produeix tensions a 3 i 4 com les dibuixades a la figura. D'altra banda, un generador a 2 excita 3 i 4 amb tensions de sentits oposats entre si.

Heu de notar que, en canvi, en una bobina híbrida els accessos 3 i 4 no estan aïllats, ni la xarxa està completament adaptada.

Més endavant veurem unes altres aplicacions dels híbrids en la realització de circuits actius (amplificadors, oscil·ladors i mescladors).



$$a_1 = a e^{j\phi_1}, \quad a_2 = a e^{j\phi_2}$$

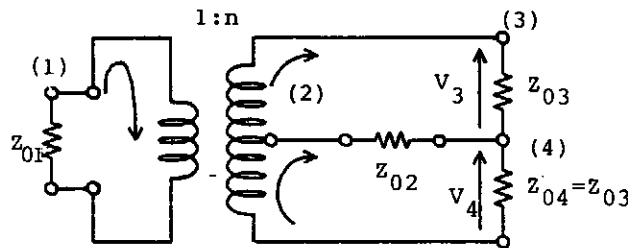
$$b_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} (e^{j\phi_1} + e^{j\phi_2}), \quad b_4 = \frac{a}{\sqrt{2}} (e^{j\phi_1} - e^{j\phi_2})$$

$$b_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)} \left[ e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)} + e^{-j\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)} \right] = \frac{2a}{\sqrt{2}} \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)}$$

Anàlogament 
$$b_4 = j \frac{2a}{\sqrt{2}} \sin \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$|b_3|^2 - |b_4|^2 = 2|a|^2 \left( \cos^2 \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} - \sin^2 \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) = 2|a|^2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Fig. 6.16 Un híbrid de 180° com a detector de fase. Si  $a_1$  i  $a_2$  són coherents i de la mateixa amplitud, les amplituds de les ones que surten per 3 i 4 són proporcionals al cosinus i al sinus de la meitat del desfasament entre  $a_1$  i  $a_2$ .



Amb (3) i (4) carregats de la mateixa manera:  $S_{12} = 0$

Fig. 6.17 Bobina híbrida. Els accessos 1 i 2 estan desacoblats si  $Z_{03} = Z_{04}$ , amb independència dels valors particulars de  $n$ ,  $Z_{01}$ ,  $Z_{02}$  i  $Z_{03} = Z_{04}$ .

### 6.7. Realització d'acobladors direccionals

Les més freqüents, en l'àmbit de les línies de transmissió, són les que utilitzen línies acoblades i seccions de línia en  $\lambda/4$ .

Una forma d'aquestes últimes és l'esquematzada a la figura 6.18; quatre seccions de línia en  $\lambda/4$  formant un quadrat (o un anell), amb les impedàncies característiques iguals dos a dos. Donada la simetria, l'anàlisi d'aquesta estructura es pot fer a partir de la seva meitat simètrica i de l'antisimètrica, segons expliquem a l'apartat 6.1 i tal com s'indica a la mateixa figura 6.18. Advertiu que utilitzem un resultat anterior, recollit a la figura 6.14 (exemple 2 de l'apartat 6.1).

Resumim els resultats obtinguts a la figura 6.18; l'estructura és un  $AD$  si:

$$Y_{01}^2 = 1 + Y_{02}^2 \quad (6.68)$$

i llavors:

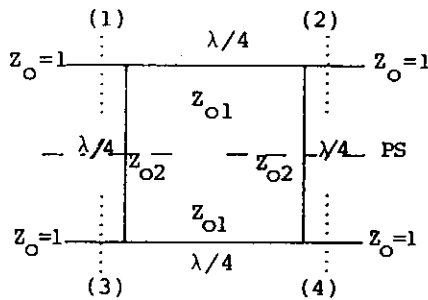
$$S = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & 0 & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{14} & 0 \\ 0 & S_{14} & 0 & S_{12} \\ S_{14} & 0 & S_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{12} = -\frac{j}{Y_{01}} = -\frac{j}{\sqrt{1 + Y_{02}^2}}$$

$$S_{14} = -\frac{Y_{02}}{Y_{01}} = -\frac{Y_{02}}{\sqrt{1 + Y_{02}^2}} \quad (6.69)$$

Advertiu que la forma de  $S$  no coincideix amb les formes canòniques donades per (6.53), cosa que s'esmena fàcilment si renumerem els accessos (fig. 6.19 a i b). Per realitzar un híbrid,  $|S_{12}| = |S_{14}| = 1/\sqrt{2}$  i, per tant:

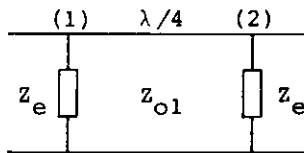
$$Y_{02} = 1 \quad ; \quad Y_{01} = \sqrt{2}$$



Per a línia en  $\lambda/8$   
 $\tan \beta l = 1$

$$Z_{icc} = jZ_o, \quad Z_{ica} = -jZ_o$$

- Situació parella (P.M./circuits oberts)

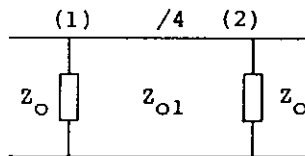


$$Z_e = -jZ_{o2}$$

$$S_{11}^e = S_{22}^e = 0 \text{ si } Y_e^2 = 1 - Y_{o1}^2 \rightarrow Y_{o1}^2 = 1 + Y_{o2}^2$$

$$S_{12}^e = -j \frac{Y_{o1}}{1 + Y_e} = -j \frac{Y_{o1}}{1 + jY_{o2}}$$

- Situació imparella (P.E./circuit tancats)



$$Z_o = jZ_{o2}$$

$$S_{11}^o = S_{22}^o = 0 \text{ si } Y_o^2 = 1 - Y_{o1}^2 \rightarrow Y_{o1}^2 = 1 + Y_{o2}^2$$

$$S_{12}^o = -j \frac{Y_{o1}}{1 + Y_o} = -j \frac{Y_{o1}}{1 - jY_{o2}}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_{12}^e + S_{12}^o & S_{12}^e - S_{12}^o \\ S_{12}^e - S_{12}^o & S_{12}^e + S_{12}^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & 0 & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{14} & 0 \\ 0 & S_{14} & 0 & S_{12} \\ S_{14} & 0 & S_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{12} = \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) = -j \frac{Y_{o1}}{1 + Y_{o2}^2} = -\frac{j}{Y_{o1}} ; \quad S_{14} = \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = -\frac{Y_{o1} Y_{o2}}{1 + Y_{o2}^2} = -\frac{Y_{o2}}{Y_{o1}}$$

Fig. 6.18 Anàlisi de l'estructura simètrica formada per un quadrat de línies en  $\lambda/4$ . Si  $Y_{o1}^2 = 1 + Y_{o2}^2$ , l'estructura es comporta com un acoblador direccional.

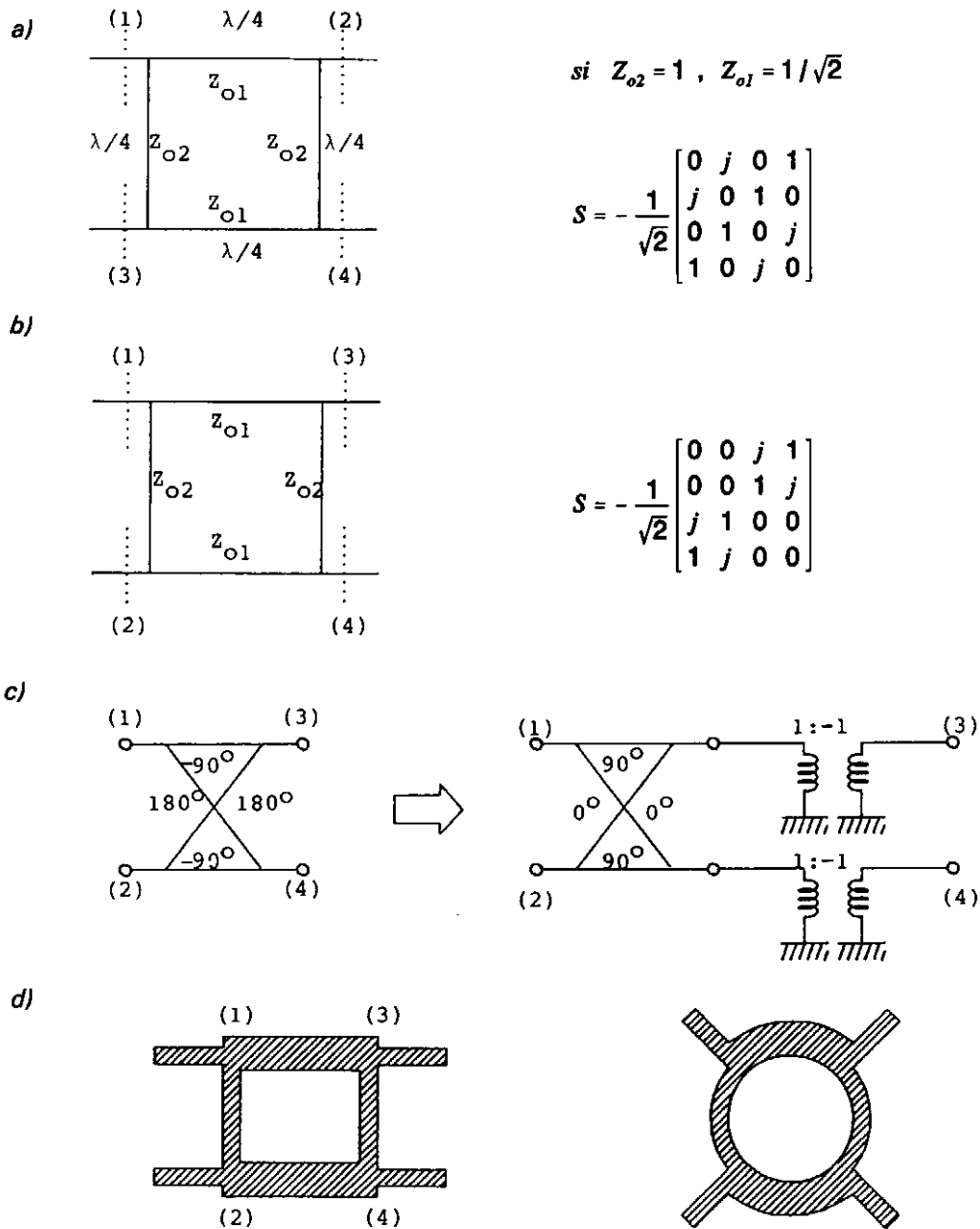


Fig. 6.19 a) Forma particular de l'estructura anterior per a un híbrid (AD de 3 dB).  
 b) Renumeració dels accessos.  
 c) Esquema simplificat equivalent. Se sol ometre els transformadors 1:-1 (canvis de signe de la tensió i del corrent).  
 d) Aspecte de realitzacions en línia microtira o triplaca (es representa la forma de les tires conductores).

i obtenim l'estructura de les figures 6.19 *a* i *b*. Advertiu també el signe menys que afecta tots els elements  $S_{ij}$ , per la qual cosa l'esquema equivalent és el de la figura 6.19c; els transformadors 1:-1 representen canvis de signe simultanis en la tensió i el corrent i s'acostumen a ometre, ja que normalment la fase dels accessos 3-4 relativa als 1-2 no és rellevant (compareu això amb el que hem dit a l'apartat 6.6 referent al circuit equivalent d'una línia en  $\lambda/2$ , figura 6.15).

Aquest híbrid, realitzat en línies triplaca o microtira, presenta l'aspecte de la figura 6.19d en les seves versions rectangular i circular. Normalment, es prefereix la versió circular perquè té una major capacitat de control de longituds de línia i un menor nombre de discontinuïtats geomètriques, que sempre suposen efectes no volguts. A les mateixes figures, que estan aproximadament a escala, s'observa que la línia de  $Z_0$  menor és més ampla que les línies restants. Això, l'eixamplament de les línies d'impedància característica baixa o l'estrenyiment de les d'impedància alta, és el que limita la utilització d'aquesta estructura quan es volen acobladors direccionals amb acoblament dèbil ( $C$  en  $dB$  gran).

Per exemple, si volem  $C = 20$  dB tenim dues possibilitats: (equacions (6.69) i figura 6.18):

a)

$$|S_{12}|^2 = \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad Y_{02} = \sqrt{99} = 9.95 \quad ; \quad Y_{01} = 10$$

Per tant, amb impedància de referència de  $50 \Omega$ ,  $Z_{01}$  i  $Z_{02}$  serien de  $5.0 \Omega$ , i la realització física de l'híbrid impossible. Per exemple, amb  $\epsilon_r = 2.1$  (valor típic d'un substrat plàstic) resulta  $w/h = 48$ .

b)

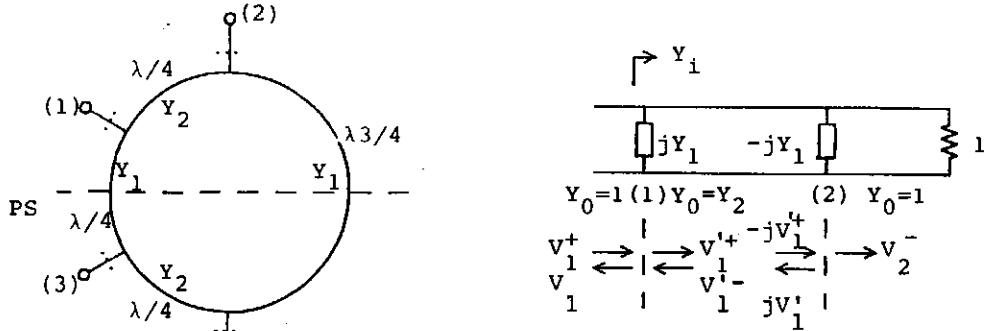
$$|S_{14}| = \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad Y_{02} = \frac{1}{\sqrt{99}} = 0.10 \quad ; \quad Y_{01} = 1.005$$

En aquest altre cas, el problema estaria amb la línia de  $Z_0 = 500 \Omega$ ; per a  $\epsilon_r = 2.1$  resulta que  $w/h = 4.5 \cdot 10^5$ , i amb els gruixos típics de substrats de microones ( $h < 1$  mm) l'amplada de la línia hauria de ser molt inferior a una micra.

Una altra forma possible de realitzar un *AD* amb línies de transmissió és l'esquematzada a la figura 6.20; un anell d' $1.5\lambda$  de longitud format per quatre trams d'impedàncies  $Z_1$  i  $Z_2$ , tres d'ells en  $\lambda/4$  i un en  $3\lambda/4$ , connectats a l'exterior mitjançant quatre accessos. Atès que existeix un pla de simetria, es pot realitzar una anàlisi similar a les anteriors, com s'indica a la mateixa figura.



a) Situació parella (P.M./C.A.)

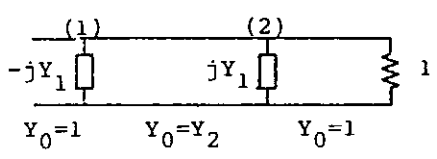


$$S_{11}^e = \frac{1 - Y_i}{1 + Y_i} = \frac{1 - jY_1 - \left( \frac{Y_2^2}{1 - jY_1} \right)}{1 + jY_1 + \left( \frac{Y_2^2}{1 - jY_1} \right)} = \frac{(1 - jY_1)^2 - Y_2^2}{1 + Y_1^2 + Y_2^2} ; \quad S_{22}^e = \frac{(1 + jY_1)^2 - Y_2^2}{1 + Y_1^2 + Y_2^2}$$

$$V_1^+ + V_1^- = V_1'^+ + V_1'^- ; \quad V_2^- = -j(V_1'^+ - V_1'^-) ; \quad -\frac{V_1'^-}{V_1'^+} = \frac{Y_2 + jY_1 - 1}{Y_2 - jY_1 + 1}$$

$$\frac{V_2^-}{V_1^+} \cdot \frac{1}{(1 + S_{11}^e)} = -j \frac{1 - \left( \frac{V_1'^-}{V_1'^+} \right)}{1 + \left( \frac{V_1'^-}{V_1'^+} \right)} ; \quad S_{21}^e = (1 + S_{11}^e) \frac{-jY_2}{1 - jY_1} = \frac{-2jY_2}{1 + Y_1^2 + Y_2^2}$$

b) Situació imparella (P.E./C.C.)



Igual que l'anterior  
amb el canvi  
 $Y_1 \rightarrow -Y_1$

c) Condició de AD:  $S_{11}^e + S_{11}^o = S_{22}^e + S_{22}^o = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (1 - jY_1)^2 - Y_2^2 + (1 + jY_1)^2 - Y_2^2 = 0 \Rightarrow Y_1^2 + Y_2^2 = 1$

Fig. 6.20 Realització alternativa d'un AD en línies de transmissió. a) Càlcul dels paràmetres  $S_{ij}^e$  i b) dels  $S_{ij}^o$ . Noteu que en ambdós casos, i a diferència de l'estructura anterior,  $S_{11}^o$ ,  $S_{22}^o$ ,  $S_{11}^e$  i  $S_{22}^e$  no són nuls.

En aquest cas, i a diferència de la realització anterior,  $S_{11}^e$ ,  $S_{22}^e$ ,  $S_{11}^o$  i  $S_{22}^o$  no s'anul·len i la condició de AD ( $S_{ii}=0$ ) ve donada per:

$$S_{11}^e + S_{11}^o = S_{22}^e + S_{22}^o = 0 \quad \rightarrow \quad Y_1^2 + Y_2^2 = 1 \quad (6.70)$$

i, llavors:

$$S_{11}^e = S_{22}^o = \frac{1 - Y_1^2 - Y_2^2 - 2jY_1}{1 + Y_1^2 + Y_2^2} = -jY_1 \quad (6.71)$$

$$S_{22}^e = S_{11}^o = \frac{1 - Y_1^2 - Y_2^2 + 2jY_1}{1 + Y_1^2 + Y_2^2} = jY_1 \quad (6.72)$$

$$S_{12}^e = S_{21}^e = -jY_2 \quad ; \quad S_{12}^o = S_{21}^o = -jY_2 \quad (6.73)$$

per tant:

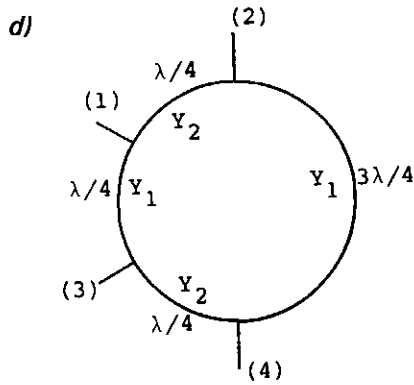
$$S_{12} = \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) = -jY_2 \quad ; \quad S_{13} = \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) = -jY_1$$

$$S_{14} = \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = 0 \quad ; \quad \text{etc.} \quad (6.74)$$

i obtenim finalment:

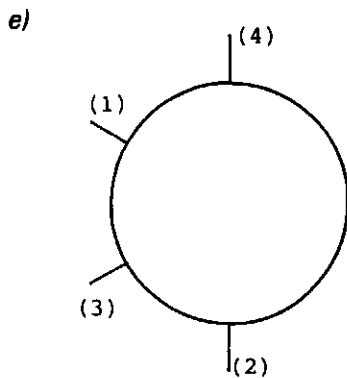
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -jY_2 & -jY_1 & 0 \\ -jY_2 & 0 & 0 & jY_1 \\ -jY_1 & 0 & 0 & -jY_2 \\ 0 & jY_1 & -jY_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

També com abans, els accessos es poden renumerar per portar  $S$  a una de les formes (6.53) (figura 6.21e); i si fem  $Y_1 = Y_2 = 1/\sqrt{2}$ , obtenim un híbrid descrit per:



$$\text{Si } Y_1^2 + Y_2^2 = 1 \rightarrow$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -jY_2 & -jY_1 & 0 \\ -jY_2 & 0 & 0 & jY_1 \\ -jY_1 & 0 & 0 & -jY_2 \\ 0 & jY_1 & -jY_2 & 0 \end{bmatrix}$$



$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -jY_1 & -jY_2 \\ 0 & 0 & -jY_2 & jY_1 \\ -jY_1 & -jY_2 & 0 & 0 \\ -jY_2 & jY_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 6.21 (Continuació de la figura anterior)

d) Expressió de  $S$  amb la condició de  $AD$ ,  $Y_1^2 + Y_2^2 = 1$ .

e) Renumeració dels accessos per posar  $S$  en la forma canònica (6.53).

$$S = -\frac{j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

el circuit equivalent simplificat del qual, excepte per dos desfasaments addicionals de  $-90^\circ$  a les sortides 3-4 (o, també, a les 1-2), és el d'un híbrid de  $180^\circ$  (fig. 6.21g).

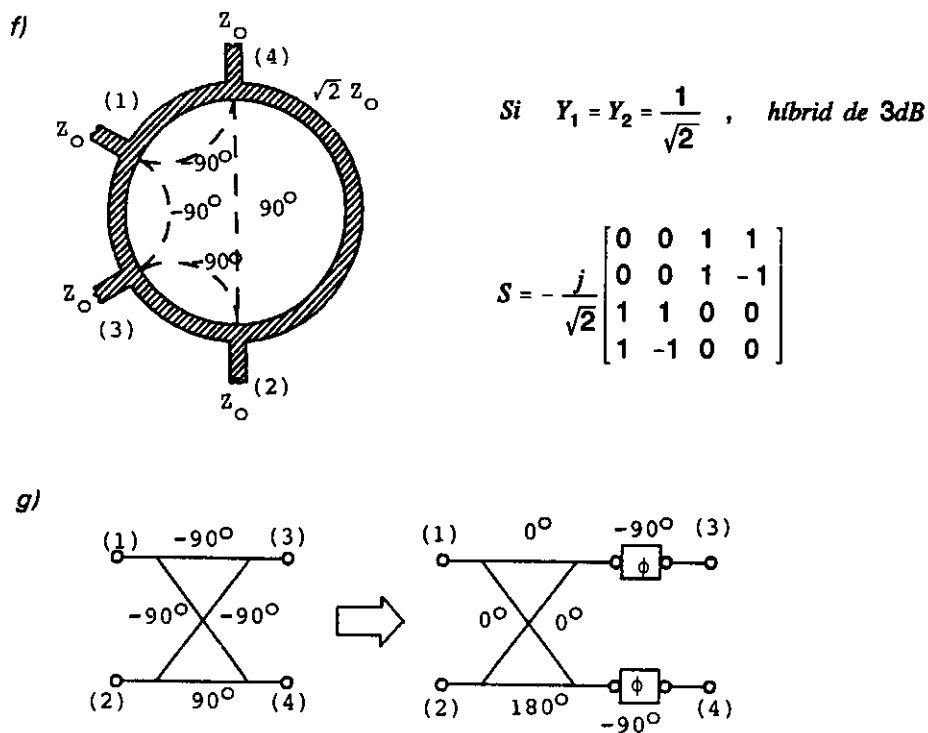


Fig. 6.21 (continuació)

f) Híbrid realitzat en línia microtira.

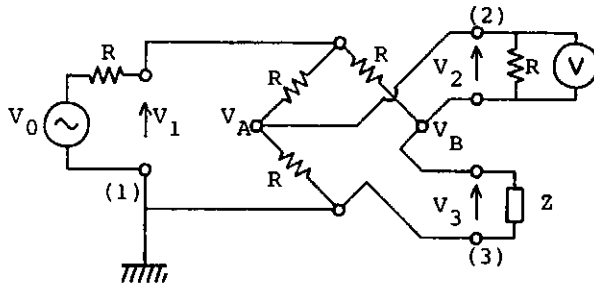
g) Circuit equivalent simplificat de l'híbrid anterior.

La figura 6.21f mostra l'aspecte de la realització d'un híbrid com aquest en la línia microtira.

Totes aquestes estructures construïdes amb seccions de línies de longitud definida en termes de  $\lambda$  són, evidentment, vàlides només a la freqüència de disseny. Quan ens apartem d'aquesta freqüència, el seu comportament comença a desviar-se de l'ideal, essent utilitzables en la pràctica, amb una certa degradació de prestacions, en amplades de banda fins del 10-15%. En tot cas, no són apropiats com a elements de mesura, als quals generalment s'exigeix un bon comportament en amplades de banda com més grans millor.

Un circuit que, pel seu caràcter resistiu, no presenta aquests inconvenients és la xarxa de tres accessos de la figura 6.22a: un pont resistiu (*pont de Wheatstone*) utilitzat per connectar un generador (1) a la impedància desconeguda  $Z$  (3) i a un voltímetre (2). Tant

a)



(1) Accés de generador.

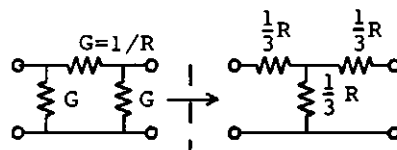
(2) Accés de mesura.

$$V_2 = V_A - V_B$$

(3) Accés de prova.

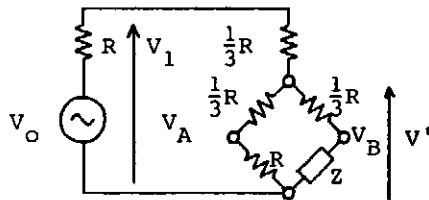
$R = Z_0 =$  impedància de referència del sistema.

b)



$$Y = \begin{bmatrix} 2G & -G \\ -G & 2G \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}R & \frac{1}{3}R \\ \frac{1}{3}R & \frac{2}{3}R \end{bmatrix} \quad Z = Y^{-1}$$

c)



$$V' = \frac{V_0}{6} \frac{R + 3Z}{R + Z}$$

$$V_2 = V_A - V_B = \frac{V_0}{8} \frac{R - Z}{R + Z} = -\frac{V_0}{8} \rho$$

$$V_A = \frac{3}{4} V', \quad V_B = \frac{3Z}{R + 3Z} V'$$

Fig. 6.22 a) Esquema d'un pont d'impedàncies utilitzat com a mesurador de coeficients de reflexió. La impedància que s'ha de mesurar és  $Z$ .

b) Equivalència de xarxes utilitzada per passar al circuit c), en el qual es poden calcular fàcilment  $V_A$  i  $V_B$ .

el generador com el voltímetre i tres braços del pont han de tenir la mateixa impedància resistiva, coincident amb la impedància característica del sistema.

Sota aquestes condicions l'anàlisi del circuit és senzilla i està resumida a la mateixa figura 6.22: n'hi ha prou amb canviar una xarxa en  $\pi$  per la seva equivalent en  $T$  (fig. 6.22b), cosa que permet calcular la tensió mesurada pel voltímetre,  $V_2$ ; s'obté (fig. 6.22c):

$$V_2 = -\frac{V_o}{8} \frac{Z-R}{Z+R} = -\frac{V_o}{8} \rho \quad (6.77)$$

essent  $\rho$  el coeficient de reflexió associat amb la impedància que es mesura. Per tant, si  $Z$  està adaptada al sistema,  $Z=Z_o$ ,  $\rho=0$  i llavors  $V_2=0$ ; mentre que en qualsevol altre cas, (6.77) proporciona el valor de  $\rho$  a partir de  $V_2$ .

Sobre aquesta xarxa de mesura (pont reflectomètric o pont d'impedàncies) hem de fer els advertiments següents:

- 1) És essencial que el generador estigui adaptat al sistema ( $Z_G=R=Z_o$ ), ja que d'altra manera els càlculs no condueixen a (6.77). Si un generador real no ho estigués, caldria utilitzar un circulator o, si més no, un atenuador d'atenuació suficient.
- 2) El senyal màxim que s'obté a 2,  $V_2$ , és (quan  $|\rho|=1$ ):

$$|V_2|_{\max} = \frac{|V_o|}{8} \quad (6.78)$$

mentre que per al generador és:

$$|V_1|_{\max} = \frac{|V_o|}{2} \quad (6.79)$$

De manera que la màxima potència que s'obté a 2 està 12 dB per sota de la potència disponible del generador,  $P_{avs}$ .

## 6.8 Línies acoblades simètriques

Si dues línies que recorren paral·leles estan prou properes, l'acoblament mutu capacitiu i inductiu entre elles fa que els senyals en una no siguin aliens als de l'altra. Aquest procés és ben conegut des dels començaments de la telefonia (diafonia), i a nosaltres ens

interessen les situacions d'acoblament intencionadament elevat.

La situació més senzilla d'analitzar, que també és la més freqüent, és la de dues línies idèntiques situades de tal manera que la geometria resultant accepti un pla de simetria disposat al llarg del seu eix, com a l'exemple de la figura 6.23; dues línies microtira de la mateixa amplada i construïdes sobre el mateix substrat.

La cèl·lula elemental de dues línies com aquestes inclou, com a paràmetres primaris, la capacitat  $C_2$  i la inductància  $M$  mútues per unitat de longitud. Aquesta cèl·lula es representa també a la figura 6.23, i la seva anàlisi se simplifica molt si fem ús dels conceptes de parets elèctrica i magnètica.

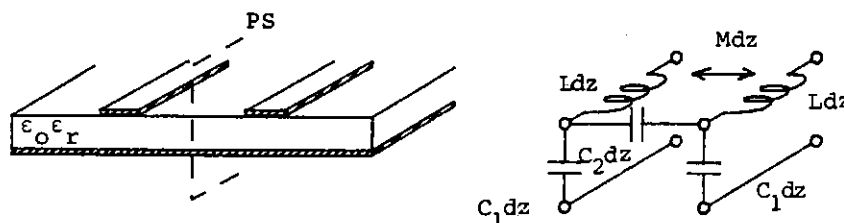


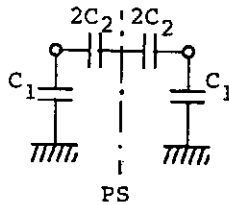
Fig. 6.23 Exemple de línies acoblades simètriques: dues línies microtira idèntiques i paral·leles, construïdes sobre el mateix substrat, i circuit equivalent de la cèl·lula elemental.  $C_2$  i  $M$  són la capacitat i la inductància mútues per unitat de longitud, respectivament.

A la figura 6.24a es representa només la part capacitiva de la cèl·lula elemental, on a més s'ha omès el  $dz$  que hauria d'acompanyar a  $C_1$  i  $C_2$ ; la informació referent a la part inductiva ( $L$  i  $M$ ) serà reintroduïda més endavant.

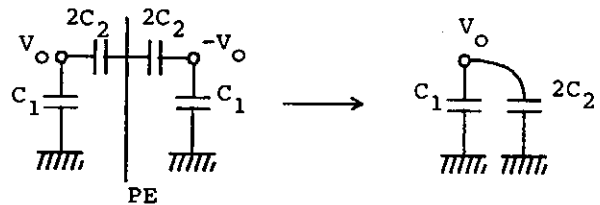
La situació amb una paret magnètica en el pla de simetria és equivalent a tenir les línies excitades de forma que  $V_1 = V_2 = V_0$  (fig. 6.24b), i en aquestes condicions definim la impedància característica de mode parell o simètric  $Z_0^e$  mitjançant:

$$Z_0^e = \frac{V_e^+}{I_e^+} \quad (6.80)$$

a)



b) Situació parella (paret magnètica)



c) Situació imparella (paret elèctrica)

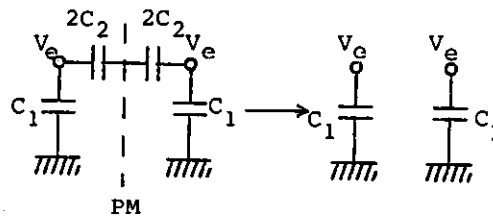


Fig. 6.24 a) Circuit equivalent de les capacitats de la cèl·lula elemental (hem prescindit del  $dz$ ).

b) El mateix circuit amb una paret magnètica en el pla de simetria (situació parella).

c) Ídem amb una paret elèctrica, situació imparella.

essent  $V_e^+$  la ddp entre una de les línies i el pla de massa per a una ona positiva amb simetria parella, i  $I_e^+$  el corrent en una de les línies per a la mateixa ona.

Noteu que aquesta ona positiva parella així definida es correspon amb la situació en què les dues tires conductores es comporten com un conductor únic respecte del pla de massa. A més, si aquesta ona es propaga amb velocitat de fase  $v_p^e$ , podem escriure:

$$Z_o^e = \frac{1}{v_p^e C_1} \quad (6.81)$$

ja que, evidentment, en estar  $C_2$  connectada entre punts a la mateixa tensió, no apleix cap funció.



De manera anàloga, la situació amb una paret elèctrica (paret conductora a potencial zero) és equivalent a tenir les línies excitades de forma que  $V_1 = -V_2 = V_0$  i els punts del pla de simetria connectats a massa (fig. 6.24c). Ara definim la impedància característica de mode imparell o antisimètric  $Z_o^o$  mitjançant:

$$Z_o^o = \frac{V_o^+}{I_o^+} \quad (6.82)$$

essent, com a (6.80),  $V_o^+$  la ddp entre una de les línies i massa per a una ona positiva amb simetria imparella i  $I_o^+$  el corrent en una de les línies.

Una ona d'aquest tipus es pot excitar mitjançant dos generadors idèntics i en oposició de fase, connectats entre el pla de massa i cada una de les línies. Si la seva velocitat de propagació (de fase) és  $v_p^o$ , tindrem:

$$Z_o^o = \frac{1}{v_p^o (C_1 + 2C_2)} \quad (6.83)$$

segons es desprèn de la figura 6.24c.

Noteu que la introducció de les velocitats de propagació  $v_p^e$  i  $v_p^o$  és equivalent a recuperar la informació de les inductàncies, i que els seus valors en funció de les permitivitats efectives són:

$$v_p^e = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{ref}^e}} \quad ; \quad v_p^o = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{ref}^o}} \quad (6.84)$$

En general, si hi ha més d'un dielèctric,  $\epsilon_{ref}^e \neq \epsilon_{ref}^o$  atès que la distribució de camp elèctric serà diferent en la situació parella i en la imparella; però si el medi és homogeni com, per exemple, en el cas de dues línies triplaca acoblades:

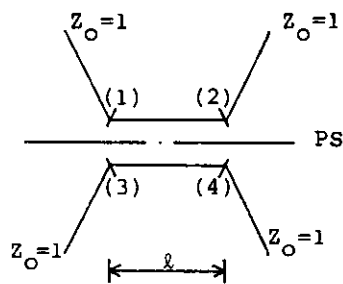
$$\epsilon_{ref}^e = \epsilon_{ref}^o = \epsilon_r' \quad (6.85)$$

i, per tant, les velocitats de fase seran iguals. En aquest cas, atès que  $C_1 + 2C_2 > C_1$  es compleix que:

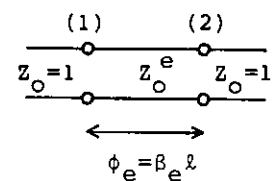
$$Z_o^e > Z_o^o$$

Una vegada fetes aquestes definicions referents als modes d'excitació parell i imparell, considerem la xarxa de quatre accessos formada per una longitud  $\ell$  de línies acoblades simètriques, connectades a l'exterior mitjançant línies d'impedància unitària (fig. 6.25a). Cal suposar que l'acoblament acaba bruscament en passar de la secció acoblada a les línies d'accés, cosa que a la pràctica s'aconsegueix de manera aproximada fent les línies d'accés molt divergents.

a)



b) Situació parella



c)

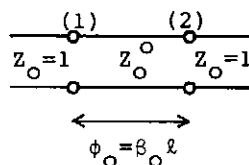


Fig. 6.25 a) Situació sota anàlisi; una secció de línies acoblades de longitud  $\ell$  connectades a l'exterior mitjançant línies d'impedància unitària. Se suposa que l'acoblament acaba bruscament en arribar a les línies d'accés.  
 b) Circuits equivalents de les situacions parella i imparell.  
 c) Ídem que b.

Si analitzem l'estructura descomponent-la en situacions simètrica i antisimètrica (fig. 25b i 25c), obtenim, tenint en compte les expressions (55,118) calculades anteriorment:

$$S_{11}^e = S_{22}^e = \frac{j(Z_o^e - Y_o^e) \tan \phi_e}{2 + j(Z_o^e + Y_o^e) \tan \phi_e} \quad (6.86)$$

$$S_{12}^e = S_{21}^e = \frac{1}{\cos \phi_e + j \frac{1}{2} (Z_o^e + Y_o^e) \sin \phi_e} = \frac{\left( \frac{2}{\cos \phi_e} \right)}{2 + j(Z_o^e + Y_o^e) \tan \phi_e} \quad (6.87)$$

$$\text{amb } \phi_e = \beta_e \ell = \frac{\omega \ell}{v_p^e}$$

Per a  $S_{11}^o = S_{22}^o$  i  $S_{12}^o = S_{21}^o$ , obtenim expressions similars canviant adequadament  $Z_o^e$  per  $Z_o^o$  i  $\phi_e$  per  $\phi_o$ .

Si volem que la nostra xarxa sigui un *AD*, hem de fer:

$$S_{11}^e + S_{11}^o = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(Z_o^e - Y_o^e) \tan \phi_e}{2 + j(Z_o^e + Y_o^e) \tan \phi_e} + \frac{(Z_o^o - Y_o^o) \tan \phi_o}{2 + j(Z_o^o + Y_o^o) \tan \phi_o} = 0 \quad (6.88)$$

expressió que, separant la part real de la imaginària, condueix a:

$$(Z_o^e - Y_o^e) \tan \phi_e + (Z_o^o - Y_o^o) \tan \phi_o = 0 \quad (6.89)$$

$$\left[ (Z_o^e - Y_o^e)(Z_o^o + Y_o^o) + (Z_o^o - Y_o^o)(Z_o^e + Y_o^e) \right] \tan \phi_e \cdot \tan \phi_o = 0 \quad (6.90)$$

L'última expressió s'anul·la amb independència dels valors de  $\phi_e$  i  $\phi_o$  si:

$$\begin{aligned} Z_o^e Z_o^o &= Y_o^e Y_o^o \quad \Rightarrow \quad Z_o^e Z_o^o = 1 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad Z_o^e &= Y_o^o \quad ; \quad Z_o^o = Y_o^e \quad (6.91a) \end{aligned}$$

i, amb aquesta condició, (6.89) es converteix en:

$$(Z_o^e - Y_o^e)(\tan \phi_e - \tan \phi_o) = 0 \quad (91b)$$

que es compleix si  $v_p^e = v_p^o$ , ja que llavors  $\phi_e = \phi_o$ .

Per tant, arribem a la conclusió següent: una secció de longitud  $\ell$  de dues línies acoblades és un *AD* si  $v_p^e = v_p^o$  i  $Z_o^e \cdot Z_o^o = 1$  (aquesta última expressió se sobreentén per a valors d'impedàncies normalitzades. En cas contrari, s'ha d'escriure com a  $Z_o^e \cdot Z_o^o = Z_o^2$ , amb  $Z_o$  la impedància de referència dels accessos).

En aquestes condicions, es comprova que:

$$S_{11}^e = -S_{11}^o \quad ; \quad S_{12}^e = S_{21}^e = S_{12}^o \quad (6.92)$$

i, per tant:

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0$$

$$S_{12} = S_{34} = \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) = S_{12}^e = \frac{1}{\cos \phi + j \frac{1}{2}(Y_o^e + Z_o^e) \sin \phi}$$

$$S_{13} = S_{24} = \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) = S_{11}^e = \frac{j(Z_o^e - Y_o^e) \tan \phi}{2 + j(Z_o^e + Y_o^e) \tan \phi}$$

$$S_{14} = S_{23} = \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = 0 \quad (6.93)$$

Aquestes expressions s'acostumen a escriure de la manera següent; definim  $\alpha$  mitjançant:

$$\alpha = \frac{Z_o^e - Z_o^o}{Z_o^e + Z_o^o} \quad (> 0, \text{ ja que } Z_o^e > Z_o^o) \quad (6.94)$$

i llavors:

$$1 - \alpha^2 = \frac{(Z_o^e + Z_o^o)^2 - (Z_o^e - Z_o^o)^2}{(Z_o^e + Z_o^o)^2} =$$

$$= \frac{4 Z_o^e Z_o^o}{(Z_o^e + Z_o^o)^2} = \frac{4}{(Z_o^e + Z_o^o)^2} \quad (6.95)$$

Finalment:

$$S_{12} = S_{23} = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi}$$

$$S_{13} = S_{24} = \frac{j \alpha \sin \phi}{\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi} \quad (6.96)$$

Advertiu que si les línies s'allunyen fins a desacoblar-se,  $C_2$  tendeix a zero i per tant  $Z_o^e = Z_o^o$ . En aquest cas, la condició de AD es redueix a  $Z_o^e = Z_o^o = Z_o$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  i:

$$S_{12} \rightarrow \frac{1}{\cos \phi + j \sin \phi} = e^{-j\phi} \quad ; \quad S_{13} \rightarrow 0 \quad (6.97)$$

**Exemple 1** Suposem que volem construir un AD de 20 dB mitjançant el procediment anterior en un sistema de  $Z_o = 50 \Omega$ . Si la branca principal és, per exemple, la 1-2, la 3-4 serà la branca acoblada (fig. 6.25a), i per tant:

$$|S_{13}|^2 = \frac{\alpha^2 \sin^2 \phi}{(1 - \alpha^2) \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = \frac{\alpha^2 \sin^2 \phi}{1 - \alpha^2 \cos^2 \phi} \quad (6.98)$$

Atès que tenim dos graus de llibertat,  $\alpha$  i  $\phi$ , podem fixar-ne un; normalment es fa  $\phi = \pi/2 \rightarrow \sin \phi = 1$ , ja que, d'aquesta manera, per a un  $\alpha$  donat l'acoblament és màxim i, ja que  $\sin \phi = 1$ , la seva variació relativa en canviar la freqüència és mínima (derivada nul·la).

De manera que:

$$|S_{13}|_{\phi=\frac{\pi}{2}}^2 = \alpha^2 = 10^{-2}$$

$$\frac{Z_o^e - Z_o^o}{Z_o^e + Z_o^o} = \frac{1}{10} \quad ; \quad Z_o^e \cdot Z_o^o = Z_o^2 = 2500 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow Z_o^e = 55.28 \Omega \quad ; \quad Z_o^o = 45.23 \Omega \quad (6.99)$$

Quan la freqüència es desvia de la de disseny, el sistema continua comportant-se com un AD ideal ( $S_{ii}=0$ ,  $S_{14}=S_{23}=0$ ), però l'acoblament varia segons (6.98) que, com que  $\alpha^2=0.01$ , es pot aproximar per:

$$|S_{13}|^2 = \alpha^2 \sin^2 \phi = \alpha^2 \sin^2 \frac{\omega \ell}{v_p} \quad (6.100)$$

expressió per a la qual resulta la taula de valors següent per a  $C=20\log|S_{13}|$ .

Taula 6.1 Valors de C, segons  $\omega/\omega_o$ .

| $\omega/\omega_o$ | C (dB) |
|-------------------|--------|
| 0.2               | 9.8    |
| 0.4               | 15.4   |
| 0.6               | 18.2   |
| 0.8               | 19.6   |
| 1.0               | 20     |
| 1.2               | 19.6   |
| 1.4               | 18.2   |
| 1.6               | .      |
| 1.8               | .      |
| 2.0               | .      |

De manera que l'AD funciona en una amplada de banda del 40%, amb una degradació d'acoblament de només 0,4 dB. ■

A la figura 6.26 es donen dos casos importants de línies acoblades simètriques; barres cilíndriques entre plans paral·lels (estructura utilitzada freqüentment en sistemes que transporten potències elevades, com els radars) i línies triplaca (*stripline*).

**Exemple 2** Si l'acoblador direccional de 20 dB de l'exemple anterior el féssim amb línies microtira acoblades en substrat de  $\epsilon_r=2.1$  tindríem: per a les línies d'accés de  $50 \Omega$ ,  $w/b=0.86$ ; i en la zona d'acoblament, per als valors calculats de  $Z_o^e$  i  $Z_o^o$ , resulta  $s/b=0.30$  i  $w/b=0.84$ .

Per a una guixària típica de  $b=1.0$  mm,  $s=0.30$  mm, i aquesta dimensió de ranura és fàcilment realitzable per mètodes fotolitogràfics. En canvi, si l'acoblador que s'ha de realitzar fos de 10 dB:

$$\frac{Z_o^e}{Z_o^o} = 1.925 \quad - \quad \frac{w}{b} = 0.70 \quad \frac{s}{b} = 0.041$$

i si, com abans,  $b=1$  mm i  $s=0.041$  mm, la dimensió de ranura seria molt difícil de produir fotolitogràficament amb precisió.

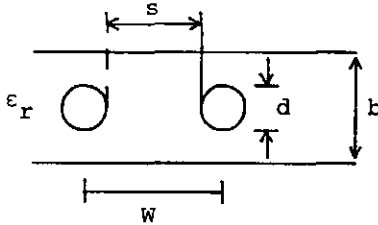
Per tant, amb els substrats usuals ( $\epsilon_r \approx 2$ , guixària  $\approx 0.5-1.0$  mm) és difícil realitzar un AD amb acoblaments  $C \leq 10-13$  dB. ■

## 6.9. Realització d'inversors amb línies acoblades

Si en un AD realitzat amb línies acoblades deixem dos accessos en circuit obert, com s'indica a la figura 6.27, resulta una xarxa de dos accessos per a la qual podem calcular la matriu  $S$  de la manera següent: si en un AD terminem l'accés ( $4'$ ) tindrem:

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S'_{12} & S'_{13} & 0 \\ S'_{12} & 0 & 0 & S'_{13} \\ S'_{13} & 0 & 0 & S'_{12} \\ 0 & S'_{13} & S'_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.101)$$

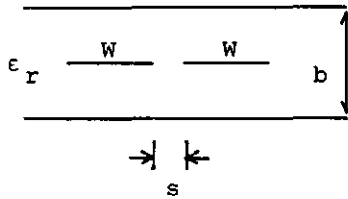
## - Barres entre plans paral·lels

Per a  $\frac{d}{b} \ll 0.25$ 

$$Z_o^e = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left\{ \frac{4b}{\pi d} \coth \frac{\pi W}{2b} \right\}$$

$$Z_o^o = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left\{ \frac{4b}{\pi d} \tanh \frac{\pi W}{2b} \right\}$$

## - Striplines acoblades



$$Z_o^e = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K'(k_e)}{K(k_e)} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} F(k_e)$$

$$Z_o^o = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K'(k_o)}{K(k_o)} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} F(k_o)$$

$$k_e = \tanh \left( \frac{\pi W}{2b} \right) \cdot \tanh \left( \frac{\pi (W+s)}{2b} \right)$$

$$k_o = \tanh \left( \frac{\pi W}{2b} \right) \cdot \coth \left( \frac{\pi (W+s)}{2b} \right)$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$$

Aproximadament:

$$0.5 \leq k^2 \leq 1 \quad \rightarrow \quad \frac{K}{K'} \approx \frac{1}{\pi} \ln \left( 2 \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right) = F_1(k)$$

$$0 \leq k^2 \leq 0.5 \quad \rightarrow \quad \frac{K}{K'} = \frac{1}{F_1(k')} \quad ; \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

Fig. 6.26 Valors de  $Z_o^e$  i  $Z_o^o$  per a dos exemples de línies acoblades simètriques.



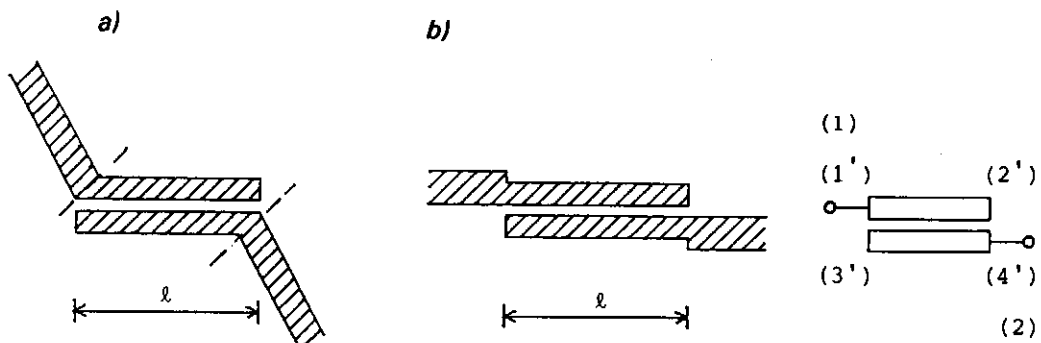


Fig. 6.27 a i b: dues possibles formes de secció de línies acoblades de longitud  $l$  amb línia triplaca amb dos accessos en circuit obert; c: representació esquemàtica d'aquestes situacions.

on hem utilitzat apòstrofs per referir-nos a paràmetres de la xarxa de 4 accessos original (fig. 6.27c). D'aquí s'obté fàcilment que:

$$\left. \begin{aligned} b'_1 &= S'_{12} b'_2 + S'_{13} b'_3 \\ b'_2 &= S'_{12} a'_1 \\ b'_3 &= S'_{13} a'_1 \\ b'_4 &= S'_{13} b'_2 + S'_{12} b'_3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} b'_1 = (S'^2_{12} + S'^2_{13}) a'_1 \\ b'_4 = 2S'_{12} S'_{13} a'_1 \end{cases}$$

És a dir, que per a la xarxa de dos accessos 1'-4' resultant, que podem renumerar 1-2, tindrem:

$$S = \begin{pmatrix} S'^2_{12} & S'^2_{13} & 2S'_{12} S'_{13} \\ 2S'_{12} S'_{13} & S'^2_{12} & S'^2_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} \end{pmatrix} \quad (6.103)$$

$$\text{amb } S_{11} = \frac{1 - \alpha^2 - \alpha^2 \sin^2 \phi}{(\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi)^2} ; S_{12} = \frac{2j\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \sin \phi}{(\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi)^2} \quad (6.104)$$

A les proximitats de  $\phi = \pi/2$  (longitud acoblada  $\approx \lambda/4$ ),  $\phi = \pi/2 + \Delta\phi$ , i si  $\alpha^2$  és prou petita, podem posar:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi &= e^{j\phi} + (\sqrt{1 - \alpha^2} - 1) \cos \phi \approx \\ &\approx e^{j\phi} - \frac{1}{2} \alpha^2 \cos \left( \frac{\pi}{2} + \Delta\phi \right) = e^{j\phi} + \frac{1}{2} \alpha^2 \sin \Delta\phi \approx e^{j\phi} + \frac{1}{2} \alpha^2 \Delta\phi \end{aligned} \quad (6.105)$$

$$1 - \alpha^2 - \alpha^2 \sin^2 \phi = 1 - \alpha^2 - \alpha^2 \cos^2 \Delta\phi \approx 1 - 2\alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 (\Delta\phi)^2 \quad (6.106)$$

$$\sin \phi \approx 1 - \frac{1}{2} (\Delta\phi)^2 \quad (6.107)$$

Per tant, amb un error de l'ordre, en el pitjor dels casos, de  $\alpha^2 \Delta\phi$  o  $(\Delta\phi)^2$  respecte de la unitat, podem aproximar:

$$S_{11} \approx (1 - 2\alpha^2) e^{-2j\phi} \quad ; \quad S_{12} \approx 2j\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} e^{-2j\phi} \quad (6.108)$$

paràmetres que defineixen el circuit equivalent del 2-accessos com un inversor de constant  $\bar{J}$  donada per:

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha^2 &= \frac{\bar{K}^2 - 1}{\bar{K}^2 + 1} = \frac{1 - \bar{J}^2}{1 + \bar{J}^2} = 1 - 2 \frac{\bar{J}^2}{1 + \bar{J}^2} \rightarrow \\ \rightarrow \alpha^2 &= \frac{\bar{J}^2}{1 + \bar{J}^2} \rightarrow \bar{J}^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \end{aligned} \quad (6.109)$$

i dues seccions de línia d'impedància, la de referència a l'entrada i sortida, i longitud elèctrica  $\phi$  (fig. 6.28).  $\bar{J}$  també es pot posar directament en termes de  $Z_o^e$  i  $Z_o^o$  i viceversa:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\bar{Z}_o^e - \bar{Z}_o^o}{\bar{Z}_o^e + \bar{Z}_o^o} = \frac{(\bar{Z}_o^e)^2 - 1}{(\bar{Z}_o^e)^2 + 1} = \frac{1 - (\bar{Z}_o^o)^2}{1 + (\bar{Z}_o^o)^2} = \frac{\bar{J}}{\sqrt{1 + \bar{J}^2}} \\ \left. \begin{aligned} \bar{Z}_o^e &= \sqrt{1 + \bar{J}^2} + \bar{J} \\ \bar{Z}_o^o &= \sqrt{1 + \bar{J}^2} - \bar{J} \end{aligned} \right\} \bar{J} = \frac{1}{2} (\bar{Z}_o^e - \bar{Z}_o^o) \end{aligned} \quad (6.110)$$

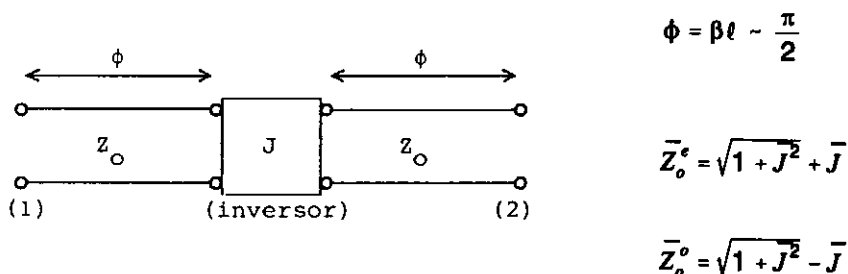


Fig. 6.28 Circuit equivalent aproximat del circuit de la figura anterior quan es compleix la condició de  $AD$ ,  $Z_o^e \cdot Z_o^o = 1$ .

## 6.10 Filtres passa-banda amb inversors en línies de transmissió

El tema de filtres de microones realitzats en o amb línies de transmissió ompliria tot un curs ell sol; a més, a la varietat d'aproximacions teòriques i de realitzacions possibles, s'hi hauria d'afegir els filtres realitzables en guia d'ones, amb cavitats ressonants o amb ressonadors dielèctrics.

Davant d'aquest ampli panorama, el nostre propòsit en aquest apartat es limita a un sol tipus de filtre (passa-banda), realitzable amb línies de transmissió a partir dels prototipus convencionals de filtres passa-baixes (Butterworth, Txeixev), utilitzant el concepte d'inversor d'impedàncies que hem introduït abans.

Malgrat la modèstia del nostre objectiu, els filtres que descriurem són utilitzats àmpliament, especialment els que es realitzen mitjançant línies acoblades, per a amplades de banda que van des de valors molt baixos (0,5-1%) fins a valors moderats del 15-20%.

Els prototipus passa-baixes de la figura 6.29, que suposarem coneguts, són el punt de partida. Recordeu que un mateix prototipus es pot realitzar en dues versions (circuitos duals) que tenen la mateixa funció de transferència.

El concepte d'inversor ens permet transformar aquests circuits en els de les figures 6.30 *a* i *b*, que utilitzen elements reactius d'un sol tipus (inductàncies o condensadors). Calculem els valors dels inversors  $K_j$  a partir de la identificació dels circuits equivalents; per exemple, si prenem els de les figures 29*a* i 30*a* (circuitos als quals ara ens restringirem):

$$\frac{1}{C_1} = \frac{K_{01}^2}{L'_1} \quad ; \quad L_2 = \frac{K_{01}^2}{\left(\frac{K_{12}^2}{L'_2}\right)} = \frac{K_{01}^2}{K_{12}^2} L'_2 \quad ; \quad \text{etc.}$$

que proporcionen:

$$K_{01} = \sqrt{\frac{L'_1}{g_1}} \quad ; \quad K_{12} = K_{01} \sqrt{\frac{L'_2}{L_2}} = \sqrt{\frac{L'_1 L'_2}{g_1 g_2}} \quad \dots$$

$$K_{i,i+1} = \sqrt{\frac{L'_i L'_{i+1}}{g_i g_{i+1}}} \quad \dots \quad K_{n,n+1} = \sqrt{\frac{L'_n}{g_n g_{n+1}}} \quad (6.111)$$

En les  $n+1$  equacions anteriors tenim  $2n+1$  incògnites  $K_{i,i+1}$   $i=0,1,2,\dots,n$  i  $L_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , per la qual cosa en podem fixar lliurement  $n$ ; normalment es fa:

$$L'_1 = L'_2 = \dots L'_n = L' \quad (6.112)$$

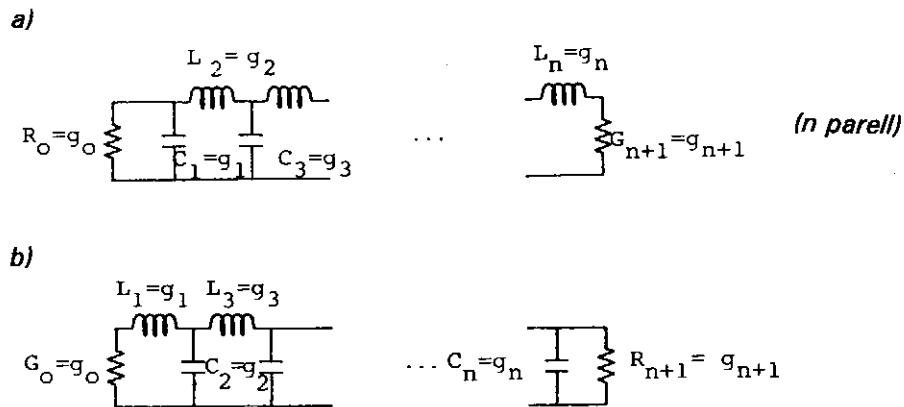


Fig. 6.29 a) Prototipus de filtre passa-baixes (ha estat dibuixat per a  $n$  parell, d'altra manera l'element  $g_n$  seria un condensador en paral·lel) i b), el seu dual. Ambdós tenen la mateixa funció de transferència. Normalment, agafem  $g_0 = 1$ .

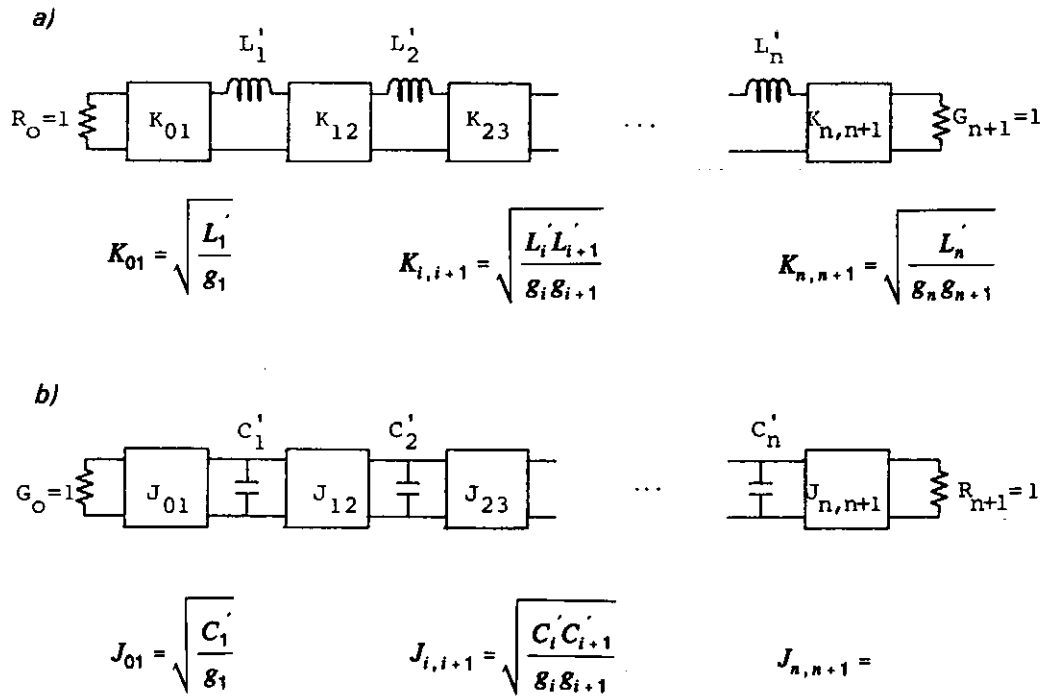


Fig. 6.30 Versions dels prototipus de la figura anterior utilitzant inversors d'impedàncies/admitàncies. Els dos circuits dibuixats continuen essent duals.

(la qual cosa fixa  $n-1$  valors) i queda:

$$K_{01} = \sqrt{\frac{L'}{g_1}} \quad \dots \quad K_{i,i+1} = \frac{L'}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad \dots \quad K_{n,n+1} = \sqrt{\frac{L'}{g_n g_{n+1}}} \quad (6.113)$$

expressions en què  $L'$  encara està per definir.

El pas següent consisteix a realitzar la transformació de freqüències que porti la resposta del prototipus passa-baixes (figura 6.31a), a la banda volguda ( $\omega_1, \omega_2$ ). La transformació és equivalent a la substitució de cada inductància per un circuit ressonant en sèrie:

$$\omega' L' = \omega_o L \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \quad (6.114)$$

amb  $L$  i  $\omega_0$  escollits de tal manera que a la freqüència de tall del prototipus,  $\omega_1'$  (normalment igual a la unitat) li corresponen els extrems de la banda passant ( $\omega_1, \omega_2$ ):

$$\omega_1' L' = \omega_0 L \left( \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right) = -\omega_0 L \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right)$$

d'on s'obté:

$$\omega_2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2} = -\omega_1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \quad \rightarrow \quad \omega_0^2 = \omega_1 \omega_2 \quad (6.115)$$

$$\omega_1' L' = L(\omega_2 - \omega_1) \quad \rightarrow \quad L = \frac{\omega_1' L'}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L'}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L'}{\omega_0 W} \quad (6.116)$$

A l'última expressió s'ha utilitzat  $\omega_1' = 1$  i s'ha introduït l'amplada de banda relativa  $W$ :

$$W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \quad (6.117)$$

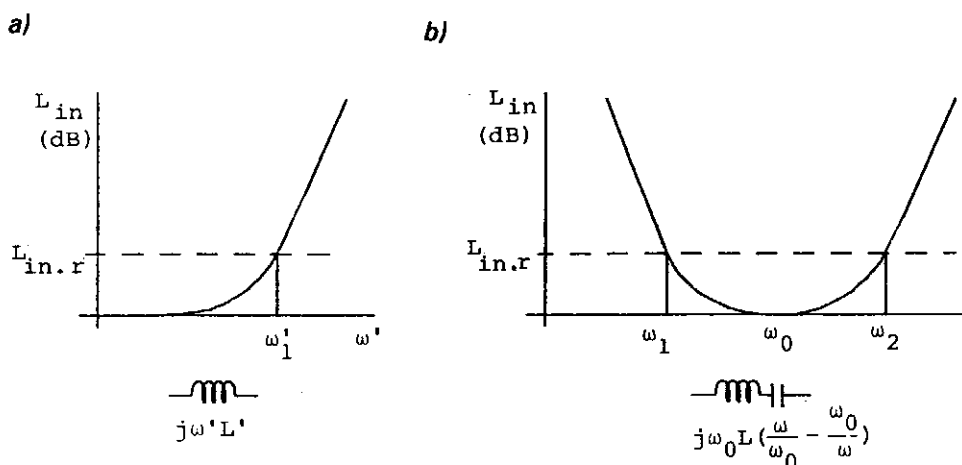


Fig. 6.31 a) Resposta (pèrdua de transferència de potència  $L_m$  versus freqüència normalitzada) del prototipus passa-baixes.

b) Ídem del passa-banda obtinguda mitjançant la transformació de freqüència inductància  $\rightarrow$  ressonant en sèrie (o capacitat  $\rightarrow$  ressonant en paral·lel). Normalment,  $\omega_1' = 1$ .

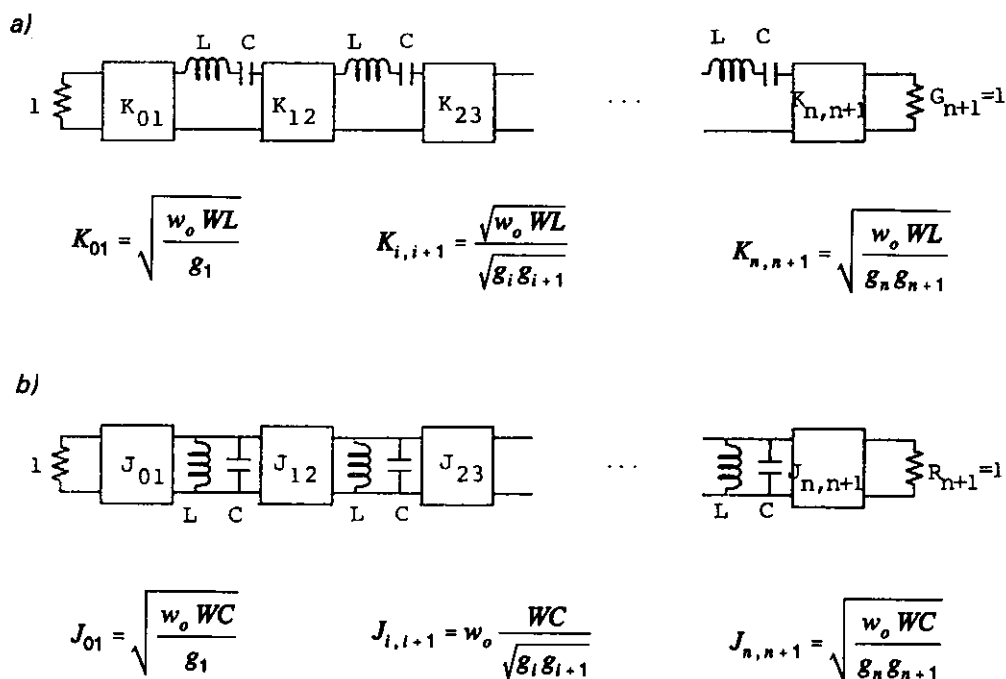


Fig. 6.32 Prototipus passa-banda obtinguts amb les transformacions de freqüència resumides a la figura anterior.  $W$  és l'amplada de banda relativa,  $(f_2 - f_1)/f_0$ .

D'aquesta manera, s'obté el prototipus de la figura 6.32a, on també s'indiquen els valors per als  $K_j$  que hem obtingut en substituir a (6.113) el valor de  $L' = \omega_0 WL$  donat per (6.116).

Evidentment, tots aquests resultats es poden tornar a obtenir per als circuits b; però com que són duals dels a, es poden escriure directament sense cap complicació, per la qual cosa no ens hi tornarem a referir explícitament.

Considerem a continuació el circuit de la figura 6.33a; una col·lecció de susceptàncies  $jB_{kl}$  (de les quals només en dibuixem dues), intercalades en paral·lel en una línia de transmissió, de manera que es poden interpretar com a inversors i trams de línia en  $\lambda/2$ . Per als trams de línia podem posar el seu circuit equivalent, calculat a l'apartat 5.6, i si suposem:

- Que els trams de línia  $\ell_{ij}$  i  $\ell_{jk}$  són petits ( $\phi_{ij}, \phi_{jk} \ll \pi$ ).
- Que les susceptàncies són grans (quasi curts circuits):

$$|\bar{B}_{ij}| \quad ; \quad |\bar{B}_{jk}| \gg 1$$

llavors, en les proximitats del  $\omega_0$  que fa la línia  $\lambda/2$ , podem ignorar els circuits  $L_p/C_p$  d'impedància alta respecte dels  $\bar{B}_{ij}$ ,  $\bar{B}_{jk}$  i al circuit sèrie  $2L_s-C_s/2$ . D'aquesta manera, el nostre circuit original queda reduït a inversors i circuits  $L-C$ , com a la figura 6.33a, que alhora són els que formen el prototipus passa-banda de la figura 6.32a.

Finalment, resulta que l'estructura de la figura 6.34a, formada per  $n+1$  reactàncies intercalades en una línia de transmissió, es comporta com un filtre passa-banda d'ordre  $n$  si els seus valors i les seves longituds d'espaiament s'escullen d'acord amb les expressions que apareixen a la mateixa figura.

En aquests moments, convé que resumim les aproximacions que hem fet:

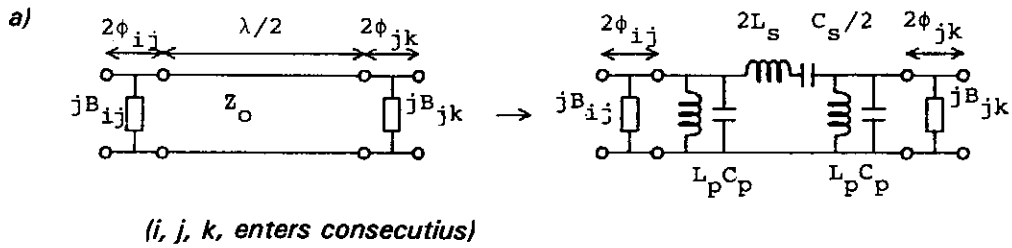
- 1) Els inversors no són ideals. En el millor dels casos, si les reactàncies són inductives, encara que el seu comportament amb la freqüència és millor, les seves constants  $K_j$  varien amb la freqüència.
- 2) El circuit equivalent format per inductàncies i condensadors per a una línia en  $\lambda/2$  és de validesa limitada a una amplada de banda màxima del 30-40%, depenent de l'exactitud volguda.
- 3) L'aproximació anterior es degrada en ignorar els ressonants en paral·lel enfront dels ressonants en sèrie.
- 4) Tots els errors anteriors són acumulatius, i l'efecte d'acumulació augmenta, evidentment, amb l'ordre del filtre.

El resultat és que la seva resposta coincideix amb la teòrica en les proximitats de la freqüència central del disseny,  $\omega_0$ , i se'n desvia progressivament a mesura que ens allunyem. No obstant això, per a ordres moderats ( $n$  fins a 7), el disseny es comporta bé per a amplades de banda de fins al 15% i, en tot cas, les desviacions més grans es produeixen a freqüències en què les atenuacions previstes són altes i, per tant, els errors menys importants.

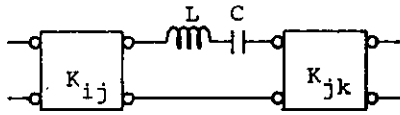
En tot cas, una vegada fixats els paràmetres del circuit de la figura 6.34a, la seva anàlisi exacta (per exemple, mitjançant el producte de matrius  $ABCD$ ) es pot fer de manera molt senzilla amb l'ordinador, i d'aquesta manera quantificar les desviacions per veure si són acceptables o no ho són.

**Exemple 1** Podem fer una avaluació dels ordres de magnitud dels paràmetres implicats de la manera següent:



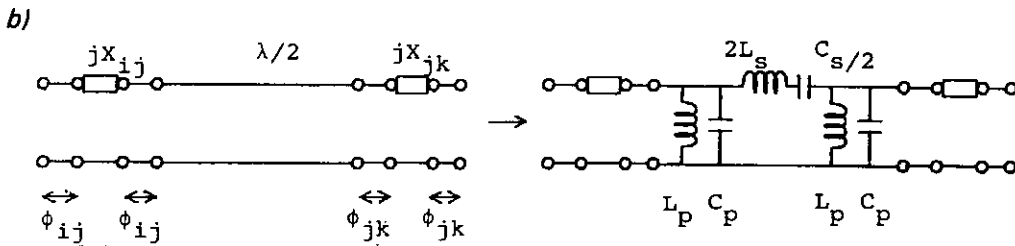


Si  $|B_{ij}|, |B_{jk}| \gg 1$  (quasi curts circuits)  $\rightarrow |\phi_{ij}|, |\phi_{jk}| \ll 1 \Rightarrow$  (per a  $\omega \approx \omega_0$ )

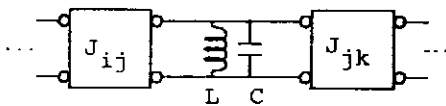


$$\bar{L} = 2\bar{L}_s = \frac{\pi}{2\omega_0}$$

$$|\bar{B}_{ij}| = \frac{1 - \bar{K}_{ij}^2}{\bar{K}_{ij}} \quad ; \quad \phi_{ij} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2}{\bar{B}_{ij}} \right)$$



Si  $|\bar{X}_{ij}|, |\bar{X}_{jk}| \gg 1$  (quasi circuits oberts)  $\rightarrow |\phi_{ij}|, |\phi_{jk}| \ll 1 \Rightarrow$  (per a  $\omega \approx \omega_0$ )

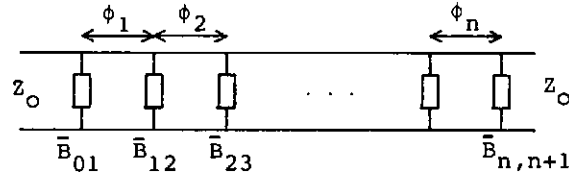


$$\bar{C} = 2\bar{C}_p = \frac{\pi}{2\omega_0}$$

$$|\bar{X}_{ij}| = \frac{1 - \bar{J}_{ij}^2}{\bar{J}_{ij}} \quad , \quad \phi_{ij} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2}{\bar{X}_{ij}} \right)$$

Fig. 6.33 a) Interpretació de dues susceptàncies de valor elevat (quasi curts circuits) inserides en una línia de transmissió com a dos inversors i circuit ressonant (cèl·lula bàsica del prototipus passa-banda de la figura 6.32a).  
 b) Estructura dual de l'anterior.

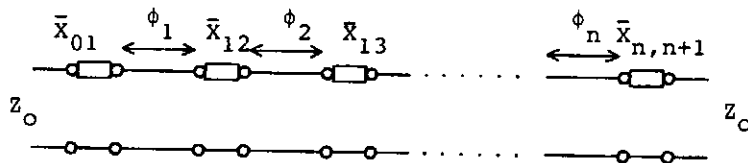
a)



$$\phi_j = \pi + \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{2}{\bar{B}_{j-1,j}} + \tan^{-1} \frac{2}{\bar{B}_{j,j+1}} \right), \quad \bar{B}_j = \frac{1 - \bar{K}_j^2}{\bar{K}_j}$$

$$\bar{K}_{01} = \sqrt{\frac{\pi W}{2 g_1}}; \quad \bar{K}_{i,i+1} = \frac{\pi}{2} \frac{W}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}; \quad \bar{K}_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\pi W}{2 g_n g_{n+1}}}$$

b)



$$\phi_j = \pi + \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}_{j-1,j}} + \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}_{j,j+1}} \right), \quad |\bar{X}_j| = \frac{1 - \bar{J}_j^2}{\bar{J}_j}$$

$$\bar{J}_{01} = \sqrt{\frac{\pi W}{2 g_1}}; \quad \bar{J}_{i,i+1} = \frac{\pi}{2} \frac{W}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}; \quad \bar{J}_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\pi W}{2 g_n g_{n+1}}}$$

Fig. 6.34 Com a culminació del procés seguit a partir de la figura 6.29:

a) Realització d'un filtre passa-baixes en una línia de transmissió mitjançant la inserció de reactàncies en paral·lel.

b) Ídem en sèrie (circuit dual de l'anterior).

Per a filtres Butterworth amb  $n \leq 6$  resulta  $0.5 \leq g_i \leq 2.0$ , i per a filtres Txeixev amb  $2 \leq n \leq 7$  i arribada a la banda passant  $r \leq 0.2$  dB,  $0.67 \leq g_i \leq 2.27$ .

Per tant, en ordre de magnitud:

$$K_{i,i+1} \sim W \quad ; \quad K_{01}, K_{n,n+1} \sim \sqrt{W}$$

$$|\bar{B}_{01}|, |\bar{B}_{n,n+1}| \sim \frac{1}{\sqrt{W}} \quad ; \quad |\bar{B}_{i,i+1}| \sim \frac{1}{W}$$

Per exemple, si en una línia de  $50 \Omega$ ,  $f_o = 3\text{GHz}$ ,  $f_2 - f_1 = 30 \text{ MHz}$  ( $W = 10^{-2} = 1\%$ ):

$$|\bar{B}_{i,i+1}| \sim 100 \quad \Rightarrow \quad L_{i,i+1} \sim 30 \text{ pH}$$

$$|\bar{B}_{01}|, |\bar{B}_{n,n+1}| \sim 10 \quad \Rightarrow \quad L_{01}, L_{n,n+1} \sim 300 \text{ pH}$$

Si la realització s'hagués fet amb condensadors en sèrie (prototipus *b* que condueixen a la configuració final de la figura 6.34b) hauríem obtingut:

$$|\bar{X}_{i,i+1}| \sim 100 \quad \Rightarrow \quad C_{i,i+1} \sim 0.01 \text{ pF}$$

$$|\bar{X}_{01}|, |\bar{X}_{n,n+1}| \sim 10 \quad \Rightarrow \quad C_{01}, C_{n,n+1} \sim 0.1 \text{ pF}$$

■

**Exemple 2** Es vol aconseguir un filtre Txeixev amb arribada  $r = 0.5$  dB, banda passant (3.047 GHz/3.157 GHz) i atenuació superior a 30 dB a les freqüències  $f_a = 2.786$  GHz i  $f_b = 3.326$  GHz.

a) Identificació del prototipus.

$$W = 3.55 \% \quad , \quad f_o = \sqrt{f_1 f_2} = 3.102 \text{ GHz}$$

La transformació de freqüències (6.114) es pot escriure:

$$\omega' = \omega_o \frac{L}{L'} \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) = \frac{1}{W} \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \quad (\omega'_1 = 1)$$

i obtenim:

$$\omega'_a = -6.06 \quad ; \quad \omega'_b = 3.93$$

Dels gràfics normalitzats d'atenuació (figura 6.35), s'obté per a  $n=3$ :

$$L_A(6.06) = 49.5 \text{ dB} \quad ; \quad L_A(3.93) = 38.5 \text{ dB}$$

mentre que per a  $n=2$  estaríem fora d'especificacions. Per tant prenem  $n=3$ , amb la qual cosa hi ha a més un marge raonable d'atenuació a  $f_a$  i  $f_b$  per absorbir errors, i resulta (fig. 6.36):

$$g_0 = 1 \quad , \quad g_1 = 1.5963 \quad , \quad g_2 = 1.0967 \quad , \quad g_3 = g_1 \quad , \quad g_4 = g_1$$

(en ser  $n$  = imparell, el filtre és simètric).

b) Realització física.

En línia microtira resulta més fàcil de realitzar la versió de la figura 6.34b amb condensadors en sèrie. S'obté:

$$\frac{J_{01}}{Y_0} = \sqrt{\frac{\pi W}{2 g_1}} = \frac{J_{34}}{Z_0} = 0.187 \quad , \quad \bar{B}_{01} = \frac{\bar{J}_{01}}{1 - J_{01}^2} = \bar{B}_{34} = 0.194$$

$$\frac{J_{12}}{Y_0} = \frac{\pi W}{2 \sqrt{g_1 g_2}} = \frac{J_{23}}{Y_0} = 0.0421 \quad , \quad \bar{B}_{12} = \bar{B}_{23} = 0.0422$$

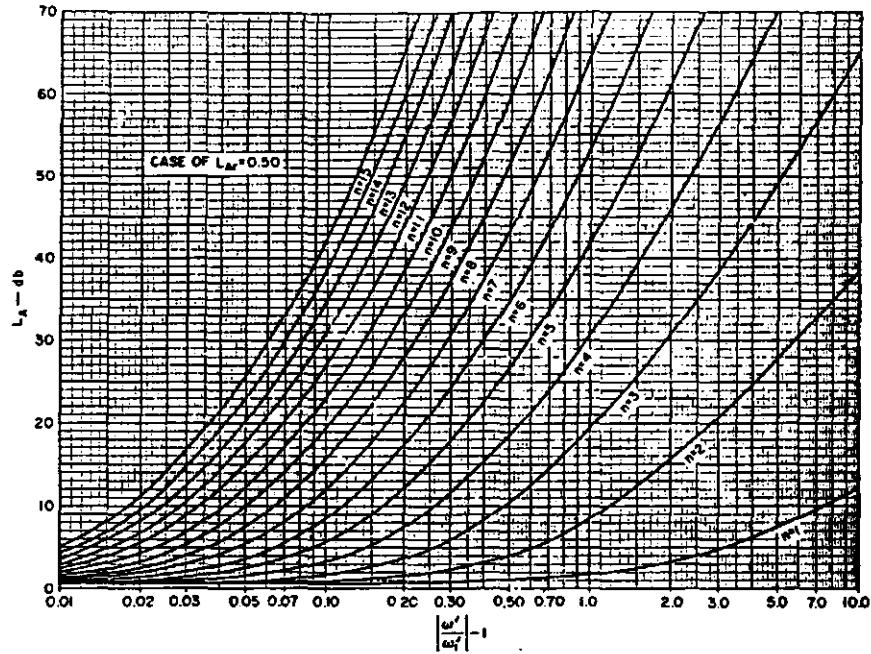


Fig. 6.35 Corbes característiques de filtres Tchebixev amb arrissada de 0.50 dB amb l'ordre del filtre  $n$  com a paràmetre.

| VALUE OF $n$  | $\epsilon_1$ | $\epsilon_2$ | $\epsilon_3$ | $\epsilon_4$ | $\epsilon_5$ | $\epsilon_6$ | $\epsilon_7$ | $\epsilon_8$ | $\epsilon_9$ | $\epsilon_{10}$ | $\epsilon_{11}$ |
|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|
| 0.5 db ripple |              |              |              |              |              |              |              |              |              |                 |                 |
| 1             | 0.6986       | 1.0000       |              |              |              |              |              |              |              |                 |                 |
| 2             | 1.4029       | 0.7071       | 1.9841       |              |              |              |              |              |              |                 |                 |
| 3             | 1.5963       | 1.0967       | 1.5963       | 1.0000       |              |              |              |              |              |                 |                 |
| 4             | 1.6703       | 1.1926       | 2.3661       | 0.8419       | 1.9841       |              |              |              |              |                 |                 |
| 5             | 1.7058       | 1.2296       | 2.5408       | 1.2296       | 1.7058       | 1.0000       |              |              |              |                 |                 |
| 6             | 1.7254       | 1.2479       | 2.6064       | 1.3137       | 2.4758       | 0.8696       | 1.9841       |              |              |                 |                 |
| 7             | 1.7372       | 1.2583       | 2.6381       | 1.3444       | 2.6381       | 1.2583       | 1.7372       | 1.0000       |              |                 |                 |
| 8             | 1.7451       | 1.2647       | 2.6564       | 1.3590       | 2.6964       | 1.3389       | 2.5093       | 0.8796       | 1.9841       |                 |                 |
| 9             | 1.7504       | 1.2690       | 2.6678       | 1.3673       | 2.7239       | 1.3673       | 2.6678       | 1.2690       | 1.7504       | 1.0000          |                 |
| 10            | 1.7543       | 1.2721       | 2.6754       | 1.3725       | 2.7392       | 1.3806       | 2.7231       | 1.3485       | 2.5239       | 0.8842          | 1.9841          |

Fig. 6.36 Taula de valors dels elements dels filtres de la figura anterior amb  $g_0 = 1$  i  $\omega_1' = 1$ .

$$C_{01} = C_{34} = 0.20 \text{ pF} \quad C_{12} = C_{23} = 0.045 \text{ pF}$$

$$\phi_1 = \pi + \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}_{01}} + \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}_{12}} \right) = 2.914 \rightarrow 0.927 \frac{\lambda}{2}$$

$$\phi_2 = \pi + \frac{1}{2} 2 \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}_{12}} = 3.052 \rightarrow 0.971 \frac{\lambda}{2}$$

Les capacitats  $C_{ij}$  es poden realitzar mitjançant ranures transversals en la tira conductora, segons s'indica a la figura 6.37, si bé per obtenir valors de l'ordre de 0.20 pF com el que hem calculat, la ranura ha de ser tan prima que la seva fabricació pot resultar difícil. ■

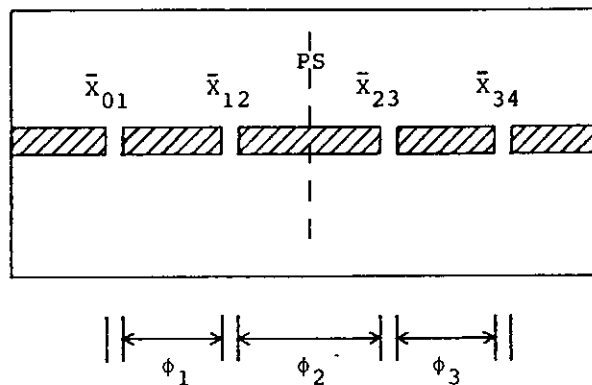


Fig. 6.37 Realització en línia microtira d'un filtre com el de la figura 6.34b; els elements d'acoblament  $X_{ij}$  són les capacitats existents entre les vores de la tira conductora produïts per talls d'amplada controlada.

Els tipus de filtres analitzats responen a la forma general de la figura 6.38a: seccions de línia en  $\lambda/2$  entre inversors d'impedàncies  $K_{ij}$ /admitàncies  $J_{ij}$ .

Si considerem dues seccions de línies acoblades amb dos accessos en circuit obert com les de l'apartat 6.9 (figs. 6.27 i 6.28), el seu circuit equivalent, en les proximitats de  $\phi = \pi/2$  (longitud d'acoblament  $\ell = \lambda/4$ ), ve donat per dos inversors amb un tram de línia en  $\lambda/2$  al mig i trams en  $\lambda/4$  a l'entrada i sortida (fig. 6.38b). Estructura que, augmentada

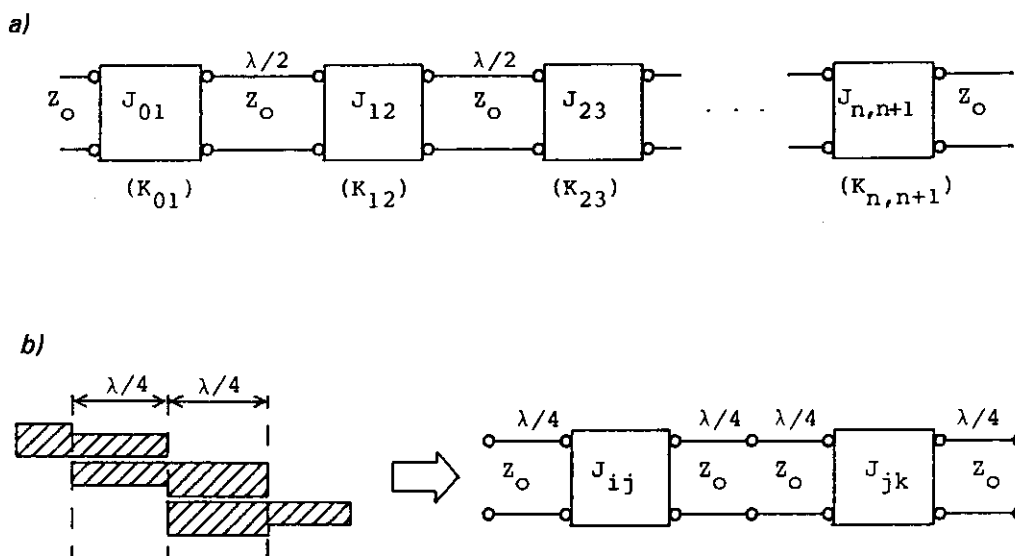


Fig. 6.38 a) Forma general d'un filtre amb inversors i línies de transmissió en  $\lambda/2$ .

b) Circuit equivalent de dues seccions de línies acoblades en les condicions de la figura 6.28; advertiu que formen l'estructura bàsica de a.

amb l'addició de més seccions acoblades, condueix a la forma general de filtre que analitzem i que, vistes les expressions obtingudes, resumim a la figura 6.39.

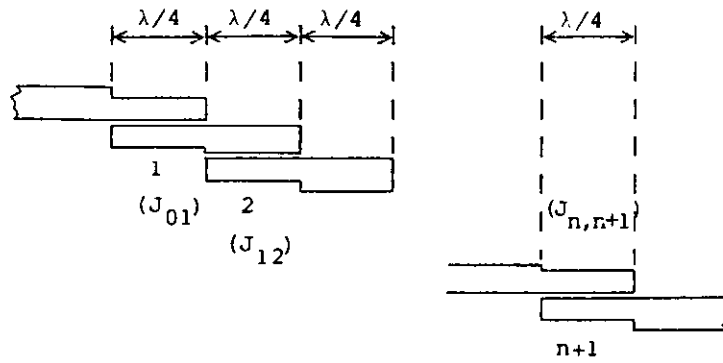
L'avantatge més gran d'aquest tipus de filtre respecte al de l'exemple 2 (acoblament capacitiu per talls en la tira conductora) està en el fet que, per a una mateixa resposta, les separacions  $s$  entre les tires acoblades són més amples que les dels talls  $i$ , per tant, més fàcils de realitzar amb precisió per procediments fotolitogràfics.

**Exemple 3** Per als mateixos valors de l'exemple 2, la realització amb línies triplaca (*stripline*) acoblades requereix els valors següents per a la primera i l'última secció, que són les de l'acoblament més intens:

a) Per a  $\epsilon_r = 2.1$ ;  $w/b = 0.7588$   $s/b = 0.0848$

b) Per a  $\epsilon_r = 10.0$ ;  $w/b = 0.1669$   $s/b = 0.2155$

Per a  $b = 1$  mm, per exemple, les ranures han de ser de 84.8 i 215  $\mu\text{m}$ , respectivament.



$$\bar{J}_{i-1,i} = \frac{\pi}{2} \frac{W}{\sqrt{g_{i-1}g_i}}, \quad \bar{J}_{01} = \sqrt{\frac{\pi W}{2g_1}}, \quad J_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\pi W}{2g_n g_{n+1}}}$$

amb

$$f_o = \sqrt{f_1 f_2}, \quad W = \frac{f_2 - f_1}{f_o}$$

$$\bar{Z}_{oei} = \sqrt{1 + J_{i-1,1} + \bar{J}_{i-1,i}}$$

$$\bar{Z}_{ooi} = \sqrt{1 + J_{i-1,i} - \bar{J}_{i-1,i}} = (\bar{Z}_{oei})^{-1}$$

Fig. 6.39 Aspecte de les tires conductores d'un filtre realitzat amb línies acoblades, i expressions per al seu disseny.