

POLITEXT

Javier Bará Temes

# Ondas electromagnéticas en comunicaciones

EDICIONS UPC

Javier Bará Temes

# Ondas electromagnéticas en comunicaciones

Primera edición: septiembre de 1999  
Reimpresión: enero de 2000

© Javier Bará, 1999

© Edicions UPC, 1999  
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL  
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885  
Edicions Virtuals: [www.edicionsupc.es](http://www.edicionsupc.es)  
e-mail: [edupc@sg.upc.es](mailto:edupc@sg.upc.es)

Producción: CBS - Impressió digital  
Pintor Fortuny 151, 08224 Terrassa (Barcelona)

Depósito legal: B-38-637-99  
ISBN: 84-8301-349-5

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, así como la exportación e importación de ejemplares para su distribución y venta fuera del ámbito de la Unión Europea.

A mis alumnos de la EUPBL,  
sin cuya colaboración este libro no hubiera sido posible.

## §. PRESENTACIÓN

---

Este libro está dedicado al estudio de las ondas electromagnéticas, sus peculiaridades a frecuencias ópticas, y los principios básicos de su interacción con la materia. Su objetivo principal es la adquisición de conceptos y procedimientos que permitan el posterior estudio de aplicaciones en ingeniería de comunicaciones (antenas, microondas, comunicaciones ópticas); pero también, para intentar hacer su estudio menos árido y estimular la capacidad de observación y de análisis, se promueve la comprensión de fenómenos y objetos de la vida cotidiana y aplicaciones tecnológicas sencillas (orientación de antenas de radio, radares Doppler, gafas polaroid, polarización del cielo, fibras ópticas, capacidad de almacenamiento de un compact-disc por el límite de difracción de una lente, etc), poniendo énfasis en la observación, interpretación y análisis cuantitativo de fenómenos relacionados con, o consecuencia de, las ondas electromagnéticas.

Para evitar el distanciamiento material (los resultados tardan) y formal (la matemática se interpone en exceso) que introducen las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones diferenciales que les siguen, el temario se plantea a partir de la postulación de los campos radiados por una carga acelerada y la obtención de una onda plana como aproximación local lejana. De esta manera los estudiantes pueden trabajar con ondas desde la segunda semana del curso. A partir de aquí se mantiene el rigor lógico de la disciplina, pero se renuncia a gran parte del rigor formal en favor de la interpretación de los fenómenos y sus aplicaciones. De todos modos, las ecuaciones de Maxwell y de ondas se presentan sumariamente en el último tema para permitir el enlace de este texto con aquellos otros que toman un enfoque convencional.

De manera que este texto supone una desviación importante, sin duda herética, de la enseñanza del electromagnetismo a nivel universitario. No está escrito desde una posición de lealtad a la materia y a su lógica inflexible, sino de afecto al estudiante; y aun así, probablemente es prolijo y en exceso matemático. Confío, con la ayuda de mis alumnos, en poder realizar pronto una segunda edición corregida y reducida.

El libro se ha generado a partir de la enseñanza de un curso de teoría electromagnética de un semestre (60 horas de clase) ofertado a estudiantes del tercer semestre de un plan de estudios de Ingeniería Técnica de Telecomunicación de tres años (seis semestres) y 2250 horas lectivas. Al llegar a este curso los alumnos han seguido uno de electromagnetismo (con nivel similar al texto de Tipler) y dos cursos de cálculo matemático; por tanto, su nivel de madurez en estas materias es todavía frágil y pendiente de consolidación. Por otra parte, el libro contiene más material que el

digerible en las 60 horas lectivas, y en algunos casos el nivel está por encima de lo prudente. La organización del material en su eventual uso como texto para un curso de circunstancias similares queda al arbitrio de los detalles del plan de estudios y del gusto del profesor.

Aun a pesar del planteamiento poco convencional de la materia, el libro debe casi todo a otros muchos libros. No hace al caso mencionarlos aquí, con una excepción; el tema de óptica geométrica está basado directamente en la monografía clásica de Sears, reelaborada posteriormente en otros textos (Sears y Zemansky, Sears, Zemansky y Young) y modelo de muchos libros de óptica geométrica hasta hoy.

Finalmente, el autor expresa su agradecimiento a la Generalitat de Catalunya por la concesión de la distinción Jaume Vicens Vives a la calidad docente universitaria en 1996, que posibilitó la renovación de la asignatura y la preparación del manuscrito del libro, y a Luis Enrique Romero por su excelente colaboración en la realización de dibujos y formato final del manuscrito.

Sant Just Desvern, septiembre de 1999

# §. ÍNDICE

---

## 1. Coordenadas y vectores

1.1. Sistemas de coordenadas ortogonales .....	9
1.2. Coordenadas geográficas y satélites .....	19
1.3. Campos vectoriales .....	23
1.4. Ejercicios .....	26

## 2. Revisión de estática

2.1. Ley de Coulomb .....	29
2.2. Ley de Gauss.....	30
2.3. Conducción eléctrica.....	31
2.4. Conductores y campo eléctrico .....	35
2.5. Campos creados por cargas en movimiento .....	40
2.6. El método de las imágenes .....	43
2.7. Ejercicios .....	47

## 3. Dinámica y ondas

3.1. Magnitudes con variación senoidal .....	49
3.2. Campos creados por una carga acelerada .....	55
3.3. Radiación de un electrón oscilante .....	58
3.4. Radiación de un elemento de corriente .....	61
3.5. Onda plana uniforme .....	64
3.6. Potencia transportada: Vector de Poynting .....	65
3.7. Potencia radiada por un dipolo oscilante .....	69
3.8. Realización física de un radiador elemental (dipolo corto) .....	70
3.9. Dipolos cortos como receptores .....	74
3.10. Polarización de ondas planas uniformes .....	77
3.11. El efecto Doppler .....	80
3.12. Ejercicios .....	83

## 4. Ondas y medios materiales

4.1. Revisión de las condiciones en el interior y en la superficie de un conductor ideal .....	89
4.2. Medios materiales .....	91
4.3. Pérdidas .....	98

4.4. Ondas en medios materiales.....	103
4.5. Campos en el interior de un medio conductor .....	110
4.6. Ejercicios .....	115

## 5. Reflexión y refracción de ondas

5.1. Incidencia de una onda plana sobre un plano conductor .....	119
5.2. Incidencia de una onda plana sobre un dieléctrico plano .....	128
5.3. Algunas generalizaciones .....	142
5.4. Ejercicios .....	147

## 6. Ondas y rayos. Óptica

6.1. Introducción .....	151
6.2. Difracción de una onda plana por una apertura.....	152
6.3. Sistemas ópticos .....	163
6.4. Sistemas ópticos con superficies planas .....	165
6.5. Espejos esféricos .....	169
6.6. Lentes .....	177
6.7. Lentes negativas o divergentes .....	182
6.8. Instrumentos ópticos .....	191
6.9. Aberraciones de las lentes .....	196
6.10. Límite de resolución de una lente .....	198
6.11. Anexo: cálculo de la difracción producida por una apertura rectangular .....	203
6.12. Ejercicios .....	208

## 7. Interacción con la materia

7.1. Introducción .....	213
7.2. Radiación térmica .....	214
7.3. El concepto de fotón .....	224
7.4. Emisión y absorción de fotones .....	228
7.5. Espectros de emisión y absorción .....	235
7.6. Inversión de poblaciones y efecto laser .....	244
7.7. Ejercicios .....	249

## 8. Las ecuaciones de maxwell

8.1. Introducción .....	253
8.2. Campos escalares .....	253
8.3. Ley de Gauss y divergencia .....	260
8.4. Ley de Faraday .....	264
8.5. Ley de Ampère .....	267
8.6. La aportación de Maxwell .....	270
8.7. Ondas electromagnéticas .....	281
8.8. Epílogo .....	285



# §1. COORDENADAS Y VECTORES

---

## 1. SISTEMAS DE COORDENADAS ORTOGONALES

Este texto se ocupa de la descripción de ondas electromagnéticas en el espacio y por tanto es necesario precisar el punto concreto del espacio a que en cada momento nos referimos y describir en él vectores (campos eléctrico y magnético). La manera más corriente de hacerlo es mediante las **coordenadas cartesianas rectangulares**, de manera que a un punto  $P$  le corresponden tres escalares  $(x, y, z)$  cuya construcción no es necesario recordar. De la misma manera, un vector se describe con la ayuda de tres vectores unitarios  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , que en este texto rebautizamos como  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , paralelos a los ejes de coordenadas y con sentido según las correspondientes coordenadas crecientes (nótese que el acento circunflejo,  $\hat{\phantom{x}}$ , denota un vector unitario). De manera que, en cualquier punto del espacio un vector se describe de la forma:

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$$

De la misma forma el vector definido por el origen de coordenadas y un punto  $P$  de coordenadas  $(x, y, z)$  se denomina **vector de posición** del punto y se escribe:

$$\vec{OP} = \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

y el vector diferencial que resulta de pasar de un punto  $P$  a otro arbitrariamente próximo  $P'$  mediante variaciones infinitesimales de coordenadas es:

$$\vec{PP'} = d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

Pero no siempre estas coordenadas, pese a su simplicidad y familiaridad, son siempre las más convenientes; por ejemplo, puede interesar resaltar la distancia de un punto cualquiera al origen de coordenadas donde, tal vez, hemos situado una carga o un radiador (coordenadas esféricas) o bien, en el caso de un sistema con simetría de revolución, resaltar la distancia de un punto al eje de revolución del sistema (coordenadas cilíndricas). En estos casos los restantes escalares que se usan como coordenadas no son necesariamente distancias, y con frecuencia son ángulos. En este texto nos interesaremos solamente en los sistemas esférico y cilíndrico citados, que describimos a continuación.

### 1.1. COORDENADAS ESFÉRICAS

La definición de las coordenadas esféricas de un punto  $P$  se resume en la figura 1.1 y su conversión a coordenadas cartesianas en la 1.2.

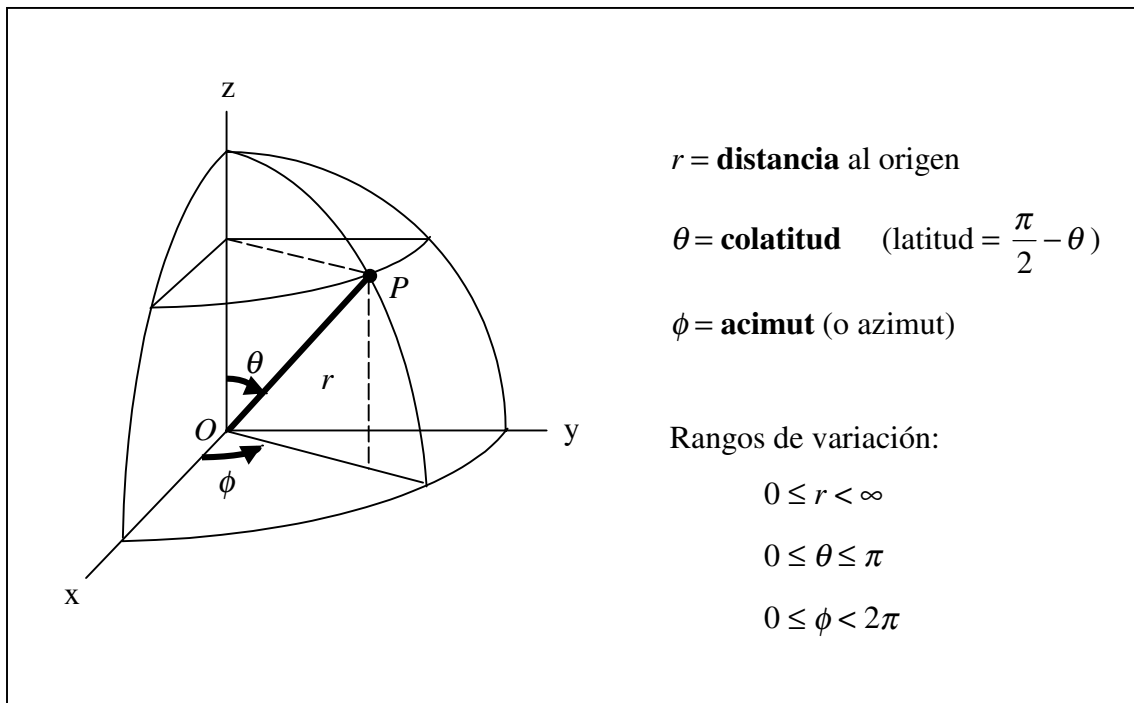


Figura 1.1.- Definición de las coordenadas esféricas de un punto  $P$ .

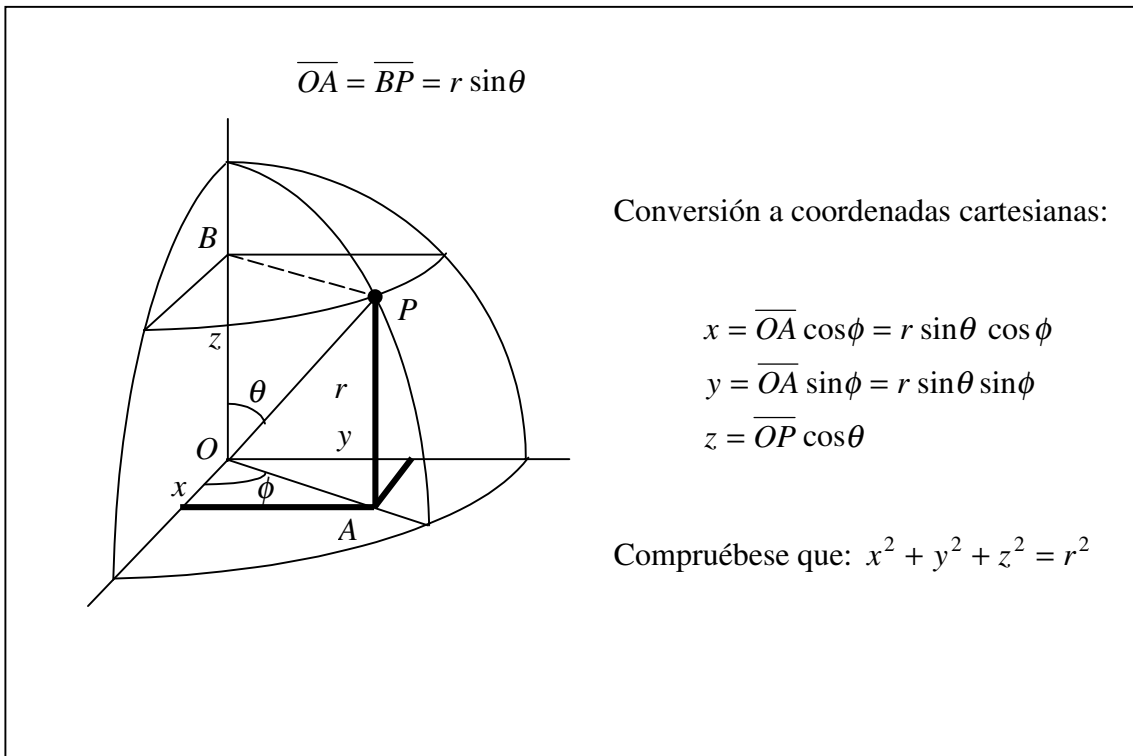


Figura 1.2.- Conversión de coordenadas esféricas a cartesianas.

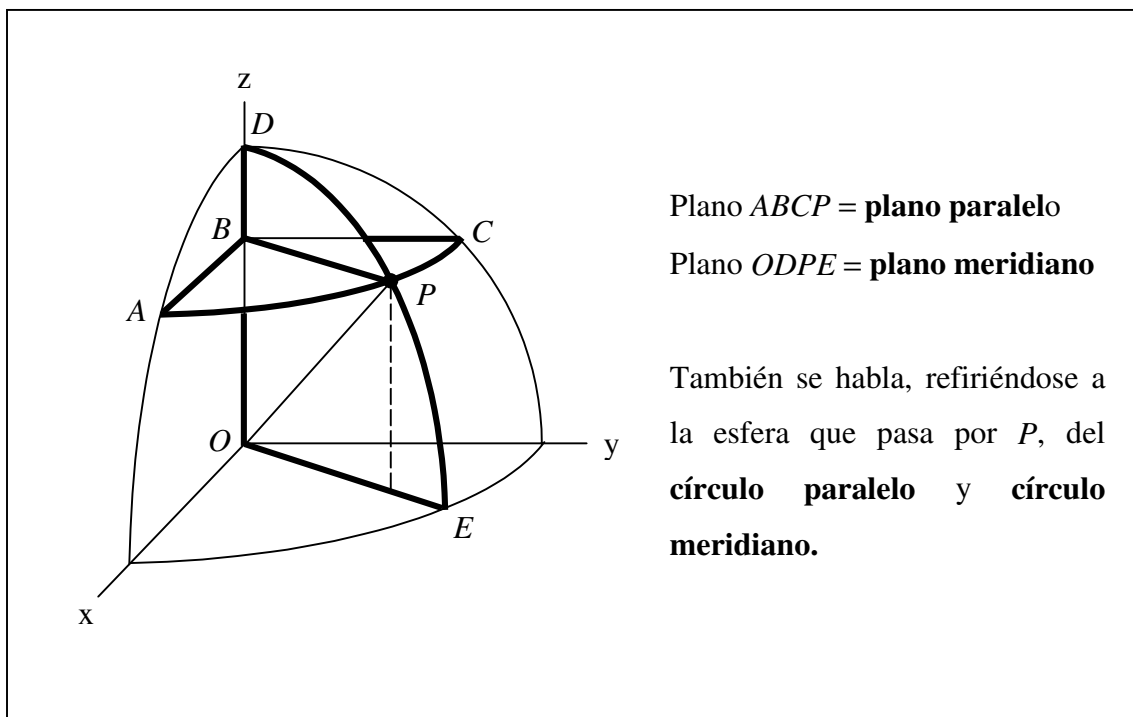


Figura 1.3.- Nomenclatura de planos relevantes.

### 1.1.1. Vectores unitarios

Se definen los vectores unitarios **en un punto dado  $P$**  a partir de las direcciones definidas por la variación infinitesimal de cada una de las coordenadas por separado, de la manera siguiente:

$\bar{a}_r = \hat{r}$ ,  $\rightarrow$  dirección del desplazamiento producido al variar  $r$  en  $dr$ . Coincide con la dirección radial, es decir, la del vector  $\bar{r}$ .

$\bar{a}_\theta = \hat{\theta}$ ,  $\rightarrow$  *ídem* al variar  $\theta$  en  $d\theta$ . Coincide con la dirección de la tangente al círculo meridiano que pasa por  $P$ .

$\bar{a}_\phi = \hat{\phi}$ ,  $\rightarrow$  *ídem* al variar  $\phi$  en  $d\phi$ . En este caso coincide la dirección de la tangente al círculo paralelo que pasa por  $P$ .

Nótese que los **sentidos** de los vectores unitarios se definen según la dirección impuesta por la correspondiente coordenada cuando **crece**, y que  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  son ortogonales entre sí y forman un triedro positivo, de forma que (fig. 1.4):

$$\hat{r} = \hat{\theta} \times \hat{\phi}, \quad \hat{\theta} = \hat{\phi} \times \hat{r}, \quad \hat{\phi} = \hat{r} \times \hat{\theta}$$

(el signo ‘ $\times$ ’ representa el producto vectorial). Un sistema de coordenadas como las esféricas donde los vectores unitarios así definidos forman un triedro trirrectángulo (forman ángulos de  $90^\circ$  entre sí) se llama sistema de coordenadas ortogonal. El sistema de coordenadas cartesianas, por ejemplo, es ortogonal, y también lo es el cilíndrico que veremos después.

Nótese que, a diferencia de las coordenadas cartesianas, donde los vectores unitarios  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  tienen siempre la misma dirección, en sistemas de coordenadas generales (por ejemplo las esféricas que estamos estudiando) los vectores unitarios en un punto  $P$  **dependen de la posición del punto  $P$** .

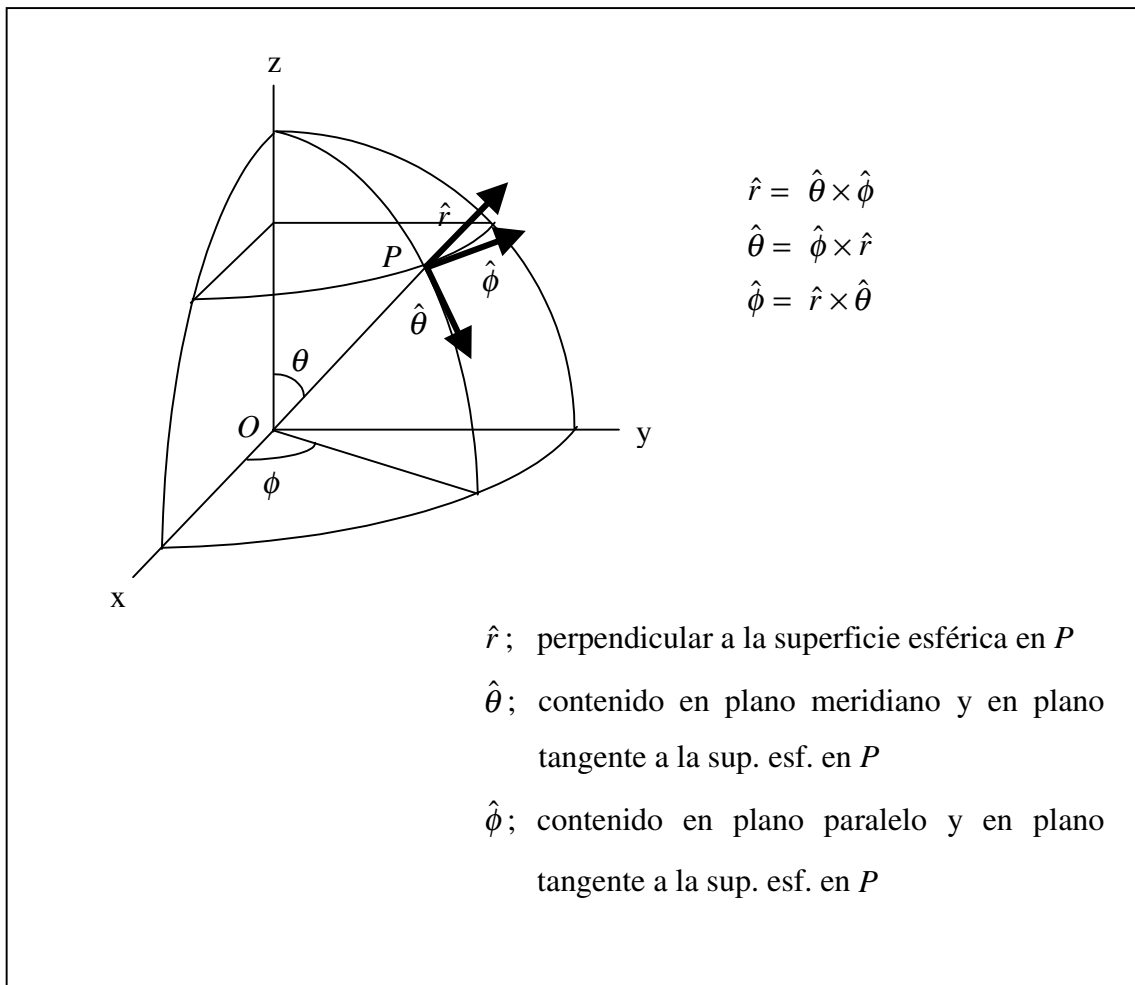


Figura 1.4.- Definición de los vectores unitarios en un punto  $P$ .

### 1.1.2. Desplazamientos infinitesimales

El vector de posición que define un punto  $P$  con relación al origen de coordenadas  $O$ ,  $\overline{OP}$ , puede escribirse, en vista de los vectores unitarios en el punto  $P$ , como:

$$\vec{r} = \overline{OP} = r \hat{r}$$

(se sobreentiende que  $\hat{r}$  es el correspondiente al punto  $P$ ). Si consideramos dos puntos arbitrariamente próximos  $P = (r, \theta, \phi)$  y  $P' = (r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ , estamos interesados en expresar el diferencial del vector de posición  $\overline{dr} = \overline{PP'}$  en términos de

los vectores unitarios  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  en  $P$ . Para ello descomponemos el desplazamiento en tres desplazamientos elementales (fig. 1.5):

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow (r + dr, \theta, \phi); \quad \overline{dr}_r = dr \hat{r}$$

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \theta + d\theta, \phi); \quad \overline{dr}_\theta = r d\theta \hat{\theta}$$

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \theta, \phi + d\phi); \quad \overline{dr}_\phi = r \sin\theta d\phi \hat{\phi}$$

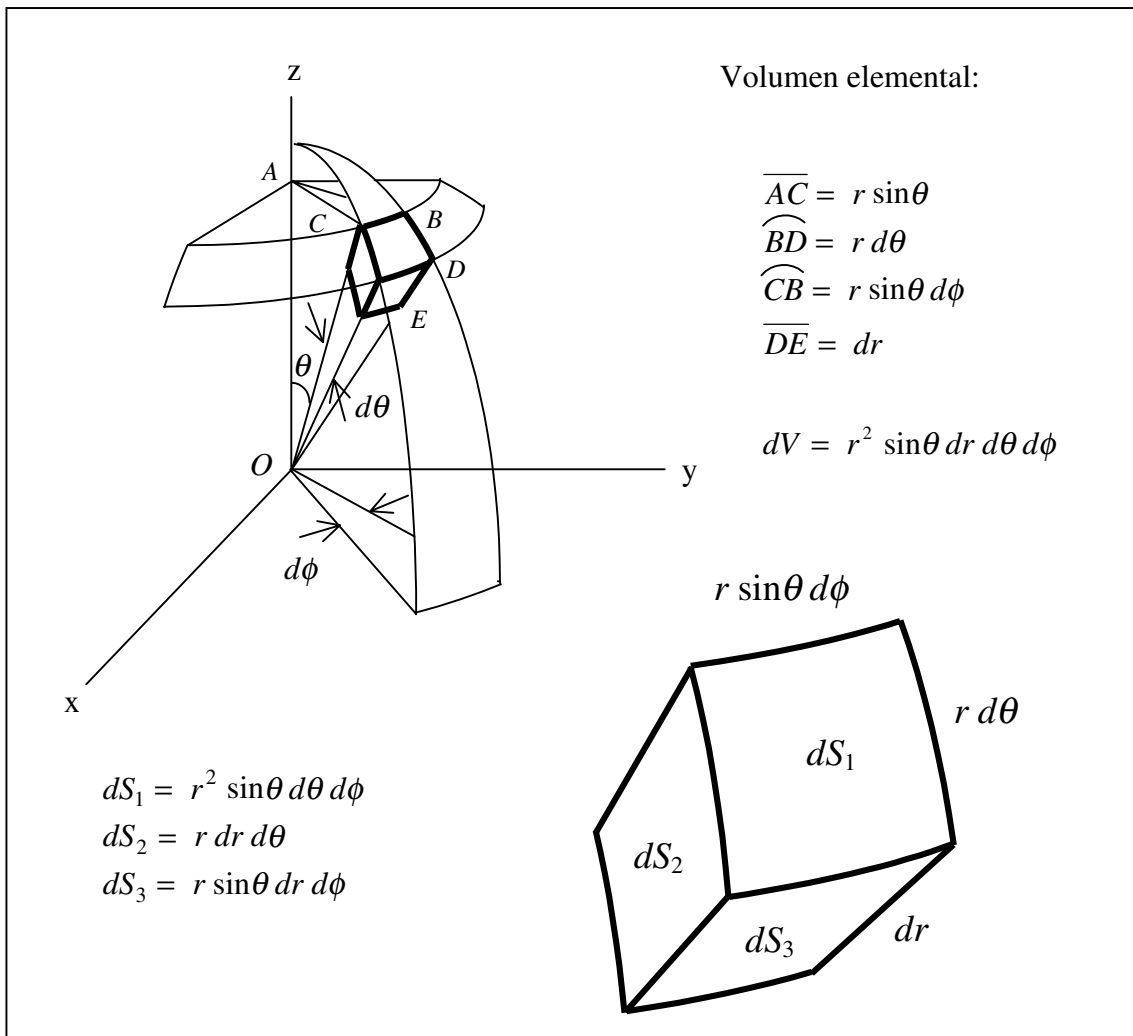


Figura 1.5.- Desplazamientos elementales (infinitesimales) y volumen elemental generado.

Por tanto, componiendo los tres desplazamientos elementales obtenemos:

$$\overline{dr} = \overline{PP'} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}$$

y puesto que  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  son ortogonales,

$$|\overline{dr}|^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

Nótese que al formar los vectores elementales  $(\overline{dr}_r, \overline{dr}_\theta, \overline{dr}_\phi)$  un triedro trirectángulo, definen un **paralelepípedo elemental** de volumen:

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

Este volumen elemental está limitado por superficies elementales  $dS_1, dS_2, dS_3$  que están definidas y calculadas en la figura 1.5. Es particularmente importante  $dS_1$ , que representa el elemento de superficie de una superficie esférica.

Las coordenadas esféricas son útiles para cálculos que implican esferas o partes de esferas, como vemos en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1

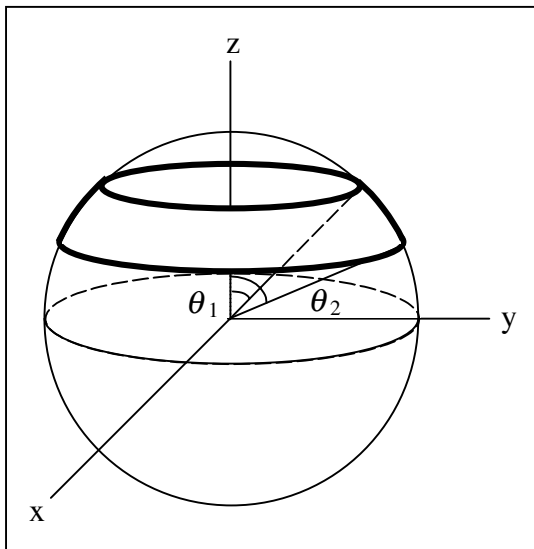


Figura 1.6.- Segmento esférico del ejemplo 1.

Cálculo del área de un segmento esférico como en la figura 1.6:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \\ &= 2\pi r^2 (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \end{aligned}$$

En particular, para la esfera completa:

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi \rightarrow S = 4\pi r^2$$

## EJEMPLO 2

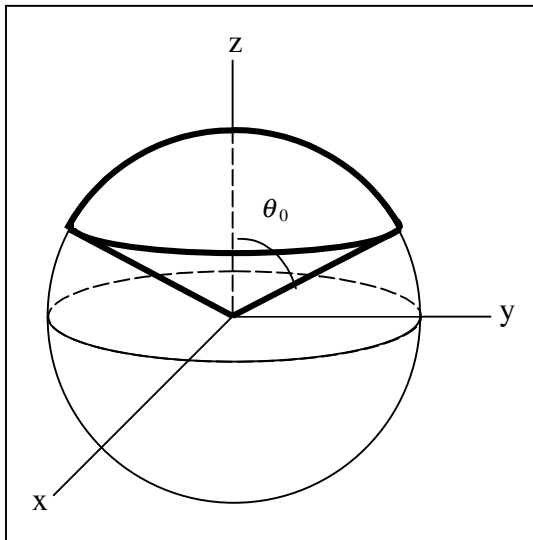


Figura 1.7.- Sector esférico del ejemplo 2.

Cálculo del volumen del sector esférico de la figura 1.7:

$$V = \int_{r=0}^{r_0} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi =$$

$$= \frac{2\pi}{3} r_0^3 (1 - \cos\theta_0)$$

En particular, para la esfera completa:

$$\theta_0 = \pi \quad \rightarrow \quad V = \frac{4}{3} \pi r_0^3$$

### 1.1.3. Los vectores $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ en coordenadas cartesianas

Con frecuencia es necesario referirse a los vectores unitarios  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  en términos de los vectores unitarios  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  del sistema cartesiano. Con referencia a la figura 1.4, el vector  $\hat{r}$  tiene una componente  $\hat{z}$  dada por ( $\cdot$  denota producto escalar):

$$\hat{r} \cdot \hat{z} = \cos\theta \quad (\text{recuérdese que } |\hat{r}| = |\hat{z}| = 1)$$

Además  $\hat{r}$  tiene una componente en el plano XY de valor  $\sin\theta$  que forma un ángulo  $\phi$  con el eje X; por tanto  $\hat{r} \cdot \hat{x} = \sin\theta \cos\phi$ ,  $\hat{r} \cdot \hat{y} = \sin\theta \sin\phi$

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

Se propone como ejercicio realizar el mismo cálculo para los restantes vectores,  $\hat{\theta}, \hat{\phi}$ . Debe obtenerse:



$$\hat{\theta} = \cos\theta \cos\phi \hat{x} + \cos\theta \sin\phi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}$$

## 1.2. COORDENADAS CILÍNDRICAS

Su definición se resume gráficamente en la figura 1.8, y su conversión a coordenadas cartesianas en la 1.9. Las restantes definiciones y propiedades se hacen de forma similar a las de las coordenadas esféricas, por lo que las figuras 1.9-1.11 no requieren comentarios adicionales.

Nótese que los vectores unitarios forman un triedro trirrectángulo positivo,  $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ , y en consecuencia éste es también un sistema de coordenadas ortogonales.

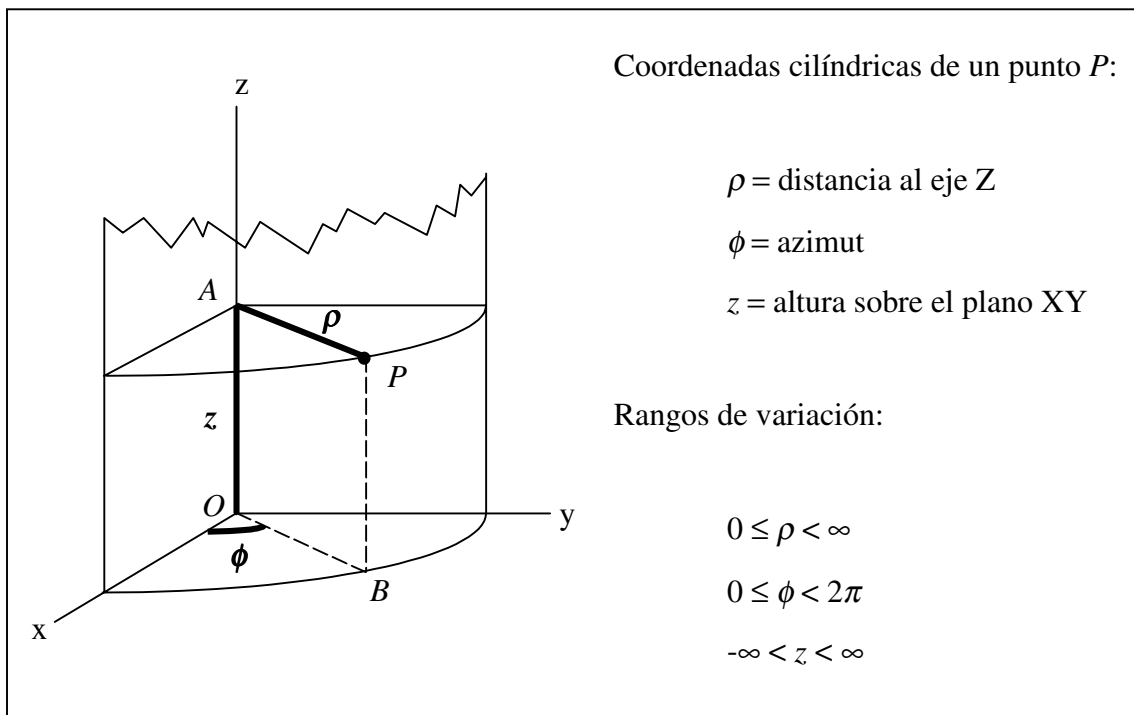


Figura 1.8.- Definición de las coordenadas cilíndricas de un punto  $P$ .

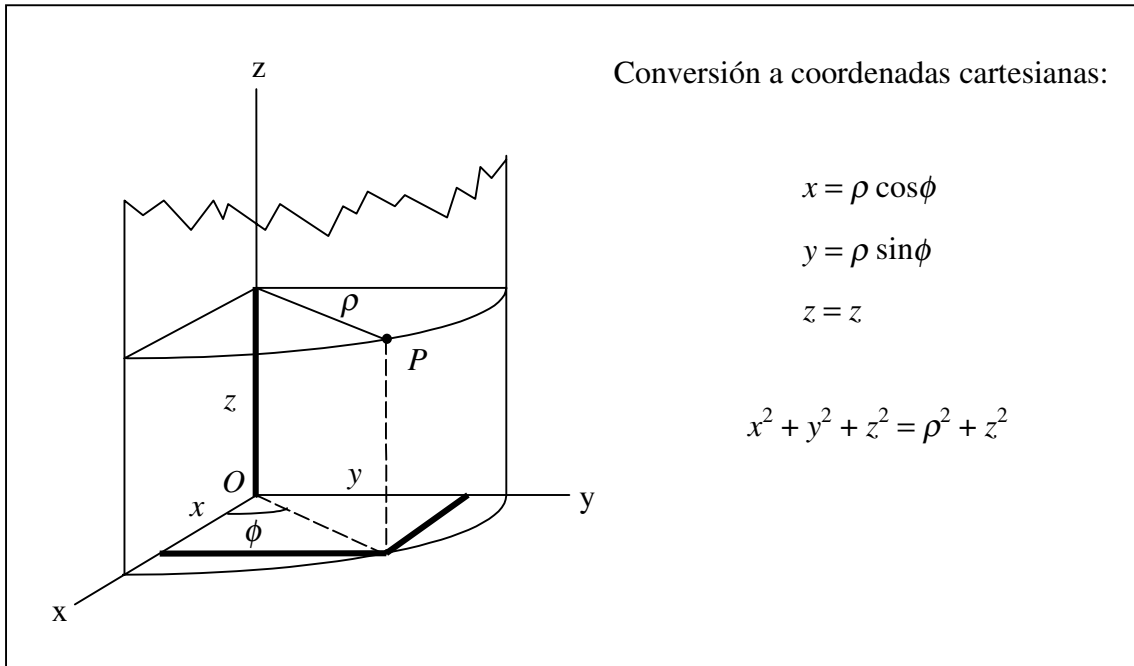


Figura 1.9.- Conversión de coordenadas cilíndricas a cartesianas.

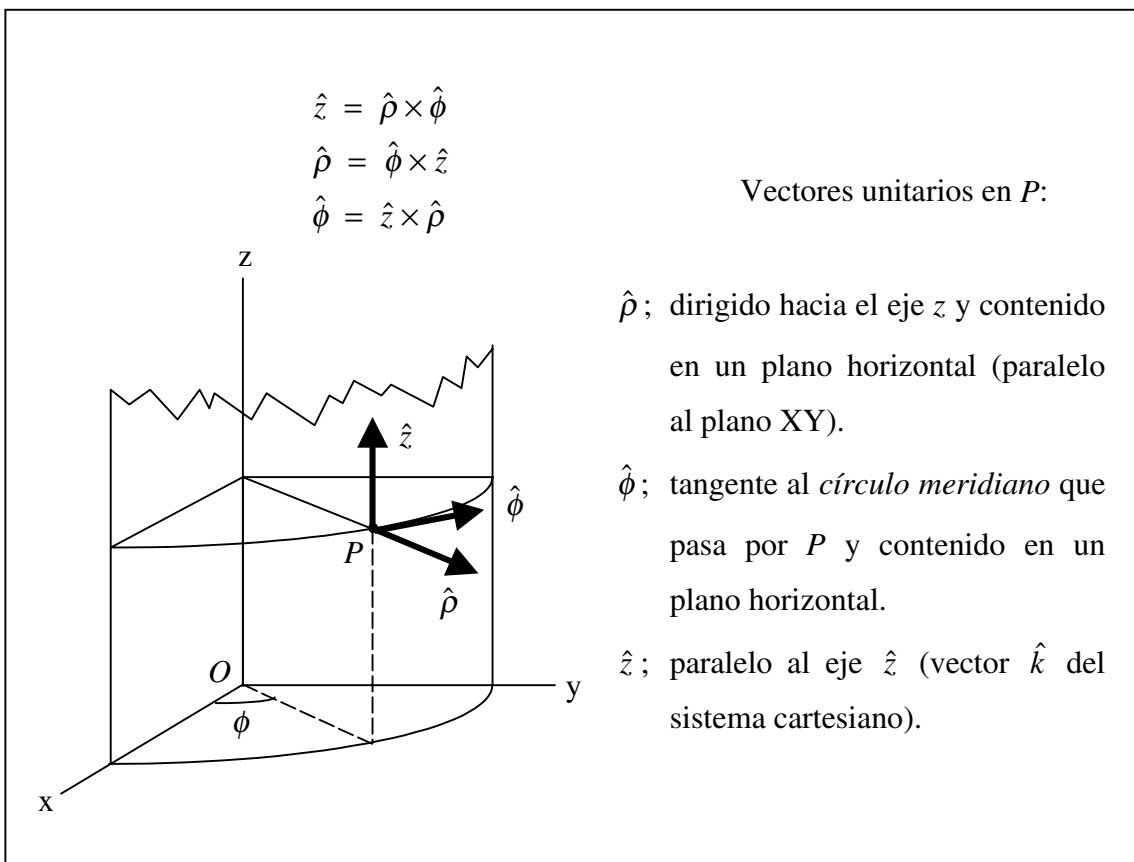


Figura 1.10.- Definición de vectores unitarios en un punto.

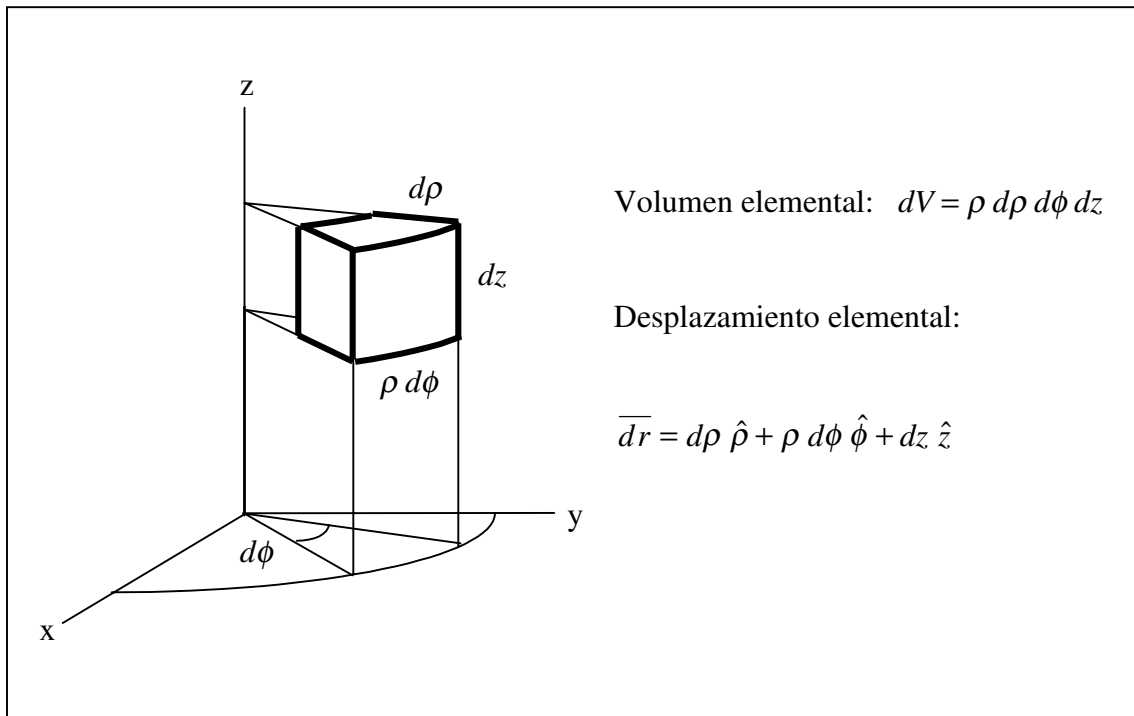


Figura 1.11.- Cálculo del desplazamiento elemental de un punto a otro arbitrariamente próximo.

## 2. COORDENADAS GEOGRÁFICAS Y SATÉLITES

Una aplicación familiar de las coordenadas esféricas es la de las coordenadas geográficas, longitud y latitud, que se utilizan para localizar un punto sobre la superficie de la Tierra. Ésta tiene una forma aproximada de elipsoide de revolución (alrededor del eje norte-sur) con semieje menor de 6357 km y semieje mayor (en la circunferencia del ecuador) de 6378 km, pero para los efectos de este apartado es suficiente con aproximarla por una esfera de radio 6371 km; esta esfera aproximada tiene la misma superficie y volumen que los verdaderos de la Tierra.

La posición de un punto sobre su superficie viene dada, como es sabido, con referencia a una malla de círculos paralelos y meridianos, de manera que se define la longitud como la distancia en grados, medida sobre el ecuador y por el camino más corto (Este u Oeste), entre el meridiano del punto y el meridiano 0 (meridiano de Greenwich). La latitud es la distancia angular entre el vector de posición del punto desde el centro de la Tierra y el plano del ecuador (fig. 1.12).

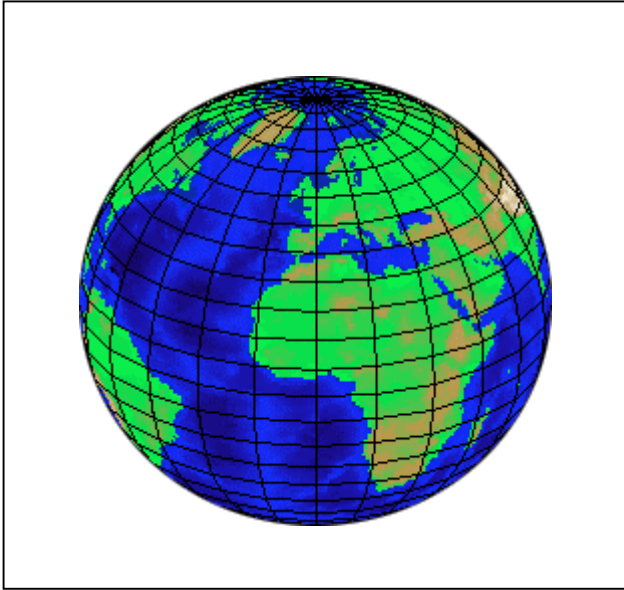


Figura 1.12.- Meridianos y paralelos.

Es fácil de ver que para un punto de la superficie de la Tierra los vectores unitarios coinciden con el **sistema de coordenadas locales** formado por la dirección vertical (vector  $\hat{r}$ ), la dirección horizontal sur (vector  $\hat{\theta}$ ), y la dirección horizontal este (vector  $\hat{\phi}$ ); puede revisarse en este momento la figura 1.4 y compararla con la 1.12 para confirmar lo anterior. Estas coordenadas son importantes porque

permiten identificar, en un lugar determinado, una cierta dirección con la ayuda de una brújula (u otro elemento que permita localizar los puntos cardinales) y algún instrumento que permita medir la **altura sobre el horizonte**, es decir, el ángulo que forma la dirección con el plano horizontal.

## EJEMPLO

En el ejercicio 1.4 se propone calcular el ángulo  $\alpha$  que forman la dirección vertical de Londres y la dirección de una antena que esté situada verticalmente en Roma, conociendo las coordenadas geográficas de ambos puntos. El cálculo es muy sencillo si se recuerda que el producto escalar de dos vectores unitarios coincide con el coseno del ángulo que forman; de manera que:

$$\cos \alpha = \hat{r}_L \cdot \hat{r}_R$$

dónde los subíndices se refieren a Londres y Roma, evidentemente.

## 2.1. SATÉLITES

Los satélites de comunicaciones están situados normalmente en órbitas circulares que, de acuerdo con las leyes de Kepler, tienen un período  $T$  dado por:

$$T = a^{3/2} \times 3.1471 \times 10^{-7} \text{ s}$$

dónde  $a$  es el radio de la órbita medido en metros. Las órbitas mas bajas están entre 600 y 800 km de altura sobre la superficie de la Tierra y tienen períodos del orden de 100 minutos. Por otra parte, a una órbita de 35 948 km de altura sobre la superficie de la Tierra le corresponde un período de 24 horas menos cuatro minutos (día sidéreo), es decir, el satélite tarda el mismo tiempo en dar una vuelta completa en su órbita que el que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor de su eje (recuérdese que el día solar es el tiempo que tarda el sol en pasar dos veces consecutivas por el mismo meridiano, pero como la Tierra avanza en su órbita a razón de un grado cada día, un día solar corresponde a un giro de 361°, mientras el sidéreo corresponde a 360°).

De manera que si la órbita del satélite a - 36 000 km de altura está en el plano del ecuador de la Tierra ( $\theta=90^\circ$ ), y si aquel gira en el mismo sentido que ésta (de oeste a este), la posición del satélite con respecto a la Tierra permanece invariable, y a un observador terrestre le parece que está fijo en el espacio (fig. 1.13). Por esta razón a esta órbita se le llama **geoestacionaria** y en ella se encuentran la mayoría de satélites de comunicaciones, entre ellos los que transmiten programas de televisión (Astra, Hispasat, etc.), y también los satélites meteorológicos (Meteosat). Dado que de estos satélites se conoce la distancia al origen de coordenadas ( $35\,948+6\,371=42\,319$  km) y su colatitud ( $90^\circ$ ; la latitud es  $0^\circ$ ), la única información que se da de su posición es la longitud (azimut).

## EJEMPLO

Un problema de interés práctico relacionado con satélites geoestacionarios es el de saber, para un punto dado de la Tierra, en qué dirección hay que apuntar una antena para recibir las señales que transmite, cosa que hay que hacer con una precisión de unos pocos grados solamente (sino, las señales no son captadas por la antena, que solo recibe dentro de un haz muy estrecho) y teniendo en cuenta que para hacerlo los instrumentos de que se dispone son una brújula para identificar los puntos cardinales y un *clinómetro* o aparato para medir el ángulo que forma una dirección con el plano horizontal.

La situación se describe gráficamente en la figura 1.13; aquí  $\bar{r}$  es la posición del punto

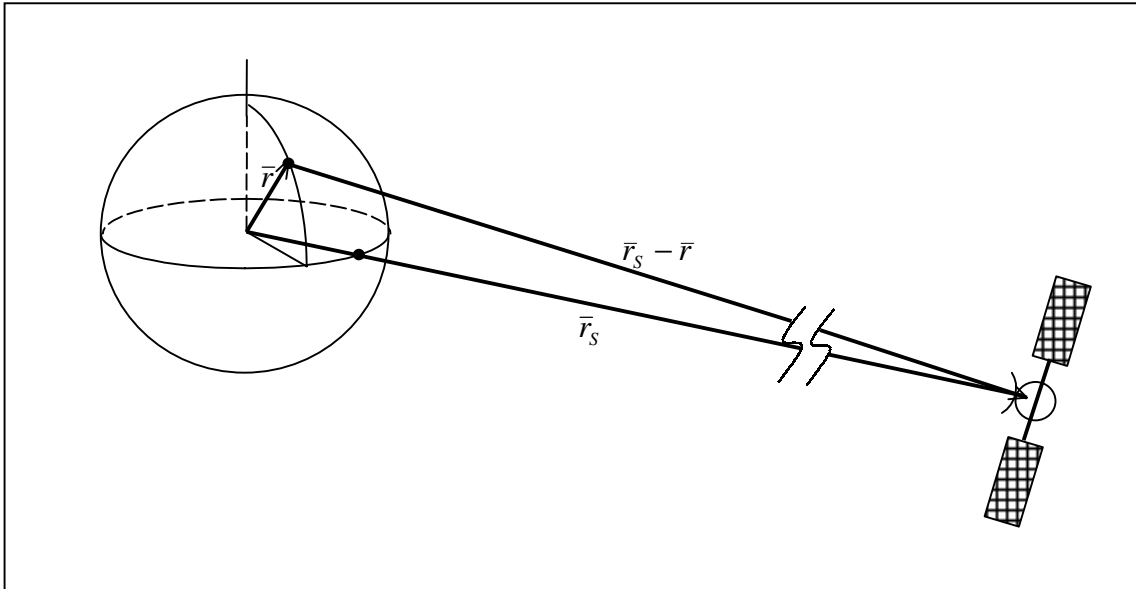


Figura 1.13.- Diagrama representando un satélite en el plano ecuatorial de la Tierra y los vectores de posición relevantes.

de observación,  $\bar{r}_s$  la del satélite y por lo tanto,  $\bar{r} - \bar{r}_s$  es el vector de posición que va desde el punto de observación hasta el satélite, y es por tanto la dirección que hay que localizar. Ésta se dibuja ampliada y con los ejes de coordenadas locales, a la que hay que referirla, en la figura 1.14:

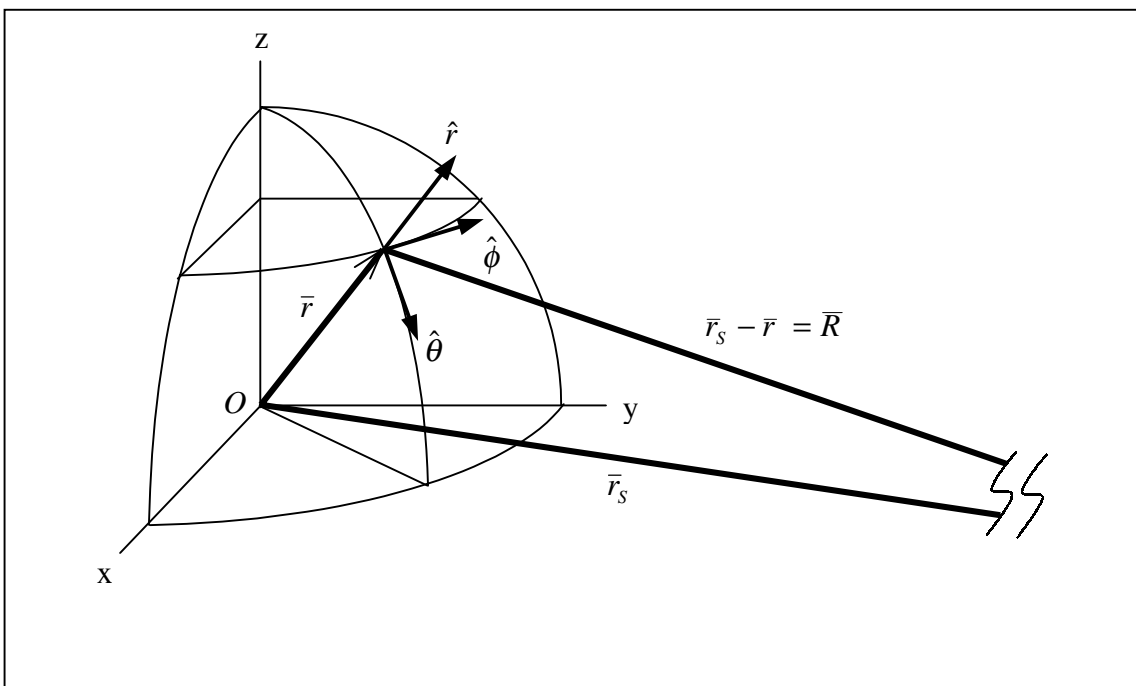


Figura 1.14.- Ampliación de la figura anterior poniendo de manifiesto los ejes de coordenadas locales en el punto de observación.

En este punto es necesario recordar que las componentes de un vector son sus proyecciones sobre las direcciones de los vectores unitarios de referencia, y por tanto:

$$\bar{r} - \bar{r}_s = \bar{R} = (\bar{R} \cdot \hat{r}) \hat{r} + (\bar{R} \cdot \hat{\theta}) \hat{\theta} + (\bar{R} \cdot \hat{\phi}) \hat{\phi}$$

(y si no se recuerda, puede comprobarse su validez multiplicando escalarmente por los vectores unitarios). Finalmente, podemos calcular los valores pedidos de  $\theta'$  y  $\phi'$  si tenemos en cuenta que (figura 1.15):

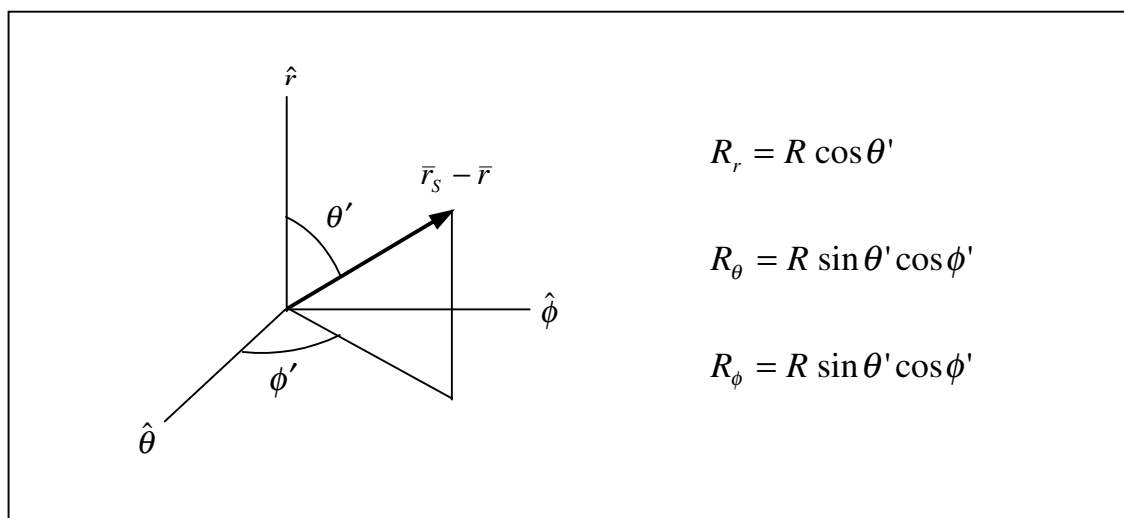


Figura 1.15.- Detalle del vector en el sistema de coordenadas locales.

### 3. CAMPOS VECTORIALES

Un campo vectorial es una distribución en el espacio de una magnitud con carácter vectorial; la velocidad de las partículas de un fluido, la fuerza de la gravedad (campo gravitatorio), los “campos” eléctrico y magnético, etc.

Para ayudar a visualizar un campo vectorial con frecuencia se utilizan las “**líneas de campo**” construidas de manera que en cada punto de la línea el campo es **tangente** a la línea (suponemos conocidas las líneas de campo eléctrico y magnético y omitimos ejemplos).

Si los valores del campo no dependen del tiempo diremos que es **estacionario**. Normalmente (siempre que podamos) supondremos campos estacionarios, por simplicidad.

En un campo vectorial  $\bar{A}(x, y, z) = \bar{A}(\bar{r})$  dos conceptos importantes son los de **flujo** a través de una superficie y **circulación** a lo largo de una curva. Ambos se revisan en las cuatro figuras siguientes.

## FLUJO

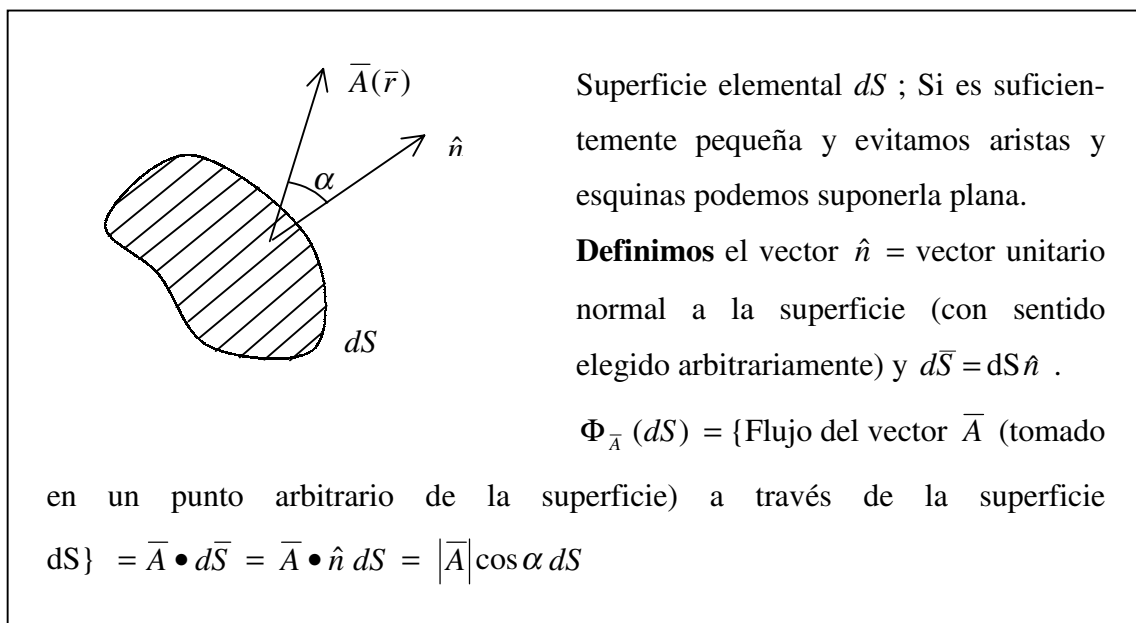
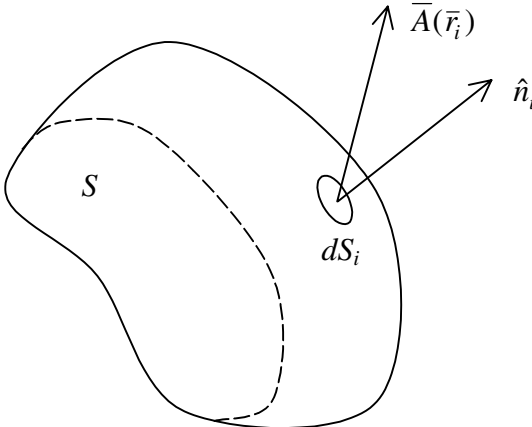


Figura 1.16.- Revisión del concepto de flujo a través de una superficie elemental.



Para una superficie finita, se descompone en superficies elementales  $dS_i$  y definimos:

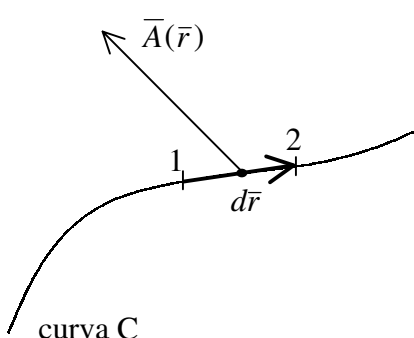


$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{A}}(S) &= \sum_i \Phi_{\bar{A}}(S_i) = \\ &= \sum_i \bar{A}(\bar{r}_i) \cdot \hat{n}_i dS_i \\ \rightarrow \Phi_{\bar{A}}(S) &= \int_S \bar{A}(\bar{r}) \cdot \hat{n} dS \end{aligned}$$

(Nótese que  $\hat{n}$  es función de la posición  $\bar{r}$ ).

Figura 1.17.- Flujo a través de una superficie finita.

### CIRCULACIÓN



Elemento de camino en  $C$ ,  $d\bar{r}$  (si es suficientemente pequeño y evitamos esquinas, podemos suponerlo recto).

Definimos la **circulación** elemental del vector  $\bar{A}$  entre 1 y 2 (extremos de  $d\bar{r}$ ) mediante la expresión:

$$C_{\bar{A}}(d\bar{r}) = \bar{A} \cdot d\bar{r}$$

(con  $\bar{A}$  tomado en un punto arbitrario del vector elemental  $d\bar{r}$ ).

Figura 1.18.- Definición de circulación a lo largo de un elemento de línea.

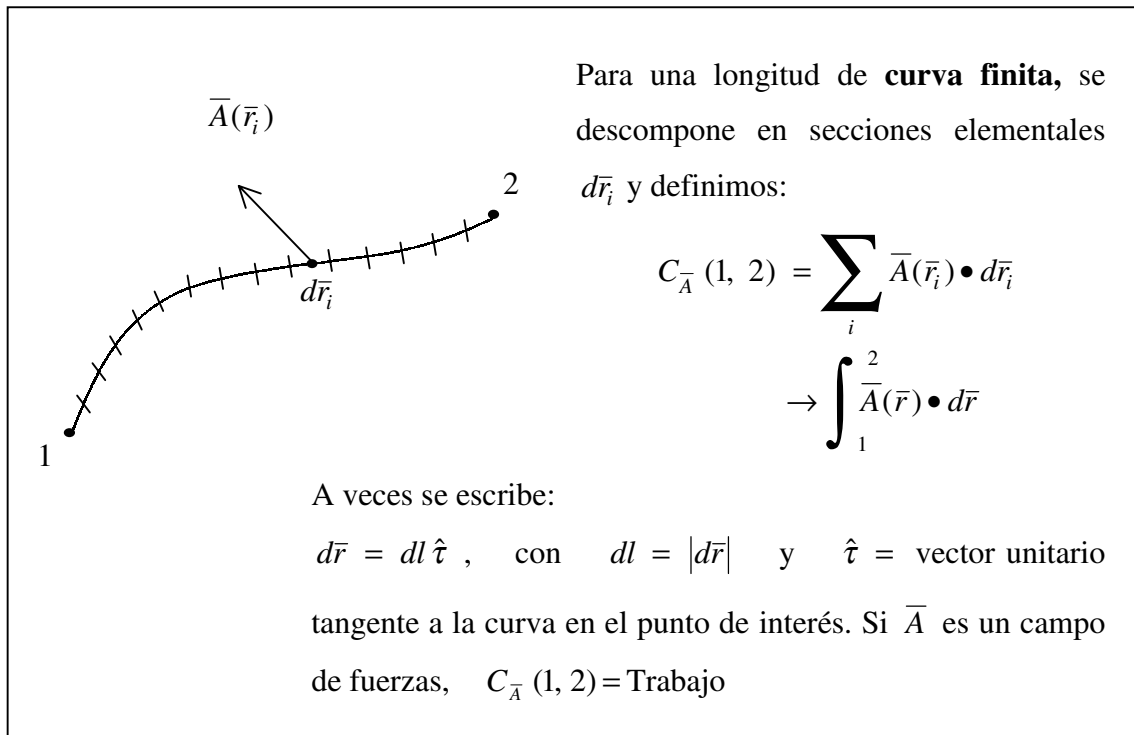


Figura 1.19.- Circulación de un vector a lo largo de una curva finita.

## EJERCICIOS

1.1.- Dados tres vectores  $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ :

- Demstrar que su producto mixto  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$  es igual, excepto a lo sumo por un signo, al volumen del hexaedro que definen. Discuta la cuestión del signo.
- Utilice el resultado anterior para demostrar que:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

1.2.- Obtener las relaciones que ligan a las coordenadas esféricas de un punto con sus coordenadas cilíndricas (en los dos sentidos).

1.3.- Dados los vectores:  $\vec{A} = 2\hat{r} - \hat{\theta} + 2\hat{\phi}$ ,  $\vec{B} = \hat{r} + 2\hat{\theta} - \hat{\phi}$ :

- Calcule  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ,  $\vec{A} \times \vec{B}$  suponiendo que ambos vectores están aplicados en el mismo punto del espacio.
- Idem suponiendo que A está aplicado en (1,1,2) y B en (1,-2,1) (posiciones en coordenadas cartesianas)

1.4.- Dado un lugar en Londres ( $51^{\circ} 30' N$ ,  $0^{\circ} 10' W$ , radio de la Tierra 6370 km):

- Definir unos ejes cartesianos ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) de referencia con origen en el centro de la Tierra adecuados y calcular las componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de la dirección horizontal sur con relación a estos ejes.
- Calcular las distancias que corresponden sobre la superficie de la Tierra a un incremento de  $1'$  (minuto de arco) de latitud y a  $1'$  de longitud.
- Calcular el ángulo que formará con la vertical del lugar de Londres la de otro de Roma de posición ( $41^{\circ} 54' N$ ,  $12^{\circ} 29' E$ )

1.5.- Calcular el ángulo que forman la dirección horizontal E-W de un lugar de Barcelona de coordenadas geográficas  $41^{\circ} 25' N$ ,  $2^{\circ} 10' E$  y la dirección horizontal N-S de otro de Moscú de coordenadas  $55^{\circ} 45' N$ ,  $33^{\circ} 35' E$ .

1.6.- Un satélite geoestacionario (altura sobre la superficie de la Tierra de 36000 km y contenido en el plano del ecuador terrestre) de posición  $19.2^{\circ} E$  se observa desde un punto de Barcelona de coordenadas  $2.0^{\circ} E$ ,  $41.0^{\circ} N$ . (Radio Tierra = 6370 km)

- Calcular la dirección según la cual se ve el satélite. Dar la solución en grados de altura sobre el horizonte y azimut referido a la dirección (horizontal) sur.
- Si el satélite tiene un mástil que apunta en dirección tangente a la órbita en sentido W (contenido por tanto en el plano ecuatorial de la Tierra), calcular su dirección en las coordenadas locales de Barcelona (direcciones vertical, sur y este) como en el apartado a), es decir, dando el resultado de la dirección en altura sobre el horizonte y azimut.

1.7.- Supongamos que nos encontramos en un punto de observación de coordenadas  $25^{\circ} 16' E$ ,  $27^{\circ} 19' S$ . Se desea averiguar los siguientes parámetros referentes a la posición de una estación espacial que actualmente se encuentra desviada de su posición inicial en el espacio, que era  $3^{\circ} 15' E$ ,  $48^{\circ} 32' N$  y 30 240 km de altura sobre la superficie de la Tierra:

- Ángulo de desviación, medido desde el centro de la Tierra, entre la posición original y la actual, que es  $8^{\circ} 39' E$ ,  $57^{\circ} 06' N$  y 30630 km de altura.
- Retardo (es decir, tiempo de tránsito) de una señal de radio entre el punto de observación y la estación espacial.

El radio de la Tierra es de 6370 km y la velocidad de las señales de radio de  $3.0 \times 10^8$  m/s. En ambas preguntas se necesita saber la precisión de los resultados obtenidos.

## §2. REVISIÓN DE ESTÁTICA

### 1. LEY DE COULOMB

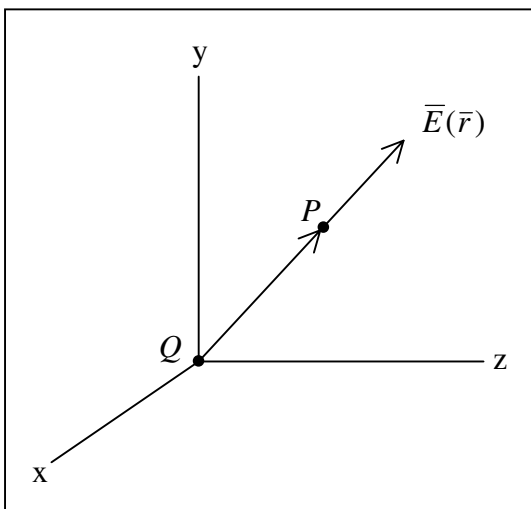


Figura 2.1.- Carga en el origen de coordenadas.

En el vacío, el campo creado en el punto  $P \leftrightarrow \bar{r}$  por una carga puntual  $Q$  situada en el origen de coordenadas vale (coordenadas esféricas, fig. 2.1):

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r}}{r^3}$$

(Recuérdese que  $\bar{E}$  es la fuerza que se ejerce sobre una carga unidad:  $\bar{F} = q \bar{E}$ ).

Si la carga no está situada en el origen, sino en el punto  $\bar{r}_1$  (fig. 2.2):

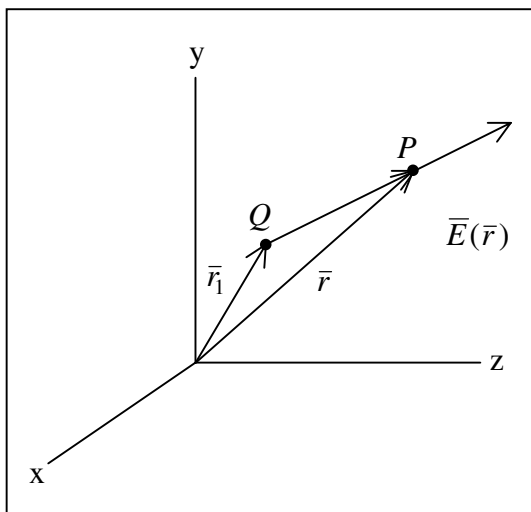


Figura 2.2.- Carga en un punto arbitrario.

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r} - \bar{r}_1}{|\bar{r} - \bar{r}_1|^3}$$

Si tenemos una colección de cargas  $Q_i$  situadas en los puntos  $\bar{r}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) el campo eléctrico creado es la superposición de los producidos por cada carga por separado:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\bar{r} - \bar{r}_i}{|\bar{r} - \bar{r}_i|^3}$$

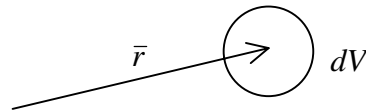
## 2. LEY DE GAUSS

“El flujo del campo eléctrico  $\vec{E}$ , en el vacío, a través de una superficie cerrada es igual a  $1/\epsilon_0$  veces la carga total encerrada en el volumen”. En términos matemáticos:

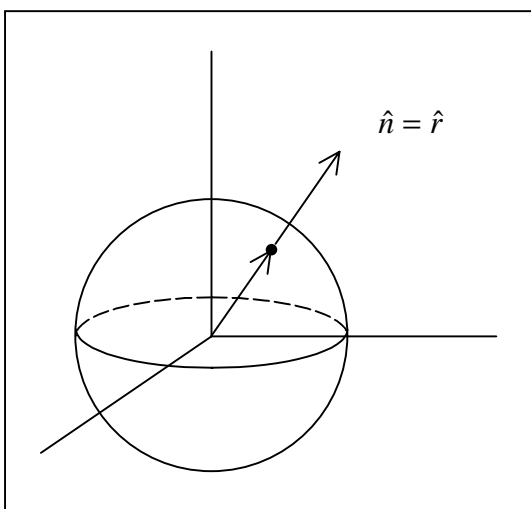
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Adviértase que las cargas (electrones, protones) son siempre puntuales, pero normalmente el número de ellas es tan grande que resulta más cómodo considerar una distribución continua con **densidad de carga**  $\rho(\vec{r})$  definida, para un volumen  $dV$  construido alrededor de  $\vec{r}$ , mediante:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dQ}{dV}$$



La ley de Gauss se puede comprobar fácilmente para una carga puntual en el origen y una superficie esférica de radio  $R$ :



$$\begin{aligned} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \int_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dS = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_S dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Nótese que el resultado es independiente de  $R$ . La comprobación puede extenderse sin excesivo esfuerzo a una superficie de forma arbitraria y para más de una carga.

Figura 2.3.- Utilizada para demostración de la ley de Gauss.

### 3. CONDUCCIÓN ELÉCTRICA

Cuando en un medio (sólido, líquido, gas) hay cargas capaces de moverse (electrones libres, iones) y se aplica un campo eléctrico, las cargas se mueven y se produce transporte de carga en el espacio. En estas circunstancias se define, en cada punto del espacio  $\vec{r}$ , el vector **densidad de corriente**  $\vec{i}(\vec{r})$  de manera que sea tangente a la velocidad de las cargas (y con la misma dirección si éstas son positivas, y contraria si son negativas) y tal que dado un elemento de área  $d\vec{A}$  en  $\vec{r}$  la corriente que lo atraviesa  $dI$  viene dada por:

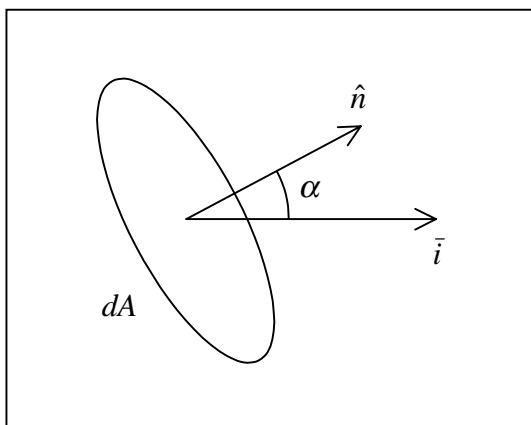


Figura 2.4.- Utilizada para calcular  $dI$ .

$$dI = \vec{i} \cdot d\vec{A} = \vec{i} \cdot \hat{n} dA = i dA \cos \alpha$$

Nótese que la corriente es el paso de cargas, y es por tanto máxima cuando  $dA$  es perpendicular a la velocidad de las cargas y es nula cuando  $dA$  es paralelo a la velocidad, ya que entonces éstas no la atraviesan.

#### 3.1. MODELO ELEMENTAL DE CONDUCCIÓN EN CONDUCTORES

Un material sólido conductor (metales como Cu, Al, Ag o semiconductores como Si, AsGa, etc.) se puede modelar como un substrato fijo de átomos que han perdido un electrón y están por tanto ionizados, y una nube de electrones que pueden moverse libremente por el interior sin más restricciones que **en cualquier volumen elemental  $dV$  se cumpla la neutralidad eléctrica**;  $n^{\circ}$  de cargas positivas =  $n^{\circ}$  de cargas negativas. De otro modo las fuerzas de Coulomb tienden a restablecer inmediatamente la neutralidad.

Si pudiéramos observar un electrón veríamos que se mueve muy deprisa (con velocidades de hasta  $10^6$  m/s) y experimenta continuamente colisiones con los átomos

pero de manera que nunca se aleja demasiado de su posición de partida. Si definimos su velocidad media  $\bar{v}_{em}$  como:

$$\bar{v}_{em} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t},$$

con un intervalo de tiempo  $\Delta t$  razonablemente largo comparado con el tiempo medio entre colisiones ( $10^{-12} - 10^{-15}$  s), se encuentra que  $\bar{v}_{em} = 0$ .

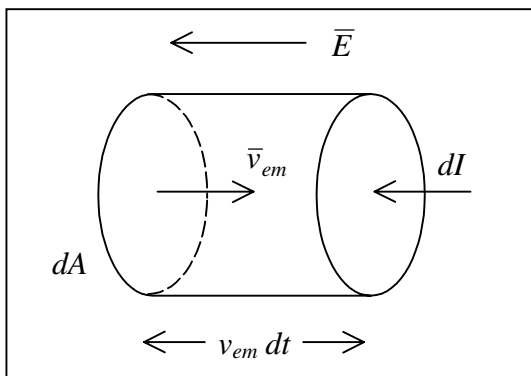
Si aplicamos un campo eléctrico exterior,  $\bar{E}$ , éste actúa sobre las cargas y produce un desplazamiento neto, de manera que la velocidad media deja de ser cero. Por otra parte, el efecto de las colisiones hace que la velocidad media del electrón no crezca indefinidamente, sino que se estabilice en un valor proporcional al campo eléctrico:

$$\bar{v}_{em} = -|\mu_e| \bar{E}$$

donde la constante  $-|\mu_e|$  se llama **movilidad** y tiene dimensiones de  $\text{m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$  (sistema SI).

### 3.2. CONDUCTIVIDAD

Veamos que relación existe entre estos fenómenos y la conductividad del material. Supongamos que le aplicamos un campo eléctrico **uniforme** (valor constante en todos los puntos del espacio) de manera que todos los electrones se mueven con la misma velocidad media  $\bar{v}_{em}$ .



Si situamos un  $dA$  perpendicular a  $\bar{v}_{em}$  la cantidad de carga que lo atraviesa en un tiempo  $dt$  vale (fig. 2.5):

$$d^2Q = -N_e dA v_{em} dt |e|$$

Figura 2.5.- Volumen de carga a través de  $dA$  en un tiempo  $dt$ .

donde  $N_e$  es la concentración de electrones en el conductor ( $n^\circ$  electrones/ $m^3$ ), de manera que

$$dI = \frac{d^2Q}{dt} = -N_e dA v_{em} |e| \quad , \quad i = \frac{dI}{dA} = -N_e |e| v_{em}$$

( $|e|$  = carga del electrón =  $1.602 \times 10^{-19}$  C)

Podemos restablecer el carácter vectorial de  $\vec{i}$  teniendo en cuenta que la corriente tiene la misma dirección que la velocidad de los electrones:

$$\vec{i} = -N_e |e| \vec{v}_{em} = \rho_e \vec{v}_{em}$$

donde  $\rho_e = \{ \text{densidad de carga eléctrica debida a los electrones} \} = -N_e |e|$  en  $C/m^3$ .

Si ahora tenemos en cuenta el concepto de movilidad resulta:

$$\vec{i} = +N_e |e| |\mu_e| \vec{E} \equiv \sigma \vec{E} \qquad \sigma = N_e |e| |\mu_e|$$

donde hemos definido la **conductividad**  $\sigma$  como la constante que relaciona la densidad de corriente con el campo eléctrico. (Dimensiones de  $\sigma$  :  $[\sigma] = [i]/[E] = A \cdot m^{-2}/V \cdot m^{-1} = S/m$ , donde S = Siemens =  $\Omega^{-1}$ ).

## EJEMPLO

En cobre  $N_e = 8.5 \times 10^{28}$  electrones /  $m^3$  (¡ Nótese la tremenda cantidad ! En  $1 \mu m^3$  hay  $8.5 \times 10^{10}$  electrones y la misma cantidad de átomos) y la conductividad  $\sigma = 5.80 \times 10^7$  S/m. Por tanto



$$|\mu_e| = \frac{\sigma}{N_e |e|} = 4.26 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

Por razones de generación de calor (véase el párrafo siguiente) la densidad de corriente en conductores no debe sobrepasar un cierto límite, que para cobre el Reglamento de Baja Tensión fija en aproximadamente  $10 \text{ A/mm}^2 = 10^3 \text{ A/cm}^2 = 10^7 \text{ A/m}^2$ . Para esta densidad de corriente:

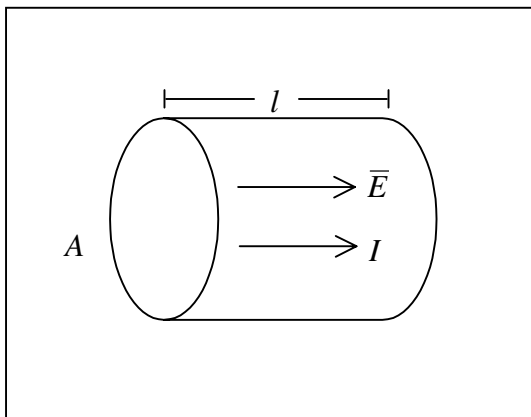
$$E = \frac{i}{\sigma} = 0.17 \text{ V/m} \quad \rightarrow \quad v_{em} = +|\mu_e| E = 7.3 \times 10^{-4} \text{ m/s} = 0.73 \text{ mm/s}$$

¡La velocidad de los electrones en cobre, incluso para las mayores densidades de corriente, es realmente miserable!

Sin embargo, en materiales semiconductores esta velocidad media puede ser mucho mayor, aunque sin sobrepasar nunca el valor de  $2.0 \times 10^5 \text{ m/s}$

### 3.3. LEY DE JOULE

Cuando un campo eléctrico exterior (aplicado) acelera los electrones, éstos ceden parte de la energía que les transmite el campo a los átomos que le rodean por colisiones, y el resultado es que el sólido se calienta. De acuerdo con la ley de Joule, la potencia disipada  $\Delta P_d$  en un conductor atravesado por una corriente  $I$  y con una diferencia de potencial  $V$  en sus extremos vale (fig. 2.6):



$$\Delta P_d = V I, \quad \text{pero} \quad V = E l, \quad I = i A$$

$$\Delta P_d = E i (A l) = \sigma E^2 \Delta V$$

donde  $\Delta V = A l = \text{volumen del conductor}$

Figura 2.6.- Trozo de conductor.

Por tanto obtenemos (ley de Joule):

$$\text{Potencia disipada en calor por unidad de volumen} = \frac{\Delta P_d}{\Delta V} = \sigma E^2$$

Recuérdese además que se define la resistencia  $R$  del conductor como:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{El}{iA} = \frac{El}{\sigma EA} = \frac{l}{\sigma A} \quad (\Omega)$$

#### 4. CONDUCTORES Y CAMPO ELÉCTRICO

La conductividad es un parámetro físico que varía, dependiendo del material, en un margen enorme, desde valores de  $10^{-20}$  -  $10^{-12}$  S/m en los materiales aislantes hasta valores superiores a  $10^7$  S/m en los materiales buenos conductores. Los mejores conductores son los metales ordinarios, como se ve en la tabla siguiente:

<i>Metal</i>	<i>Conductividad (S/m)</i>
Plata	$6.17 \times 10^7$
Cobre	$5.80 \times 10^7$
Aluminio	$3.72 \times 10^7$
Latón	$1.57 \times 10^7$
Estaño	$0.70 \times 10^7$

La conductividad es sensiblemente más baja en los semiconductores (Si, AsGa), aunque en éstos depende de la concentración de impurezas, y el agua de mar, que tiene una conductividad aceptable, tiene a temperatura ambiente  $\sigma \approx 4.0$  S/m. Para la tierra mojada  $\sigma \approx 10^{-3}$  S/m, y para la tierra seca  $\sigma \approx 10^{-5}$  S/m.

Un concepto teórico útil es el de **conductor ideal**, que sería aquel para el que  $\sigma \rightarrow \infty$ . Los superconductores se comportan como conductores ideales, y los metales

ordinarios (Cu, Ag, Sn, etc.) pueden aproximarse en muchos casos también por un conductor ideal.

#### 4.1. CUERPO CONDUCTOR EN UN CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO

Supongamos que situamos un cuerpo conductor (no necesariamente buen conductor) en una región del espacio donde existe un campo eléctrico estático, figura 2.7. Como consecuencia del campo eléctrico, las cargas (normalmente electrones) del conductor se moverán hasta alcanzar un estado de equilibrio (las cargas ya no se mueven), en cuyo momento, evidentemente, **el campo eléctrico en el interior del conductor será nulo**.

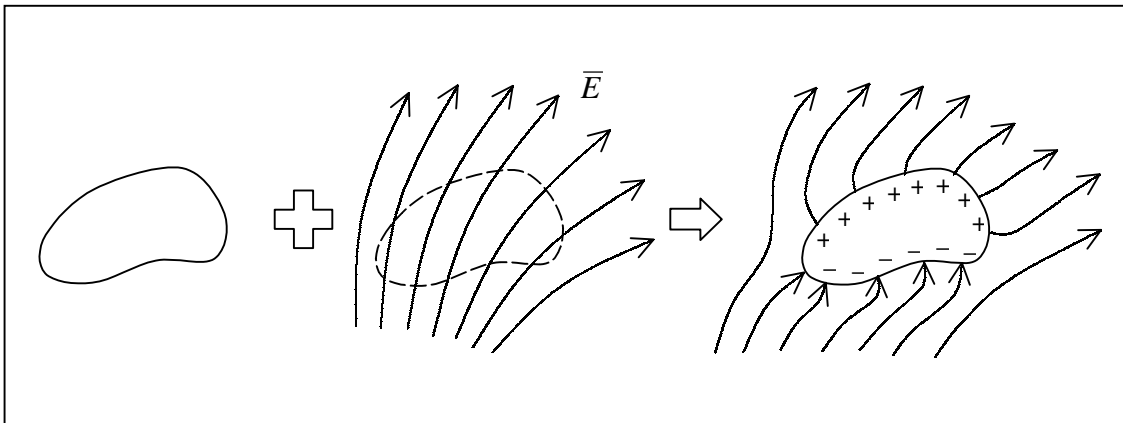


Figura 2.7.- Introducción de un cuerpo conductor en una región con un campo eléctrico estático.

Esta situación de equilibrio puede interpretarse como la resultante de superponer sobre el campo eléctrico preexistente el producido por las cargas del conductor después de haberse movido, de tal manera que en el interior del conductor éste último es igual y de signo contrario al primero. De manera que, en este caso estático podemos decir que:

- 1.- **“En el interior de un conductor el campo eléctrico se anula idénticamente”**, tal como hemos explicado:

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv 0$$

- 2.- **“En cualquier elemento de volumen  $\Delta V$  en el interior de un conductor la carga neta total** (resultado de sumar la de los electrones y los átomos ionizados)

**es siempre nula**”. (Este resultado ya lo avanzamos con anterioridad). En efecto, si  $S$  es la superficie que limita  $\Delta V$  por la ley de Gauss:

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} (\text{carga}) = 0 \quad \text{ya que } \vec{E} \equiv 0$$

Es decir, en un volumen cualquiera hay siempre tantos electrones como átomos ionizados.

- 3.- **“Si un trozo de conductor no es neutro (tiene carga añadida) ésta solamente puede residir en la superficie**”. Lo cual es evidente ya que, en vista de 2, el interior del conductor siempre es neutro.
- 4.- **“Todos los puntos de un conductor están al mismo potencial**”. En efecto, calculemos la diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor 1 y 2 a lo largo de un camino contenido en el mismo (el resultado ha de ser independiente del camino):

$$V_2 - V_1 = \int_1^2 dV = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \equiv 0 \quad \text{ya que } \vec{E} \equiv 0$$

- 5.- **“El campo eléctrico en la superficie de un conductor es perpendicular a ésta**”. Ya que si no fuera así, los electrones de la superficie se moverían bajo la acción de la componente de campo eléctrico tangente a la superficie, hasta alcanzar una posición de equilibrio donde el campo sea normal a ésta.

(Aquí surge un punto fino de discusión, ya que el campo eléctrico en esta situación idealizada tiene una discontinuidad -salto de valor- al pasar del interior al exterior del conductor a través de la superficie, y cabe preguntarse si donde están los electrones el campo eléctrico es nulo o tiene el valor, perpendicular, pero finito, que atribuimos a la superficie. El modelo se ajusta con la realidad en este último caso; esto es, las cargas de la superficie están sometidas a la acción del campo eléctrico “en la superficie”)

Una cuestión importante es la siguiente: ¿Cuánto tiempo tardan las cargas en reorganizarse desde que comienzan a moverse hasta alcanzar el estado de equilibrio? Esta pregunta puede responderse con ayuda de la situación sencilla estudiada en el siguiente

### EJEMPLO

Supongamos un condensador plano que en el instante inicial,  $t=0$ , está cargado. Si el dieléctrico del conductor tiene conductividad finita,  $\sigma$ , ¿cómo se va descargando el condensador con el tiempo?

Si suponemos que la presencia de conductividad no modifica la distribución uniforme de campo eléctrico en el dieléctrico, la situación puede modelarse como la de un condensador ideal (con dieléctrico aislante) con una resistencia en paralelo de valor (fig. 2.8):

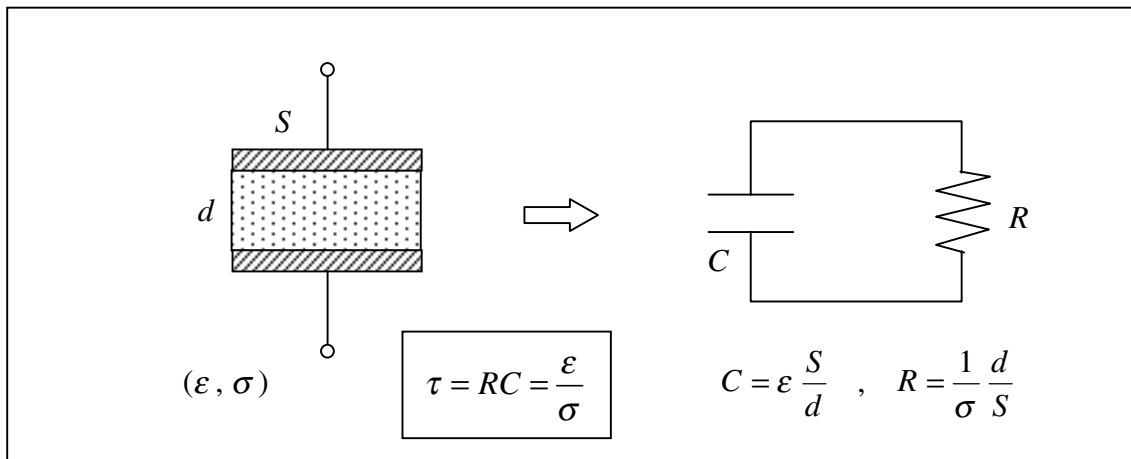


Figura 2.8.- Condensador con pérdidas.

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{S}$$

El análisis de este sencillo circuito nos dice que la carga del condensador decrece de manera exponencial con constante de tiempo  $\tau = RC$ :

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau}$$

Pero  $\tau = RC = \epsilon/\sigma$ , valor que nos da una idea de la rapidez del proceso de descarga que, si bien teóricamente es de duración infinita, es tal que para  $\Delta t = 3\tau$  está completado en un 95%. Nótese que el resultado es independiente de la geometría del problema, de manera que representa una propiedad del material conductor y no del condensador que hemos utilizado como punto de partida. Dadas estas circunstancias, a la constante  $\tau$  se le llama **tiempo de relajación** del material.

En el caso de un buen conductor, como por ejemplo cobre,  $\tau = 1.5 \times 10^{-19}$  s, y el proceso de acomodación de las cargas es prácticamente instantáneo. Y para un conductor ideal,  $\sigma \rightarrow \infty$ , entonces  $\tau = 0$ .

#### 4.2. CUERPO CONDUCTOR EN UN CAMPO ELÉCTRICO VARIABLE

A partir del resultado anterior es evidente que **las propiedades del campo eléctrico dentro de un conductor, cuando los campos varían con el tiempo, son las mismas que en el caso estático si el ritmo de variación es lento comparado con el tiempo de relajación,  $\tau$** , ya que entonces la redistribución de las cargas puede seguir con rapidez suficiente las variaciones del campo eléctrico.

En el caso de señales senoidales de período  $T = 1/f$ , la condición anterior equivale a que  $T \gg \tau$ , o, lo que es lo mismo, a que:

$$\frac{\sigma}{\epsilon f} \gg 1$$

En estas condiciones se continúan cumpliendo las propiedades establecidas en 4.1 y en primera aproximación podemos suponer que **el conductor se comporta como un conductor ideal**.

## EJEMPLO

Volvamos al ejemplo del cobre y supongamos que decidimos que la desigualdad anterior se cumple si  $\sigma/f\epsilon > 10$ ; en este caso el margen de frecuencias en que podemos aproximar el conductor por ideal es  $0 < f < 6.5 \times 10^{16}$  Hz, es decir, a frecuencias superiores a las correspondientes a la luz visible, que está en torno a  $10^{14} - 10^{15}$  Hz.

Sin embargo, en el caso del agua de mar este margen se reduce a  $0 < f < 3.8 \times 10^9$  Hz.

## 5. CAMPOS CREADOS POR CARGAS EN MOVIMIENTO

Las cargas en movimiento además de campo eléctrico crean también un campo magnético  $\vec{B}$ , asociado con la **intensidad magnética**  $\vec{H}$  en el vacío a través de la relación  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , donde:  $\mu_0 =$  permeabilidad =  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m (Henrios/metro).

También es cierto que las perturbaciones electromagnéticas no se observan a distancia de forma instantánea, sino que se propagan con una velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \cong 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

que resulta ser la velocidad de la luz. Es decir, el cambio producido en una carga eléctrica (por ejemplo, un cambio de posición) no se percibe a una distancia  $d$  hasta transcurrido un tiempo

$$\tau = \frac{d}{c}$$

De manera que si observamos los campos en el punto  $P$  y en el instante  $t$ , realmente los campos serán consecuencia de las condiciones de la carga en **un instante anterior**,  $t - \tau$ , con  $\tau$  el **retardo** o tiempo que las perturbaciones electromagnéticas tardan en

propagarse desde la carga a  $P$ , definido más arriba. Nótese, sin embargo, que, si la carga se mueve con velocidad  $v$  en una dirección arbitraria, durante el tiempo de propagación (retardo) la distancia de la carga al punto  $P$  varía en:

$$|\Delta d| \leq v\tau = v \frac{d}{c} \quad \rightarrow \quad \frac{|\Delta d|}{d} = \frac{v}{c}$$

En el caso de electrones en conductores las velocidades medias no superan el mm/s, por lo que  $v/c < 10^{-11}$ ; e incluso en el caso de los semiconductores  $v < 2 \times 10^5$  m/s y  $v/c < 6.7 \times 10^{-4}$ , y es por tanto irrelevante precisar si hemos de considerar  $\vec{r}(t)$  o  $\vec{r}(t - \tau)$ , ya que la diferencia de posiciones es arbitrariamente pequeña. Si nos restringimos a este caso de **velocidad de la carga  $v$  mucho menor que la de la luz,  $v \ll c$** , la ley de Coulomb se puede generalizar de la manera siguiente:

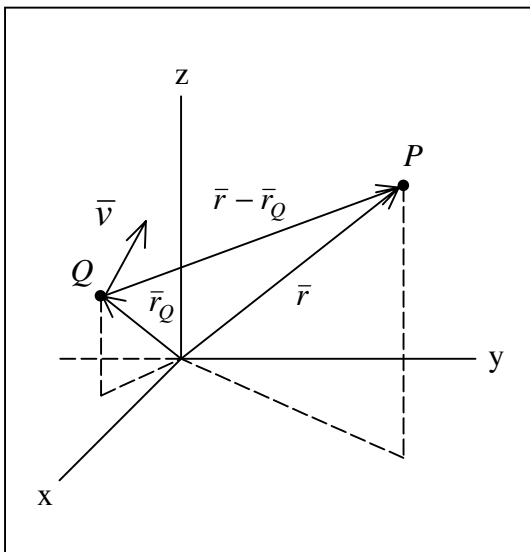


Figura 2.9.- Geometría para el estudio de una carga en movimiento.

“Sea una carga  $Q$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  ( $v \ll c$ ) según una recta dada por  $\vec{r}_Q(t) = \vec{r}_{Q_0} + \vec{v}t$  (figura 2.9). Los campos creados en  $\vec{r}$  valen:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|^3}$$

(resultado idéntico a la ley de Coulomb para una carga en reposo); y

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

### EJEMPLO

Consideremos un hilo infinito cargado con  $N$  electrones por metro que se mueven hacia abajo con velocidad  $v$  y que por tanto tienen asociada una corriente hacia arriba de



valor  $I = N v |e|$  (figura 2.10). A una distancia  $\rho$  del eje  $z$  (coordenadas cilíndricas) el campo eléctrico vale:

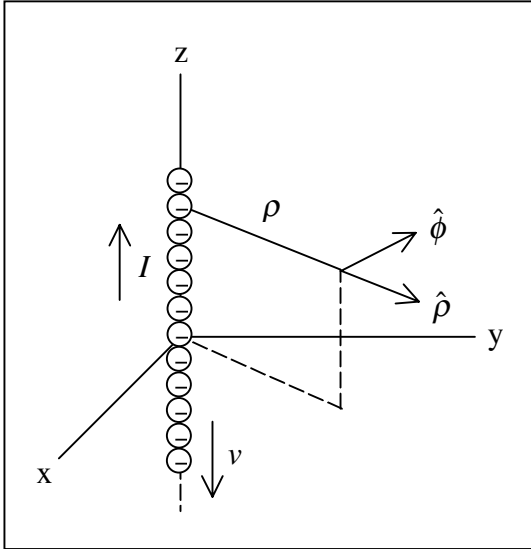


Figura 2.10.- Hilo de corriente producido por una hilera de

$$\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}(\rho, \phi, z) = -\frac{N|e|}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$

(Si el resultado anterior le resulta poco familiar al lector, puede probar a redescubrirlo utilizando el teorema de Gauss y un cilindro concéntrico con el eje de las  $z$ 's). Este campo eléctrico a su vez puede descomponerse en la suma de los producidos por cada una de las cargas

$$\bar{E} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{E}_i$$

El campo magnético valdrá entonces:

$$\bar{B} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{B}_i = \frac{1}{c^2} \sum_i \bar{v}_i \times \bar{E}_i$$

Pero todos los electrones tienen la misma velocidad,  $\bar{v}_i = v$ ; por tanto

$$\bar{B} = \frac{1}{c^2} \bar{v} \times \sum_i \bar{E}_i = \frac{1}{c^2} \bar{v} \times \bar{E} = -\frac{v}{c^2} \hat{z} \times \bar{E} = \frac{N|e|v}{c^2 2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

resultado conocido que puede ser redescubierto también por el lector por aplicación de la ley de Ampère a una circunferencia de radio  $\rho$  centrada en el eje  $z$ .

(FIN DEL EJEMPLO)

En este punto establecemos sin demostración, que será recuperada en parte más adelante, que en el interior de un conductor ideal el campo magnético también se anula idénticamente, y en la superficie tiene dirección tangente a la misma.

RESUMEN: CONDUCTOR IDEAL ( $\sigma = \infty$ , o al menos,  $\sigma \gg f\epsilon$ )

→ En el interior:  $\bar{E}(\bar{r}) \equiv 0$ ,  $\bar{B}(\bar{r}) \equiv 0$

→ En su superficie:

\* El campo eléctrico es normal

\* El campo magnético es tangente

## 6. EL MÉTODO DE LAS IMÁGENES

Este método sirve para resolver problemas estáticos (más adelante veremos que también dinámicos) en los que intervengan planos conductores grandes (aproximables por superficies planas infinitas).

- a) Nótese, en primer lugar, que las expresiones que dan los campos  $\bar{E}$  y  $\bar{B}$  creados por cargas son **unívocas** (proporcionan un valor único de campo en cada punto del espacio). Esto nos permite afirmar que un determinado problema estático tiene **solución única**.
- b) Consideremos el siguiente ejemplo; una carga puntual frente a un plano conductor infinito situado en  $z = 0$  (figura 2.11). Suponemos el espesor del plano también infinito para no tener que ocuparnos de la cara inferior del mismo. Es evidente que la ley de Coulomb no es válida para describir el campo eléctrico en el espacio de encima del conductor ( $z > 0$ ), ya que, en todos los puntos de éste el campo  $\bar{E}$  ha de ser normal y por tanto ha de tener la dirección  $\hat{z}$ .

Lo que sucede es que los electrones del conductor, bajo los efectos de la fuerza que induce la carga  $Q$ , se mueven hasta hacer que el campo eléctrico de la superficie sea perpendicular. El problema es que **desconocemos** el resultado de esta reorganización de los electrones. Si la conociéramos, es decir, si conociéramos la distribución de carga en la superficie, la resolución del problema sería inmediata.

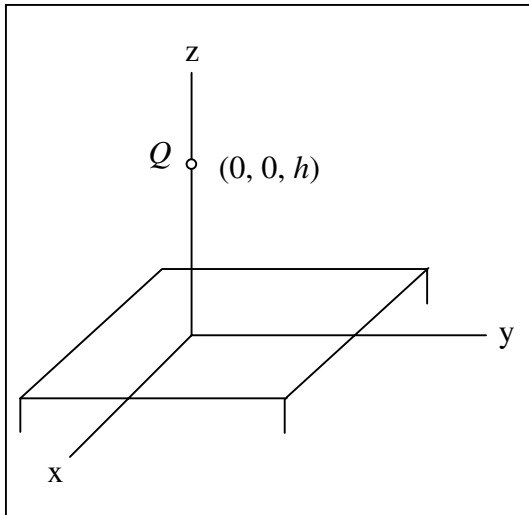


Figura 2.11.- Carga puntual frente a plano conductor infinito.

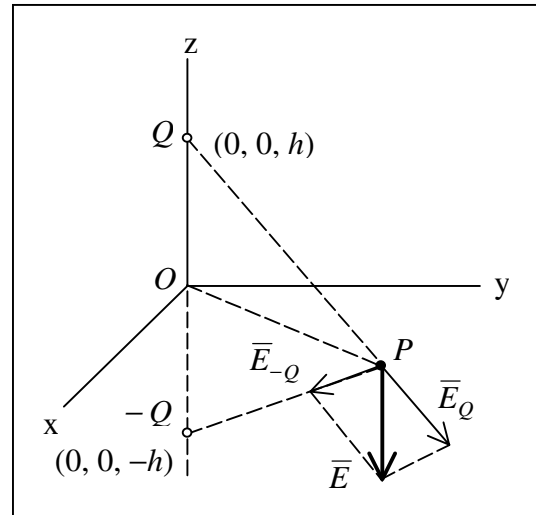


Figura 2.12.- Carga eléctrica  $Q$  y su imagen respecto al plano XY.

- c) Consideremos ahora otro ejemplo; dos cargas puntuales, una  $Q$  como en b) y otra  $-Q$  situada en una posición simétrica respecto al plano XY, pero ahora **sin plano conductor** (figura 2.12). Es fácil comprobar que en este ejemplo en cualquier punto  $P$  del plano XY el campo eléctrico consecuencia de las dos cargas es perpendicular al plano:

$$\begin{aligned}\bar{E}(P) &= \bar{E}_Q(P) + \bar{E}_{-Q}(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} - h\hat{z}}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + h\hat{z}}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2h\hat{z}}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

- d) Nótese que la distribución de  $\bar{E}$  en el ejemplo c) cumple las condiciones del enunciado del ejemplo b) para  $z > 0$ ; hay una carga puntual  $Q$  en  $(0, 0, h)$  y el campo eléctrico es normal al plano XY. Por tanto, en virtud de la unicidad de soluciones podemos afirmar que “**la distribución de  $\bar{E}$  en el ejemplo c) para**

$z > 0$  (es decir, la carga original  $Q$  en su sitio y una carga  $-Q$  en el lugar de la imagen especular de  $Q$ , que llamamos carga imagen ) es también solución del problema original, consistente en la carga  $Q$  situada frente a un plano conductor”.

Esto da lugar al **método de las imágenes**; el campo eléctrico producido por una colección de cargas (o una distribución continua de carga) frente a un plano conductor es el mismo que el producido por las cargas originales y sus imágenes en ausencia del plano conductor (**carga imagen** es una carga igual y de signo contrario que la original situada en la posición de la imagen especular).

### EJEMPLO

El método de imágenes permite resolver situaciones en las que intervienen planos conductores de más complejidad que la estudiada, como el caso de una carga puntual (o una distribución de cargas) situada entre dos planos conductores que forman un ángulo diedro de  $90^\circ$  (figura 2.13a). Es fácil darse cuenta que la situación de cuatro cargas sin conductores situadas simétricamente con respecto a las posiciones de éstos produce, en la región del espacio del problema original, la misma distribución de campo eléctrico; en efecto, por la simetría de su situación y sus signos, el campo eléctrico es perpendicular a los planos conductores (las cuatro cargas son simétricas, dos a dos, con respecto a cada uno de ellos) (fig. 2.13b).

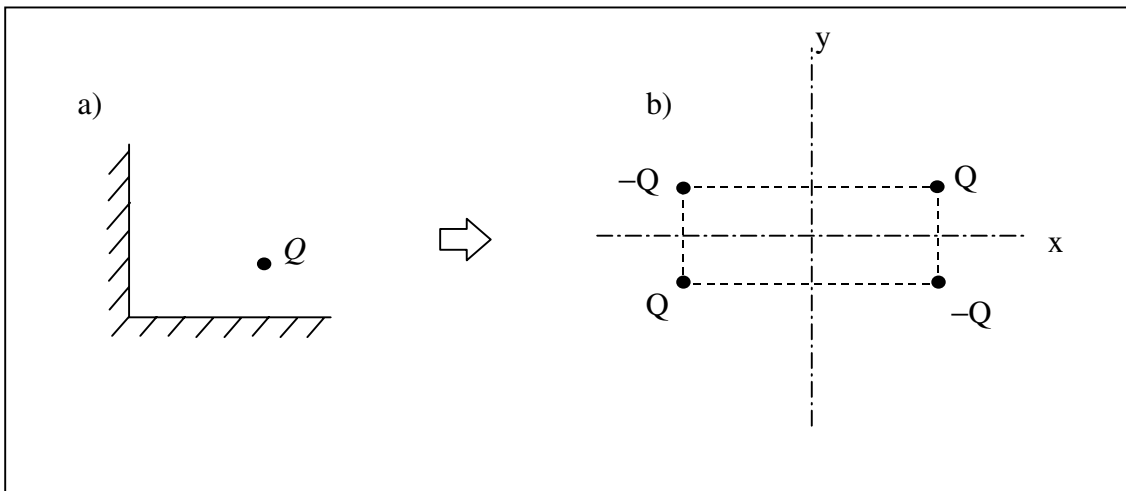


Fig. 2.13.- Carga entre planos conductores que forman un diedro de  $90^\circ$  y cargas imágenes asociadas.

Nótese que, si en lugar de  $90^\circ$  el diedro fuera de, por ejemplo,  $89^\circ$ , las cuatro cargas ya no formarían un rectángulo y no serían una solución del problema; en este caso el método de imágenes no sería de gran ayuda ya que generaría un número infinito de cargas imágenes. Se puede comprobar que el método produce un número finito de imágenes cuando el ángulo diedro es de  $360^\circ/n$ , con  $n$  un número par (véase el ejercicio 2.4).

## 6.1. IMÁGENES Y CAMPOS MAGNÉTICOS

Parece evidente que cuando una carga se mueve con velocidad  $\bar{v}$  el mismo problema (carga frente a plano conductor) se resuelve con una carga imagen que también se mueve, manteniéndose en todo instante como imagen de la original. De esta manera el campo eléctrico es en cada instante normal al conductor y se puede comprobar que  $\bar{B}$  es tangente, tal como se hace en el ejemplo siguiente para una situación concreta.

### EJEMPLO

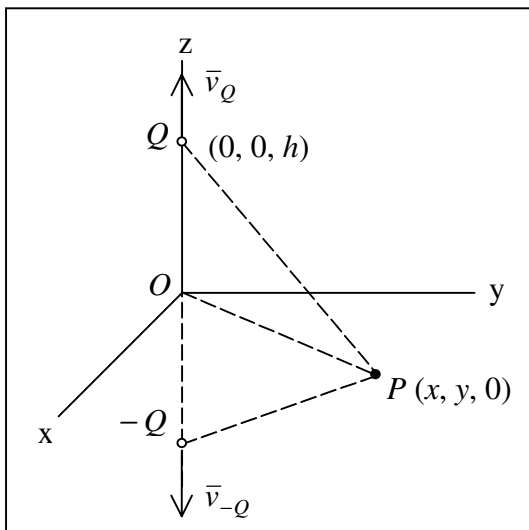


Figura 2.14.- Carga eléctrica en movimiento y su imagen.

Consideremos una carga  $Q$  con velocidad  $\bar{v}_Q = v \hat{z}$  y su imagen con  $\bar{v}_{-Q} = -v \hat{z}$ . calculemos el campo magnético  $\bar{B}$  en un punto del plano XY  $P(x, y, 0)$

$$\bar{B} = \bar{B}_Q + \bar{B}_{-Q}$$

$$\bar{B}_Q = \frac{v}{c^2} \hat{z} \times \bar{E}_Q$$

$$\bar{B}_{-Q} = -\frac{v}{c^2} \hat{z} \times \bar{E}_{-Q}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{B}} &= \frac{v}{c^2} \hat{\mathbf{z}} \times (\bar{\mathbf{E}}_Q - \bar{\mathbf{E}}_{-Q}) = \frac{v}{c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x\hat{x} + y\hat{y} - h\hat{z} + (x\hat{x} + y\hat{y} + h\hat{z})}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \right] = \\ &= \frac{v}{c^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 2 \hat{\mathbf{z}} \times \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{Q v}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x\hat{y} - y\hat{x}}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

que está contenido en el (o es tangente al) plano XY.

El ejemplo puede repetirse de forma análoga para cargas con velocidad según los ejes  $x$  e  $y$ , con lo cual de hecho la propiedad quedaría demostrada para velocidad en una dirección arbitraria.

## EJERCICIOS

2.1.- Utilice el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico en el interior de una bola de radio  $r_0$  con densidad de carga constante  $\rho_0$ . Explique con detalle como interviene la simetría del problema en los cálculos.

2.2.- Calcule los vectores campo eléctrico y campo magnético producidos por un conductor lineal con densidad de carga lineal  $\rho_l = 10^{-12}$  C/m y corriente 0.5 A.

2.3.- Utilice un procedimiento similar al del ejemplo del párrafo 5 para calcular el campo magnético creado por un plano infinito cargado con  $N$  electrones por metro cuadrado que se mueven con la misma velocidad  $v$  en la misma dirección, de manera que en el plano existe una *densidad de corriente superficial*  $J_s$  (A/m) definida como la corriente que atraviesa un segmento de longitud 1 m situado perpendicularmente a la corriente. En particular,

- Relacionar  $J_s$  con  $N$  y con  $v$ .
- Comprobar que el campo magnético es tangente al plano.
- Relacionar el campo magnético, en magnitud y sentido, con  $J_s$ . Debe obtenerse que  $H=J_s$ .

2.4.-

- Dibuje las imágenes de una carga eléctrica positiva situada entre dos planos conductores que forman un ángulo diedro de  $45^\circ$ .
- Dibuje las imágenes de un elemento de corriente orientado arbitrariamente entre dos planos conductores que forman un ángulo diedro de  $60^\circ$ .

2.5.- Una carga puntual de valor  $Q$  Coulombs se encuentra frente a dos planos conductores ideales que forman  $90^\circ$  situados en  $x=0$  e  $y=0$ . La carga se encuentra en el punto  $P$  de coordenadas  $(1\text{m}, 1\text{m}, 0\text{m})$ .

- a) Plantee el problema mediante el método de imágenes.
- b) Calcule el valor del vector campo eléctrico en el punto de coordenadas  $(2\text{m}, 1\text{m}, 0\text{m})$ .

2.6.- Un hilo conductor infinito tiene una distribución de carga lineal de  $\rho_l = 5.0\text{e-}6$  C/m y está situado paralelamente a un plano conductor, a una distancia de 10 m de éste. Calcule el campo eléctrico en cualquier punto el espacio.

2.7.- El mismo hilo conductor del problema 2.4 está recorrido ahora por una corriente constante de valor  $I = 1$  A. Calcule el campo magnético en cualquier punto del espacio.

## §3. DINÁMICA Y ONDAS

---

### 1. MAGNITUDES CON VARIACIÓN SENOIDAL

Las señales más frecuentes en sistemas de comunicaciones son senoidales, de la forma

$$a(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

En este caso resulta conveniente manejar la **señal analítica** asociada con  $a(t)$ :

$$a_c(t) = Ae^{j\varphi} e^{j\omega t} = A_c e^{j\omega t}, \quad \text{con } A_c = Ae^{j\varphi}$$

de manera que

$$a(t) = \text{Re}[a_c(t)] \quad (\text{con } \text{Re}[\ ] = \text{parte Real de } [\ ])$$

Con frecuencia la señal original  $a(t)$  se reemplaza por la amplitud compleja  $A_c$ , que es más simple (es un número complejo) pero tal que, conocida la frecuencia de trabajo, contiene toda la información relevante de la señal: amplitud y fase.

Nótese que tomar la parte real puede intercambiarse con las operaciones de suma y de multiplicación por una constante real:

$$\text{Re}[a_c + b_c] = \text{Re}[a_c] + \text{Re}[b_c]$$

$$\text{Re}[\alpha a_c] = \alpha \text{Re}[a_c] \quad (\text{para } \alpha \text{ real})$$



pero **no puede** intercambiarse con productos de señales:

$$\operatorname{Re}[a_c b_c] \neq \operatorname{Re}[a_c] \operatorname{Re}[b_c]$$

Cuando se trabaja con potencias (productos de señales) es necesario calcular valores medios:

$$p(t) = a(t) b(t) \quad , \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) b(t) dt$$

donde  $T$  es el período de la señal. Pero:

$$a(t) = \frac{1}{2} [a_c(t) + a_c^*(t)] = \frac{1}{2} [A_c e^{j\omega t} + A_c^* e^{-j\omega t}]$$

y análogamente  $b(t)$ . Por tanto

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \frac{1}{4} \int_0^T [A_c B_c e^{2j\omega t} + A_c^* B_c^* e^{-2j\omega t} + A_c B_c^* + A_c^* B_c] dt = \frac{1}{4} (A_c B_c^* + A_c^* B_c) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[A_c B_c^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[A_c^* B_c] \end{aligned}$$

## 1.1. VECTORES SENOIDALES

De la misma manera encontraremos vectores cuyas componentes varían de forma senoidal:

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \sum_i E_i(\bar{r}) \cos(\omega t + \varphi_i) \hat{i} = \operatorname{Re} \left[ \sum_i E_i(\bar{r}) e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \hat{i} \right] = \operatorname{Re} \left[ e^{j\omega t} \sum_i E_{ic}(\bar{r}) \hat{i} \right]$$

( $i = x, y, z$ ) con  $E_{ic}(\bar{r}) = E_i(\bar{r}) e^{j\varphi_i}$  componente compleja  $i$ -ésima.

Definimos el **vector complejo** (o **fasor**)  $\bar{E}_c(\bar{r})$  mediante  $\bar{E}_c(\bar{r}) = \sum_i E_{ic}(\bar{r}) \hat{i}$  y

entonces

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \text{Re} \left[ \bar{E}_c(\bar{r}) e^{j\omega t} \right]$$

Como en el caso de señales escalares del apartado anterior, normalmente se trabaja con el vector complejo en lugar del vector con variación temporal original y por las mismas razones; es más simple y, conocida la frecuencia, contiene toda la información original (amplitudes y fases de las componentes).

## 1.2. ¿QUÉ ES EL MÓDULO DE UN VECTOR COMPLEJO?

El módulo de un vector real (con componentes reales) es la longitud del segmento correspondiente:

$$\bar{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad , \quad |\bar{A}| = A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$$

Pero un vector complejo tiene componentes complejas y puede descomponerse en la forma de dos vectores reales  $\bar{E}_c^r, \bar{E}_c^i$ .

$$\bar{E}_c = \bar{E}_c^r + j\bar{E}_c^i$$

y el concepto de su “longitud” no tiene sentido ni tampoco puede hablarse de “dirección” del vector. Normalmente el módulo de un vector complejo se **define** como el número real dado por

$$|\bar{E}_c| = \left( \bar{E}_c \bullet \bar{E}_c^* \right)^{1/2} = \left( E_{xc} E_{xc}^* + E_{yc} E_{yc}^* + E_{zc} E_{zc}^* \right)^{1/2} = \left( |E_{xc}|^2 + |E_{yc}|^2 + |E_{zc}|^2 \right)^{1/2}$$

que también podemos escribir como:

$$|\bar{E}_c| = \left[ (\bar{E}_c^r + j\bar{E}_c^i) \cdot (\bar{E}_c^r - j\bar{E}_c^i) \right]^{1/2} = \left[ |E_c^r|^2 + |E_c^i|^2 \right]^{1/2} = \left[ (E_c^r)^2 + (E_c^i)^2 \right]^{1/2}$$

Dentro de los temas de esta asignatura, con frecuencia se dan casos en que el vector complejo tiene la forma:

$$\bar{E}_c = E_c \hat{u}_E$$

dónde  $E_c$  es un número complejo y  $\hat{u}_E$  es un vector unitario real. En este caso el vector complejo sí que tiene una dirección definida, que es la del vector unitario, y a  $E_c$  le llamaremos **amplitud** del vector complejo. Nótese que entonces el módulo del vector complejo coincide con el módulo de su amplitud. Hay también que añadir que un vector complejo como éste puede convertirse en real simplemente cambiando el origen de tiempos, de manera que la fase en el instante  $t = 0$  sea nula. Tal es el caso, por ejemplo, del apartado 1) del párrafo siguiente.

### 1.3. POLARIZACIÓN DE UN VECTOR COMPLEJO

Supongamos un vector complejo que, por simplicidad, suponemos contenido en el plano XY, de la forma:

$$\bar{E}_c = E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y}$$

¿Cuál será el comportamiento en el espacio y en el tiempo del vector original al que representa este vector complejo? La contestación a esta pregunta dependerá de las fases relativas de las componentes complejas,  $E_{0x}$  y  $E_{0y}$ , y para analizar la situación estudiaremos los siguientes casos particulares:

#### 1) $E_{0x}$ y $E_{0y}$ tienen la misma fase:

$$E_{0x} = |E_{0x}| e^{j\varphi}, \quad E_{0y} = |E_{0y}| e^{j\varphi} \quad \rightarrow \quad \bar{E}_c = (|E_{0x}| \hat{x} + |E_{0y}| \hat{y}) e^{j\varphi} = \bar{E}_0 e^{j\varphi}$$

$\bar{E}_0$  es un vector **real** (con componentes reales) y por tanto representa una dirección definida del espacio. Además

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \bar{E}_0 \cos(\omega t - k z + \varphi)$$

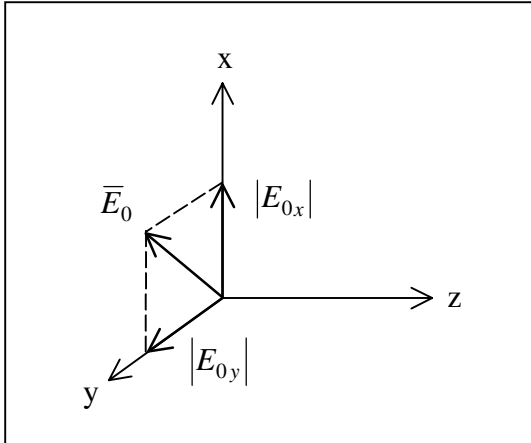


Figura 3.1.- Vector polarizado linealmente.

y por tanto el campo eléctrico siempre tiene la misma dirección en el espacio, que es la de  $\bar{E}_0$ . Cuando transcurre el tiempo, su longitud varía senoidalmente y cambia periódicamente de sentido, pero siempre contenido en la misma línea que define la dirección de  $\bar{E}_0$ . En este caso decimos que **el vector está polarizado linealmente según la dirección de  $\bar{E}_0$** .

Adviértase que la conclusión no varía si una de las dos componentes cambia de signo (desfase de  $180^\circ$  en lugar de los  $0^\circ$  supuestos), y que si el vector tiene solamente una componente también está polarizado linealmente, en este último caso según la dirección de uno de los ejes coordenados.

2)  $E_{0x}$  y  $E_{0y}$  están en cuadratura (sus fases se diferencian en  $\pi/2$  radianes):

$$E_{0x} = |E_{0x}| e^{j\varphi} \quad , \quad E_{0y} = |E_{0y}| e^{j\left(\varphi + s\frac{\pi}{2}\right)}$$

donde  $s$  puede valer  $+1$  ó  $-1$ .

(Nótese que  $e^{js\frac{\pi}{2}} = s j = s e^{j\frac{\pi}{2}}$   $\rightarrow$   $E_{0y} = s |E_{0y}| e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$ ). Por tanto:

$$\bar{E}_c = \left( |E_{0x}| \hat{x} + s e^{j\frac{\pi}{2}} |E_{0y}| \hat{y} \right) e^{j\varphi}$$

Sin pérdida de generalidad hagamos  $\varphi = 0$ . Entonces:

$$\begin{aligned}\bar{E}(\bar{r}, t) &= \text{Re}[\bar{E} e^{j\omega t}] = \text{Re}[|E_{0x}| \hat{x} e^{j\omega t}] + \text{Re}\left[s |E_{0y}| \hat{y} e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}\right] = \\ &= |E_{0x}| \hat{x} \cos(\omega t) + s |E_{0y}| \hat{y} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

y finalmente podemos escribir:

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = |E_{0x}| \hat{x} \cos(\omega t) - s |E_{0y}| \hat{y} \sin(\omega t)$$

Examinemos cómo evoluciona con el tiempo (fig. 3.2). Se observa que el vector  $\bar{E}(\bar{r}, t)$  se mueve de manera que su extremo recorre una **elipse** de semiejes  $|E_{0x}|$ ,  $|E_{0y}|$  y se dice que está **polarizado elípticamente** en sentido positivo o negativo, según se ve en la figura. Si  $|E_{0x}| = |E_{0y}|$  la elipse se convierte en un círculo y la polarización se dice **circular**:

$$\bar{E}_c = E_0 (\hat{x} \pm j \hat{y})$$

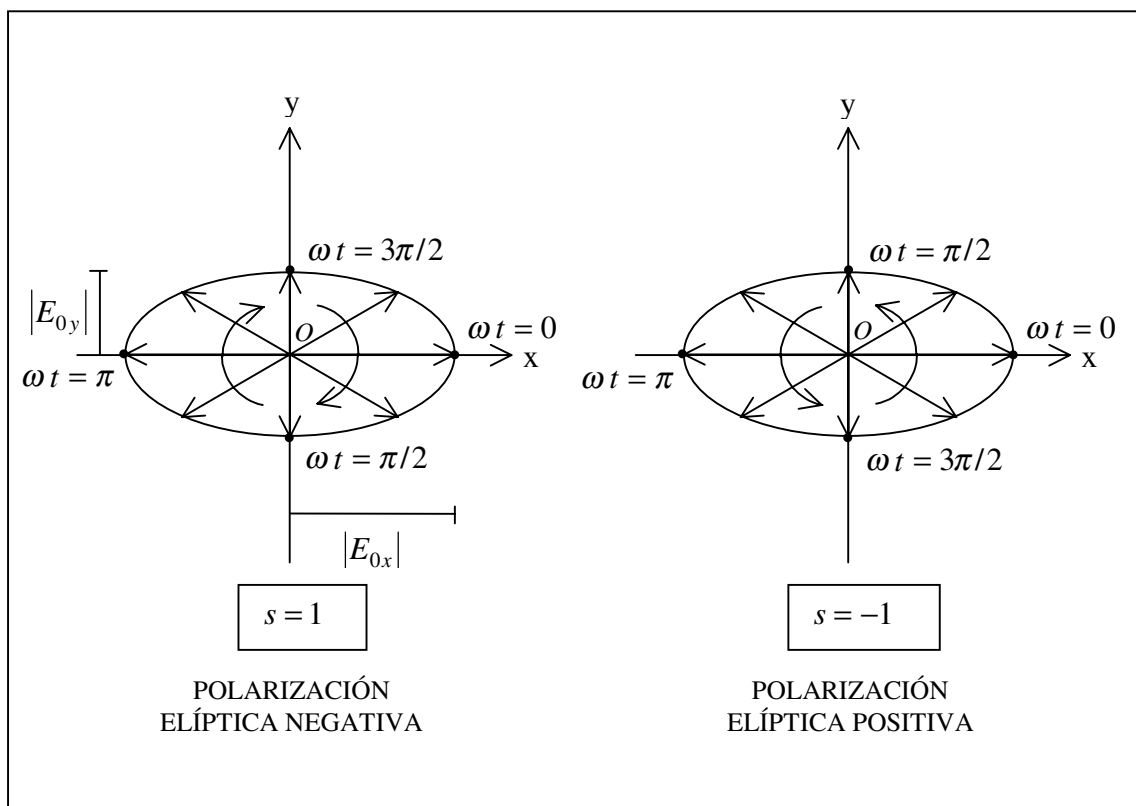


Figura 3.2.- Evolución temporal de vectores con polarización elíptica.

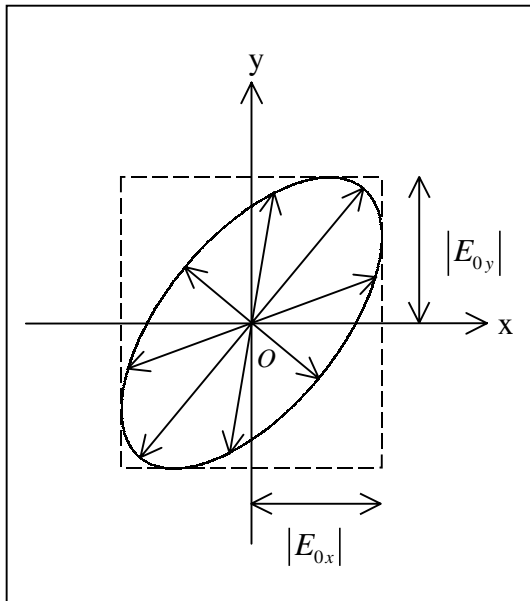
3)  $E_{0x}$  y  $E_{0y}$  tienen una diferencia de fase arbitraria:

Figura 3.3.- Polarización elíptica general.

En este caso se puede demostrar que el vector está polarizado elípticamente pero con los ejes de la elipse orientados en direcciones que no son la  $\hat{x}$  ni la  $\hat{y}$ : como por ejemplo en la figura (con sentido de rotación positivo o negativo, según el valor concreto de  $\bar{E} = E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y}$ ).

## 2. CAMPOS CREADOS POR UNA CARGA ACELERADA

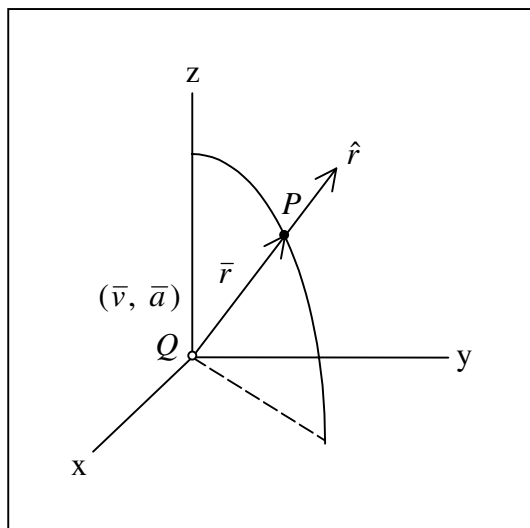


Figura 3.4.- Carga acelerada situada en el origen.

Hasta ahora hemos visto los campos que crea una carga en reposo y dotada de una velocidad uniforme (no acelerada). El paso siguiente consiste en considerar una carga que, además de moverse con velocidad  $v$  ( $v \ll c$ ), está sometida a aceleración, es decir, en proceso de modificar su velocidad. Para simplificar la notación supondremos que en el instante  $t$  la carga está en el origen de coordenadas con velocidad  $\bar{v}$  y aceleración (fig. 3.4):

$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}(t)}{dt}$$

Continuaremos suponiendo, como en §2.5, que el retardo no es importante a la hora de considerar el valor de la distancia entre la carga y el punto de observación,  $\bar{r}(t)$ , de manera que consideraremos su valor en el instante  $t$  y no en el retardado  $t-\tau$ . En estas condiciones los campos creados por la carga valen:

$$\bar{E} = \bar{E}_{est} + \bar{E}_{rad} \quad , \quad \bar{B} = \bar{B}_{est} + \bar{B}_{rad}$$

donde  $\bar{E}_{est}$ ,  $\bar{B}_{est}$  ( $est \rightarrow$  abreviatura de ‘estáticos’;  $rad \rightarrow$  abreviatura de ‘radiados’) son los campos dados anteriormente para una carga con velocidad constante (§2.5) y dónde, **si la velocidad de la carga es mucho menor que la velocidad de la luz,  $v \ll c$** , los términos debidos a la presencia de aceleración valen:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{rad}(\bar{r}, t) &= \mu_0 \bar{H}_{rad}(\bar{r}, t) \quad , \quad \bar{H}_{rad}(\bar{r}, t) = \frac{Q}{4\pi c} \frac{1}{r} \bar{a}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \hat{r} \\ \bar{E}_{rad}(\bar{r}, t) &= \eta \bar{H}_{rad}(\bar{r}, t) \times \hat{r} \end{aligned} \quad \left( v \ll c \right)$$

con la constante  $\eta$ , llamada **impedancia de onda** (se mide en Ohmios), definida por:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \quad \Omega = 377 \quad \Omega$$

En las expresiones anteriores aparece la aceleración de la carga  $\bar{a}$  pero evaluada en el instante retardado

$$\bar{a}(t - \tau) = \bar{a}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

En este caso no podemos ignorar el retardo; por ejemplo, para una carga con oscilación senoidal la aceleración cambia de signo en un semiperíodo,  $T/2$ . Para que el retardo fuera despreciable éste habría de ser mucho menor que  $T/2$ :

$$\tau = \frac{r}{c} \ll \frac{T}{2}, \quad r \ll \frac{cT}{2} = \frac{\lambda}{2},$$

dónde  $\lambda$  es la longitud de onda (véase párrafo siguiente), condición que solamente se cumpliría muy cerca de la carga, y esta situación, como veremos, carece de interés práctico. También hemos hecho intervenir en las expresiones dadas la intensidad del campo magnético  $\bar{H}$  en lugar de la densidad de flujo magnético  $\bar{B}$  por una mayor sencillez de las constantes que aparecen.

Del análisis de las expresiones anteriores se obtienen las siguientes propiedades:

- 1) Los campos radiados  $\bar{E}_{rad}$ ,  $\bar{H}_{rad}$  decrecen con la distancia como  $1/r$  mientras que los estáticos lo hacen como  $1/r^2$ . Por tanto, **a distancias progresivamente mayores los campos estáticos se hacen despreciables comparados con los radiados.**
- 2)  $\bar{H}_{rad}$  es perpendicular a  $\hat{r}$  y por tanto a  $\bar{r}$ , es decir, a la línea que une el punto de observación con la carga radiante. A esta dirección,  $\hat{r}$ , le llamamos **dirección de propagación** en el punto de observación y decimos entonces que  $\bar{H}_{rad}$  es **perpendicular a la dirección de propagación.**
- 3) De la misma manera,  $\bar{E}_{rad}$  es también perpendicular a la dirección de propagación y además es perpendicular a  $\bar{H}_{rad}$  (recuérdense las propiedades del

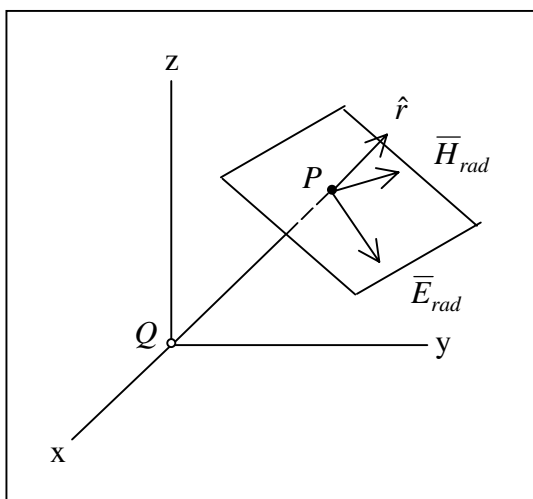


Figura 3.5.- Triedro positivo formado por  $E$ ,  $H$  y la dirección de propagación.

producto vectorial de dos vectores). De manera que los vectores  $(\bar{E}_{rad}, \bar{H}_{rad}, \hat{r})$  **forman un triedro ortogonal positivo** (fig. 3.5).

- 4) El cociente  $E_{rad}/H_{rad}$  es **constante e igual a  $\eta$  en todos los puntos del espacio.**



### 3. RADIACIÓN DE UN ELECTRÓN OSCILANTE

Consideremos un electrón ( $Q = -|e|$ ) que oscila periódicamente con período  $T$  alrededor del origen según la dirección del eje  $z$ , de manera que su posición viene dada por:

$$\vec{r}_e = \hat{z} z_0 \sin \omega t \quad , \quad \vec{v}_e = \frac{d\vec{r}_e}{dt} = \hat{z} v_0 \cos \omega t \quad (v_0 = \omega z_0)$$

Si utilizamos señales analíticas escribimos

$$\vec{v}_{ec} = \hat{z} v_0 e^{j\omega t} \quad , \quad \vec{v}_e = \text{Re}[\vec{v}_{ec}]$$

(nótese el subíndice 'c' que denota 'complejo'). La aceleración vale entonces:

$$\vec{a}_{ec} = \frac{d\vec{v}_{ec}}{dt} = \hat{z} j\omega v_0 e^{j\omega t} = \vec{a}_{ec}(t)$$

Por tanto

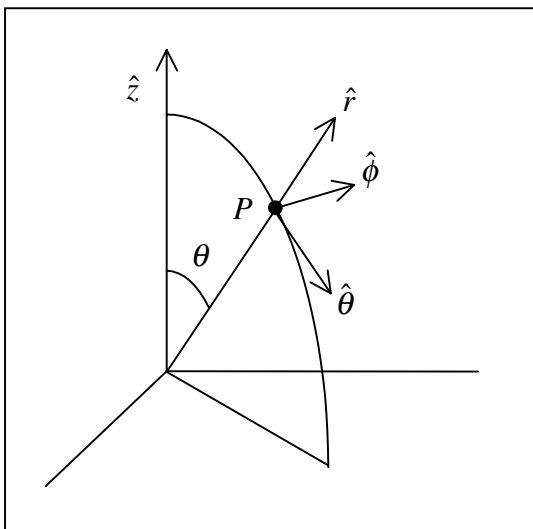


Figura 3.6.- Vectores unitarios en  $P$ .

$$\vec{a}_{ec}\left(t - \frac{r}{c}\right) = j \hat{z} \omega v_0 e^{j\left(\omega t - \frac{\omega}{c} r\right)}$$

Si ahora definimos:

$$\text{longitud de onda} = \lambda = c T$$

$$\text{número de onda} = k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{T c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

entonces podemos poner

$$\vec{a}_{ec}\left(t - \frac{r}{c}\right) = j \hat{z} \omega v_0 e^{-jkr} e^{j\omega t}$$

$$\overline{H}_{rad\ c} = \frac{-|e|}{4\pi c} \frac{1}{r} (j \omega v_0) e^{-jkr} e^{j\omega t} \hat{z} \times \hat{r}$$

Pero:

$$\hat{z} \times \hat{r} = \sin\theta \hat{\phi}$$

$$\rightarrow \overline{H}_{rad\ c} = -j \frac{|e| \omega v_0}{4\pi c} \frac{1}{r} \sin\theta e^{-jkr} e^{j\omega t} \hat{\phi}$$

(El cálculo de  $\overline{E}_{rad\ c}$  es inmediato). Obsérvese como el retardo se ha transformado en un desfase de valor  $kr$ . La expresión anterior se simplifica de la forma siguiente:

- Prescindimos del factor  $e^{j\omega t}$  que repondremos cuando queramos restablecer la dependencia temporal.
- Prescindimos del subíndice 'c' en  $\overline{H}_{rad\ c}$ , que indica que es un vector complejo. Aunque de esta manera introducimos cierta ambigüedad, normalmente puede resolverse por inspección de lo que se maneja.

Así pues, queda:

$$\overline{H}_{rad}(\vec{r}) = j \frac{A_e}{r} e^{-jkr} \sin\theta \hat{\phi} \quad \left( A_e = \frac{-|e| v_0}{2\lambda} \right)$$

$$\overline{E}_{rad}(\vec{r}) = j \eta \frac{A_e}{r} e^{-jkr} \sin\theta \hat{\theta}$$

Cuando queramos recuperar la dependencia temporal explícita hemos de multiplicar por  $e^{j\omega t}$  y tomar la parte real; por ejemplo:

$$\bar{E}_{rad}(\bar{r}, t) = \text{Re} \left[ \eta \frac{A_e}{r} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-jk r} e^{j\omega t} \sin\theta \hat{\theta} \right] = \eta \frac{A_e}{r} \sin\theta \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) \hat{\theta}$$

Esta expresión pone de manifiesto la característica principal de una onda senoidal; aparte del decrecimiento de la amplitud con la distancia, todos los puntos del espacio experimentan la misma variación senoidal pero con tanto mayor retraso cuanto más alejados estén. Este retraso se mide también con la **fase** del argumento. Dos puntos a distancias diferentes  $r_1$  y  $r_2 = r_1 + \Delta r$  tienen, en un mismo instante, una diferencia de fases:

$$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = \left(\omega t - kr_2 + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\omega t - kr_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -k(r_2 - r_1) = -k \Delta r \quad (\text{radianes})$$

Se definen los **frentes de onda** como los lugares geométricos de puntos del espacio que tienen fase constante; por ejemplo, dada una fase

$$\psi_0 = \omega t - kr + \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad r(t) = \frac{1}{k} \left( \omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_0 \right)$$

y el lugar geométrico es una **superficie esférica** de radio  $r$  que se expande con el tiempo con velocidad  $c$ ; los frentes de onda en el caso de un electrón oscilante son superficies esféricas. Este concepto nos permite interpretar la longitud de onda como la “**distancia entre dos frentes de onda cuya fase se diferencie en  $2\pi$  radianes**” y que, por tanto, estén en fase. En efecto, si ponemos  $|k \Delta r| = 2\pi \quad \rightarrow \quad \Delta r = 2\pi / k = \lambda$ .

Recordemos en este momento que la validez de todo lo anterior está condicionada a que se cumpla  $v_0 \ll c$ ; es decir

$$v_0 = \omega z_0 \ll c \quad , \quad z_0 \ll \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

“la amplitud de la oscilación del electrón ha de ser mucho más pequeña que la longitud de onda radiada”.

### 3.1. DIPOLO OSCILANTE

Supongamos que en el caso anterior de un electrón que oscila alrededor del origen existe además una carga positiva  $|e|$  (un protón) inmóvil en el origen de coordenadas, tal vez ligeramente desplazado para que el electrón oscilante no choque con él. Es evidente que la presencia de este protón inmóvil no modifica los campos radiados, pero permite interpretar el nuevo sistema como un **dipolo oscilante** con momento dipolar dado por la expresión:

$$\bar{p} = -\hat{z}|e|z_0 \sin(\omega t) = \hat{z} p_0 \sin(\omega t)$$

Esta interpretación es importante porque la mayoría de átomos y moléculas se comportan como dipolos (4.2), y cuando están sometidos a la acción de un campo eléctrico oscilante externo su momento dipolar también oscila bajo su acción. Por tanto, las expresiones anteriores para los campos radiados continúan siendo válidas en este caso con la sustitución de la expresión dada para  $A_e$  por otra, que ahora llamamos  $A_p$ , dado por:

$$A_e = \frac{-|e|\omega z_0}{2\lambda} = A_p = \frac{p_0\omega}{2\lambda}$$

## 4. RADIACIÓN DE UN ELEMENTO DE CORRIENTE

Consideremos ahora un trozo de conductor de sección  $S$  arbitrariamente pequeña y longitud  $\Delta l$ , extendido según la dirección  $z$ . En vista del último resultado del párrafo anterior ( $z_0 \ll \lambda$ ), es necesario que sea  $\Delta l \ll \lambda$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda de la radiación que se va a producir. Nótese que esta situación de corriente con amplitud constante en el trozo de conductor es hipotética, ya que la corriente no puede terminar abruptamente en los extremos del conductor (las cargas de los extremos no pueden abandonar éste) y por tanto éste párrafo debe interpretarse como el estudio de los campos que crea un elemento de conductor que forma parte de un circuito más grande.

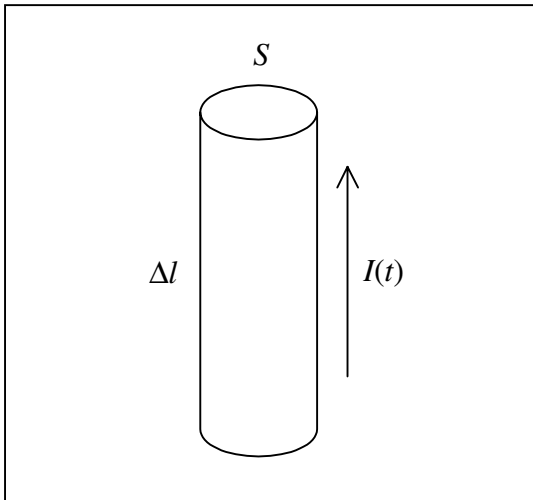


Figura 3.7.- Elemento de corriente bajo estudio.

El resultado es útil porque permite, dado un conductor de longitud finita, forma arbitraria y distribución de corriente conocida, calcular los campos electromagnéticos producidos a partir de la descomposición del hilo en trozos elementales y de la suma (integral) de los campos producidos por estos trozos elementales.

Si el conductor contiene  $N_l$  electrones por unidad de longitud, animados de velocidad  $v(t)$  (dirigida, evidentemente, según  $\hat{z}$ ):

$$I(t) = -N_l |e| v(t)$$

En particular, para variación senoidal:

$$I_0 \cos \omega t = -N_l |e| v_0 \cos \omega t \rightarrow I_0 e^{j\omega t}$$

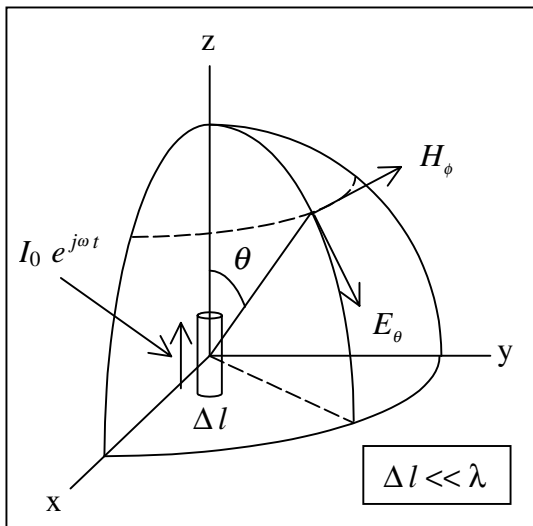


Figura 3.8.- Campos producidos por un elemento de corriente.

y el cálculo de los campos radiados por el elemento de corriente se reduce a multiplicar las expresiones obtenidas en el párrafo anterior para un electrón por el número de electrones que hay en el elemento de corriente:

$$N_l \Delta l = \frac{I_0 \Delta l}{-|e| v_0}$$

De manera que el elemento de corriente situado en el origen de coordenadas según la dirección  $z$  bajo estudio produce unos campos radiados:

$$H_\phi(\vec{r}) = j \frac{A_I}{r} e^{-jkr} \sin\theta$$

$$E_\theta(\vec{r}) = j\eta \frac{A_I}{r} e^{-jkr} \sin\theta$$

con

$$A_I = N_I \Delta l A_e = \frac{I_0 \Delta l}{-|e|v_0} \cdot \frac{-|e|v_0}{2\lambda} = \frac{I_0 \Delta l}{2\lambda}$$

(hemos prescindido del subíndice ‘rad’ que denota que son los campos radiados).

Dada la importancia que tienen estas expresiones como punto de partida para el estudio de antenas, las volvemos a escribir:

$$H_\phi(\vec{r}) = j \frac{I_0 \Delta l}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin\theta$$

$$E_\theta(\vec{r}) = j\eta \frac{I_0 \Delta l}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin\theta$$

Campos radiados por un elemento de corriente  $I_0 e^{j\omega t}$  de longitud  $\Delta l \ll \lambda$

Cuando restablecemos la dependencia temporal (las anteriores son amplitudes complejas) tenemos:

$$H_\phi(\vec{r}, t) = \frac{I_0 \Delta l}{2\lambda r} \sin\theta \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_\theta(\vec{r}, t) = \eta \frac{I_0 \Delta l}{2\lambda r} \sin\theta \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right)$$

Recuérdese que  $E_\theta(\vec{r}, t) / H_\phi(\vec{r}, t) = \eta$  con independencia de la posición y del instante.

Por lo dicho en el párrafo 3.1, a este elemento de corriente con frecuencia se le llama también **dipolo elemental**, ya que los campos radiados son de la misma forma

## 5. ONDA PLANA UNIFORME

Cuando estamos muy alejados del elemento radiante (como cuando recibimos una emisora de radio o de televisión lejana) y observamos desde una región muy pequeña del espacio comparada con la distancia (por ejemplo, una terraza de algunos metros cuadrados), **en la región de observación** sucede que (figura 3.9):

- 1) La curvatura de los frentes de onda es despreciable y podemos suponerlos como planos.
- 2) Los vectores  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  pueden suponerse iguales en todos los puntos (varían muy poco de un punto a otro), y los utilizamos para definir un sistema de coordenadas local ( $O'$ ;  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ).
- 3) El decrecimiento de la amplitud con la distancia, de forma  $1/r$ , también es despreciable y podemos suponer aquella constante. Además, para un punto  $P(x', y', z')$ ,  $r \cong r_0 + z'$ .

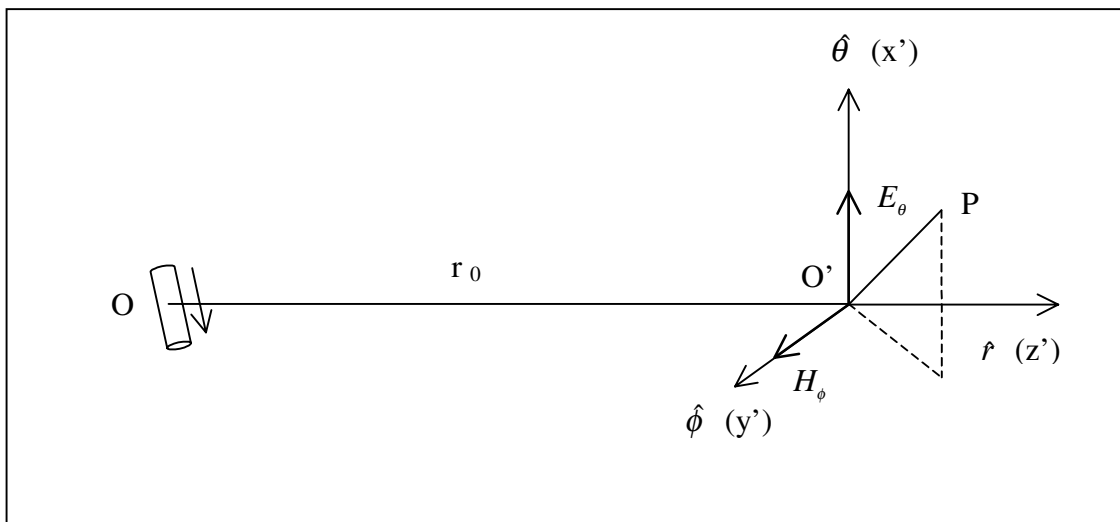


Figura 3.9.- Onda esférica vista localmente en la región de observación.

Así obtenemos una **aproximación** de la onda en la región que llamaremos **onda plana uniforme**, que, referida a los vectores unitarios en esféricas (fig. 3.9) podemos escribir:

$$E_{\theta} = E_{0\theta} e^{-jkr} \cong E_{0\theta} e^{-jkr_0} e^{-jkz'} = E_{0x'} e^{-jkz'}$$

$$H_{\phi} = H_{0\phi} e^{-jkr} \cong H_{0\phi} e^{-jkr_0} e^{-jkz'} = H_{0y'} e^{-jkz'}$$

con  $E_{0\theta} = j\eta \frac{I_0 \Delta l}{2\lambda r_0} \sin\theta$ , etc.

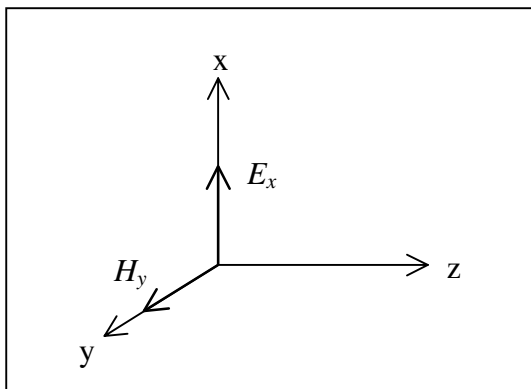


Figura 3.10.- Cambio de notación de ejes.

Si en la zona de observación (la terraza de antes, por ejemplo) rebautizamos los ejes como ejes x, y, z, siendo z la dirección de propagación (fig. 3.10), tendremos:

$$E_x = E_{0x} e^{-jkz}$$

$$H_y = H_{0y} e^{-jkz}$$

$$\text{con } \frac{E_{0x}}{H_{0y}} = \eta$$

Obsérvese que con esta notación nos desentendemos de los parámetros del elemento radiante y el dato es, por ejemplo,  $E_{0x}$  (o  $H_{0y}$ ), que siempre se pueden medir. Esto es acorde con la situación práctica de un instalador de antenas en una terraza; no tiene como dato las corrientes en las antenas radiantes, sino el valor del campo eléctrico, que normalmente habrá de medir con un instrumento denominado precisamente ‘medidor de campo’.

En el dominio del tiempo (suponiendo que el origen de tiempos esté tomado de forma que  $E_{0x}$  y  $E_{0y}$  sean reales) tendremos:

$$E_x(\vec{r}, t) = E_x(x, y, z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz)$$

$$H_y(\vec{r}, t) = H_y(x, y, z, t) = H_{0y} \cos(\omega t - kz)$$



La figura 3.11 representa los campos anteriores en el eje Z ( $x=y=0$ ) en el instante  $t = 0$ .

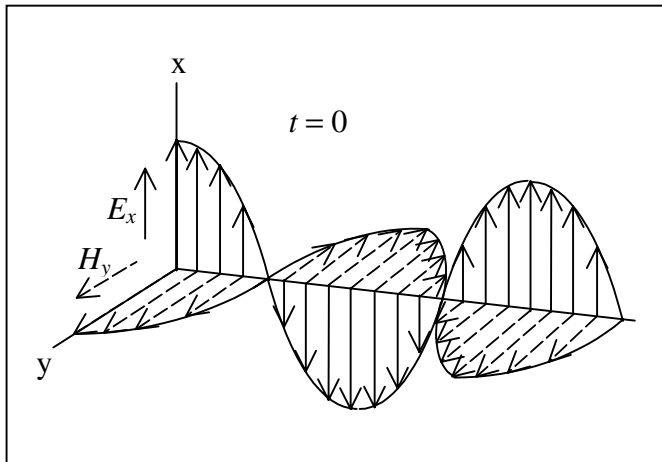


Figura 3.11.- Campos eléctrico y magnético de una onda plana uniforme en un cierto instante.

Nótese que en otro punto cualquiera del espacio ( $x, y, z$ ) estos valores sólo dependen de  $z$  y no de  $x, y$ . A medida que transcurre el tiempo, la distribución de campos anterior se desplaza hacia la derecha (dirección de propagación) con velocidad  $c$ .

## 6. POTENCIA TRANSPORTADA: VECTOR DE POYNTING

En un circuito con dos terminales la potencia instantánea entrante viene dada por el producto de tensión y corriente a su entrada,  $P(t) = v(t) i(t)$ . En el caso de una onda plana uniforme la situación es diferente ya que, en lugar de tensión y corriente entre dos terminales tenemos una distribución de campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , y además la transmisión de potencia está distribuida por todo el espacio.

La situación se hace más intuitiva si nos fijamos en el caso particular de una onda electromagnética plana a frecuencias ópticas (onda luminosa), en el margen del espectro visible. Si imaginamos que interponemos una superficie plana  $A$  opaca (es decir, que bloquea o intercepta la propagación de la luz), como en la figura 3.12, es evidente que la potencia interceptada por  $A$ ,  $P_A$ , es proporcional a  $A \cos\alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo que forman la dirección de propagación y la normal a la superficie,  $\hat{n}$  (fig. 3.13); es decir, la potencia es proporcional a la **superficie proyectada** según la dirección de propagación, entendiendo la superficie como una superficie orientada, es decir, como un vector, de manera que la intercepción es máxima cuando  $\hat{n}$  y la dirección de propagación son paralelos.

Estas consideraciones llevan inmediatamente a la definición de potencia interceptada como flujo de un vector, desconocido por el momento,  $\bar{S}$ , pero con la dirección de propagación de la onda ( $z$  en la fig. 3.13), de forma que:

$$P_A \equiv \bar{S} \cdot \hat{n} A = \bar{S} \cdot \bar{A}$$

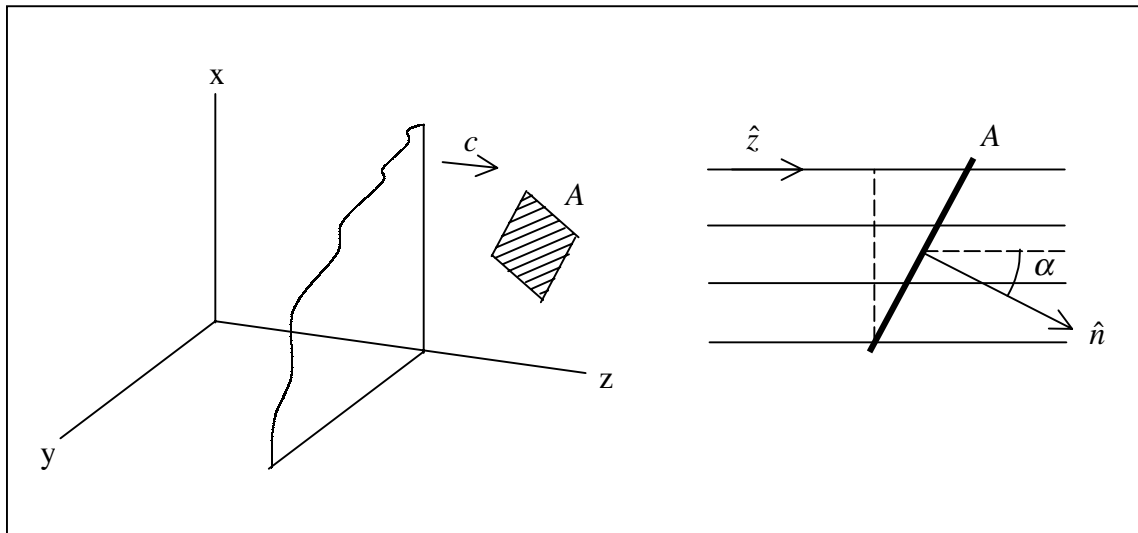


Figura 3.12.- Superficie opaca plana A interceptando una onda luminosa plana.

Como  $P_A$  se mide en W y  $A$  en  $m^2$ ,  $\bar{S}$  ha de tener dimensiones de  $W/m^2$  (densidad de flujo de potencia), y además:

- Ha de tener la dirección de propagación de la onda.
- Dado que en un circuito  $P = v i$ , parece razonable que para la onda  $S \equiv |\bar{E}| |\bar{H}|$ .

Estas condiciones se cumplen si definimos el **vector de Poynting**  $\bar{S}$  mediante

$$\bar{S}(\bar{r}, t) = \bar{E}(\bar{r}, t) \times \bar{H}(\bar{r}, t)$$

de manera que el flujo de potencia a través de una superficie elemental  $d\bar{A}$  viene dado mediante la expresión

$$dP = \bar{S} \cdot \hat{n} dA = \bar{S} \cdot d\bar{A}$$

## EJEMPLO

Para una onda plana uniforme como anteriormente,  $\bar{E} = E_x \hat{x}$ ,  $\bar{H} = H_y \hat{y}$ ;

$$\left. \begin{aligned} E_x(z, t) &= |E_{0x}| \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ H_y(z, t) &= \frac{|E_{0x}|}{\eta} \cos(\omega t - kz + \varphi) \end{aligned} \right\} \rightarrow \bar{S} = \hat{z} \frac{|E_{0x}|^2}{\eta} \cos^2(\omega t - kz + \varphi)$$

y la potencia interceptada por una superficie  $A$  perpendicular a la dirección de propagación situada en el plano  $z = z_0$  valdrá:

$$P_A(t) = \frac{|E_{0x}|^2}{\eta} A \cos^2(\omega t - kz_0 + \varphi)$$

El valor medio de la potencia a través de la superficie será:

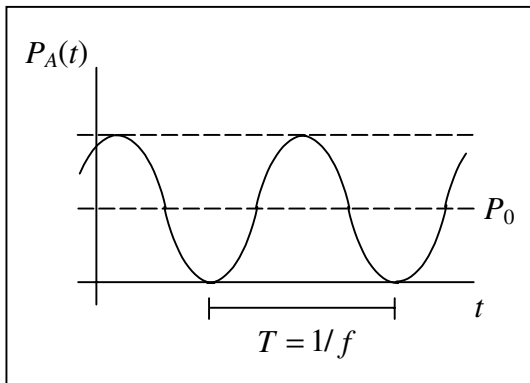


Figura 3.13.- Potencia instantánea a través de la superficie del ejemplo.

$$\begin{aligned} P_{Am} &= \frac{1}{T} \int_0^T P_A(t) dt = \\ &= \frac{|E_{0x}|^2}{\eta} A \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kz_0 + \varphi) dt = \\ &= \frac{|E_{0x}|^2}{2\eta} A \end{aligned}$$

Este valor podría haberse obtenido también a partir del valor medio del vector de Poynting (párrafo 1):

$$\bar{S}_m = \frac{1}{2} \text{Re}[\bar{E} \times \bar{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[E_{0x} H_{0y}^*] \hat{x} \times \hat{y} = \frac{|E_{0x}|^2}{2\eta} \hat{z} = \frac{1}{2} \eta |H_{0y}|^2 \hat{z}$$

De manera que la potencia media valdrá:

$$P_{Am} = \bar{S}_m \cdot \bar{A}$$

### 6.1. VALIDEZ DEL CONCEPTO DEL VECTOR DE POYNTING

Aunque lo hemos introducido en el contexto de ondas planas, el significado de densidad de flujo de potencia es completamente general, tanto para cualquier tipo de onda como para una situación en que exista una distribución de campos electromagnéticos, corresponda ésta a una onda o no.

## 7. POTENCIA RADIADA POR UN DIPOLO OSCILANTE

Si continuamos refiriéndonos a los campos radiados solamente (que son los que se observan a distancias grandes del radiador) el vector de Poynting producido por un dipolo oscilante (3.1) vale (en valor medio):

$$\bar{S}_m = \frac{1}{2} \text{Re} [\bar{E} \times \bar{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re} [E_\theta H_\phi^*] \hat{\theta} \times \hat{\phi} = \frac{1}{2} \frac{|E_\theta|^2}{\eta} \hat{r} = \frac{1}{2} \eta \frac{|A_p|^2}{r^2} \sin^2 \theta \hat{r}$$

Se observa que la densidad de flujo de potencia  $\bar{S}_m$ , para una distancia  $r$  dada, tiene dirección radial y es máxima en el **plano ecuatorial** del elemento radiante ( $\theta = \pi/2$ ) y mínima según la dirección en la que está orientado ( $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ ).

Consideremos a continuación una superficie esférica de radio  $r_0$  con centro en el origen (donde está el dipolo) y calculemos la potencia media total que atraviesa esta superficie esférica como consecuencia de los campos radiados por el dipolo. Si tomamos un elemento de superficie definido en coordenadas esféricas sobre la superficie esférica, tal como se indica en la figura 3.14 (en la que solamente se representa la parte de la

superficie contenida en el octante positivo del espacio) observamos que la potencia que lo atraviesa viene dada por:

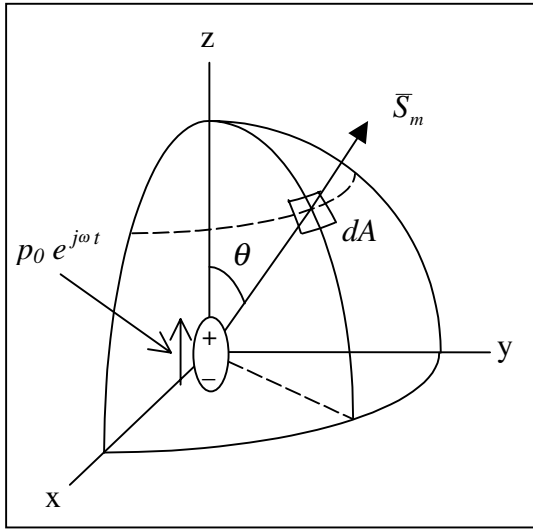


Figura 3.14.- Geometría para el cálculo de la potencia radiada por un dipolo.

$$dP_m = \bar{S}_m \cdot d\bar{A} = S_m r_0^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

ya que tanto el vector de Poynting como el diferencial de superficie tienen la misma dirección ( $\hat{r}$ ). Por tanto la potencia que buscamos se calcula integrando la expresión anterior a toda la superficie esférica:

$$\begin{aligned} P_m &= \int \bar{S}_m \cdot d\bar{A} = \frac{1}{2} \eta \frac{|A_p|^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta r_0^2 d\phi d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \eta |A_p|^2 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(-\cos \theta) = \pi \eta |A_p|^2 \left[ -\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi = \\ &= 160 p_0^2 c^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^4 = 10 p_0^2 c^2 k^4 \end{aligned}$$

Se observa que la potencia calculada es independiente del radio de la esfera, es decir, **la potencia media que atraviesa la superficie esférica es independiente de su radio**; y por el principio de conservación de la energía, esta potencia ha de ser aportada por la fuente de energía que hace oscilar el dipolo (si no hay dipolo oscilante no hay campos ni tampoco potencia). Con un lenguaje más breve diremos que esta es la **potencia radiada** por el dipolo.

## 8. REALIZACIÓN FÍSICA DE UN RADIADOR ELEMENTAL (DIPOLO CORTO)

Ya hemos dicho que un trozo de conductor de longitud  $\Delta l$  recorrido por una corriente  $I_0 e^{j\omega t}$  de amplitud  $I_0$  constante a lo largo del conductor es una idealización que solo tiene sentido si imaginamos al elemento como formando parte de un conductor más largo, ya que en el extremo de un conductor la corriente ha de ser cero. Por tanto, si suponemos dos hilos conductores alineados de longitud  $\Delta l / 2$ , como en la figura 3.16, y alimentados por una línea de transmisión conectada al transmisor, la amplitud de la corriente ha de disminuir progresivamente a medida que nos acercamos a los extremos y esto sucede, si  $\Delta l \ll \lambda$ , de forma aproximadamente lineal (fig. 3.15), aunque no estamos en condiciones de justificarlo adecuadamente con las herramientas de que disponemos. En este caso nos referiremos al hilo conductor bajo el nombre de **dipolo corto**, y hay muchas antenas de sistemas de comunicaciones que son de esta forma.

Para calcular los campos producidos, podemos descomponer el dipolo en trozos suficientemente pequeños como para considerar que la corriente en cada uno es de amplitud constante y superponer los resultados obtenidos anteriormente para un dipolo elemental.

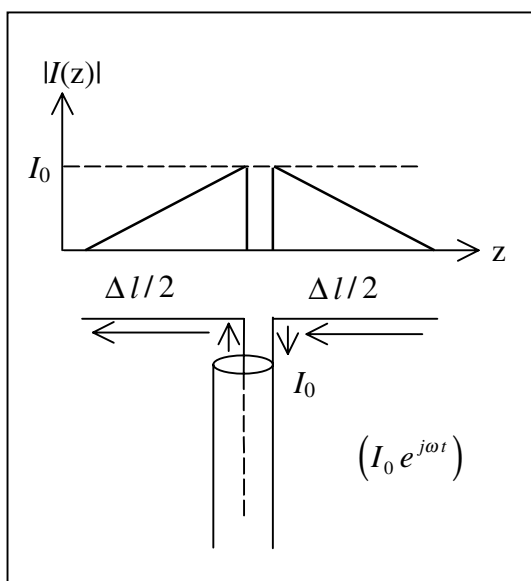


Figura 3.15.- Distribución de corriente en un dipolo corto.

De esta manera se encuentra fácilmente que la radiación de este dipolo es equivalente a la de otro con una distribución hipotética de corriente de amplitud constante,  $I'_0 e^{j\omega t}$ , como en caso del dipolo elemental, donde  $I'_0$  es el valor medio de  $I(z)$ :

$$I'_0 \Delta l = \int_{-\Delta l/2}^{\Delta l/2} I(z) dz = \frac{1}{2} I_0 \Delta l$$

$$\rightarrow I'_0 = \frac{1}{2} I_0$$

y donde  $I_0$  es la amplitud de la corriente a su entrada, es decir, en el punto de conexión con la línea de transmisión de alimentación.

La potencia radiada por el dipolo corto podemos calcularla de manera idéntica a la del párrafo 7 para un dipolo oscilante, ya que los campos producidos tienen la misma forma. De hecho, basta con sustituir  $A_p$  por  $A_I$ , y obtenemos:

$$P_m = 40\pi^2 |I_0|^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 = 10\pi^2 |I_0|^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2$$

Esta potencia se consume del generador, y es la misma que consumiría una **resistencia equivalente** de valor  $R_r$  tal que

$$P_m = \frac{1}{2} |I_0|^2 R_r \quad \rightarrow \quad R_r = \frac{2P_m}{|I_0|^2}$$

$$\rightarrow \quad R_r = 20\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 = 197.4 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 \Omega$$

A esta resistencia equivalente, que percibe la línea de transmisión en el punto de conexión, se le llama **resistencia de radiación** de la antena. Es necesario advertir que las antenas, además de resistencia de radiación, tienen reactancia, de manera que la impedancia total que presentan es compleja:  $Z = R_r + jX$ . La reactancia, que está asociada con los campos estáticos que solo se observan de cerca y de los que normalmente no nos ocupamos, es sin embargo mucho más difícil de calcular.

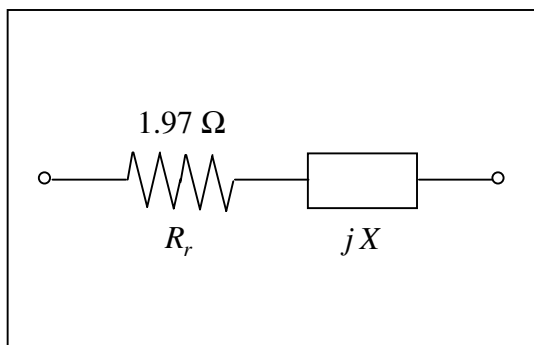


Figura 3.16.- Impedancia equivalente del dipolo del ejemplo.

#### EJEMPLO 1

Supongamos que para transmitir a 30 MHz ( $\lambda = 10$  m) disponemos de un dipolo de longitud  $l = 1$  m =  $0.1 \lambda$ . La resistencia de radiación de la antena vale en este caso  $R_r = 1.97 \Omega$ .

En este ejemplo la reactancia (parte imaginaria de la impedancia) sería muy elevada, de manera que la impedancia de carga al coaxial sería también elevada.

#### EJEMPLO 2: MONOPOLO CORTO SOBRE PLANO DE TIERRA

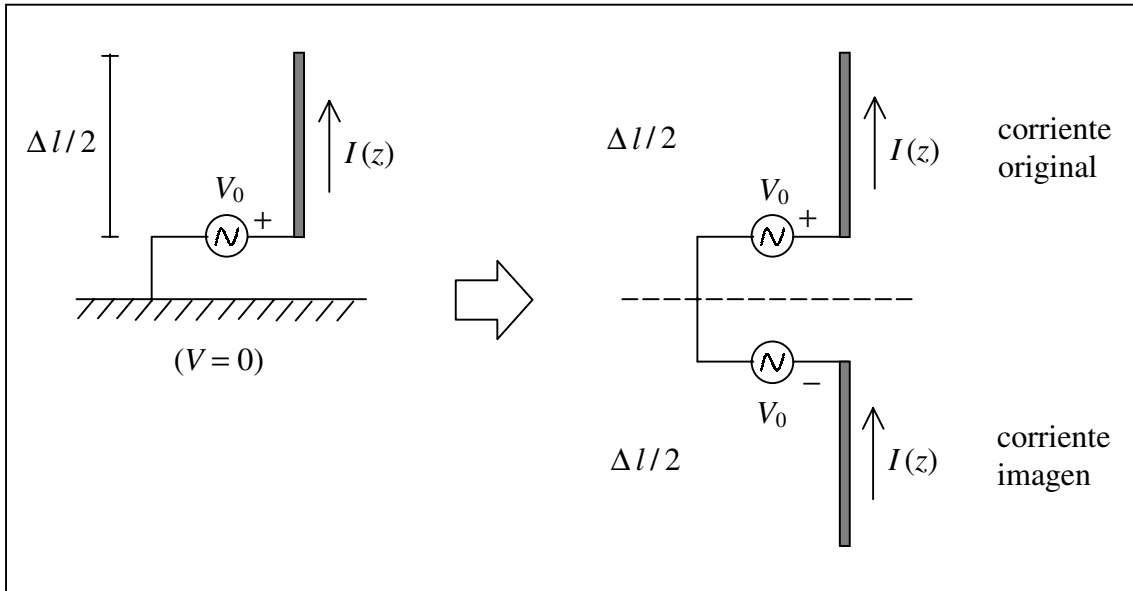


Figura 3.17.- Monopolo corto sobre plano de tierra e imagen equivalente.

Por este nombre se entiende un trozo de hilo conductor extendido verticalmente sobre un plano de tierra y alimentado por un generador como en la figura 3.17. A esta categoría de antenas (monopolo sobre plano de tierra, aunque no necesariamente corto) corresponden las antenas transmisoras de las emisoras de radio de onda media, fácilmente identificables en las afueras de las ciudades grandes, normalmente en zonas descampadas y planas, como postes metálicos verticales de gran altura (varias decenas de metros). También tienen un comportamiento bastante parecido a este monopolo las pequeñas antenas de los teléfonos móviles; si bien en este caso el papel del plano de tierra o masa lo desempeña (de una forma solo similar) la masa (terminal común al que está conectado el chasis).

Recuérdese que una distribución de corrientes frente a un plano conductor de tierra (o plano de masa) es equivalente a una situación sin plano conductor y una distribución de corriente **imagen** que es la imagen especular de la corriente más un cambio de sentido de la misma, como puede comprobarse fácilmente si atendemos al sentido de movimiento de las cargas (electrones) en el elemento original y en su imagen. Por tanto,



un monopolo sobre plano de tierra radia igual que un dipolo de longitud doble, pero radia solamente en el hemisferio superior (la mitad de la potencia):

$$P_m = \frac{1}{2} 10\pi^2 I_0 \left( \frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2 \quad \rightarrow \quad R_r = 98.7 \left( \frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2 \Omega$$

### EJEMPLO 3

Supongamos que una emisora de radio de frecuencia modulada (FM) transmite 100 w de potencia con una antena (dipolo de media longitud de onda) que produce unos campos casi iguales que los de un dipolo corto. Estamos interesados en conocer el valor del campo eléctrico a una distancia dada de la antena.

El cálculo es sencillo, ya que de la expresión que da la potencia radiada obtenemos:

$$\left| I_0 \right| \frac{\Delta l}{\lambda} = 0.0712 \text{ A},$$

y en consecuencia, si ignoramos la presencia del terreno y suponemos que la antena radia como en el espacio libre:

$$\left| E_\theta \right| = \eta \frac{I_0 \Delta l}{2\lambda r} \sin\theta = \frac{13.42}{r} \sin\theta \text{ V/m}^2$$

Por ejemplo, a una distancia de 20 km y en el plano ecuatorial de la antena ( $\theta = 0$ ) el campo eléctrico vale 671  $\mu\text{V/m}$ .

## 9. DIPOLOS CORTOS COMO RECEPTORES

Hasta ahora hemos considerado cómo radia un hilo recorrido por una corriente. La pregunta siguiente es: si ponemos un hilo conductor de longitud  $\Delta l$  en un lugar donde existe una onda, ¿qué corriente se induce en el hilo?

De forma más concreta: supongamos que en una región del espacio donde existe una distribución de campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  instalamos un dipolo corto ( $\Delta l \ll \lambda$ ).

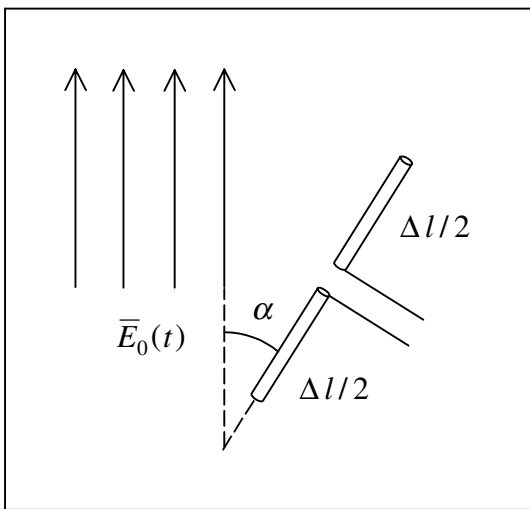


Figura 3.18.- Dipolo corto sometido a la acción de una onda.

La presencia del campo eléctrico va a forzar el movimiento de los electrones en el hilo, de manera que si la antena está conectada a una resistencia, por ella va a circular una corriente de frecuencia  $\omega = 2\pi f$  igual a la del campo eléctrico. Nótese que como los electrones en el hilo, si es delgado, sólo pueden moverse según la dirección de éste, sólo cuenta la componente del campo eléctrico a lo largo del hilo,  $E_0 \cos \alpha$ .

Si la antena está en circuito abierto, en sus extremos se va a generar una diferencia de potencial dada por:

$$V(t) = E_0(t) \cos \alpha f(\Delta l) = E_0 e^{j\omega t} \cos \alpha f(\Delta l)$$

con  $f(\Delta l)$  un factor de proporcionalidad que es función desconocida, por el momento, de la longitud del dipolo. En el caso de uno corto se puede demostrar, con razonamientos más allá del nivel de este texto, que  $f(\Delta l) = \Delta l / 2$  y por tanto

$$V(t) = V_0 e^{j\omega t} = \frac{1}{2} E_0 e^{j\omega t} \cos \alpha \Delta l$$

En lo anterior hemos supuesto, evidentemente, que la distribución de campo eléctrico es uniforme (no varía con la posición) en la región del dipolo, o bien que éste es suficientemente pequeño para suponer que la variación de  $\bar{E}_0$  es despreciable.

También podemos utilizar una espira para medir el campo magnético. Recuérdese que la ley de Faraday dice que, si en el espacio existe una distribución de campo magnético

$$\bar{B}(\bar{r}, t) = \mu_0 \bar{H}(\bar{r}, t)$$

y una espira de superficie  $A$ , en sus extremos se induce una fuerza electromotriz

$$V(t) = -\frac{d}{dt} \Phi_{\bar{B}}(A) = -\frac{d}{dt} \int_A \bar{B} \cdot d\bar{A} = -\frac{d}{dt} \int_A \bar{B} \cdot \hat{n} dA$$

donde la integral está extendida a una superficie cualquiera limitada por la espira. Normalmente, si la espira es plana, la superficie suele formarse en el plano de ésta. Si además la espira es suficientemente pequeña para poder suponer que el campo magnético es uniforme en su superficie:

$$V(t) = -\frac{d}{dt} \bar{B} \cdot \hat{n} A = -\frac{d}{dt} (B A \cos \alpha) = -\frac{d}{dt} (B_0 e^{j\omega t} A \cos \alpha) = -j\omega A B_0 \cos \alpha e^{j\omega t}$$

de manera que

$$V_0 = -j\omega A B_0 \cos \alpha$$

$V_0$  será máximo cuando  $\bar{B}$  sea normal al plano de la espira. Y si tenemos  $N$  espiras idénticas, evidentemente

$$V_0 = -jN\omega A B_0 \cos \alpha$$

## EJEMPLO

Supongamos una onda plana uniforme:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{0x} e^{-jkz} \\ H_y &= \frac{E_{0x}}{\eta} e^{-jkz} \end{aligned} \right\}$$

Un dipolo corto ( $\Delta l$ ) adecuadamente orientado según  $\vec{E}$  captaría una diferencia de potencial:

$$|V_E| = \frac{1}{2} |E_{0x}| \Delta l$$

mientras que  $N$  espiras de área  $A$  adecuadamente orientadas captarían:

$$|V_H| = \omega N A \mu_0 \frac{|E_{0x}|}{\eta} = \omega N A \mu_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_{0x}| = \omega N A \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} |E_{0x}| = N A |E_{0x}| \frac{2\pi}{\lambda}$$

Por ejemplo, supongamos  $f \sim 100$  MHz (banda de FM),  $\lambda = 3$  m,  $\Delta l = 30$  cm =  $0.1\lambda \ll \lambda$ . Supongamos que queremos recibir una señal de radio de al menos  $30 \mu\text{V}$  para que la calidad de la recepción estéreo sea suficientemente buena; en ese caso necesitamos un campo eléctrico mayor de  $200 \mu\text{V/m}$ . Este valor de campo eléctrico se puede alcanzar de manera satisfactoria, al menos de forma teórica, para distancias de hasta 20 km con potencias de transmisión de 100 w, tal como hemos visto en el ejemplo 3 del párrafo 8 anterior; en la práctica, las irregularidades del terreno, que puede interponerse entre emisor y receptor, la presencia de otros obstáculos, y que no siempre nos encontramos en la dirección de máxima radiación de la antena pueden hacer que el campo eléctrico sea sustancialmente menor que el calculado anteriormente. Pero el cálculo sirve para establecer correctamente el orden de magnitud del alcance de una estación emisora de FM con la potencia citada.

Si quisieramos captar la misma diferencia de potencial con una sola espira ( $N = 1$ ) de radio  $r$ :

$$A = \frac{\lambda |V_H|}{|E_{0x}| 2\pi} = 7.16 \times 10^{-2} \text{ m}^2 = \pi r^2 \quad \rightarrow \quad r = 15 \text{ cm}$$

Es decir, el diámetro de la espira habría de ser también de 30 cm, como la longitud del dipolo; sin embargo, la coincidencia de valores es casual, y para frecuencias menores el diámetro de la espira requerida se hace mucho mayor que la longitud del dipolo para misma tensión de salida. Puede comprobarlo el lector, por ejemplo, para  $f=500$  kHz (estación emisora de radio de onda media en modulación de amplitud, AM)

Supongamos ahora  $f = 500$  kHz (estación emisora de radio de onda media),  $\lambda = 600$  m,  $\Delta l = 30$  cm otra vez. En este caso obtendríamos para el radio de una espira que captara lo mismo:  $r = 2.13$  m, dimensión mucho mayor que la del dipolo.

## 10. POLARIZACIÓN DE ONDAS PLANAS UNIFORMES

Hemos visto que lejos de un elemento radiante los campos pueden aproximarse por los de una onda plana uniforme:

$$\begin{aligned} \bar{E}(\bar{r}) &= \bar{E}(x, y, z) = E_{0x} e^{-jkz} \hat{x} \\ \bar{H}(\bar{r}) &= \bar{H}(x, y, z) = \frac{E_{0x}}{\eta} e^{-jkz} \hat{y} \end{aligned}$$

de manera que en todos los puntos de la región del espacio de interés el campo eléctrico tiene siempre la misma dirección:

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \bar{E}(x, y, z; t) = |E_{0x}| \hat{x} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

(y lo mismo para el campo magnético). Decimos entonces que la onda está **polarizada linealmente**. Si no se dice lo contrario, la dirección de polarización de la onda se entenderá que es la de  $\bar{E}$ .

Supongamos ahora la superposición de dos ondas planas uniformes que se propagan según la dirección  $\hat{z}$ , ambas exactamente de la misma frecuencia (fig. 3.19):

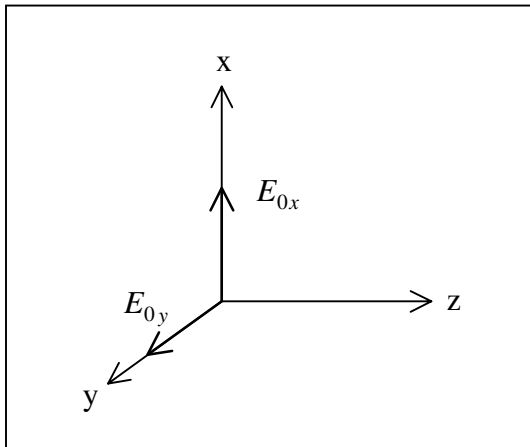


Figura 3.19.- Dos ondas planas uniformes propagándose según  $z$ .

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_1(\bar{r}) &= E_{0x} e^{-jkz} \hat{x} \\ \bar{H}_1(\bar{r}) &= \frac{E_{0x}}{\eta} e^{-jkz} \hat{y} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_2(\bar{r}) &= E_{0y} e^{-jkz} \hat{y} \\ \bar{H}_2(\bar{r}) &= -\frac{E_{0y}}{\eta} e^{-jkz} \hat{x} \end{aligned} \right\}$$

Podemos imaginar, por ejemplo, que ambas ondas están producidas por radiadores diferentes (muy alejados en el eje negativo  $z$ ) conectados al mismo generador, para hacer la frecuencia idéntica. (Nótese, en la onda (2), el cambio de signo de  $\bar{H}$  para que el vector medio de Poynting,  $\bar{S}_m$ , tenga la dirección de propagación correcta,  $\hat{z}$ ).

Tendremos:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_1(\bar{r}) + \bar{E}_2(\bar{r}) = (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y}) e^{-jkz}$$

$$\bar{H}(\bar{r}) = \bar{H}_1(\bar{r}) + \bar{H}_2(\bar{r}) = \left(-\frac{E_{0y}}{\eta} \hat{x} + \frac{E_{0x}}{\eta} \hat{y}\right) e^{-jkz}$$

De acuerdo con lo visto en 1.3, la onda resultante estará, en general, polarizada elípticamente; es decir, en un plano cualquiera perpendicular a la dirección de propagación el vector campo eléctrico (y también el magnético) evoluciona con el tiempo de manera que su extremo describe una elipse a razón de un giro completo ( $360^\circ$ ) en cada período de la señal. Tal como hemos discutido con anterioridad, la polarización lineal y la circular pueden interpretarse como casos particulares de elipse con un semieje de longitud cero o dos semiejes iguales.

Por lo que se refiere a la potencia media transportada por esta onda superposición de dos ondas polarizadas linealmente

$$\bar{S}_m = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{E} \times \bar{H}^*] = \frac{1}{2} \hat{z} \operatorname{Re} \left[ \frac{E_{0x} E_{0x}^*}{\eta} + \frac{E_{0y} E_{0y}^*}{\eta} \right] = \frac{1}{2} \frac{|E_{0x}|^2}{\eta} \hat{z} + \frac{1}{2} \frac{|E_{0y}|^2}{\eta} \hat{z}$$

**La potencia (media) transportada es la suma de las potencias (medias) que transporta cada onda componente  $E_{0x} \hat{x}$ ,  $E_{0y} \hat{y}$  separadamente.**

Las estaciones terrenas de difusión de radio y televisión transmiten siempre con polarización lineal, que es vertical en el caso de radio AM y horizontal en radio FM y en televisión. Sin embargo, en la difusión de señales de televisión desde satélites también se emplea la polarización circular.

#### EJEMPLO

Se trata de comparar las densidades de flujo de potencia instantáneas de una onda plana polarizada linealmente y otra polarizada circularmente. En el primer caso tenemos:

$$\bar{S}(t) = \bar{E}(t) \times \bar{H}(t) = \frac{|E_{0x}|^2}{\eta} \cos^2(\omega t + \phi) \hat{z}$$

Mientras que en el segundo (polarización circular:  $E_{0y} = \pm jE_{0x}$ ):

$$\bar{S}(t) = \bar{E}(t) \times \bar{H}(t) = \left[ \frac{|E_{0x}|^2}{\eta} \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{|E_{0x}|^2}{\eta} \sin^2(\omega t + \phi) \right] \hat{z} = \frac{|E_{0x}|^2}{\eta} \hat{z}$$

Es decir, en el primer caso la densidad de flujo de potencia varía con el tiempo como un coseno cuadrado y en el segundo es constante. La discusión de tan notable diferencia se deja a cargo del lector.

## 11. EL EFECTO DOPPLER

En acústica es conocido el fenómeno de que el tono con que se percibe una señal aumenta (se hace más agudo) si el emisor se acerca y disminuye si se aleja, lo que se comprueba cuando se observa cerca de la vía el paso de un tren mientras pita. Cuando se trata de ondas electromagnéticas este fenómeno también existe, pero al intervenir en su análisis la velocidad de una onda electromagnética de un cuerpo que se mueve, este análisis solo puede hacerse correctamente con ayuda de la teoría de la relatividad.

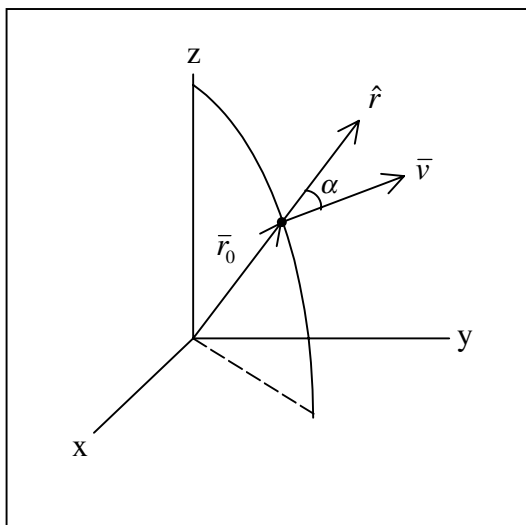


Fig. 3.20.- Punto de observación móvil animado de velocidad  $v$ .

No obstante, se puede obtener una expresión suficientemente aproximada cuando la velocidad del móvil es muy inferior a la de la luz considerando que, en el estudio de la onda producida por un elemento de corriente, el punto de observación P se mueve con una cierta velocidad, de manera que su distancia al origen viene dada en cada instante por:

$$r(t) = r_0 + \bar{v} \cdot \hat{r}_0 t = r_0 + v_r t ,$$

dónde  $v_r$  es la velocidad radial, o velocidad con que se aleja (si es positiva) del elemento emisor (fig. 3.20). Por lo tanto tendremos, en el punto de observación móvil:

$$H_\phi(P) = \frac{A_l}{r} \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} r_0 - \frac{\omega}{c} v_r t + \phi \right)$$

Cómo la frecuencia angular en el punto de observación es la derivada con respecto al tiempo de la fase de la señal (es decir, del argumento del coseno), obtenemos:

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi_p}{dt} = f \left( 1 - \frac{v_r}{c} \right)$$



De manera que la frecuencia observada disminuye si el punto se aleja ( $v_r > 0$ ), y aumenta si se acerca. En cualquier caso, recuerde el lector que los cálculos anteriores no son rigurosos, ya que suponen que la velocidad de la luz con relación al móvil cambia dependiendo de la velocidad de éste.

#### EJEMPLO 1: La expansión del universo

En 1929 el astrónomo norteamericano E.P. Hubble descubrió que las galaxias lejanas se alejan progresivamente de la vía láctea, en la que se encuentra la tierra. El descubrimiento fue consecuencia de la observación de que la radiación luminosa que emiten está desplazada por efecto Doppler, lo que se puede comprobar por comparación de los espectros de gases conocidos (como hidrógeno o helio) que emiten las galaxias con los mismos en la tierra; el alejamiento hace que la frecuencia disminuya y por tanto la longitud de onda aumente, por lo que se habla de **desplazamiento hacia el rojo** de la radiación o de las rayas espectrales de los gases conocidos. El alejamiento se produce de manera que la velocidad es mayor cuanto más lejanas están las galaxias (ley de Hubble).

A partir de 1960 los astrónomos han descubierto otros objetos cósmicos conocidos como **cuasares** que exhiben desplazamientos de frecuencia mayores que los observados en las galaxias más lejanas. Los cálculos demuestran que sus velocidades de alejamiento son enormes, aproximadamente un 90% de la velocidad de la luz, y por tanto constituyen los objetos más lejanos conocidos del universo.

#### EJEMPLO 2: Radares Doppler

Los radares de efecto Doppler son instrumentos que permiten medir la velocidad de alejamiento o acercamiento de un objeto distante mediante la emisión de radiación electromagnética de frecuencia conocida y la medición de la que se recibe después de haberse reflejado en el objeto móvil. Modernamente estos radares son muy conocidos por los conductores de automóviles, ya que son los que permiten a la policía conocer la velocidad de un coche con gran precisión.

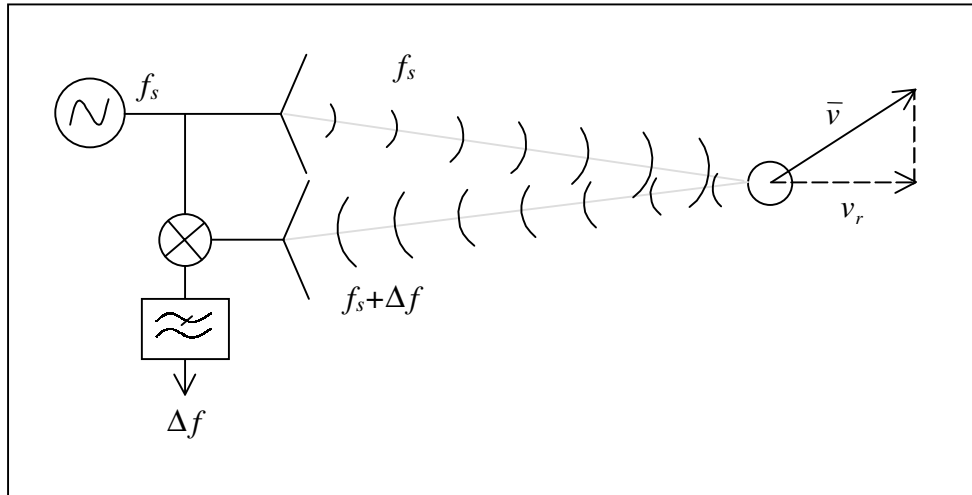


Figura 3.21.- Esquema de un radar Doppler; si el obstáculo que refleja la onda se mueve, la frecuencia de ésta está desplazada.

El funcionamiento detallado es como sigue: El transmisor emite una onda de frecuencia  $f_0$ , que el móvil, si se aleja con velocidad  $v_r$ , recibe como  $f_1 = f_0(1 - \Delta f')$ , con  $\Delta f' = f_0 v_r / c$ . La onda reflejada por el móvil tiene, con relación a éste, la misma frecuencia  $f_1$ , pero cuando llega al receptor (que está solidario con el emisor) es observada como  $f_2 = f_1(1 - \Delta f'') = f_0 - (f_0 + f_1)v_r/c$ ; como los desplazamientos son pequeños,  $f_0 \approx f_1$  y el desplazamiento total de frecuencia medido es:

$$\Delta f = 2f_0 \frac{v_r}{c}$$

Una frecuencia típica para un radar Doppler para medir la velocidad de coches es  $f_0 \cong 10$  GHz. En este caso un móvil con una velocidad de 100 km/hora = 27.78 m/s produce un desplazamiento Doppler de 1.852 kHz.

Este desplazamiento puede medirse de una forma muy precisa y sencilla si llevamos a la entrada de un circuito multiplicador una parte de la señal emitida y la señal recibida; a la salida del multiplicador tendremos:

$$v(t) = A \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) = \frac{1}{2} A \{ \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] \}$$

La señal de frecuencia suma (20 GHz) se elimina con un filtro paso bajo, y solo queda medir la frecuencia de la señal de frecuencia resta, que es el desplazamiento Doppler buscado.

## EJERCICIOS

3.1.- Dado el vector complejo ( $f = 100$  MHz):

$$\bar{E}_c = (1 + j0.5)\hat{x} + (0.1 - j)\hat{y} + j\hat{z}$$

a) Calcular  $\bar{E}(t)$

b) Si además:

$$\bar{H}_c = \hat{x} + (1 - j0.2)\hat{y} + (0.3 + j)\hat{z}$$

calcular el vector  $\bar{S}(t) = \bar{E}(t) \times \bar{H}(t)$  y su valor medio.

3.2.- Un electrón que oscila en el eje z de acuerdo con la ecuación  $z = z_0 \cos(\omega t)$  produce un campo magnético complejo dado por:

$$\bar{H}_{rad} = -j \frac{|e| z_0 \omega}{2\lambda r} \sin \theta e^{-jkr} \hat{\phi}$$

a) Calcule el vector campo eléctrico en un instante en que el electrón pasa por el origen de coordenadas con velocidad negativa.

b) Calcule la potencia media que radia el electrón en la región del espacio definida por la superficie cónica  $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ .

3.3.- Un electrón (carga  $-|e|$ ) describe una órbita circular de manera que su posición viene dada por:

$$\bar{r}_e = r_0 (\cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y})$$

a) Compruebe que los campos radiados son los mismos que los que producirían dos electrones oscilantes, uno moviéndose según el eje x y otro según el eje y, desfasados en  $90^\circ$  (en **cuadratura**).

b) Compruebe que la potencia asociada con dos señales senoidales (tensiones, campos eléctricos, etc) de la misma frecuencia y en cuadratura es la suma de las potencias de cada señal considerada aisladamente.

c) Utilice el resultado de b) para calcular la potencia total radiada por el electrón inicial sin necesidad de calcular las expresiones de los campos (que resultan bastante engorrosas).

3.4.- Un dipolo elemental ( $l_t \ll \lambda$ ) está situado en el origen de coordenadas y alineado según la dirección  $z$ . Si el dipolo radia 90 W a la frecuencia de 100 MHz:

- Calcular los campos  $E$  y  $H$  en los puntos A ( $r = 10$  km,  $\theta = 90^\circ$ ,  $\phi = 30^\circ$ ) y B ( $r = 10$  km,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$ ).
- Calcular la tensión que se inducirá en otro dipolo corto vertical de longitud  $l_t = 10$  cm situado en B.

3.5.- Un elemento de corriente situado en el origen de coordenadas y orientado según  $z$  produce, en el punto  $P$  ( $r = 10$  km,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$ ) un campo eléctrico de magnitud:

$$E(P) = 10^{-3} e^{-0.33j} \text{ V m}^{-1}$$

- Escribir las expresiones instantáneas de los campos  $\vec{E}(Q, t)$ ,  $\vec{H}(Q, t)$  en **coordenadas cartesianas**, siendo  $Q$  el punto ( $r = 10$  km,  $\theta = 135^\circ$ ,  $\phi = 135^\circ$ ).
- Calcular la potencia radiada por el elemento en el ángulo sólido definido por la superficie cónica  $\theta = 15^\circ$ .

3.6.- Un dipolo vertical (orientado según el eje  $z$ ) de 25 cm de longitud está alimentado a su entrada (en el plano medio) por una corriente de frecuencia 100 MHz e intensidad (eficaz) 2.5 A. La distribución de corriente en el dipolo es lineal, decreciendo desde el valor indicado en su centro hasta anularse en sus extremos.

- Calcule la expresión del vector de Poynting sobre una superficie esférica de radio 100 km. ¿Cuál es su valor máximo y en qué direcciones se produce?
- Calcule la potencia media total radiada, en W. Si la antena tiene, a la frecuencia de trabajo, reactancia nula, ¿cuánto vale el voltaje aplicado a la entrada de la antena (valor eficaz)?
- A 50 km de distancia y en la dirección ( $\theta = \pi/4$ ,  $\phi = \pi/4$ ) se sitúa un devanado de 100 espiras de  $90 \text{ cm}^2$  de área cada una contenidas en un plano paralelo al  $y$ - $z$ . ¿Cuánto vale la f.e.m. inducida en el devanado? ¿Cómo habría que orientar las espiras para que la f.e.m. inducida fuera máxima? ¿Cuánto valdría ésta?

3.7.- Un dipolo corto de longitud  $l = 0.2\lambda$  está alimentado en su plano medio por una corriente  $I_a e^{j\omega t}$ . Se sabe que la distribución de amplitud de corriente en el dipolo es lineal, anulándose en sus extremos. El dipolo está orientado según la dirección  $z$  y se observa que el campo magnético producido en  $(r, \theta, \phi)$  vale:

$$H_\phi(r, \theta, \phi) = j \frac{0.05}{r} \sin \theta e^{-jkr} \text{ A/m}$$

a) Escribir la expresión de  $\bar{E}(r, \theta, \phi; t)$ .

b) Calcular el valor de  $I_a$ .

c) Calcular la potencia media que atraviesa la superficie:

$$r = r_o, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$$

d) Escribir la amplitud compleja del campo magnético (la dirección no es necesaria) si el dipolo se orienta según el eje  $x$ .

(En todos los casos, indique las unidades).

3.8.- Una antena formada por un hilo recto, situada en el origen de coordenadas, produce un campo eléctrico lejano de amplitud:

$$|E(\bar{r})| = \frac{20 |I_o|}{r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi} \text{ V/m}$$

donde  $I_o$  (en A) es la amplitud compleja de corriente que le proporciona el generador.

a) Dibujar, de forma cualitativa, el diagrama de radiación (vector de Poynting a una distancia fija normalizado a su valor máximo en función de la dirección) en el plano  $x$ - $z$ .

b) Calcular la potencia radiada por la antena.

c) Calcular su resistencia de radiación.

d) Razonar en que dirección del espacio se extiende el hilo que forma la antena.

3.9.- Una antena situada en el origen de coordenadas produce, a distancias grandes (campo lejano) un campo eléctrico de amplitud:

$$E(r, \theta, \phi) = \frac{C}{r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi} e^{-jkr}$$

donde  $C$  es una constante compleja,  $C = |C| e^{j\psi}$ ,  $(r, \theta, \phi)$  son las coordenadas esféricas y no se conoce la dirección del vector campo eléctrico.

a) Calcule el valor del campo magnético  $H(r, \theta, \phi; t)$ . ¿Qué puede decir de su orientación en el espacio?

b) Calcule la potencia radiada por la antena en el semiespacio superior,  $z > 0$ .

3.10.- Dos radiadores elementales ( $\Delta l \ll \lambda$ ) están situados en el origen de coordenadas con corrientes y longitudes tales que:

$$\Delta I_1 \bar{I}_1 = 1.0 e^{j\omega t} \hat{z} \text{ (A.m)} \quad , \quad \Delta I_2 \bar{I}_2 = j0.5 e^{j\omega t} \hat{x} \text{ (A.m)}$$

a) Dibuje el campo eléctrico en los instantes  $t_n = nT/8$  ( $n = 0,1,2,3,\dots,7,8$ ) en el punto de coordenadas  $P(r = 100\lambda, \theta = 90^\circ, \phi = 90^\circ)$ .  $T$  es el período de la señal y  $\lambda = 3$  m.

b) Calcule, en el mismo punto  $P$ , el valor medio del vector de Poynting,  $\bar{S}_m(P)$

3.11.- Una onda plana propagándose en el espacio libre ( $\epsilon_o, \mu_o$ ) tiene un campo eléctrico dado por:

$$\bar{E}(\bar{r}) = 5.1 (\hat{y} + j\hat{z})e^{-j1.8x} \text{ V/m}$$

con  $x$  expresado en cm. Para esta onda, calcule:

a) La frecuencia y la longitud de onda.

b) La expresión del fásor  $\bar{H}(\bar{r})$ .

c) La potencia que, en cada instante, atraviesa la superficie triangular dada por los puntos  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$ , así como su valor medio.

(En todos los casos, indique las unidades).

3.12.- Una onda plana uniforme tiene campo eléctrico complejo dado por:

$$\bar{E} = E_o(1.25 \hat{x} + j \hat{y}) \quad , \quad |E_o| = 10 \text{ V/m} \quad , \quad \text{fase}(E_o) = 30^\circ$$

a) Escribir  $\bar{E}(\bar{r}, t)$  y  $\bar{H}(\bar{r}, t)$ .

b) Dibujar los vectores  $E$  y  $H$  en el plano  $z = 0$  en los instantes  $nT/8$ ,  $n = 0,1,2,3,4$ .

c) Calcular la densidad de flujo de potencia que transporta la onda en cada instante.

d) Calcular el valor medio de la densidad de flujo de potencia.

e) Idem para cada una de las ondas polarizadas linealmente que forman la onda dada.

## §4. ONDAS Y MEDIOS MATERIALES

---

### 1. REVISIÓN DE LAS CONDICIONES EN EL INTERIOR Y EN LA SUPERFICIE DE UN CONDUCTOR IDEAL

Recordemos que las condiciones de los campos electromagnéticos en el interior y en la superficie de un (hipotético) conductor ideal establecidas en §2.4 son **válidas cuando éstos varían en el tiempo**, incluso a frecuencias todo lo grandes que nos convenga. Esto es fácil de comprender si recordamos otra vez que los campos en el interior de un cuerpo conductor ideal sometido a la acción de campos externos son nulos porque los electrones se mueven (se reorganizan) hasta que producen otros campos que en el interior son iguales y de signo contrario y los anulan. En el caso ideal la movilidad de los electrones (§2.3.1) es infinita, y esta reorganización tiene lugar instantáneamente, de manera que no importa que los campos varíen con el tiempo; los electrones son tan rápidos que terminan de reorganizarse antes de que los campos hayan tenido tiempo de cambiar tan siquiera un poco.

Por supuesto, en el caso de los conductores reales, aunque sean buenos, y en el caso de variación temporal senoidal, lo anterior deja de ser cierto cuando el tiempo que tardan los electrones en moverse comienza a ser comparable con el período de oscilación de los campos.

Nótese, a modo de comprobación adicional, que las condiciones de que  $\vec{E}$  sea normal y  $\vec{H}$  tangencial a la superficie del conductor son compatibles con las que impone el vector de Poynting:

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t)$$

ya que, al ser el producto vectorial perpendicular a  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , resulta  $\vec{S}$  tangente a la superficie y por tanto **no hay flujo de potencia a través de la superficie del conductor ideal**. Conclusión lógica, ya que al ser los campos nulos en su interior, dentro nunca puede haber energía almacenada ni por tanto entrar o salir.

## 1.1. REVISIÓN DEL MÉTODO DE IMÁGENES

El método de imágenes (útil para problemas donde haya un plano conductor infinito) también se desarrolló en el marco de la estática. Pero se puede comprobar (lo haremos en un ejemplo) lo siguiente:

“Los campos producidos por una carga acelerada y su imagen respecto a un plano (definida como anteriormente, §2.6) producen, en el plano, campos que satisfacen las condiciones que exige un conductor ideal; campo eléctrico normal y magnético tangencial”.

Por tanto el método de las imágenes es válido en general, tal como implícitamente supusimos en el ejemplo de un monopolo sobre un plano conductor (§3.8, ejemplo 2).

### EJEMPLO

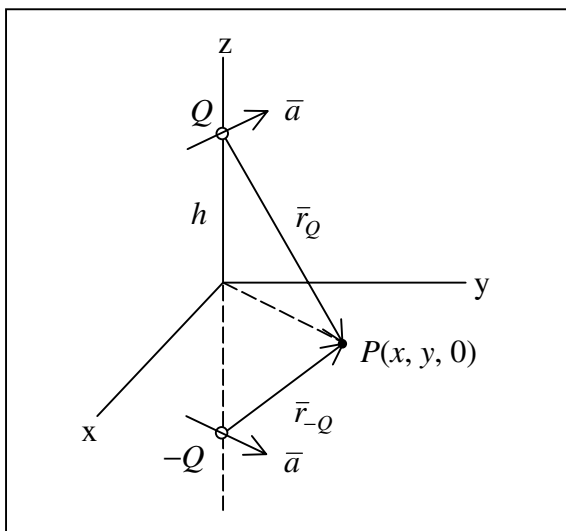


Figura 4.1.- Carga acelerada y su imagen.

Supongamos una carga  $Q$  en  $(0, 0, h)$  con aceleración  $\vec{a}$  y su imagen con respecto al plano XY,  $-Q$ , en  $(0, 0, -h)$ . Supongamos además el caso particular

$$\vec{a} = a \hat{z}$$

El campo magnético total creado en un punto de observación  $P(x, y, 0)$  será la suma de los términos estáticos y de los



radiados. Dado que el caso de los estáticos ya lo hemos analizado en ' 2.6, basta con considerar los radiados (prescindimos del subíndice *rad*):

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \bar{H}_Q + \bar{H}_{-Q} \\ \bar{H}_Q &= \frac{Q}{4\pi c} \frac{1}{r_Q} a\left(t - \frac{r_Q}{c}\right) \hat{z} \times \bar{r}_Q\end{aligned}$$

con  $\bar{r}_Q = x \hat{x} + y \hat{y} - h \hat{z}$  ,  $r_Q = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}$  ; y:

$$\bar{H}_{-Q} = \frac{-Q}{4\pi c} \frac{1}{r_{-Q}} a\left(t - \frac{r_{-Q}}{c}\right) (-\hat{z}) \times \bar{r}_{-Q}$$

dónde  $\bar{r}_{-Q} = x \hat{x} + y \hat{y} + h \hat{z}$  ,  $r_{-Q} = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2} = r_Q$  . De manera que:

$$\bar{H} = \frac{Q}{4\pi c} \frac{1}{r_Q} a\left(t - \frac{r_Q}{c}\right) \hat{z} \times [\bar{r}_Q + \bar{r}_{-Q}]$$

Pero  $\hat{z} \times [\bar{r}_Q + \bar{r}_{-Q}] = 2 \hat{z} \times [x \hat{x} + y \hat{y}] = 2(y \hat{x} - x \hat{y})$  y por tanto  $\bar{H}$  está contenido en el plano XY. La demostración para  $\bar{E}$  y para otras direcciones de  $\bar{a}$  (direcciones  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ) es similar.

## 2. MEDIOS MATERIALES

En el vacío la descripción electromagnética queda completa con el conocimiento de  $\bar{E}$  y  $\bar{B}$  (campos eléctrico y magnético), que se definen a partir de la fuerza ejercida sobre una carga  $q$  con velocidad  $\bar{v}$  de la manera siguiente:

$$\bar{F}_q = q \bar{E} + q \bar{v} \times \bar{B}$$

Sin embargo, en presencia de medios materiales, si bien normalmente son globalmente neutros, las cargas eléctricas de los átomos o de las moléculas (o de los iones en algunas estructuras cristalinas) forman dipolos eléctricos que contribuyen campos eléctricos, y los electrones orbitando en un átomo forman bucles de corriente (dipolos magnéticos) que, análogamente, contribuyen campos magnéticos. Si bien la situación es bastante compleja, su descripción se resuelve con la introducción de dos nuevos vectores, la **densidad de flujo eléctrico**  $\bar{D}$  y la **intensidad magnética**  $\bar{H}$ , que, en materiales **amorfos** (no cristalinos), que son la mayoría de los que tienen interés en aplicaciones, y en cada punto del espacio están relacionadas con los campos eléctrico y magnético mediante las relaciones:

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \quad , \quad \bar{H} = \frac{1}{\mu} \bar{B}$$

dónde  $\varepsilon$  (**constante dieléctrica** o **permitividad**) y  $\mu$  (**permeabilidad magnética** o **permeabilidad**) son magnitudes escalares que resumen los efectos medios de los dipolos eléctricos y magnéticos del material a través de unos mecanismos físicos que normalmente no es necesario conocer. Cuando los valores de  $\varepsilon$  y  $\mu$  no dependen de la posición se dice que el medio (que ya hemos dicho que es amorfo) es además **homogéneo**.

En el vacío:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m} \approx \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F/m}, \quad \mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

En cualquier otro material  $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ , mientras que en todos los materiales no ferromagnéticos se puede tomar, con mucha aproximación,  $\mu = \mu_0$ . En resumen,

**los fenómenos electromagnéticos en un medio material amorfo sin pérdidas se describen matemáticamente de la misma forma que en el vacío sin más que cambiar los valores de la permitividad y la permeabilidad por los del medio en cuestión.**

En particular, la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas (velocidad de la luz) en un medio material viene dada por  $v = (\mu\epsilon)^{-1/2}$ , de manera que cambia su valor con respecto al del vacío. Además, como  $\epsilon \geq \epsilon_0$  y  $\mu = \mu_0$  (con las excepciones mencionadas) resulta que **la velocidad de las ondas electromagnéticas en un medio material es siempre inferior a la velocidad en el vacío.**

En los párrafos siguientes se dan más detalles sobre el comportamiento de los medios materiales.

## 2.1. CAMPOS MICROSCÓPICOS Y MACROSCÓPICOS

Cuando nos movemos en el interior de un medio material, a escala atómica, los campos varían de manera muy brusca cuando pasamos cerca de un electrón de un átomo (carga negativa) o de un núcleo (carga positiva), y esto sucede con una periodicidad espacial muy pequeña (fracciones de nanómetro,  $10^{-9}$  m). A estos campos les llamaremos **microscópicos**;  $\bar{E}_\mu(\bar{r}, t)$  y  $\bar{H}_\mu(\bar{r}, t)$ .

Desde el punto de vista macroscópico no estamos interesados en estas variaciones espaciales y temporales tan rápidas, ya que difícilmente se fabrican elementos de dimensiones inferiores a  $1 \mu\text{m}$  (en el interior de circuitos integrados). Nótese que

en  $1 \mu\text{m}^3$  de Si hay  $5.0 \times 10^{10}$  átomos  
 en  $1 \mu\text{m}^3$  de  $\text{H}_2\text{O}$  hay  $3.35 \times 10^{10}$  moléculas  
 en  $1 \mu\text{m}^3$  de aire hay  $2.69 \times 10^7$  moléculas

Por tanto se **definen** los campos **macroscópicos**  $\bar{E}_M(\bar{r}, t)$ ,  $\bar{H}_M(\bar{r}, t)$  (que son los que utilizamos normalmente, sin ponerle subíndice) como los **valores medios** de los campos microscópicos en un volumen  $\Delta V$ , construido alrededor de  $\bar{r}$ , que sea pequeño desde el punto de vista macro y grande desde el micro (pensemos en el  $\mu\text{m}^3$  anterior, o en un volumen algo más pequeño incluso. Véase §4.2.4 y fig. 4.3, mas abajo):

$$\bar{E}_M(\bar{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \bar{E}_\mu(\bar{r}', t) dV' \quad , \quad \bar{H}_M(\bar{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \bar{H}_\mu(\bar{r}', t) dV'$$

Normalmente no le pondremos el subíndice  $M$ .

## 2.2. DIPOLOS

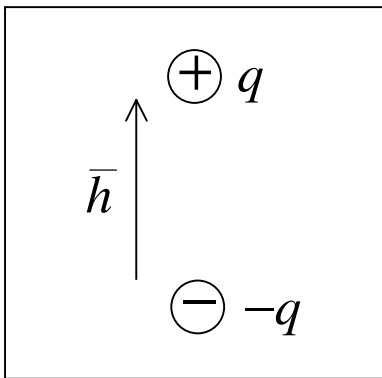


Figura 4.2.- Dipolo eléctrico.

Recordemos que dos cargas iguales y de signos opuestos forman lo que se llama un **dipolo eléctrico de momento**:

$$\bar{p} = \bar{h} q$$

( $\bar{h}$  vector separación entre las cargas, apuntando a la positiva), de manera que producen un potencial y campo eléctrico que a distancia grande ( $r \gg h$ ) vienen dados por:

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^2} \quad , \quad \bar{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}]$$

(Se ha supuesto el dipolo en el origen de coordenadas y orientado según la dirección  $\hat{z}$ ;  $\bar{p} = p \hat{z}$ ).

## 2.3. ESTRUCTURA DE LOS MEDIOS MATERIALES

Atendiendo a la organización de los átomos, iones o moléculas que los componen, los medios materiales se pueden clasificar de la siguiente manera:

- a) **Gases:** Formados por átomos o moléculas desordenadas y en permanente colisión con sus vecinos.

b) **Líquidos:** También desordenados como los gases, pero con una mayor densidad de átomos/moléculas por unidad de volumen y menor capacidad de movimiento de éstos.

c) **Sólidos:**

c1) **Cristalinos:** Formados por átomos o iones organizados en una red espacial ordenada. Normalmente sus propiedades son función de la **dirección** en que se estudia la propiedad (**anisotropía**).

c2) **Amorfos:** Los átomos/moléculas están desordenados y sus propiedades no dependen de la dirección (materiales **isótropos**). También son normalmente isótropos los gases y los líquidos.

En lo que sigue nos limitaremos a considerar medios **no cristalinos**, es decir, no ordenados.

## 2.4. MOLÉCULAS POLARES

Si bien todos los átomos/moléculas son normalmente neutros, algunos tienen la carga eléctrica distribuida asimétricamente y forman un dipolo con momento dipolar  $\bar{p}_i$ .

Para un material formado por átomos/moléculas polares, como por ejemplo el agua o los plásticos, definimos el **vector polarización**  $\bar{P}(\bar{r}, t)$  en un punto  $\bar{r}$  como:

$$\bar{P}(\bar{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \bar{p}_i$$

Con  $\Delta V$  un volumen elemental (macroscópicamente pequeño) construido alrededor de  $\bar{r}$  (fig. 4.3).

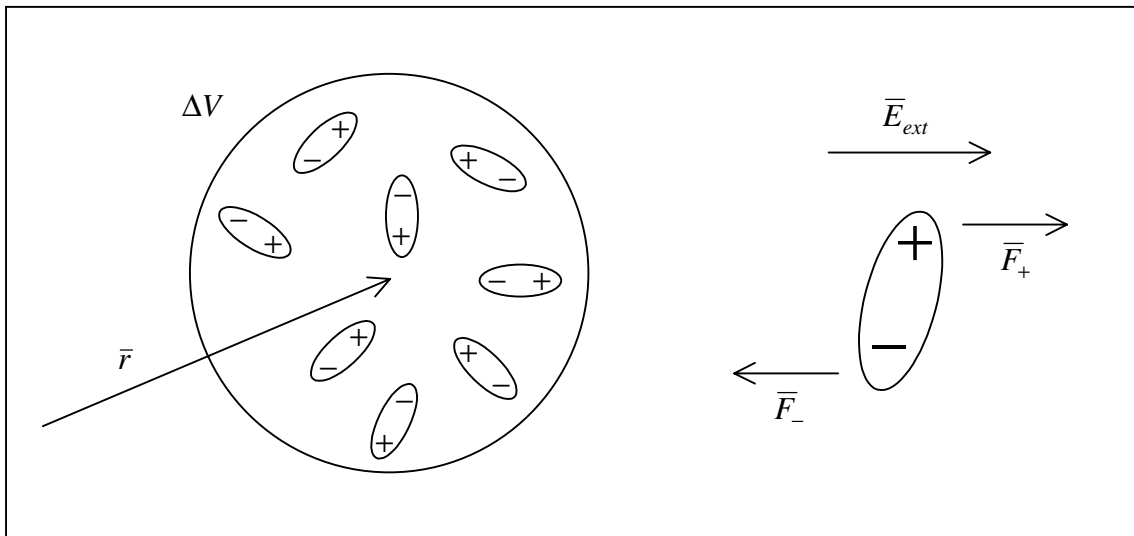


Figura 4.3.- Volumen elemental utilizado para calcular valores medios. Par ejercido sobre un dipolo.

Normalmente las moléculas están orientadas al azar y por tanto  $\bar{P}(\bar{r}, t) = 0$ . Pero si aplicamos un campo eléctrico exterior los dipolos tienden a orientarse según la dirección del campo eléctrico (cosa a la que se opone la agitación térmica de las moléculas) y la polarización  $\bar{P}$  deja de ser nula.

En estas condiciones se define el vector densidad de flujo eléctrico  $\bar{D}$  mediante:

$$\bar{D}(\bar{r}, t) = \epsilon_0 \bar{E}(\bar{r}, t) + \bar{P}(\bar{r}, t)$$

dónde  $\bar{E}(\bar{r}, t)$  es el campo eléctrico **macroscópico total**, formado por la suma del exterior aplicado más el que puedan contribuir las moléculas del material.

Se comprueba que, debido a la resistencia a orientarse de las moléculas, la polarización  $\bar{P}$  aumenta con el campo eléctrico de forma lineal:

$$\bar{P} = \epsilon_0 \chi_e \bar{E}$$

A la constante de proporcionalidad  $\chi_e$  (letra griega 'ji') se le llama **susceptibilidad eléctrica**. De manera que

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \epsilon_0 \chi_e \bar{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \bar{E} \equiv \epsilon \bar{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E}$$

dónde se ha introducido la permitividad o constante dieléctrica del material  $\epsilon$  y la constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$ . Nótese que estas constantes resumen las propiedades de las moléculas polares del material.

## 2.5. LA LEY DE GAUSS EN MEDIOS MATERIALES

En presencia de medios materiales la ley de Gauss toma la forma siguiente:

$$\int_A \bar{D} \cdot \hat{n} dA = \int_V \rho dV = Q$$

donde  $V$  es un volumen limitado por la superficie cerrada  $A$ .

## 2.6. PROPIEDADES MAGNÉTICAS. DIPOLO MAGNÉTICO

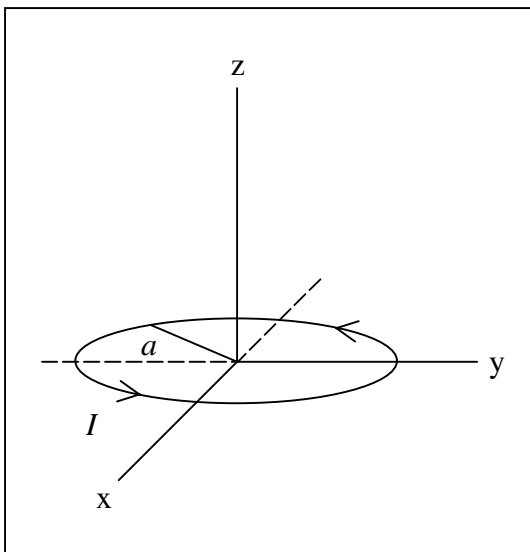


Figura 4.4.- Dipolo magnético.

Un bucle de corriente continua  $I$  como en la figura produce un campo magnético que a distancias grandes ( $r \gg a$ ) vale:

$$\bar{H} = \frac{m}{4\pi r^3} (\hat{r} 2 \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta)$$

con  $m$  el **momento magnético** del bucle definido mediante

$$m = I \pi a^2$$

Adviértase que el campo  $\bar{H}$  creado es completamente similar al  $\bar{E}$  creado por un dipolo magnético (§4.2.2), de donde procede el nombre de ‘dipolo magnético’.

Como en los átomos hay electrones que describen órbitas, hay momentos magnéticos. Y también hay otro tipo de momentos magnéticos asociados con el *spin* del electrón y con los núcleos de los átomos. Por tanto se puede hacer un desarrollo similar al de los dipolos eléctricos de las páginas anteriores y se introduce la **intensidad magnética**  $\bar{H}$  mediante la relación

$$\bar{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \bar{H} = \mu \bar{H}$$

con  $\chi_m$  = susceptibilidad magnética y  $\mu$  = permeabilidad, constantes que resumen también las propiedades de los dipolos magnéticos moleculares. En la práctica, en la inmensa mayoría de los materiales (incluyendo los conductores como Cu, Zn, Au y Ag)  $\mu \cong \mu_0$ . Solamente en el caso de los materiales **ferromagnéticos** como el Fe, Mn y Co (que se utilizan para fabricar imanes permanentes y transformadores) y **ferrimagnéticos** (ferritas; materiales de tipo cerámico con átomos de Mn, Fe, Zn, Ni, Cd)  $\mu$  se hace diferente (y normalmente mucho mayor, cientos o miles de veces) que  $\mu_0$ .

En consecuencia, en lo que sigue, y mientras no digamos explícitamente lo contrario, **supondremos siempre  $\mu = \mu_0$** .

### 3. PÉRDIDAS

Si, tal como hemos dicho mas arriba, no incluimos los medios magnéticos, las pérdidas en un material ser pueden producidas por dos procesos:

- a) La presencia de cargas libres, capaces de moverse (electrones en un sólido, electrones e iones en un gas y en un líquido), que hacen que sea mas o menos conductor y presente, por tanto, pérdidas por disipación en forma de calor (' 3, 3.3), y:



- b) Los dipolos eléctricos que los forman, que al moverse bajo la acción de un campo eléctrico variable (normalmente senoidal) oscilan y convierten parte de la energía electromagnética en energía mecánica (calor).

Las primeras, pérdidas de conducción, admiten un análisis muy simple en el caso de variación temporal senoidal de la manera siguiente: Supongamos un condensador plano (fig. 4.5) con placas de superficie  $S$ , separación  $d$  y dieléctrico de permitividad  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ .

En ausencia de pérdidas la admitancia del circuito vale:

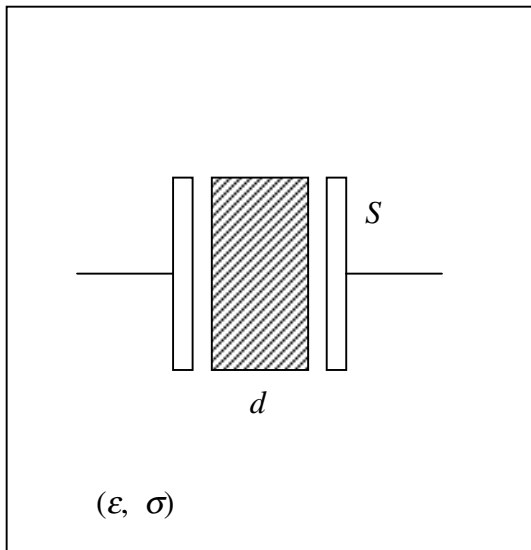


Figura 4.5.- Condensador con pérdidas.

$$Y = j\omega C = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

Si el medio dieléctrico presenta una conductividad finita  $\sigma$ , el condensador presentará además una conductancia  $G$ , y por tanto una admitancia de valor (fig. 2.8):

$$\begin{aligned} Y &= G + j\omega C = \sigma \frac{S}{d} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \\ &= j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} \right) \end{aligned}$$

Es decir, la presencia de pérdidas por conducción del dieléctrico puede ser tenidas en cuenta mediante la **sustitución de la permitividad del dieléctrico por una permitividad compleja** de valor:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \rightarrow \quad \varepsilon_c = \varepsilon_0 \varepsilon_{rc} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} \right) \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r (1 - j\kappa_\sigma)$$

( $\kappa$  es la letra griega **kappa**, no confundir con la k de nuestro alfabeto). Evidentemente, la información de las pérdidas está en el término imaginario, que en ausencia de ellas se anula.

En el caso de pérdidas polares (producidas por el carácter dipolar de los átomos/moléculas) su efecto también se traduce en la aparición de un término imaginario negativo en la permitividad (véase párrafo siguiente), de manera que:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_0 \varepsilon_{rc} = \varepsilon_0 \varepsilon_r (1 - j\kappa_\sigma - j\kappa_p) \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r (1 - j\kappa)$$

Normalmente, cuando nos dan  $\kappa$  para un material no se suele disponer de información sobre las contribuciones a las pérdidas de la conductividad y los efectos polares. Cuando las pérdidas son pequeñas  $\kappa$  también lo es y entonces se le llama **tangente de pérdidas** del material y se denota por  $\tan\delta$ , de manera que

$$\varepsilon_c = \varepsilon(1 - j\tan\delta)$$

En los buenos materiales (con pérdidas bajas) normalmente  $10^{-4} \leq \tan\delta \leq 10^{-3}$ .

### 3.1. PÉRDIDAS POLARES

Si volvemos a la línea argumental de §4.2.4 y consideramos que los campos tienen variación temporal senoidal (recuérdese que manejamos vectores complejos):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{E}_c(\vec{r})e^{j\omega t} \quad , \quad \vec{P}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{P}_c(\vec{r})e^{j\omega t} \quad , \quad \text{etc.}$$

Cuando las moléculas oscilan bajo la acción del campo eléctrico comunican parte de su movimiento a las vecinas, que se transforma en calor (agitación desordenada de las moléculas), lo que en términos macroscópicos podemos interpretar como debido a la presencia de “fricción” o rozamiento. En este caso la oscilación de las moléculas se **retrasa** en relación con el campo eléctrico que la produce y en consecuencia

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_c(\vec{r})e^{j\omega t} = \vec{E}_c(\vec{r})e^{j\omega t} e^{-j\phi} \varepsilon_0 \chi_e$$

Si las pérdidas son pequeñas el retraso  $\phi$  también lo es,  $\phi \ll 1$ , y entonces

$$e^{-j\phi} \cong (1 - j\phi) \quad \rightarrow \quad \bar{P}_c(\bar{r}) = \epsilon_0 \chi_e (1 - j\phi) \bar{E}_c \equiv \epsilon_0 \chi_{ec} \bar{E}_c$$

donde hemos introducido la **susceptibilidad compleja**  $\chi_{ec} = \chi_e (1 - j\phi)$  que a su vez produce una permitividad compleja

$$\epsilon_c = \epsilon_0 \chi_e (1 - j\phi) = \epsilon (1 - j\phi) = \epsilon_0 \epsilon_{rc} \quad , \quad \epsilon_{rc} = \epsilon_r (1 - j\phi)$$

“En régimen senoidal la presencia de pérdidas polares en un medio material se traduce en la aparición de una permitividad compleja, con parte imaginaria negativa”.

La cantidad  $\phi$  es la que anteriormente hemos denominado  $\kappa_p$ .

#### EJEMPLO

El agua destilada (conductividad prácticamente nula) tiene, a  $f = 100$  MHz,  $\epsilon_{rc} = 80.1(1 - j5.47 \times 10^{-3})$ . En este caso la  $\kappa = \tan \delta$  está contribuida solamente por efectos de polarización.

El agua de mar tiene, debido a la presencia de sales disueltas, una apreciable conductividad de  $\sigma \cong 4.0$  S/m. A la misma frecuencia de 100 MHz la  $\kappa$  contribuida por las pérdidas de conducción valdrá:

$$\kappa_\sigma = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} = 9.0$$

que como se ve, es mucho mayor que el valor anterior. Por tanto, en agua de mar a 100 MHz prácticamente todas las pérdidas son responsabilidad de su conductividad.

Sin embargo, a  $100$  GHz  $= 10^{11}$  Hz, para agua destilada se tiene:

$$\epsilon_{rc} = 7.05(1 - j1.77)$$

mientras que para agua de mar

$$\kappa_{\sigma} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} = 1.02 \times 10^{-1}$$

De manera que en este caso la contribución de las pérdidas de conducción es despreciable frente a las pérdidas de polarización. Obsérvese la importancia que tiene la frecuencia en el valor de las pérdidas de un material.

### 3.2. PROPIEDADES DE ALGUNOS MATERIALES DIELECTRICOS DE INTERÉS

	$\epsilon_r$	$\tan \delta$
Aire seco (a 25°C)	1.00059	0
Poliestireno	2.5	$1 - 4 \times 10^{-4}$
Polietileno (PTE)	2.25	$\sim 2 \times 10^{-4}$
Teflon (PTFE)	2.1	$\sim 1 \times 10^{-4}$
Plexiglas	2.5 – 3.5	$\sim 0.02 - 0.003$
Vidrio (Corning 707)	4.0	$\sim 10^{-3}$
Alúmina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> , 99,5 %)	10	$1 - 2 \times 10^{-4}$
GaAs (alta resistividad)	13	$1.6 \times 10^{-3}$
Si (alta resistividad)	12	$10^{-2} - 10^{-3}$
Cuarzo fundido (SiO <sub>2</sub> )	3.8	$10^{-4}$

## 4. ONDAS EN MEDIOS MATERIALES

Recordemos que los campos complejos de una onda plana uniforme polarizada linealmente, propagándose en el vacío y debidamente orientada vienen dados por:

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}(\bar{r}) &= E_{0x} \hat{x} e^{-jkz} \\ \bar{H}(\bar{r}) &= \frac{E_{0x}}{\eta} \hat{y} e^{-jkz} \end{aligned} \right\} \quad \text{con} \quad k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad , \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Tal como hemos dicho anteriormente, estas expresiones continúan siendo válidas en un medio material sin más que sustituir los valores de permitividad y permeabilidad por los correspondientes a los del material. Dado que normalmente (con la excepción de los materiales ferromagnéticos)  $\mu \approx \mu_0$ , y dado que **siempre** sucede que  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r > \epsilon_0$  resulta que la **velocidad de las ondas es menor que la del vacío**:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} < c, \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

De manera que, para una misma frecuencia, la longitud de onda es también menor en un medio material que en el vacío en un factor  $\sqrt{\epsilon_r}$  :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda a la misma frecuencia en el vacío. Por ejemplo, en agua a frecuencias no muy elevadas es  $\epsilon_r = 81$ , y la longitud de onda es por lo tanto nueve veces más pequeña que en el aire.

Si el medio tiene pérdidas hemos de sustituir la cantidad, hasta ahora real,  $\epsilon_r$ , por su valor complejo:

$$\epsilon_r \rightarrow \epsilon_r(1 - j\kappa) = \epsilon_{rc}$$

con lo cual  $k$  y  $\eta$  se modifican de la forma siguiente:

SIN PÉRDIDAS

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$$

CON PÉRDIDAS

$$k_c = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r (1 - j\kappa)}$$

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r (1 - j\kappa)}}$$

Adviértase que la constante real que anteriormente hemos denominado número de onda  $k$  ahora se convierte en una constante compleja:

$$k_c = \beta - j\alpha = -j(\alpha + j\beta), \quad e^{-jkz} \rightarrow e^{-jk_c z} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

y donde antes teníamos solamente un factor de fase  $e^{-jkz}$  ahora tenemos además un **factor de atenuación**  $e^{-\alpha z}$ , llamado así porque a medida que la onda se propaga (a medida que  $z$  se hace mayor) las amplitudes de los campos decrecen (se atenúan) en el factor  $e^{-\alpha z}$ :

$$\bar{E}(\bar{r}) = \hat{x} E_{0x} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$\bar{H}(\bar{r}) = \hat{y} \frac{E_{0x}}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$\beta$  (anteriormente  $k$ )  $\rightarrow$  **constante de fase**, dimensiones de  $\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}$   
 $\alpha$  (anteriormente = 0)  $\rightarrow$  **constante de atenuación**, dimensiones de  $\text{Neper}\cdot\text{m}^{-1}$   
 (sobre el significado de Neper, véase más abajo)

Veamos como decrece la densidad de flujo de potencia (vector de Poynting):

$$\begin{aligned} \bar{S}_m(z) &= \hat{z} \frac{1}{2} \text{Re}[E_x H_y^*] = \hat{z} \frac{1}{2} \text{Re}\left[E_{0x} e^{-\alpha z} \frac{E_{0x}^*}{\eta_c^*} e^{-\alpha z}\right] = \hat{z} \frac{1}{2} |E_{0x}|^2 e^{-2\alpha z} \text{Re}\left[\frac{\eta_c}{|\eta_c|^2}\right] = \\ &= \hat{z} \frac{1}{2} |E_{0x}|^2 e^{-2\alpha z} \frac{\eta_r}{\eta_r^2 + \eta_i^2} \end{aligned}$$

con  $\eta_c = \eta_r + j\eta_i$

La expresión anterior también puede escribirse

$$S_m(z) = S_m(0) e^{-2\alpha z}$$

Es decir, la magnitud del vector de Poynting también disminuye exponencialmente con  $z$ , pero el doble más deprisa (el exponente es el doble) que la magnitud de los campos.

#### 4.1. CONCEPTO DE NEPER

Supongamos dos planos,  $z_2 > z_1$ , de manera que  $S_m(z_2) < S_m(z_1)$ , o más brevemente,  $S_2 < S_1$ . Entre los planos  $z_2$  y  $z_1$  se produce una **atenuación**  $L$  que se mide en Neper mediante la definición:

$$L (\text{Neper}) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{S_1}{S_2} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \ln \left( \frac{S_0 e^{-2\alpha z_1}}{S_0 e^{-2\alpha z_2}} \right) = \alpha (z_2 - z_1) \quad \text{Neper}$$

Nótese que realmente los Neper, como los radianes y los decibelios (dB), carecen de dimensiones, ya que son el logaritmo de un cociente que tampoco las tiene. Sin embargo es necesario dar la información de la forma de medir la atenuación a través de estas “unidades”, como en el caso de radianes y grados.

La misma atenuación  $L$  se mide en **decibelios** (dB) mediante la definición:

$$L (\text{dB}) = 10 \log_{10} \left( \frac{S_1}{S_2} \right) \rightarrow 10 \log_{10} \left( e^{2\alpha (z_2 - z_1)} \right) = 20\alpha (z_2 - z_1) \log_{10}(e) = \\ = 8.686\alpha (z_2 - z_1) \quad (\text{en Neper})$$

Por tanto:

$$1 \text{ NEPER} = 8.686 \text{ dB}$$

Debe recordarse que, **para insertar en el exponente de  $e^{-\alpha z}$ ,  $\alpha$  debe venir dada en Neper/m, nunca en dB.** Si la información de que disponemos viene dada en estas últimas unidades es necesario convertirlas a Neper mediante la fórmula anterior.

#### 4.2. PROFUNDIDAD PELICULAR O DE PENETRACIÓN, $\delta$

Se denomina con este nombre a la inversa de la constante de atenuación  $\alpha$ :

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (\text{dimensiones de longitud}) \quad \rightarrow \quad e^{-\alpha z} = e^{-\frac{z}{\delta}}$$

(¡**ATENCIÓN!** No confundir esta variable  $\delta$  con la que aparece en la tangente de pérdidas,  $\tan\delta$ ). Físicamente se corresponde con la distancia al cabo de la cual los campos de la onda redujeron su amplitud en el factor  $e \cong 2.7183$  ;

$$z_2 = z_1 + \delta \quad , \quad e^{-\frac{z_2}{\delta}} = e^{-\frac{z_1 + \delta}{\delta}} = \frac{e^{-\frac{z_1}{\delta}}}{e}$$

o bien, de forma equivalente, al cabo de la cual la potencia (el vector de Poynting) se ha reducido en 1 Neper = 8.686 dB;

$$e^{-2\frac{z_2}{\delta}} = e^{-2\frac{z_1 + \delta}{\delta}} = \frac{e^{-\frac{z_1}{\delta}}}{e^2} \quad ; \quad \frac{1}{2} \ln(e^2) = 1 \text{ Neper}$$

Esta forma de medir la atenuación en un material a través de la profundidad de penetración resulta más gráfica que a través de la de su inversa  $\alpha$ .



### 4.3. PÉRDIDAS BAJAS

En los materiales dieléctricos de buena calidad (cerámicas, polietileno (PTE), teflon (PTFE)) la tangente de pérdidas, si bien es función de la frecuencia, es siempre muy pequeña:

$$10^{-4} < \tan\delta < 10^{-2}$$

y esto nos permite realizar las siguientes aproximaciones:

$$k_c = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - j\tan\delta} \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{2}j\tan\delta\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k \quad , \quad \alpha = \frac{1}{2}k \tan\delta = \frac{\pi}{\lambda} \tan\delta}$$

$$\eta_c = \eta_r + j\eta_i = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(1 - j\tan\delta)^{-1/2} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 + \frac{1}{2}j\tan\delta\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\eta_r = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta \quad , \quad \eta_i = \frac{1}{2}\eta \tan\delta}$$

#### EJEMPLO 1

Si para teflon (PTFE) a 10 GHz ( $\lambda_0 = 3$  cm) tenemos  $\varepsilon_r = 2.1$  ,  $\tan\delta = 2.0 \times 10^{-4}$   $\rightarrow$

$$\alpha = \frac{\pi\sqrt{\varepsilon_r}}{0.03} 2.0 \times 10^{-4} = 3.035 \times 10^{-2} \quad \text{N/m} = 0.264 \quad \text{dB/m}$$

$$\eta = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} (1 + j10^{-4}) \quad \Omega = 260 (1 + j10^{-4}) \quad \Omega$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = 32.95 \quad \text{m}$$

(Fin del ejemplo)

En el caso de pérdidas bajas el vector de Poynting calculado en el párrafo 4 puede simplificarse de la forma siguiente:

$$\bar{S}_m(z) = \frac{1}{2} \hat{z} |E_{0x}|^2 e^{-2\alpha z} \frac{\eta_r}{\eta_r^2 + \eta_i^2} = \frac{1}{2} \hat{z} |E_{0x}|^2 e^{-2\alpha z} \frac{\eta}{\eta^2 [1 + (\tan\delta)^2]} \cong \hat{z} \frac{|E_{0x}|^2}{2\eta} e^{-2\alpha z}$$

Es decir, a efectos de propagación de potencia se puede seguir suponiendo que la impedancia de onda  $\eta$  continúa siendo real. Podemos decir, por tanto, que:

En el caso de pérdidas bajas ( $\tan\delta < 10^{-2}$ ), el único efecto notable de éstas sobre una onda plana uniforme es la aparición de una constante de atenuación de valor:

$$\alpha = \frac{1}{2} k \tan\delta = \frac{\pi}{\lambda} \tan\delta,$$

permaneciendo todos los demás parámetros de la onda sin variaciones.

## EJEMPLO 2: PÉRDIDAS POR CONDUCCIÓN

Reexaminemos de nuevo el caso de pérdidas de conducción debidas a cargas libres para moverse; electrones e iones en gases y líquidos y electrones en sólidos.

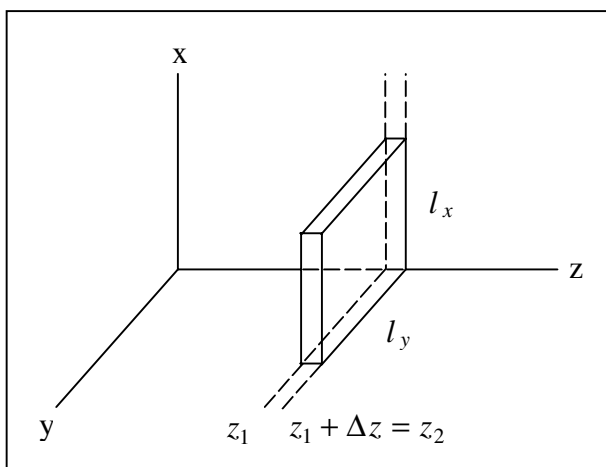


Figura 4.6.- Volumen donde se calculan las pérdidas del ejemplo.

Veamos cómo calcular las pérdidas asociadas a la onda que se propaga, en el caso de que **sean pequeñas**. Supongamos que el vector  $\bar{S}_m$  de la onda está dado por la expresión del ejemplo anterior. La potencia que se pierde (por  $m^2$  de superficie de onda) entre los planos  $z_1$  y  $z_2 = z_1 + \Delta z$  valdrá:

$$\Delta P_m = S_m(z_1) - S_m(z_1 + \Delta z) = \frac{|E_{0x}|^2}{2\eta} (e^{-2\alpha z_1} - e^{-2\alpha z_2}) = \frac{|E_{0x}|^2}{2\eta} e^{-2\alpha z_1} (1 - e^{-2\alpha \Delta z})$$

y si  $\Delta z$  es suficientemente pequeño:

$$e^{-2\alpha \Delta z} \approx 1 - 2\alpha \Delta z \quad \rightarrow \quad \Delta P_m = \frac{|E_{0x}|^2}{2\eta} e^{-2\alpha z_1} 2\alpha \Delta z$$

Por otra parte, la potencia media disipada por unidad de volumen en un conductor vale

$$\frac{\Delta P_m}{\Delta V} = \frac{1}{2} \sigma |\bar{E}|^2$$

y por tanto en el volumen bajo consideración,  $\Delta V = l_x l_y \Delta z = 1 \text{ m}^2 \cdot \Delta z = \Delta z$ :

$$\Delta P_m = \frac{1}{2} \sigma |E_{0x}|^2 e^{-2\alpha z} \Delta z$$

Comparando con la expresión anterior

$$\frac{1}{2} \sigma = \frac{1}{\eta} \alpha = \frac{1}{\eta} \frac{1}{2} k \tan \delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0}} \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \tan \delta \quad \rightarrow \quad \tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}$$

Por tanto  $\epsilon_c$  valdrá:

$$\boxed{\epsilon_c = \epsilon_0 \epsilon_r \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \right)}$$

que es la misma expresión obtenida en el párrafo 3 a partir de la consideración de un condensador plano. Si bien ahora la hemos obtenido bajo la hipótesis de pérdidas bajas ( $\tan \delta \ll 1$ ) se puede comprobar que **continúa siendo válida aunque las pérdidas se hagan arbitrariamente grandes.**

## 5. CAMPOS EN EL INTERIOR DE UN MEDIO CONDUCTOR

Hemos visto que en el interior de un conductor ideal ( $\sigma = \infty$ ) los campos se anulan. ¿Qué pasa en el caso de conductores reales, para los que  $\sigma \sim 10^7$  S/m? La respuesta a esta pregunta se obtiene estudiando cómo se propagan los campos en el interior de un conductor; y el caso matemáticamente más simple es el de una onda plana uniforme, que es el que desarrollamos a continuación.

Los resultados obtenidos en el análisis nos deberían permitir, además, establecer cuándo y cómo podemos aproximar un conductor real por uno ideal

### 5.1. ONDAS PLANAS EN CONDUCTORES

Consideremos tres conductores muy comunes:

Cobre:	$\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m ,	$\epsilon_r = 1$ ,	$\mu = \mu_0$
Aluminio:	$\sigma = 3.7 \times 10^7$ S/m ,	$\epsilon_r = 1$ ,	$\mu = \mu_0$
Latón:	$\sigma = 1.6 \times 10^7$ S/m ,	$\epsilon_r = 1$ ,	$\mu = \mu_0$

(En todos los metales es  $\epsilon_r = 1$  ya que los átomos que los forman no tienen momento dipolar).

En todos los casos  $\sigma > 10^7$  y por tanto

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} > \frac{10^7}{2\pi f \epsilon_0} = \frac{1.8 \times 10^{17}}{f}$$

A frecuencias de radiocomunicaciones ( $10^5 - 10^{11}$  Hz) este cociente es muy grande ( $> 10^6$ ) y por tanto

$$\varepsilon_{rc} = \varepsilon_r \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} \right) \approx -j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}$$

De manera que para estos conductores o similares,

$$k_c = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_c} = \omega \sqrt{-j \mu_0 \frac{\sigma}{\omega}} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_0 \sigma} = \beta - j \alpha$$

Definimos la **profundidad de penetración**  $\delta$  como anteriormente:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} \quad \rightarrow \quad k_c = \frac{1-j}{\delta} = \beta - j \alpha$$

y la onda plana uniforme toma la forma:

$$E_x = E_{0x} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j \frac{z}{\delta}}, \quad H_y = \frac{E_x}{\eta_c}$$

Donde la impedancia de onda  $\eta_c$  vale:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}} = \sqrt{j \frac{\omega \mu_0}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\omega \mu_0 \sigma}}{\sigma} = \frac{1+j}{\sigma \delta} \equiv (1+j) R_s$$

y donde hemos definido la **resistencia superficial**  $R_s$  (con dimensiones de  $\Omega$ ) mediante

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta}$$

#### EJEMPLO 1

En agua de mar para  $f < 100$  MHz predominan las pérdidas de conducción sobre las de polarización (véase el ejemplo del párrafo 3.1) y por tanto, con  $\sigma = 4$  S/m:

$$\epsilon_{rc} \cong 81 \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \right) = 81 \left( 1 - j \frac{9.0 \times 10^8}{f} \right)$$

de manera que para  $f < 100$  MHz ,  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \gg 1$  y podemos aplicar los resultados de

un buen conductor:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} = \frac{252}{\sqrt{f}} \text{ m}$$

Veamos algunos valores:

$f$	10 kHz	1 MHz	100 MHz
$\delta$	2.52 m	0.25 m	2.5 cm

Recuérdese que la profundidad de penetración  $\delta$  representa la distancia para la que la onda se atenúa en 8.686 dB . Por tanto:

**Las comunicaciones por radio dentro del mar son imposibles**, excepto para distancias muy pequeñas y a frecuencias muy bajas (10 kHz o menos). De manera que los submarinos sumergidos están prácticamente incomunicados vía radio, excepto a través de canales de comunicación con portadoras de frecuencia muy baja (decenas de kilohertzios) y por lo tanto con velocidades de transmisión también muy bajas. Tampoco pueden utilizar radares (ondas de radio) y en su lugar utilizan radares de ondas de sonido (sonares).

## EJEMPLO 2

Volvamos al agua de mar, pero esta vez a frecuencias grandes, por ejemplo  $f = 100$  GHz para la que (3.1, ejemplo)

$$\varepsilon_{rc} = 7.05(1 - j1.77)$$

Ahora ya no se comporta como un buen conductor  $\left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} \text{ no es } \gg 1 \right)$  pero en todo caso

$$\alpha = -\text{Im}[k_c] = -\text{Im}\left[\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{rc}}\right] = 4.0 \times 10^3 \text{ Neper/m}$$

¡La atenuación continúa siendo enorme! De manera que tampoco son posibles las comunicaciones a estas frecuencias elevadas de microondas.

## 5.2. ¿CUÁNDO PUEDE APROXIMARSE UN BUEN CONDUCTOR POR UN CONDUCTOR IDEAL?

Para los conductores citados anteriormente:

$$\text{Cobre: } \delta \text{ (en mm)} = 66 / \sqrt{f}$$

$$\text{Aluminio: } \delta \text{ (en mm)} = 83 / \sqrt{f}$$

$$\text{Latón: } \delta \text{ (en mm)} = 127 / \sqrt{f}$$

Por ejemplo, para cobre

@ 1 MHz ,  $\delta = 66 \mu\text{m}$  ; @ 100 MHz ,  $\delta = 6.6 \mu\text{m}$  ; @ 10 GHz ,  $\delta = 0.66 \mu\text{m}$  ; etc.

Se puede comprobar fácilmente que **en una capa de espesor  $h = 7\delta$  circula el 99.9 % de la corriente total, y los campos se reducen a una milésima parte de su valor en la superficie.** Cuando el espesor de esta capa  $h$  es muy pequeño comparado con el grosor del conductor, podemos: a) continuar suponiendo que las cargas y corrientes están concentradas en una capa superficial de espesor arbitrariamente pequeño (densidades de carga y corriente superficiales), como en el caso de un conductor ideal, y b), suponer nulos los campos en el interior (también como en el caso de un conductor ideal) si su distancia a la superficie es mayor que  $h = 7\delta$ .

No obstante, la aproximación de conductor ideal ( $\sigma = \infty$ ) no es válida para calcular pérdidas por efecto Joule ni diferencias de potencial entre puntos de un mismo conductor, que en el caso ideal son evidentemente nulas.

#### EJEMPLO: Apantallamiento magnético

Con frecuencia los equipos electrónicos producen señales que pueden producir interferencias en otros aparatos de su entorno o incluso en otras partes del mismo equipo; entonces se hace necesario aislar estos circuitos poniéndolos dentro de una caja hermética de metal que impida que las señales se radien hacia el exterior. Por ejemplo, supongamos una caja fabricada con chapa de cobre de 1 mm de grosor, y que la señal que se desea apantallar es de 100 MHz; en este caso la pared de un milímetro supone (ignorando el proceso de reflexiones que se estudiará en el tema siguiente) una atenuación de  $1000 \mu\text{m} / 6.6 \mu\text{m} = 151.5$  Neper = 1316 dB, que es una atenuación extraordinaria y, si la caja es realmente hermética podemos suponer que el apantallamiento es perfecto.

Sin embargo, si lo que tratamos de apantallar con la misma chapa de cobre de 1 mm de grosor es una fuente de alimentación, nos encontramos con que a la frecuencia de 50 Hz la profundidad de penetración vale  $\delta = 7.1$  mm, y la atenuación introducida es de apenas 1.22 dB; de manera que la caja no es en absoluto efectiva para apantallar.

En este caso conviene utilizar cajas de metales magnéticos (hierro dulce aleado con níquel, cobalto, etc.) con permeabilidades muy elevadas; por ejemplo, supongamos que  $\mu = \mu_o \mu_r = 10.000$  y que la conductividad es de  $\sigma = 0.7 \times 10^7$  S/m. En este caso:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = 0.27 \text{ mm}$$

y la atenuación introducida por una chapa de 1 mm de grosor de este material es ahora 32.3 dB, que comienza a ser una atenuación moderada, y en todo caso, muy superior a la del cobre. Por esta razón las cajas que se utilizan para apantallar circuitos electrónicos



suelen ser de hierro dulce o, aún mejor, de materiales con permeabilidad mayor a base de hierro, cobalto y níquel.

## EJERCICIOS

4.1.- Un electrón libre que forma parte de un medio material está sometido a la acción de un campo eléctrico  $\bar{E}(t) = E_c e^{j\omega t}$ . La dinámica del electrón se resume en su movilidad,  $-\mu_e$ , que relaciona su velocidad media con el campo eléctrico aplicado:  $\bar{v}(t) = -\mu_e \bar{E}(t)$ . Supongamos que en la posición central de la trayectoria del electrón, y un poco apartada para que no estorbe, hay una carga positiva inmóvil (ión) de carga eléctrica  $lel$ .

a) Calcular el momento dipolar del sistema electrón-ión:

$$\bar{p}_e(t) = \bar{p}_{ec} e^{j\omega t}$$

b) Si en el medio material hay  $N$  electrones libres por  $m^3$ , calcular la polarización del medio y demostrar que vale:

$$\bar{P}_{cond}(t) = \bar{P}_{condc} e^{j\omega t} = -j \frac{\sigma}{\omega} \bar{E}_c e^{j\omega t}$$

4.2.- La atenuación de la atmósfera moderadamente húmeda (7.5 gr de H<sub>2</sub>O por m<sup>3</sup>) al nivel del mar y a la frecuencia de 22.235 GHz es de 0.25 dB/km. Calcular la tangente de pérdidas del aire en esas condiciones y a la frecuencia dada.

4.3- Una onda plana uniforme de frecuencia 5000 MHz y polarizada circularmente (sin precisar el sentido de giro del campo eléctrico) se propaga en el vacío según la dirección "y". La amplitud del campo eléctrico de la onda es de 100  $\mu$ V/m.

a) Escriba las expresiones de  $\bar{E}_c(\bar{r})$ ,  $\bar{H}(\bar{r}, t)$ .

b) Calcule la potencia media que atravesará un trozo de superficie plana de 2,6 m<sup>2</sup> con vector normal  $\hat{n} = (\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z})/\sqrt{6}$ .

c) Si el medio pasa a tener  $\epsilon_r = 2.2$ , ¿cómo varían  $\bar{H}(\bar{r}, t)$  y la potencia calculada en b)?

d) Si el medio tiene pérdidas de polarización tales que  $\epsilon_{rc} = 2.2 (1 - j 0.75)$  vuelva a escribir la expresión general de  $\bar{E}_c(\bar{r})$ .

e) En las condiciones de d), calcule la potencia disipada por unidad de volumen en el plano  $y = 10$  m.

f) Si además de las pérdidas de polarización dadas en d) el medio tiene conductividad  $\sigma = 0,30$  S/m, calcule la tangente de pérdidas total del medio.

g) Volviendo a a), calcule la expresión precisa del campo eléctrico complejo si la polarización de la onda es positiva (giro del campo eléctrico en sentido positivo, antihorario, visto por un observador que recibe la onda de frente).

4.4.- El agua de mar se comporta, a frecuencias no muy elevadas ( $f < 1$  GHz), como un dieléctrico de permitividad  $\epsilon_r = 81$  y conductividad (por la concentración de sales)  $\sigma = 1.0$  S/m.

a) Calcule la expresión general (sin aproximaciones) de la constante de propagación compleja  $jk_c$  en función de la frecuencia.

b) Calcule la atenuación en dB que experimenta una onda plana de 1 MHz en una distancia de 20 m (profundidad razonable para un submarino). ¿En qué margen de frecuencias habría que transmitir señales de radio si se requiere que la atenuación producida por el agua no exceda de 40 dB?

c) ¿Cual sería la atenuación en la misma distancia a la frecuencia de 100 GHz si los parámetros del agua ( $\epsilon_r$ ,  $\sigma$ ) no hubieran cambiado de valor?

4.5.- El campo eléctrico de una onda plana uniforme viene dado por la expresión:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = (10\hat{x} + 5\hat{y}) \exp[j(6.28 \times 10^8 t - 3.97z)] \text{ V/m}$$

a) Calcular la longitud de onda, la permitividad relativa del medio en que se propaga y la dirección de propagación ( $\mu = \mu_0$ ).

b) Escribir la expresión del campo magnético.

c) Calcular la densidad de potencia que transporta la onda en cada instante.

d) Si el medio pasa a tener unas pérdidas dadas por  $\tan \delta = 0.015$ , calcular la atenuación que sufre la onda (en dB) en una distancia de 30 m.

e) Si, en lugar de lo indicado en d), las pérdidas estuvieran producidas por una conductividad  $\sigma = 5.5 \times 10^{-3}$  S/m, calcular las constantes de atenuación (en dB) y de fase. (Sugerencia: no realice aproximaciones al calcular)

(En todos los casos, indique las unidades).

4.6.- Una onda plana de 10 MHz se propaga en un medio material que es ligeramente conductor. Se observa que el desfase producido en la dirección de propagación de la onda es de  $23^\circ$  por metro, y que la atenuación es de 0.10 dB/m. Calcular:

a) La constante dieléctrica relativa del medio (se supone  $\mu = \mu_0$ ).

b) Su conductividad  $\sigma$ .

c) La fracción de potencia disipada en el medio por unidad de volumen (es decir, potencia disipada por unidad de volumen dividida por la densidad de flujo de potencia incidente). Indique claramente las unidades.

4.7.- a) Escriba las expresiones del campo eléctrico y el campo magnético de una onda plana uniforme que se propaga en el interior de un buen conductor.

## §5. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS

---

### 1. INCIDENCIA DE UNA ONDA PLANA SOBRE UN PLANO CONDUCTOR

En éste y los siguientes párrafos nos ocuparemos de la incidencia de ondas planas uniformes sobre discontinuidades dieléctrico/conductor y dieléctrico/dieléctrico, tal como cuando una onda de radio incide sobre la superficie de la tierra (que es moderadamente conductora) o atraviesa una pared o un cristal; o cuando una onda de luz se refleja en una superficie conductora (que entonces se llama espejo) o atraviesa un material transparente con superficies de forma esférica (que se llama lente). Esto nos obliga en primer lugar a estudiar la propagación de ondas planas en una dirección que no coincida con ninguno de los ejes de coordenadas (que pueden estar fijados por la situación de las superficies conductoras o dieléctricas).

#### 1.1. PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS SEGÚN UNA DIRECCIÓN ARBITRARIA

Hasta ahora hemos considerado el caso analíticamente sencillo en que la dirección de propagación de la onda coincidía con uno de los ejes de coordenadas (el eje  $z$ ) y escribíamos

$$\bar{E}(\bar{r}) = \hat{x} E_{0x} e^{-jkz} = \bar{E}_0 e^{-jkz}$$

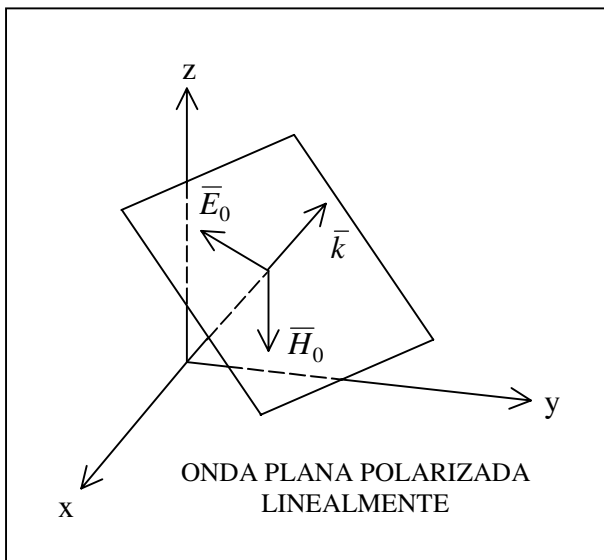
$$\bar{H}(\bar{r}) = \hat{y} \frac{E_{0x}}{\eta} e^{-jkz} = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \bar{E}_0 e^{-jkz}$$

Nótese que  $\bar{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$  y por tanto  $z = \bar{r} \cdot \hat{z}$ ,  $kz = k \hat{z} \cdot \bar{r}$ .

En este momento definimos el **vector de onda**  $\vec{k}$  como un **vector de módulo**  $|\vec{k}| = k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$  **y dirección la de propagación de la onda**. En nuestro caso  $\vec{k} = k \hat{z}$ , por tanto  $kz = \vec{k} \cdot \vec{r}$  y podemos volver a escribir los campos de la onda de la forma más general:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{k\eta} \vec{k} \times \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E}(\vec{r})$$



Escritos de esta forma más general, los campos describen una onda plana que se propaga según la dirección de  $\vec{k}$  (que no ha de ser necesariamente  $\hat{z}$ ) sin más precaución que recordar que  $\vec{E}_0$  y la dirección de propagación  $\vec{k}$  han de ser perpendiculares,

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$$

Figura 5.1.- Onda plana que se propaga según una dirección arbitraria.

Nótese que el factor de fase se escribe, con más detalle:

$$e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

ya que  $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$ ; además:

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon = \frac{\omega^2}{v^2}$$

Nótese que escribimos  $v$  en lugar de  $c$  ya que consideramos ondas que no se propagan necesariamente en el vacío (o en el aire), sino en un medio material.

### EJEMPLO

Se trata de escribir los campos de una onda plana uniforme que se propaga según una dirección que forma  $30^\circ$  con el eje  $\hat{z}$  y está contenida en el plano  $\phi = 45^\circ$  ( $\phi =$  acimut). La onda está polarizada linealmente con  $\bar{E}_0$  horizontal (contenido en un plano paralelo). De manera que:

$$k_z = k \cos \theta = k \cos 30^\circ = k \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi = k \sin 30^\circ \cos 45^\circ = k \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k_y = k \sin \theta \sin \phi = k \sin 30^\circ \sin 45^\circ = k \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por otra parte

$$\bar{E}_0 = E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y}, \quad \bar{k} \cdot \bar{E}_0 = k \left( E_{0x} \frac{\sqrt{2}}{4} + E_{0y} \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 0 \rightarrow E_{0y} = -E_{0x}$$

Por tanto

$$\bar{E} = E_{0x} (\hat{x} - \hat{y}) e^{-jk \left( \frac{\sqrt{2}}{4} x + \frac{\sqrt{2}}{4} y + \frac{\sqrt{3}}{2} z \right)}$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\omega \mu} E_{0x} \bar{k} \times (\hat{x} - \hat{y}) e^{-jk \left( \frac{\sqrt{2}}{4} x + \frac{\sqrt{2}}{4} y + \frac{\sqrt{3}}{2} z \right)}$$

Para terminar,  $\bar{k} \times (\hat{x} - \hat{y}) = (k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}) \times (\hat{x} - \hat{y}) = -k_x \hat{z} - k_y \hat{z} + k_z \hat{y} + k_z \hat{x} =$

$$= k \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} - \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z} \right)$$

Con lo cual los campos quedan completamente determinados.

## 1.2. ANÁLISIS DE LA INCIDENCIA

El problema que nos ocupa es el de una onda plana uniforme que se propaga en un medio dieléctrico e incide sobre la superficie plana e infinita de un medio conductor. Deseamos averiguar como afecta la presencia de esta superficie plana conductora (o plano conductor) a la distribución electromagnética en el medio dieléctrico.

En este momento conviene definir, para una onda arbitraria (esférica, plana, cilíndrica o de otra geometría cualquiera) el concepto de **rayos** como líneas que, en cada punto del espacio son tangentes a la dirección de propagación en el punto, es decir, tangentes al vector de onda en cada punto. De manera que, para una onda esférica, los rayos son líneas rectas que pasan por el origen (donde se supone al elemento generador de la onda) y para una onda plana son rectas paralelas a la dirección de propagación.

Para caracterizar la incidencia geoméricamente, definimos el **plano de incidencia** que pasa por un punto  $P$  del espacio donde existe la onda como el definido por las dos rectas siguientes (fig. 5.2):

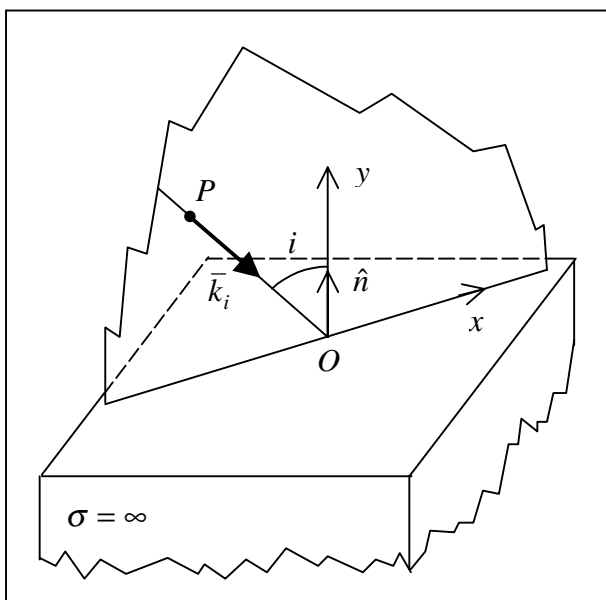


Figura 5.2.- Definición del plano de incidencia de una onda.

- 1) El rayo que pasa por  $P$  (que tiene la dirección de propagación de la onda incidente, es decir, la de  $\vec{k}_i$ ).
- 2) la normal a la superficie trazada en el punto o donde el rayo corta a la superficie conductora.

El plano de incidencia así definido es normal a la superficie y es paralelo a cualquier otro plano de incidencia que pase por otro punto arbitrario.

Para simplificar el álgebra, supondremos que el plano de incidencia está orientado según el plano XY y la superficie conductora según el plano XZ (fig. 5.2).

Desde el punto de vista físico, el plano conductor ideal ( $\sigma = \infty$ ) impide que la onda penetre en el semiespacio inferior, y la potencia que transporta la onda incidente debe ser de alguna manera devuelta o reflejada hacia el espacio superior. El problema de cómo es esta onda reflejada puede resolverse por el **método de imágenes** si suponemos que la onda plana incidente, en la zona de interés, está producida por un elemento de corriente o dipolo suficientemente alejado (figura 5.3). La situación es la misma que si, en ausencia del conductor, hubiese un elemento de corriente **imagen** del original.

Por tanto, en la zona de observación (donde hemos situado, por conveniencia, el origen de los ejes  $x$ - $y$ ,  $O$ ) además de la onda plana incidente habrá una onda plana **reflejada**, simétrica de la anterior, con vector de onda  $\bar{k}_r$  tal que:

- a) El vector  $\bar{k}_r$  también está contenido en el plano de incidencia, como  $\bar{k}_i$ .
- b) El **ángulo de reflexión**  $r$ , formado por  $\bar{k}_r$  y la normal a la superficie, es igual al **ángulo de incidencia**  $i$ , formado por  $\bar{k}_i$  y la normal a la superficie.

Además, como la frecuencia de la onda reflejada es igual a la de la onda incidente:

$$k_i = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = k_r \equiv k$$

Por tanto (ver figura 5.3), si  $\bar{k}_i = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$  (con  $k_y < 0$  en la figura)

$$\rightarrow \bar{k}_r = k_x \hat{x} - k_y \hat{y}$$

De manera que la situación electromagnética total en el semiespacio superior,  $y > 0$ , es la suma de la onda incidente más la onda reflejada:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_i(\vec{r}) + \vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{E}_{0i} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \vec{E}_{0r} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}}$$

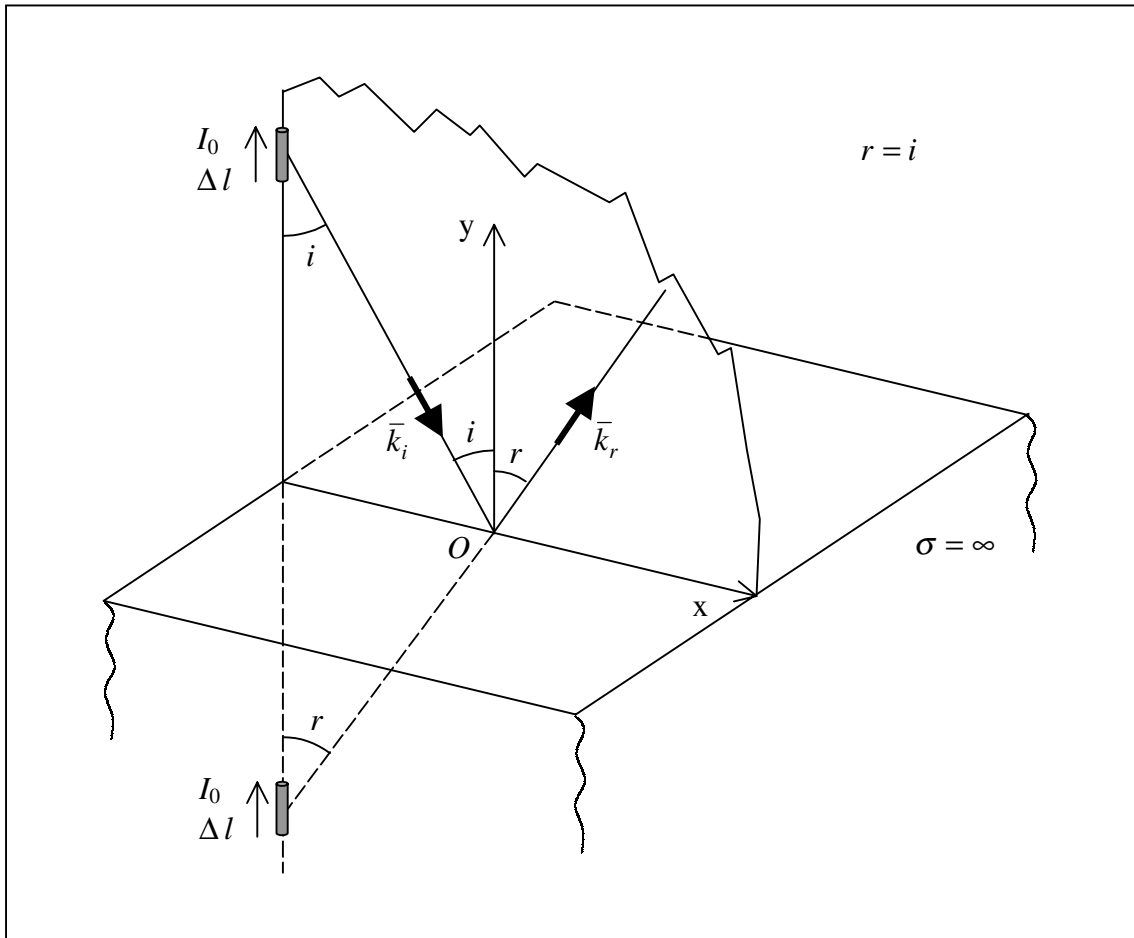


Figura 5.3.- Aplicación del método de imágenes a la resolución del problema de una onda plana incidente sobre un plano conductor ideal ( $\sigma = \infty$ ). Se supone que el elemento que produce la onda ( $I_0, \Delta l$ ) está **arbitrariamente alejado**. En la figura se ha dibujado vertical pero **su dirección puede ser arbitraria**.

con  $E_{0r}$  tal que:

- $E_{0r} = E_{0i}$  (igual distancia desde la zona de interés al elemento radiante original y a su imagen, ambos arbitrariamente alejados).
- Las **componentes del campo eléctrico total tangentes a la superficie del conductor se anulan:**

$$E_x(x, 0, z) = E_z(x, 0, z) \equiv 0$$



EJEMPLO 1

Supongamos que la onda incidente está polarizada linealmente con  $\vec{E}_{0i}$  en dirección **normal** al plano de incidencia (plano  $xy$ ), de manera que  $\vec{E}_{0i} = E_{0i} \hat{z}$ . Eso quiere decir que el elemento radiante original, que supondremos produce la onda, tiene la dirección, por ejemplo, del eje  $z^1$ , y también la tendrá (con sentido contrario) el elemento radiante imagen. Por tanto (figura 5.4)

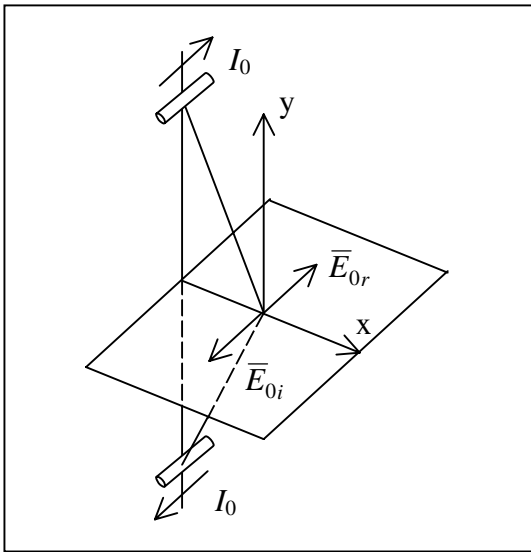


Figura 5.4.- Incidencia con campo eléctrico normal al plano de incidencia. Planteamiento por el método de imágenes.

$$\vec{E}_{0r} = -E_{0i} \hat{z}$$

De manera que el campo eléctrico total vale

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= E_{0i} \hat{z} \left( e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} - e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \right) = \\ &= E_{0i} \hat{z} \left( e^{-jk_x x - jk_y y} - e^{-jk_x x + jk_y y} \right) = \\ &= \hat{z} E_{0i} e^{-jk_x x} \left( e^{-jk_y y} - e^{jk_y y} \right) = \\ &= \hat{z} E_{0i} (-2j) e^{-jk_x x} \sin(k_y y) \end{aligned}$$

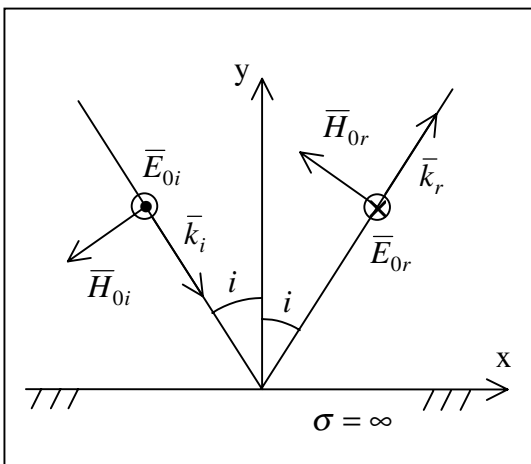


Figura 5.5.- El mismo problema anterior visto en la zona de interés.

Se comprueba que en la superficie del conductor ( $y = 0$ )

$$E_z(x, 0, z) \equiv 0$$

Es decir, el campo eléctrico tangente al conductor se anula.

<sup>1</sup> El lector puede comprobar que hay otras orientaciones posibles compatibles con la dirección de  $E$ .

## EJEMPLO 2

Una estación de TV transmite a  $f = 600$  MHz ( $\lambda = 50$  cm) con polarización horizontal. Un instalador de antenas recibe la señal de esta emisora situado sobre una terraza suficientemente grande que está recubierta de chapa de zinc, que es un buen conductor. El instalador mide  $\bar{E}$  con un medidor de campo y se desconcierta porque el valor del campo eléctrico cambia acusadamente según suba o baje el medidor. ¿Qué está pasando? (Dato: El instalador ve la antena transmisora de manera que la visual forma un ángulo de  $15^\circ$  con el plano horizontal).

Solución:

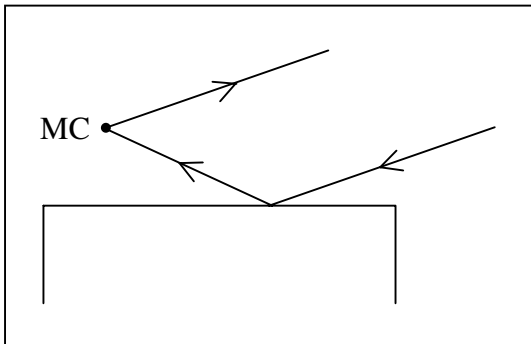


Figura 5.6.- Terraza bajo estudio en el ejemplo 2.

Si la terraza es suficientemente grande comparada con las dimensiones de la zona donde se mueve el instalador, en primera aproximación aquella puede reemplazarse por un plano conductor infinito, y el problema es **el mismo del ejemplo 1**. De manera que si situamos el origen de coordenadas en la vertical del medidor,  $x = 0$  y el campo eléctrico vale:

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\hat{z} 2 j \sin(k_y y) E_{0i} = E(\bar{r}) \hat{z}$$

(recuérdese que  $\hat{z}$  en este problema es una dirección horizontal). Además (ver figura 5.5):

$$k_y = -k \cos i \quad , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$i = 90 - 15 = 75^\circ \quad , \quad k_y = -3.25 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

Por tanto el módulo del campo eléctrico vale:  $|E(\bar{r})| = 2 |\sin(3.25 y)| |E_{0i}|$ , donde  $y$  es la altura sobre la terraza.

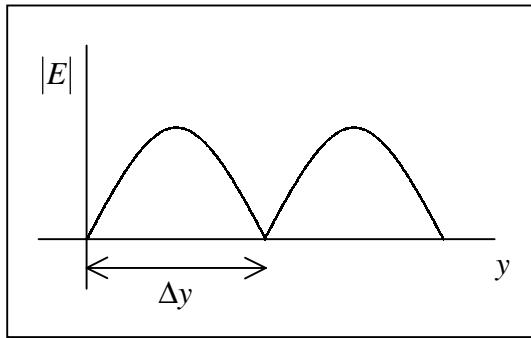


Figura 5.7.- Módulo del campo eléctrico en función de la altura (ejemplo 2)

De manera que al subir el medidor de campo la medida fluctúa periódicamente entre cero y  $|E_{0i}|$ , con una distancia entre ceros de valor  $\Delta y$  dado por:

$$3.25 \Delta y = \pi, \quad \Delta y = 0.96 \text{ m}$$

El instalador debería, por tanto, tener cuidado de situar la antena en un máximo de campo eléctrico, es decir, en una altura  $h$ :

$$h = 0.48 + n \times 0.96 \text{ m} \quad , \quad \text{con } n = n^\circ \text{ entero}$$

EJEMPLO 3

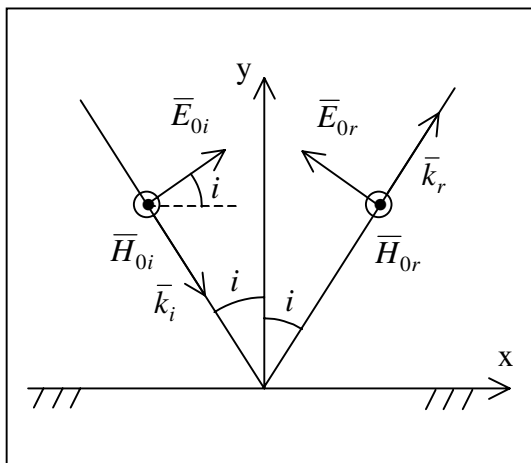


Figura 5.8.- Incidencia con campo eléctrico contenido en el plano de incidencia (ej. 3)

Si la onda incidente está polarizada linealmente con  $\vec{E}_{0i}$  contenido en el plano de incidencia quiere decir que el elemento radiante original (y, por tanto, también el imagen) tiene orientación, por ejemplo, vertical, tal como está dibujado en la figura 5.3 (hay mas posibilidades que ésta). Por tanto es fácil de ver que  $\vec{E}_{0r}$  también está contenido en el plano de incidencia, tal como se dibuja en la figura 5.8.

(Nótese que en la superficie del conductor el campo eléctrico total ha de ser normal).

Por tanto

$$\vec{E}_{0i} = E_{0i} \cos i \hat{x} + E_{0i} \sin i \hat{y} \qquad \vec{E}_{0r} = -E_{0i} \cos i \hat{x} + E_{0i} \sin i \hat{y}$$

y podríamos escribir el campo total como en el ejemplo 1. (Fin del ejemplo)

Finalmente, si la onda tiene polarización lineal con dirección arbitraria, el campo eléctrico siempre puede descomponerse en una parte **contenida** en el plano de incidencia y otra parte **perpendicular** al plano de incidencia ( $E_{0i}^{\parallel}$  y  $E_{0i}^{\perp}$  respectivamente) de la forma siguiente:

$$\vec{E}_{0i} = E_{0i}^{\perp} \hat{z} + E_{0i}^{\parallel} \cos i \hat{x} + E_{0i}^{\parallel} \sin i \hat{y} \quad , \quad |E_{0i}|^2 = |E_{0i}^{\parallel}|^2 + |E_{0i}^{\perp}|^2$$

y a partir de aquí el problema se descompone en dos partes: la correspondiente a  $E_{0i}^{\parallel}$  y la correspondiente a  $E_{0i}^{\perp}$ . La solución del problema original es, por tanto, la superposición de las soluciones de los dos subproblemas parciales.

## 2. INCIDENCIA DE UNA ONDA PLANA SOBRE UN DIELECTRICO PLANO

Imaginemos ahora que el espacio está ocupado por dos materiales dieléctricos diferentes separados por una superficie plana (infinita, evidentemente). En casos concretos uno de los semiespacios puede estar vacío u ocupado por aire, que hemos visto que para las ondas se comporta prácticamente como el vacío. Cuando una onda plana uniforme incide desde un medio sobre el otro no podemos utilizar la simplicidad de resolución que aporta el método de imágenes, ya que no hay planos conductores implicados en el problema.

Por otra parte, la intuición y la experiencia del caso del plano conductor nos dicen que se producirán una onda reflejada junto con otra que se transmite al interior del otro medio dieléctrico y se propaga en él. Para averiguar más sobre las características de estas ondas es necesario que primero veamos:

## 2.1. CÓMO CAMBIAN $\bar{E}$ Y $\bar{H}$ AL PASAR DE UN MEDIO DIELÉCTRICO A OTRO

Recordemos en primer lugar que, en una región del espacio o dentro de un medio material donde no haya cargas puntuales ni hilos de corriente, **los campos eléctrico y magnético son continuos**; es decir, los valores que toman en puntos arbitrariamente próximos son también arbitrariamente próximos. La razón de excluir cargas puntuales e hilos de corriente es para evitar los valores infinitos que toman los campos cuando nos acercamos a la carga o al hilo.

Sin embargo, como las propiedades de los materiales cambian bruscamente cuando pasamos de uno a otro (discontinuidad de salto) es necesario replantearse la continuidad de los campos.

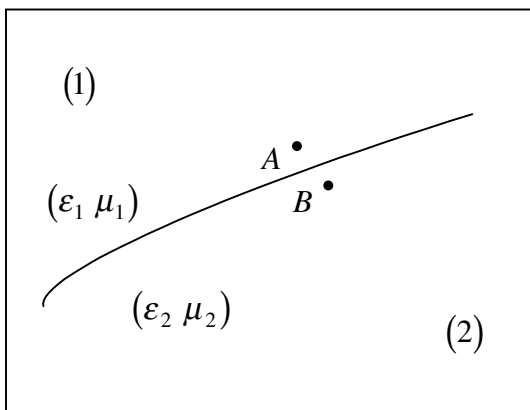


Figura 5.9.- Puntos arbitrariamente próximos en dieléctricos diferentes.

En concreto, consideremos dos medios dieléctricos caracterizados por  $(\epsilon_1 \mu_1)$  y  $(\epsilon_2 \mu_2)$ , y dos puntos  $A$  y  $B$  arbitrariamente próximos a la superficie de separación y entre sí (fig. 5.9). Como  $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ ,  $\bar{B} = \mu \bar{H}$  y  $\epsilon$  y  $\mu$  son discontinuos al pasar de  $A$  a  $B$  **cabe esperar que los vectores  $\bar{D}$ ,  $\bar{E}$ ,  $\bar{B}$  y  $\bar{H}$  también sean discontinuos.**

Sin embargo:

**LAS COMPONENTES DE  $\bar{E}$  Y  $\bar{H}$  TANGENTES A LA SUPERFICIE SON CONTÍNUAS AL ATRAVESAR ÉSTA**

La justificación rigurosa de esta propiedad es laboriosa y la omitimos. Pero indicamos a continuación un argumento que la hace más inteligible y fácil de recordar: El flujo de potencia normal a la superficie en cada instante ha de conservarse al pasar de  $A$  a  $B$ , ya que ésta no puede almacenarla (una superficie carece de volumen), ni disiparla

(suponemos los dieléctricos ideales y no hay corrientes), ni generarla. Por tanto, en cada instante ha de cumplirse que:

$$\bar{S}_n(A;t) = \bar{S}_n(B;t) \quad (n \rightarrow \text{normal a la superficie})$$

Calculemos cuanto vale esta componente normal del vector de Poynting instantáneo; para ello descomponemos los vectores E y H en sus componentes normales y tangenciales a la superficie (subíndices *n* y *tan*, respectivamente):

$$\begin{aligned} \bar{S}(A;t) &= [\bar{E}_n(A;t) + \bar{E}_{tan}(A;t)] \times [\bar{H}_n(A;t) + \bar{H}_{tan}(A;t)] = \\ &= \underbrace{\bar{E}_n(A;t) \times \bar{H}_{tan}(A;t)}_{\text{vector tangencial}} + \underbrace{\bar{E}_{tan}(A;t) \times \bar{H}_n(A;t)}_{\text{vector tangencial}} + \underbrace{\bar{E}_{tan}(A;t) \times \bar{H}_{tan}(A;t)}_{\text{vector normal}} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\bar{S}_n(A;t) = \bar{S}_n(B;t) \rightarrow$$

$$\bar{E}_{tan}(A;t) \times \bar{H}_{tan}(A;t) = \bar{E}_{tan}(B;t) \times \bar{H}_{tan}(B;t)$$

Esta condición queda garantizada con la continuidad de las componentes tangenciales (es una condición suficiente), aunque evidentemente el razonamiento anterior no es una demostración (no se justifica que la condición sea necesaria).

## 2.2. ANÁLISIS DE LA INCIDENCIA

Volvamos al problema de incidencia de una onda plana desde un medio ( $\epsilon_1 \mu_1$ ) a un medio ( $\epsilon_2 \mu_2$ ). Orientamos los ejes de manera que la superficie de separación coincida con el plano XZ (fig. 5.10). Con la información preliminar que tenemos sobre el proceso postulamos la aparición de una onda reflejada en el medio 1 ( $y > 0$ ):

$$\bar{E}_r(\bar{r}) = \bar{E}_{0r} e^{-j\bar{k}_r \cdot \bar{r}},$$

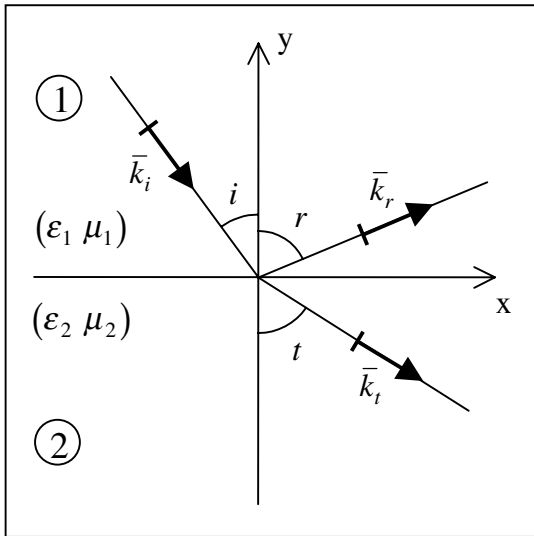


Figura 5.10.- Situación de partida con una onda reflejada y otra transmitida.

y de una onda transmitida en el medio 2 ( $y < 0$ ):

$$\bar{E}_t(\bar{r}) = \bar{E}_{0t} e^{-jk_t \cdot \bar{r}}$$

Por analogía con el caso de reflexión en una superficie conductora y por la simetría que presenta el problema con relación al plano de incidencia (la mitad que queda a un lado es idéntica con la que queda al otro),  $\bar{k}_r$  y  $\bar{k}_t$  **también estarán contenidos en el plano de incidencia** (que es el plano del

papel en la figura 5.10), ya que no hay ninguna razón por la que hayan de inclinarse hacia uno de los lados en lugar de hacerlo hacia el otro. Es decir,

$$\bar{k}_r \in P.I. \quad , \quad \bar{k}_t \in P.I. \quad ; \quad \begin{cases} \bar{k}_r = k_{rx} \hat{x} + k_{ry} \hat{y} \\ \bar{k}_t = k_{tx} \hat{x} + k_{ty} \hat{y} \end{cases}$$

Además

$$k_r^2 = k_i^2 = \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 \equiv k_1^2, \quad k_t^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 = k_2^2,$$

pero por el momento son desconocidos  $\bar{E}_{0r}$ ,  $\bar{E}_{0t}$  y los ángulos de **reflexión**  $r$  (formado por  $\bar{k}_r$  y la normal a la superficie) y de **refracción**  $t$  (formado por  $\bar{k}_t$  y la normal). A la onda transmitida también suele llamársela **onda refractada**. Estas magnitudes desconocidas han de ser tales que las componentes tangenciales de  $\bar{E}$  y  $\bar{H}$  sean continuas en todos los puntos de la superficie,  $y=0$ . De manera que si:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E}_1(\bar{r}) = \bar{E}_i(\bar{r}) + \bar{E}_r(\bar{r}) \quad \text{en (1)} \quad (y > 0) \\ \bar{E}_2(\bar{r}) = \bar{E}_t(\bar{r}) \quad \quad \quad \text{en (2)} \quad (y < 0) \end{array} \right\} \rightarrow E_{ix}(\bar{r}) + E_{rx}(\bar{r}) = E_{tx}(\bar{r}) \quad (y = 0)$$

y lo mismo para la componente z. Es decir:

$$E_{0ix} e^{-jk_{ix}x} + E_{0rx} e^{-jk_{rx}x} = E_{0tx} e^{-jk_{tx}x}$$

Si la ecuación anterior ha de cumplirse **para todos los posibles valores de x** las dependencias con x de los tres términos han de ser iguales:

$$e^{-jk_{ix}x} = e^{-jk_{rx}x} = e^{-jk_{tx}x} \rightarrow k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} \rightarrow k_1 \sin i = k_1 \sin r = k_2 \sin t$$

Nótese que esta condición es equivalente a decir las tres ondas (incidente, reflejada y transmitida) tienen la misma fase (o, también se dice, están en fase) en todos los puntos de la superficie de separación entre los dieléctricos

De manera que:

$$\boxed{i = r} \quad \text{“El ángulo de reflexión es igual al de incidencia”}$$

$$\boxed{\frac{1}{v_1} \sin i = \frac{1}{v_2} \sin t} \quad \text{“Ley de Snell de la refracción”}$$

Como  $1/v = \sqrt{\mu \epsilon}$  y normalmente  $\mu = \mu_0$  la ley de Snell también puede escribirse como:

$$\boxed{\sqrt{\epsilon_{r1}} \sin i = \sqrt{\epsilon_{r2}} \sin t \quad \text{ó} \quad n_1 \sin i = n_2 \sin t}$$

donde hemos definido  $\sqrt{\epsilon_r} = n$  como el “índice de refracción del medio”, que coincide con el cociente entre la velocidad de la luz (o velocidad de las ondas electromagnéticas) en el vacío y la velocidad de la luz en el medio:

$$n = \frac{c \text{ (en vacío)}}{v \text{ (en medio)}} = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r} > 1$$



El índice de refracción de un medio es un número que nunca es menor que la unidad ya que la velocidad de la luz en el mismo siempre es igual o menor que la misma en el vacío.

Por tanto, la onda transmitida cambia de dirección de propagación con relación a la onda incidente, o, de una manera más gráfica, los rayos cambian de dirección.

EJEMPLO: La cucharilla y el vaso de agua

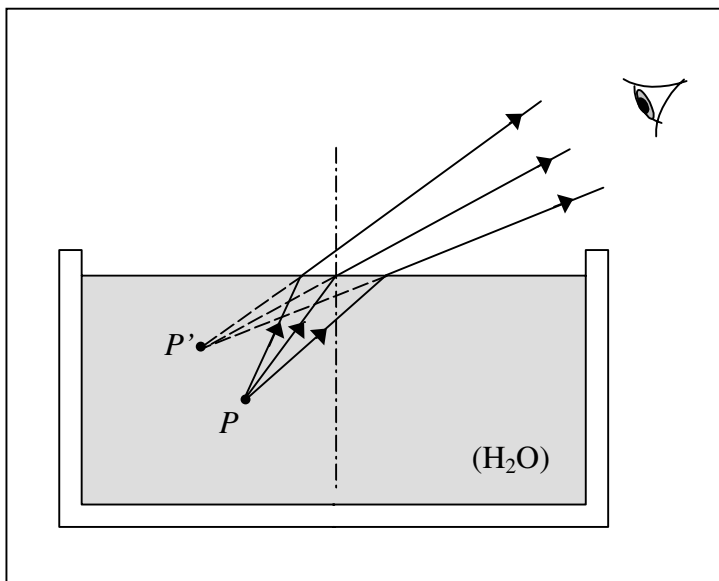


Figura 5.11.- Esquema del cambio aparente de posición de un objeto dentro de agua por efecto de la refracción.

Es bien conocido (aunque por cotidiano suele pasar desapercibido) que una cucharilla o una varilla puesta en un vaso con agua se ve aparentemente doblada al nivel de la superficie del agua; esto es consecuencia de la refracción de la luz que proviene de la parte sumergida al atravesar la superficie agua-aire.

El fenómeno se esquematiza en la figura 5.11, donde, para simplificar, se representa nada más que un punto luminoso P dentro del agua, que un ojo en el aire percibe como un punto P' a una altura superior a la que realmente está.

### 2.3. CÁLCULO DE $\vec{E}_{0r}$ Y $\vec{E}_{0t}$ (ECUACIONES DE FRESNEL)

Para calcular las amplitudes de las ondas reflejada y refractada es necesario, como en el caso de reflexión en un conductor, descomponer el problema en dos casos particulares de polarización.

A) El campo  $\vec{E}_{0i}$  es **perpendicular** al plano de incidencia (figura 5.12).

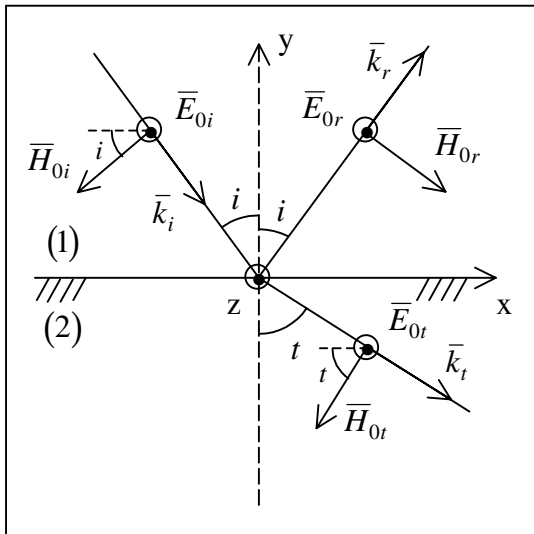


Figura 5.12.- Onda incidente polarizada perpendicularmente al plano de incidencia.

En este caso  $\vec{E}_{0r}$  y  $\vec{E}_{0t}$  también son perpendiculares al plano de incidencia y las condiciones de continuidad de componentes tangenciales de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  proporcionan las siguientes ecuaciones:

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} ;$$

$$-H_{0i} \cos i + H_{0r} \cos i = -H_{0t} \cos t \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \frac{E_{0r}}{\eta_1} - \frac{E_{0i}}{\eta_1} \right) \cos i = -\frac{E_{0t}}{\eta_2} \cos t$$

A partir de estas dos ecuaciones, la ley de Snell y transformaciones trigonométricas sencillas, pero largas, se obtienen los siguientes **coeficientes de transmisión,  $\tau$ , y de reflexión,  $\rho$** :

$$\tau_{\perp} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \Big|_{\perp} = \frac{2 \cos i \sin t}{\sin(i+t)}, \quad \rho_{\perp} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \Big|_{\perp} = -\frac{\sin(i-t)}{\sin(i+t)}$$

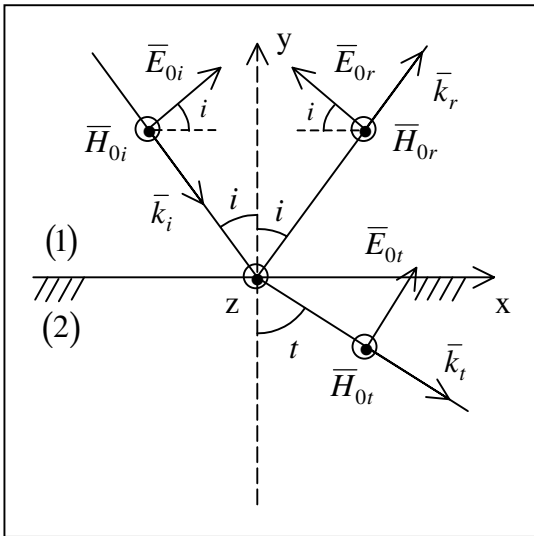
(Ecuaciones de Fresnel, 1ª parte)

B) El campo eléctrico de la onda incidente está **contenido** en el plano de incidencia (figura 5.13).

Ahora resulta que  $\vec{E}_{0r}$  y  $\vec{E}_{0t}$  también están contenidos en el plano de incidencia y sus amplitudes valen:

$$\tau_{\parallel} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \Big|_{\parallel} = \frac{2 \cos i \sin t}{\sin(i+t) \cos(i-t)}, \quad \rho_{\parallel} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \Big|_{\parallel} = \frac{\tan(i-t)}{\tan(i+t)}$$

(Ecuaciones de Fresnel, 2ª parte)



Cualquier situación de **polarización arbitraria** puede descomponerse en la superposición de dos situaciones correspondientes una al caso A y otra al caso B.

En la figura 5.14 se representan estas expresiones para la situación  $n_2/n_1 = 1.5$  (que corresponde aproximadamente con el paso de la luz desde el aire,  $n_1 = 1$ , a un vidrio ordinario, como el de las ventanas).

Figura 5.13.- Onda incidente polarizada en el (o paralelamente al) plano de incidencia.

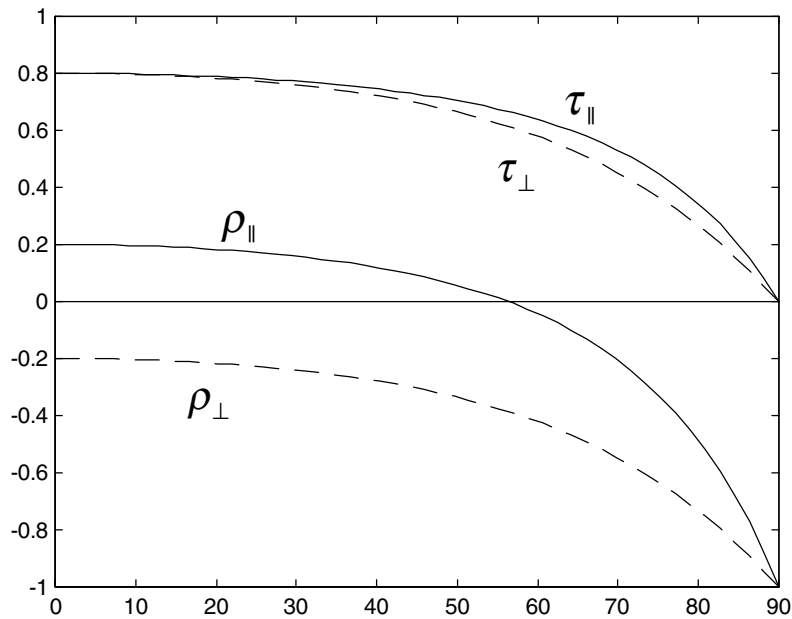
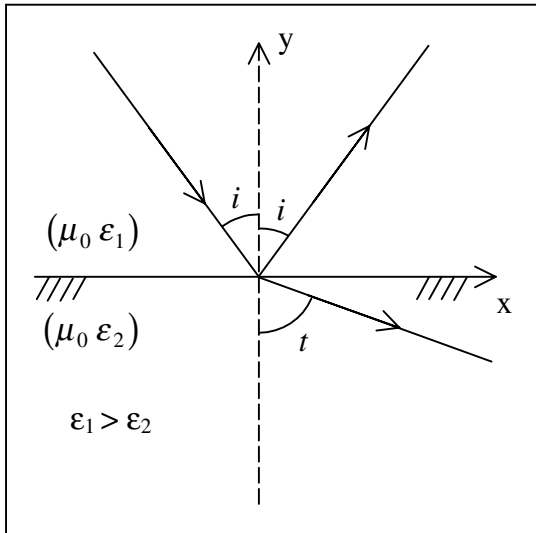


Figura 5.14.- Representación gráfica de las ecuaciones de Fresnel para  $n_2 / n_1 = 1.5$ .

## 2.4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### 2.4.1. Reflexión total



Si el medio 1 es **más denso** (eléctricamente) que el 2, es decir si  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  (o, equivalentemente, si  $n_1 > n_2$ ):

$$\sin t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin i = \frac{n_1}{n_2} \sin i > \sin i$$

y por tanto

$$t > i$$

Figura 5.15.- Situación apta para producir reflexión total.

Si vamos aumentando el ángulo de incidencia  $i$  también lo hará el de refracción  $t$ , que llegará a ser de  $90^\circ$  (onda transmitida propagándose paralelamente a la superficie) para un valor de  $i=i_0$  tal que:

$$\sin 90^\circ = \frac{n_1}{n_2} \sin i_0 \rightarrow \sin i_0 = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

Al ángulo  $i_0$  se le denomina ángulo crítico o de reflexión total ya que, si  $i > i_0$ ,  $\sin t > 1$  y ningún ángulo (real) satisface esta condición. **Cuando el ángulo de incidencia sobrepasa el ángulo crítico no hay onda transmitida**, y por tanto se produce una reflexión total en el sentido de que toda la potencia de la onda incidente la transporta la onda reflejada, y la superficie de separación se comporta como un conductor (espejo).

EJEMPLO 1: Utilización de la reflexión total en prismas.

La figura 5.16 representa la sección de un prisma triangular de vidrio transparente a la luz, con un ángulo de  $90^\circ$  y dos de  $45^\circ$  (prisma de ángulo recto o de Porro), sobre el que

incide perpendicularmente una onda luminosa plana uniforme, de la que solamente se representa un rayo representativo.

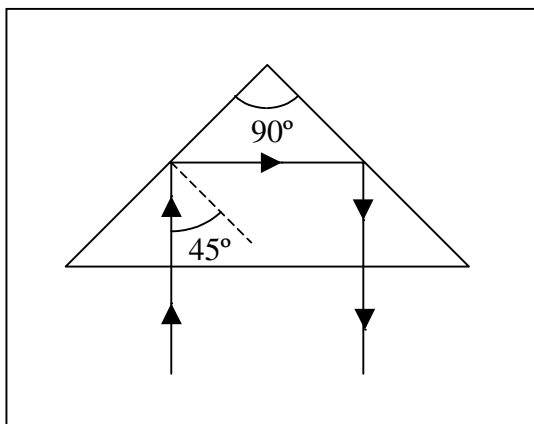


Figura 5.16.- Prisma de Porro o de ángulo recto.

Cuando la onda se refleja en las caras internas del prisma (en su interior) lo hace bajo un ángulo de  $45^\circ$ , que es mayor del que el crítico (para vidrio ordinario,  $n \cong 1.5$ , el ángulo crítico vale  $41.8^\circ$ ), por lo que se producirá reflexión total y estas caras del prisma se comportarán, a efectos de reflexión, como si fueran espejos.

## EJEMPLO 2

El fenómeno de reflexión total no es fácil de observar en la vida cotidiana, ya que normalmente nos desenvolvemos en el aire,  $n = 1.00059$ , y la luz con que nos alumbramos, natural o artificial, también se produce en el aire. Sin embargo, puede observarse fácilmente si disponemos de un reloj impermeable y lo introducimos en agua; si inclinamos el reloj progresivamente llega un momento en que dejamos de ver la esfera. En estos momentos sucede que la luz que refleja la esfera entra en el cristal de reloj, que es una lámina de vidrio de caras paralelas con  $n \cong 1.5$  (de manera que en el paso de la luz del aire al vidrio nunca se produce reflexión total); pero cuando la luz sale del vidrio al agua ( $n = 1,33$ ) sí que puede producirse reflexión total.

(Fin del ejemplo)

Algunos índices de refracción en el margen del espectro visible ( $400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}$ ):

Agua ( $\text{H}_2\text{O}$ ):	1.333
Cristal óptico:	1.46 – 1.96
Cuarzo ( $\text{SiO}_2$ ):	1.54

Diamante (C):	2.42
Rutilo* (TiO <sub>2</sub> ):	2.7

(\*) De aquí viene la palabra “rutilante”.

### 2.4.2. Ángulo de Brewster (o de polarización)

Fijémonos de nuevo en la figura 5.14, que representa los coeficientes de reflexión y transmisión del paso de una onda luminosa del aire al vidrio ordinario. Se observa que el coeficiente de reflexión  $\rho_{\parallel}$  se anula para un cierto ángulo de incidencia, que veremos que en este caso es 57°. Es decir, para este ángulo, y en el caso de polarización paralela al plano de incidencia, no se produce onda reflejada. ¿Es este resultado meramente accidental para este ejemplo? Veremos que no, es un resultado general para dos medios dieléctricos cualesquiera.

Consideremos la fórmula de Fresnel para el caso B ( $\vec{E}$  contenido o paralelo al plano de incidencia):

$$\rho_{\parallel} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \Big|_{\parallel} = \frac{\tan(i - t)}{\tan(i + t)}$$

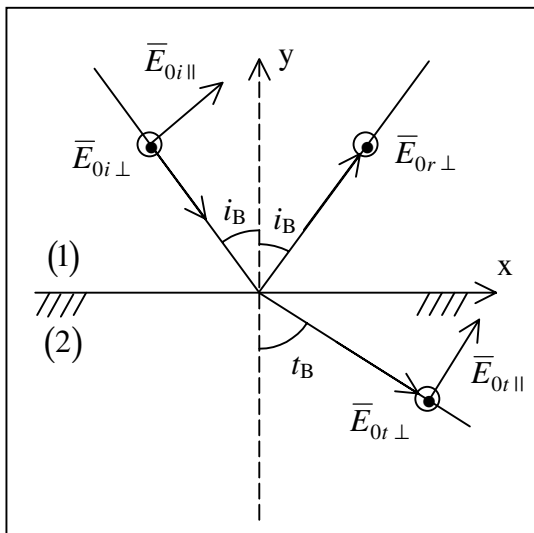


Figura 5.17.- Polarización por reflexión bajo el ángulo de Brewster.

Cuando  $i$  toma un valor  $i = i_B$  tal que  $i_B + t_B = 90^\circ$ , resulta que  $\tan(i_B + t_B) = \infty$  y en consecuencia  $E_{0r} = 0$ : Entonces **no hay onda reflejada**, y toda la energía que incide desde el medio 1 se transmite al medio 2. De forma que, si la onda incidente tiene componentes  $\vec{E}_{0i\perp}$  y  $\vec{E}_{0i\parallel}$  simultáneamente (como sucede con la luz ordinaria) la onda reflejada **está polarizada linealmente** con  $\vec{E}$  perpendicular al plano de incidencia (y por tanto,  $\vec{E}$  paralelo a la superficie reflectora), figura 5.17.

A este ángulo se le llama **de Brewster** y se calcula fácilmente:

$$i_B + t_B = 90^\circ \quad , \quad \sin t_B = \cos i_B$$

$$\frac{\sin i_B}{\sin t_B} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = \tan i_B$$

$$i_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}\right)$$

Por ejemplo, cuando la luz incide sobre vidrio desde el aire, como en el caso de la figura 5.14:

$$n_1 = 1 \quad , \quad n_2 \cong 1.5 \quad , \quad i_B \cong 57^\circ$$

Es interesante repetir la figura 5.14, pero representando los coeficientes de reflexión al cuadrado, que relacionan los valores al cuadrado de los campos eléctricos:

$$(\rho_\perp)^2 = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} \Big|_\perp \quad , \quad etc.$$

De manera que las densidades de flujo de potencia de las ondas reflejada e incidente están relacionadas mediante la expresión:

$$\frac{S_{mr}}{S_{mi}} = \frac{E_{0r}^2}{2\eta_i} \frac{2\eta_i}{E_{0i}^2} = \rho^2 \quad ,$$

dónde el coeficiente de reflexión  $\rho$  es el correspondiente en cada caso de polarización. Los resultados se representan en la fig. 5.17, dónde se puede observar el amplio margen de ángulos (entre  $50^\circ$  y  $60^\circ$ ) para los que se puede considerar que la potencia reflejada para polarización paralela es despreciable comparada con la que se reflejaría de en las mismas condiciones si la polarización fuese perpendicular.

## EJEMPLO: Las gafas Polaroid™

Estas gafas están fabricadas con un material que solo permite el paso de la luz con polarización lineal, y en el caso de las gafas, polarización lineal vertical. Por otra parte, la luz natural (luz del sol) y la artificial normal (bombillas, tubos fluorescentes, lámparas de vapor de mercurio) ‘no está polarizada’; con esto se quiere decir que la luz realmente es la superposición de un número enorme de ondas de diferentes frecuencias y diferentes polarizaciones lineales, de tal manera que en total hay tanta potencia asocia-

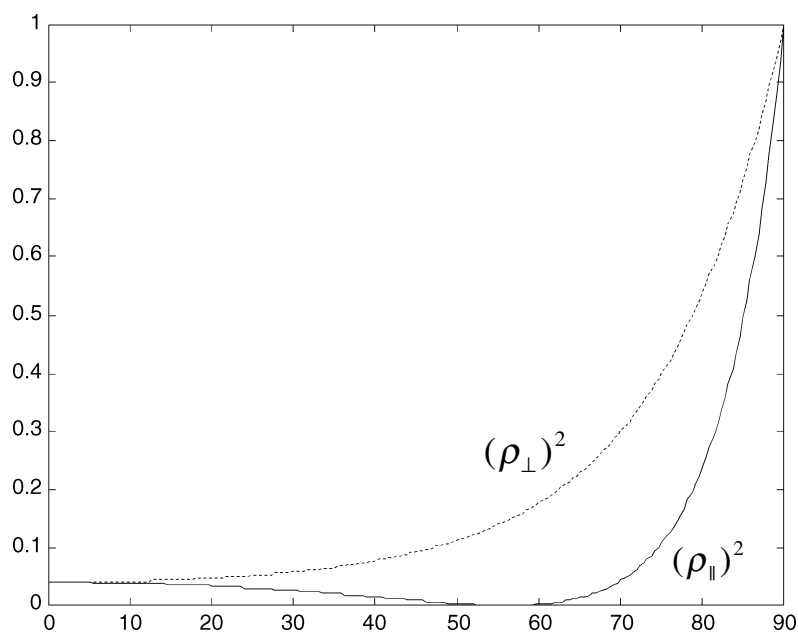


Figura 5.18.- Coeficientes de reflexión al cuadrado en las mismas condiciones de la figura 5.15 (paso de luz aire-vidrio).

da con una cierta dirección de polarización como en la perpendicular. De esta manera, las gafas eliminan las componentes de la luz polarizadas en dirección horizontal, lo que supone que al ojo pasa solamente la mitad de la potencia. Si las gafas son de sol, normalmente esta reducción de luminosidad no es suficiente, y los cristales de las gafas tienen además color oscuro (es decir, atenúan la luz).

Pero veamos que pasa con los reflejos; por ejemplo, el reflejo del sol en la superficie del mar; el ángulo de Brewster para la discontinuidad aire-agua ( $n = 1.33$ ) vale  $53.0^\circ$ , y, tal como hemos visto en el caso de la figura 5.18, existe un amplio margen de ángulos de



incidencia (entre  $25^\circ$  y  $30^\circ$ ) en torno al ángulo de Brewster para los que las ondas reflejadas están prácticamente polarizadas horizontalmente (figura 5.19). Por tanto, si la radiación del sol forma un ángulo de incidencia entre (aproximadamente) 40 y 70 grados, las gafas Polaroid prácticamente eliminan la reflexión brillante que forma en el agua (la eliminan completamente si el ángulo que forma es de  $53^\circ$ ).

Lo anterior también es cierto, con ligeras modificaciones de los ángulos, para las reflexiones del sol en la nieve y en las carreteras.

(Nota; las gafas Polaroid, además de por su uso en deportes marinos y de esquí, son también conocidas por su utilización en la visualización de películas en tres dimensiones. En este caso el plástico que corresponde a cada ojo permite pasar polarización vertical u horizontal, mientras que en la pantalla se proyectan dos imágenes con diferentes polarizaciones. De esta manera las gafas permiten que cada ojo vea la imagen que le corresponde y no vea la correspondiente al otro ojo).

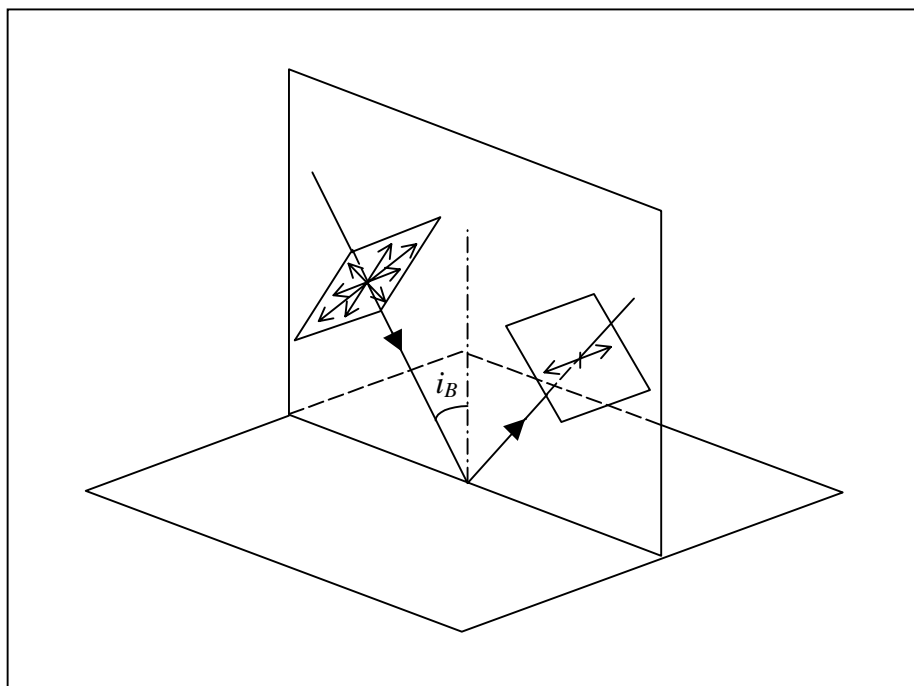


Figura 5.19.- Reflexión de luz no polarizada bajo el ángulo de Brewster o de un valor próximo.

### 3. ALGUNAS GENERALIZACIONES

Hasta ahora estamos hablando de ondas planas y de superficies de separación entre dieléctricos también planas, pero, ¿cómo se reflejan las ondas cuando éstas no son planas (por ejemplo, esféricas) o no son planas las superficies de separación?

Si revisamos lo que hemos hecho, nos daremos cuenta que en el caso de reflexión de una onda en un conductor *plano* (párrafo 1.2) el método de imágenes nos permite calcular la onda reflejada aunque ésta no sea plana; de hecho, el razonamiento en 1.2 se hizo para una onda esférica. Sin embargo, no podemos decir lo mismo en el caso de refracción por un dieléctrico plano, ya que en este caso no hemos podido utilizar el método de imágenes.

No obstante, parece evidente que si la onda se desvía poco de una onda plana y si la superficie también se desvía poco se podrán aplicar los resultados obtenidos anteriormente. La cuestión es definir que se entiende por ‘desviarse poco’; en el caso de ondas la unidad de medida es la longitud de onda, que es la distancia en la que la onda, en su sentido de propagación, cambia en  $360^\circ$ . En consecuencia podemos afirmar que:

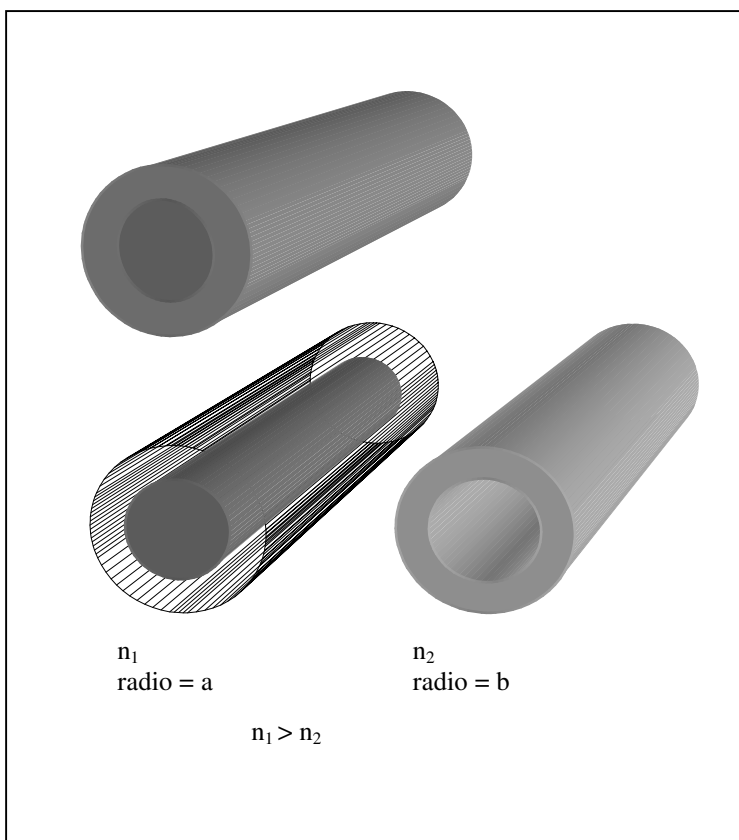
Si en la región de interés los frentes de onda tienen un **radio de curvatura mucho mayor que la longitud de onda**, y si la superficie conductora o de separación entre dieléctricos tiene **un radio de curvatura también mucho mayor que la longitud de onda**, la situación puede aproximarse por los casos ideales de ondas y superficies planas estudiados anteriormente; ley de Snell, ecuaciones de Fresnel, etc.

#### 3.1. EJEMPLO: LA FIBRA ÓPTICA

Una **fibra óptica** es un tubo cilíndrico de material transparente formado por una parte central con índice de refracción  $n_1$ , llamada **núcleo**, y otra exterior, concéntrica con el

núcleo y con índice de refracción  $n_2 < n_1$ , llamada **vaina** (fig. 5.20), de manera que la luz se propaga en el interior del núcleo por reflexiones totales sucesivas en la discontinuidad núcleo-vaina.

El funcionamiento de la fibra puede explicarse si suponemos una fuente luminosa puntual situada en su eje, como en la figura 5.21, que proyecta una onda esférica, representada por los rayos, en el núcleo. **Si las dimensiones de la fibra son suficientemente mayores que la longitud de onda** (típicamente, el núcleo de la fibra tiene un diámetro de entre 30 y 100  $\mu\text{m}$ , y la longitud de onda entre 0,8 y 1,5  $\mu\text{m}$ ) podemos hacer un análisis basado en la ley de Snell: Los rayos se refractan al entrar en el núcleo y se propagan en éste por reflexión en la separación núcleo-vaina. Si esta reflexión es total (para lo que se requiere que el ángulo de incidencia sea mayor que el ángulo crítico), toda la potencia de la onda incidente se conserva dentro del núcleo; en caso contrario parte de ella se filtra a la vaina y de aquí al exterior, con lo cual la potencia se va perdiendo a medida que se propaga por el interior y la fibra presenta una atenuación indeseada por este motivo. De manera que, para que la fibra funcione correc-



tamente, es necesario garantizar que el ángulo de incidencia en la superficie de separación núcleo-vaina sea siempre mayor que el ángulo crítico; con referencia a la figura 5.21, se requiere para todos los rayos que:

$$i' \geq \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}$$

Figura 5.20.- Estructura de una fibra óptica.

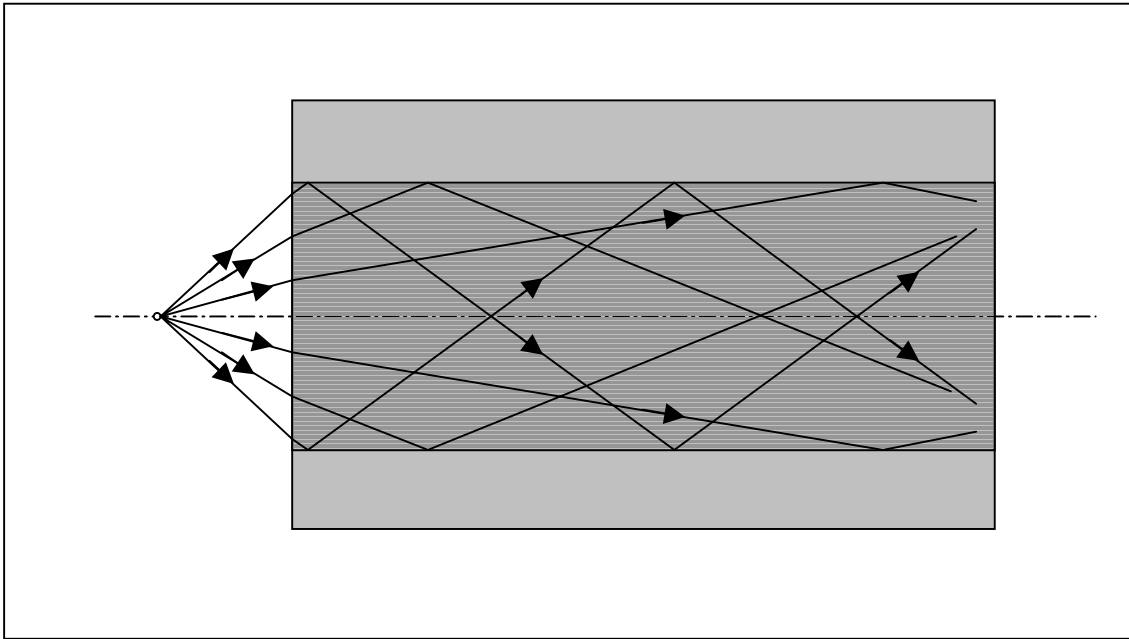


Figura 5.21.- Trayectorias de los rayos producidos por una fuente luminosa puntual situada en el eje de la fibra. Se supone que el comienzo de la fibra es una superficie perfectamente plana y perpendicular al eje de ésta, y que todos los rayos experimentan reflexión total en la vaina.

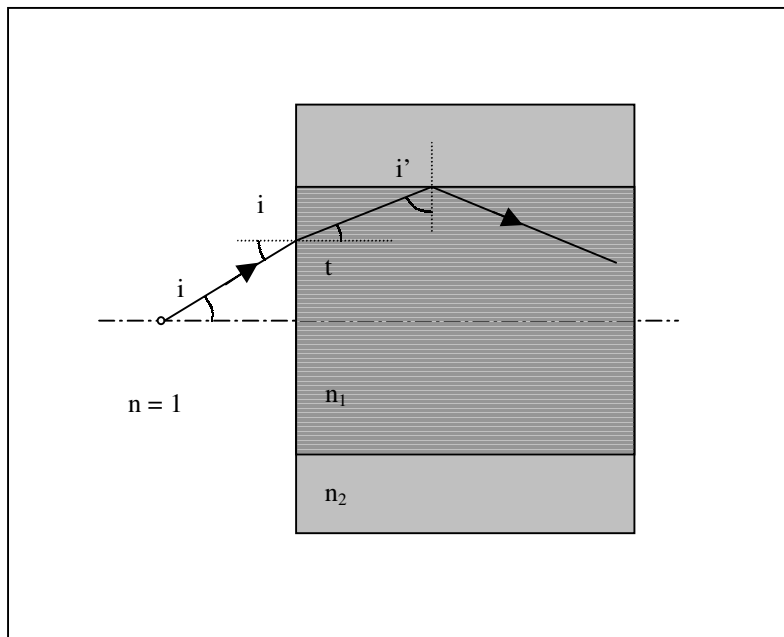


Figura 5.22.- Utilizada para el cálculo de la apertura numérica de la fibra.

### 3.1.1. Apertura numérica (ejercicio)

Se propone al lector demostrar que si el ángulo de incidencia del rayo de entrada en la fibra  $i$  cumple la condición:

$$\sin i \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \equiv NA$$

entonces el rayo siempre incide en la discontinuidad núcleo-vaina en condiciones de reflexión total (fig. 5.22).

A la cantidad calculada en el ejercicio anterior se le llama **apertura numérica** (*numerical aperture*, NA), y el conocimiento de su valor nos permite calcular el ángulo máximo que debe tener el haz que inyectamos en la fibra para que no se pierda potencia.

### EJEMPLO

Si  $n_1 = 1.50$  y  $n_2 = 1.47$  se obtiene  $NA = 0.30$ , y por lo tanto  $i_{\max} = 17.4^\circ$ . De manera que el mayor ángulo de apertura de haz que acepta la fibra es de  $34.8^\circ$ , y todos los rayos que entren formando con el eje un ángulo mayor se terminan perdiendo en el aire al cabo de un número suficiente de reflexiones.

### 3.1.2. Dispersión intermodal

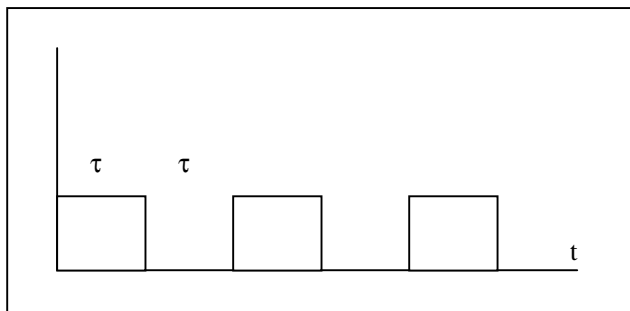


Figura 5.23.- Señal digital supuesta para estudiar la dispersión.

Supongamos que la fuente puntual de la figura 5.21 emite una señal digital formada por pulsos de duración  $\tau$  separados por intervalos de la misma duración (fig. 5.23). Es evidente que, para cada pulso, la potencia asociada con los rayos que tienen la dirección del eje lle-

gan al final de la fibra antes de los que viajan en una dirección oblicua a través de reflexiones con la vaina. Si llamamos  $\Delta t$  a la diferencia de tiempo de tránsito entrada-salida entre el **rayo axial** (según el eje) y el que forma el ángulo mayor posible compatible con la condición de reflexión total (que llamaremos **rayo extremo**) es evidente que al final de la fibra llegan pulsos deformados de duración  $\tau + \Delta t$ . Si bien no

sabemos la forma del pulso que llega, parece razonable suponer que habría que evitar que  $\Delta t$  se hiciera mayor que  $\tau$  para impedir que los pulsos se solapen. Esto pone un límite a la velocidad de transmisión, tal como se plantea en el siguiente ejercicio. (A este tipo de distorsión se le llama intermodal).

## EJERCICIO

Demostrar que, para una fibra de longitud  $L$ ,  $\Delta t$  definido como más arriba toma el valor:

$$\Delta t = \frac{Ln_1}{c} \frac{n_1 - n_2}{n_2},$$

dónde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Verificar que en el caso de que  $|n_1 - n_2| \ll 1$  la expresión anterior también puede escribirse:

$$\Delta t \cong \frac{L(NA)^2}{2n_2c} \cong \frac{L(NA)^2}{2n_1c}$$

Calcular el valor de esta expresión para el caso de la fibra del ejemplo anterior si la fibra tiene una longitud de 10 km.

Para la misma longitud y fibra, calcular también la velocidad máxima de transmisión que acepta la fibra sin que se solapen bits de información. Dar el resultado en Mbit/s.

## 4. EJERCICIOS

5.1.- Una onda plana uniforme, polarizada linealmente y propagándose en el espacio libre ( $\epsilon_0, \mu_0$ ), tiene un campo eléctrico dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = 3.2 \hat{z} e^{-j(1.814x + 1.047y)} \text{ V/m}$$

(con  $x$  e  $y$  expresados en cm). Para esta onda calcule:

- La frecuencia y la longitud de onda.
- La dirección de propagación.
- La expresión del fasor  $\vec{H}(\vec{r})$ .
- La potencia media transportada.

Si el medio cambiase su permitividad a un valor  $\epsilon = 4 \epsilon_0 (1 - j 0.0001)$  pero no cambiase la frecuencia de la onda,

- ¿Cuánto valdrían la longitud de onda y la atenuación en dB/m?

(En todos los casos, indique las unidades).

5.2.- Una onda plana uniforme propagándose en el aire tiene un campo eléctrico dado por:

$$\vec{E} = (7.070 \hat{x} + 6.125 \hat{y} + 3.535 \hat{z}) e^{-j(1.047y - 1.814z)} \text{ V/m}$$

con  $y$  e  $z$  expresados en centímetros.

- ¿Qué puede decir de la polarización del campo eléctrico?
- Calcule la frecuencia de la onda.
- Calcule el campo magnético.

Si la onda incide sobre una superficie conductora puesta en  $z = 0$ ,

- ¿Cuál es el ángulo de reflexión?
- Calcule el campo eléctrico de la onda reflejada.

5.3.- Una onda plana uniforme propagándose en el aire tiene un campo eléctrico dado por:

$$\vec{E}_i(x, y, z) = \vec{E}_{0i} e^{-j(-x+y-\sqrt{2}z)} \text{ V m}^{-1}$$

con  $x$ ,  $y$  y  $z$  expresados en metros. Si el campo eléctrico está polarizado linealmente en un plano paralelo al plano  $x$ - $y$ , tiene componentes reales y amplitud 10 V/m:

a) Calcule  $\vec{E}_{0i}$  y la frecuencia.

Si la onda incide sobre una superficie conductora situada en  $z = 0$ :

b) Calcule el ángulo de reflexión.

c) Escriba la expresión del campo eléctrico de la onda reflejada,  $\vec{E}_r(x, y, z)$ .

d) Escriba la expresión del campo eléctrico total a lo largo del eje  $z$ ,  $\vec{E}(0, 0, z)$ . ¿En qué puntos del eje se anula el campo eléctrico?

5.4.- Una onda plana uniforme de frecuencia 120 MHz incide bajo un ángulo desconocido  $\theta_i$  (medido con respecto a la normal) sobre una superficie conductora plana. La onda está polarizada linealmente con el campo eléctrico paralelo a la superficie.

a) Obtenga la expresión del campo eléctrico total en cualquier punto del espacio.

b) Se observa que a una altura de 2.1 m sobre la superficie el campo eléctrico es mínimo. ¿Cuánto vale el ángulo de incidencia  $\theta_i$ ?

c) ¿Dónde se producen los máximos de campo eléctrico? Si su valor es 23.1  $\mu\text{V/m}$ , ¿cuánta potencia transporta la onda reflejada en  $\text{W/m}^2$ ?

5.5.- Una onda plana de 10 GHz polarizada linealmente y con campo eléctrico de 10 V/m incide perpendicularmente ( $i=0$ ) sobre la superficie plana de un conductor ideal.

a) Escriba las expresiones de los fasores (vectores complejos) de los campos eléctrico y magnético de la onda incidente y de la onda reflejada.

b) Escriba las expresiones instantáneas de los campos eléctrico y magnético totales y comente los resultados.

5.6.- Una onda plana uniforme con campo eléctrico dado por:

$$\vec{E}_i = (4\hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}) e^{-j(6x+8z)} \text{ V/m}$$



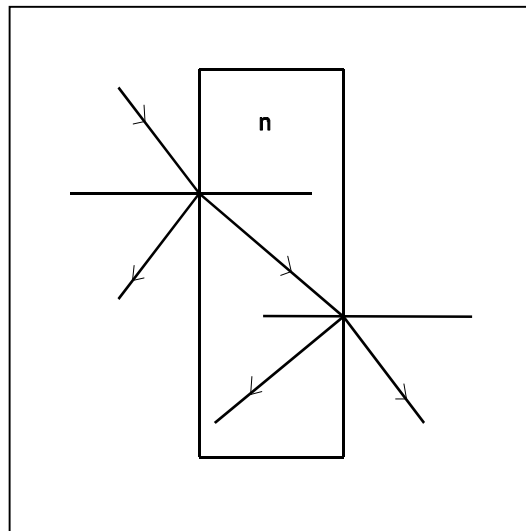
incide desde el aire sobre la superficie de separación aire-plástico de permitividad  $\epsilon_r = 4$  situada en el plano  $z = 0$ .

- Haga el correspondiente diagrama de rayos y campos eléctricos en el plano de incidencia.
- Calcule el valor de los ángulos de incidencia y transmisión (o refracción).
- Calcule la expresión del campo eléctrico de la onda reflejada.
- Idem para la onda transmitida.

5.7.- Nótese que para incidencia perpendicular ( $i = 0$ ) las ecuaciones de Fresnel que dan las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida en función de la incidente toman la forma indeterminada  $0/0$ .

- Resolver la indeterminación y comprobar que tanto el caso perpendicular al plano de incidencia como el paralelo proporcionan la misma solución. ¿Existe alguna diferencia física entre las dos situaciones?
- Calcular la fracción de potencia incidente reflejada cuando la luz incide perpendicularmente sobre agua ( $n = 1.33$ ), dos tipos concretos de vidrio ( $n = 1.56$  y  $n = 1.80$ ) y diamante ( $n = 2.42$ ).

5.8.- Una lámina dieléctrica con caras planas paralelas situadas en  $z = 0$ ,  $z = d$  e índice de refracción  $n$  está situada en el aire. Demostrar que si una onda polarizada paralelamente al plano de incidencia incide desde el aire en la primera cara bajo el ángulo de Brewster (y por tanto sin reflexión), la onda transmitida al dieléctrico también incide sobre la segunda cara bajo el correspondiente ángulo de Brewster (que será diferente del primero), de tal manera que en el proceso no se refleja potencia en ninguna parte y la onda emergente de la lámina es idéntica con la incidente.



(En esta situación se habla de 'ventana de Brewster', y se utiliza mucho cuando se manejan láseres, especialmente si son de potencia elevada)

5.9.- Una onda plana uniforme a 12 GHz está polarizada circularmente y transporta una potencia de  $5,6 \mu\text{W}/\text{m}^2$ . La onda incide bajo un ángulo ' $i$ ' sobre una superficie plana de plástico con  $\epsilon_r = 2.2$  y orientada según el plano  $x-z$ .

- a) Escriba las componentes del campo eléctrico de la onda incidente.
- b) ¿Cuánto ha de valer el ángulo de incidencia ' $i$ ' para que la onda reflejada esté polarizada linealmente? ¿Qué dirección tiene el campo eléctrico en esta onda? ¿Qué densidad de flujo de potencia transporta?
- c) Si el dieléctrico tiene una tangente de pérdidas  $\tan \delta = 5.1 \times 10^{-2}$ , ¿a qué distancia dentro de éste (medida perpendicularmente desde la superficie) se habrán reducido los campos de la onda transmitida en 3 dB?

5.10.- Un láser de HeNe produce un haz de luz de potencia 1.0 mW y sección circular de diámetro 2.0 mm. Los campos están polarizados circularmente y su distribución, dentro del haz, es la misma que la de una onda plana uniforme. Este haz se hace incidir, desde el aire, sobre la superficie plana de un vidrio con índice de refracción  $n = 1.55$ . En estas circunstancias:

- a) Calcule bajo qué ángulo  $i$  ha de incidir para que el haz reflejado esté polarizado linealmente, y la dirección de polarización del campo eléctrico en este haz.
- b) Calcule las potencias transportadas por los haces reflejado y refractado (transmitido al vidrio) y verifique que se conserva la energía.

5.11.- Una onda plana uniforme monocromática de longitud de onda 580.0 nm incide sobre una lámina de agua de caras perfectamente paralelas, de  $n=1.333$  y espesor 1.00 mm, apoyada sobre un vidrio plano de  $n=1.530$ . El ángulo de incidencia es de  $20^\circ$  y la polarización es lineal perpendicular al plano de incidencia. El campo eléctrico de la onda es  $E_0$  V/m.

- a) Haga un croquis de la situación poniendo de manifiesto las múltiples reflexiones que se producen en las dos caras de la lámina de agua.
- b) Escriba la expresión de la onda reflejada por la primera superficie de discontinuidad aire-agua.
- c) Haga lo mismo para la onda reflejada que existe en el aire como consecuencia de la siguiente reflexión en la segunda cara de la lámina de agua (la que se apoya en el vidrio).

## §6. ONDAS Y RAYOS. ÓPTICA

### 1. INTRODUCCIÓN

La óptica estudia la **luz**, es decir, la radiación electromagnética que percibe el ojo humano y los márgenes de frecuencia adyacentes (infrarrojo y ultravioleta). El ojo es sensible, aproximadamente, en el rango de longitudes de onda (medidas en el vacío):

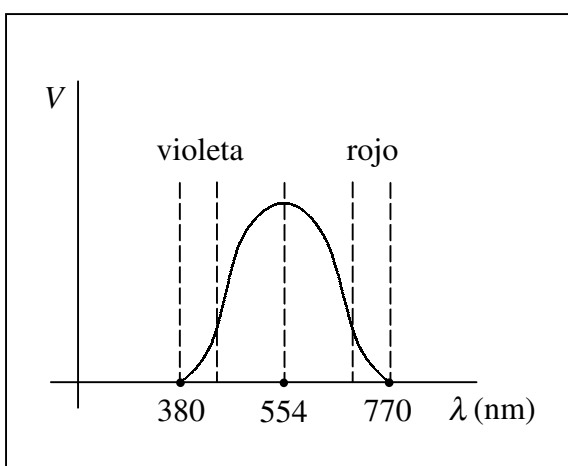


Figura 6.1.- Sensibilidad relativa del ojo a la luz según su color,  $V(\lambda)$ .

$$380 \text{ nm} \leq \lambda \leq 770 \text{ nm},$$

y tiene sensibilidad máxima a  $\lambda = 550 \text{ nm}$ , correspondiente al color amarillo verdoso. Las longitudes de onda mayores (frecuencia menor) corresponden al color rojo y las menores (frecuencia mayor) al violeta, siendo su gradación la de los colores del arco-iris:

rojo – naranja – amarillo – verde – azul – violeta

El margen  $\lambda > 770 \text{ nm}$  hasta  $\lambda \sim 10 \mu\text{m}$  se denomina **infrarrojo próximo o cercano** y tiene gran interés, ya que en este margen están las bandas de frecuencias más utilizadas en comunicaciones por fibras ópticas:  $\lambda \sim 800 \text{ nm}$  y  $\lambda \sim 1500 \text{ nm}$ . En el otro extremo el margen  $\lambda < 380 \text{ nm}$  hasta  $\lambda \sim 1 \text{ nm}$  se llama **ultravioleta**.

Es evidente, por tanto, que la óptica es una parte de la teoría electromagnética, y como tal ya hemos encontrado algunas propiedades fundamentales: reflexión en un conductor,

ley de Snell, ángulos críticos y de Brewster, polarización de ondas, etc. No obstante, dada la pequeñez de la longitud de onda, sucede que en la mayoría de las aplicaciones comunes **las dimensiones de los elementos de los sistemas** (lentes, espejos, diafragmas, prismas, etc.) **son mucho mayores que la longitud de onda implicada**, lo que conduce a una descripción aproximada, la **óptica geométrica**, donde los protagonistas son los rayos, es decir, las líneas que en todos sus puntos son tangentes a la dirección de propagación.

## 2. DIFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA POR UNA APERTURA

Un material **absorbente** en un cierto margen de frecuencias es aquél que absorbe la energía electromagnética y ni la refleja ni permite su paso. En óptica a un material absorbente se le llama también **de color negro**, ya que el negro, por definición, absorbe toda la radiación en el margen visible y no refleja ninguna, y a esta ausencia de luz es a lo que nos referimos con el término “negro”.

Supongamos que en el camino de una onda plana uniforme (que podemos suponer procede de una fuente luminosa puntual alejada) interponemos una pantalla absorbente con un orificio (apertura), que en la figura 6.2 suponemos redondo, pero que puede tener forma arbitraria.

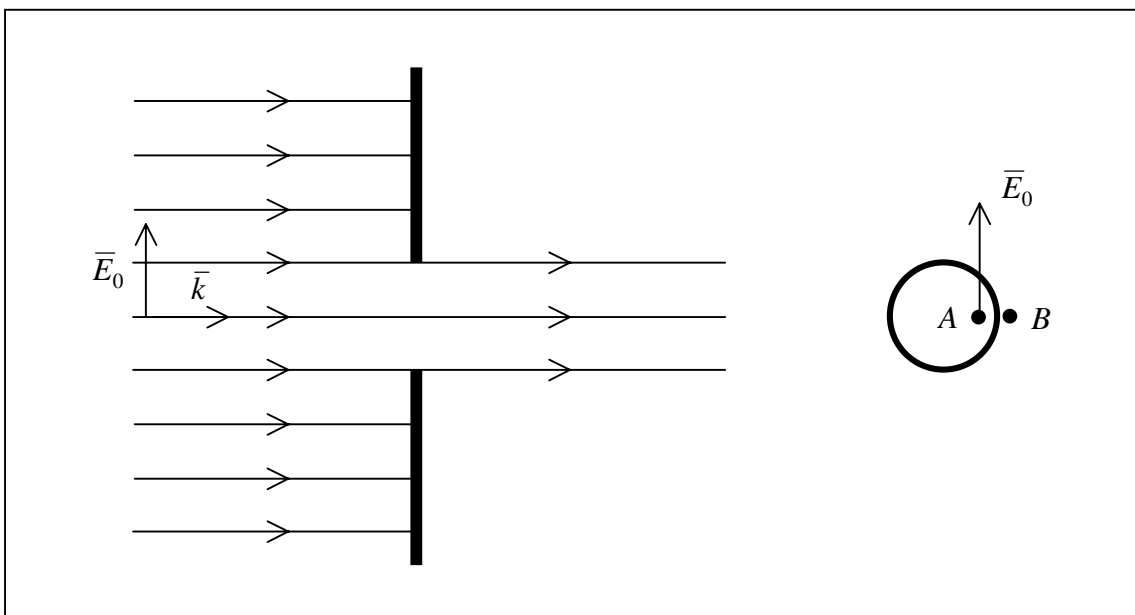


Figura 6.2.- Onda plana luminosa incidente sobre una pantalla opaca con una apertura (supuesta circular) y sección del haz luminoso a la salida.

A frecuencias ópticas, detrás de la apertura el ojo percibe un haz luminoso con la forma de aquella y transición (aparentemente) brusca de “luz” a “sombra”. Esta transición, sin embargo, no es posible; imaginemos dos puntos arbitrariamente próximos  $A$  y  $B$  (como en la figura) uno dentro del haz y el otro fuera; tendríamos

$$\bar{E}(A) = \bar{E}_0 \quad , \quad \bar{E}(B) = 0$$

y sin embargo (continuidad del campo eléctrico en un mismo medio) habría de ser

$$\bar{E}(A) = \bar{E}(B)$$

En la práctica, si la situación se examina con mucho cuidado, se descubre que:

- La transición luz-sombra es gradual y no brusca, y puede presentar oscilaciones notables.
- El haz de luz emergente no es paralelo sino que presenta una cierta divergencia  $\Delta\theta$  que está relacionada con el tamaño de la apertura  $D$  y la longitud de onda mediante la relación:

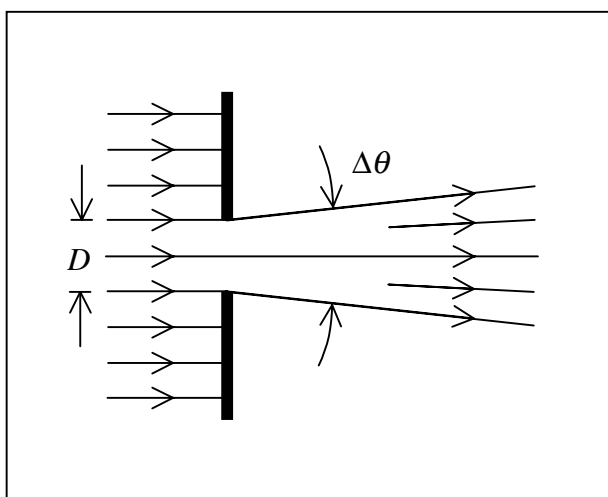


Figura 6.3.- Diagrama esquemático de la difracción de una onda plana por una apertura.

$$\Delta\theta \cdot D \sim 2\lambda,$$

dónde  $\sim$  significa “en orden de magnitud”. Estos efectos se llaman **efectos de difracción** de la onda plana por la apertura, y su explicación, que veremos más adelante (2.2), se basa en el carácter ondulatorio de la luz.

## EJEMPLO

Supongamos luz amarilla-verde de  $\lambda = 550 \text{ nm}$  y una apertura de dimensión transversal  $D = 2 \text{ cm}$ . Resulta:

$$\Delta\theta \sim \frac{2\lambda}{D} = 55.0 \times 10^{-6} \text{ rad} = 0^\circ 0' 11.3''$$

que es una divergencia imposible de percibir a simple vista.

Sin embargo, si hacemos  $D = 10 \text{ }\mu\text{m}$  (dimensión del orden del núcleo de una fibra óptica *monomodo*) resulta  $\Delta\theta \sim 6.3^\circ$ , que es una divergencia apreciable y fácilmente perceptible.

## 2.1. APROXIMACIÓN PARA $\lambda \rightarrow 0$ : ÓPTICA GEOMÉTRICA

Nótese que en el ejemplo anterior de difracción por una apertura la divergencia del haz tiende a cero con  $\lambda$ ; la óptica geométrica ignora los efectos de difracción y supone que un obstáculo opaco (como el material absorbente del párrafo anterior) produce una sombra perfectamente nítida (transición luz-sombra abrupta), lo que hemos visto que es verdad en el límite de longitud de onda arbitrariamente pequeña; o, para ser más precisos, cuando la longitud de onda es mucho menor que las dimensiones de los objetos y de los orificios que intervienen en el sistema. De manera que para estudiar el comportamiento de la luz en su interacción con medios materiales (conductores o dieléctricos) **basta con seguir la trayectoria de los rayos**, que obedecen las leyes de la reflexión y refracción estudiadas anteriormente.

Recuérdese que, tal como hemos visto en §5.3, si su radio de curvatura es mucho mayor que la longitud de onda, una superficie curva puede reemplazarse localmente (es decir, en una zona pequeña en torno a un punto de ella) por su plano tangente y suponerse **localmente plana**; y en esta misma zona (que aún siendo pequeña puede tener dimensiones de muchas longitudes de onda) cualquier onda arbitraria podrá también aproximarse por una onda plana uniforme. Dado que en óptica las longitudes

de onda son microscópicas ( $\lambda \sim 0.4-0.7 \mu\text{m}$ ), esta aproximación puede hacerse prácticamente siempre. De manera que en estas condiciones podemos aplicar las leyes de la reflexión y la refracción obtenidas anteriormente en condiciones ideales de superficies planas infinitas y ondas planas uniformes, que también son idealizaciones de extensión infinita.

## 2.2. DIFRACCIÓN POR UNA APERTURA. ESTUDIO ELECTROMAGNÉTICO

Supongamos que en el trayecto de una onda (que puede ser plana, esférica o de forma más general) se interpone una pantalla absorbente (que ni refleja ni deja pasar la radiación) de dimensiones infinitas situada en el plano XZ y con una apertura elemental rectangular de dimensiones  $\Delta x'$ ,  $\Delta z'$  situada en un punto  $Q \rightarrow \bar{r}'$  (fig. 6.4) (en esta figura se supone que la onda es, en particular, una onda plana polarizada linealmente según  $\hat{z}$  que se propaga según  $\hat{y}$ ). Imponemos las siguientes condiciones:

1) A la apertura elemental le exigimos que:

$$\Delta x', \Delta z' \ll \lambda,$$

de manera que la **componente del campo eléctrico contenido en el plano de la apertura**,  $\bar{E}_a(Q)$ , puede suponerse de valor constante en todos los puntos de la misma, (recuérdese que el valor de los campos de una onda cambia muy poco si nos movemos una distancia mucho más pequeña que la longitud de onda).

2) El campo eléctrico en el plano de la apertura,  $\bar{E}_a(Q)$ , está polarizado linealmente según la dirección z:

$$\bar{E}_a(Q) = E_a(Q)\hat{z}$$

Si el campo estuviera polarizado linealmente pero no en la dirección z, siempre podemos cambiar los ejes de coordenadas para hacer que sea así.

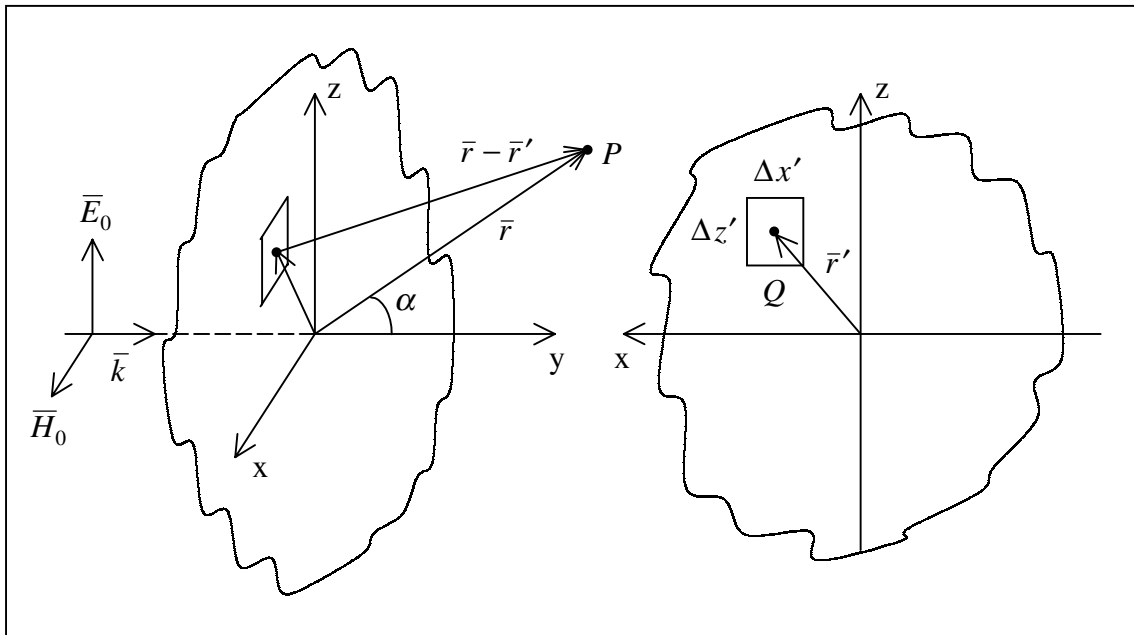


Figura 6.4.- Geometría utilizada en el análisis de la difracción de una onda plana por una apertura en una pantalla opaca.

Consideremos primero, para simplificar las matemáticas, que la apertura elemental está en el origen de coordenadas ( $\vec{r}' = 0$ ), y sea  $\alpha$  el ángulo formado por el vector de posición del punto de observación y el eje  $y$  (fig. 6.4). El principio de HUYGENS-FRESNEL dice que esta apertura elemental **radia, para puntos alejados y en las proximidades de la dirección del eje  $y$  (ángulo  $\alpha$  pequeño), de forma similar a la de un elemento de corriente de intensidad proporcional al campo eléctrico en la apertura,  $I_0 = 2E(Q)\Delta x'/\eta$ , y longitud la de la apertura según  $\vec{E}(Q)$ ,  $\Delta l = \Delta z'$ . De manera que el campo eléctrico producido en un punto  $\vec{r}$  situado a la derecha de la pantalla vale:**

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) \approx j \frac{E_a(Q) \Delta x' \Delta z'}{\lambda r} e^{-jkr} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \hat{\theta}$$

Nótese que la única diferencia con el campo producido por el elemento de corriente es la dependencia con la dirección de observación (en este caso dada por  $\alpha$ ), si bien para valores pequeños de este ángulo la diferencia es irrelevante.



Cuando la apertura no está en el origen de coordenadas ( $\vec{r}' \neq 0$ ), para un punto de observación  $\vec{r} = P$  suficientemente alejado de manera que  $r \gg r'$ , el campo radiado valdrá:

$$\Delta \bar{E}(\vec{r}) \approx j \frac{E_a(\vec{r}') \Delta x' \Delta z'}{\lambda |\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \hat{\theta}$$

(Nótese que en esta expresión aparece el área de la apertura elemental,  $\Delta x' \Delta z'$ , lo que hace pensar que la forma de la apertura, que hemos supuesto elemental, es irrelevante siempre que sus dimensiones sean mucho menores que la longitud de onda). En vista de esta expresión, si tenemos una apertura  $S$  de forma arbitraria y que ya no sea pequeña en términos de longitud de onda, situada en torno al origen y de dimensión máxima  $D \ll r$ , el campo radiado lo podemos calcular por superposición de los producidos por los elementos en que podemos descomponer la apertura y valdrá:

$$\bar{E}(\vec{r}) = \hat{\theta} j \frac{1}{\lambda} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \iint_{S'} \bar{E}_a(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy'$$

### 2.2.1. El experimento de Young

El experimento de Young (1802) tiene un interés múltiple; por una parte, históricamente es la evidencia determinante a favor de la naturaleza ondulatoria de la luz; por otra, su explicación es un excelente ejercicio de comprensión del fenómeno de interferencia de ondas electromagnéticas; y, finalmente, puede interpretarse como una introducción al concepto de agrupaciones de antenas (*arrays*), ya que el comportamiento de los dos agujeros de la pantalla es el mismo que el de dos radiadores (antenas) elementales.

El experimento consiste en lo siguiente: La luz (radiación) de una fuente puntual monocromática (radiación con una frecuencia bien definida) se hace incidir sobre una lámina plana y opaca en la que se han hecho dos agujeros idénticos y muy pequeños, y al otro lado, y a distancia suficiente, se sitúa una pantalla de proyección. Cuando la distancia entre los agujeros es pequeña (algunas longitudes de onda de la luz que se utiliza), en la pantalla se observa un patrón de franjas alternativamente claras y oscuras

que son consecuencia de la interferencia constructiva o destructiva de las ondas que genera cada uno de los orificios.

Si suponemos que la onda que incide es plana (fuente puntual muy alejada) y lo hace perpendicularmente a la pantalla, la situación es similar a la de la figura 6.4, pero con dos aperturas elementales iguales que podemos situar en  $z'_1 = d/2$  y  $z'_2 = -d/2$  (fig. 6.5), de manera que la distancia entre orificios es  $d$ .

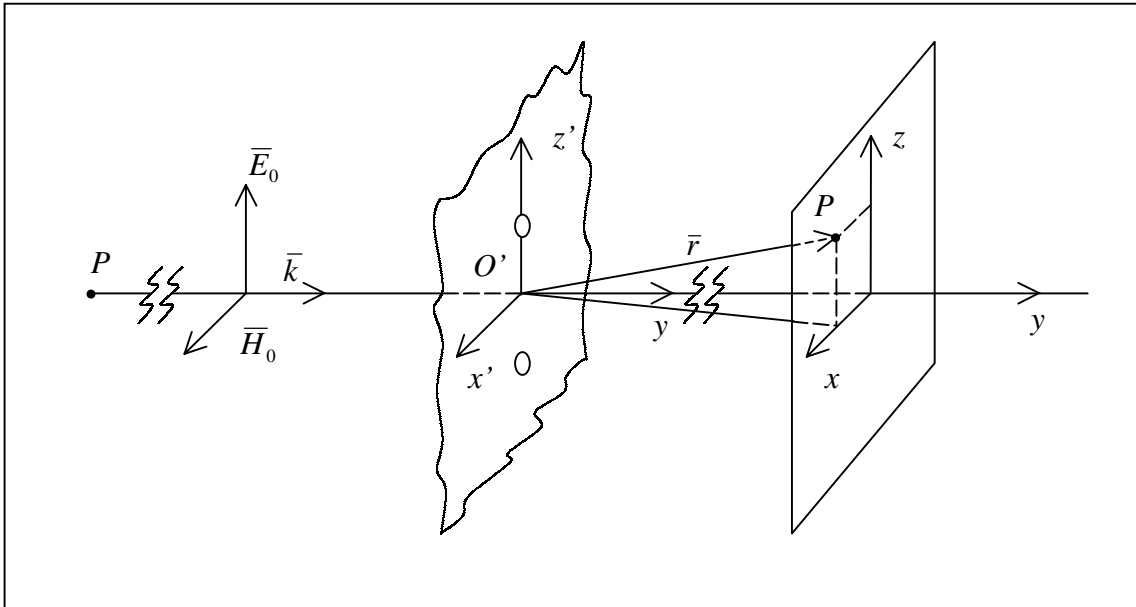


Figura 6.5.- Esquema con la disposición del experimento de Young. P es el punto, muy alejado, que suponemos que produce la onda que al llegar a la pantalla se puede considerar plana.

La gráfica se simplifica mucho, y el álgebra un poco, si nos limitamos a estudiar qué pasa en puntos de la pantalla situados en el eje  $z$  ( $x = 0$ ), figura 6.6. Suponemos que la onda incidente tiene un campo eléctrico dado por:

$$\vec{E} = E_0 e^{-jky} \hat{z}$$

Entonces, el valor del campo eléctrico en ambos agujeros es el mismo,  $E_0$ , ya que para ambos  $y = 0$  (los dos están situados en el mismo frente de onda).

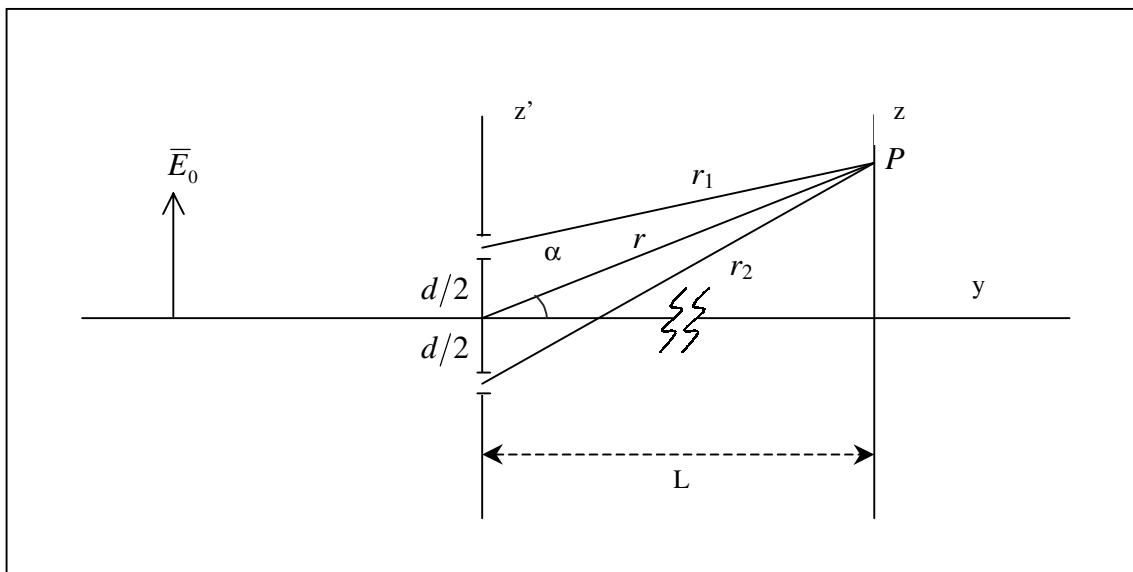


Figura 6.6.- Representa lo mismo que la figura anterior, pero para un punto P situado en el eje y.

Como el campo eléctrico en P es la suma de los producidos por las dos aperturas y ambos tienen, aproximadamente, la misma dirección y amplitud, es fácil de prever qué va a pasar: Cuando las distancias  $r_1$  y  $r_2$  produzcan la misma fase (es decir, cuando se diferencien en un número entero de longitudes de onda) los campos individuales se sumarán y producirán un valor doble que el de una sola apertura. Sin embargo, si se diferencian en un número impar de semilongitudes de onda los campos individuales estarán en oposición de fase y se restarán, produciendo un campo total nulo. Por lo tanto, a medida que el punto P se mueve a lo largo del eje y el campo eléctrico va experimentando variaciones de amplitud entre el valor cero y un valor máximo. Hagamos los cálculos en detalle:

- a) Apertura superior: Si suponemos que la distancia a la pantalla es  $L \gg d$ , entonces aplica la expresión anterior y tenemos:

$$\Delta \bar{E}_1(P) \approx j \frac{E_0 \Delta A}{\lambda r_1} e^{-jk r_1} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \hat{\theta},$$

donde  $\Delta A$  es el área de la apertura.

b) Apertura inferior:

$$\Delta \bar{E}_2(P) \approx j \frac{E_0 \Delta A}{\lambda r_2} e^{-jk r_2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \hat{\theta}$$

Dado que suponemos que  $L \gg d$ , también será  $r_1, r_2 \gg d$ , y en los denominadores podremos aproximar  $r_1 \cong r_2 \cong r$  (fig. 6.6). Sin embargo, en los exponentes hemos de tener más cuidado, ya que pequeñas longitudes, si son comparables con la longitud de onda, suponen cambios de fase importantes. Dado que al ser  $r_1, r_2 \gg d$  ambos segmentos son aproximadamente paralelos podemos poner:

$$r_1 \cong r - \frac{d}{2} \sin \alpha, \quad r_2 \cong r + \frac{d}{2} \sin \alpha$$

Finalmente podemos escribir la expresión del campo eléctrico como la suma de los dos anteriores:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{E}(P) &\approx j \frac{E_0 \Delta A}{\lambda r} \cos^2 \frac{\alpha}{2} e^{-jkr} (e^{jk \frac{d}{2} \sin \alpha} + e^{-jk \frac{d}{2} \sin \alpha}) \hat{\theta} = \\ &= 2j \frac{E_0 \Delta A}{\lambda r} \cos^2 \frac{\alpha}{2} e^{-jkr} \cos(k \frac{d}{2} \sin \alpha) \hat{\theta} \end{aligned}$$

Para interpretar este resultado de forma sencilla, y dado que de todas maneras el ángulo  $\alpha$  ha de ser pequeño para que las expresiones de partida sean válidas, podemos aproximar  $\cos \alpha/2 \cong 1$ ,  $\sin \alpha \cong \tan \alpha \cong z/L$ ,  $\hat{\theta} \cong -\hat{z}$  y escribir:

$$\Delta \bar{E}(P) \cong -\Delta \bar{E}_0 e^{-jkr} \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda L} z\right) \hat{z}$$

Es decir, según nos movemos verticalmente a lo largo del eje  $z$  de la pantalla vamos encontrando máximos y mínimos de intensidad luminosa (proporcional al vector de Poynting) que forman franjas horizontales alternativamente claras y oscuras (figura 6.7). Por ejemplo, si  $\lambda = 580 \text{ nm}$ , la separación entre agujeros es de 1 mm ( $d = 1 \text{ mm}$ ) y la

distancia a la pantalla es de 1 metro ( $L = 1$  m), se encuentra fácilmente que la distancia entre franjas oscuras consecutivas es de 0.58 mm (17.2 franjas por cm).



Figura 6.7.- Franjas claras y oscuras producidas sobre la pantalla en el experimento de Young.

Normalmente el experimento de Young suele realizarse con dos ranuras paralelas en lugar de dos agujeros con objeto de que pase más luz y las franjas de interferencia puedan verse mejor sobre la pantalla.

### 2.2.2. Radiación por una apertura circular

Tal como hemos dicho en el párrafo 2.2, si tenemos una apertura de tamaño mayor que el que permite la validez del principio de Huyghens-Fresnel, el campo eléctrico difractado puede calcularse descomponiendo la apertura inicial en aperturas elementales y sumando sus efectos (como en el caso del experimento de Young, pero allí solo había dos aperturas elementales); suma que se convierte en una integral de mayor o menor dificultad. En el Apéndice que está al final de este capítulo se pueden encontrar los cálculos, sencillos pero algo engorrosos, para el caso de una apertura rectangular.

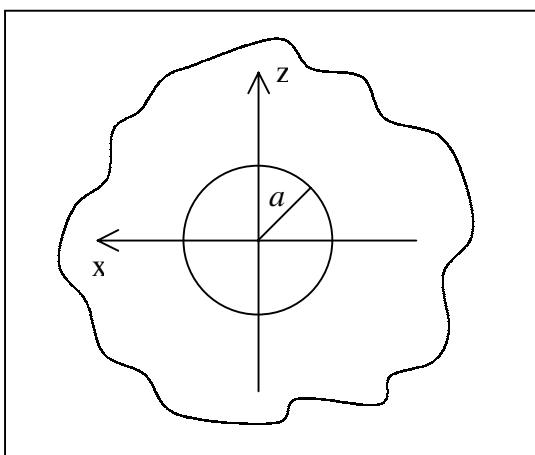


Figura 6.8.- Apertura circular del ejemplo 2.

En todo caso, los resultados observables sobre una pantalla lejana son cualitativamente predecibles: habrá sitios dónde las contribuciones de las aperturas elementales se refuercen, dando lugar a campos eléctricos intensos (intensidad luminosa alta) y otros donde se sumen destructivamente, dando lugar a intensidad luminosa débil o nula.

Si la apertura es un círculo de radio  $a$  (fig. 6.8), la integración de la ecuación de la pág. 147 en la apertura

$$S \rightarrow x^2 + y^2 \leq a^2$$

produce el siguiente resultado (véase también el apéndice al final del capítulo):

$$E_{\theta}(\bar{r}) = E_{\theta}(x, y, z) = j \frac{E_0}{\lambda r} e^{-jk r} \cos^2 \frac{\alpha}{2} (\pi a^2) f\left(\frac{2a\sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda r}\right),$$

con  $f(u)$  una función parecida a la  $\text{sinc}(u)$  (ceros y máximos, cada vez menores, alternados). El primer cero tiene lugar para  $x = 1.22$ . De manera que en una pantalla como la del ejemplo anterior, y en un experimento con luz como el citado, se vería una mancha central de radio:

$$\rho_0 = 1.22 r \frac{\lambda}{2a} \quad \left(\text{dónde } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

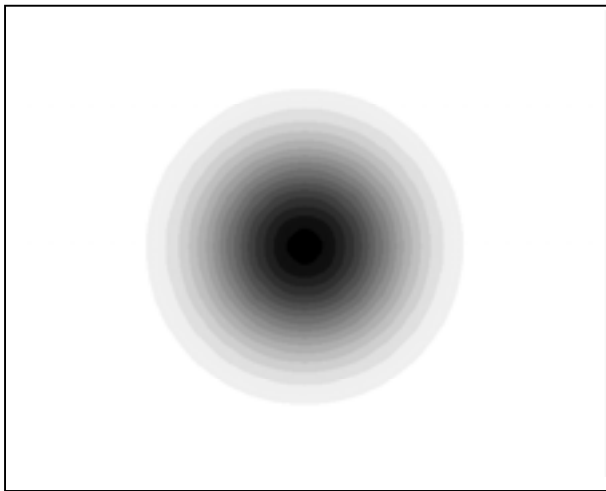


Figura 6.9.- Mancha de difracción producida por una apertura circular (diagrama de Airy), en negativo.

rodeada de sucesivos aros alternativamente claros y oscuros. En la fig. 6.9 se ve la mancha central, en negativo, como anteriormente, pero no el siguiente aro brillante (que sería gris en la figura) por ser tan débil que se sale de la escala de grises. Véase también la figura 6.A.2 del apéndice.

La dimensión angular total de la mancha central valdrá

$$\Delta\alpha = \frac{2\rho_0}{r} = 2.44 \frac{\lambda}{2a}$$

La distribución luminosa de la difracción producida por una apertura circular sobre una pantalla lejana se llama **diagrama de difracción de Airy** (fig. 6.9).

### 3. SISTEMAS ÓPTICOS

En lo que sigue supondremos la aproximación de la óptica geométrica, que como hemos dicho en el párrafo 2.1, **ignora los efectos de difracción** (lo cual es aproximadamente cierto cuando los elementos que intervienen son mucho mayores que la longitud de onda de la luz utilizada) y por tanto supone que la radiación se propaga en línea recta, de manera que nos bastará con seguir las trayectorias de los rayos según se propagan en el sistema de acuerdo con las leyes de la reflexión y refracción en superficies conductoras y dieléctricas. Además, en esta aproximación también **se renuncia a la información de fase** de las ondas, y, por tanto, al conocimiento de **los fenómenos de interferencia** entre las diferentes ondas que pueden participar en un problema.

#### 3.1. FUENTE PUNTUAL

Una fuente puntual es un emisor de luz de dimensiones suficientemente pequeñas como para poder suponerlas nulas. Normalmente se supone que las fuentes puntuales **no son directivas**, es decir, radian con la misma intensidad en todas direcciones (cosa que no sucede con una corriente elemental, que hemos visto que no radia según la dirección en la que está orientada), ya que en la práctica están formadas por un conjunto muy grande de átomos o moléculas. Por tanto, una fuente puntual emite una onda esférica con rayos en las direcciones de los infinitos posibles radios.

En muchas aplicaciones (por ejemplo en formación de imágenes ordinarias en una cámara fotográfica, en una matriz CCD, en una pantalla o en un telescopio) la polarización de la luz (orientación espacial del campo eléctrico) no tiene importancia y la información se omite. Debe mencionarse también que el ojo humano no percibe la polarización de la luz, de manera que ve de la misma forma una escena con independencia de la polarización de la iluminación.

Si la radiación luminosa es de una sola frecuencia (o, en la práctica, en una banda muy estrecha de frecuencias en torno a una frecuencia central  $f_0$ ) se dice que es

**monocromática**, y en el margen visible el ojo humano la verá de un color definido perteneciente a la gama de colores del arco-iris. Si tiene componentes espectrales en la misma proporción en todo el margen visible se dice que la luz es **blanca**, ya que es de este color como la percibe el ojo.

### 3.2. DEFINICIÓN DE SISTEMA ÓPTICO

De un sistema óptico generalmente se esperan dos cosas:

- 1) Que modifique la trayectoria de los rayos de una fuente puntual (punto objeto) de manera que **converjan** en otro punto (punto imagen). En este caso la imagen puede recogerse en una pantalla (en la que se vería un punto brillante) y se llama **imagen real**. O bien que modifique la trayectoria de los rayos de manera que **diverjan** de un punto imagen, que en este caso se llama **imagen virtual**, del que parece que proceden. Una imagen virtual no puede recogerse en una pantalla, pero puede verla el ojo (fig. 6.10).

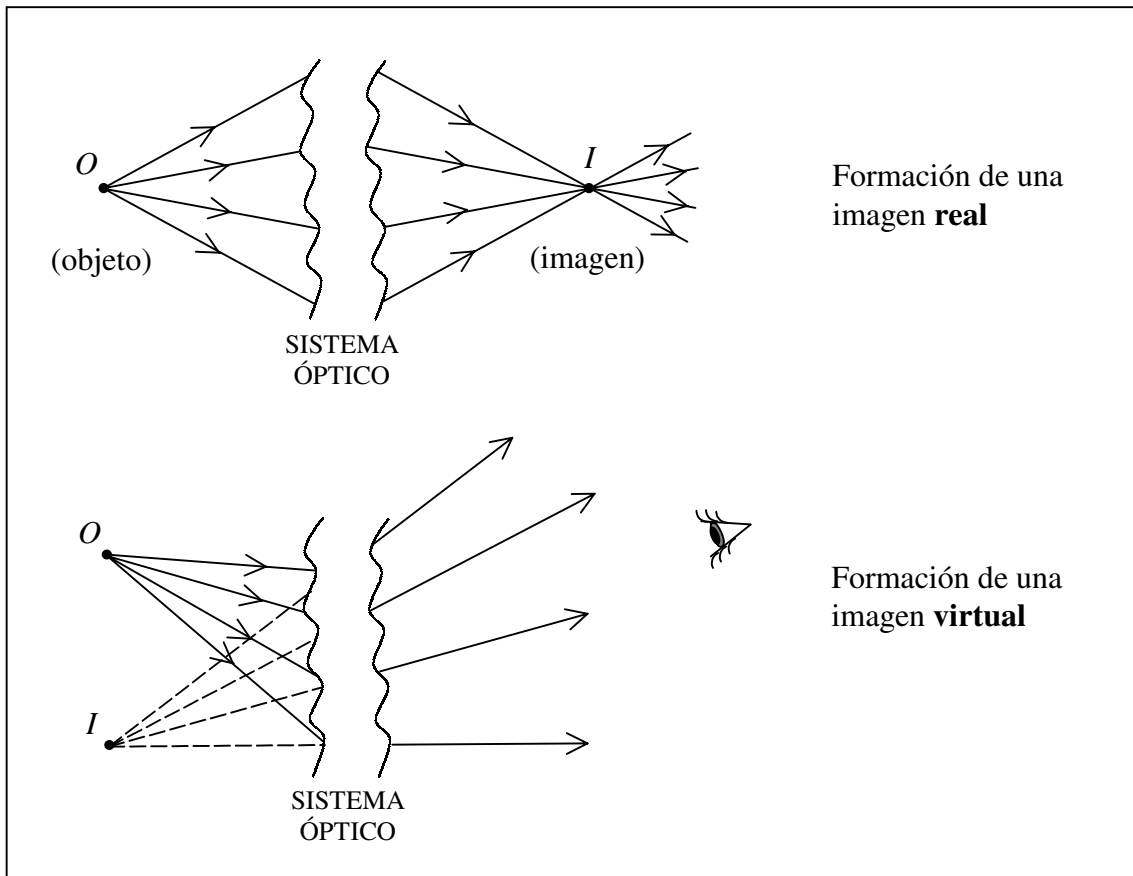


Figura 6.10.- Propiedad principal de un sistema óptico: Transformación de una fuente puntual objeto en una fuente puntual imagen.



- 2) Que dados varios puntos objeto sus imágenes mantengan las distancias o posiciones relativas de los objetos. De manera que cuando tenemos una **escena objeto**, la descomponemos en puntos cuyas imágenes recomponen una **escena imagen** que reproduce la objeto.

Cuando el sistema incumple alguna de estas dos condiciones, o ambas, produce imágenes imperfectas y se dice que tiene **aberraciones**.

## 4. SISTEMAS ÓPTICOS CON SUPERFICIES PLANAS

### 4.1 . ESPEJO PLANO

Una superficie conductora plana forma el sistema óptico más simple: el espejo plano. El **método de imágenes** estudiado anteriormente nos garantiza precisamente que las imágenes formadas por el espejo son **idénticas** a los objetos excepto porque la imagen de un triedro positivo es un triedro negativo (y la de una mano izquierda es una mano derecha, etc.) (fig. 6.11):

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \quad \text{pero} \quad \hat{x}' \times \hat{y}' = -\hat{z}'$$

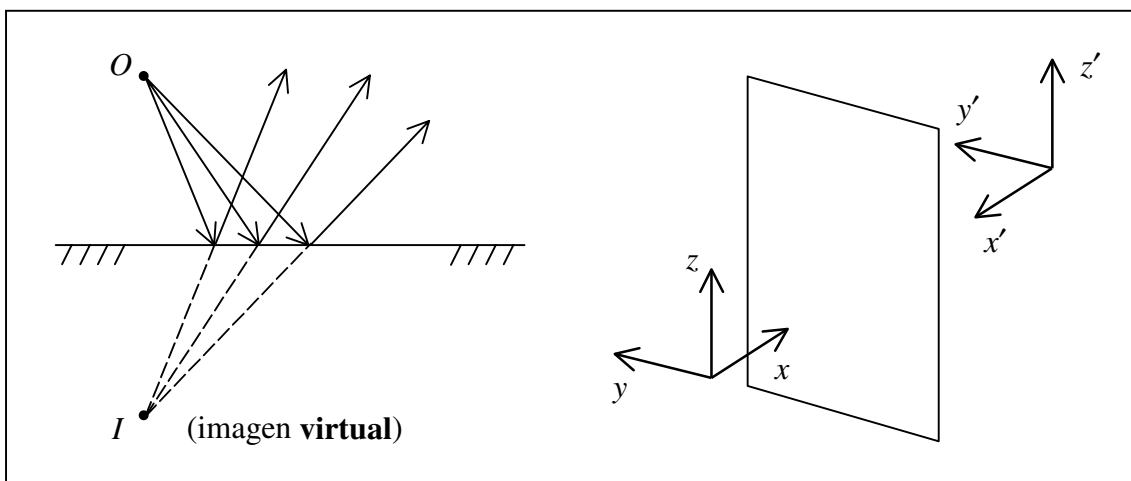


Figura 6.11.- (Izquierda) Imagen de un punto en un espejo. (Derecha) Imagen de un triedro positivo.

Cuando el conductor no es ideal, las corrientes que genera la onda e su superficie producen pérdidas y la potencia reflejada es inferior a la incidente.

Los espejos ordinarios están formados por una lámina de vidrio (*crystal* en lenguaje corriente) con una capa de material conductor, normalmente mercurio, depositada en una de las caras. De esta manera el cristal, cuya única función es servir de soporte físico al conductor, se interpone entre el espejo propiamente dicho y el observador, por lo que, de hecho, estorba; en efecto, la primera superficie del cristal produce otra imagen débil que, cuando se miran objetos lateralmente, se superpone sobre la del conductor. Por eso en óptica, cuando se requieren espejos de calidad se utiliza directamente un metal buen conductor, normalmente aluminio, con una superficie perfectamente plana (pulimentada), o bien una lámina de cristal con aluminio depositado en la cara frontal, y no en la posterior como en el caso de un espejo ordinario.

#### EJEMPLO

Si, bajo incidencia normal ( $i = 0^\circ = r$ ), definimos  $R$  como el cociente entre los vectores de Poynting de las ondas reflejada e incidente:

$$R = \frac{S_{mr}}{S_{mi}},$$

en el caso de la plata (que es un excelente conductor justo hasta entrar en el margen de frecuencias visibles) se miden los siguientes valores:

$\lambda$	700 nm (rojo)	500 nm (verde)	400 nm (violeta)	300 nm (UV)
$R$	95%	90%	85%	10%

Obsérvese cómo la plata refleja tanto menos cuanto menor es la longitud de onda, lo que explica el tinte ligeramente amarillento de las imágenes de un espejo de plata (o de la plata pulida). Nótese también la pérdida de reflectividad en el ultravioleta, que suele ser común a la mayoría de los metales.

## 4.2. PRISMAS

El mismo efecto de un espejo (superficie conductora) de reflejar toda la onda incidente lo puede producir la superficie de separación dieléctrico-aire cuando la luz incide desde el dieléctrico con un ángulo de incidencia mayor que el crítico:

$$i > i_0 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

( $n$  = índice de refracción del dieléctrico, que suponemos transparente)

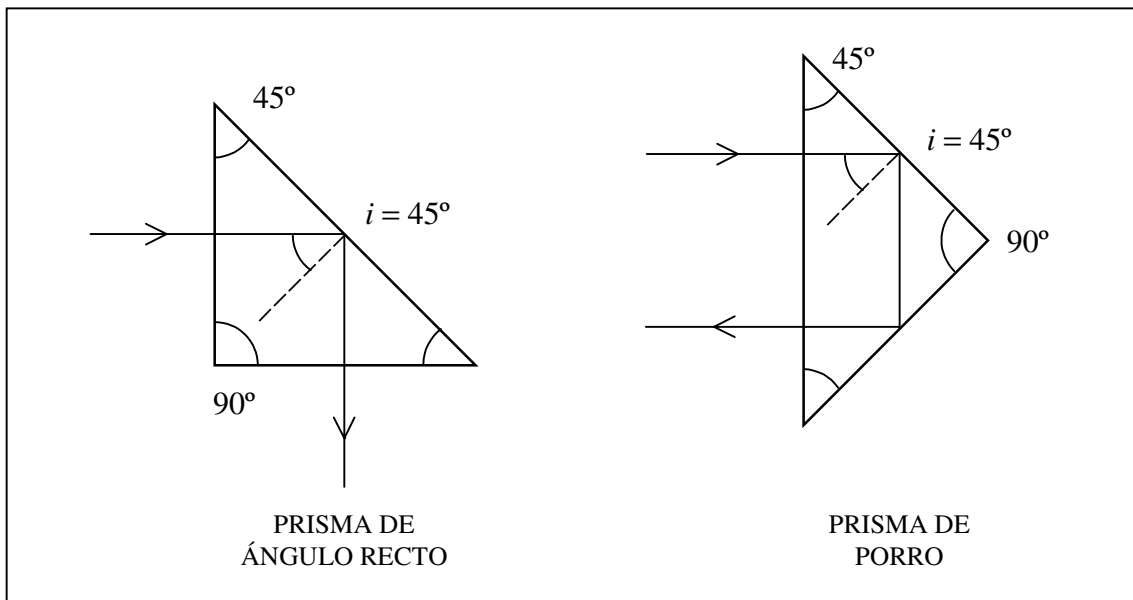


Figura 6.12.- Ejemplos de prismas.

Nótese que para los vidrios ópticos  $1.50 \leq n \leq 1.65$  y por tanto  $37.3^\circ \leq i_0 \leq 41.8^\circ$ . De manera que  $45^\circ > i_0$  para todos los vidrios posibles.

El prisma de Porro (fig. 6.12) tiene la propiedad de que el rayo saliente tiene **exactamente** la misma dirección (y sentido contrario) que el incidente, incluso aunque el incidente no incida de manera exactamente perpendicular al prisma (véase ejercicio 6.3). Además, como produce dos reflexiones, no cambia la positividad de un triedro de referencia.

Los prismas tienen la ventaja de que la reflexión total se produce sin pérdidas, ya que en el dieléctrico no hay corrientes como en un espejo; pero en contrapartida, parte de la luz se pierde por reflexiones en la discontinuidad aire-vidrio cuando entra en el prisma.

### EJEMPLO

Supongamos incidencia normal ( $i = 0^\circ$ ) desde el aire en un vidrio con  $n = 1.55$ . En este caso el plano de incidencia no está definido de manera única, ya que el rayo y la normal a la superficie coinciden y hay infinitos planos que contienen a ambos; cualquier plano normal a la superficie es de incidencia. De manera que la distinción ‘contenido’ y ‘perpendicular’ al plano de incidencia se pierde, y ambas expresiones producen el mismo resultado. Tomemos por ejemplo  $\bar{E} \in PI$ :

$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \Big|_{\parallel} = \frac{\tan(i-t)}{\tan(i+t)}$$

Para  $i \ll 1 \Rightarrow t \ll 1$ , podemos aproximar tangentes por arcos y por senos, y queda:

$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \Big|_{\parallel} \approx \frac{i-t}{i+t} \approx \frac{\sin i - \sin t}{\sin i + \sin t} = \frac{\sin i - n \sin i}{\sin i + n \sin i} = \frac{1-n}{1+n}$$

El cociente entre densidades de potencia (vectores de Poynting) reflejada e incidente vale:

$$\frac{S_{mr}}{S_{mi}} = \frac{\frac{|E_{0r}|^2}{2\eta_0}}{\frac{|E_{0i}|^2}{2\eta_0}} = \left| \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right|^2 = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 = 4.6\%$$

De manera que para  $n = 1.55$  se refleja el 4.6% de la potencia incidente.

## 5. ESPEJOS ESFÉRICOS

### 5.1. LAS SUPERFICIES ESFÉRICAS EN ÓPTICA

Las superficies curvas (no planas) más fáciles de producir con un elevado grado de precisión son las esféricas y las cilíndricas circulares. Por esta razón, hasta ahora los elementos ópticos están formados por superficies planas, esféricas o cilíndricas en la inmensa mayoría de los casos. Sin embargo, las cosas han comenzado a cambiar a causa de los procesos de fabricación controlados por ordenador, si bien por el momento los elementos con superficies **asféricas** (no esféricas) continúan siendo mucho más costosos de fabricar, y por lo tanto, más caros, que los de superficies esféricas. Nosotros nos referiremos, convencionalmente, a elementos con superficies esféricas solamente.

### 5.2. ESPEJO ESFÉRICO

Supongamos una superficie conductora esférica convexa y una fuente luminosa puntual frente a ella,  $P$ , como en la fig. 6.13. Nos planteamos las siguientes preguntas:

- 1) Los rayos que parten de  $P$ , ¿convergen en un punto después de haberse reflejado en el espejo? (es decir, ¿es candidato a ser un sistema óptico?).
- 2) En caso afirmativo, ¿dónde está el punto donde convergen?

La respuesta, como veremos, es que, bajo ciertas condiciones aproximadas, **sí convergen** en un punto, cuya situación calcularemos.

Antes de proseguir, es importante advertir que, por convenio, en óptica los esquemas representado lentes y espejos se dibujan de manera que los objetos están a la izquierda del sistema, y **la luz que va del objeto al sistema se propaga, en consecuencia, de izquierda a derecha.**

Volviendo a las preguntas, comenzamos haciendo lo siguiente:

- Trazamos la recta  $PC$  que une el punto  $P$  con el centro de curvatura  $C$  (centro de la superficie esférica). A esta recta le llamaremos **eje** de la construcción y al punto  $V$ , donde corta al espejo, **vértice**.
- Trazamos un rayo  $PB$  arbitrario, que se refleja en el espejo y parece provenir de una dirección tal que corta al eje en el punto  $P'$ . El objetivo consiste en determinar la distancia de  $P'$  al vértice,  $|s'| = \overline{VP'}$ , cuando conocemos la distancia de la fuente al vértice,  $\overline{PV} = |s|$ .
- Adoptamos el siguiente convenio de signos: las distancias  $s, s'$  **son positivas** si se miden desde  **$V$  hacia la derecha**, y el radio de curvatura de la superficie del espejo es también positivo si el **centro de curvatura está a la derecha del vértice**, tal como en el caso del espejo convexo que nos ocupa.

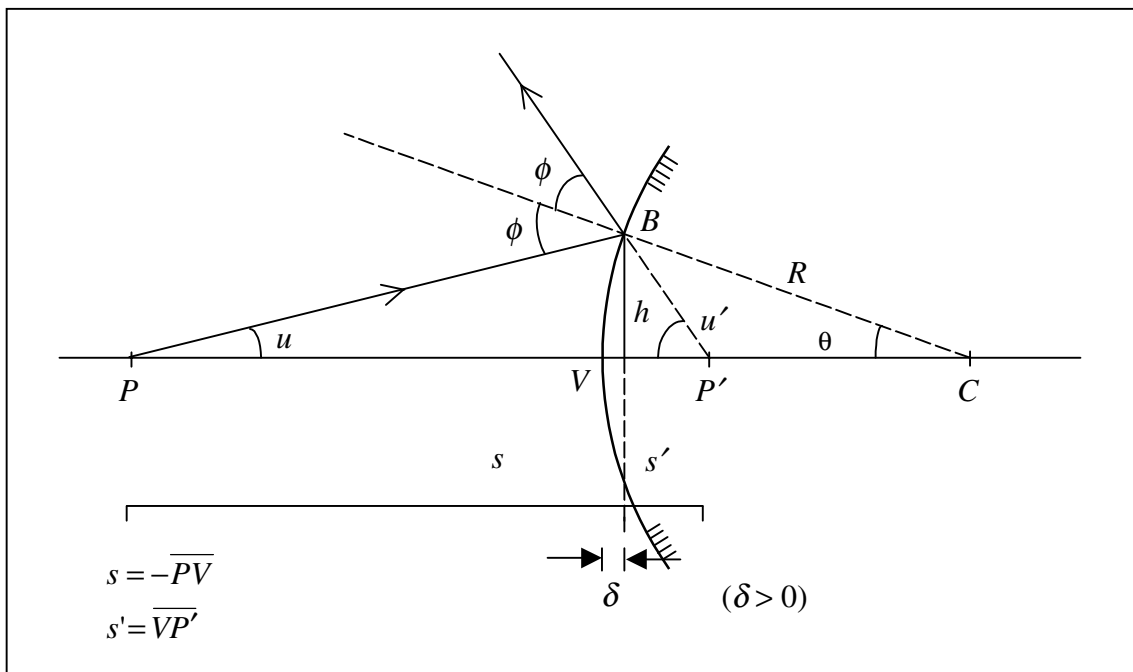


Figura 6.13.- Construcción de la imagen de un punto en un espejo esférico convexo.

(**Atención:** El convenio de signos no es universal y depende del texto. El utilizado aquí coincide, por ejemplo, con el del libro “OPTICS”, de Blaker y Rosenblum, Macmillan Publ. Co., 1993, que es, por lo demás, un texto muy recomendable).

En la figura, en el triángulo  $\widehat{PBP}'$  tenemos:  $u + u' = 2\phi$ ; y análogamente, en el  $\widehat{PBC}$ :  $u + \theta = \phi \rightarrow 2u + 2\theta = 2\phi$ ; restando las dos expresiones tenemos  $u + 2\theta - u' = 0$

$$u - u' = -2\theta$$

### 5.2.1. Aproximación paraxial

Si nos limitamos a estudiar rayos que forman un ángulo pequeño con el eje ( $u \ll 1$ ; *paraxial* significa *cercano al eje*) resulta que también  $u'$  y  $\theta$  serán pequeños y podremos intercambiar arco  $\leftrightarrow$  seno  $\leftrightarrow$  tangente:

$$\tan u - \tan u' \cong -2 \tan \theta \rightarrow \frac{h}{-s + |\delta|} - \frac{h}{s' - |\delta|} \cong -2 \frac{h}{R - |\delta|}$$

En la aproximación paraxial  $\delta \ll |s|$ ,  $\delta \ll |s'|$  y  $\delta \ll R$ ; por tanto:

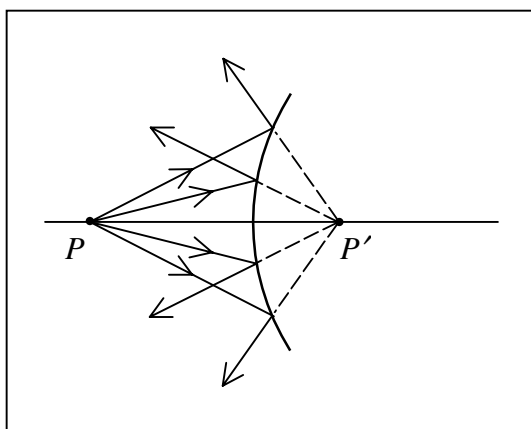


Figura 6.14.- Trayectorias de varios rayos en el espejo convexo.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

Es decir, **la distancia  $s'$  de  $P'$  a  $V$  es independiente del rayo  $u$  y por tanto todos los rayos reflejados parece que proceden de  $P'$**  (dentro de la aproximación paraxial) que, por tanto, es la imagen (virtual) de  $P$ .

En realidad, cuando consideramos rayos no paraxiales ( $u$  grandes) los reflejados no pasan exactamente por  $P'$ , sino cerca, por lo que en la práctica, la imagen de un punto no es otro punto sino una **mancha**, lo que degrada la **definición** de la imagen.

### 5.2.2. Espejo cóncavo

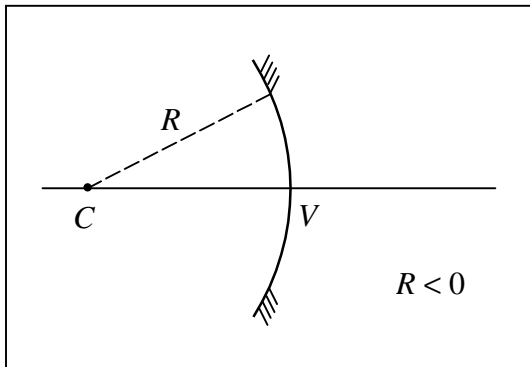


Figura 6.15. Espejo cóncavo.

En un espejo cóncavo, como en la figura 6.15,  $R > 0$  ya que el centro de curvatura se encuentra a la izquierda del vértice. Se puede comprobar, rehaciendo la construcción gráfica, que la ecuación obtenida:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R},$$

continúa siendo válida si se tiene en cuenta que ahora  $R$  es negativo. Por tanto **la ecuación anterior sirve para cualquier espejo esférico, cóncavo o convexo, sin más que tomar adecuadamente los signos de las magnitudes implicadas**. Por otra parte, es importante resaltar que  $s$  y  $s'$  son intercambiables, es decir **las posiciones de un punto objeto y de un punto imagen pueden intercambiarse**, o, dicho de otra manera, las direcciones de los rayos pueden cambiarse de sentido.

### 5.2.3. Foco y distancia focal del espejo

Se define el **foco**  $F$  del espejo como el punto imagen de un punto objeto en el infinito ( $s \rightarrow \infty$ ); y se define la **distancia focal**  $f$  como la del foco al vértice,  $f = \overline{VF}$  (con su signo adecuado) (fig. 6.16):

$$f = (s'_{s \rightarrow \infty}) \rightarrow f = \frac{R}{2}$$



Nótese que cuando una fuente puntual se encuentra en el infinito (en la práctica, muy alejada) todos los rayos que llegan al espejo son paralelos; por tanto también podemos decir que los rayos paralelos al eje pasan (en la aproximación paraxial) por el foco.

Recíprocamente, si el punto objeto se encuentra en el foco, la imagen se produce en el infinito:  $s = f$  ,  $s' \rightarrow \infty$ . La gráfica correspondiente es la misma anterior, fig. 6.16, cambiando el sentido de flujo de los rayos. Nótese que en el caso del espejo convexo el objeto no puede estar físicamente en  $F$  y ha de entenderse como un objeto virtual.

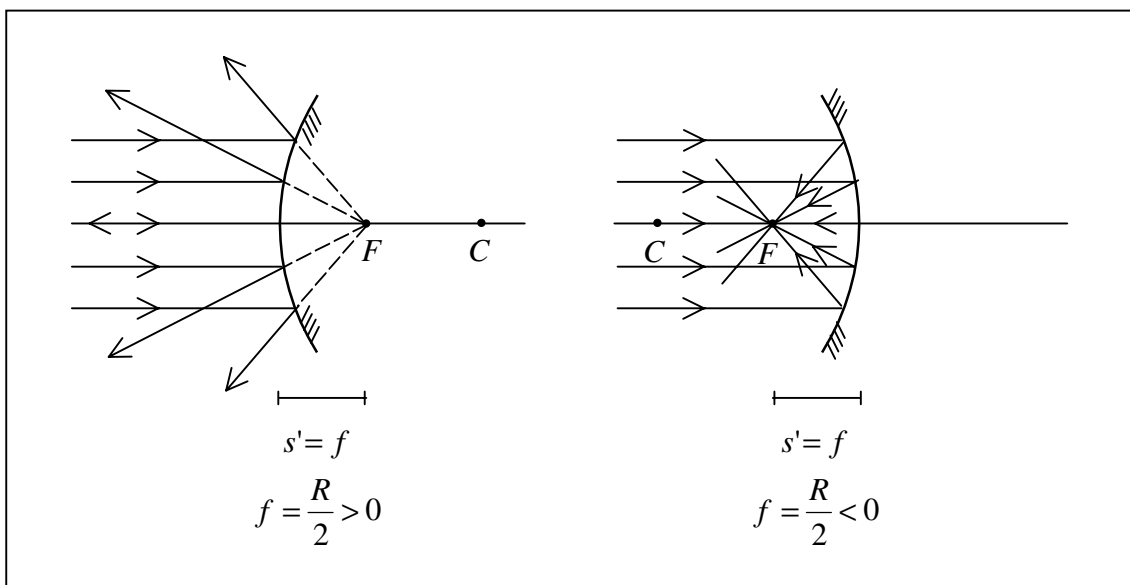


Figura 6.16.- Definición de focos en espejos esféricos como imágenes de un punto objeto en el infinito.

### 5.2.4. Imagen de un objeto

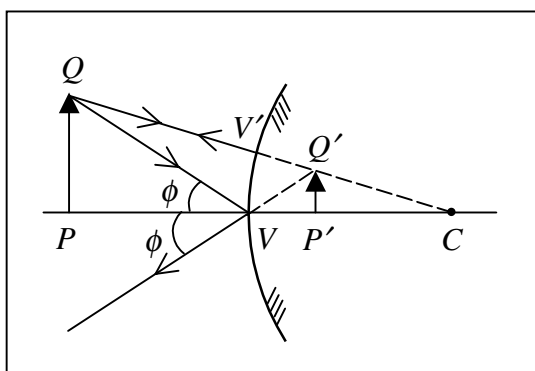


Figura 6.17.- Imagen de un segmento  $PQ$  en un espejo convexo.

Un objeto es una colección (más o menos grande) de puntos o fuentes puntuales. El objeto más sencillo que podemos manejar es un segmento, como el segmento vertical  $PQ$  de la figura 6.17.

El trazado geométrico de  $Q'$  lo hacemos con la ayuda de un rayo  $QV'$  que incide

normalmente en el espejo (apunta hacia el centro de curvatura) y por tanto retrocede sobre su misma trayectoria y el  $QV$ , por ejemplo, que apunta al vértice  $V$ .

Si hiciésemos esto con todos los puntos del segmento comprobaríamos que están sobre una línea que (aproximadamente) es también recta y vertical (realmente es ligeramente curva). Dentro de esta aproximación, para construir gráficamente el segmento  $PQ$  basta con construir  $Q'$  como hemos indicado, mientras que  $P'$  será sencillamente el pie de la vertical trazada desde  $Q'$  hacia el eje.

### 5.2.5. Métodos gráficos

Para construir gráficamente la imagen de un punto objeto que no esté en el eje basta con trazar gráficamente **dos rayos** que se corten, tal como acabamos de ver. Hay cuatro rayos que son muy fáciles de trazar (**rayos principales**, fig. 6.18):

- 1) Un rayo paralelo al eje. Después de la reflexión el rayo (o su prolongación en un espejo convexo) pasa por el foco.
- 2) Un rayo dirigido (o que pase por) el foco. Después de la reflexión el rayo es paralelo al eje.
- 3) (No dibujado en la figura 6.18 pero sí en la 6.17) Un rayo dirigido (o que pasa por) el centro de curvatura  $C$  del espejo. Este rayo incide en la superficie perpendicularmente y se refleja sobre sí mismo, es decir, retrocede sobre la trayectoria de incidencia.
- 4) Un rayo dirigido al vértice del espejo. Después de la reflexión forma el mismo ángulo con el eje que antes.

EJEMPLO 1

Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura de 100 cm de magnitud. Encuéntrese gráficamente la imagen de un objeto en forma de flecha perpendicular al eje del espejo para cada una de las siguientes distancias objeto: 150, 100, 50 y 25 cm.

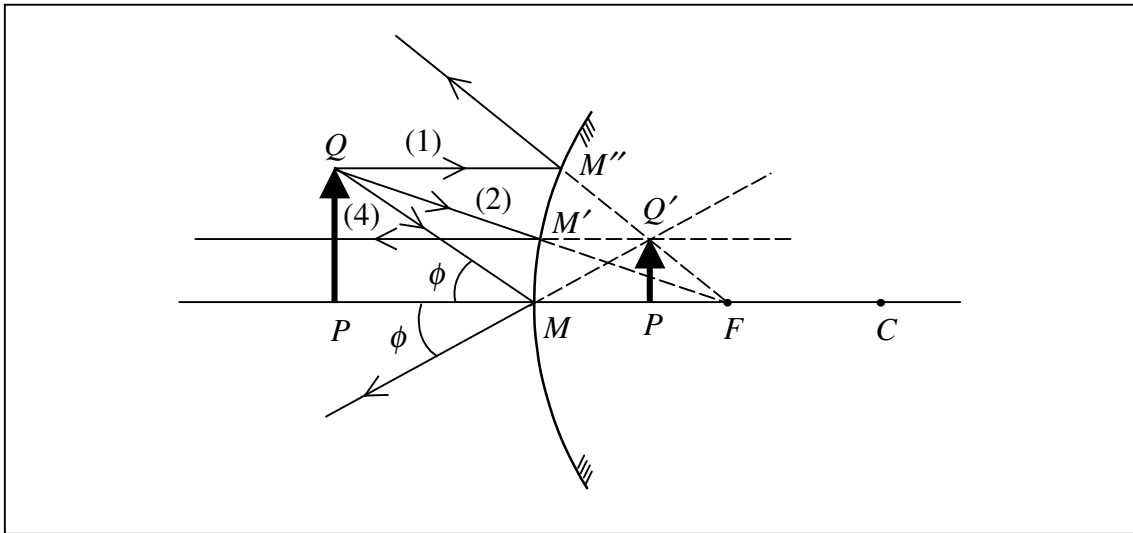


Figura 6.18.- Trazado de los rayos principales originados en un punto  $Q$  y de la imagen del segmento  $PQ$ .

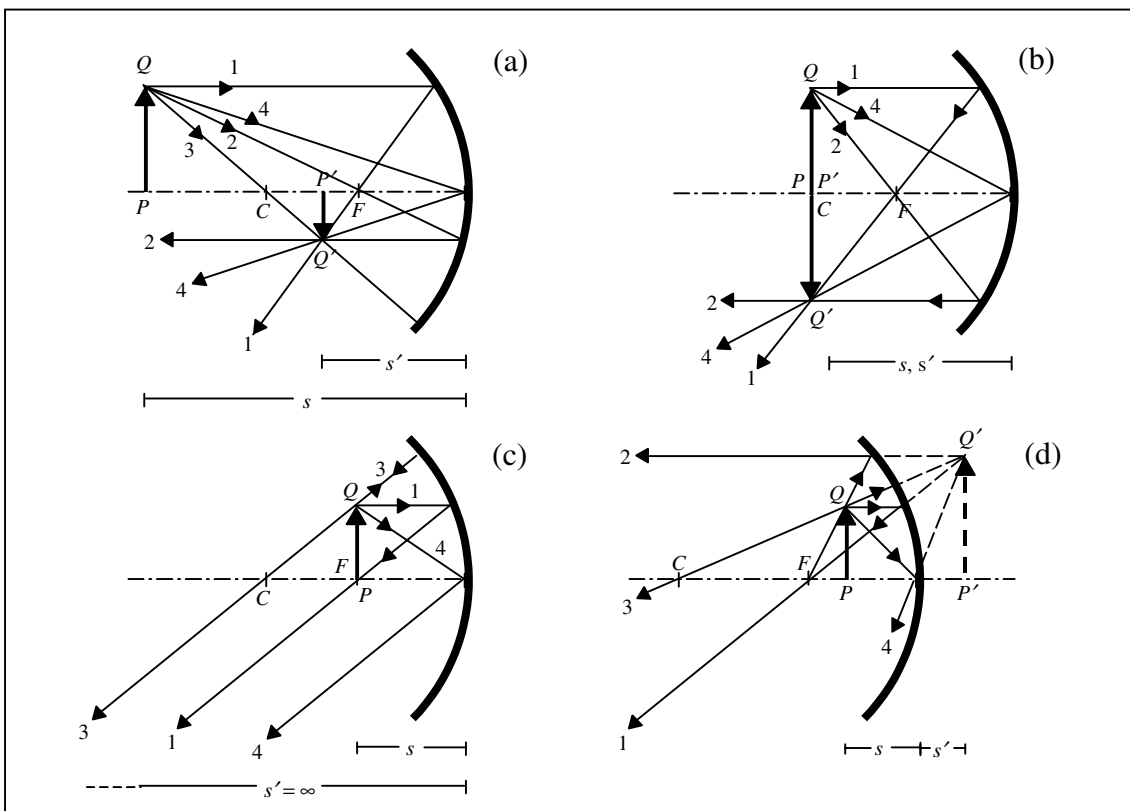


Figura 6.19.- Construcción de la imagen de un objeto situado a diferentes distancias de un espejo cóncavo utilizando rayos principales definidos anteriormente.

La construcción gráfica se indica en las cuatro partes de la figura 6.19. Obsérvese que en (b) y en (c) sólo pueden utilizarse 3 de los 4 rayos definidos.

#### EJEMPLO 2

¿Cuál es la distancia focal óptima para un espejo de aumento de cuarto de baño? A la vista del ejemplo anterior, para obtener una imagen **virtual, derecha y aumentada** es necesario situarse entre el foco y el espejo. A medida que nos acercamos al foco la imagen aumenta (y al mismo tiempo se hacen evidentes las imperfecciones de la superficie del espejo, ya que empezamos a vernos muy distorsionados), y al cruzar el foco la imagen deja de ser derecha y pasa a estar invertida. Por tanto si hemos de situarnos aproximadamente a  $\sim 30$  cm del espejo, su distancia focal habría de estar entre 0.50 y 0.75 m, y por tanto su radio de curvatura entre 1.0 m y 1.5 m.

#### EJEMPLO 3 Construcción geométrica de un objeto en el infinito.

Supongamos, como venimos haciendo, que el objeto es un segmento. Si está en el infinito la información sobre su “tamaño” debe darse como el ángulo bajo el cual se ve. Además, al hacer la construcción gráfica no es posible situar el objeto dentro del papel. Para hacer esta construcción basta con tener en cuenta:

- a) Los ángulos bajo los cuales se ven los puntos extremos del segmento,  $P$  y  $Q$ .
- b) Que todos los rayos que llegan al espejo desde  $P$  (o desde  $Q$ ) son paralelos entre sí, ya que el punto está arbitrariamente lejos.

Con esta información la imagen se construye como en la figura 6.20.

EJEMPLO 4

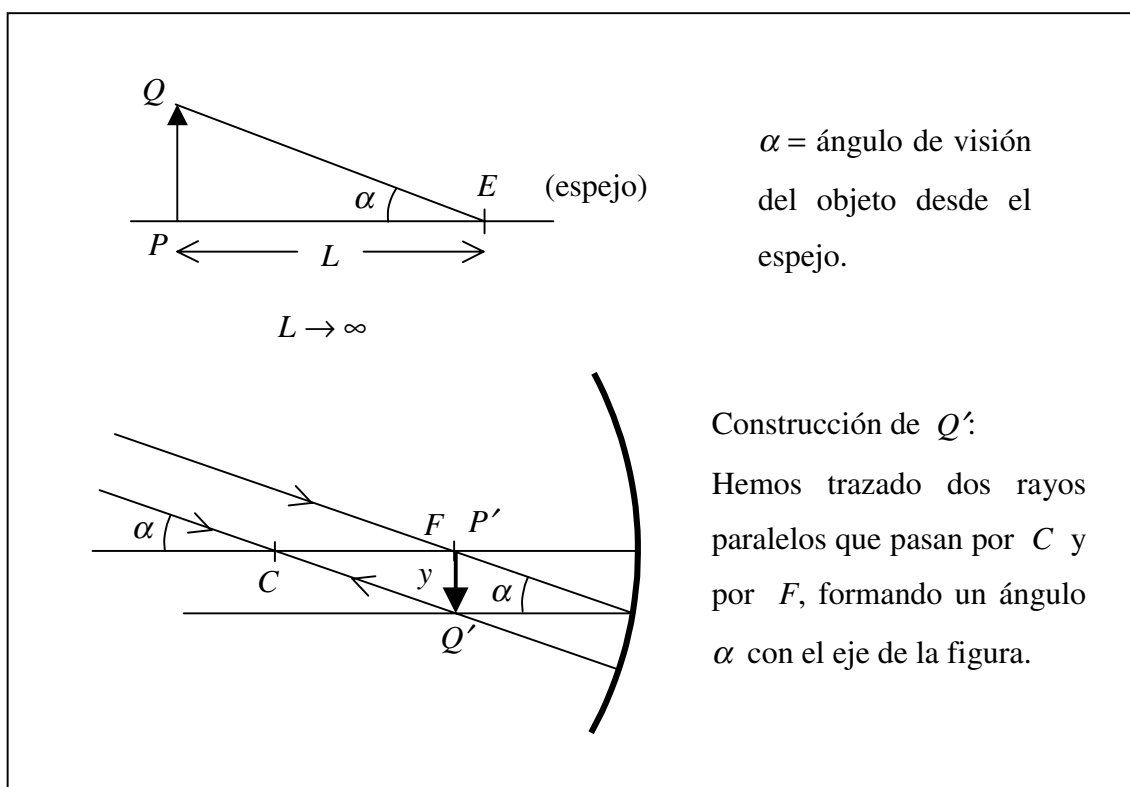


Figura 6.20.- Construcción de la imagen de un objeto en el infinito.

La Luna se ve desde la Tierra bajo un ángulo de  $31'$ . ¿Cuál es el tamaño de la imagen producida por un espejo cóncavo de  $f = 2.0 \text{ m}$ ?

La imagen se produce en el plano focal y si su tamaño es  $y$  (ver fig. 6.20)

$$\frac{y}{f} = \tan \alpha \quad , \quad y = f \tan \alpha = 1.80 \text{ cm}$$

## 6. LENTES

Los espejos tienen dos ventajas; una es que solamente hay que pulir una superficie, mientras que en las lentes hay que pulir dos, y otra es que las leyes de la reflexión son independientes de la longitud de onda (frecuencia) y carecen de la llamada **aberración**

**romática** de las lentes, que veremos más adelante. Por otra parte tienen un inconveniente, y es que devuelven los rayos. Por ejemplo, si queremos formar una imagen de la Luna, como en el último ejemplo, sobre una pantalla, nos encontramos con que ésta ha de interponerse en la trayectoria de los rayos, y la propia pantalla bloquea la imagen.

Una lente es un trozo de material transparente con índice de refracción  $n > 1$  que tiene talladas dos superficies esféricas (eventualmente una de las superficies puede ser plana) que son las que desvían los rayos en su tránsito aire-material-aire (ver figura 6.21). Se define el **eje** de la lente como la recta que contiene los centros de curvatura ( $C_1, C_2$ ) de las superficies esféricas (nótese la diferencia con los espejos; allí solo había un centro de curvatura y el eje lo definía, arbitrariamente, un punto objeto y el centro de curvatura). Como en el caso del espejo hemos de preguntarnos: a) Los rayos que emite un punto  $P$ , ¿convergen en otro punto  $P'$ ? b) ¿Dónde está el punto  $P'$  en caso afirmativo?

## 6.1. APROXIMACIONES

Supondremos, como en el caso del espejo, la **aproximación paraxial**; todos los rayos de interés llegan a la lente formando un ángulo pequeño,  $u$ , con el eje (ángulo pequeño  $\sim$  seno  $\sim$  tangente). Además supondremos que la lente es arbitrariamente **delgada**, es decir, que su espesor máximo (que en el caso de la figura 6.21 se produce en el eje) es mucho menor que las distancias objeto e imagen,  $|s|$  y  $|s'|$ . El trazado de la trayectoria de un rayo que parte de  $P$  se hace por aplicación dos veces de la ley de Snell, y el objetivo es, dados  $s$  y  $u$ , calcular  $s'$  y  $u'$  (fig. 6.21).

- **Aproximación paraxial:**

$$u \ll 1 \rightarrow i, r, i', r', \theta_1, \theta_2, u' \ll 1 \rightarrow \sin \alpha \sim \tan \alpha \sim \alpha$$

Por tanto

$$\sin i = n \sin r \rightarrow i \cong n r$$

$$n \sin i' = \sin r' \rightarrow n i' \cong r'$$

- **Aproximación de lente delgada** (el grosor de la lente está exagerado en la figura):

$$\delta \approx 0 \quad , \quad h_A \cong h_B \cong h_D \cong h$$

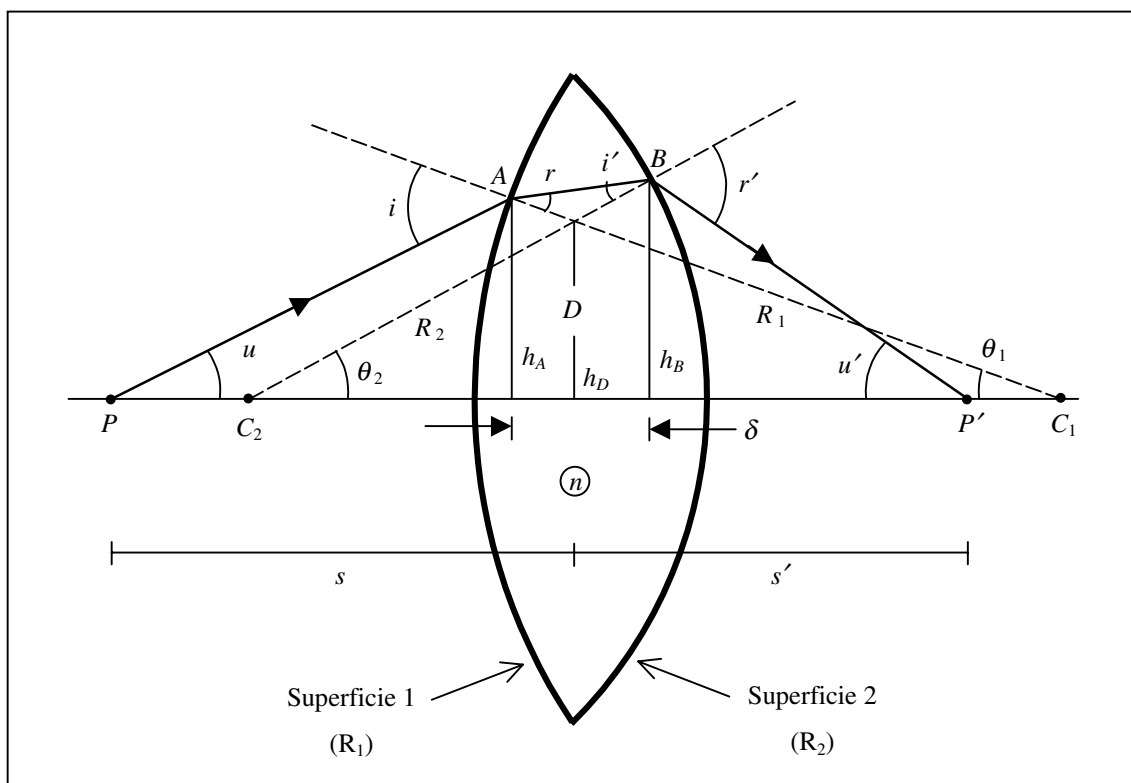


Figura 6.21.- Trazado de rayos en una lente biconvexa (dos superficies convexas).

Con las aproximaciones anteriores tenemos:

- En  $\widehat{C_2BP'}$ :

$$u' + \theta_2 = r' \quad \rightarrow \quad u' = r' - \theta_2 \quad , \quad \text{pero} \quad r' = n i'$$

- En  $\widehat{ABD}$  y  $\widehat{C_2DC_1}$  (nótese que estos dos triángulos tienen un ángulo común):

$$r + i' = \theta_1 + \theta_2 \quad \rightarrow \quad i' = \theta_1 + \theta_2 - r \quad \rightarrow \quad u' = n i' - \theta_2 = n(\theta_1 + \theta_2 - r) - \theta_2$$

Pero  $r = \frac{1}{n} i$  y además:

- En triángulo  $\widehat{PAC}_1$ :

$$i = u + \theta_1 \rightarrow r = \frac{1}{n} (n + \theta_1) \quad , \quad n r = u + \theta_1$$

Finalmente

$$u' = n(\theta_1 + \theta_2) - u - \theta_1 - \theta_2, \quad u' + u = (n-1)(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{h}{s'} - \frac{h}{s} = (n-1) \left( \frac{h}{R_1} - \frac{h}{R_2} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \equiv \frac{1}{f}}$$

(En los pasos finales hemos hecho uso de que, en la figura,  $s < 0$  y  $R_2 < 0$ ). Vemos que hemos obtenido una expresión muy similar a la de los espejos, párrafo 5.2.1; la diferencia está en el cambio de signo relativo entre  $s$  y  $s'$ , que se explica porque en los espejos el rayo vuelve mientras que en las lentes el rayo la atraviesa y continúa en la misma dirección.

A la cantidad  $f$  definida en la ecuación anterior se le llama **distancia focal** de la lente.

## 6.2. LENTES POSITIVAS O CONVERGENTES

Para la lente **biconvexa** de la figura 6.21  $R_1 > 0$  y  $R_2 < 0$ ; por tanto

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (n-1) \left( \frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|} \right) > 0$$

ya que  $n > 1$ . De manera que  $f > 0$ , y a una lente con distancia focal positiva se le llama **convergente** o **positiva**.



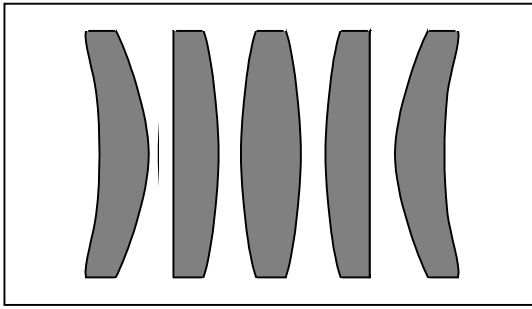


Figura 6.22.- Tipos de lentes positivas.

La figura 6.22 muestra otros tipos de lentes positivas (**plano-convexas** y **meniscos**). Se puede comprobar que en todas ellas  $f > 0$ . Los meniscos (formados por dos superficies curvas con radios del mismo signo) son muy comunes en las gafas.

El punto objeto cuya imagen se produce en el infinito ( $s' = \infty$ ) se llama **foco** o **punto focal objeto** (o **primero**). De la ecuación de la lente se obtiene  $s = -f$ , y en este caso de lente positiva el foco objeto se encuentra a la izquierda de la lente (fig. 6.23). Análogamente se define el **foco** (punto focal) **imagen** (o **segundo**) como el punto imagen de un objeto en infinito ( $s = \infty$ )  $\rightarrow s' = f$ , que en este caso está a la derecha. Los planos que contienen los focos se llaman **planos focales**.

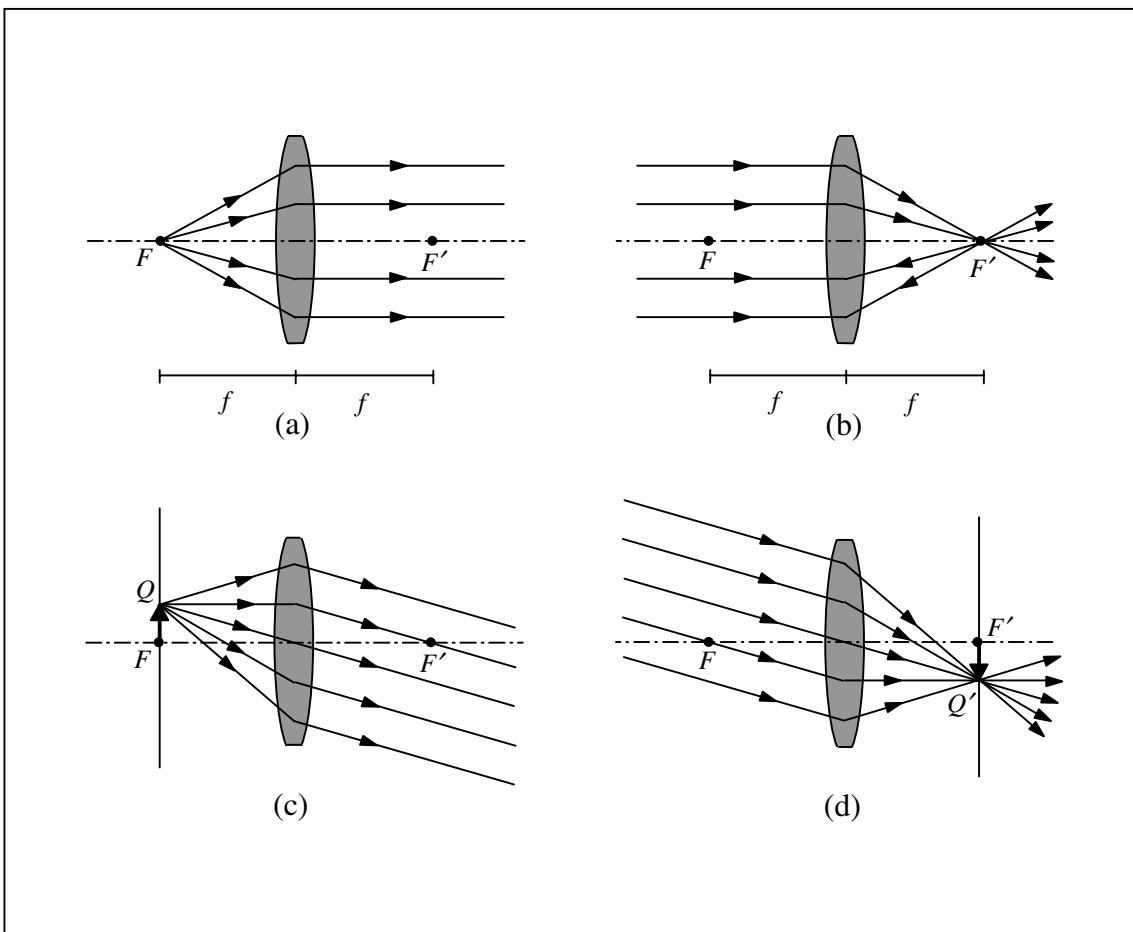


Figura 6.23.- (a) y (b): Puntos focales objeto e imagen de una lente delgada. (c) y (d): Planos focales de la lente anterior (planos que pasan por los focos).

### 6.3. LENTES NEGATIVAS O DIVERGENTES

En una lente bicóncava (fig. 6.24),  $R_1 < 0$  y  $R_2 > 0$  y

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -(n-1) \left( \frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|} \right) < 0 \rightarrow f < 0$$

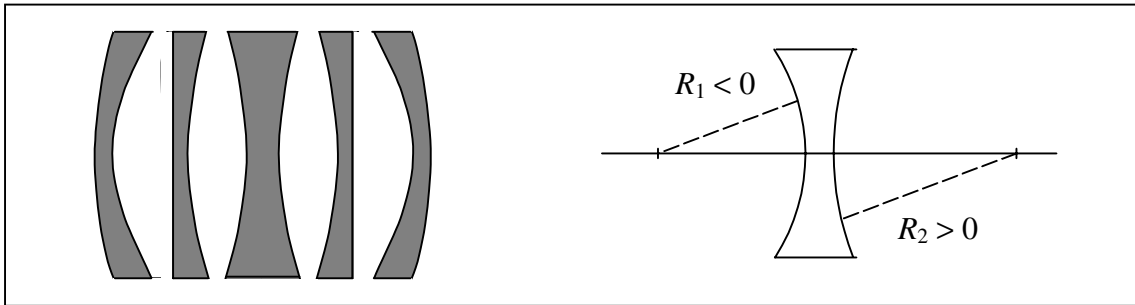


Figura 6.24.- Tipos de lentes negativas: bicóncavas, plano-cóncavas y meniscos.

Una lente con distancia focal negativa se llama divergente o negativa, y puede comprobarse que también es el caso para las lentes plano-cóncavas y meniscos divergentes (los cristales de las gafas de los miopes) como en la figura.

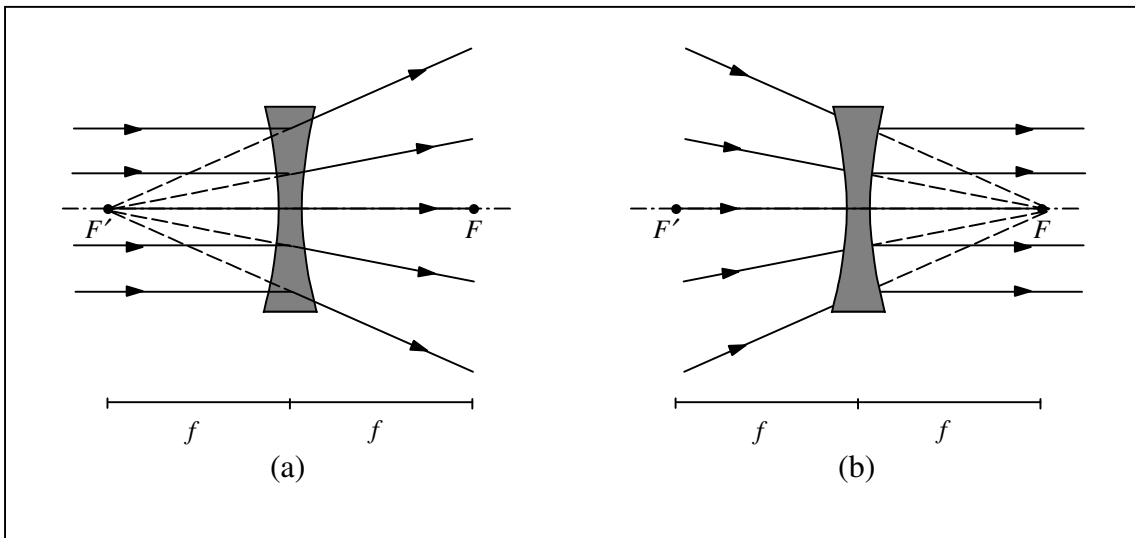


Figura 6.25.- (a) Foco imagen. (b) Foco objeto; ambos para una lente negativa.

En una lente divergente los focos imagen y objeto están en posiciones opuestas a sus posiciones en una lente convergente, y no son los rayos los que pasan por ellos, sino sus prolongaciones.

#### 6.4. MÉTODOS GRÁFICOS

La posición y tamaño de la imagen de un objeto formado por una lente delgada pueden hallarse, como en el caso de un espejo, por el método gráfico consistente en determinar el punto de intersección, después de atravesar la lente, de al menos dos rayos principales que divergen desde un punto determinado del objeto que no esté sobre el eje, como el punto  $Q$  de la figura 6.26. Entonces todos los rayos procedentes de este punto que pasan a través de la lente se cortarán en el mismo punto imagen. En la figura 6.26 se muestran tres rayos principales cuyas trayectorias pueden dibujarse fácilmente:

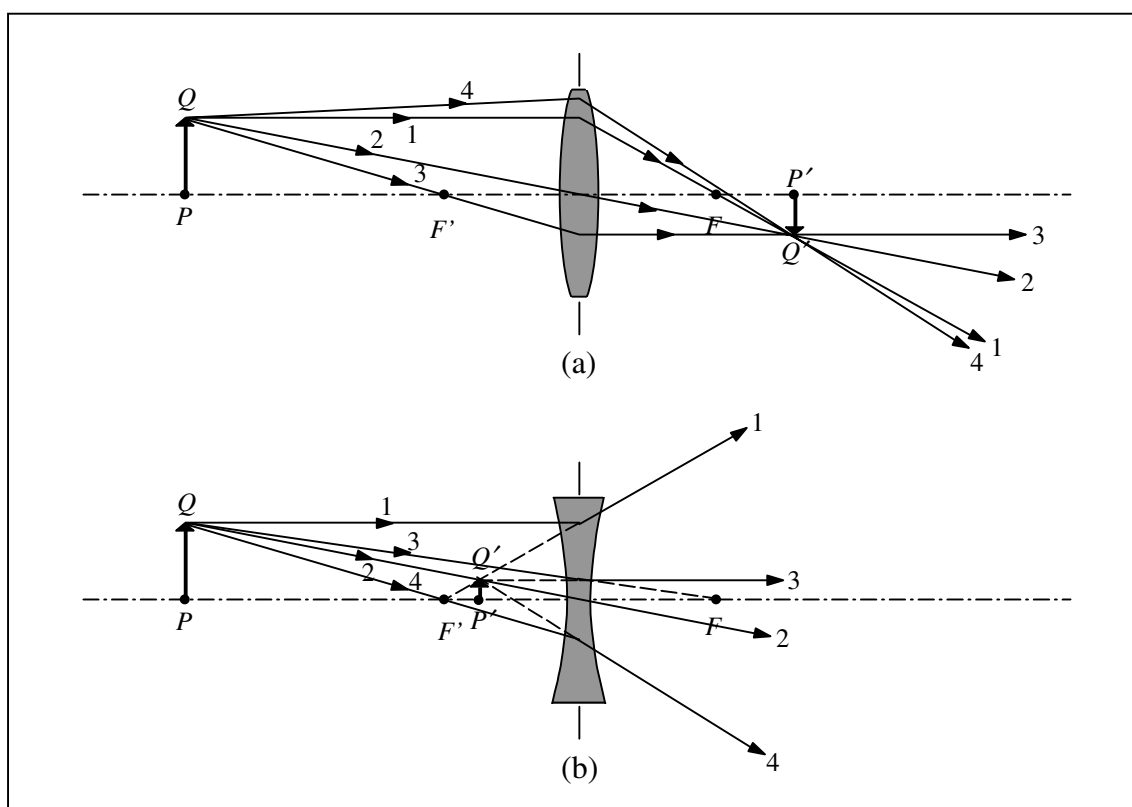


Figura 6.26.- Construcción de los rayos principales de un punto  $Q$  en una lente divergente.

1. Un rayo paralelo al eje, que después de la refracción por la lente, pasa por el segundo foco en el caso de una lente convergente, o parece venir del segundo foco en el caso de una lente divergente.
2. Un rayo que pasa por el centro de la lente no es desviado apreciablemente, pues las dos superficies de la lente a través de las cuales pasa el rayo central son aproximadamente paralelas si la lente es delgada. Un rayo que pasa a través de una lámina de caras paralelas no es desviado, sino únicamente desplazado y para una lente delgada, el desplazamiento puede despreciarse.
3. Un rayo que pasa por (o se dirige hacia) el primer foco emerge paralelo al eje.

Una vez hallada la posición del punto imagen por la intersección de dos cualesquiera de los rayos 1, 2 y 3, pueden dibujarse las trayectorias de todos los demás rayos procedentes del mismo punto, como el rayo 4 de la figura 6.26. En la figura 6.27 se representan algunos ejemplos de este método.

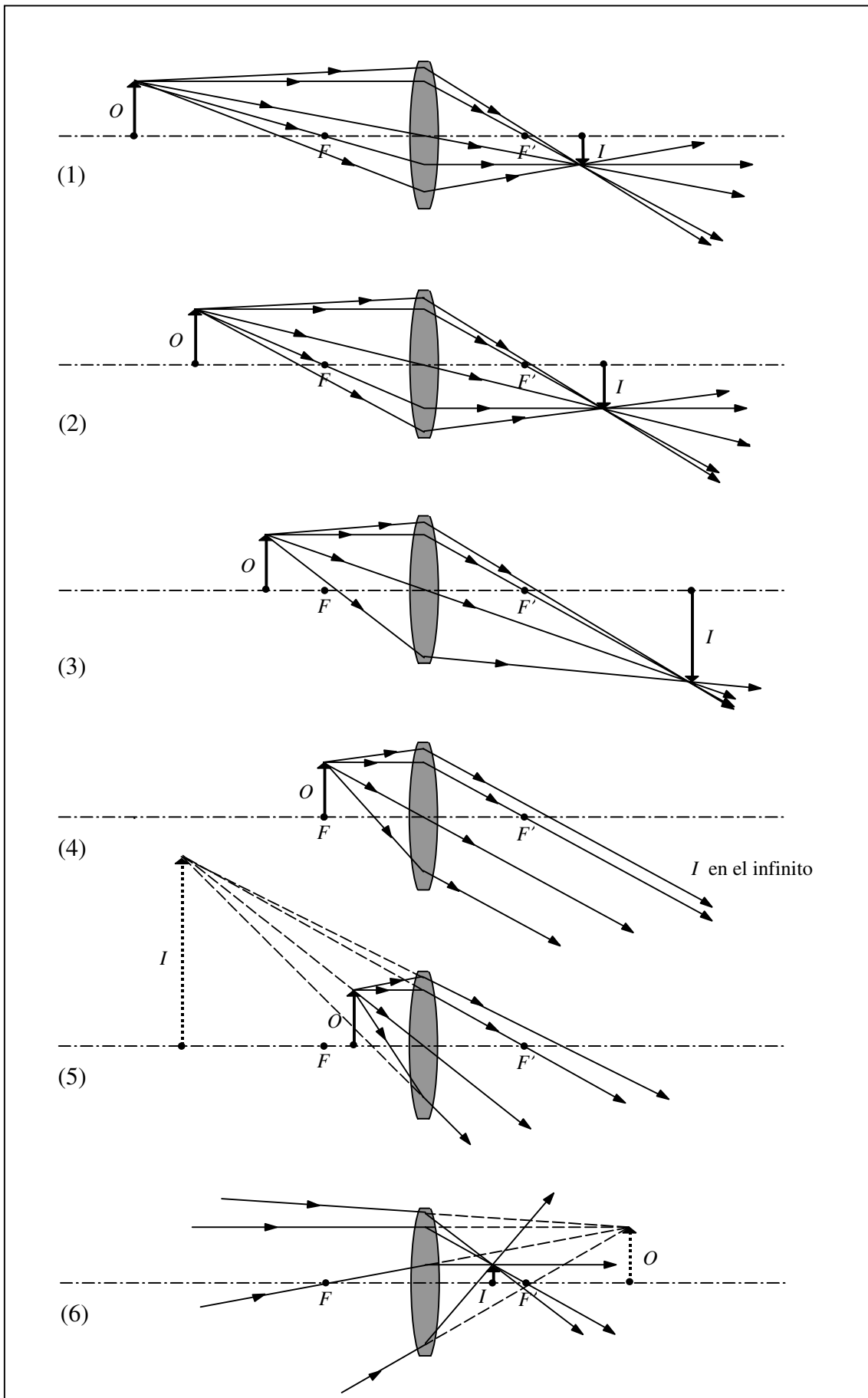


Figura 6.27.- Formación de una imagen por una lente delgada.

En la imagen (6) de esta figura el objeto  $O$  **está a la derecha de la lente**. Esto sólo es posible si se entiende que el objeto  $O$  es a la vez el resultado de lentes (o espejos) que están a la izquierda. En los ejemplos (1)-(5) el objeto puede ser real o bien puede ser también la imagen producida por lentes situadas a la izquierda.

Al decir que “el objeto está a la derecha de la lente” ha de entenderse que, de no estar la lente, la imagen se produciría allí. Evidentemente la presencia de la lente modifica la trayectoria de los rayos y el “objeto” no llega a tener existencia real.

#### EJEMPLO 1

Un objeto situado a la izquierda de (frente a) una lente divergente siempre produce, con independencia de la distancia, una imagen **virtual, derecha** y de **menor tamaño aparente**. (Véase la figura 6.26-b para la construcción gráfica.)

#### EJEMPLO 2

Un objeto situado a la derecha de una lente divergente (es decir, un objeto que se formaría a la derecha de la lente en ausencia de ésta) produce una imagen **real, derecha** y de **menor tamaño** que el objeto si éste está situado entre la lente y el foco objeto  $F$ . Sin embargo, si el objeto está también a la derecha del foco  $F$ , la imagen es **virtual e invertida** (fig. 6.29).

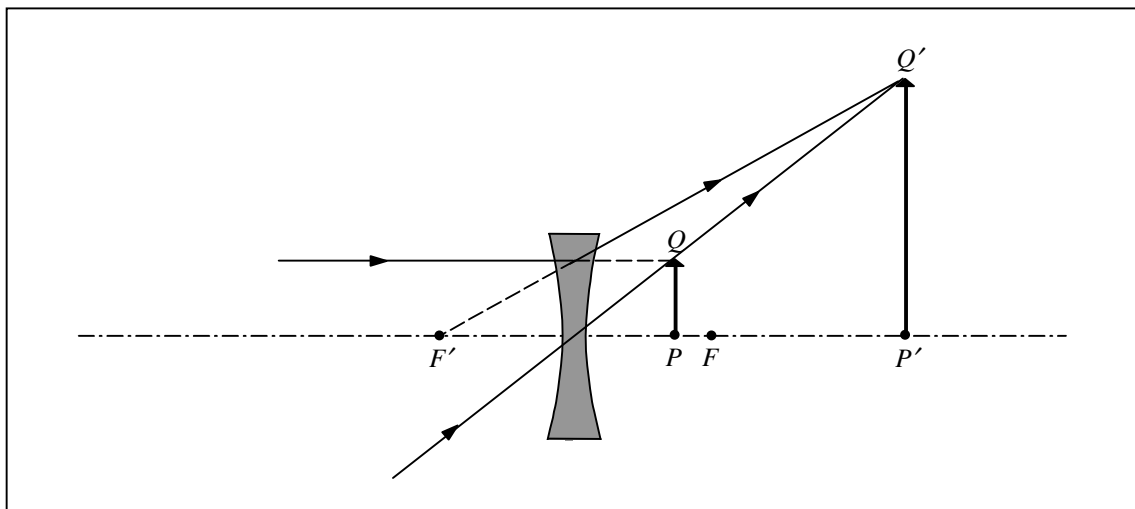


Figura 6.28.- Imágenes de objetos situados a la derecha de una lente negativa (I).

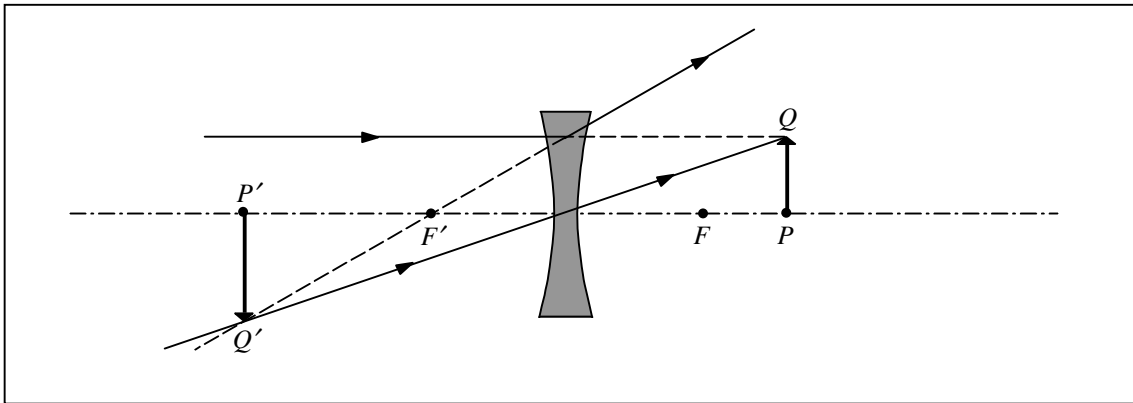


Figura 6.29.- Imágenes de objetos situados a la derecha de una lente negativa (y II).

**EJEMPLO 3.** Inyección de un láser en una fibra óptica.

Supongamos que un láser produce un haz cónico (de sección circular) de divergencia total  $30.0^\circ$  y diámetro a la salida del dispositivo de 2 mm. El haz se quiere inyectar en el núcleo de una fibra óptica de  $20 \mu\text{m}$  de diámetro y apertura numérica  $NA = 0.557$ ; recordemos que esto quiere decir que el haz de inyección en la fibra ha de tener una divergencia **inferior** a  $\beta$ , donde

$$\sin(\beta/2) = NA = 0.557 \rightarrow \beta = 67.7^\circ$$

Como el diámetro del haz es mucho mayor que el del núcleo de la fibra ( $20 \mu\text{m}$ ) hace falta usar una lente convergente, como en la figura 6.30.  $D$  es el diámetro del haz en la lente (que normalmente se hace coincidir con el de la lente).

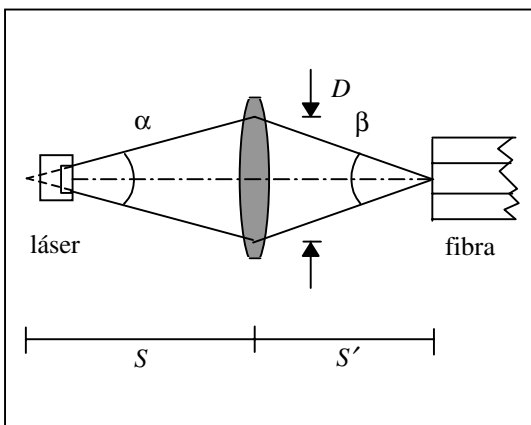


Figura 6.30.- Inyección de un haz cónico en el núcleo de una fibra óptica, ejemplo 3.

Para que la figura dibujada sea posible ha de ser  $|s| > f$ , ya que de otro modo el haz de salida sería divergente. Además tenemos:

$$\frac{D/2}{s'} - \frac{D/2}{s} = \frac{D/2}{f} \rightarrow \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{D}{2f}$$

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{D}{2f} - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \tan\left(\frac{67.7^\circ}{2}\right) = 0.67$$

Por supuesto el problema admite infinitas soluciones, ya que hay más grados de libertad que variables. La ecuación anterior puede también escribirse:

$$\frac{D}{2f} \leq \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 0.67 = \tan\left(\frac{30^\circ}{2}\right) + 0.67 = 0.939$$

Se puede comprobar en los catálogos de lentes que normalmente  $f/D \geq 1$ , y solamente en casos especiales (como en el caso de las lentes de los cabezales lectores de Compact Disc, CD-ROM y DVD -Digital Video Disc-),  $f/D$  llega a alcanzar el valor 0.5. Es decir, las lentes más corrientes tienen un diámetro inferior a la distancia focal, ya que hacerlas con un diámetro mayor encarece su precio. Por ejemplo, en los objetivos de las cámaras fotográficas el cociente  $f/D$  suele estar entre 2 y 5.

Podemos fijar entonces, por ejemplo, el valor  $f/D = 2$ . Por otra parte ha de ser  $D \geq 2$  mm (diámetro del haz a la salida del láser). Si ponemos, otra vez por ejemplo, la lente pegada al láser, entonces:

$$D = 2 \text{ mm} \quad , \quad f = 2D = 4 \text{ mm}$$

$$\frac{D/2}{|s|} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow |s| = 3.732 \text{ mm}$$

Esta solución es imposible, ya que hemos visto que se requiere  $|s| > f = 4 \text{ mm}$ . Si probamos con  $f/D = 1$  obtenemos, para los mismos valores de  $D$  y de  $|s|$ ,  $f = 2$  mm, y para la distancia entre la lente y la fibra,

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s} \rightarrow s' = 4.31 \text{ mm}$$



## 6.5. LENTES GRUESAS

La condición de lente delgada en la práctica no se cumple más que en raras ocasiones. Es decir, en realidad el grosor de la lente no es despreciable frente a las restantes dimensiones del problema. No obstante, tanto la ecuación de las lentes como las construcciones gráficas **continúan siendo válidas** si introducimos los **planos principales** de la lente, definidos de manera que (fig. 6.31):

- 1) La lente tiene dos de estos planos cuya localización normalmente da el fabricante en el catálogo referida a las superficies esféricas que forman la lente.
- 2) La distancia focal es la medida entre los planos principales y los focos de la lente.

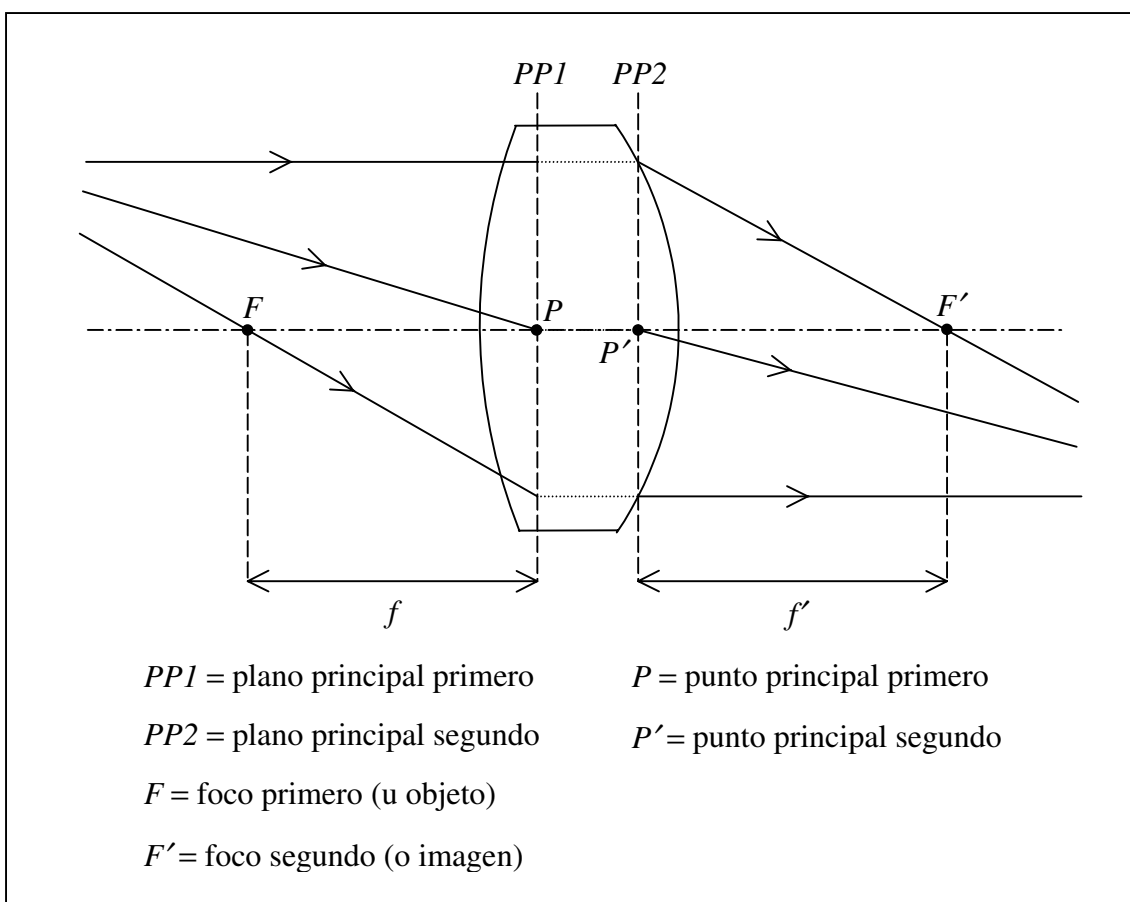


Figura 6.31. Definición de planos y puntos principales de una lente gruesa.

- 3) Las construcciones gráficas se realizan como si la distancia entre los planos principales fuese nula; es decir, un rayo que entra por uno de los planos sale por el otro a la misma altura sobre el eje.
- 4) Los puntos en que los planos principales cortan el eje se llaman **puntos principales**. De manera que un rayo que entra en la gráfica por  $P$  sale por  $P'$  paralelo al de entrada.
- 5) Las distancias objeto e imagen,  $s$  y  $s'$ , también se miden desde los planos principales.

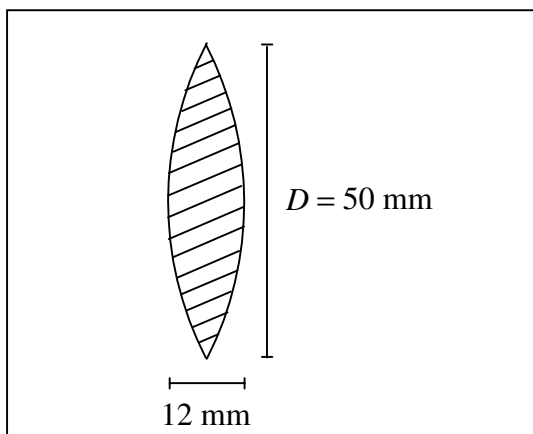
(ADVERTENCIA: En la figura anterior los trozos de rayos dibujados **dentro** de la lente no se corresponden con las trayectorias reales. Son sólo a efectos de construcción gráfica).

#### EJEMPLO

Supongamos que queremos diseñar una lente biconvexa con  $|R_1| = |R_2| = R$ ,  $f = 50$  mm y  $D = 50$  mm ( $f/D = 1.0$ ), a partir de vidrio de  $n = 1.55$ . Se obtiene:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (n-1) \frac{2}{R}, \quad R = 2(n-1)f = 55 \text{ mm}$$

y el aspecto de la lente es como en la figura 6.32.



Se observa que resulta una lente muy gruesa (12 mm). Como hemos indicado en un ejemplo anterior, las lentes con  $f/D < 1.0$  son poco frecuentes y caras.

Figura 6.32.- Ejemplo de lente gruesa.

## 7. INSTRUMENTOS ÓPTICOS

En este párrafo estudiamos someramente dos instrumentos de interés en el contexto del curso: La cámara fotográfica y el telescopio.

### 7.1. LA CÁMARA FOTOGRÁFICA

Está formada por una cámara cerrada (para que no entre la luz) con una lente convergente que forma, sobre la pared opuesta, una imagen real e invertida de la escena que la cámara tiene delante (fig. 6.33).

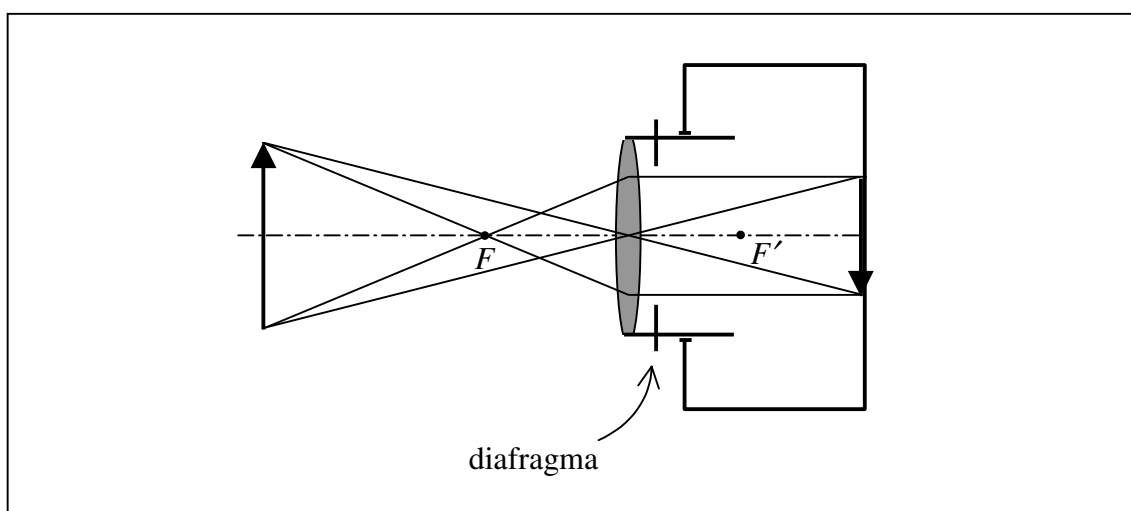


Figura 6.33.- Esquema de una cámara fotográfica.

Cuando la escena está muy lejos ( $\rightarrow \infty$ ) la imagen se produce en el plano focal de la lente. Si la escena está más cerca, la lente (objetivo) debe alejarse de la pared (enfocar). Para controlar la cantidad de luz que llega a la película normalmente existe una apertura circular de diámetro graduable (diafragma o iris) que realmente controla el diámetro efectivo de la lente. Por esta razón la posición (apertura) del diafragma viene indicada en el objetivo a través del cociente  $f/D$  ( $f$  = distancia focal de la lente,  $D$  = diámetro efectivo de la lente), que también se llama *número  $f$*  ó *# $f$* .

Estas posiciones del diafragma (*stops*) están fijadas de manera que entre una y la siguiente existe un factor  $\sqrt{2} = 1.41$ , y entre dos alternas, por tanto, un factor 2. De manera que entre una posición y la siguiente el área efectiva de la lente se reduce a la mitad, y por tanto la cantidad de luz que pasa también es la mitad que en la posición anterior.

## EJEMPLO

El objetivo de una cámara fotográfica de 50 mm de distancia focal y  $f/D = 2.0$  suele indicarse de la manera siguiente:

$$\text{XXXX} \quad 1 : 2.0 / 50$$

donde XXXX es el nombre que le da el fabricante al objetivo. Las posiciones (*stops*) del diafragma serán:

$$2 / 2.8 / 4 / 5.6 / 8 / 11 / 16 / 22 \quad (= f/D = \#f)$$

es decir, en saltos de  $\sqrt{2} = 1.4$  (con el redondeo de 11.2 a 11.0 y lo mismo en 22). Por tanto, en apertura máxima la lente tiene  $D = 25$  mm y área efectiva  $\pi D^2 / 4 = 4.91 \text{ cm}^2$ , y en apertura mínima ( $f/D = 22$ ),  $D = 50/22 = 2.27$  mm y área  $\pi D^2 / 4 = 0.040 \text{ cm}^2$ . De manera que el área de la apertura mínima es  $11^2 = 121$  veces más pequeña que la de la apertura máxima.

## 7.2. EL TELESCOPIO ASTRONÓMICO

Es un instrumento que permite ver más grandes objetos alejados, pero como los objetos se ven invertidos, suele utilizarse solamente para observaciones astronómicas. Tiene dos aplicaciones:

- 1) (La que le da el nombre) Ver objetos alejados con un tamaño aparente mayor.
- 2) Modificar el diámetro y/o la divergencia de un haz de luz, por ejemplo, un láser. Esta aplicación tiene interés en sistemas de comunicaciones ópticas.

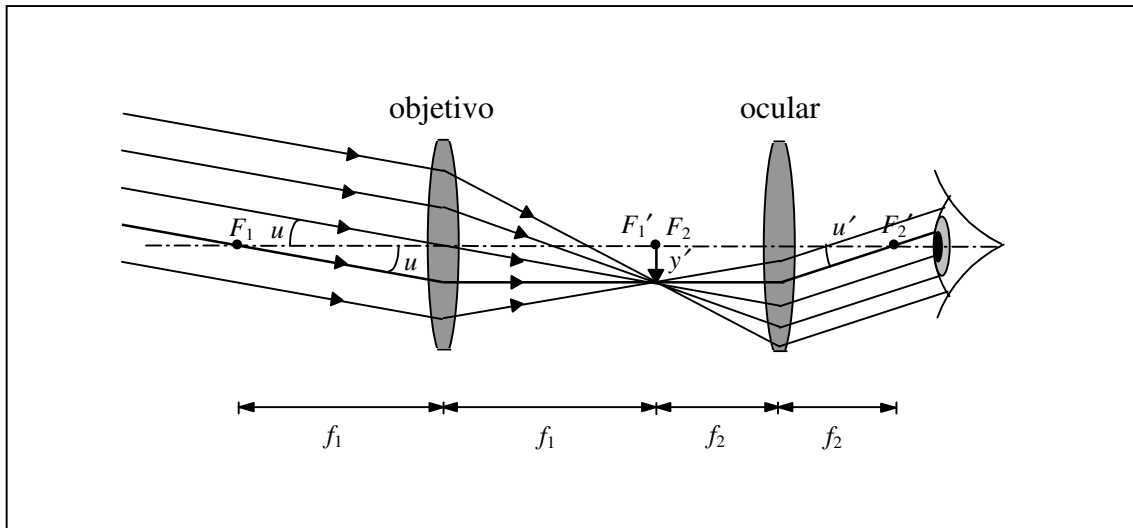


Figura 6.34.- Construcción de la imagen de un objeto en el infinito. La imagen final está también en el infinito e invertida

Está formado por dos lentes positivas (fig. 6.34): objetivo (por donde entra la luz), con distancia focal  $f_1$ , y ocular (donde se pone el ojo), de distancia focal  $f_2 < f_1$ , de tal manera que  $F_1'$  y  $F_2$  (focos) coinciden cuando se enfoca a infinito. De esta manera, un haz de rayos que entra paralelo (viene del infinito) produce una imagen en el plano focal  $F_1'$  del objetivo, que a su vez es plano focal  $F_2$  del ocular, de manera que el haz de rayos sale paralelo hacia el ojo y a éste le parece ver una imagen también en el infinito; pero la imagen que ve el ojo abarca un ángulo  $u'$  que es mayor que el de entrada  $u$ , ya que si nos fijamos en el rayo que pasa por el foco  $F_1$  se cumple que:

$$\tan u = \frac{y'}{f_1}, \quad \tan u' = \frac{y'}{f_2}, \quad \frac{\tan u'}{\tan u} = \frac{f_1}{f_2} > 1$$

Al cociente  $u'/u$  se le llama **aumento angular** y, si los ángulos son pequeños:

$$\frac{u'}{u} \approx \frac{f_1}{f_2}$$

Obsérvese como, efectivamente, este telescopio proporciona una imagen **invertida** del objeto. Nótese también que, si el objeto no está en el infinito, es necesario reajustar la distancia entre objetivo y ocular para producir de nuevo una imagen enfocada.

En este telescopio el objetivo puede sustituirse por un espejo cóncavo, que hemos visto que funciona como una lente positiva. En este caso, como el espejo devuelve los rayos y la primera imagen se forma delante del espejo, es necesario utilizar un espejo secundario para que el observador no bloquee la luz. En el telescopio de Newton el espejo es plano y de forma elíptica (fig. 6.35, arriba). Para que el bloqueo de la luz sea mínimo se pone cerca del foco del espejo, donde el haz de luz incidente tiene un diámetro pequeño.

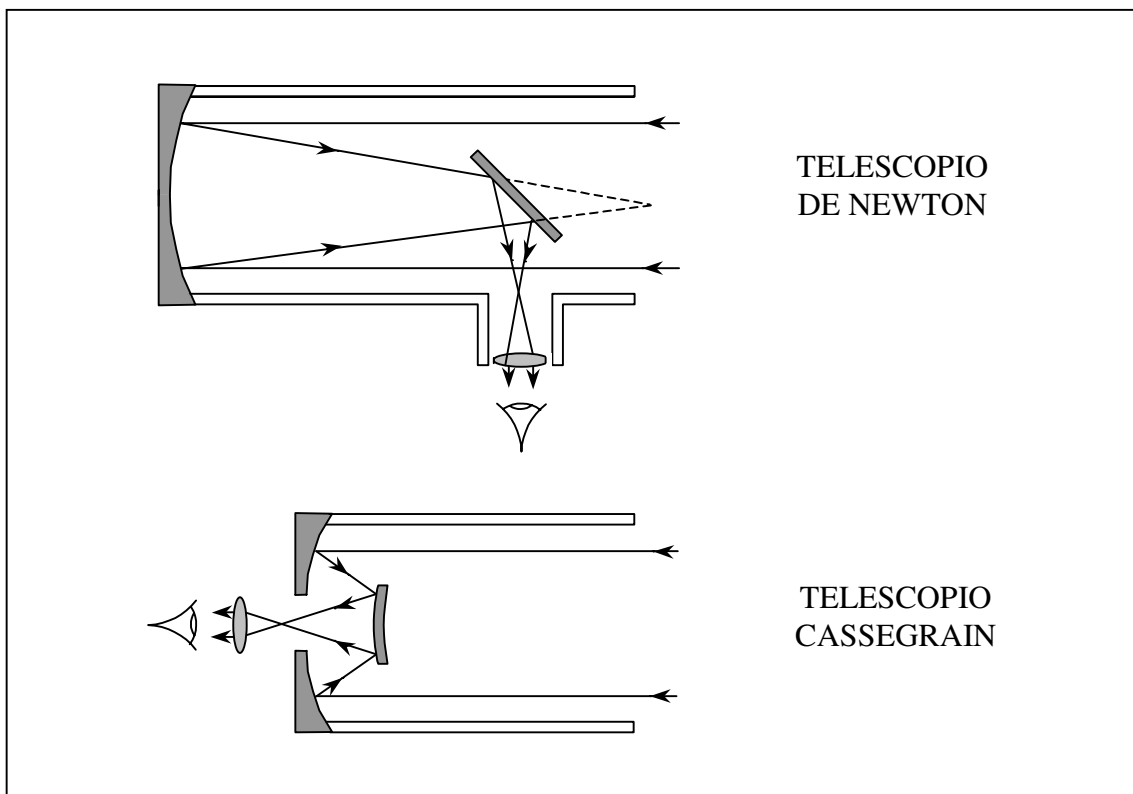


Figura 6.35. Dos configuraciones de telescopios con espejo reflector.

En la configuración Cassegrain el espejo secundario es convexo y la luz sale hacia el ojo por un orificio practicado en el espejo principal. La configuración Cassegrain es muy común en grandes antenas parabólicas de comunicaciones.

### 7.3. EL TELESCOPIO ASTRONÓMICO COMO EXPANSOR DE HAZ

Supongamos un haz de rayos paralelos al eje que incide en el ocular de un telescopio, como en la figura 6.36.

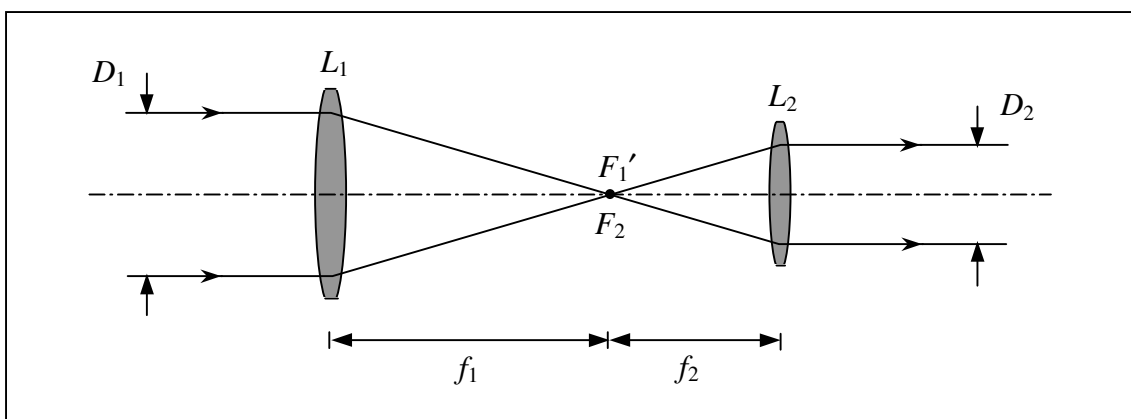


Figura 6.36.- Expansión (o reducción) de un haz paralelo a través de un telescopio.

El haz saliente también es paralelo, pero su diámetro es menor que el diámetro de entrada. Es fácil ver en la figura que:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{f_2}{f_1} < 1$$

Por tanto el telescopio actúa como **reductor** (o **expansor**, si se hace entrar la luz por la lente de menor distancia focal, \$L\_2\$ en la figura) del diámetro de un haz colimado (de rayos paralelos) sin modificar su colimación. Se utiliza mucho en aplicaciones de láseres.

#### EJEMPLO

El telescopio expansor de haz se puede utilizar también para **controlar la divergencia** del haz de salida modificando la distancia entre las lentes. En la figura siguiente, 6.37, se supone que las lentes se han alejado la cantidad \$\delta\$ :

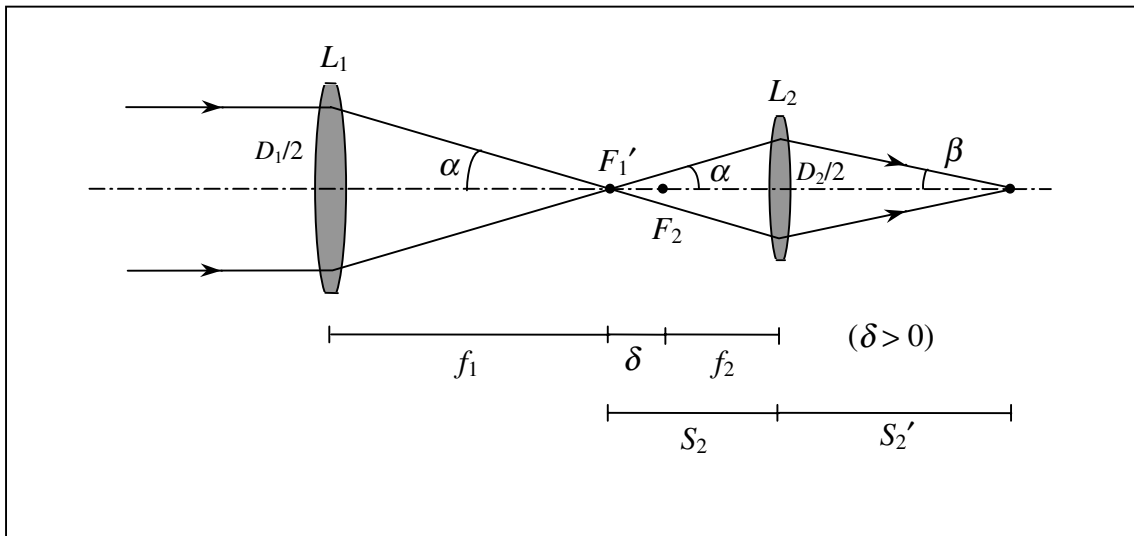


Figura 6.37.- Modificación de la divergencia de un haz colimado con un telescopio.

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f_2}; \quad s_2 = -(f_2 + \delta) \rightarrow \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_2 + \delta} = \frac{\delta}{f_2(f_2 + \delta)}$$

$$\tan \beta = \frac{D_2/2}{s'_2} = \frac{\delta}{f_2} \frac{D_2/2}{f_2 + \delta} = \frac{\delta}{f_2} \tan \alpha$$

Si  $\delta$  fuese negativo,  $\beta$  también se haría negativo y el haz sería divergente en lugar de convergente como se ha dibujado en la figura.

## 8. ABERRACIONES DE LAS LENTES

Incluso en el caso de que las superficies talladas en la lente sean perfectamente esféricas, las imágenes presentan defectos que se llaman aberraciones. Por ejemplo, los rayos no paraxiales no convergen en el mismo punto que los paraxiales, por lo que en realidad la imagen de un punto es una pequeña mancha de bordes difusos.

Hay dos tipos de aberraciones:



- a) **Aberraciones cromáticas.** El índice de refracción de los vidrios no es constante con la frecuencia (longitud de onda), aunque no varíe mucho; por ejemplo, para un vidrio particular puede variar de forma continua entre:

$$n = 1.52 \quad @ \quad \lambda = 400 \text{ nm} \quad \rightarrow \quad n = 1.50 \quad @ \quad \lambda = 700 \text{ nm};$$

ó en otro caso, entre:

$$n = 1.59 \quad @ \quad \lambda = 400 \text{ nm} \quad \rightarrow \quad n = 1.54 \quad @ \quad \lambda = 700 \text{ nm}$$

Esta variación de  $n$  produce una variación de la distancia focal de una lente de acuerdo con la fórmula:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

que por tanto varía con  $\lambda$ . De manera que, por ejemplo, en el caso de una cámara fotográfica, el plano en el que está enfocada una imagen violeta es ligeramente distinto del de una imagen roja (fig. 6.38). De manera que la imagen de un objeto blanco (o de color compuesto por varios colores fundamentales) se ve con los bordes ligeramente coloreados de rojo y violeta. Este efecto se observa muy bien en las lupas que producen aumentos grandes (distancias focales cortas) y en microscopios de primera comunión.

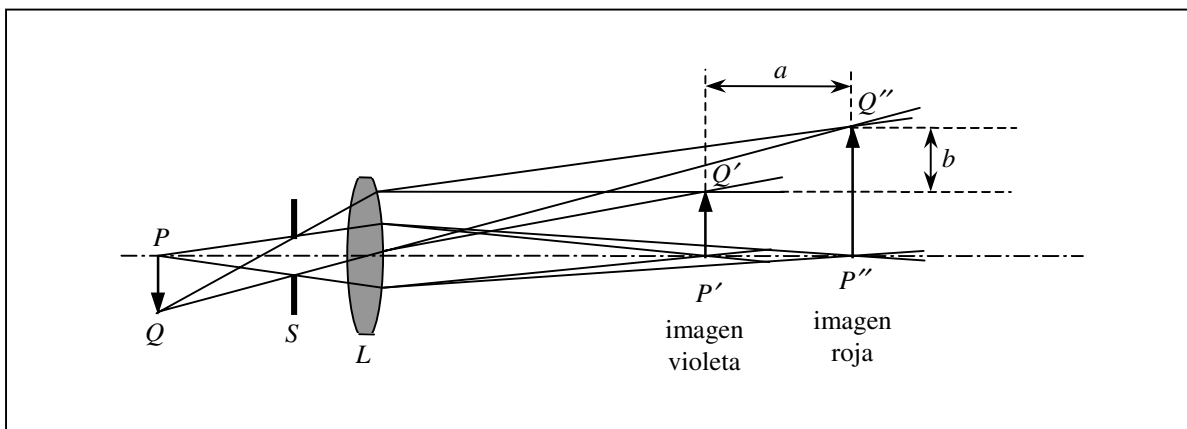


Figura 6.38.- Producción de aberración cromática (muy exagerada)

- b) **Aberraciones geométricas.** Son las que se refieren a las distorsiones geométricas de las imágenes. Básicamente consisten en que la imagen de un punto es realmente una pequeña mancha cuya forma varía según donde esté situado (siendo la distorsión mínima cuando el punto está en el eje de la lente) y las proporciones relativas de las imágenes se alteran (distorsión). Esto último también se nota muy bien en una lupa con aumento grande.

Las aberraciones se corrigen en gran medida fabricando lentes **compuestas** por varios elementos que se compensan unos a otros, como los de las cámaras fotográficas. La figura siguiente presenta el famoso objetivo TESSAR de la casa Zeiss (1902; todavía se utiliza en muchas cámaras fotográficas).

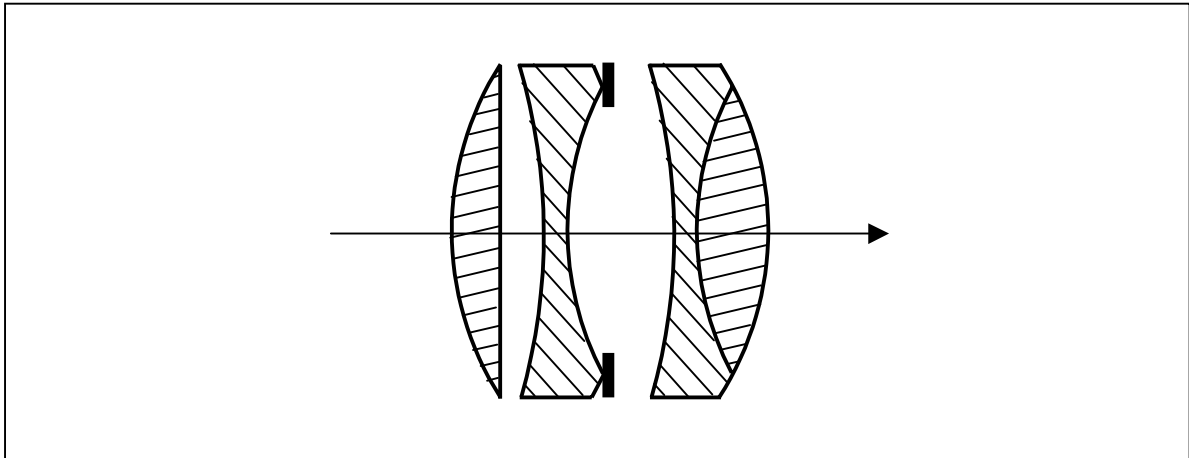


Figura 6.39. Objetivo Tessar de Zeiss.

## 9. LÍMITE DE RESOLUCIÓN DE UNALENTE

La óptica geométrica es una descripción aproximada de la propagación de las ondas electromagnéticas que ignora su carácter ondulatorio y los efectos de difracción que se derivan de éstos, de manera que la imagen de un punto producida por una lente, aunque ésta tuviera todas sus aberraciones corregidas, no puede ser un punto geométrico de dimensiones nulas (que supondría una densidad de potencia infinita).

Recordemos que un agujero circular en una pantalla iluminada por una onda plana produce un haz difractado que (en campo lejano) presenta una mancha central

iluminada, rodeada de franjas alternativamente oscuras y luminosas (aunque con luminosidad decreciente). El primer anillo oscuro tiene un radio angular dado por  $\theta_0 = 1.22 \lambda / D$  (fig. 6.40).

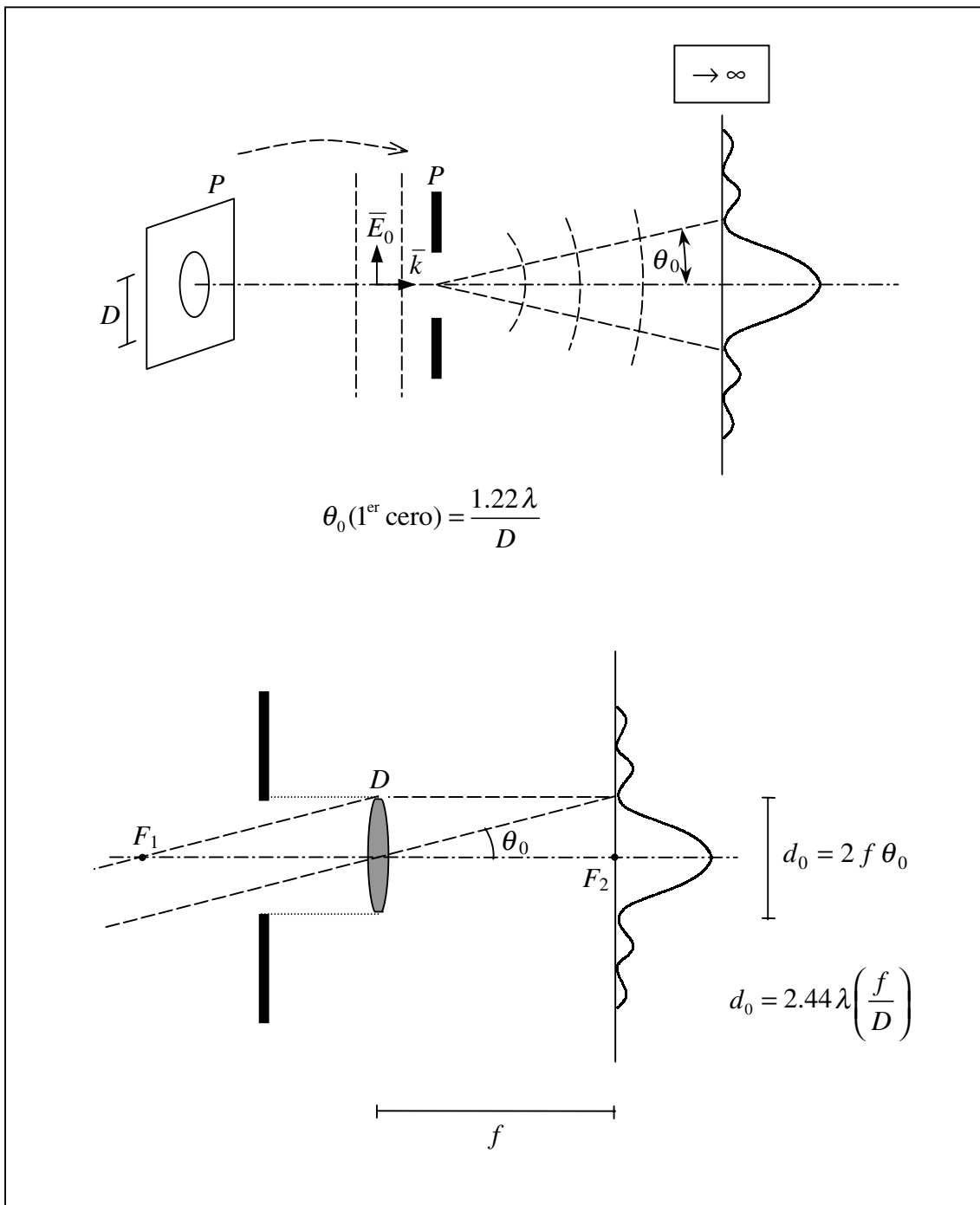


Figura 6.40.- Obtención de la imagen de un punto (la onda plana uniforme proviene de un punto luminoso muy alejado) en presencia de efectos de difracción. Los ángulos están muy exagerados.

Imaginemos que en el agujero instalamos una lente convergente del mismo diámetro  $D$  (en la figura, para facilitar su comprensión, la lente está desplazada hacia la derecha). La lente hace, tal como hemos visto, que la imagen que en ausencia de ella se formaría en una pantalla muy alejada ( $s \rightarrow \infty$ ) se forme ahora en el plano focal ( $s' \rightarrow f$ ). En la figura se representan los rayos que pasan por el centro de la lente, que no son desviados, y se ve como produce una imagen de la misma forma que el campo lejano de la apertura (diagrama de Airy), con un diámetro de la mancha central (medido en el primer anillo oscuro) de:

$$d_0 = 2.44 \left( \frac{f}{D} \right) \lambda$$

Es decir, el tamaño mínimo de la imagen ideal de un punto luminoso (producido por una lente perfecta, bien enfocada) es una mancha circular de diámetro  $d_0$  (rodeada de anillos luminosos concéntricos, de intensidad decreciente).

Desde el punto de vista de la difracción, una lente con buena resolución ha de tener un  $\#f = f/D$  lo más **pequeño** posible (diámetro grande comparado con la distancia focal), y ya hemos discutido anteriormente la dificultad de fabricarlas con  $f/D < 1$ .

Si dos puntos están muy próximos, sus imágenes se confunden, ya que son dos manchas casi superpuestas (fig. 6.39a). Para poder separarlos (es decir, identificar que hay dos puntos o, en lenguaje óptico, “resolverlos”) es necesario que sus imágenes (manchas) estén descentradas un cierta distancia que resulta ser de al menos (fig. 6.41c):

$$\frac{d_0}{2} = 1.22 \frac{f}{D} \lambda \quad (\text{distancia de Rayleigh})$$

Esta distancia corresponde a la situación en que el centro de una mancha coincide con el primer cero de la otra mancha, y recibe el nombre de **límite de resolución** de la lente. De manera que dos puntos de la imagen más cercanos que el límite de resolución no se distinguen.

En todo caso debe tenerse en cuenta que lo dicho anteriormente aplicaría a una lente ideal, sin aberraciones, y que, excepto en lentes profesionales de gran calidad, normalmente las aberraciones hacen que el tamaño de la mancha que resulta de la imagen de un punto sea mayor que el límite de difracción calculado.

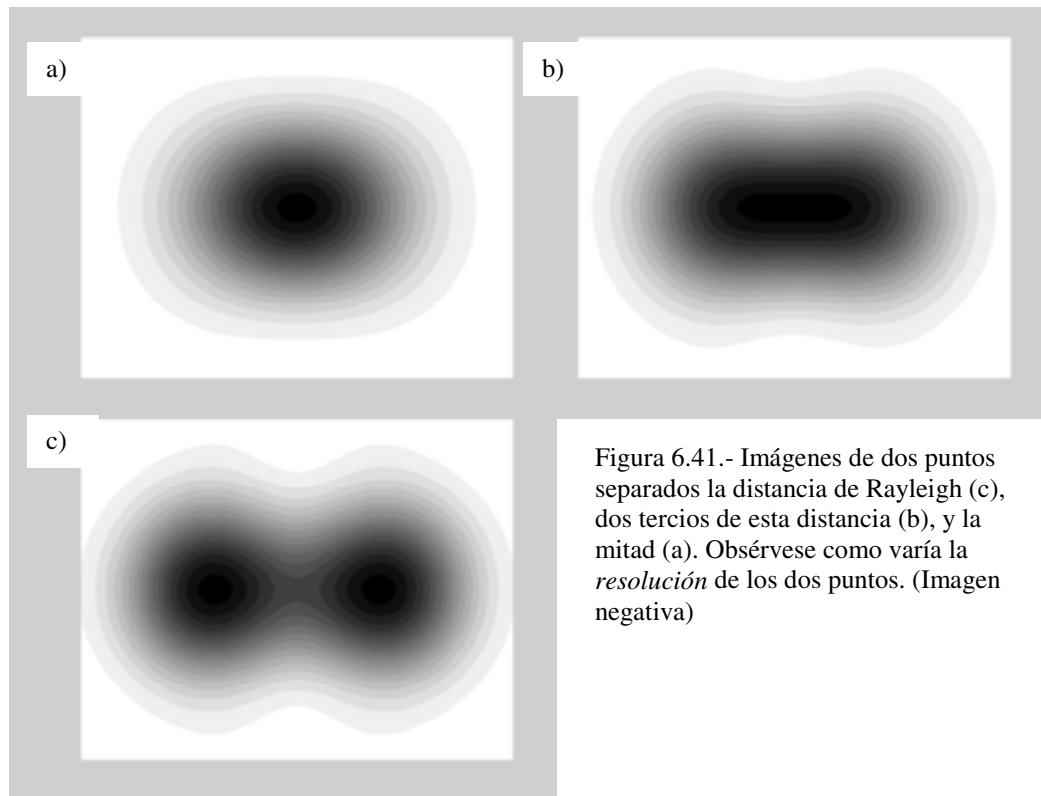


Figura 6.41.- Imágenes de dos puntos separados la distancia de Rayleigh (c), dos tercios de esta distancia (b), y la mitad (a). Obsérvese como varía la *resolución* de los dos puntos. (Imagen negativa)

### EJEMPLO 1

En el margen visible  $\lambda$  está entre  $\sim 400$  y  $700$  nm, por tanto con una lente de  $f/D = 1.0$  el tamaño mínimo de la imagen de un punto, en ausencia de aberraciones, será

$$d_0 \sim 1000 / 1750 \text{ nm} = 1.0 / 1.8 \text{ } \mu\text{m}$$

De manera que en el negativo de una fotografía tomada con esta lente no se podrían apreciar, aunque el grano de la emulsión fotográfica lo permitiese, detalles de tamaño inferior a éste tamaño.

## EJEMPLO 2

Un satélite espía en una órbita de 350 km de altura sobre la Tierra está equipado con una cámara con un objetivo especial con  $D = 60$  cm y  $f/D = 1.0$ . ¿Cuál es el tamaño del objeto más pequeño que puede distinguir sobre la superficie de la Tierra?

El tamaño angular mínimo detectable es:

$$2\theta_0 = 2.44(\lambda/D)$$

Si la observación se hace en el violeta ( $\lambda = 400$  nm) el tamaño buscado  $L$  viene dado por

$$L = 350 \text{ km} \times 2\theta_0 = 57 \text{ cm}$$

es decir, se pueden distinguir objetos del tamaño de personas.

Si la altura se reduce a 12 km (avión espía) la resolución alcanza 2 cm; de hecho, en estas fotos tomadas desde aviones se puede distinguir una pelota de golf.

## EJEMPLO 3

Los circuitos microelectrónicos se fabrican por procedimientos fotolitográficos (como un circuito impreso) en los que se proyecta una imagen del circuito sobre la oblea de semiconductor. Si se desea grabar detalles del orden de  $0.2 \mu\text{m}$  y se dispone de un objetivo de  $f/D = 1.0$  se requiere luz de longitud de onda

$$\lambda = \frac{d_0}{2.44(f/D)} = 82.0 \text{ nm} \quad (\text{o menor})$$

Es decir, se requiere luz en el margen ultravioleta, lo que a su vez requiere que el objetivo esté fabricado con materiales especiales que sean transparentes al ultravioleta.

**EJEMPLO 4**

La información de los ‘Compact Disc’, ‘CD-ROM’ y ‘DVD’ está contenida en pequeñas marcas producidas en el plástico por un láser, que a su vez son detectadas (leídas) por otro láser. Los láseres lectores normalmente funcionan en el infrarrojo a  $\lambda \cong 800$  nm. Si la lente que concentra el láser tiene  $f/D = 0.8$ , el tamaño mínimo de agujero detectable (marca) resulta ser  $d_0 = 1.6$   $\mu\text{m}$ .

Si se pudiera utilizar un láser azul (en la actualidad no existen diodos láser comerciales de color azul)  $d_0$  pasaría a valer la mitad, lo que supondría poder almacenar cuatro veces más información en el disco que en la actualidad.

**ANEXO:****CÁLCULO DE LA DIFRACCIÓN PRODUCIDA POR UNA APERTURA RECTANGULAR****A.1. Aproximación de Fraunhofer**

En el ejemplo del experimento de Young hicimos aproximaciones cuando la pantalla estaba mucho más lejos que la distancia entre los agujeros. De forma más general examinemos cuánto vale  $|\bar{r} - \bar{r}'|$ , con  $\bar{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$  y  $\bar{r}' = x' \hat{x} + z' \hat{z}$ :

$$\begin{aligned} |\bar{r} - \bar{r}'|^2 &= (\bar{r} - \bar{r}') \cdot (\bar{r} - \bar{r}') = r^2 + r'^2 - 2\bar{r} \cdot \bar{r}' = r^2 + r'^2 - 2(x x' + z z') = \\ &= r^2 \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{x x' + z z'}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Como suponemos que  $r' \ll r$ , podemos aproximar:

$$|\bar{r} - \bar{r}'| = r \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{x x' + z z'}{r^2} \right)^{1/2} \approx r \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{x x' + z z'}{r^2} \right) = r + \frac{r'^2}{2r} - \frac{x x' + z z'}{r}$$

de manera que en el denominador del integrando podemos poner  $|\bar{r} - \bar{r}'| \approx r$ .

En el exponente de  $e^{-jk|\bar{r}-\bar{r}'|}$  hay que ir con más cuidado; veamos:

$$k|\bar{r} - \bar{r}'| \approx k r + k \frac{r'^2}{2r} - k \frac{x x' + z z'}{r}$$

El segundo término vale  $k \frac{r'^2}{2r} = 2\pi \frac{r'^2}{2r\lambda}$

Si en estos momentos **suponemos además que:**

$$\pi \frac{r'^2_{\max}}{r\lambda} \ll 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{r \gg \pi \frac{r'^2_{\max}}{\lambda}} \quad (\text{condición de FRAUNHOFER})$$

podemos ignorar este término y resulta

$$k|\bar{r} - \bar{r}'| \approx k r - k \frac{x x' + z z'}{r}$$

Finalmente podemos escribir la expresión del campo eléctrico difractado por una apertura (párrafo 2.3) de la forma siguiente:

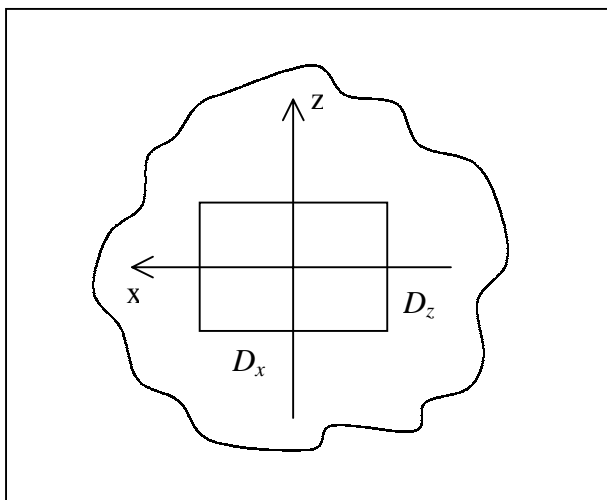
$$\bar{E}(\bar{r}) = \hat{\theta} j \frac{1}{\lambda r} e^{-jk r} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \iint_S E(x', z') e^{jk \frac{x x' + z z'}{r}} dx' dz'$$

(campo radiado en condiciones de Fraunhofer)



EJEMPLO: Radiación por una apertura rectangular

Supongamos una apertura rectangular de dimensiones  $D_x$ ,  $D_z$  centrada en el origen de coordenadas, de manera que (fig. 6.A.1):



$$-\frac{D_x}{2} \leq x' \leq \frac{D_x}{2}$$

$$-\frac{D_z}{2} \leq z' \leq \frac{D_z}{2}$$

La integral anterior vale:

Figura 6.A.1.- Geometría de la apertura rectangular del ejemplo.

$$\iint_S e^{-jk \frac{xx'+zz'}{r}} dx' dz' = \int_{-D_x/2}^{D_x/2} e^{-jk \frac{xx'}{r}} dx' \int_{-D_z/2}^{D_z/2} e^{-jk \frac{zz'}{r}} dz' = D_x D_z \operatorname{sinc}\left(\frac{D_x x}{\lambda r}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{D_z z}{\lambda r}\right)$$

dónde  $\operatorname{sinc}(\beta) = \frac{\sin(\pi \beta)}{\pi \beta}$ .

Por tanto el campo radiado vale:

$$E_\theta(\vec{r}) = j \frac{E_0}{\lambda r} e^{-jkr} \cos^2 \frac{\alpha}{2} D_x D_z \operatorname{sinc}\left(\frac{D_x x}{\lambda r}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{D_z z}{\lambda r}\right)$$

Para interpretar físicamente estos resultados, supongamos un plano alejado  $y = y_0 \gg \pi D_x^2/\lambda, \pi D_y^2/\lambda$  (es decir, en la región de Fraunhofer) y veamos qué pasa en ese plano a lo largo de la recta  $x = 0$ :

$$E_\theta(0, y_0, z) = j \frac{E_0}{\lambda r} e^{-jkr} \cos^2 \alpha D_x D_z \operatorname{sinc}\left(\frac{D_z z}{\lambda r}\right)$$

$$\text{con } r = \sqrt{y_0^2 + z^2} \quad \text{y} \quad \cos^2 \alpha = \frac{y_0^2}{y_0^2 + z^2}$$

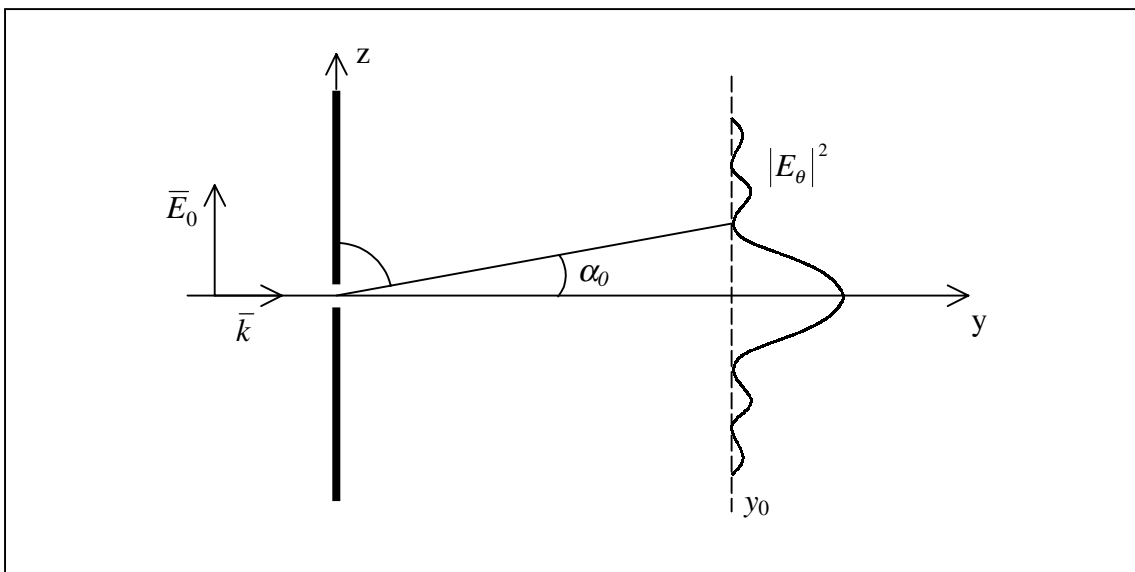


Figura 6.A.2.- Representación del módulo al cuadrado del campo eléctrico en una pantalla alejada de la apertura rectangular del ejemplo.

Se observa que el cuadrado del módulo del campo eléctrico,  $|E_\theta|^2$ , que es proporcional a la densidad de flujo de potencia, tiene un máximo según el eje Y (eje que es perpendicular a la apertura en su punto central) y disminuye según una función *sinc* a medida que nos alejamos, encontrando sucesivamente ceros y máximos relativos cada vez menores.

Los primeros ceros se producen cuando  $(D_z z / \lambda r) = \pm 1$ , en cuyo caso el ángulo  $\alpha$  vale:

$$\sin \alpha_0 = \frac{z}{r} = \frac{1}{r} \frac{\lambda r}{D_z} = \frac{\lambda}{D_z}$$

Si  $\alpha_0$  es pequeño, es decir, si  $D_z \gg \lambda$ , podemos aproximar el seno por el arco,  $\alpha_0 \approx \lambda/D_z$ , y el ancho del máximo principal vale

$$\Delta\alpha = 2\alpha_0 = \frac{2\lambda}{D_z}$$

El análisis en el plano  $y = y_0$  para  $z = 0$  (dirección perpendicular a la examinada) es completamente análogo.

Si la radiación fuese una onda luminosa monocromática (es decir, de frecuencia definida, como en el ejemplo) y el plano  $y = y_0$  fuese una pantalla blanca, en la misma veríamos una distribución de manchas aproximadamente rectangulares como se muestra en la fig. 6.A.3 (la figura se ve en negativo, es decir, con los colores blanco y negro intercambiados).

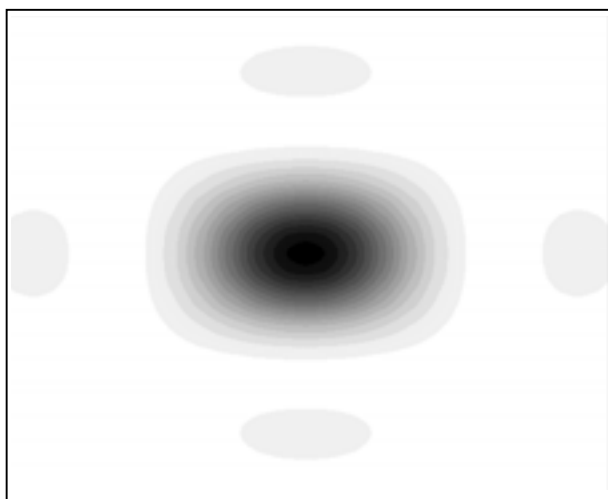
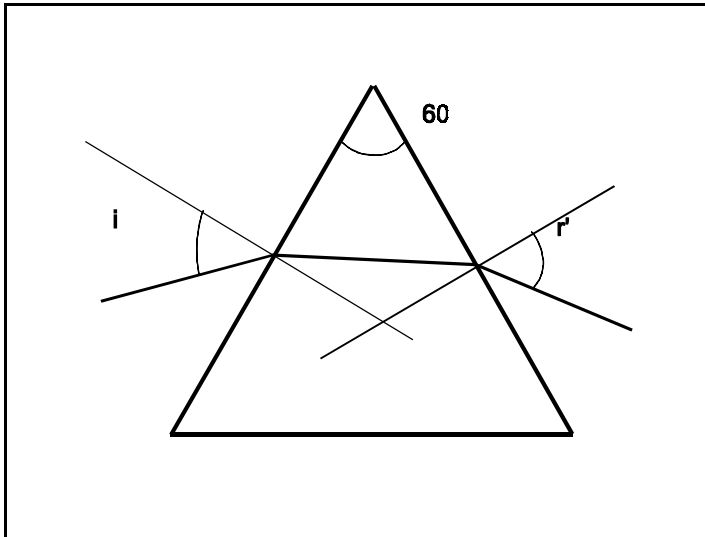


Figura 6.A.3.- Manchas producidas sobre una pantalla por una apertura rectangular (imagen negativa).

Nótese que tanto el ojo como una emulsión fotográfica o el elemento sensible de una cámara de vídeo **son sensibles a  $|E|^2$** , y por tanto la distribución que veríamos sería la de  $|E_\theta|^2$ .

## 10. EJERCICIOS

6.1.- (*Ejercicio de conexión con el capítulo anterior*) Un haz de luz (distribución de onda plana uniforme) de 580 nm y densidad de flujo de potencia de  $10 \text{ mW/cm}^2$  incide sobre un prisma de  $60^\circ$  de índice de refracción  $n = 1.53$  como en la figura.



prisma.

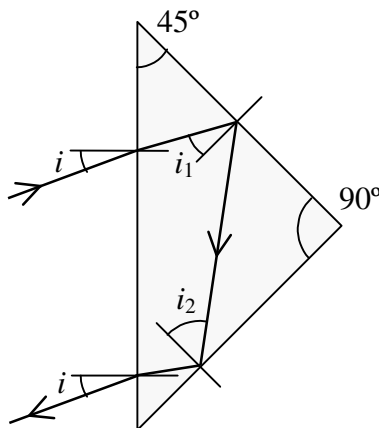
a) Explique cómo ha de ser la polarización de la luz y calcule el ángulo de incidencia  $i$  para que al entrar la luz en el prisma no se produzca reflexión.

b) Calcule el valor del ángulo de salida de la luz del prisma,  $r'$  y explique cómo está polarizada.

c) Calcule la densidad de flujo de potencia en  $\text{mW/cm}^2$  del haz de luz que sale del

d) Si a la frecuencia de trabajo el material del prisma tiene una tangente de pérdidas  $\tan \delta = 3.0 \times 10^{-6}$  y el recorrido de la luz en el prisma es de 10.0 mm, vuelva a calcular el apartado c).

6.2.- Demostrar que si un rayo luminoso incide sobre el diedro formado por dos espejos a  $90^\circ$ , el rayo sale del sistema exactamente en dirección opuesta, aunque desplazado.



6.3.- Utilizar el resultado anterior para demostrar que lo mismo sucede en un prisma de  $90^\circ$  (prisma de Porro, utilizado en los prismáticos), como en la figura de la izquierda. ¿Cuál es el mayor ángulo  $i$  (positivo o negativo, es decir, por encima o por debajo de la normal) aceptable para que se produzca reflexión total en las dos caras internas del prisma? ( $n = 1.60$ ).

6.4.- Un espejo ha de formar una imagen del filamento de una bombilla sobre una pantalla situada a 4 m del espejo. El filamento tiene 5 mm de altura y la imagen ha de tener 40 cm de alta.

- a) ¿Qué tipo de espejo se necesita?
- b) ¿Cuál ha de ser su radio de curvatura?
- c) A qué distancia del vértice del espejo ha de situarse el filamento?

6.5.- El radio de la luna es 1738 km y su distancia media a la tierra de 384 400 km. Calcular el diámetro de la imagen de la luna formada por el espejo esférico de un telescopio de distancia focal 3.60 m.

6.6.- Para una lente delgada positiva ( $f > 0$ ) construir las imágenes de un objeto: a) En el infinito; b) Entre el infinito y el plano focal objeto (PFO); c) Entre el PFO y la lente; d) Entre la lente y el PFI; f) Mas allá del PFI.

6.7.- Repetir el ejercicio anterior para una lente delgada negativa ( $f < 0$ ) con el objeto: a) En el infinito; b) Entre el infinito y la lente; c) Entre la lente y el PFO; d) Mas allá del PFO.

6.8.- Demostrar que cuando dos lentes delgadas de distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  se ponen en contacto el conjunto se comporta como una lente de distancia focal  $f$  tal que  $f^{-1} = f_1^{-1} + f_2^{-1}$ .

6.9.- Un anteojo de Galileo se diferencia del astronómico en que se sustituye la lente positiva del ocular por una negativa, pero respetando el criterio de que el foco objeto del ocular coincida con el foco imagen del objetivo (¡pero atención, que en una lente negativa el foco objeto está a la derecha de la lente!). La característica principal del anteojo de Galileo es que las imágenes se ven derechas.

Para un anteojo de Galileo, construir la imagen de un objeto en el infinito.

6.10.-

- a) Determine la longitud focal de una lente biconvexa con radios 5 cm y 7.5 cm e índice de refracción  $n = 1.5$ . ¿Cuál es la longitud focal cuando la lente está inmersa en agua?
- b) La lente anterior se utiliza como objetivo de un anteojo astronómico. Si se desea un aumento angular de 20, calcule la distancia focal del ocular requerido y la distancia entre el objetivo y éste necesaria para enfocar al infinito.

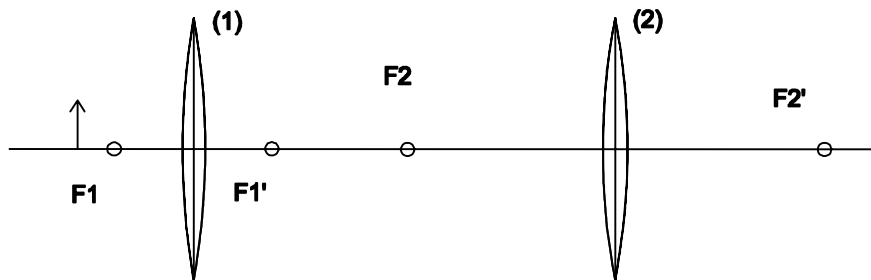
6.11.- Un haz láser con una divergencia de 10 mrad y diámetro de salida de 2 mm ha de enfocarse en el núcleo de una fibra óptica de apertura numérica 0.32. Indique cómo hacerlo con una lente convergente y calcule su distancia focal y diámetro para que la solución sea técnicamente práctica (dimensiones, tamaño de la lente,  $f/D$ ).

6.12.- Un láser produce un haz colimado (paralelo) de 10.0 mm de diámetro. Diseñe un telescopio expensor (en nuestro caso, reductor) para reducir el diámetro del haz a 0.1 mm sin modificar su colimación teniendo en cuenta que: a) por razones de coste el  $f/D$  de las lentes no puede ser inferior a 2.0; y b) las dimensiones del telescopio han de ser lo menores posibles.

(Dé como soluciones las distancias focales y los diámetros de las lentes y la longitud del telescopio)

6.13.- El diagrama representa un microscopio formado por dos lentes positivas, el objetivo (1), que se acerca al objeto, y el ocular, (2) al que se acerca el ojo. También se ha dibujado, a la izquierda, una flecha de altura  $y_0$  que representa un objeto.

- Construir la imagen de la flecha producida por el microscopio.
- Si la imagen formada por el objetivo está a una distancia de 16 cm de éste ( $|s'_1| = 16$  cm), y la formada por el microscopio está a 25 cm (punto próximo del ojo) del ocular ( $|s'_2| = 25$  cm), calcular el aumento del microscopio definido como el cociente entre los tamaños de la imagen y el objeto,  $|y_2| / y_0$ . (Datos:  $f_1=5$  mm,  $f_2=20$  mm)



6.14.- La luna, vista desde la tierra, subtende un arco de 31'. Si se utiliza una lente de 10 cm. de diámetro y distancia focal 100 cm:

- Construya gráficamente (de forma cualitativa) la imagen de la luna. ¿Dónde se produce esta imagen? ¿Es real o virtual? ¿Derecha o invertida? Calcule el tamaño del diámetro de la imagen.
- Con la misma lente anterior se producen las imágenes de dos estrellas separadas una distancia angular de 1.0" (segundos de arco). Sí la observación se realiza en una longitud de onda de 850 nm (infrarrojo próximo), ¿pueden resolverse (es decir, separarse) las imágenes de las estrellas?

Dato: El límite de resolución de una lente, medido en unidades de longitud en el plano focal, es:  $r = 1.22 (f/D)\lambda$ .

c) La misma lente de a) se utiliza como objetivo de un telescopio. Si se desea un aumento angular de 25:

c1) Calcule la distancia focal del ocular requerido.

c2) Calcule la distancia entre el objetivo y el ocular necesaria para enfocar al infinito.

c3) Si en el ocular de este telescopio se inyecta un haz láser (paralelo) de diámetro 1.0 mm, ¿cual será el diámetro del haz que sale por el objetivo?

6.15.- Un antejo de Galileo (véase el problema 6.9) está formado por un objetivo de distancia focal  $f_1 = +100$  cm y un ocular de distancia focal  $f_2 = -20$  cm, ambas lentes separadas 80 cm. Se observa un objeto muy alejado que subtende un ángulo de 0.1 r.

a) Construya la imagen que produce el objetivo (en ausencia del ocular), suponiendo que uno de sus extremos está en el eje óptico. ¿Dónde se produce? ¿Es real o virtual?

b) Construya la imagen que produce el antejo. ¿Dónde se produce? ¿Es real o virtual? ¿Derecha o invertida?

c) Calcule el aumento angular producido.

(Realice el o los dibujos con claridad en una hoja apaisada respetando las dimensiones relativas y el ángulo de 0.1 r)

6.16.- En una cámara fotográfica de formato  $24 \times 36$  mm<sup>2</sup> se desea producir una imagen de la luna (diámetro angular 30') que tenga un diámetro, medido sobre el negativo, de 20 mm.

a) Haga un diagrama de rayos que le permita calcular la distancia focal del objetivo requerido.

Si con el objetivo anterior y un ocular de  $f = 25$  mm se construye un telescopio,

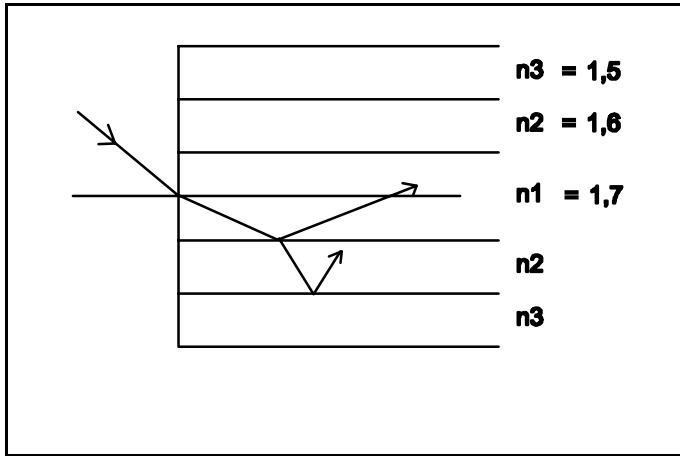
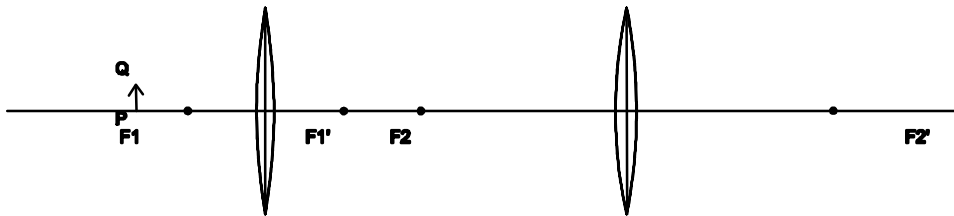
b) Calcule la distancia entre objetivo y ocular en situación de enfoque a infinito y el aumento angular que tendrá el telescopio.

Si por el ocular del telescopio anterior se inyecta el haz colimado (paralelo) de 2 mm de diámetro de un láser,

c) Haga un diagrama con la trayectoria de los rayos y calcule, a partir del mismo, el diámetro del haz del láser a la salida del telescopio (suponiendo el objetivo suficientemente grande).

6.17.- La figura esquematiza la disposición de dos lentes positivas ( $f > 0$ ) en un microscopio.

- Dibuje la imagen del objeto  $PQ$ ,  $P'Q'$ , a través de la primera lente (objetivo).
- Dibuje la imagen de  $P'Q$ ,  $P''Q''$ , a través de la segunda lente (ocular). ¿Es real o virtual? ¿Derecha o invertida?



6.18.- Una fibra óptica tiene una estructura de vaina doble (dos capas diferentes concéntricas con el núcleo), como en la figura.

- Calcular la apertura numérica si la fibra trabaja de manera que la reflexión total se produce en la discontinuidad  $n_1/n_2$  (como en una fibra ordinaria).
- Idem si la reflexión total se produce en la discontinuidad  $n_2/n_3$ .

(Recuerde: la apertura numérica es  $NA = \sin(i_{\max})$  siendo  $i_{\max}$  el mayor ángulo de incidencia permitido en la superficie frontal de la fibra)

6.19.-

- Un ojo miope tiene su punto remoto (punto más lejano que es capaz de enfocar) a 50 cm. Calcular la potencia, la distancia focal y el tipo de lente correctora que precisa.
- A qué distancia está el punto próximo (punto más cercano que puede enfocar) de un ojo que para leer a 25 cm de distancia requiere una corrección de 0.5 dioptrías? ¿Es la lente correctora positiva o negativa?
- Muestre la disposición, con un esquema, para formar un antejo de Galileo con las lentes anteriores. Trace los rayos de un objeto en el infinito y calcule, a partir de la figura, el aumento angular del telescopio.



## §7. INTERACCIÓN CON LA MATERIA

---

### 1. INTRODUCCIÓN

La teoría electromagnética que venimos estudiando está protagonizada por señales senoidales de frecuencia bien definida:

$$v(t) = v_0 \cos \omega t \quad \rightarrow \quad v_0 e^{j\omega t} = v_0 e^{j2\pi f t}$$

En óptica una señal así se dice **monocromática**, por la relación que existe entre el color que ve el ojo y la frecuencia (longitud de onda) de la señal. Sin embargo, la luz del sol y la que producen la mayoría de fuentes luminosas comunes (cuerpos incandescentes, como el filamento de una bombilla o la llama de una vela) no es monocromática. Tampoco son monocromáticos los diodos emisores de luz (Light Emitting Diode, LED), y ni siquiera los láseres lo son estrictamente, aunque para muchas aplicaciones puedan considerarse como tales. Por otra parte la emisión y absorción de energía luminosa (en general, electromagnética) tiene carácter discreto, lo que conduce a la introducción del concepto de *fotón*, que produce graves conflictos con el carácter ondulatorio de la luz.

El conocimiento del *espectro* de una fuente luminosa y las propiedades de la luz en términos de los fotones son esenciales a la hora de considerar su uso en un sistema de comunicaciones ópticas, y el objeto de este capítulo es introducir al lector en estos temas. En la primera parte nos ocupamos de la calidad de la radiación electromagnética emitida por medios materiales a una temperatura dada (radiación térmica), y en la segunda, de las propiedades relevantes de los fotones desde el punto de vista de las comunicaciones ópticas.

## 2. RADIACIÓN TÉRMICA

Fijémonos en la figura 7.1; es una fotografía del sudoeste de Europa obtenida por un satélite Meteosat un día 26 de noviembre a las 11 de la noche (22:00 UTC), una hora en la que el sol hace ya bastantes que se ha puesto en la latitud de Paris-Barcelona, de manera que no hay luz visible que ilumine la escena y, desde la posición del satélite, el ojo humano la vería completamente oscura.

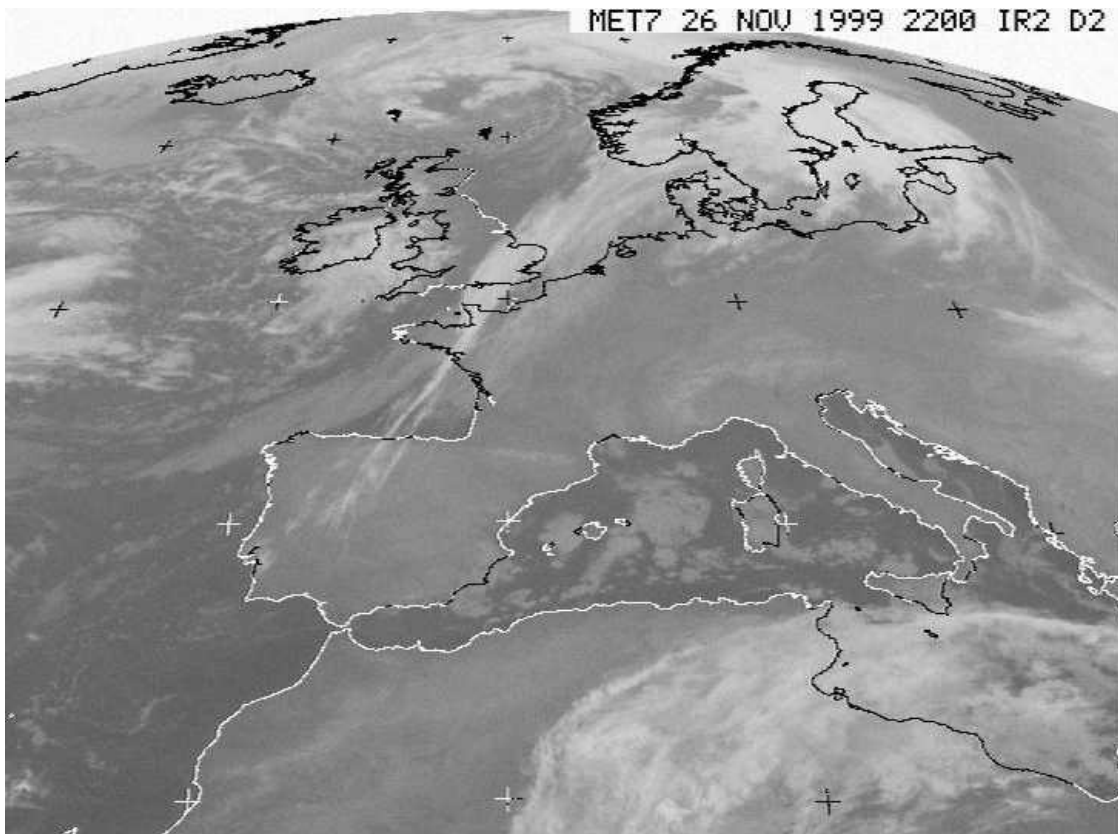


Figura 7.1.- Imagen obtenida en el margen infrarrojo por un satélite Meteosat un día 26 de noviembre a las 10 de la noche.

La explicación provisional es que la fotografía está tomada en el infrarrojo, pero si el sol no ilumina la escena, ¿de dónde procede la radiación infrarroja? La respuesta es que todos los cuerpos que no estén a la temperatura del cero absoluto ( $0\text{ K} = -273^{\circ}\text{C}$ ) producen radiación electromagnética en todo el espectro (es decir, en todo el margen de frecuencias), aunque con distinta intensidad según la frecuencia. En el caso de la imagen que nos concierne las partes más oscuras corresponden con radiación más

intensa, y las más claras, menos; así, por ejemplo, se ven oscuras las partes de la tierra y del mar despejadas (emiten radiación infrarroja) y claras las nubes, ya que reflejan de vuelta la radiación infrarroja emitida por la tierra (motivo por el cual las noches con el cielo cubierto son más calurosas que las noches despejadas).

Ya veremos que incluso a temperatura ambiente los cuerpos materiales emiten radiación en bandas de comunicaciones por radio que puede ser medida con relativa facilidad. De hecho, por efecto de la temperatura, los componentes electrónicos que forman los circuitos de comunicaciones producen radiación que interfiere con las señales del sistema cuando éstas son débiles y suponen un límite a la sensibilidad del mismo.

## 2.1. REVISIÓN DEL CONCEPTO DE ESPECTRO

Supongamos una magnitud física variable con el tiempo  $v(t)$  (por ejemplo, un voltaje, pero también la amplitud del campo eléctrico o magnético, etc.). Se define su potencia media  $P_m$  en el instante  $t$  mediante la expresión:

$$P_m(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} v^2(t) dt,$$

dónde  $T$  es un intervalo de tiempo suficientemente grande comparado con el ritmo de variación de la señal. Lo normal en las aplicaciones es que este valor no se cambie con el instante en el que se evalúa,  $t$ , al menos en el intervalo que nos interese estudiar, en cuyo caso se dice que la señal es **estacionaria** y omitimos la información del tiempo como argumento. Si  $v(t)$  es una tensión,  $P_m$  representa la potencia media que ésta produciría sobre una resistencia de valor  $R = 1 \Omega$ . Además, se define la **densidad de potencia espectral**  $G_v(f)$  de la manera siguiente:

Supongamos que la señal  $v(t)$  la pasamos por un filtro paso banda ideal (la señal a la salida es igual a la de la entrada dentro de la banda y nula fuera) con ancho de banda muy estrecho  $\Delta f$  (por ejemplo 1 Hz) y que medimos la potencia media a la salida en el margen de frecuencias  $(f, f + \Delta f)$ , con  $f$  variable a voluntad,  $\Delta P_m(f)$  (fig. 7.2).

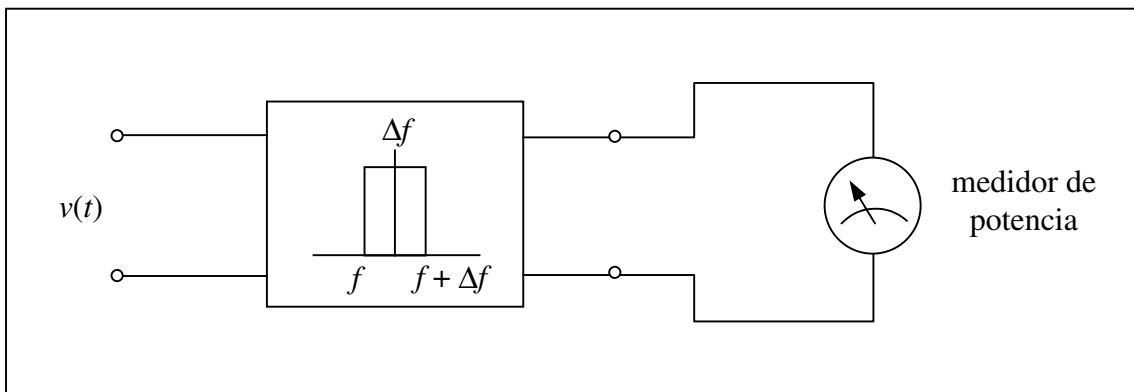


Figura 7.2.- Circuito ideal utilizado para definir la densidad de potencia espectral.

Definimos la densidad de potencia espectral  $G_v(f)$  mediante la igualdad:

$$G_v(f) = \frac{\Delta P_m(f)}{\Delta f} \quad (\Delta f \text{ arbitrariamente pequeño})$$

de manera que la potencia media en el margen  $(f, f + \Delta f)$  vale:

$$\Delta P_m(f) = G_v(f) \Delta f ,$$

y la potencia media en la banda de frecuencias finita  $(f_1, f_2)$  vale:

$$P_m = \int_{f_2}^{f_1} G_v(f) df$$

Cuando la señal es una tensión o una corriente, la densidad de potencia espectral se mide con un instrumento de laboratorio llamado “analyzer de espectros”.

## 2.2. LUZ BLANCA

A una señal senoidal  $v(t) = v_0 e^{j2\pi f_0 t}$  le corresponde un espectro formado por *una raya* o función delta de Dirac:

$$G_v(f) = P_0 \delta(f_0)$$

Por el contrario, se dice que una señal tiene un espectro **blanco** si  $G_v(f)$  es constante con la frecuencia (al menos en un cierto margen de frecuencias). En el caso de la luz, la señal de interés es la amplitud del campo eléctrico, que es el que excita la retina. La **luz blanca** es aquella que tiene el espectro constante en el margen de visión del ojo (380 – 770 nm). Si no es así, la luz se ve *de color*. El color de los cuerpos materiales se debe al distinto grado con que reflejan la luz de diferentes frecuencias.

Como en óptica es más corriente trabajar con longitudes de onda que con frecuencias, se define también la **densidad de potencia espectral por intervalo de longitud de onda**,  $G_\lambda(\lambda)$ , de manera que:

$$\Delta P_m(\lambda) = G_\lambda(\lambda) d\lambda \quad , \quad P_m = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} G_\lambda(\lambda) d\lambda$$

$G_\lambda(\lambda)$  y  $G_v(f)$  están relacionadas mediante la expresión:

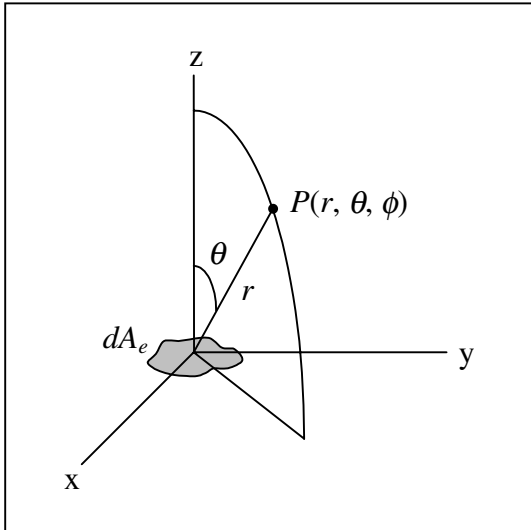
$$G_\lambda(\lambda) |d\lambda| = G_v(f) |df| \quad , \quad G_\lambda(\lambda) = G_v(f) \left| \frac{df}{d\lambda} \right| ,$$

y como  $f = \frac{c}{\lambda}$  ,  $\frac{df}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$

$$G_\lambda(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2} G_v(f)$$

### 2.3. RADIACIÓN TÉRMICA

Supongamos un medio material que ocupa todo el semiespacio  $z < 0$  (o que por lo menos es suficientemente grueso) y con superficie plana, que suponemos situada en el plano  $x$ - $y$ , y consideremos un elemento de superficie  $dA_e$  situado en el origen (fig. 7.3). Si el medio material no está a  $0^\circ\text{K}$  ( $-273^\circ\text{C}$ ), este elemento de superficie radia energía electromagnética en el semiespacio superior,  $z > 0$ , de tal manera que el vector de



Poynting (medio) en un punto del espacio  $P(r, \theta, \phi)$  en el intervalo de frecuencias ( $f, f + df$ ) vale:

$$d^2 \bar{S}_m = \varepsilon \frac{\hat{r}}{r^2} L_f(f, T) dA_e df \cos \theta$$

donde los términos introducidos tienen el siguiente significado:

$d^2 \bar{S}_m$ :  $d^2$  indica diferencial de segundo orden, ya que es proporcional a  $dS$  y  $df$ .

$\varepsilon$ : ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ) es la **emisividad** de la superficie, que depende del material y de la calidad de la superficie. Cuando  $\varepsilon = 1$  decimos que tenemos un **cuerpo negro**, que es aquél que posee emisividad máxima. El nombre *cuerpo negro* viene de que un cuerpo que emite radiación bien también la absorbe bien. Un emisor óptimo ( $\varepsilon = 1$ ) es también un absorbente óptimo de radiación (cuándo incide radiación sobre él no refleja nada), y en óptica un cuerpo que absorbe toda la radiación y no refleja ninguna se ve de *color negro*.

$L_f$ : **Radiancia espectral** (o **densidad espectral de radiancia**). Para cualquier cuerpo material (**con independencia de su composición**) a temperatura  $T$  (medida en grados Kelvin = K) vale:

$$L_f(f, T) = \frac{2hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \quad \text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1} \quad \text{LEY DE RADIACIÓN DE PLANCK (1900)}$$

donde

$c$  = velocidad de la luz en el vacío  $\approx 3 \times 10^8$  m/s

$h$  = constante de Planck =  $6.62620 \times 10^{-34}$  J s

$$k = \text{constante de Boltzmann} = 1.380 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

Nótese que tanto  $hf$  como  $kT$  tienen dimensiones de energía, Julios, y es importante insistir en la validez de la expresión para cualquier material con independencia de su composición.

La justificación teórica de la expresión anterior solamente puede hacerse en el marco de la **Mecánica Cuántica**. (De hecho, es la expresión anterior la que puso patas arriba la Física a comienzos de este siglo y promovió la aparición de la Mecánica Cuántica).

Como en el caso de la densidad espectral de potencia, también puede definirse la radiancia por unidad de longitud de onda en lugar de frecuencia,  $L_\lambda(\lambda, T)$ , mediante:

$$L_\lambda(\lambda, T) |d\lambda| = L_f(f, T) |df| \quad \rightarrow \quad L_\lambda(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} L_f(f, T)$$

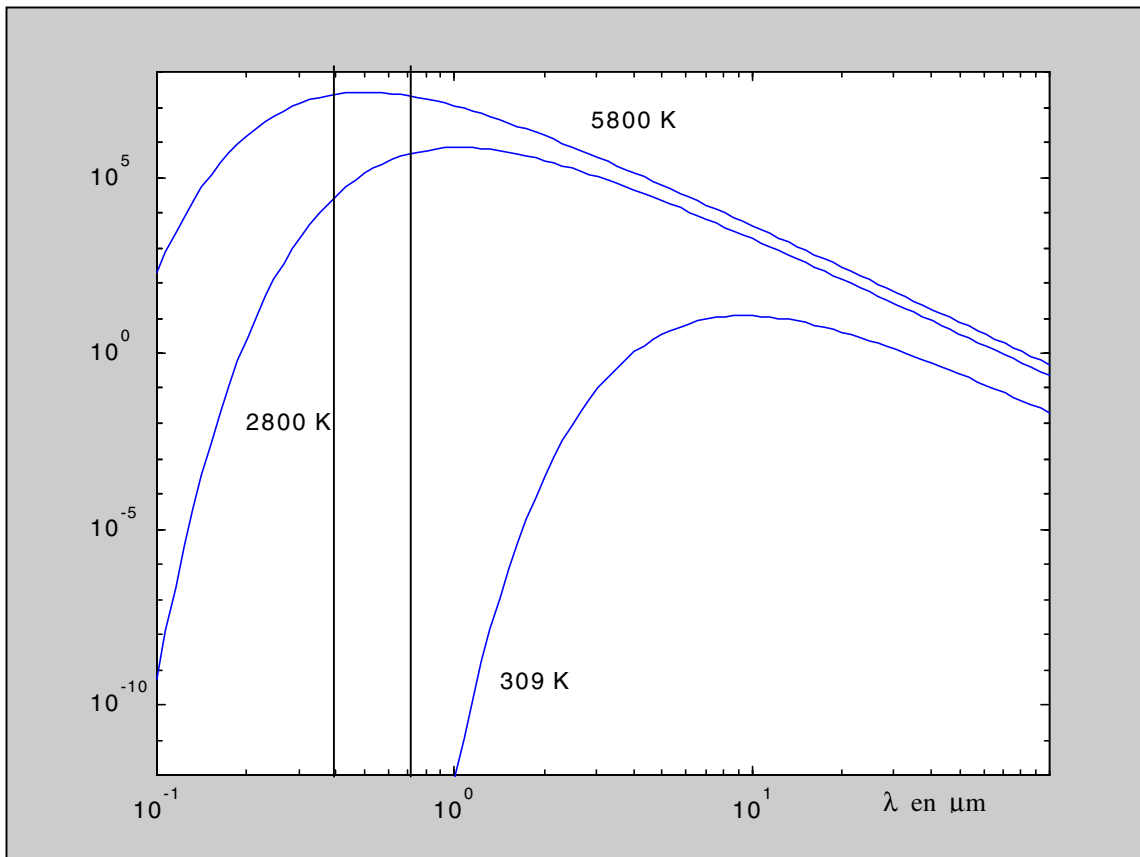


Fig. 7.4.- Radiancia espectral  $L_\lambda$  ( $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\mu\text{m}^{-1}$ ), representada en función de la longitud de onda (en micras) y en escala logarítmica, para varios valores de la temperatura en Kelvin.

La figura 7.4 representa esta magnitud para tres valores diferentes de temperatura: La que corresponde a la superficie del sol, responsable de la luz natural, de 5800 K; la del filamento de una bombilla ordinaria de incandescencia, 2800 K; y la del cuerpo humano, 309 K. En la figura también se marcan mediante dos líneas verticales los límites aproximados del espectro visible, y es interesante observar cómo la radiación del sol alcanza su valor máximo justamente dónde ve el ojo humano, y cómo en este margen la radiación es prácticamente plana (luz blanca). Si embargo, en el caso de una lámpara de incandescencia (bombilla ordinaria), el máximo de radiación se produce en el infrarrojo próximo, en torno a  $1 \mu\text{m}$  de longitud de onda, y se observa cómo radia menos al aproximarnos al azul, lo que explica el color amarillento de ésta luz. Este color amarillento se observa muy bien en las fotografías, ya que el ojo se acostumbra y no lo percibe adecuadamente. Finalmente, es también interesante observar cómo a la temperatura del cuerpo humano el máximo de radiación se produce en el infrarrojo lejano, 9-10  $\mu\text{m}$ , que al mismo tiempo resulta ser la longitud de onda donde los tejidos biológicos perciben mejor la radiación como *sensación de calor*.

Adviértase que la gráfica está hecha en escala logarítmica en los dos ejes, dado el amplio margen de variación de la expresión, y que la representación se ha hecho en las proximidades de los máximos de las curvas.

La ley de radiación de Planck es de extraordinaria importancia en comunicaciones porque es la que  **fija el límite de sensibilidad de un receptor como consecuencia del ruido térmico de los componentes electrónicos que los forman.**

EJEMPLO 1. Radiación térmica a frecuencias de microondas:

A temperatura ambiente normal ( $20^\circ \text{C} = 293 \text{K}$ ),  $kT = 4.04 \times 10^{-21} \text{ J}$ , mientras que a 100 GHz,  $hf = 6.62 \times 10^{-23} \text{ J}$ . Por tanto para  $f < 100 \text{ GHz}$ ,  $hf \ll kT$  y podemos aproximar:



$$e^{\frac{hf}{kT}} \cong 1 + \frac{hf}{kT} ,$$

de manera que la ley de Planck queda:

$$L_f(f, T) = \frac{2hf^3}{c^2} \frac{kT}{hf} = \frac{2f^2}{c^2} kT = \frac{2}{\lambda^2} kT$$

Esta aproximación es válida siempre que

$$hf < kT \times 0.1 \rightarrow f < 2.08 \times 10^9 T \text{ Hz, } (T \text{ en K})$$

En estas condiciones la potencia radiada por un cuerpo es proporcional a su temperatura absoluta.

## EJEMPLO 2

Se trata de calcular la potencia total radiada por una superficie elemental a temperatura  $T$  en el intervalo de frecuencia  $(f, f + df)$ . Para calcularla trazamos una superficie semiesférica de radio  $r$  en el hemisferio superior donde radia el elemento  $dA_e$  definido en el párrafo anterior e integramos el vector de Poynting (fig. 7.5):

$$d^2P = \int d^2S_m dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d^2S_m r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \epsilon L_f(f, T) df dA_e 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta ,$$

$$d^2P = \pi \epsilon L_f(f, T) dA_e df$$

La potencia total **en todo el margen de frecuencias**  $f = 0, f = \infty$ , valdrá:

$$dP = \pi \epsilon dA_c \int_0^{\infty} L_f(f, T) df$$

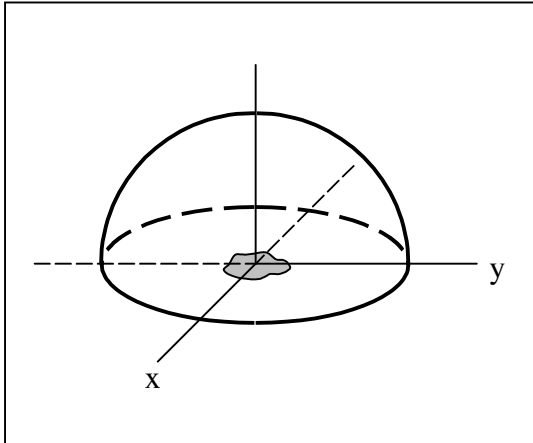


Figura 7.5.- Superficie de integración para calcular la potencia.

La integral indicada no es de cálculo sencillo e indicamos el resultado:

La potencia total radiada por un cuerpo a temperatura  $T$  por unidad de área de su superficie vale:

$$\frac{dP}{dA_e} = \epsilon 5.66 \times 10^{-12} T^4 \text{ W/cm}^2 \quad (T \text{ en K})$$

LEY DE STEFAN

Veamos los valores de la expresión anterior para algunos casos particulares (suponemos  $\epsilon = 1$ ):

- a)  $T = 36 \text{ }^\circ\text{C} = 309 \text{ K}$  (temperatura del cuerpo humano)

$$\frac{dP}{dA_e} = 0.052 \text{ W/cm}^2$$

Si el cuerpo está en un medio externo a temperatura  $T_0$  **también absorbe** energía, de manera que la *potencia neta emitida* = *potencia emitida* – *potencia absorbida* valdrá:

$$\left. \frac{dP}{dA_e} \right|_{neta} = 5.66 \times 10^{-12} (T^4 - T_0^4) \text{ W/cm}^2$$

Si  $T_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  (temperatura adecuada para estar desnudo sin pasar frío):

$$\left. \frac{dP}{dA_e} \right|_{neta} = 0.0070 \text{ W/cm}^2$$

Si la superficie total de la piel de una persona es aproximadamente  $2 \text{ m}^2$ , la potencia que radiamos en las condiciones anteriores es de  $140 \text{ W}$ . De manera que en 24 horas el cuerpo humano radiaría ( $W = P \cdot t$ ):

$$W = 140 \text{ W} \times 24 \text{ horas} \times 3600 \text{ s} = 1.209 \times 10^7 \text{ Julios}$$

y como  $1 \text{ caloría} = 4.186 \text{ Julios}$

$$W = 2900 \text{ kcal}$$

Si rehacemos los cálculos con una temperatura exterior de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  obtendríamos

$$W(20 \text{ }^\circ\text{C}) = 4080 \text{ kcal}$$

Nótese que la aportación energética de una dieta normal (entre  $3000$  y  $4000 \text{ kcal/día}$ ) la gastamos casi toda en radiar energía electromagnética, principalmente en el infrarrojo lejano,  $\lambda \sim 8 \text{ }\mu\text{m}$ .

- b)  $T = 2700 \text{ K}$  (temperatura del filamento de una bombilla). En este caso

$$\frac{dP}{dA_e} = 300 \text{ W/cm}^2$$

Por tanto, el filamento de una bombilla de 100 Watios ha de tener una superficie de  $0,333 \text{ cm}^2$ .

- c)  $T = 5760 \text{ K}$  (temperatura de la superficie del Sol). En este caso

$$\frac{dP}{dA_e} = 6235 \text{ W/cm}^2$$

Como el radio del Sol es  $R = 696\,000 \text{ km}$ , la potencia total radiada valdrá  $4.465 \times 10^{26} \text{ W}$ . Por otra parte, como la distancia entre el Sol y la Tierra es de  $L = 149\,600\,000 \text{ km}$  la densidad de flujo de potencia producida por el Sol en la superficie de la Tierra valdrá:

$$S = \frac{P}{4 \pi L^2} = 1.350 \text{ kW/m}^2$$

La potencia que realmente llega a la superficie de la Tierra es algo menor debido a la absorción atmosférica.

En la figura 7.4 puede verse como a  $5800 \text{ K}$ , que es la temperatura de la superficie del sol, el máximo de radiación se produce en el espectro visible, con una radiancia espectral casi plana. De manera que el ojo humano ve justamente donde el Sol radia más.

### 3. EL CONCEPTO DE FOTÓN

Observaciones y mediciones cuidadosas indican que la radiación electromagnética se absorbe o se emite en múltiplos enteros de una cantidad determinada dada por:

$$\Delta E = h f \quad (\text{cuanto de energía})$$

donde  $h$  es la constante de Planck y  $f$  es la frecuencia de la radiación. Esta cantidad normalmente es muy pequeña y en aplicaciones macroscópicas puede suponerse casi siempre que la energía varía de manera continua.

#### EJEMPLO 1

A la frecuencia de 30 MHz (onda corta)  $\Delta E = 1.99 \times 10^{-26}$  J. El mejor receptor posible de radio a esta frecuencia puede detectar una señal de  $-140$  dBm de potencia, es decir

$$P_{min} = 1.0 \times 10^{-17} \text{ W, equivalente a } 5.0 \times 10^8 \text{ cuantos/s}$$

Sin embargo, a la frecuencia de un láser de HeNe ( $\lambda = 632.8$  nm ,  $f = 4.74 \times 10^{14}$  Hz)

$$\Delta E = 3.14 \times 10^{-19} \text{ J}$$

( $10^7$  veces mayor que a 30 MHz). A esta frecuencia los mejores detectores son capaces de detectar **un solo cuanto de energía**.

(Fin del ejemplo)

Además, normalmente puede precisarse **el lugar** de la interacción; es decir, el lugar donde el cuanto de energía se gana o se pierde. Por ejemplo, un grano de emulsión fotográfica que se reduce por efecto de la luz, o un átomo de un semiconductor que pierde un electrón por efecto de la luz (o la antena de un receptor de radio que capta energía electromagnética).

Este hecho conduce a la interpretación de la radiación electromagnética (especialmente en el margen óptico) como constituida por partículas de tamaño indefinido, llamadas **fotones**, cada uno de los cuales:

a) Tiene energía  $\Delta E = hf$ . Esta energía es indivisible, de manera que un fotón se **emite** o se **absorbe** entero, nunca una fracción del mismo.

b) No tiene masa, pero tiene momento lineal (cantidad de movimiento) dado por

$$\Delta p = \frac{1}{c} \Delta E$$

Esta propiedad es importante, porque cuando un fotón *colisiona* con una partícula (un átomo, por ejemplo) se han de considerar la energía y el momento lineal.

c) No es posible precisar el *tamaño* del fotón, si bien en óptica en muchos casos puede considerarse arbitrariamente pequeño.

(Nótese la dificultad de precisar el tamaño de un fotón que *entra* por una antena de TV a la frecuencia de, por ejemplo, 300 MHz,  $\lambda = 1$  m).

d) Los fotones como partículas crean un grave conflicto con la descripción de las señales electromagnéticas como ondas. Este conflicto solo lo resuelve de forma rigurosa (aunque no intuitiva ni evidente) la Mecánica Cuántica. De forma muy simplificada digamos que, en las zonas del espacio donde la amplitud de la onda que describe el campo eléctrico es intensa hay muchos fotones, y donde es débil, hay pocos fotones.

## EJEMPLO 2

Un láser semiconductor de  $\lambda = 830$  nm (infrarrojo cercano) emite una potencia de 1.0 mW. Por tanto, como un fotón tiene energía

$$\Delta E = hf = h \frac{c}{\lambda} = 2.39 \times 10^{-19} \text{ J}$$

el láser emite

$$N = \frac{P}{\Delta E} = \frac{1.0 \text{ mW}}{\Delta E} = 4.17 \times 10^{15} \text{ fotones/s}$$

## EJEMPLO 3

Si un fotón del ejemplo anterior *colisionara inelásticamente* (es decir, si fuera absorbido) por un electrón en reposo, éste adquiriría la velocidad:

$$\Delta E = 2.39 \times 10^{-19} \text{ J} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{conservación de la energía})$$

$$v = \left( \frac{2\Delta E}{m} \right)^{1/2} = 7.24 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Después de la colisión, la cantidad de movimiento del electrón sería:

$$p_e = m v = 6.6 \times 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Mientras que la del fotón, antes de colisionar era:

$$p_f = \frac{\Delta E}{c} = 7.97 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Es decir, la cantidad de movimiento no se conserva, ya que

$$(p_e + p_f)_{\text{antes}} = p_f = 7.97 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(p_e + p_f)_{\text{despues}} = p_e = 6.6 \times 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

y por tanto el proceso es imposible; es decir, un electrón en reposo no puede colisionar inelásticamente con un fotón y absorber su energía.

## 4. EMISIÓN Y ABSORCIÓN DE FOTONES

### 4.1. EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO (recordatorio)

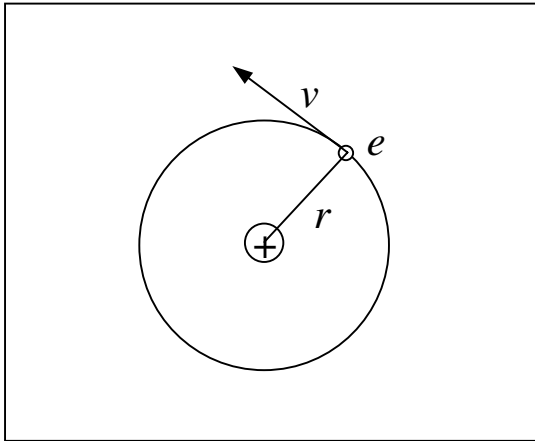


Figura 7.6.- Esquema de un átomo de hidrógeno.

En el modelo más simple (Rutherford), un átomo de hidrógeno está formado por un electrón recorriendo una órbita circular alrededor de una carga positiva (protón), de manera que la fuerza centrífuga y la atracción electrostática se equilibran (fig. 7.6):

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|e|^2}{r^2}$$

La energía total del electrón es la suma de la cinética más la electrostática:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{|e|^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{|e|^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

de manera que la energía total es **negativa** y se hace nula cuando  $r \rightarrow \infty$ . Es decir, que para llevar al electrón hasta  $r \rightarrow \infty$  y **liberarlo** de la atracción del protón hay que suministrarle energía.

Ahora bien, el electrón está sometido a una aceleración:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

y de acuerdo con lo que sabemos, habría de **radiar energía electromagnética**, por lo que progresivamente perdería energía propia, el radio de la órbita iría decreciendo progresivamente y terminaría cayéndose sobre el protón ( $r \rightarrow 0$ ). La Mecánica Cuántica



justifica que (en esta descripción aproximada) en el átomo de hidrógeno existen órbitas estables, en las que el electrón no radia y su energía toma los valores discretos (fig. 7.7):

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad (n = 1, 2, 3 \dots \infty)$$

(1 eV = 1 **electrón-voltio** es una medida de energía equivalente a  $1.602 \times 10^{-19}$  Julios y corresponde a la energía que adquiere un electrón cuando es acelerado por una diferencia de potencial de 1 voltio. Se utiliza mucho cuando se estudian átomos y fotones). El estado de equilibrio es aquel en el que el electrón tiene **energía mínima**,  $n = 1$ ,  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ , entendiéndose por estado de equilibrio aquel en el que, en ausencia de perturbaciones externas, el átomo puede permanecer indefinidamente.

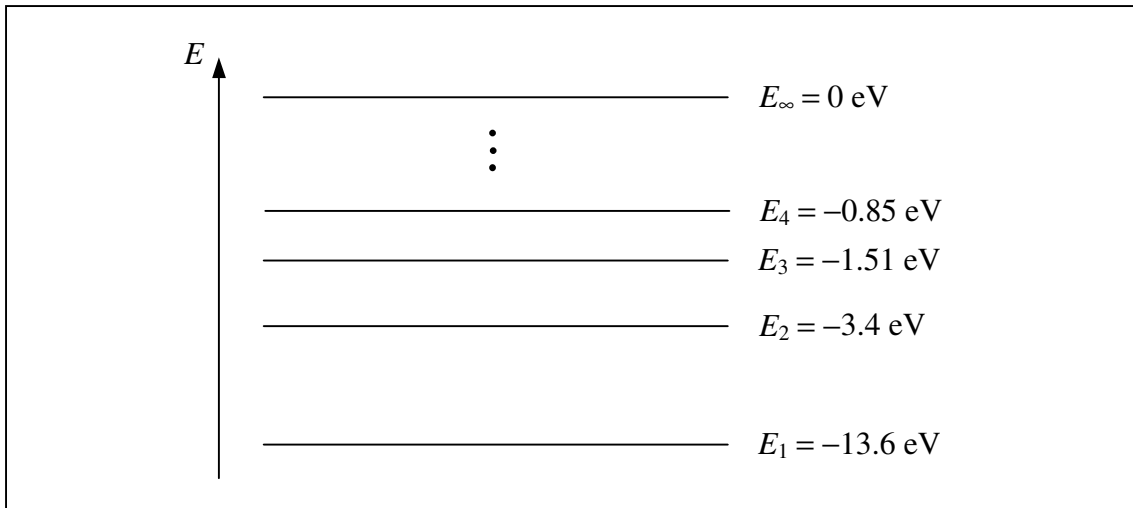


Figura 7.7.- Diagrama de las energías posibles de un electrón en un átomo de H.

Si el electrón se encuentra en un estado  $E_n$  con  $n > 1$ , el átomo no está en estado de equilibrio y puede ceder la energía  $E_n - E_1$  (por ejemplo, si sufre una colisión con otro átomo) y volver a su estado de equilibrio. Inversamente, estando en equilibrio, puede ganar energía (por ejemplo, en una colisión, otra vez) y pasar de  $E_1 \rightarrow E_n$ . También se pueden producir transiciones entre estados de no equilibrio  $E_n \leftrightarrow E_m$ , con intercambios de energía  $\pm (E_n - E_m)$ .

En todo caso, en las transiciones de estado, además de conservarse la energía han de conservarse también los momentos lineal (cantidad de movimiento) y angular. Las

transiciones en las que, a través de colisiones, se gana o se cede energía se llaman **transiciones no radiantes**.

## 4.2. INTERACCIÓN FOTÓN-ÁTOMO

Continuando con el ejemplo del átomo de hidrógeno, su electrón también puede ganar o perder energía por interacción con un fotón, es decir, con radiación electromagnética (advértase que decimos indistintamente que el electrón del átomo gana energía o que es el átomo quien gana energía). En concreto:

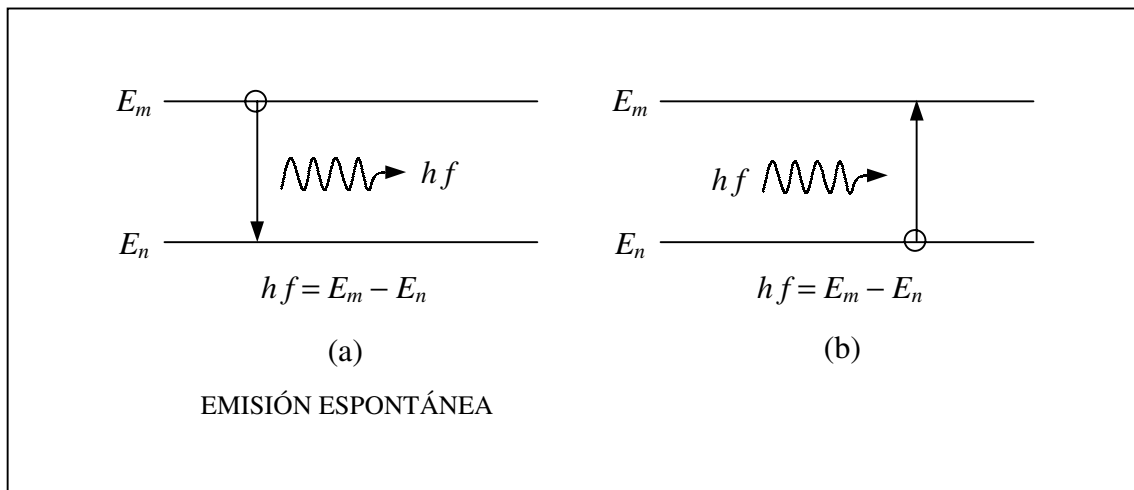


Figura 7.8.- Diagrama esquemático de los procesos de emisión y absorción de un fotón por un átomo (por el momento, todavía de hidrógeno, por simplicidad)

- (a) Un átomo excitado con su electrón en el nivel  $E_m$  ( $m > 1$ ) puede emitir espontáneamente un fotón de frecuencia  $f = (E_m - E_n)/h$  y descender a un nivel inferior  $E_n$  (fig. 7.8), siempre que se cumpla la conservación de momento del sistema electrón / fotón, proceso se llama **emisión espontánea**. Algunas transiciones son imposibles por causa de falta de conservación de momento y se llaman **transiciones prohibidas**.

En términos de longitud de onda del fotón emitido

$$\lambda_{mn} = \frac{c}{f} = \frac{c}{E_m - E_n} = \frac{1.24}{E_m - E_n} \quad \mu\text{m} \quad (\text{con } E \text{ en eV})$$

- (b) Un átomo con su electrón en el nivel  $E_n$  ( $n \geq 1$ ) puede **absorber** un fotón de energía  $h f = E_m - E_n$  y hacer una transición al nivel inferior  $m$  (fig. 7.8). El proceso es el inverso del (a) y no requiere explicaciones adicionales. Evidentemente, las transiciones prohibidas para (a) también lo son para (b).

### EJEMPLO

Las longitudes de onda implicadas en las transiciones de los 4 primeros niveles del átomo de hidrógeno valen:

$$\begin{aligned} \lambda_{12} = 0.121 \mu\text{m} & ; & \lambda_{13} = 0.102 \mu\text{m} & ; & \lambda_{14} = 0.097 \mu\text{m} \\ \lambda_{23} = 0.656 \mu\text{m} & ; & \lambda_{24} = 0.486 \mu\text{m} & ; & \lambda_{34} = 1.776 \mu\text{m} \end{aligned}$$

Como se ve, estas longitudes de onda van desde el ultravioleta ( $\lambda < 0.380 \mu\text{m}$ ) hasta el infrarrojo ( $\lambda > 0.750 \mu\text{m}$ ), pasando por el margen visible.

(Fin del ejemplo)

### 4.3. EMISIÓN ESPONTÁNEA Y VIDA MEDIA

Un átomo excitado con su electrón en el nivel  $E_m$ ,  $m > 1$ , es **inestable** e incluso en ausencia de colisiones u otras interacciones termina emitiendo un fotón y bajando a un nivel inferior  $n < m$ . Se llama **vida media** del átomo en el estado excitado,  $\tau_m$ , al tiempo que, en promedio, tarda en emitir espontáneamente un fotón y bajar de estado. Típicamente, las vidas medias de los estados excitados de un átomo son del orden de magnitud de  $\tau_m \sim 10^{-8}$  s.

#### 4.4. EMISIÓN INDUCIDA (O ESTIMULADA)

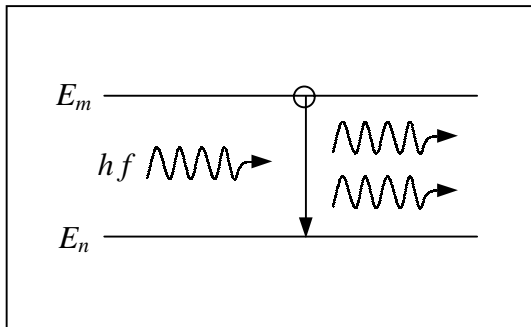


Figura 7.9.- Esquema del proceso de emisión estimulada de un fotón.

Si el átomo de hidrógeno que estamos tomando como ejemplo está en el estado  $E_m$  (es decir, si su electrón está en  $E_m$ ) e interacciona con un fotón de frecuencia

$$f = f_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h},$$

puede pasar al estado  $E_n$  emitiendo otro fotón **idéntico** al de llegada, de manera que llega uno y salen dos (fig. 7.9). Idéntico quiere decir:

- Exactamente de la misma frecuencia.
- En fase; es decir, la onda que describe el fotón emitido está en fase con la onda del de llegada.
- De la misma polarización; es decir, el campo eléctrico de la onda que describe el fotón emitido tiene la misma polarización que el de llegada.

#### 4.5. PROBABILIDADES DE EMISIÓN Y DE ABSORCIÓN

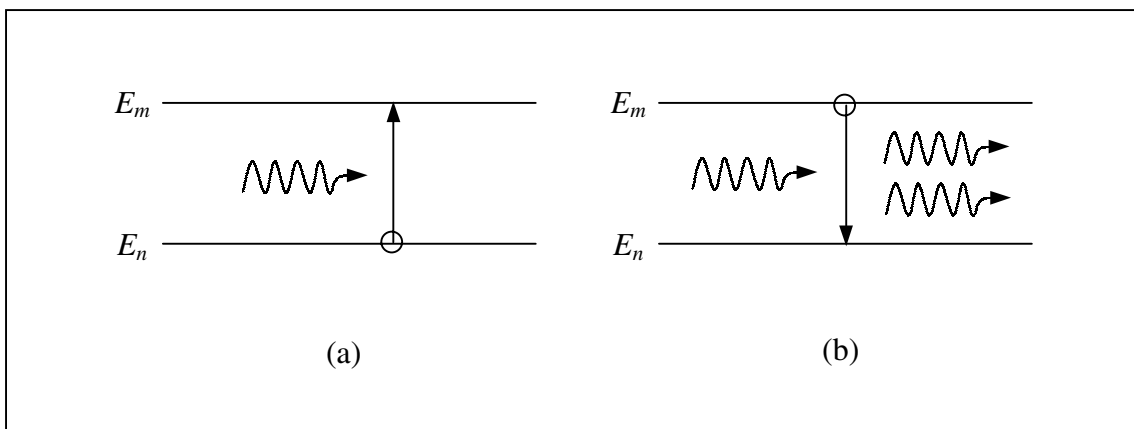


Figura 7.10. Procesos de absorción, (a), y de emisión estimulada, (b), de un fotón por un átomo.

Supongamos:

- a) Que un fotón “interacciona” en determinadas condiciones con un átomo con energía  $E_n$ . La probabilidad de que el fotón sea absorbido y el átomo *suba* al estado  $E_m$  la llamaremos  $W_{nm}$  (Probabilidad; en sucesos idénticos repetidos, número de absorciones / número de sucesos)
- b) Que el fotón interacciona con un átomo en estado  $E_m$  en las mismas condiciones de a). La probabilidad de transición a  $E_n$  y emisión inducida la llamaremos  $W_{mn}$  (nótese el orden de los subíndices).

De acuerdo con el resultado establecido por Einstein por primera vez, estas dos probabilidades son iguales:

$$W_{mn} = W_{nm}$$

El valor de esta probabilidad depende de la transición bajo consideración. Unas transiciones son más probables que otras y, evidentemente, las transiciones prohibidas tienen probabilidad nula,  $W_{mn} = 0$ .

#### 4.6. OTROS ÁTOMOS

Hasta ahora hemos estado considerando el átomo de hidrógeno por su simplicidad. La estructura de los átomos con muchos electrones se complica extraordinariamente, pero podemos afirmar lo siguiente:

- 1) Los electrones pueden ocupar estados estables con energías bien definidas  $E_n$  de manera que en cada estado solo puede haber, como máximo, dos electrones, uno con *spin* arriba y otro con *spin* abajo (principio de exclusión de Pauli).
- 2) En estado de equilibrio los  $N$  electrones de un átomo ocupan los estados con energías menores, teniendo en cuenta que cada estado  $E_n$  puede estar ocupado por un número limitado de electrones. En equilibrio:

$\Sigma$  (energía electrones) = valor mínimo

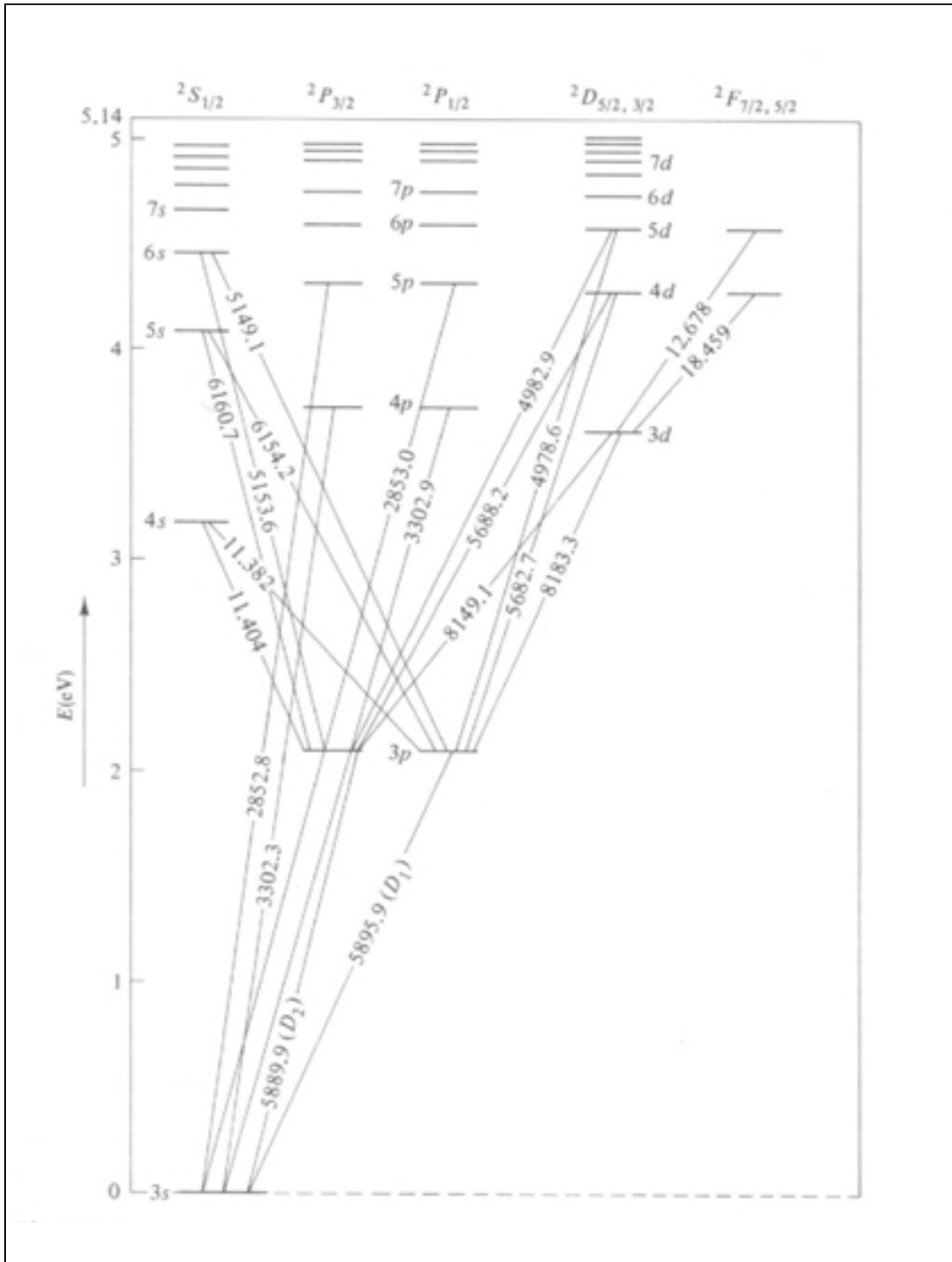


Figura 7.11.- Esquema de niveles de energía para el sodio. El nivel de energía 3s, que es el estado del electrón más externo, se ha elegido como nivel de referencia 0. (Del libro *Atomic Spectra*, de H.G. Kuhn.)

- 3) Además el átomo tendrá una colección de *estados vacantes*, es decir, no ocupados por electrones, a los que podrán acceder electrones procedentes de otros estados mediante el correspondiente intercambio de energía.
- 4) Normalmente, los electrones que participan en los saltos de energía son los que están en las capas más exteriores (energías mayores, es decir en los diagramas usuales de energías, los estados más altos). Estos electrones, que se denominan **de valencia**, son los mismos que se intercambian en las reacciones químicas, y suelen ser pocos (entre uno y tres). En la figura 7.11 se muestra un diagrama de los niveles energéticos del electrón de valencia del átomo de sodio (Na) que están por encima del de equilibrio, al que se asigna nivel de referencia 0, indicando las transiciones posibles y la longitud de onda en Ångstroms de los fotones asociados con la transición ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m} = 0.1 \text{ nm}$ ).

En la misma figura 7.11 se han marcado las rayas de 588.99 y 589.59 nm que proporcionan el color amarillo característico del sodio (el color amarillo de las llamas está contribuido de manera principal por el sodio. Cuando éste está ausente, como en el caso del gas natural o de la combustión del alcohol, las llamas tienen un color azulado). Nótese que hay niveles entre los cuales no hay rayas (transiciones prohibidas); por ejemplo, entre el  $3s$  y  $4s$ , o entre los  $3p$  y  $4p$ .

## 5. ESPECTROS DE EMISIÓN Y ABSORCIÓN

### 5.1. MEDIO MATERIAL EN EQUILIBRIO TÉRMICO

Hasta ahora hemos considerado átomos aislados, pero los medios materiales están formados por un número muy elevado de ellos que o bien se mueven y colisionan (gas) o vibran alrededor de una posición fija estable (sólido). El estado líquido es un estado intermedio entre los dos anteriores.

Consideremos para empezar un gas monoatómico, es decir, formado por átomos idénticos, como en el caso del vapor de sodio o de mercurio de algunas lámparas (también hay gases formados por **moléculas**, como el  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$ ,  $H_2$  etc.). Para mantener la discusión en el nivel más sencillo, supondremos que **solamente el electrón más exterior experimenta transiciones**, y cuando hablemos del *estado de energía* de un átomo nos referiremos realmente a la de su electrón exterior,  $E_i$  ( $i = 0, 1, 2 \dots$ ), ya que la de los demás electrones permanece constante.

Si el gas no está a  $T = 0$  K (que por definición es la ausencia total de movimiento o de energía cinética) los átomos se moverán, experimentarán colisiones y en cada momento habrá  $N_i$  átomos en el estado  $E_i$ . Cuando todo el gas está a temperatura uniforme y ésta no cambia con el tiempo (estado de *equilibrio térmico*) los números  $N_i$  tampoco cambian con el tiempo; si bien, si nos fijáramos en un átomo, veríamos que éste va pasando por diferentes estados energéticos bien sea por colisiones o por absorción o emisión de fotones.

Los números  $N_i$  (cantidad de átomos en el estado energético  $E_i$ , también llamados **poblaciones** de  $E_i$ ) vienen dados por la ley de Boltzmann:

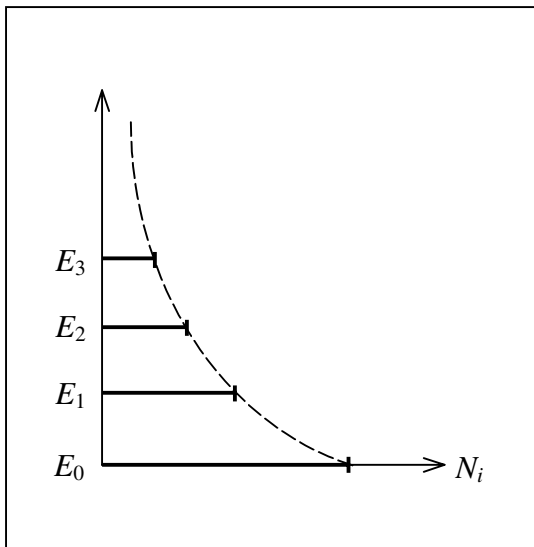


Figura 7.12.- Poblaciones de los estados de un átomo en función de su energía.

$$N_i = \alpha e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

donde  $k$  = constante de Boltzmann,  $T$  = temperatura en K y  $\alpha$  es una constante que normalmente no es necesario conocer.

De manera que, cuanto mayor sea la energía  $E_i$ , menor será el número de átomos  $N_i$  en ese estado, con un decaimiento exponencial.

El cociente entre dos poblaciones diferentes ( $i, j$ ) viene dado por:



$$\frac{N_i}{N_j} = e^{-\frac{E_i - E_j}{kT}}$$

EJEMPLO 1

Para calcular la expresión anterior es práctico expresar tanto  $E_i$  como  $kT$  en eV. En este caso nótese que:

$$k = 1.380 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 8.614 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$$

Por ejemplo, a temperatura ambiente,  $T = 293 \text{ K}$ , y a  $2500 \text{ K}$  tenemos:

	$E_i - E_j$ (eV)	0.1	0.5	1.0	2.0
(293 K)	$N_i/N_j$	$19 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-9}$	$6.2 \times 10^{-18}$	$3.8 \times 10^{-37}$
(2500 K)	$N_i/N_j$	0.63	0.098	$9.6 \times 10^{-3}$	$9.2 \times 10^{-5}$

Nótese cómo, a temperatura ambiente, una diferencia de energía de 1 eV (aproximadamente el salto de energía entre bandas en el caso del silicio) desproporciona las poblaciones en un factor del orden de  $10^{17}$ , y cómo, si elevamos la temperatura a 2500 K, el factor se reduce solamente a 100 veces.

EJEMPLO 2

Supongamos que en una ampolla de cristal (bombilla) de  $113 \text{ cm}^3$  (volumen de una esfera de 3 cm de radio) hay  $N = 1.68 \times 10^{19}$  átomos de sodio a  $T = 1544 \text{ K}$  (a esta temperatura el sodio está completamente en fase vapor, ya que su temperatura de ebullición es  $892 \text{ °C} = 1165 \text{ K}$ ). Nos interesa calcular la potencia radiada por el sodio en las rayas amarillas  $D_1$  (589.59 nm) y  $D_2$  (588.99 nm). Dado lo próximas que están las líneas, por simplificar calcularemos cuanta potencia se radiaría en una de longitud de onda intermedia, 589.3 nm, y duplicaremos los resultados obtenidos. La diferencia de energías asociada con los niveles correspondientes a esta transición, que denominaremos  $E_1$  y  $E_0$  (estado de equilibrio), vale:

$$\Delta E = E_1 - E_0 = h f = h \frac{c}{\lambda} = 3.37 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.10 \text{ eV}$$

La población de átomos  $N_1$  con el electrón de valencia en el nivel  $E_1$  vale:

$$\frac{N_1}{N_0} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} = 1.348 \times 10^{-7}$$

donde  $N_0$  es la población (número de átomos) en el estado de equilibrio  $E_0$ . Nótese que, para los estados con energías mayores:

$$N_5 \ll N_4 \ll N_3 \ll \dots \ll N_1 \ll N_0$$

y por tanto podemos suponer que  $N_0 \approx N$  (es decir, el total de átomos que está en estados que no son de equilibrio es despreciable comparado con los de equilibrio). Por tanto

$$N_1 \approx N \times 1.348 \times 10^{-7} = 2.26 \times 10^{12}$$

Se sabe que la vida media de un electrón excitado en el estado  $3p$  es:

$$\tau_m = 5.2 \times 10^{-9} \text{ s}$$

Por tanto, si todas las transiciones al estado de equilibrio son radiantes (es decir, por emisión de fotones) tenemos que, por segundo, se emitirán  $N_f$  fotones dados por:

$$N_f = \frac{1}{\tau_m} N_1 = 4.35 \times 10^{20} \text{ fotones / segundo}$$

y la bombilla estaría emitiendo una potencia en las dos rayas amarillas  $D$  de (doble de la raya hipotética):

$$P_D = 2N_f \Delta E = 294 \text{ vatios}$$

## 5.2. ESPECTRO DE EMISIÓN DE UN GAS

El ejemplo 2 anterior es un caso de espectro de emisión de un gas. En general, cuando un gas está excitado emite radiación en longitudes de onda bien definidas (espectro discreto), a diferencia de la radiación térmica, que tiene un espectro continuo.

La excitación de un gas puede producirse:

- a) Porque se aumenta su temperatura, como en el ejemplo visto.
- b) Porque se produce una descarga en el gas. Si a un gas lo sometemos a un campo eléctrico intenso, los escasos electrones libres e iones presentes (átomos ionizados) se aceleran y, si el campo es suficientemente intenso, las colisiones de éstos con otros átomos pueden a su vez ionizarlos produciéndose una **reacción en cadena** o efecto de **avalancha** (por similitud con las avalanchas de piedras o nieve que se producen en las montañas) que resulta en una elevada concentración de electrones e iones positivos que hacen el gas conductor. A partir de este momento la descarga puede mantenerse aunque el campo eléctrico se reduzca. Este es el principio según el cual funcionan los tubos fluorescentes, en los que el gas que produce la radiación es vapor de mercurio.

## 5.3. ABSORCIÓN DE RADIACIÓN POR UN GAS

Supongamos que sobre un gas donde hay una **concentración** o **densidad** de  $N$  átomos por  $\text{m}^3$  y una población correspondiente al nivel de energía  $E_m$  de  $N_m$  átomos /  $\text{m}^3$ , se hace incidir radiación electromagnética (por ejemplo, una onda plana uniforme) con densidad de flujo de potencia (vector de Poynting)  $S$   $\text{W}/\text{m}^2$  (fig. 7.13). Si la radiación es de frecuencia  $f$ , es tanto como decir que la onda contiene

$$R = \frac{S}{h f} \quad \text{fotones} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

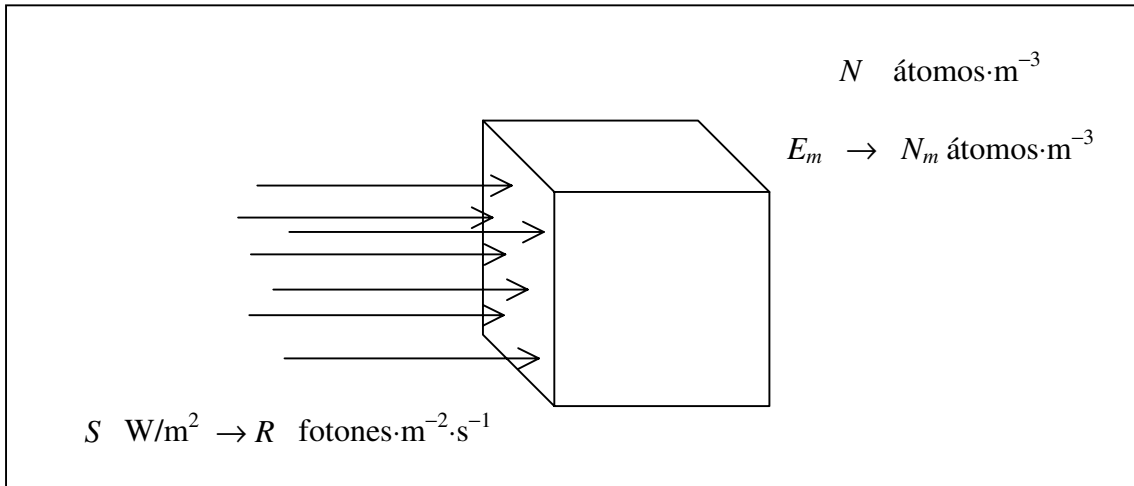


Figura 7.13.- Volumen de gas sobre el que incide radiación electromagnética.

De manera que, en cada instante, dentro del gas hay una densidad de fotones de:

$$N_f = \frac{R}{c} \quad \text{fotones / m}^3$$

(Se propone al lector que justifique la expresión anterior). Por simplicidad supondremos, como en ejemplos anteriores, que en los procesos de interacción solamente interviene un electrón del átomo, que puede subir o bajar de niveles de energía.

Si la frecuencia de la radiación incidente coincide con la de transición  $f_{mn}$  entre dos de estos niveles:

$$f = \frac{E_m - E_n}{h} = f_{mn} ,$$

pueden pasar dos cosas:

- a) Que átomos en el estado  $E_n$  absorban un fotón y pasen al estado  $E_m$ . El número de estas transiciones por segundo y por  $\text{m}^3$ ,  $R_{nm}$ , vendrá dado por:

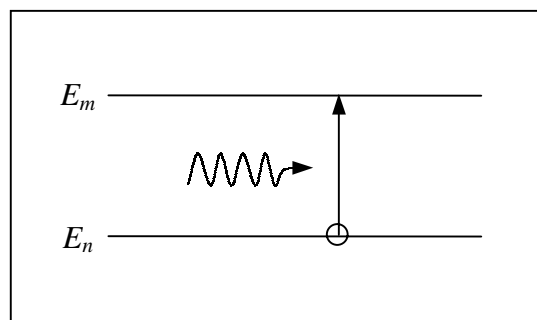


Figura 7.14.- Véase fig. 7.10.

$$R_{nm} = N_n N_f B_{nm}$$

Es decir, será proporcional al nº de átomos por  $m^3$  en el estado  $E_n$ ,  $N_n$ , y al número de fotones por  $m^3$  presentes en cada instante,  $N_f$ . El factor de proporcionalidad es  $B_{nm}$ , y fué introducido en la Física por A. Einstein.

- b) Que átomos en el estado  $E_m$  emitan por estimulación un fotón. El número de estas transiciones por segundo y por  $m^3$ ,  $R_{mn}$ , vale en este caso:

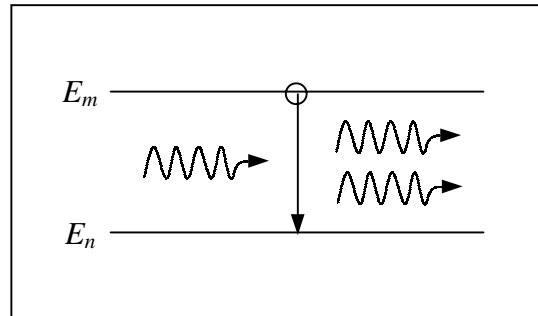


Figura 7.15.- Véase fig. 7.10.

$$R_{mn} = N_m N_f B_{mn}$$

Dado que la absorción y la emisión de un fotón son sucesos igualmente probables resulta que:

$$B_{nm} = B_{mn}$$

De manera que el número **neto** de transiciones  $n \rightarrow m$  (absorción neta de fotones) será

$$R'_{nm} = R_{nm} - R_{mn} = B_{mn} N_f (N_n - N_m)$$

y como  $N_n > N_m$ ,  $R'_{nm} > 0$ ; es decir, **el gas siempre absorbe fotones y por tanto siempre absorbe energía de la radiación incidente**, de manera que el proceso de emisión estimulada queda enmascarado por el proceso de absorción de fotones.

## 5.6. FLUORESCENCIA Y ESPECTROS DE ABSORCIÓN

Continuando con el párrafo anterior, los átomos que suben de energía  $E_n \rightarrow E_m$  por absorción de fotones no permanecen en el estado superior indefinidamente, ya que

tienen una vida media finita  $\tau_m$  y por emisión espontánea vuelven al estado  $E_n$  o a otros estados con energía menor que  $E_m$ .

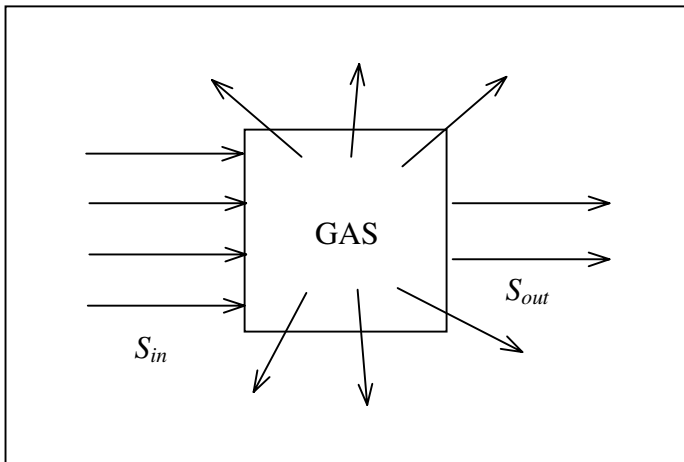


Figura 7.16.- Absorción de la radiación incidente por un gas y fluorescencia asociada.

De manera que el gas emite radiación de la misma frecuencia que la incidente y de otras frecuencias, pero en todas direcciones. Esta radiación se resta, por tanto, de la onda que inicialmente se dirigió sobre el gas.

Por tanto, cuando sobre el gas se hace incidir luz blanca o radiación con un espectro continuo, a la salida la radiación ha disminuido en aquellas frecuencias (longitudes de onda) que se corresponden con transiciones de los átomos. El registro de la radiación a la salida del gas se llama **espectro de absorción** (fig. 7.17), y los picos (decrecimientos) que presenta coinciden exactamente en frecuencia con los picos (aumentos) de la radiación emitida cuando el gas está excitado (espectro de emisión).

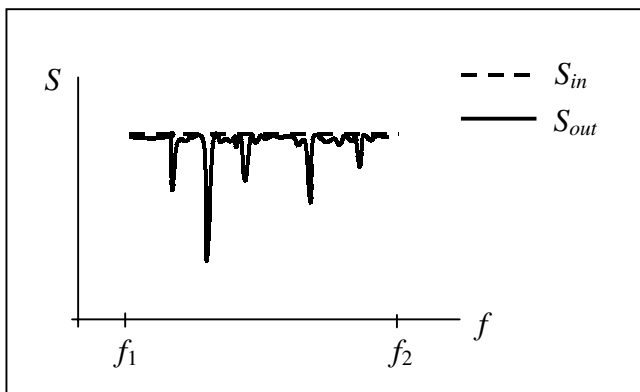


Figura 7.17.- Espectro de absorción de luz blanca por un gas.

A la radiación que emite el gas como consecuencia del retorno de electrones a niveles de energía inferiores se le llama **fluorescencia**.

**EJEMPLO:** La fluorescencia del rubí

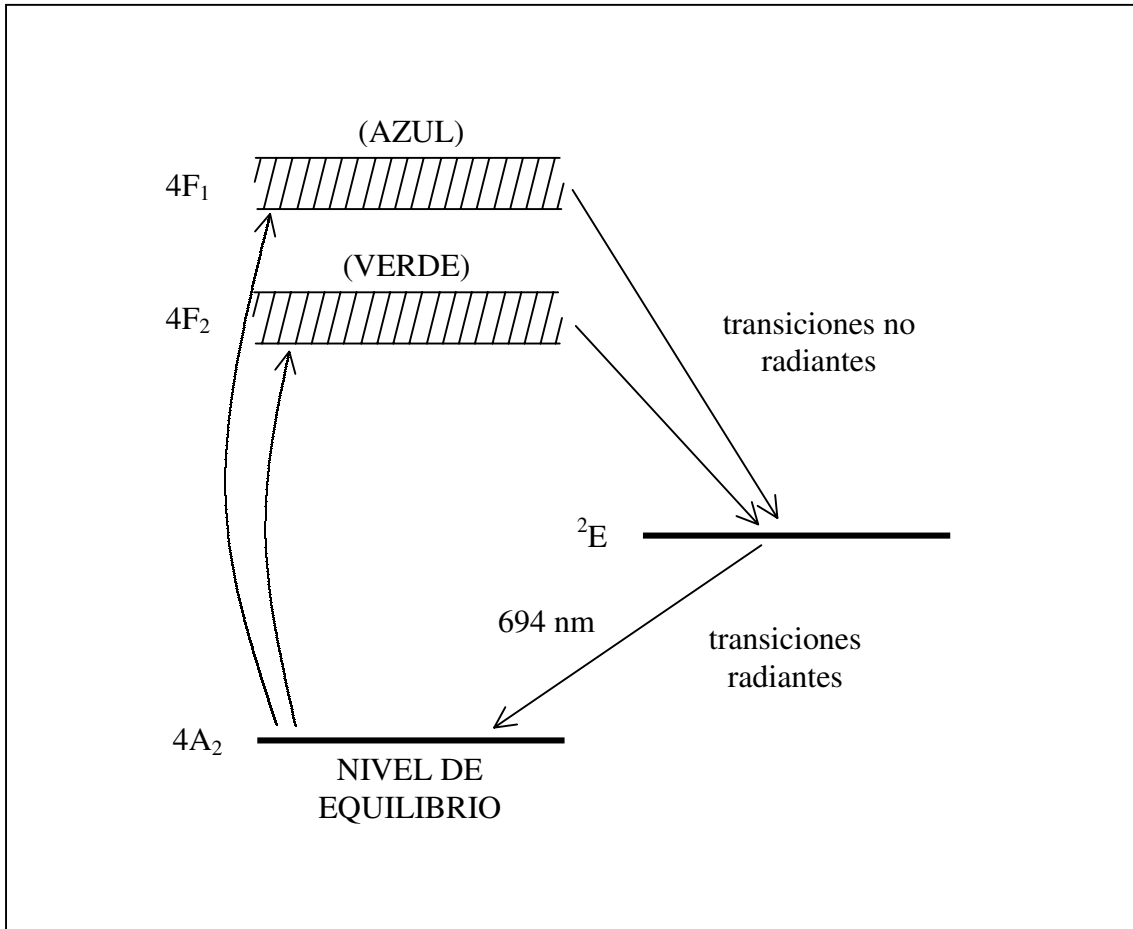


Figura 7.18.- Diagrama de bandas del ión  $\text{Cr}^{3+}$  en el rubí.

El rubí es corindón cristalino (óxido de aluminio,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) con átomos de cromo alojados en su estructura en forma de iones  $\text{Cr}^{3+}$  (átomos de cromo que han perdido tres electrones y tienen por tanto tres cargas positivas). Cuando el rubí se irradia con luz blanca se producen transiciones de iones  $\text{Cr}^{3+}$  del estado de equilibrio a niveles altos  $4F_1$  y  $4F_2$ , que requieren luz azul y verde (fig. 7.18). Una vez en estos estados, los átomos inmediatamente descienden al nivel inferior  $2E$  en transiciones no radiantes (no emiten fotones, sino que liberan energía mecánica, es decir, calor, al cristal de rubí). De aquí, los iones  $\text{Cr}^{3+}$  transicionan al nivel de equilibrio emitiendo fotones en el color rojo,  $\lambda = 694 \text{ nm}$ . Una de las características identificativas del rubí es su **fluorescencia**, precisamente. Si se expone a luz con componentes espectrales azules (como la luz del sol) se nota como el rubí *brilla* o emite fluorescencia de color rojo fácilmente perceptible, lo que lo distingue de otras gemas de color rojo como el granate.

## 6. INVERSIÓN DE POBLACIONES Y EFECTO LASER

Supongamos un átomo o ión formando parte de un gas o en una estructura cristalina, como el rubí, con tres niveles  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  (por supuesto, puede haber más, pero nos fijamos en estos tres) tales que:  $E_1$  es el nivel de equilibrio,  $E_3$  es un nivel normal con vida media  $\tau_m \sim 10^{-8} / 10^{-9}$  s y  $E_2$  es un nivel **metaestable**, es decir, con vida media anormalmente larga, típicamente del orden de  $\tau_m \sim 10^{-3}$  s; o, lo que es lo mismo, un átomo/ión en estado  $E_2$  tarda, en promedio,  $10^{-3}$  s en emitir un fotón y descender al nivel de equilibrio  $E_1$ .

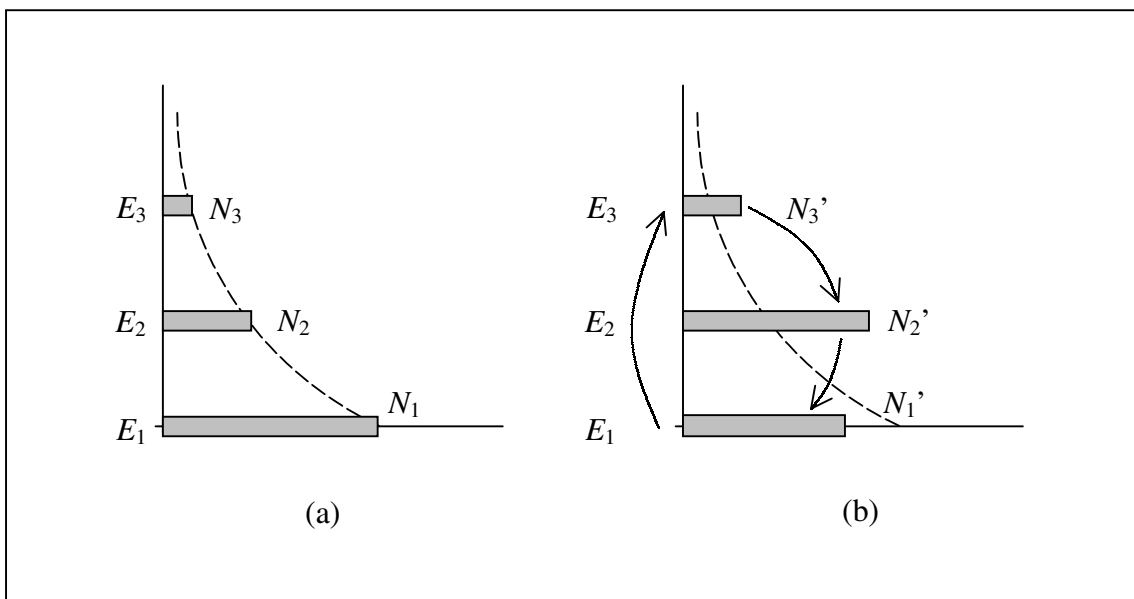


Figura 7.19.- Producción de inversión entre tres niveles energéticos. (a) Poblaciones en equilibrio térmico; (b) Poblaciones bajo irradiación electromagnética.

En equilibrio térmico a temperatura  $T$  las poblaciones de cada estado energético vendrán dadas por la distribución de Boltzmann y serán  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$  átomos·m<sup>-3</sup> (por unidad de volumen).

Si ahora sometemos a los átomos/iones a la acción de radiación electromagnética de frecuencia:

$$f = f_{31} = \frac{E_3 - E_1}{h},$$



o bien que contenga componentes espectrales de esta frecuencia, sucede lo siguiente (fig. 7.19):

- 1) Algunos átomos en el estado de equilibrio  $E_1$  absorben fotones y pasan al estado  $E_3$ .
- 2) Los átomos en estado  $E_3$  descienden al nivel  $E_2$  muy rápidamente (vida media corta), bien sea en transiciones radiantes (emiten un fotón) o no radiantes (transmiten energía cinética = calor, como en el caso del rubí) o de ambos tipos.
- 3) Como la vida media de  $E_2$  es larga, los átomos en estado  $E_2$  se acumulan y su población crece.
- 4) En condiciones adecuadas puede suceder que las poblaciones modificadas por la radiación electromagnética aplicada sean tales que:

$$N_2' > N_1'$$

en cuyo caso se dice que las poblaciones de estos niveles **están invertidas**, por referencia a la situación (normal) de equilibrio térmico.

A la radiación aplicada hasta ahora, de frecuencia  $\nu$  o con componentes espectrales  $f_{31} = (E_3 - E_1)/h$ , se le llama **radiación de bombeo**.

Supongamos que, dadas las condiciones anteriores, hacemos incidir además sobre los átomos/iones una onda plana uniforme de frecuencia (fig. 7.20):

$$f = f_{21} = \frac{E_2 - E_1}{h} \quad \text{con } R \text{ fotones} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

Entonces tendremos:

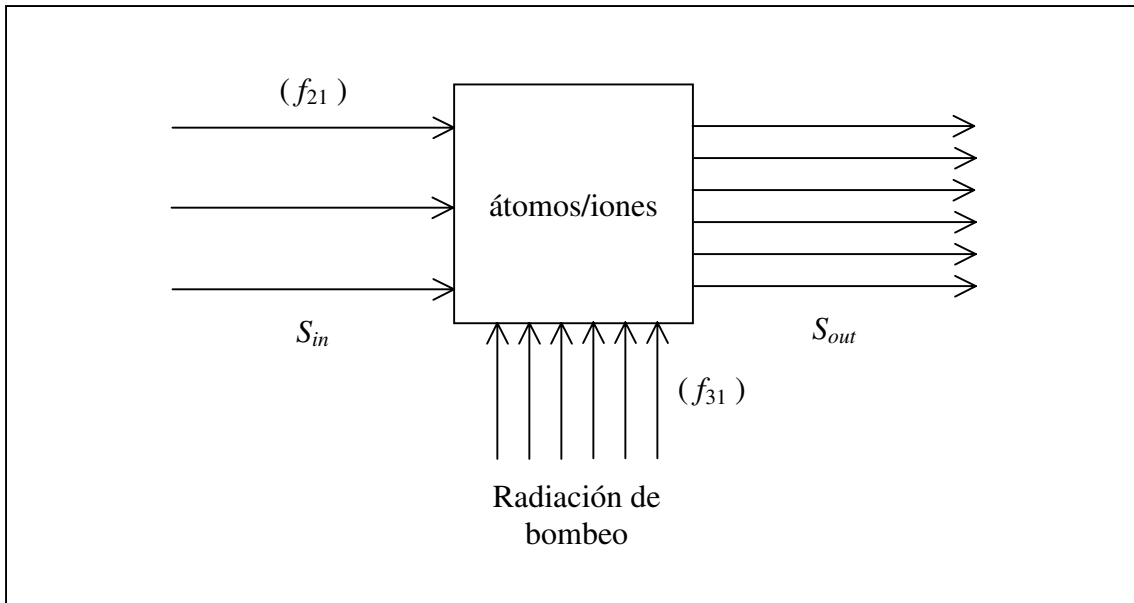


Figura 7.20.- Esquema de producción de efecto láser.

- a) Absorción. De los  $R$  fotones  $\cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  será absorbida (transiciones  $1 \rightarrow 3$ ) la cantidad:

$$R_{12} = \frac{R}{c} N_1' B_{12} \quad \text{fotones} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

- b) Emisión estimulada. De la misma forma serán emitidos

$$R_{21} = \frac{R}{c} N_2' B_{21} \quad (B_{21} = B_{12})$$

Por tanto la **emisión neta** (fotones emitidos – fotones absorbidos) será:

$$R'_{21} = R_{21} - R_{12} = \frac{R}{c} B_{21} (N_2' - N_1') > 0$$

Por tanto habrá **emisión neta** de fotones y en consecuencia, saldrá más potencia de la que entró. El material entonces presenta **ganancia**.

Además, si la onda plana incidente es estrictamente monocromática (espectro de ancho nulo) la de salida continuará siéndolo dado que cada fotón **emitido** tiene exactamente la misma frecuencia, polarización y fase que el que induce la emisión. Por tanto podemos decir que el medio **amplifica** la onda entrante y aumenta su amplitud sin modificar ni su polarización ni su fase. Este proceso se denomina: **Light Amplification by the Stimulated Emission of Radiation (LASER)**.

#### EJEMPLO 1

El rubí, tal como hemos visto, es candidato a producir inversión de poblaciones entre los niveles  $2E$  y  $4A_2$  y, por tanto, a producir efecto láser a  $\lambda = 694$  nm. De hecho, el rubí fue el primer material con el que se fabricó un láser (Maiman, 1960).

#### EJEMPLO 2

El ión Neodimio ( $Nd^{3+}$ ) puede producir efecto láser a partir de la intervención de **cuatro niveles**, tal como se indica en el gráfico de la figura 7.21.

La frecuencia láser es  $\lambda = 1.06$   $\mu$ m. Debe hacerse notar que es más fácil producir inversión en esquemas de cuatro niveles que en los de tres, ya que en éstos (los de tres) el nivel de retorno de las transiciones es el estado de equilibrio  $E_1$ , donde siempre hay una población grande, y cuesta hacer  $N_2' > N_1'$ . Sin embargo, con cuatro niveles  $N_2'$  puede ser mucho menor, y cuesta mucho menos hacer  $N_3' > N_2'$ .

Los láseres de Neodimio se fabrican con barras de un material transparente que se denomina YAG (Granate de Ytrio y Aluminio,  $Y_3Al_5O_{15}$ : en inglés *Yttrium Iron Garnet*, de donde se originan el acrónimo YAG) en el que se incluyen impurezas de Nd que se ionizan formando iones  $Nd^{3+}$ . El bombeo se produce con una lámpara de descarga gaseosa (xenón) extraordinariamente intensa, similar a la de los *flashes* de las cámaras fotográficas, que producen mucha radiación en el azul y en el ultravioleta.

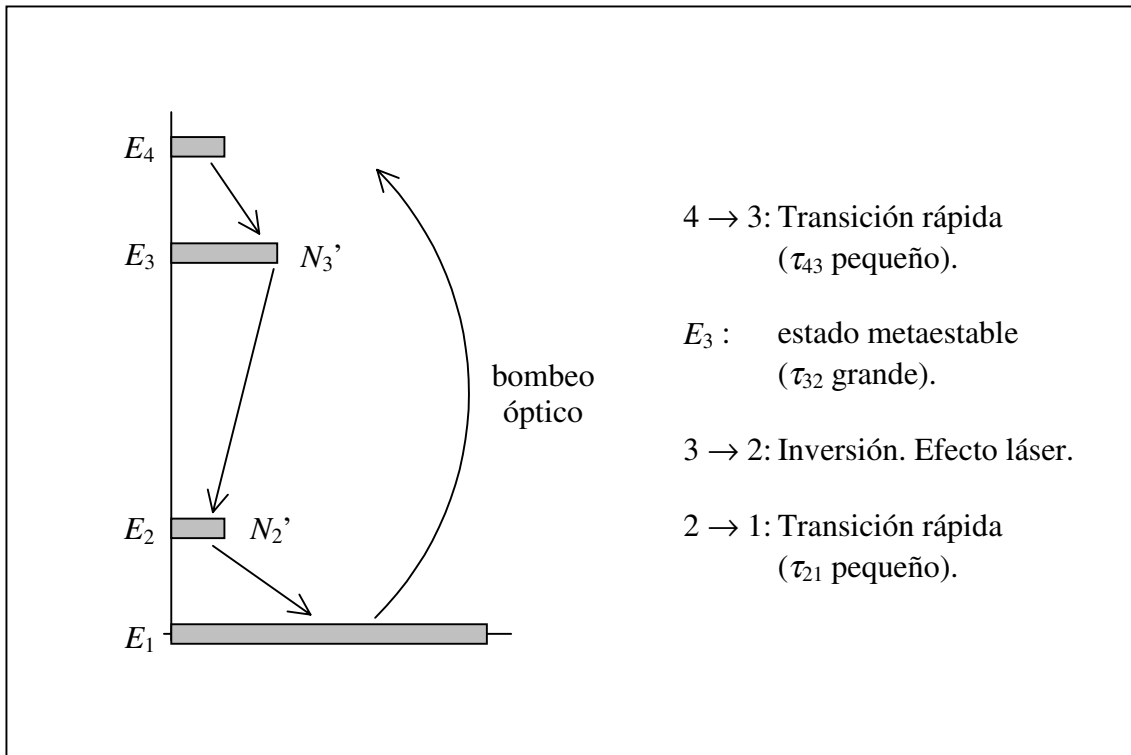


Figura 7.21.- Producción de inversión y de efecto láser mediante la intervención de cuatro niveles (como en Neodimio,  $\text{Nd}^{3+}$ ).

El neodimio también puede producir efecto láser útil a las longitudes de onda de 900 y 1350 nm, además de los citados 1060 nm.

### EJEMPLO 3

Con iones Erblio ( $\text{Er}^{3+}$ ) se puede producir efecto láser de tres niveles a  $\lambda = 1550$  nm. Si bien al ser de tres niveles su eficiencia es comparativamente baja, se puede *bombear* de forma eficaz con láseres semiconductores o diodos LED de  $\lambda = 980$  o 1480 nm.

En la actualidad se fabrican fibras ópticas a las que se ha añadido erbio de manera que, si se bombea con radiación de 980 o 1480 nm, la fibra presenta ganancia; es decir, la señal a la salida es de mayor intensidad que la señal a la entrada.

## 7. EJERCICIOS

7.1.- Las energías posibles de un átomo de hidrógeno (debidas a las diferentes órbitas de su único electrón) vienen dadas por:

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Calcular los valores de los saltos de energía 3-1, 2-1, 4-2, 3-2 en eV y en Julios.
- Calcular la frecuencia y longitud de onda de los fotones de las transiciones de a). Indicar en qué margen del espectro (IR, VIS, UV) están situados.

7.2.- Una pantalla plana de cristal líquido de un PC, de  $20 \times 14 \text{ cm}^2$ , produce una radiancia (potencia por unidad de superficie emisora perpendicular a la dirección de observación y por unidad de ángulo sólido) de valor:

$$L(\theta) = 2.03 \cos \theta \text{ W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$$

dónde  $\theta$  es el ángulo que forman la normal a la superficie y la dirección bajo consideración. Calcule la potencia luminosa total que radia la pantalla en W.

(Sugerencia: sitúe la pantalla en el plano xy de manera que  $\theta$  sea la colatitud, y utilice coordenadas esféricas)

7.3.- A partir de la Ley de Planck:

$$L_f = \varepsilon \frac{2hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \text{ W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$$

demostrar que la potencia total dP radiada por un elemento de superficie dA vale:

$$\frac{dP}{dA} = \varepsilon 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}$$

(Ley de Stefan). Ayuda:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

7.4.- El sol tiene un radio  $R = 696\,000$  km, se ve desde la tierra bajo un ángulo de  $32'$  y emite una radiancia que es independiente de la dirección de observación de valor  $L = 2.25 \times 10^7 \text{ W m}^{-2} \text{ sr}^{-1}$ .

- a) Sabiendo que la potencia total radiada por unidad de superficie de un cuerpo negro vale (ley de Stefan):

$$\frac{dP}{dA} = 5.67 \times 10^{-8} T^4 \text{ W m}^{-2}$$

calcule la temperatura de la superficie del sol suponiendo que ésta se comporta como un cuerpo negro.

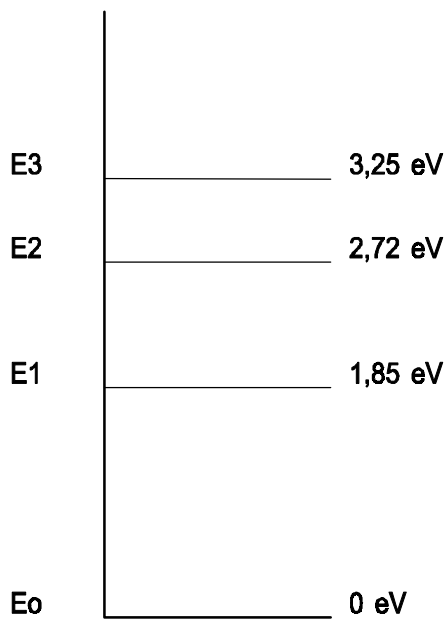
- b) ¿Cuánto vale la densidad de flujo de potencia en  $\text{W m}^{-2}$  que llega a la tierra?

7.5.- Un tubo de vidrio de 1 litro de volumen contiene helio a baja presión, con un total de  $2.69 \times 10^{20}$  átomos. Por el gas ionizado se hace circular una corriente intensa de manera que emite radiación luminosa en la que se observa una línea espectral de  $1.2 \text{ W}$  a  $667.8 \text{ nm}$ .

Calcule la diferencia de energía (en J y en eV) entre los dos niveles implicados en la emisión de esta línea espectral y el número de transiciones entre los dos estados que, en promedio, realiza cada átomo en un segundo.

7.6.- Los átomos de sodio emiten dos rayas amarillas muy intensas de longitudes de onda  $\lambda_1 = 589.592 \text{ nm}$  y  $\lambda_2 = 588.995 \text{ nm}$  por transiciones del electrón más externo (de valencia) entre dos estados de energías  $E_1$  y  $E_2$  al estado de equilibrio de energía  $E_0$ .

- a) Calcule las diferencias de energías  $E_2 - E_0$  y  $E_1 - E_0$  en eV.
- b) Supongamos vapor de sodio a  $1000 \text{ K}$  ( $727^\circ \text{ C}$ ). ¿Cuál es la proporción de poblaciones (número de átomos en cada nivel)  $N_1/N_0$ ? (distribución de Boltzmann)
- c) Supongamos ahora una lámpara de vapor de sodio que contiene  $N = 2.69 \times 10^{23}$  átomos a  $1000 \text{ K}$  como en c), y que la vida media de un átomo (tiempo medio antes de volver al estado de equilibrio) en el estado  $E_1$  es de  $10 \text{ ns}$ . ¿Cuánta potencia emite la lámpara a la longitud de onda  $\lambda_1$ ? (Sugerencia: note que, como  $N_1 \ll N_0$ , podemos poner  $N_0 \cong N$ )



7.7.- Una ampolla de vidrio contiene  $N = 2.42 \times 10^{20}$  átomos de un gas monoatómico cuyos tres primeros niveles energéticos se muestran en la figura. Entre los niveles dibujados están permitidas todas las transiciones, excepto la (3, 0).

a) Calcule las longitudes de onda más larga y más corta que se pueden producir por transiciones entre estos niveles.

b) Si el gas está en equilibrio térmico a  $600^\circ \text{C}$ , calcule las poblaciones  $N_0$ ,  $N_1$  y  $N_2$ .

c) Si los átomos en estado  $E_1$  tienen una vida media de  $8.0 \times 10^{-9}$  s, calcule la potencia radiada por el gas en la longitud de onda correspondiente a la transición (1, 0).

## §8. LAS ECUACIONES DE MAXWELL

---

### 1. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos desarrollado la asignatura a partir de la postulación de los campos radiados por una carga acelerada, lo que nos ha permitido avanzar más deprisa y evitar unas buenas dosis de matemáticas. Pero el estudio del electromagnetismo en libros de nivel universitario se hace a partir de la formulación diferencial de sus principios, que se denominan *ecuaciones de Maxwell*, y de las ecuaciones diferenciales que se generan a partir de ellas, entre las que destaca la **ecuación de ondas**. Es necesario advertir que, a partir del nivel de los temas que acabamos de exponer, es difícil avanzar sin recurrir a esta formulación diferencial del electromagnetismo. El objeto de este tema es el de hacer una introducción muy breve a estas ecuaciones que permita al lector enlazar con los restantes libros de texto y con las aplicaciones más avanzadas de la teoría electromagnética, pero de ninguna manera está pensado para sustituir a un texto adecuado.

### 2. CAMPOS ESCALARES

Un *campo escalar* es la distribución de una magnitud escalar en el espacio; como, por ejemplo, la temperatura  $T$ , o la presión  $P$ , o la densidad  $\rho$  del aire, etc. Si el punto genérico del espacio lo denotamos mediante  $P = (x, y, z) = \bar{r}$  y la magnitud escalar mediante  $f$ , el campo viene descrito mediante:

$$f(x, y, z, t) = f(P, t) = f(\bar{r}, t) \quad (t = \text{tiempo})$$



Si el campo no depende del tiempo decimos que es **estacionario**. (En lo que sigue, o bien suponemos que el campo es estacionario, o ignoramos de la dependencia temporal, por simplificar).

Una **superficie equiescalar** es, por definición, el lugar geométrico de los puntos del espacio en los que el campo toma un valor constante dado:

$$S(f_0) = \{ \bar{r} : f(\bar{r}) = f_0 \}$$

Cuando el campo escalar está definido solamente en una superficie, plana o curva, en lugar de estar definido en todo el espacio (por ejemplo, las temperaturas de una superficie, o la intensidad luminosa de una pantalla de proyección) las superficies equiescalares se reducen a **líneas** o **curvas equiescalares**.

#### EJEMPLO

En la fig.1 se representa un campo escalar bidimensional *Gaussiano* definido en un plano (por ejemplo, la temperatura de su superficie) mediante la expresión:

$$f(x, y) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} = e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)}$$

La representación gráfica de la figura se ha hecho asignando la coordenada  $z$  (altura sobre el plano  $xy$ ) al valor del campo,  $f = z$ . En la figura se supone que  $\sigma_x = 2\sigma_y$ .

Las curvas equiescalares en este caso vienen dadas por:

$$f(x, y) = f_0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} = -\ln(f_0) = p_0^2$$

$$\frac{x^2}{2\sigma_x^2 p_0^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 p_0^2} = 1$$

ecuación que presenta una elipse de semiejes  $(\sqrt{2} \sigma_x p_0, \sqrt{2} \sigma_y p_0)$

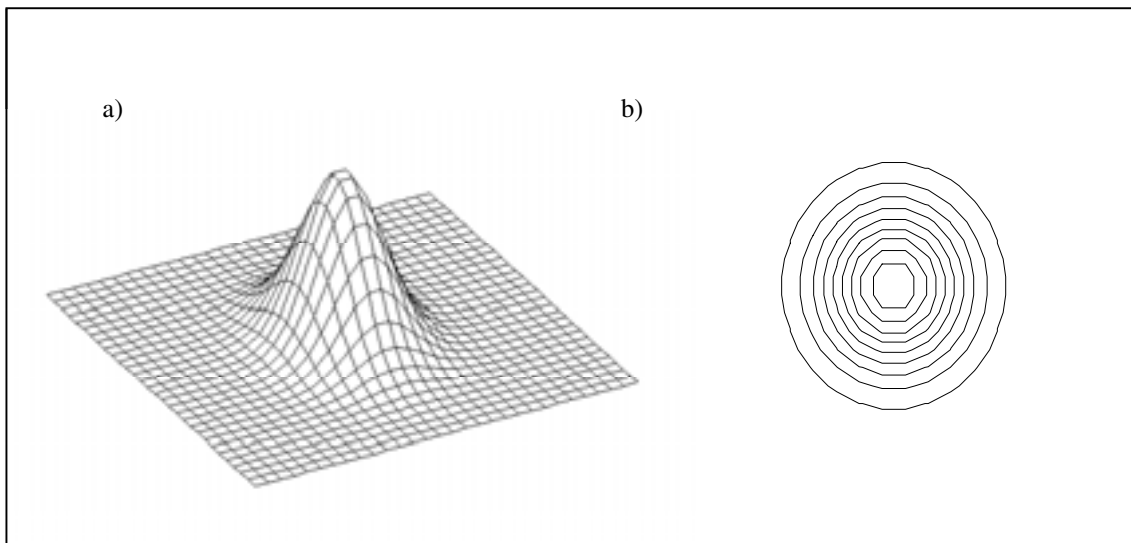


Figura 8.1.- Representación gráfica del campo escalar (2-D) Gaussiano del ejemplo del párrafo 2. a) En tres dimensiones. b) Mediante líneas equiescalares (curvas de nivel).

## 2.1. EL GRADIENTE

El gradiente de un campo escalar está relacionado con la tasa de variación del campo cuando nos desplazamos de un punto a otro punto próximo.

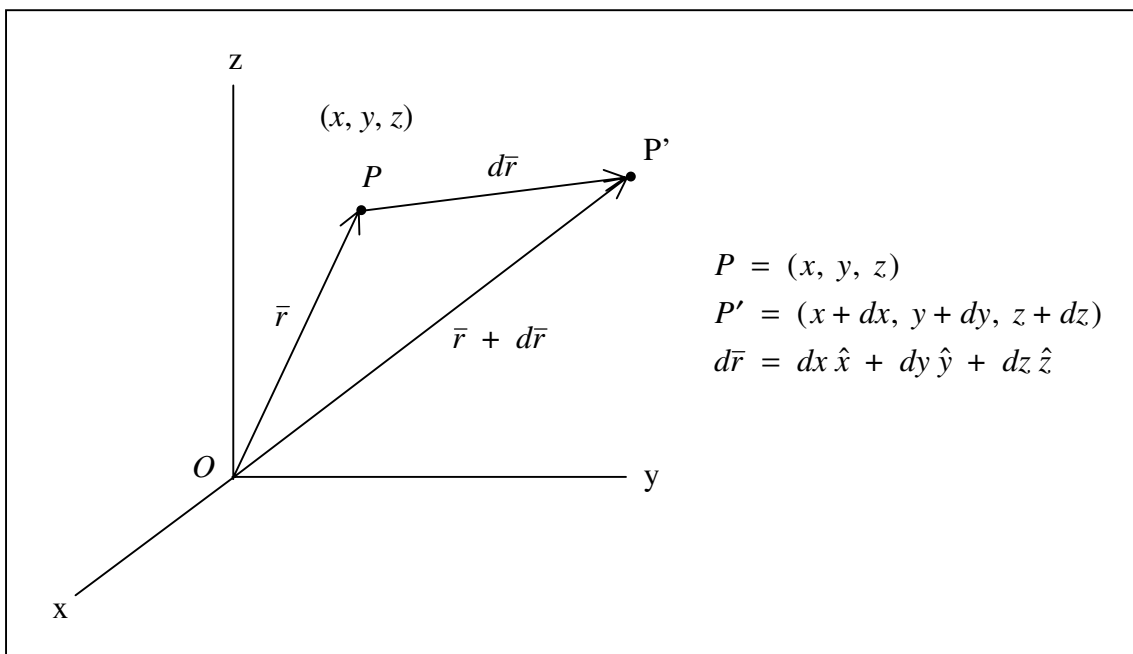


Figura 8.2.- Geometría utilizada en la generación del gradiente de un campo escalar.

En la situación de la figura 8.2 deseamos calcular:

$$f(P') - f(P) = f(\bar{r} + d\bar{r}) - f(\bar{r}) = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz =$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z})$$

$$\rightarrow \boxed{df = \nabla f \cdot d\bar{r}},$$

donde hemos definido

$$\nabla f = \text{gradiente de } f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla = \text{operador NABLA} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

Recordemos que un *operador* es una entidad matemática que opera o actúa sobre otros elementos matemáticos, que normalmente se escriben a la derecha del operador. En el caso que nos ocupa el operador es un operador diferencial, ya que efectúa diferenciaciones, y los entes matemáticos sobre los que actúa son funciones definidas en el espacio.

## 2.2. PROPIEDADES DEL GRADIENTE

- ① El vector gradiente de un campo escalar en un punto dado es perpendicular a la superficie equiescalar que pasa por el punto.

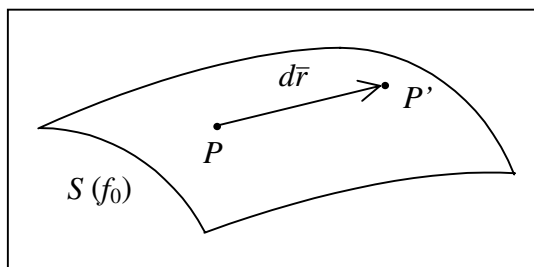


Figura 8.3.- Dos puntos en la misma superficie equiescalar.

Demostración: Supongamos dos puntos arbitrariamente próximos  $P, P'$  en la misma superficie equiescalar  $S(f_0)$  (figura 8.3). Entonces:

$$df = f(P') - f(P) = f(\bar{r} + d\bar{r}) - f(\bar{r}) = 0 = \nabla f \cdot d\bar{r}$$

Por tanto, si suponemos que el gradiente es no nulo,  $|\nabla f| \neq 0$ ,  $\nabla f$  es perpendicular a  $d\vec{r} \in S(f_0)$ ; es decir,  $\nabla f$  es perpendicular a  $S(f_0)$  en  $P$ .

**② El vector gradiente de un campo en un punto dado tiene la dirección según la cual el campo varía más deprisa, y el sentido del campo creciente.**

Demostración: Supongamos, por simplicidad, un campo bidimensional definido en el plano del papel, y la situación de la figura 8.4:

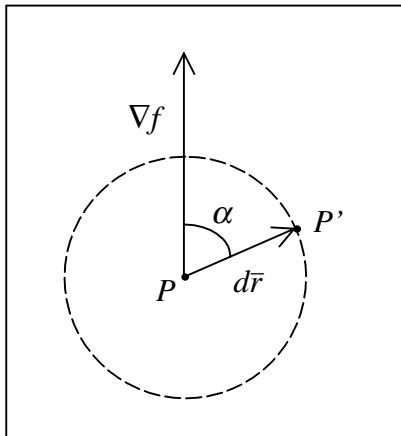


Figura 8.4.- Geometría utilizada en la demostración.

$P' \in$  circunferencia de radio  $|d\vec{r}| = dl = \text{cte.}$ :

$$df = f(P') - f(P) = \nabla f \cdot d\vec{r} = |\nabla f| dl \cos \alpha$$

Esta expresión es máxima cuando  $\alpha = 0$  ( $d\vec{r}$  paralelo a  $\nabla f$ ); la variación mayor (en sentido creciente) se produce cuando nos movemos de  $P$  a  $P'$  según la dirección del gradiente en  $P$ .

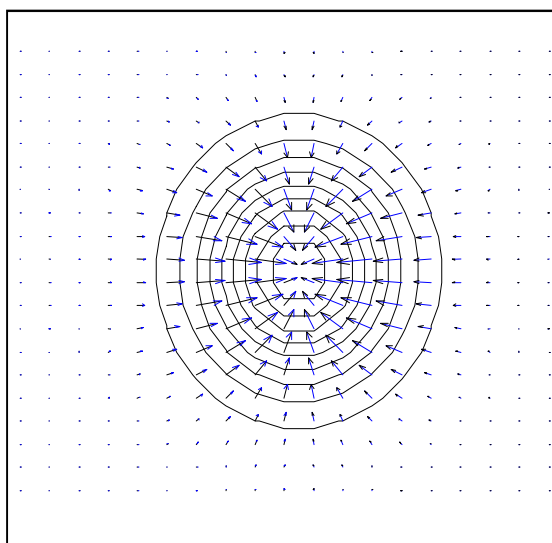


Figura 8.5.- Líneas equiescalares y gradiente del campo Gaussiano de la figura 8.1.

NOTA: Para un campo bidimensional,  $f(x, y)$ , el gradiente está contenido en el plano  $xy$ :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y}$$

La figura 8.5 representa, mediante pequeñas flechas de tamaño proporcional, el gradiente del campo

Gaussiano bidimensional utilizado en el ejemplo del párrafo 2. Obsérvese cómo el gradiente está dirigido según valores de campo creciente y es normal a las líneas equiescalares.

### 2.3. EL GRADIENTE EN OTROS SISTEMAS DE COORDENADAS

En coordenadas esféricas o cilíndricas, que denotamos de forma única por  $(u_1, u_2, u_3)$ , con factores métricos  $(h_1, h_2, h_3)$  y vectores unitarios  $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ , tendremos:

$$df = f(P') - f(P) = f(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3) - f(u_1, u_2, u_3) =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i = \underbrace{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_i} \hat{u}_i \right)}_{\equiv \nabla f} \cdot \underbrace{\left( \sum_{i=1}^3 h_i du_i \hat{u}_i \right)}_{= d\vec{r}}$$

Por tanto,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_i} \hat{u}_i$$

En particular, en coordenadas cilíndricas:  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\rho} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$

y en coordenadas esféricas:  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$

#### EJEMPLO 1

Consideremos el campo escalar (en coordenadas esféricas):

$$f = \frac{1}{r}$$

Evidentemente,

$S(f_0) \rightarrow \frac{1}{r} = f_0 \rightarrow r = \frac{1}{f_0} \rightarrow$  Las superficies equiescalares son superficies esféricas.

Por otra parte:  $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \hat{r}$

EJEMPLO 2

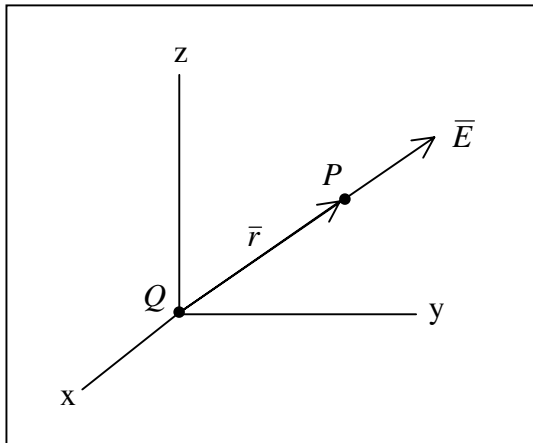


Figura 8.6.- Ley de Coulomb.

Supongamos una carga  $Q$  en el origen de coordenadas. Sabemos que:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) \equiv \nabla V$$

con  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

La magnitud  $V$  así definida es el conocido potencial eléctrico creado por la carga puntual y el campo eléctrico resulta ser el *gradiente del potencial*.

Supongamos ahora una carga de valor  $q$  en  $P$ ; está sometida a una fuerza eléctrica:

$$\bar{F} = q\bar{E} = -q\nabla V$$

Si un observador la sujeta, para que se esté quieta ha de aplicarle una fuerza:

$$\bar{F}_{ob} = -F$$

Si el observador ahora mueve la carga muy lentamente, para no comunicarle energía cinética apreciable, desde  $P_1$  a  $P_2$ , realiza un trabajo:

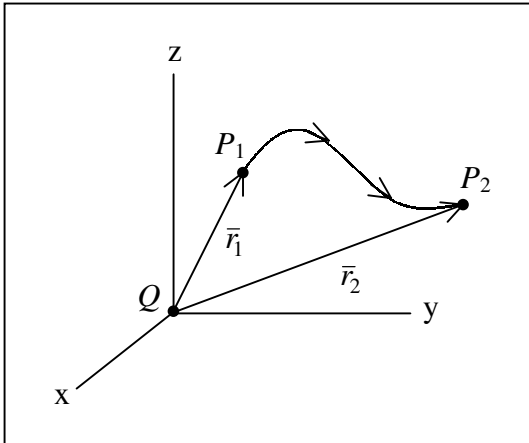


Figura 8.7.- Desplazamiento de una carga realizando trabajo.

$$\begin{aligned}
 W_{ob} &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{ob} \cdot d\vec{r} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\
 &= q \int_{P_1}^{P_2} \nabla V \cdot d\vec{r} = q \int_{P_1}^{P_2} dV = \\
 &= q V(P_2) - q V(P_1)
 \end{aligned}$$

de manera que:

- 1) El trabajo no depende del camino, sino solamente de los puntos inicial y final.
- 2) El trabajo vale  $q$  veces la diferencia de potencial  $V(P_2) - V(P_1) = V_2 - V_1$ .
- 3) Evidentemente, si  $P_1 = P_2$  (volvemos al punto de partida), el trabajo realizado es nulo.

### 3. LEY DE GAUSS Y DIVERGENCIA

Recordemos que los medios materiales amorfos (no cristalinos) tienen una propiedad, que se denomina constante dieléctrica o permitividad,  $\epsilon$ , que está relacionada con el carácter dipolar de sus átomos o moléculas, tal que se define el vector densidad de flujo eléctrico  $\vec{D}$  en el medio mediante la relación (4.2):

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

La ley de Gauss dice que, en un medio material, “**dado un volumen  $V$  limitado por una superficie  $S$  (con la normal definida hacia el exterior del volumen), el flujo de  $\vec{D}$  a través de la superficie es igual a la carga eléctrica encerrada en el volumen**”.

$$\int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q \quad \left( = \int_S D_n dS \right)$$

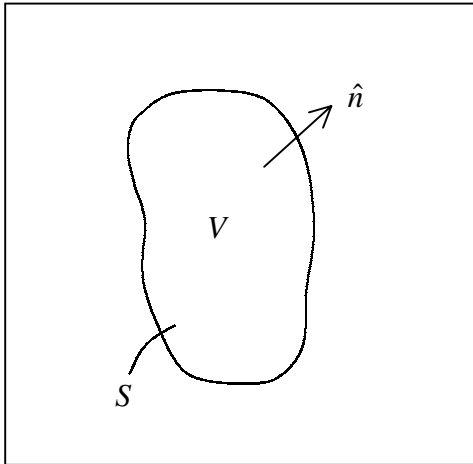


Figura 8.8.- Volumen de integración para el teorema de Gauss.

La carga interior puede estar formada por cargas puntuales,  $q_i$ , en cuyo caso:

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i ,$$

o bien puede ser una distribución **continua** de carga dada por su densidad  $\rho(\vec{r})$ , definida en un punto  $\vec{r}$  como el cociente entre la carga  $dq$  de un volumen elemental que contenga al punto, y el volumen dado. De manera que:

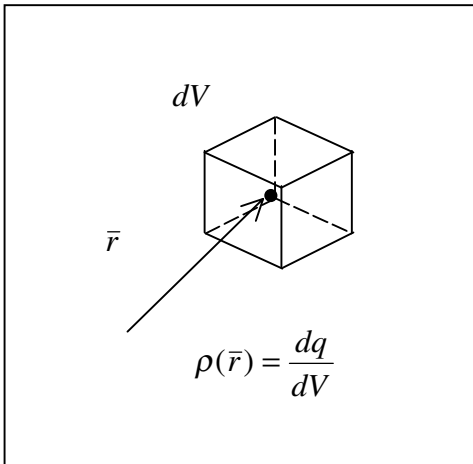


Figura 8.9.- Definición de densidad de carga en un punto.

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV = \int_V \rho(x, y, z) dV$$

y la ley de Gauss se escribe:

$$\int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \int_V \rho dV$$

A partir de esta ley se ve que las dimensiones de  $\vec{D}$  son carga/superficie, y las unidades en el S.I. son  $C/m^2$ .

### 3.1. FORMA DIFERENCIAL DE LA LEY DE GAUSS

Supongamos un punto del espacio  $P = (x,y,z)$  y un volumen elemental alrededor, como en la figura 8.10;  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Se puede demostrar (véase anexo más adelante) que al aplicar la ley de Gauss a este volumen se obtiene:



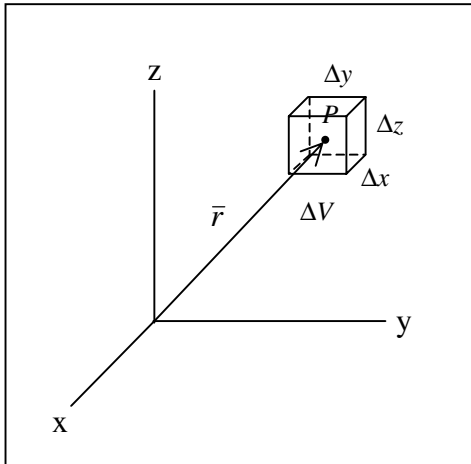


Figura 8.10.- Volumen utilizado en 3.1.

$$\int_S \bar{D} \cdot \hat{n} dS = \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta V ;$$

Por otra parte,

$$\int_{\Delta V} \rho(x, y, z) dV = \rho(x, y, z) \Delta V$$

de manera que en  $P$ :

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho(x, y, z)$$

que es la ley de Gauss en forma diferencial (en coordenadas cartesianas). A la expresión de la izquierda se le llama **divergencia de  $\bar{D}$** ,  $\text{div } \bar{D}$ , y se escribe normalmente:

$$\text{div } \bar{D} = \nabla \cdot \bar{D} = \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (D_x \hat{x} + D_y \hat{y} + D_z \hat{z})$$

de manera que  $\nabla \cdot \bar{D} = \rho$ , y la ley de Gauss (en forma integral) puede escribirse también:

$$\int_S \bar{D} \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot \bar{D} dV \quad \left( = \int_V \rho dV \right)$$

El lector puede comprobar revisando la demostración anexa, que los cálculos matemáticos realizados para obtener el flujo a través de la superficie del volumen elemental no dependen del significado físico de  $\bar{D}$  (véase anexo) y, por tanto, para un campo vectorial **arbitrario**  $\bar{A}(\bar{r})$  también se cumple que:

$$\int_S \bar{A} \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot \bar{A} dV$$

que es el teorema de Gauss o de la divergencia:

“El flujo de un vector (campo vectorial) a través de una superficie cerrada es igual a la integral de volumen de su divergencia, calculada en el volumen limitado por la superficie”.

**ANEXO:** Cálculo del flujo de la derivación anterior

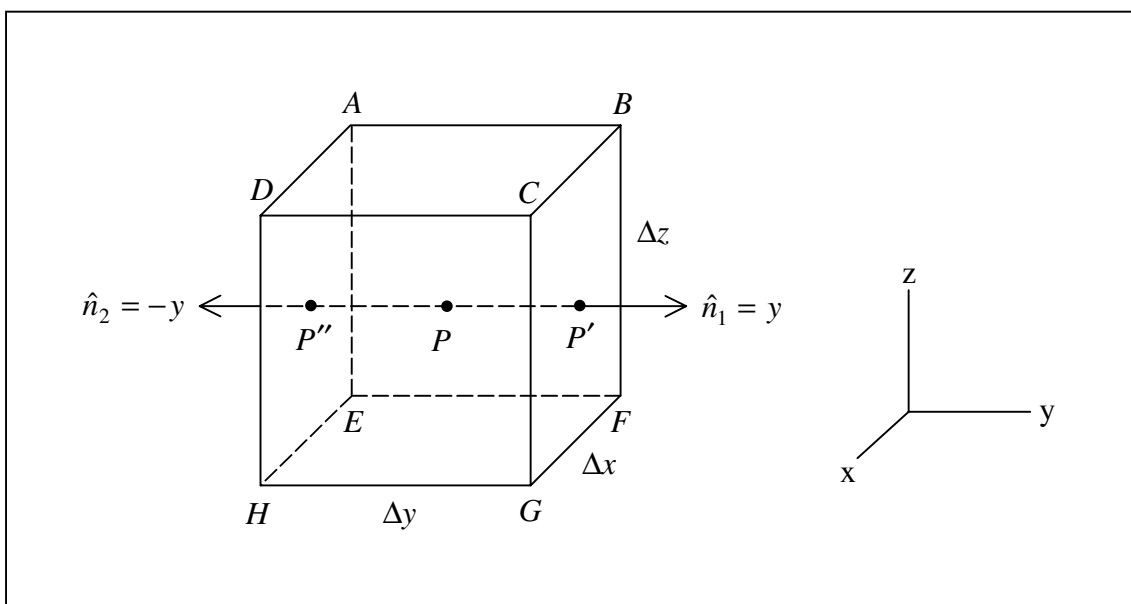


Figura 8.11.- Detalle del volumen elemental para calcular la expresión del flujo.

Con referencia a la figura 8.11, sean:

$$P = (x, y, z), \quad P' = (x, y + \frac{\Delta y}{2}, z), \quad P'' = (x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$$

Según el desarrollo de Taylor ( $i = x, y, z$ ):

$$D_i(P') \cong D_i(P) + \frac{\partial D_i}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}$$

$$D_i(P'') \cong D_i(P) - \frac{\partial D_i}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}$$

Si calculamos el flujo a través de las caras derecha e izquierda obtenemos:

$$\Phi_{\bar{D}}(BFGC) = \bar{D}(P') \cdot \hat{n}_1 \Delta x \Delta z = \bar{D}(P') \cdot \hat{y} \Delta x \Delta z = D_y(P') \Delta x \Delta z$$

$$\Phi_{\bar{D}}(AEHD) = \bar{D}(P'') \cdot \hat{n}_2 \Delta x \Delta z = -\bar{D}(P'') \cdot \hat{y} \Delta x \Delta z = -D_y(P'') \Delta x \Delta z$$

Sumando:

$$\Phi_{\bar{D}}(BFGC) + \Phi_{\bar{D}}(AEHD) = [D_y(P') - D_y(P'')] \Delta x \Delta z = \frac{\partial D_y}{\partial y} 2 \frac{\Delta y}{2} \Delta x \Delta z = \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta V$$

Repetiendo lo mismo para los otros dos pares de caras:

$$\Phi_{\bar{D}}(\text{sup. cubo}) = \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

que es la expresión que buscábamos.

#### 4. LEY DE FARADAY

Recordemos que el campo magnético  $\bar{B}$  se define a partir de la fuerza a la que está sometida una carga  $q$  que se mueve con velocidad  $\bar{v}$ :

$$\bar{F} = q \bar{E} + q \bar{v} \times \bar{B}$$

En relación con  $\bar{B}$  los medios materiales tienen una propiedad que se denomina permeabilidad,  $\mu$ , que está relacionada con las propiedades magnéticas de los átomos o

moléculas que lo forman, y se define también la intensidad magnética  $\bar{H}$  en el medio mediante la relación (4.2):

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \bar{B}$$

$\mu$  tiene dimensiones de H/m, y en el vacío vale  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m.

La ley de Faraday dice que, en el interior de un medio un medio material, “**la fuerza electromotriz inducida a lo largo de un contorno cerrado  $C$  por un campo magnético variable es igual y de signo contrario a la variación del flujo magnético a través de una superficie limitada por  $C$** ” (figura 8.12).

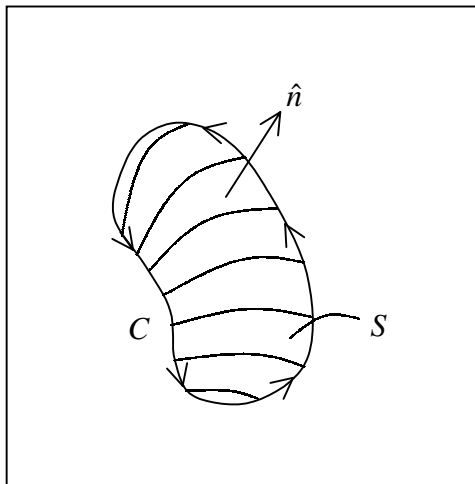


Figura 8.12.- Orientación de recorrido del contorno C y de la normal a S.

De forma más precisa, para  $C$  y  $S$  (con el sentido de recorrido y la dirección de la normal  $\hat{n}$  definidos acordes con la regla del sacacorchos, fig. 8.12):

$$\underbrace{\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{r}}_{f.e.m.inducida} = - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \bar{B} \cdot \hat{n} dS}_{\Phi_{\bar{B}}(S)}$$

(El flujo magnético  $\Phi_{\bar{B}}$ , en el sistema S.I., se mide en Weber = Wb y, por tanto,  $\bar{B}$  en Wb/m<sup>2</sup>).

Si suponemos que la forma de la superficie no varía con el tiempo:

$$\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot \hat{n} dS = \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

y nos queda

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{r} = - \int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

#### 4.1. TEOREMA DE STOKES O DEL ROTACIONAL

Por un proceso similar al caso de la divergencia se puede demostrar que, para  $C$  y  $S$  como en la figura 8.12:

$$\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_S \nabla \times \bar{A} \cdot \hat{n} dS$$

donde  $\bar{A}$  es un campo vectorial arbitrario y  $\nabla \times \bar{A}$  es su **rotacional**, definido, en coordenadas cartesianas mediante la siguiente relación:

$$\nabla \times \bar{A} = \hat{x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

#### 4.2. FORMA DIFERENCIAL DE LA LEY DE FARADAY

Si aplicamos el teorema de Stokes a la ley de Faraday,

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{r} = \int_S \nabla \times \bar{E} \cdot \hat{n} dS = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

Agrupando las dos últimas integrales bajo la misma integral,

$$\int_S \left( \nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS = 0$$

Como esta igualdad se ha de verificar para **cualquier** superficie  $S$  limitada por cualquier contorno  $C$ , el integrando se ha de anular:

$$\boxed{\nabla \times \bar{E}(x, y, z; t) = -\frac{\partial \bar{B}(x, y, z; t)}{\partial t}} \quad (\text{Ley de Faraday})$$

## 5. LEY DE AMPÈRE

Recuérdese que las corrientes (cargas en movimiento) pueden estar transportadas por hilos (o conductores de forma arbitraria) o estar distribuidas en una región del espacio, como las que se producen en un gas ionizado, como, por ejemplo, en el interior de un tubo fluorescente.

Desde el punto de vista matemático es conveniente manejar el campo vectorial **densidad** de corriente,  $\bar{J}(\bar{r})$ , tal que la corriente que atraviesa una superficie finita  $S$  viene dada por la expresión:

$$I(S) = \Phi_{\bar{J}}(S) = \int_S \bar{J} \cdot \hat{n} \, dS$$

Las unidades de medida de  $\bar{J}$  son  $A \, m^{-2}$ .

La ventaja de la densidad de corriente  $\bar{J}$  es que sirve tanto para describir distribuciones continuas (extendidas en el espacio) como discretas: por ejemplo, corrientes que fluyen en conductores cuya sección se supone arbitrariamente pequeña.

## EJEMPLO

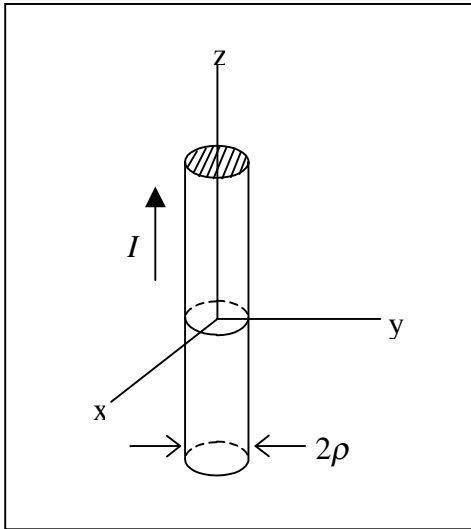


Figura 8.13. Conductor recorrido por una corriente continua.

En estática (corriente continua) ésta se distribuye uniformemente en la sección de un conductor real. En el caso de un conductor cilíndrico de radio  $\rho_0$ , como en la figura ( $\bar{r} = (\rho, \phi, z)$ ):

$$\bar{J}(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{I}{\pi \rho_0^2} \hat{z} & , \rho < \rho_0 \\ 0 & , \rho > \rho_0 \end{cases}$$

Cuando  $\rho_0 \rightarrow 0$  la densidad de corriente tiende a infinito, y su descripción adecuada es mediante funciones delta de **Dirac**:

$$\bar{J}(\bar{r}) = I \delta(x) \delta(y) \hat{z}$$

Recuérdese que en este caso si  $S$  es una superficie rectangular definida en el plano  $xy$  mediante  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , la corriente que la atraviesa valdrá:

$$\begin{aligned} I(S) &= \int \bar{J} \cdot \hat{z} dS = I \iint_S \delta(x) \delta(y) dx dy = I \int_a^b \delta(x) dx \int_c^d \delta(y) dy = \\ &= \begin{cases} I & \text{si } S \text{ contiene el conductor} \\ 0 & \text{si } S \text{ no contiene el conductor} \end{cases} \end{aligned}$$

(Fin del ejemplo)

Volviendo a la ley de Ampère: para una superficie  $S$  limitada por un contorno  $C$  orientado como en la figura 8.12:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \text{corriente que atraviesa } S = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

### 5.1. FORMA DIFERENCIAL DE LA LEY DE AMPÈRE

Hagamos como en el caso de la ley de Faraday; apliquemos el teorema de Stokes:

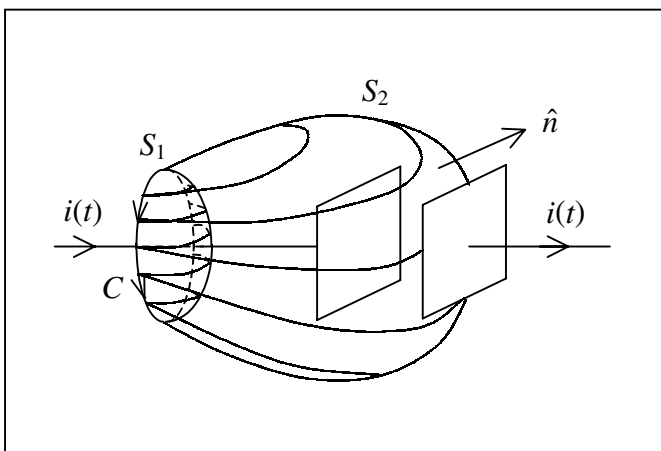
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{H} \cdot \hat{n} dS = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{H} - \vec{J}) \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (\text{válido para cualquier superficie } S)$$

$$\rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}}$$

## 6. LA APORTACIÓN DE MAXWELL

### 6.1. REVISIÓN DE LA LEY DE AMPÈRE



Supongamos un condensador plano, como en la figura 8.14, y un contorno  $C$ . La ley de Ampère dice que:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Figura 8.14. Aplicación de la ley de Ampère a un condensador plano.



donde  $I$  = corriente total que atraviesa una superficie **arbitraria**  $S$  limitada por  $C$ .

- 1) Consideremos primero una superficie  $S_1$  que es cortada por el conductor, con corriente  $i(t)$ , que alimenta la placa izquierda del condensador. En este caso obtenemos:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = i(t)$$

- 2) Consideremos seguidamente una superficie  $S_2$  que pasa entre las placas del condensador y no corta el hilo conductor; entonces obtenemos:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0,$$

cuando realmente debería proporcionar  $i(t) = (d/dt)q(t)$  ( $q(t)$  carga del condensador) como anteriormente.

Por otra parte, entre las placas del condensador existe un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  tal que:

$$\int_{S_2} \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q(t) = \text{carga en la placa izquierda del condensador}$$

(Nótese que  $S_2$  no es una superficie cerrada, pero puede cerrarse mediante un trozo adicional de superficie que pasa por  $C$  en una zona donde  $\vec{E} = \vec{D} = 0$ , por ejemplo, con  $S_1$ , y por tanto no contribuye flujo de  $\vec{D}$ ).

Por tanto

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

De manera que la contradicción encontrada anteriormente se elimina si, en lugar de la ley de Ampère,  $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ , escribimos:

$$\boxed{\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}} \quad (\text{Ampère - Maxwell})$$

ya que entonces, en 1),  $\bar{D}$  en  $S_1$  se anula y queda:

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{r} = \int_{S_1} \nabla \times \bar{H} \cdot \hat{n} \, dS = \int_{S_1} \bar{J} \cdot \hat{n} \, dS = i(t)$$

mientras que en 2), en  $S_2$  quien se anula es el término de corriente y queda:

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{r} = \int_{S_2} \nabla \times \bar{H} \cdot \hat{n} \, dS = \int_{S_1} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{d}{dt} q(t) = i(t)$$

Al término  $\partial \bar{D} / \partial t$  (introducido por Maxwell) se le llama **densidad de corriente de desplazamiento**, y sus unidades son A/m<sup>2</sup>.

Al conjunto de ecuaciones en forma diferencial encontradas se le llama **ecuaciones de Maxwell** y forman el punto de partida de toda la teoría electromagnética:

$$\begin{aligned} (1) \quad \nabla \times \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ (2) \quad \nabla \times \bar{H} &= \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ (3) \quad \nabla \cdot \bar{D} &= \rho \\ (4) \quad \nabla \cdot \bar{B} &= 0 \end{aligned}$$

Realmente, la ecuación (4) no la hemos obtenido, pero es la equivalente a la ley de Gauss, (3), teniendo en cuenta que **no existen cargas magnéticas** y por tanto la densidad de carga magnética es siempre nula.

## 6.2. LAS ECUACIONES DE LAS DIVERGENCIAS

Las cuatro ecuaciones obtenidas no son independientes ya que **las ecuaciones de las divergencias son consecuencia de las ecuaciones de los rotacionales:**

$$(2) \Rightarrow (3) \quad , \quad (1) \Rightarrow (4)$$

Demostraremos esta última proposición; si tomamos la divergencia en (1):

$$\nabla \cdot \nabla \times \bar{E} = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{B}$$

Pero, para cualquier campo vectorial  $\bar{A}(\bar{r})$  se cumple que (compruébese):

$$\nabla \cdot \nabla \times \bar{A} \equiv 0$$

En consecuencia, en cualquier punto del espacio  $\nabla \cdot \bar{B}$  ha de ser **constante en el tiempo** (ya que su derivada se anula). Supongamos que en algún momento de la historia en la región del espacio bajo estudio no hubo campo magnético (por ejemplo, porque intencionadamente la rodeamos de una estructura que la aísla magnéticamente). Entonces en esos puntos, y en esos momentos,  $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ , y como este valor es constante con el tiempo, **siempre** será  $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ , aunque ahora el campo magnético no se anule.

### 6.3. REVISIÓN DE ELECTROSTÁTICA: ECUACIONES DE POISSON Y LAPLACE

A una distribución de campo eléctrico en una situación electromagnética que no varía con el tiempo se le llama distribución electrostática. En este caso:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$$

Se puede demostrar que, para un campo vectorial  $\bar{A}$ , **si su rotacional se anula,  $\bar{A}$  es el gradiente de un campo escalar** (por determinar):

$$\text{Si } \nabla \times \bar{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = -\nabla f(\bar{r})$$

Aquí nos conformaremos con verificar que, si  $\bar{A} = \nabla f \rightarrow \nabla \times \bar{A} \equiv 0$ ; en efecto:

$$\nabla \times \bar{A} = \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Por tanto,

$$\boxed{\bar{E}(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z)}$$

donde hemos introducido el **potencial electrostático**  $V(x, y, z)$ .

Por otra parte, sabemos que:

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \quad , \quad \nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

Por tanto, si  $\varepsilon$  toma el mismo valor en todos los puntos de la región de interés (es constante con la posición):

$$\nabla \cdot \bar{D} = \nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = -\epsilon \nabla \cdot \nabla V \equiv -\epsilon \nabla^2 V = \rho$$

donde hemos introducido un nuevo símbolo,  $\nabla^2$  (operador **laplaciano**, que toma su nombre del matemático francés Laplace) definido mediante:

$$\nabla \cdot \nabla V = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Así obtenemos la **ecuación de Poisson**:

$$\nabla^2 V(x, y, z) = -\frac{1}{\epsilon} \rho(x, y, z),$$

que relaciona las derivadas segundas del potencial con la densidad de carga en cada punto del espacio.

De forma detallada, y en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho(x, y, z)$$

Esta expresión puede interpretarse de dos maneras:

- Si el potencial  $V(x, y, z)$  es un dato, permite calcular la distribución de carga en el espacio.
- Si la densidad de carga es el dato, es una **ecuación diferencial en derivadas parciales** para el potencial  $V(x, y, z)$  que admite como solución:

$$V(x, y, z) = V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV' = \iiint_V \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}}$$

dónde la integral está extendida al volumen que contiene la densidad de carga. La demostración matemática de este resultado a partir de la ecuación de Poisson

la omitimos, pero es un resultado trivial a partir de la aplicación de la ley de Coulomb (superposición del potencial creado por una colección de cargas).

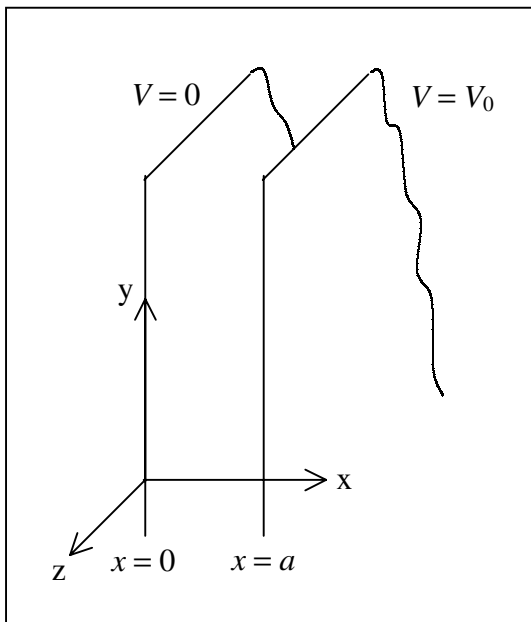
En las regiones del espacio donde no hay cargas ( $\rho = 0$ ) se cumple que  $\nabla^2 V = 0$ , ecuación que recibe el nombre de ecuación de **Laplace**.

**EJEMPLO 1**

Consideremos la siguiente situación (muy sencilla); dos planos paralelos infinitos, uno a potencial  $V = 0$  y otro a potencial  $V = V_0$ , sin cargas en el medio y a una distancia  $a$  (figura 8.15). Es evidente que, por la simetría de los datos, la solución no depende ni de  $y$  ni de  $z$ ;

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \text{por tanto}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$



$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = A, \quad V = A x + B,$$

con  $A$  y  $B$  constantes de integración por determinar. Si tenemos en cuenta las **condiciones de contorno**:

$$V(x = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0$$

$$V(x = a) = V_0 \quad \rightarrow \quad A a = V_0, \quad A = \frac{V_0}{a}$$

resulta:

Figura 8.15.- Planos paralelos infinitos del ejemplo 1.

$$V = \frac{V_0}{a}x \quad ; \quad \bar{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} = -\frac{V_0}{a}\hat{x},$$

que es la conocida solución de potencial y campo eléctrico del condensador plano.

## EJEMPLO 2

Supongamos que, en el ejemplo anterior, entre las placas conductoras existe una densidad de carga constante  $\rho_0$ ; en este caso,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{1}{\epsilon}\rho_0 \quad , \quad V = -\frac{1}{2\epsilon}\rho_0 x^2 + Ax + C$$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$V(0) = C = 0 \quad , \quad V(a) = -\frac{1}{2\epsilon}\rho_0 a^2 + Aa = V_0$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{a}\left(V_0 + \frac{1}{2\epsilon}\rho_0 a^2\right) \quad ;$$

$$V = \frac{1}{2\epsilon}\rho_0 x(a-x) + \frac{V_0}{a}x \quad ; \quad E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{1}{2\epsilon}\rho_0(a-2x) - \frac{V_0}{a}$$

## 6.4. SOLUCIONES NUMÉRICAS

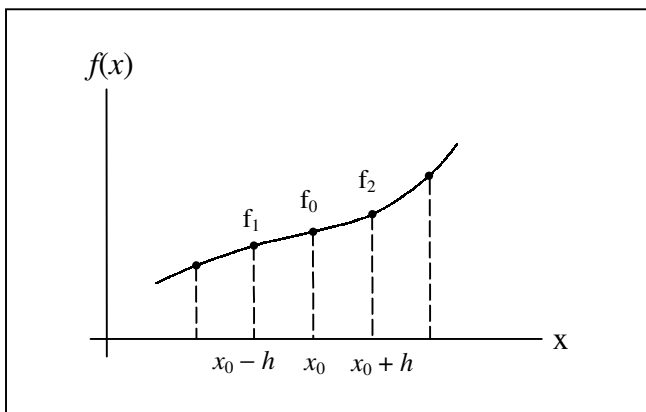


Figura 8.16.- Función muestreada a intervalos iguales.

Las soluciones analíticas sólo son posibles en los casos de elevada simetría geométrica. La mayoría de las situaciones reales de interés requieren soluciones numéricas. Un buen ejemplo es la solución de la ecuación de Laplace por el mé-

todo de **diferencias finitas**, que explicamos a continuación.

Consideremos primero una función de una variable  $f(x)$  muestreada a intervalos iguales  $h$ . Las derivadas de  $f$  en  $x_0$  pueden aproximarse mediante diferencias finitas:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{f_2 - f_0}{h} \quad (\text{diferencia anterior})$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{f_0 - f_1}{h} \quad (\text{diferencia posterior})$$

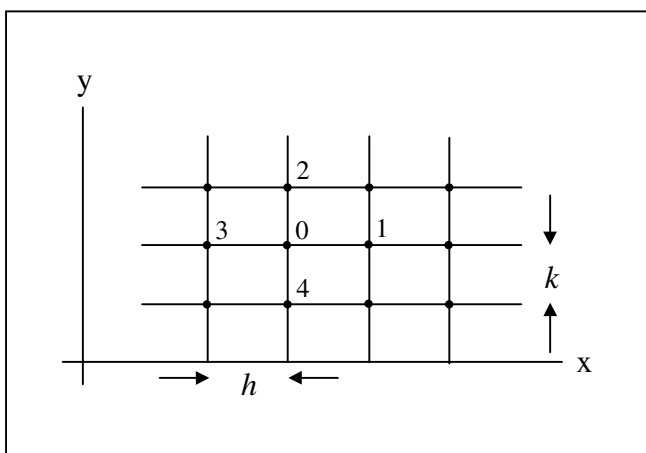
$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{f_2 - f_1}{2h} \quad (\text{diferencia central})$$

Se demuestra fácilmente, a partir del desarrollo de Taylor, que para valores de  $h$  pequeños la diferencia central produce errores más pequeños que las otras.

Para la derivada segunda, y utilizando diferencias centrales:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{1}{h} \left[ \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0 + \frac{h}{2}} - \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0 - \frac{h}{2}} \right] \approx \frac{1}{h} \left[ \frac{f_2 - f_0}{h} - \frac{f_0 - f_1}{h} \right] = \frac{f_1 + f_2 - 2f_0}{h^2}$$

En el caso de una función de dos variables  $\Phi(x, y)$  muestreada según una malla de pasos  $h, k$  (figura 8.17):



$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_0 \approx \frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{h^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_0 \approx \frac{\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{k^2}$$

Figura 8.17.- Muestreo a intervalos iguales en un dominio bidimensional,  $(x, y)$ .



$$\nabla^2 \Phi \Big|_0 \cong \frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{h^2} + \frac{\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{k^2} = 0 \quad (\text{Laplace})$$

En el caso más sencillo en que  $h = k$ , la ecuación de Laplace en diferencias finitas toma la forma:

$$\frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 - 4\Phi_0}{h^2} = 0 \rightarrow \Phi_0 = \frac{1}{4}(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4)$$

“El potencial en cada punto es la media aritmética del potencial de los cuatro puntos vecinos más próximos”.

#### EJEMPLO

Supongamos el problema en dos dimensiones de la figura 8.18; se trata de calcular el potencial  $\Phi(x,y)$  en el interior de un tubo cilíndrico rectangular de lados 10 y 20 cm con las paredes a los potenciales especificados en la figura (0 y 100 V). Nótese que la pared de la derecha es necesario que esté aislada eléctricamente de la superior y la inferior.

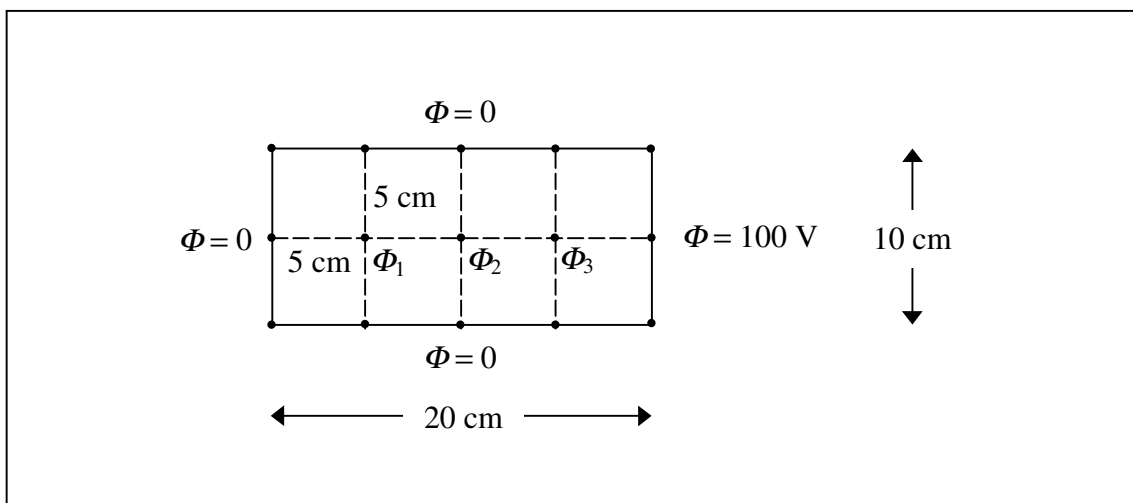


Figura 8.18.- Tubo cilíndrico rectangular con tres paredes a potencial cero y otra a 100 V.

Con la malla de 5 cm de la figura tendremos:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4}\Phi_2 \quad ; \quad \Phi_2 = \frac{\Phi_1 + \Phi_3}{4} \quad ; \quad \Phi_3 = \frac{\Phi_2 + 100}{4}$$

sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que proporciona los valores:

$$\Phi_1 = 1.79 \text{ V} \quad \Phi_2 = 7.14 \text{ V} \quad \Phi_3 = 26.79 \text{ V}$$

Si la malla tuviera  $N$  puntos **interiores** habríamos de resolver un sistema de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas.

**Alternativamente**, el sistema de ecuaciones puede resolverse por aproximaciones sucesivas de una manera muy eficiente y sencilla; por ejemplo, supongamos inicialmente:

1)  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$

2) Primera iteración:  $\Phi_1 = 0$ ;  $\Phi_2 = 0$ ;  $\Phi_3 = 25$

3) Segunda iteración:  $\Phi_1 = 0$ ;  $\Phi_2 = \frac{25}{4} = 6.25$ ;  $\Phi_3 = \frac{100 + 25/4}{4} = 26.56$

4) Tercera iteración:

$$\Phi_1 = \frac{6.25}{4} = 1.56; \quad \Phi_2 = \frac{1.56 + 26.56}{4} = 7.03; \quad \Phi_3 = \frac{7.03 + 100}{4} = 26.76$$

5) etc.

Lo importante del procedimiento es que **converge** a la solución correcta del sistema de ecuaciones, que a su vez es una solución **aproximada** del problema original, en que las variaciones continuas han sido sustituidas por variaciones discretas; en el límite, si el paso de las mallas se hace arbitrariamente pequeño, la solución de diferencias finitas

tiende a la solución exacta del problema. Por otra parte, este procedimiento iterativo puede programarse con mucha facilidad con ayuda de una hoja de cálculo.

## 7. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Supongamos un medio dieléctrico ideal ( $\sigma = 0$ ), sin cargas ( $\rho = 0$ ) ni corrientes ( $\vec{J} = 0$ ).

Las ecuaciones de Maxwell toman la forma:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{B} = \mu \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

Desarrollemos la expresión:  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H}$

Se puede comprobar, por aplicación dos veces de la definición del rotacional y una tediosa agrupación de los 18 términos que resultan, que:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad ,$$

dónde hemos definido la **laplaciana de un vector en coordenadas cartesianas** como otro vector cuyas componentes son las laplacianas de sus componentes:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$$

Por tanto:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \bar{E})}_{=0} - \nabla^2 \bar{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \rightarrow$$

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \xrightarrow{\text{en coordenadas cartesianas}} \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0$$

$$i = x, y, z ; 1/c^2 = \mu \varepsilon$$

Esta ecuación se llama **de ondas** porque se sabe, en física, que sus soluciones, es decir, los fenómenos físicos que describe, son ondas que se propagan con velocidad  $c$ . La magnitud a que se refiere la ecuación en nuestro caso es el campo eléctrico, pero en otros casos puede ser la presión en un fluido (ondas acústicas), el desplazamiento de un átomo o molécula en un material sólido (ondas mecánicas o vibraciones), o el desplazamiento de la posición de una cuerda tensa (cuerda de guitarra), que comentaremos más adelante.

Alternativamente, si hubiéramos calculado

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} = \varepsilon \nabla \times \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{E}$$

habríamos llegado a las ecuaciones equivalentes:

$$\nabla^2 \bar{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} = 0$$

$$i = x, y, z ; 1/c^2 = \mu \varepsilon$$

Nótese que, por tanto, las perturbaciones electromagnéticas se propagan en forma de ondas con velocidad de propagación  $c = 1/\sqrt{\mu \varepsilon}$ . En el espacio libre (vacío o aire)

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85418782 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \approx 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Debe notarse que este resultado es consecuencia de la modificación de Maxwell a la ley de Ampère (adición del término corriente de desplazamiento,  $\partial \bar{D} / \partial t$ ), que puso de manifiesto por primera vez la posibilidad de que la luz fuese una perturbación de carácter electromagnético.

**EJEMPLO** La cuerda vibrante:

El comportamiento de una cuerda elástica tensa que en equilibrio está situada sobre el eje  $x$  (dado por  $y = 0$ ), figura 8.19, viene descrito por la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{Ecuación de ondas en una dimensión})$$

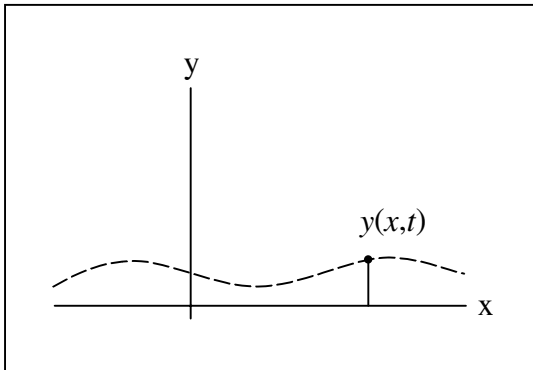


Figura 8.19.- Desplazamiento de una cuerda tensa (cuerda vibrante).

donde  $y(x,t)$  representa el desplazamiento de la cuerda desde la posición de equilibrio en el punto  $x$  en el instante  $t$ , y  $v$  es la velocidad de propagación de la perturbación (que depende de la tensión de la cuerda, su densidad lineal y su elasticidad).

La solución **más general posible** para esta ecuación diferencial es la siguiente:

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (\text{d'Alembert})$$

donde  $f$  y  $g$  son dos funciones arbitrarias cualesquiera.

Que la función así definida es solución de la ecuación de ondas de partida puede comprobarse por sustitución en la misma; por ejemplo si ponemos  $x - vt = \xi$ ,

$$f'(\xi) = \frac{df}{d\xi} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = f''(x - vt)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = f''(x - vt) v^2$$

y evidentemente 
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Y lo mismo puede ser comprobado para  $g(x + vt) = g(\eta)$ .

(Si conviene, igualmente podemos escribir la solución de la forma

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad ).$$

Por ejemplo, si  $F(\xi)$  es la función triangular de la figura 8.20, la posible solución  $y(x, t) = F(x - vt)$  representa una onda de forma triangular que se desplaza hacia la derecha. En la figura se representa gráficamente la forma de la cuerda en tres instantes de tiempo diferentes,  $t_2 > t_1 > 0$ .

Análogamente, la posible solución  $y(x, t) = F(x + vt)$  representa una onda de forma triangular que se desplaza hacia la izquierda.

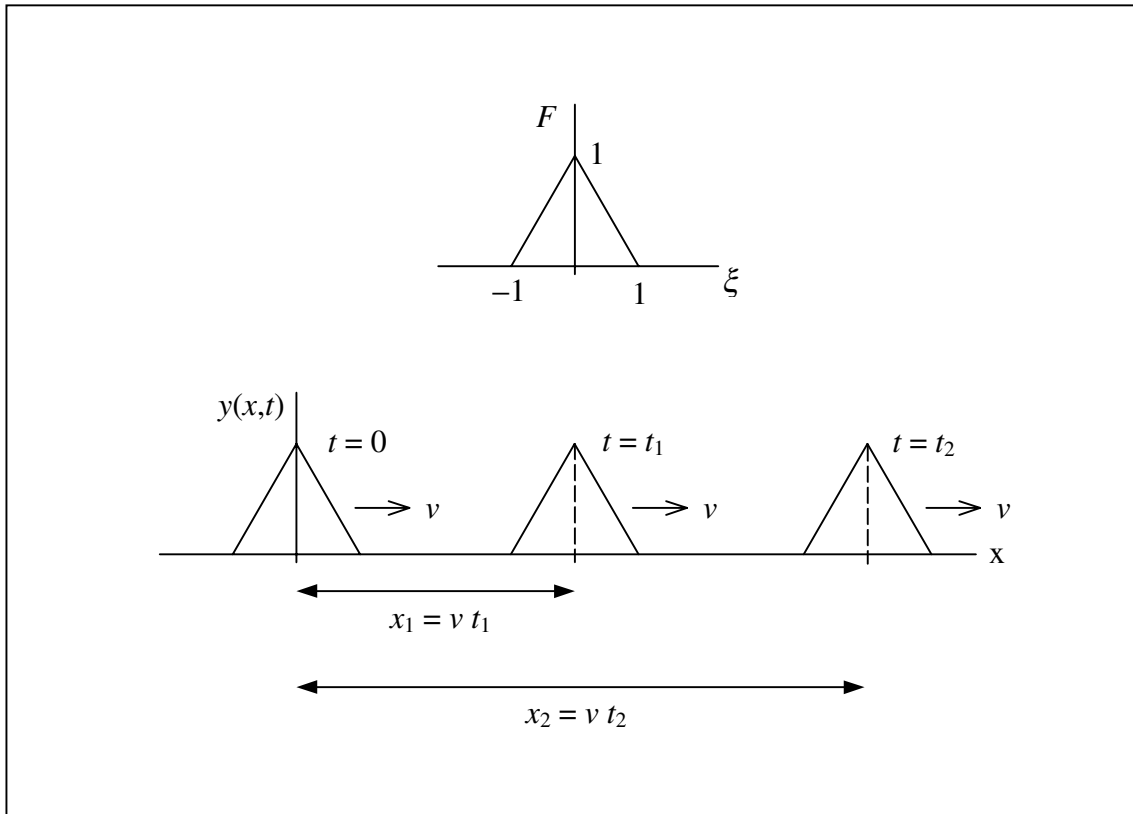


figura 8.20.- Propagación de una *onda triangular* a lo largo de una cuerda vibrante.

## 8. EPÍLOGO

Hemos advertido al comienzo de este capítulo que su objetivo era servir de enlace entre este libro y los textos de Teoría Electromagnética que toman como punto de partida las ecuaciones de Maxwell, y no convertirse él mismo en un texto, siquiera reducido, sobre el tema. A partir de este momento, el lector que haya llegado hasta aquí y desee continuar estudiando debe, por tanto, hacerse con alguno de los innumerables textos universitarios, como, por ejemplo, el de mis colegas y amigos:

F. Dios, D. Artigas, J. Recolons, A. Comerón y F. Canal, **Campos electromagnéticos**, Ediciones UPC, 1998 ([www.edicionsupc.es](http://www.edicionsupc.es)).