

POLITEXT

Javier Bará Temes

# Circuitos de microondas con líneas de transmisión

EDICIONS UPC



# **Circuitos de microondas con líneas de transmisión**

# **Circuitos de microondas con líneas de transmisión**

Javier Bará Temes

Primera edición: septiembre de 1994  
Reimpresión: septiembre de 1995  
Reimpresión: septiembre de 1996

Diseño de la cubierta: Antoni Gutiérrez

© Javier Bará Temes, 1994  
© Edicions UPC, 1994  
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL  
C. Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona  
Tel. 401 68 83 Fax 401 58 85

Producción: Servei de Publicacions de la UPC  
y CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)  
La Cup. C. Gran Capità s/n, 08034 Barcelona

Depósito legal: B-23.179-96  
ISBN 84-89636-55-9

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del «copyright», bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, así como la exportación e importación de ejemplares para su distribución y venta fuera del ámbito de la Unión Europea.

## Presentación

Las microondas entran en el mundo de las comunicaciones de la mano del radar (c. 1936-1943) y de las nuevas tecnologías, que en su momento significan: generadores de potencia de frecuencia superior a 1 GHz (magnetrones, hoy protagonistas de los hornos de microondas), guíasondas, acopladores direccionales, filtros construidos con cavidades resonantes, antenas de bocina, reflectores, etc. En consecuencia, la disciplina se configura básicamente como una aplicación de la teoría electromagnética, y como tal ha condicionado los libros de texto durante muchos años.

Los últimos veinte años han consagrado, en cambio, un extraordinario crecimiento de las aplicaciones de las microondas basado en líneas de transmisión de tipo plano (*microstrip* y *stripline*), elementos concentrados (sobre todo condensadores y resistencias), transistores, cables coaxiales y conectores, circuitos monolíticos etc., todos analizables generalmente en términos convencionales de tensión y de corriente, con la única consideración especial del retardo o del tiempo de propagación, pero sin que se necesite un tratamiento electromagnético específico.

Este libro pretende hacer una introducción a las microondas llegando tan lejos como sea posible sin tener que recurrir al análisis electromagnético de los elementos implicados. El libro comienza con un estudio de las líneas de transmisión a partir de los conceptos de circuitos, la carta de Smith y sus aplicaciones y líneas de transmisión más comunes, para continuar con la descripción de los circuitos de microondas con la ayuda de los parámetros de dispersión (*scattering*). El análisis general se concreta en redes de dos accesos (inversores de impedancias, atenuadores, filtros), divisores y combinadores de potencia, acopladores direccionales e híbridos, y circuitos basados en líneas de transmisión acopladas.

Quedan excluidas de este libro las aplicaciones concretas al diseño de circuitos activos (amplificadores, mezcladores, etc.) y, obviamente, los guíasondas, las cavidades resonantes, los resonadores dieléctricos y otros elementos o subsistemas que requieren un análisis electromagnético detallado.

El libro se ha generado a partir de las notas de clase de la asignatura de microondas de la E.T.S d'Enginyers de Telecomunicació de Barcelona, la cual impartí durante bastantes años. Unas notas que ocupan, sobre una base anual, aproximadamente la mitad del programa; de manera que se puede utilizar como punto de partida para una asignatura cuatrimestral de 60 horas sobre fundamentos de

líneas de transmisión y circuitos pasivos de microondas.

Una de las consecuencias del origen del libro como notas de clase es la falta de referencias, lo cual no quiere decir que el libro no tenga deudas evidentes con muchos e ilustres predecesores a los que el autor expresa su agradecimiento de forma genérica.

## índice

### Presentación

### Capítulo 1 Introducción

1.1	¿Qué son las microondas? . . . . .	9
1.2	Bagaje electromagnético . . . . .	10

### Capítulo 2 Líneas de transmisión (I). La línea ideal

2.1	Introducción . . . . .	13
2.2	Ecuaciones básicas . . . . .	13
2.3	Ejemplos elementales . . . . .	18
2.4	Reflexiones en cargas reactivas . . . . .	26
2.5	Señales senoidales . . . . .	32
2.6	Ondas estacionarias . . . . .	40
2.7	La carta de Smith . . . . .	43
2.8	Propiedades básicas de la carta de Smith . . . . .	48
2.9	Adaptación de impedancias . . . . .	54
2.10	Comportamiento con la frecuencia . . . . .	63

### Capítulo 3 Líneas de transmisión (II). Pérdidas, dispersión y líneas más comunes

3.1	Introducción . . . . .	73
3.2	Línea con célula elemental general . . . . .	73
3.3	Relación entre potencias y energías . . . . .	78
3.4	Línea con bajas pérdidas . . . . .	79
3.5	Dispersión . . . . .	81

3.6	Velocidad de grupo . . . . .	88
3.7	Líneas con dieléctrico homogéneo . . . . .	94
3.8	Líneas con dieléctrico no homogéneo . . . . .	102

#### Capítulo 4 Circuitos resonantes

4.1	Introducción . . . . .	107
4.2	Propiedades básicas . . . . .	107
4.3	Factor de calidad y admitancia . . . . .	110
4.4	Más sobre pérdidas . . . . .	112
4.5	Perturbación de un sistema resonante . . . . .	117
4.6	Resonancia en líneas . . . . .	120
4.7	Resonancia y ondas estacionarias . . . . .	125
4.8	Efecto de las pérdidas . . . . .	131

#### Capítulo 5 Circuitos de microondas (I). Propiedades generales. Redes de dos accesos

5.1	Introducción . . . . .	137
5.2	Definiciones y propiedades básicas . . . . .	137
5.3	Matriz de dispersión . . . . .	140
5.4	Propiedades de la matriz de dispersión . . . . .	144
5.5	Redes de dos accesos . . . . .	153
5.6	Inversores de inmitancias . . . . .	166
5.7	Cadenas de dos accesos . . . . .	177

#### Capítulo 6 Circuitos de microondas (II). Redes de más de dos accesos. Filtros

6.1	Propiedades de simetría . . . . .	183
6.2	Redes de tres accesos . . . . .	192
6.3	El divisor de Wilkinson . . . . .	197
6.4	Circuladores . . . . .	202
6.5	Redes de cuatro accesos . . . . .	205
6.6	Híbridos . . . . .	211
6.7	Realización de acopladores direccionales . . . . .	217
6.8	Líneas acopladas simétricas . . . . .	226
6.9	Realización de inversores con líneas acopladas . . . . .	235
6.10	Filtros pasa-banda con inversores en líneas de transmisión . . . . .	239



## Capítulo 1 Introducción

### 1.1 ¿Qué son las microondas?

Un sistema de comunicaciones genera una señal portadora sinusoidal sobre la cual, mediante modificaciones de su amplitud, frecuencia o fase, se introduce un mensaje según unas normas de codificación. Esta señal se transmite a un punto lejano por medio de ondas al espacio libre o bien de un cable, y en el receptor se realiza un proceso inverso al del transmisor mediante el cual se recupera el mensaje original.

En todos estos procesos se utilizan dispositivos electrónicos (transistores, diodos, tubos de vacío), elementos pasivos que afectan a la amplitud de las señales (resistencias) o bien a su fase (inductancias y condensadores), e hilos o tiras conductoras que transportan la tensión y las corrientes de unos elementos a otros.

Todo esto se realiza en márgenes de frecuencia que van desde algunos kilohertzios (radiodifusión en *AM*) hasta el infrarrojo o el margen visible, pasando por las bandas de *VHF* y *UHF* (desde decenas de megahertzios hasta los 900 MHz), soporte de la radiodifusión en *FM* y la televisión; y las bandas que cubren desde algunos gigahertzios hasta decenas de gigahertzios (1 GHz = 1000 MHz), vehículo de las comunicaciones por satélite y de la detección mediante el radar.

Las diferencias en las realizaciones tecnológicas de los sistemas anteriores surgen, sobre todo, de los márgenes de frecuencia en los cuales operan. Cuando comenzamos a superar frecuencias de trabajo de decenas de megahertzios aparecen de forma progresiva dificultades entre las cuales, si nos restringimos a los elementos pasivos, destacan las siguientes:

a) El comportamiento de los elementos concentrados habituales comienza a variar. Las resistencias modifican su valor y exhiben una parte inductiva de valor creciente, las pérdidas de las inductancias se incrementan y su reactancia varía de forma imprevisible; lo mismo pasa con los condensadores, que pueden sorprendernos con una impedancia con resistencia muy alta y reactancia inductiva(!).

b) Los desfases entre puntos diferentes no son sólo consecuencia de las inductancias y de los condensadores, sino que hay que considerar el tiempo que tardan las señales electromagnéticas en propagarse de un punto a otro del circuito. Como esta propagación a través de los conductores se produce a la velocidad de la luz,  $c=3\cdot 10^{10}$  cm/s (cuestión la discusión de la cual es uno de los primeros objetivos de este libro), un trozo de conductor de  $L$  cm de longitud introduce un retardo de:

$$\tau = \frac{L}{c} = 33,3 \times L \text{ ps}$$

De manera que si  $L=10$  cm i la frecuencia de trabajo es 750 MHz (período= $T=1,33$  ns; longitud de onda= $\lambda=c\cdot T=40$  cm), el retardo introducido corresponde a un cuarto de período ( $90^\circ$ ), es decir, el que corresponde a una inductancia o a un condensador ideales.

Por tanto, es evidente que no sólo hay que controlar los conductores meticulosamente, sino que los mismos conductores pueden desarrollar un papel activo en el circuito similar al de los elementos reactivos convencionales. Y también es evidente que este efecto se produce cuando el retardo empieza a ser comparable con el período de la señal (podemos decir, mayor que  $T/20$ ):

$$\tau \geq \frac{T}{20} \Rightarrow c\tau \geq c \frac{T}{20} \Rightarrow L \geq \frac{\lambda}{20} = 0,05 \lambda$$

Esta conclusión nos conduce a una definición relativa de las microondas como *aquellas bandas de frecuencias en las que las dimensiones de los componentes, circuitos o sistemas implicados son comparables a una fracción de la longitud de onda de la señal.*

En la práctica, y cuando tenemos en cuenta otros factores tecnológicos que afectan a los dispositivos activos, las características de los componentes pasivos (resistencias, inductancias, condensadores) comerciales, y los procesos de fabricación de circuitos, se puede decir correctamente que un sistema necesita la aplicación de herramientas de cálculo específicas de microondas, o que *es de microondas* si su frecuencia de trabajo está por encima del margen de 1-2 gigaherzios.

## 1.2 Bagaje electromagnético

Si bien, tal como hemos advertido en el prólogo, en el libro se renuncia a describir aquellos elementos que necesitan un análisis electromagnético detallado, se supone que el lector ha seguido un curso básico de electricidad y magnetismo, preferiblemente incluyendo las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial (si bien la referencia explícita que se hace en el apartado 1.1 se puede omitir sin una pérdida grave de información) y las condiciones de contorno de los campos eléctrico y magnético en

la superficie de un conductor ideal (utilizadas en el apartado 6.1).

En todo caso, se supone del lector un buen dominio de los conceptos de capacidad, inductancia y energías eléctrica y magnética, y de la utilización y las limitaciones del de diferencia de potencial que, siendo un concepto básicamente estático, su utilización se extiende a señales variables con el tiempo con algún riesgo de error conceptual y práctico a frecuencias altas.

## Capítulo 2 Líneas de transmisión (I). La línea ideal

### 2.1 Introducción

El retardo, es decir, la consideración del tiempo finito que las perturbaciones electromagnéticas tardan en propagarse de un punto a otro, constituye la esencia de las técnicas de microondas. Si bien el retardo, de manera rigurosa y general, es consecuencia de las ecuaciones de Maxwell (1864), la propagación de tensiones y corrientes por dos hilos paralelos puede estudiarse de manera sencilla partiendo de los conceptos elementales de inductancia y de capacidad, según estableció por primera vez W. Thomson (lord Kelvin) antes de la teoría electromagnética de Maxwell.

En este capítulo presentamos las propiedades de las líneas de transmisión ideales, dedicando atención particular a su comportamiento en régimen senoidal, e introducimos una ayuda gráfica de gran utilidad conocida como la *carta de Smith (Smith chart)*.

Las propiedades de las líneas de transmisión nos acompañarán en los restantes capítulos, y más adelante veremos que cualquier circuito de microondas admite un circuito equivalente formado por elementos concentrados y líneas de transmisión.

### 2.2 Ecuaciones básicas

Definiremos como línea de transmisión ideal el sistema de dos conductores perfectos inmersos en un medio dieléctrico sin pérdidas, de manera que la sección transversal del sistema no varíe a lo largo del mismo. Las líneas de transmisión más comunes están formadas por dos hilos idénticos de sección circular que discurren paralelos (*línea bifilar*) o por un conductor circular rodeado por otro concéntrico (*línea coaxial*). En cualquier caso, nosotros la representaremos como dos hilos paralelos tales que, en cada plano transversal  $z$ , poseen corrientes  $i_1(z,t), i_2(z,t)$ , y diferencia de potencial  $v(z,t)$ , como en la figura 2.1.

En esta misma figura se puede comprobar que esta situación general puede descomponerse en otras dos, simétrica y antisimétrica en la corriente. La figura 2.1b, en la que ambos conductores transportan la misma corriente en la misma dirección, carece de interés ya que se comportan como un solo conductor, por lo que, sin pérdida de generalidad, supondremos una distribución de corrientes como en el caso a.

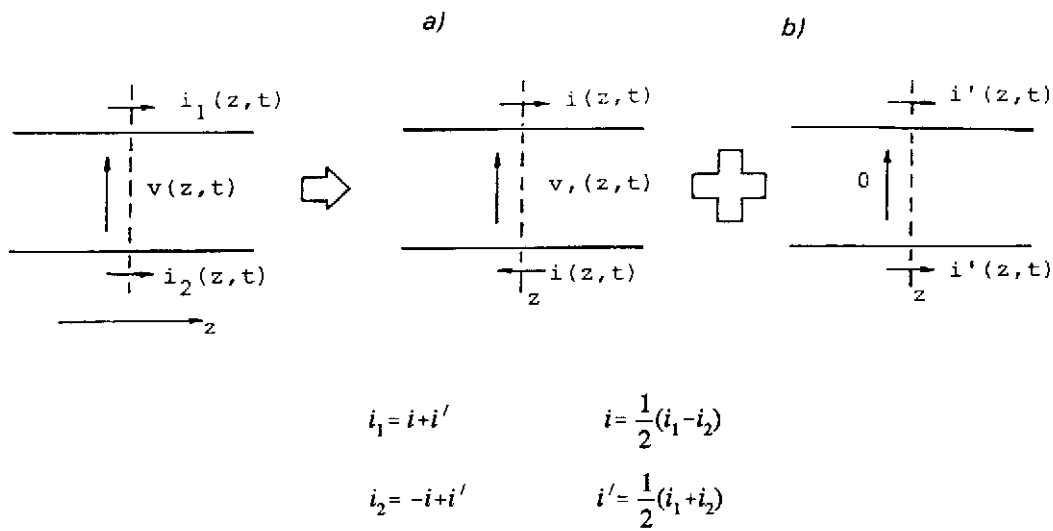


Fig. 2.1 Definición de magnitudes y descomposición de la situación más general en la superposición de una simétrica, b, y una antisimétrica, a

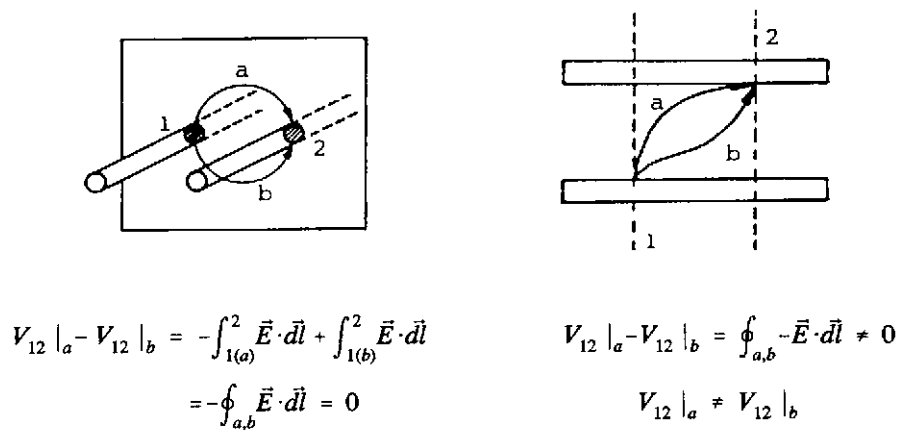


Fig. 2.2 La diferencia de potencial (ddp) entre los conductores sólo tiene sentido si se define entre puntos situados en el mismo plano transversal

Para analizar el comportamiento de la línea descompondremos ésta en secciones elementales de longitud  $dz$ , y realizaremos las hipótesis siguientes:

1) entre dos secciones elementales cualesquiera no existe influencia eléctrica, lo que equivale a suponer que no están unidas por líneas de campo eléctrico y, por tanto, éstas han de estar contenidas en planos transversales (i.e.,  $E$  carece de componente axial).

2) entre dos secciones elementales cualesquiera tampoco existe acoplamiento magnético, es decir, no existen líneas de campo magnético que abracen simultáneamente dos secciones elementales; esto también supone que éstas han de estar contenidas en planos transversales.

Nótese que estas hipótesis garantizan la validez del concepto de diferencia de potencial ( $ddp$ ), que es un concepto estático, pero sólo si nos limitamos a definirlo entre puntos de una misma sección transversal (fig. 2.2). En efecto, en este caso:

$$V_{12} \Big|_a - V_{12} \Big|_b = -\oint_{a,b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \nabla_x \vec{E} \cdot \hat{n} dS = +\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (2.1)$$

ya que  $S$  es una superficie contenida en un plano transversal y, por la hipótesis 2, no está atravesada por flujo magnético. Esto no es así en el caso de puntos contenidos en secciones transversales diferentes, ya que ahora la superficie  $S$ , limitada por las líneas  $a$  y  $b$ , sí que es atravesada por líneas de campo magnético, con el resultado de que la  $ddp$  entre 1 y 2 dependería del camino tomado para su definición.

Con estas precauciones, que serán revisadas rigurosamente más adelante, en cada sección elemental  $v(z,t)$  y  $i(z,t)$  solamente están afectadas por la capacidad entre los conductores y por el flujo magnético que se traduce en un coeficiente de autoinducción. Obtenemos de esta manera, para una sección elemental de longitud  $dz$ , el circuito equivalente de la figura 2.3. Adviértase que, para preservar la simetría de la sección, el condensador debería estar situado en el punto medio de la inductancia, o bien repartido por igual a la entrada y salida, pero la diferencia con el dibujado es de infinitésimos de segundo orden y se obtienen las mismas soluciones.

En la figura 2.3,  $L$  y  $C$  representan la inductancia y la capacidad de la línea por unidad de longitud de la misma. De la consideración de las caídas de tensión y corriente se obtienen inmediatamente:

$$\frac{\partial v}{\partial z} dz = -(L dz) \frac{\partial i}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} dz = -(C dz) \frac{\partial v}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

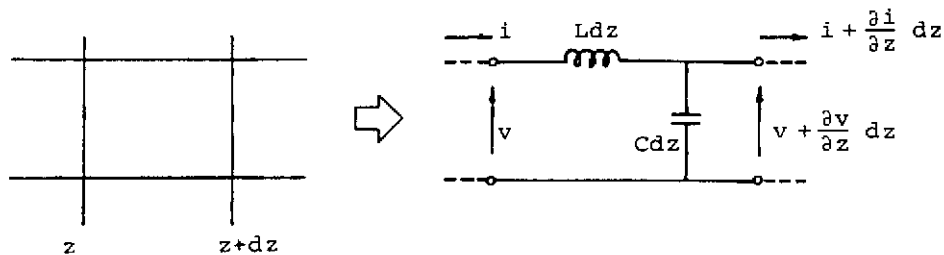
que son las ecuaciones que gobiernan con toda generalidad el comportamiento de  $v(z,t)$  y  $i(z,t)$ . Para su resolución podemos, por ejemplo, eliminar la corriente derivando (2.2) con respecto a  $z$  y (2.3) respecto a  $t$ . Resulta:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (c^2 = \frac{1}{LC}) \quad (2.4)$$

que es la ecuación de ondas en una dimensión. Su solución más general es de la forma (D'Alembert, 1747):

$$v(z,t) = F_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + F_2\left(t + \frac{z}{c}\right) \quad (2.5)$$

con  $F_1$  y  $F_2$  funciones arbitrarias.



**L** = inductancia/unidad de longitud

**C** = capacidad/unidad de longitud

Fig. 2.3 Circuito equivalente de una sección elemental de línea

$F_1(t-z/c)$  representa una *onda de tensión que se propaga con velocidad  $c$  en el sentido de las  $z$  crecientes*. Con esto queremos decir que un observador que se desplazara a lo largo de la línea, en

el sentido indicado, con velocidad  $c$ , mediría permanentemente una tensión constante (abscisa del observador:  $z=z_0+ct$ ):

$$F_1 \left[ t - \frac{1}{c} (z_0 + ct) \right] = F_1 \left( -\frac{z_0}{c} \right) \quad (2.6)$$

Al mismo tiempo, todos los puntos de la línea experimentan la misma variación de tensión  $F_1(t)$ , pero con un retraso mayor los más alejados según las  $z$  crecientes.

Análogamente, hablamos de  $F_2$  como de una onda que se propaga en el sentido de las  $z$  decrecientes, de forma que en cualquier punto de la línea, en cualquier instante, la tensión medida es la suma de los valores de las dos ondas. Debe notarse que a partir de medidas realizadas en un solo plano de la línea no es posible determinar  $F_1$  y  $F_2$ .

La solución para  $i(z,t)$  se puede obtener por sustitución en (2.5) en (2.2) y una posterior integración con respecto al tiempo:

$$i(z,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \left[ F_1 \left( t - \frac{z}{c} \right) - F_2 \left( t + \frac{z}{c} \right) \right] + f(z) \quad (2.7)$$

Se puede comprobar, por sustitución en (2.3), que la constante de integración (con respecto al tiempo)  $f(z)$  tampoco depende de  $z$  y representa, por tanto, una corriente continua superpuesta en la línea de la que prescindiremos. Con una notación y nomenclatura más usuales pondremos:

$$F_1 \left( t - \frac{z}{c} \right) = v^+ \left( t - \frac{z}{c} \right) = v^+ \quad (\text{onda positiva}) \quad (2.8)$$

$$F_2 \left( t + \frac{z}{c} \right) = v^- \left( t + \frac{z}{c} \right) = v^- \quad (\text{onda negativa}) \quad (2.9)$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0 \quad (\text{impedancia característica en ohmios}) \quad (2.10)$$

Las expresiones (2.5) y (2.7) quedan, entonces:

$$v = v^+ + v^- \quad (2.11)$$

$$i = i^+ + i^- = \frac{1}{Z_0} (v^+ - v^-) \quad (2.12)$$



En cada instante y en cada plano, la potencia que se propaga en la línea hacia la derecha, de acuerdo con la convención de sentidos de tensiones y corrientes (fig. 2.3), vale:

$$\rho(z,t) = v \cdot i = \frac{1}{Z_0} |(v^+)^2 - (v^-)^2| = \rho^+ - \rho^- \quad (2.13)$$

es decir, la potencia neta es la diferencia de las asociadas con las ondas positiva y negativa.

### 2.3 Ejemplos elementales

Consideremos primero un generador de tensión  $v_g(t)$  y resistencia interna  $R_g$ , conectado a una línea infinita (fig. 2.4). Si la línea estaba inicialmente en reposo ( $v=i=0$ ) no existe onda negativa, y el generador excitará unas ondas positivas de tensión y corriente que vienen dadas por:

$$v^+(z,t) = \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} v_g \left( t - \frac{z}{c} \right), \quad i^+ = \frac{v^+}{Z_0} \quad (2.14)$$

ya que para una onda positiva (o negativa) el cociente entre tensión y corriente es  $Z_0$  y la línea presenta, por tanto, una impedancia de entrada en cualquier plano, de  $Z_0$ . De manera que si interrumpimos la línea en cualquier punto y le conectamos una resistencia de valor  $R_L = Z_0$  (fig. 2.5) la situación a su izquierda será indistinguible del caso de la línea infinita y no habrá onda negativa. Se dice entonces que la línea está adaptada y en esta situación favorable la carga  $R_L$  absorbe toda la potencia que el generador entrega a la línea.

En el caso más general de la figura 2.5, la presencia de  $R_L$  en  $z=l$  y la ley de Ohm exigen que:

$$R_L = \frac{v(l,t)}{i(l,t)} = Z_0 \left. \frac{v^+ + v^-}{v^+ - v^-} \right|_{z=l} \quad (2.15)$$

de donde se obtiene:

$$\left. \frac{v^-}{v^+} \right|_{z=l} = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L} = - \left. \frac{i^-}{i^+} \right|_{z=l} = \rho_L \quad (2.16)$$

Es decir, en  $R_L$  la onda negativa (o, desde el punto de vista de la carga, onda reflejada) está relacionada con la onda positiva (o incidente) mediante una constante  $\rho_L$  llamada *coeficiente de reflexión en la carga*.

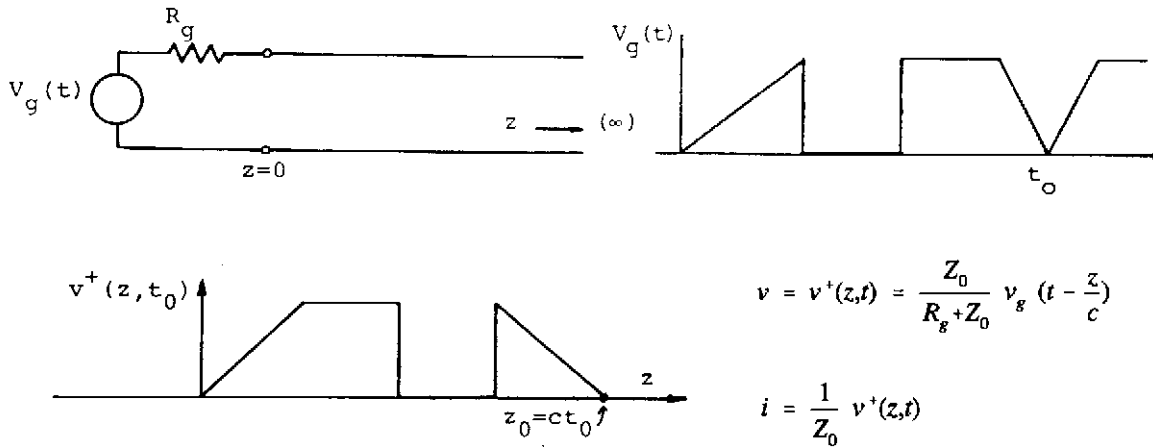
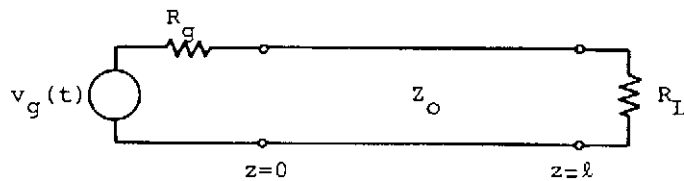


Fig. 2.4 Línea infinita alimentada por un generador con señal arbitraria  $v_g(t)$  y distribución de tensión en la línea en un cierto instante  $t_0$



$$\begin{array}{ll} R_L = Z_0 & ; \quad v = v^+ \\ R_L \neq Z_0 & ; \quad v = v^+ + v^- \end{array} \quad \left. \frac{v^-}{v^+} \right|_{z=l} = \rho_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

Fig. 2.5 Línea terminada en una resistencia

**Ejemplo 1** Supongamos la situación esquematizada en la figura 2.6a para la que, en el instante  $t=0$ , se cierra el interruptor con lo que se genera una onda positiva de tensión  $v_1^+$ . En el instante  $T=\ell/c$  alcanza la resistencia de carga, y se genera entonces una onda negativa  $v_1^- = \rho_L \cdot v_1^+$ , que en el instante  $t=2T$  alcanza el extremo generador perturbando el equilibrio existente, por lo que ha de generarse una nueva onda positiva  $v_2^+$  tal que se restablezca el cumplimiento de la ley de Ohm a la entrada de la línea ( $z=0$ ) en el instante  $t=2T+$ :

$$V_0 - R_G \cdot i(0) = v(0) \quad \Rightarrow \quad V_0 - R_G \frac{1}{Z_0} (v_1^+ - v_1^- + v_2^+) = v_1^+ + v_1^- + v_2^+ \quad (2.17)$$

Si de esta igualdad restamos la que se verificaba en  $t < 2T$ :

$$V_0 - R_G \frac{1}{Z_0} v_1^+ = v_1^+ \quad (2.18)$$

se obtiene, en  $z=0$ :

$$\frac{R_G}{Z_0} (v_1^- - v_2^+) = v_1^- + v_2^+ \quad , \quad \left. \frac{v_2^+}{v_1^-} \right|_{z=0} = \frac{R_G - Z_0}{R_G + Z_0} \equiv \rho_G \quad (2.19)$$

expresión que nos sirve para definir el coeficiente de reflexión en el generador como cociente entre la onda que se genera y la que llega<sup>1</sup>.

El seguimiento de las sucesivas ondas positivas y negativas se puede realizar mediante un diagrama espacio-tiempo como el de la figura 2.6b. En cada plano y en cada instante, la tensión total será la suma de todas las ondas que hayan alcanzado el plano.

En la figura 2.7 se representan las tensiones y corrientes en el punto medio de la línea para  $R_G=0$  y diferentes valores de  $R_L$ ;  $R_L=0$ ,  $R_L=\infty$ ,  $R_L < Z_0$  i  $R_L > Z_0$ . Se deben advertir los siguientes aspectos:

- 1) En el caso del cortocircuito *a*, la corriente crece, de forma escalonada, pero indefinidamente.
- 2) En el del circuito abierto *b*, el valor medio de la corriente es cero, así como el flujo medio de potencia; ésta fluye hacia la derecha ( $v_i > 0$ ) en los intervalos de corriente impares y hacia la izquierda, y con el mismo valor, en los pares.

<sup>1</sup> Nótese que la conclusión sobre el concepto de  $\rho_G$  y su valor es válida en el caso más general de un generador de tensión arbitraria  $v_g(t)$ , como se puede comprobar fácilmente reinsertando la variación temporal en las variables.

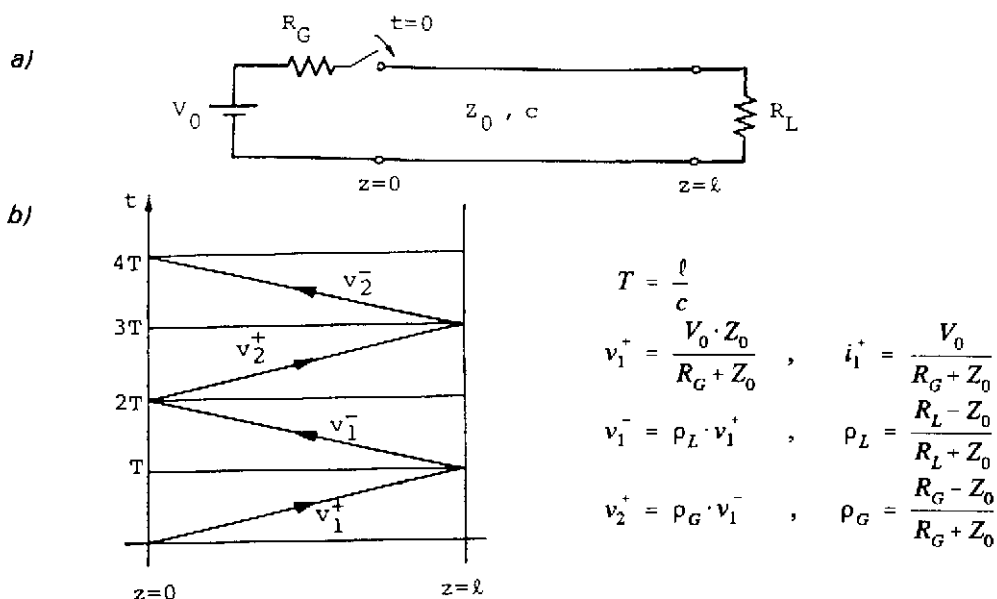


Fig. 2.6 Proceso de generación sucesiva de ondas positivas y negativas a partir del cierre del interruptor en  $t=0$

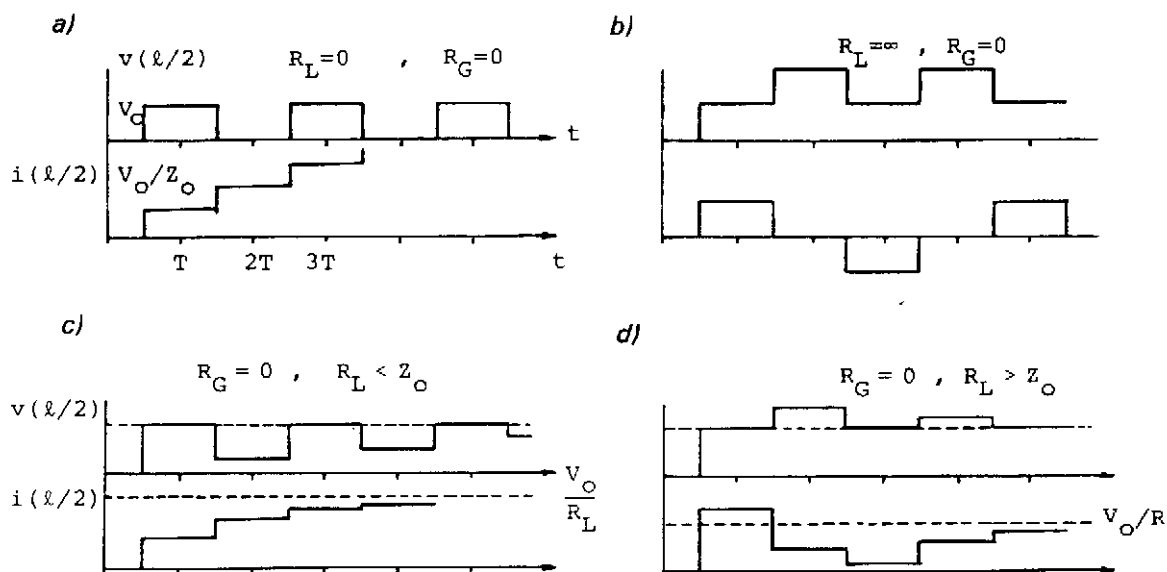


Fig. 2.7 Tensión y corriente en el punto medio de la línea de la figura 2.6 en función del tiempo para  $R_G=0$  y diferentes valores de  $R_L$

3) Si  $R_L \neq 0$ , en los casos *c* y *d*, las sucesivas ondas reflejadas en la carga van teniendo amplitudes cada vez menores por ser  $|\rho_L| < 1$ . Además, cuando  $t \rightarrow \infty$  (suponiendo, por generalidad,  $R_G \neq 0$ ):

$$\begin{aligned}
 v\left(\frac{\ell}{2}\right) &= v_1^+ + v_1^- + v_2^+ + v_2^- + \dots = v_1^+ \left[ 1 + \rho_L + \rho_L \rho_G + \rho_L^2 \rho_G + \rho_L^2 \rho_G^2 + \dots \right] \\
 &= \frac{V_0 \cdot Z_0}{R_G + Z_0} \left[ (1 + \rho_L \rho_G + \rho_L^2 \rho_G^2 + \dots) + \rho_L (1 + \rho_L \rho_G + \rho_L^2 \rho_G^2 + \dots) \right] \\
 &= \frac{V_0 \cdot Z_0}{Z_0 + R_G} \left( \frac{1}{1 - \rho_L \rho_G} + \frac{\rho_L}{1 - \rho_L \rho_G} \right) = \\
 &= \frac{V_0 \cdot Z_0}{Z_0 + R_G} \cdot \frac{1 + \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}}{1 - \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \cdot \frac{R_G - Z_0}{R_G + Z_0}} = \frac{V_0 \cdot R_L}{R_G + R_L} \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Es decir, el régimen permanente coincide, evidentemente, con la tensión calculada en régimen de tensión continua. ■

**Ejemplo 2** En la figura 2.8 se analiza la incidencia de un impulso cuadrado en un cortocircuito. La situación es evidentemente equivalente a la de la figura 2.8b, ya que garantiza la condición de cortocircuito en la carga,  $v(\ell, t) \equiv 0$ . La obtención de las gráficas de distribución de tensión en las proximidades del cortocircuito es inmediata, y podría realizarse un análisis similar para diferentes ondas incidentes de tensión. ■

**Ejemplo 3** La instalación de una resistencia en paralelo en una línea de transmisión produce una serie de reflexiones múltiples según se resume en la figura 2.9 donde, por una mayor generalidad, se considera que las secciones de línea a ambos lados de la resistencia tienen diferentes impedancias características. La diferencia con los ejemplos anteriores comienza cuando, en el instante  $t = \ell_1/c$ , la onda incidente alcanza la resistencia  $R$ , y se refleja parcialmente con un coeficiente de reflexión:

$$\rho_a(0) = \frac{Y_{01} - (G + Y_{02})}{Y_{01} + G + Y_{02}} \quad (2.21)$$

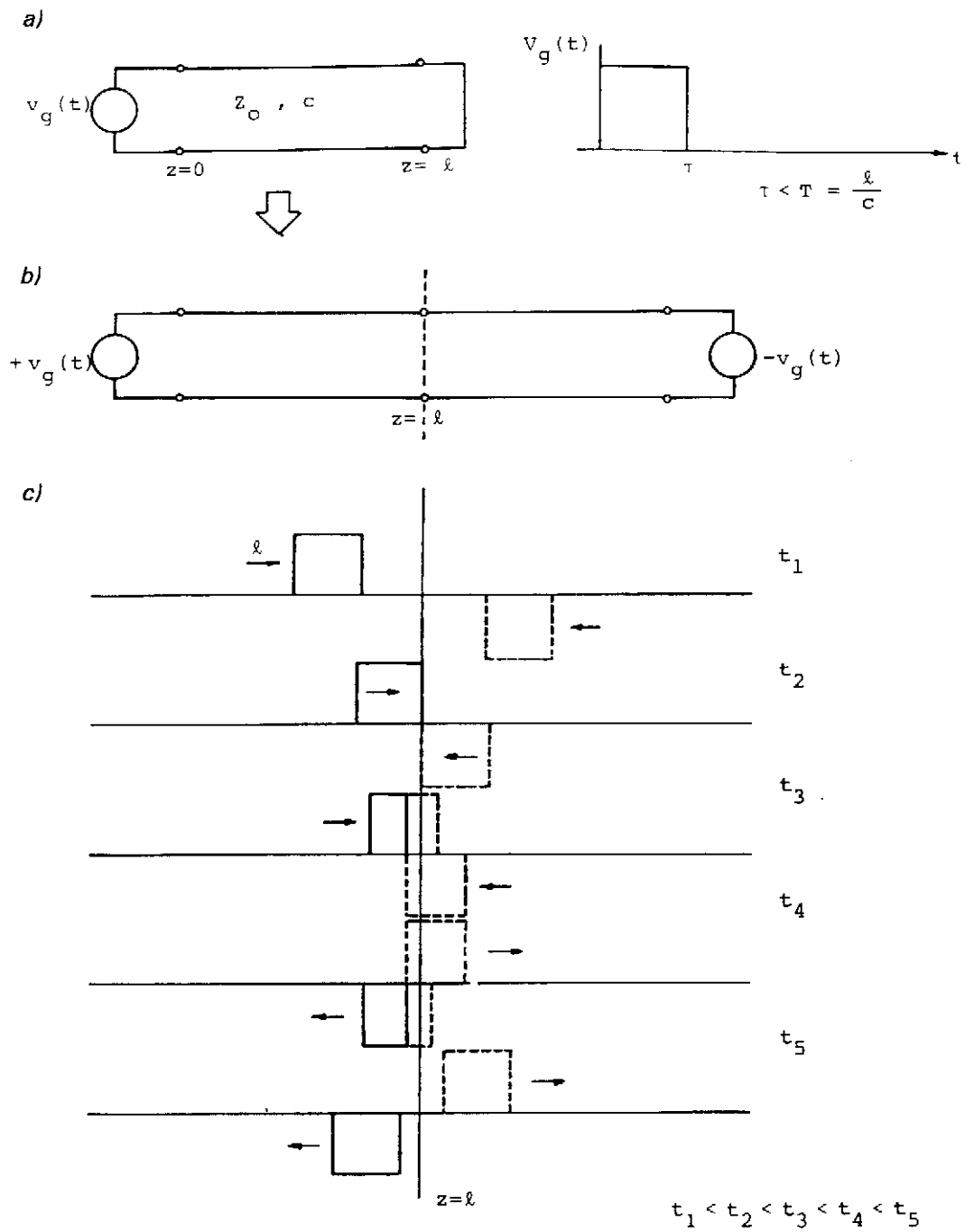
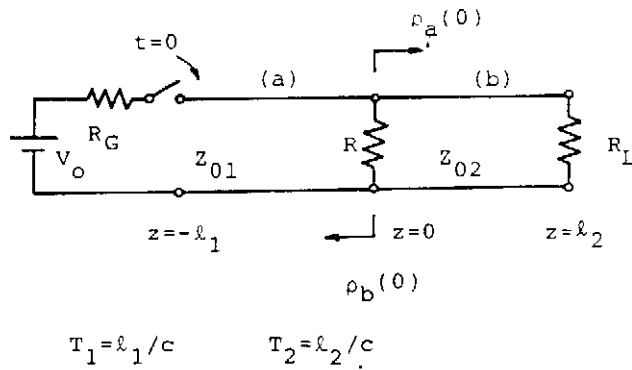


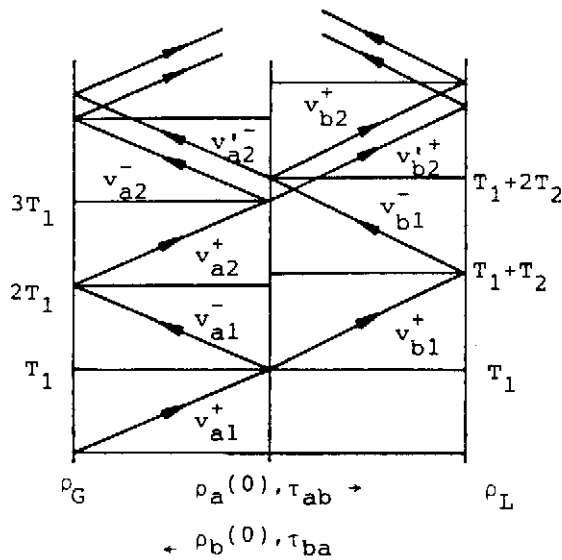
Fig. 2.8 Incidencia de un impulso rectangular en un cortocircuito. a) Configuración en estudio. b) Circuito equivalente utilizado. c) Distribución de tensión en las proximidades del c.c. en instantes sucesivos



$$\rho_a(0) = \frac{Y_{01} - (G + Y_{02})}{Y_{01} + (G + Y_{02})}$$

$$\rho_b(0) = \frac{Y_{02} - (G + Y_{01})}{Y_{02} + (G + Y_{01})}$$

$$\tau_{ab} = \frac{v_{b1}^+}{v_{a1}^+} = \frac{v_{a1}^+ + v_{a1}^-}{v_{a1}^+} = 1 + \rho_a(0)$$



Análogamente,

$$\tau_{ab} = \frac{v_{a2}^-}{v_{b1}^-} = 1 + \rho_b(0)$$

$$v_{b1}^+ = \tau_{ab} v_{a1}^-$$

$$v_{b2}^+ = \tau_{ab} v_{a2}^-$$

.....

$$v_{a2}^- = \tau_{ba} v_{b1}^+$$

etc.

Fig. 2.9 Situación de reflexiones múltiples creadas por una resistencia en paralelo en la unión de dos líneas de transmisión

Al mismo tiempo se transmite una fracción de onda incidente a la línea de la derecha, cuya amplitud puede calcularse en virtud de la continuidad de tensiones en el plano  $z=0$ :

$$v_{a1}^+ + v_{a1}^- = v_{b1}^+ \quad (2.22)$$

(el subíndice  $a$  se refiere a la línea de la izquierda y el  $b$  a la línea a la derecha), de donde:

$$\tau_{ab} \equiv \frac{v_{b1}^+}{v_{a1}^+} = 1 + \frac{v_{a1}^-}{v_{a1}^+} = 1 + \rho_a(0) = \frac{2Y_{01}}{Y_{01} + G + Y_{02}} \quad (2.23)$$

Al cociente así definido se le llama *coeficiente de transmisión* y relaciona a la onda emergente a la derecha con la incidente desde la izquierda. Por otra parte, cuando una onda reflejada en la carga incide desde la derecha en la resistencia paralelo ve un coeficiente de reflexión:

$$\rho_b(0) = \frac{Y_{02} - (G + Y_{01})}{Y_{02} + G + Y_{01}} \quad (2.24)$$

y, consecuentemente, un coeficiente de transmisión hacia la izquierda:

$$\tau_{ba} = 1 + \rho_b(0) = \frac{2Y_{02}}{Y_{02} + G + Y_{01}} \quad (2.25)$$

El proceso de reflexiones y de transmisiones adquiere ahora una cierta complejidad, pero su seguimiento puede realizarse sistemáticamente sin dificultad con el diagrama  $z-t$  de la figura 2.9.

Si la resistencia está en serie en lugar de en paralelo, como en la figura 2.10, el problema puede resolverse por analogía con el anterior si notamos que ahora, en  $z=0$ , existe continuidad de corrientes en lugar de tensiones:

$$i_{a1}^+ + i_{a1}^- = i_{b1}^+ \quad ; \quad \frac{1}{Z_{01}} (v_{a1}^+ - v_{a1}^-) = \frac{1}{Z_{02}} v_{b1}^+$$



$$\tau_{ab} = \frac{v_{bl}^+}{v_{al}^+} = \frac{Z_{02}}{Z_{01}} [1 - \rho_a(0)] \quad (2.26)$$

Análogamente, el coeficiente de transmisión de derecha a izquierda vale:

$$\tau_{ba} = \frac{Z_{01}}{Z_{02}} [1 - \rho_b(0)] \quad (2.28)$$

Nótese que si hacemos  $R = \infty$  en la figura 2.9 o  $R = 0$  en la figura 2.10, ambos ejemplos se reducen al problema de conexión de dos líneas de transmisión de impedancias características diferentes. ■

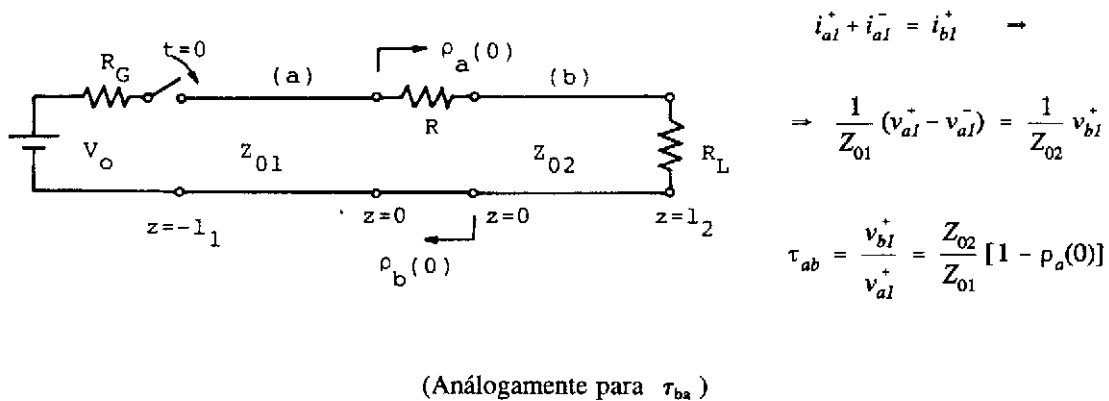


Fig. 2.10 El mismo problema de la figura anterior, pero con una resistencia en serie (sin retardo) entre las líneas

## 2.4 Reflexiones en cargas reactivas

En los ejemplos anteriores el análisis de las reflexiones era particularmente sencillo por serlo también la relación entre  $v$  y  $i$  en una resistencia. Consideremos ahora la incidencia de una onda de tensión  $v^+$  en una inductancia (fig. 2.11). La relación que ha de cumplir ahora en la carga ( $z=0$ ) es:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad v^+ + v^- = \frac{L}{Z_0} \left( \frac{dv^+}{dt} - \frac{dv^-}{dt} \right) \quad (2.29)$$

Si suponemos unas condiciones iniciales nulas (es decir, condiciones de línea en reposo) y tomamos la transformada de Laplace de (2.29), obtendremos:

$$\begin{aligned} v^+(s) + v^-(s) &= \frac{sL}{Z_0} [v^+(s) - v^-(s)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v^-(s)}{v^+(s)} &= \frac{sL - Z_0}{sL + Z_0} \equiv \rho(s) \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde hemos introducido el coeficiente de reflexión en la carga  $\rho(s)$  en el dominio de las tensiones transformadas  $V^\pm(s)$ . La conclusión puede generalizarse de forma evidente para cargas reactivas más generales descritas por su impedancia  $Z(s)$ :

$$\frac{v^-(s)}{v^+(s)} = \frac{Z(s) - Z_0}{Z(s) + Z_0} \rightarrow v^-(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ v^+(s) \frac{Z(s) - Z_0}{Z(s) + Z_0} \right\} \quad (2.31)$$

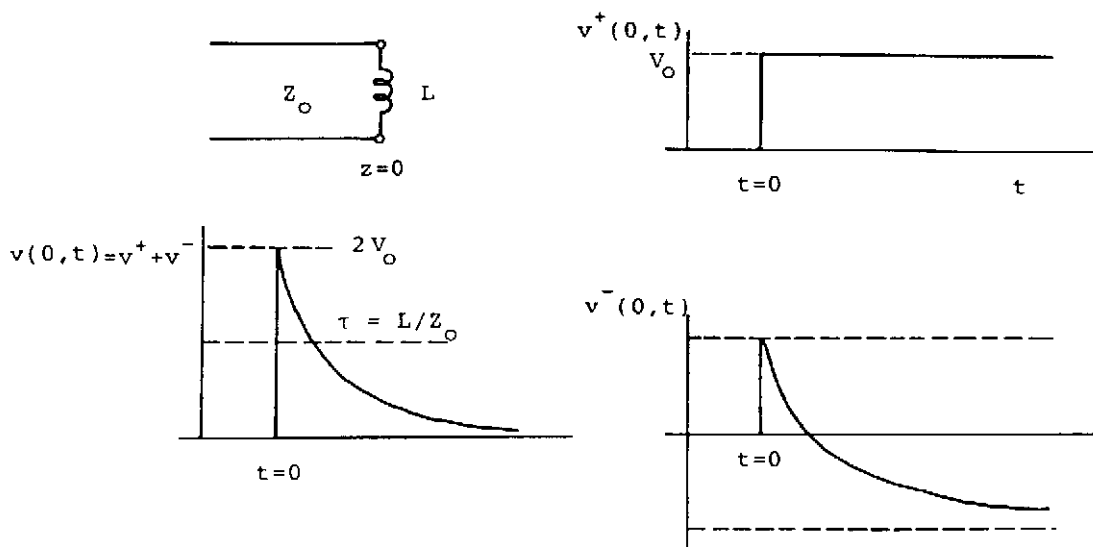


Fig. 2.11 Incidencia de un escalón de tensión sobre una inductancia

Si, como ejemplo, volvemos a la inductancia y tomamos como onda incidente un escalón:

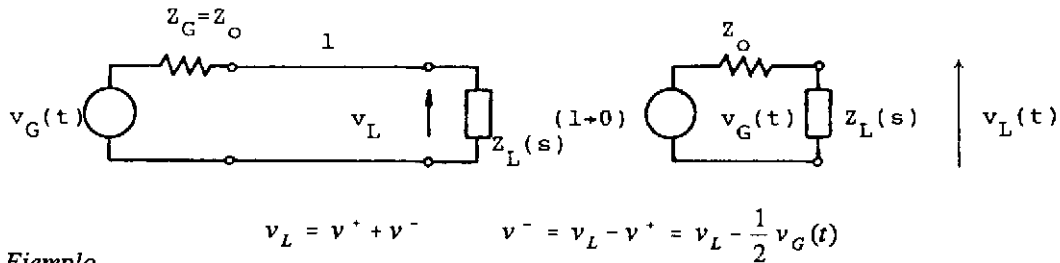
$$v^+(0,t) = V_0 \cdot u(t) \quad , \quad V^+(s) = \frac{V_0}{s} \quad (2.32)$$

resulta:

$$v^-(0,t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{V_0}{s} \cdot \frac{sL - Z_0}{sL + Z_0} \right\} = V_0 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} + \frac{2}{\left(s + \frac{Z_0}{L}\right)} \right\} =$$

$$= V_0 \left[ 2 \cdot e^{-\frac{Z_0}{L}t} - 1 \right] u(t) \quad (2.33)$$

La forma de  $v^-$  en cualquier punto de la línea se obtiene sustituyendo  $t$  por  $t+z/c$ . El cálculo de las ondas generadas en una carga reactiva puede simplificarse si, como en la figura 2.10, imaginamos un generador adaptado a la línea y hacemos que la longitud de ésta tienda a cero. Nos quedamos así con un circuito convencional de cuyo análisis puede obtenerse la tensión total en la carga  $v_L(t)$  y, a partir de ésta, la reflejada por sustracción de la incidente (fig. 2.12). Nótese que la condición de adaptación del generador en este proceso es esencial para evitar reflexiones múltiples.



Ejemplo

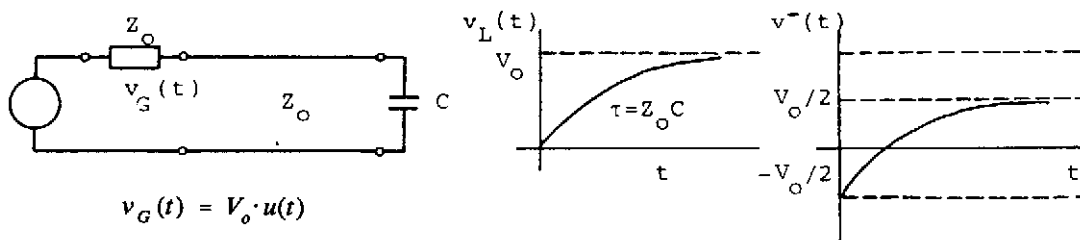
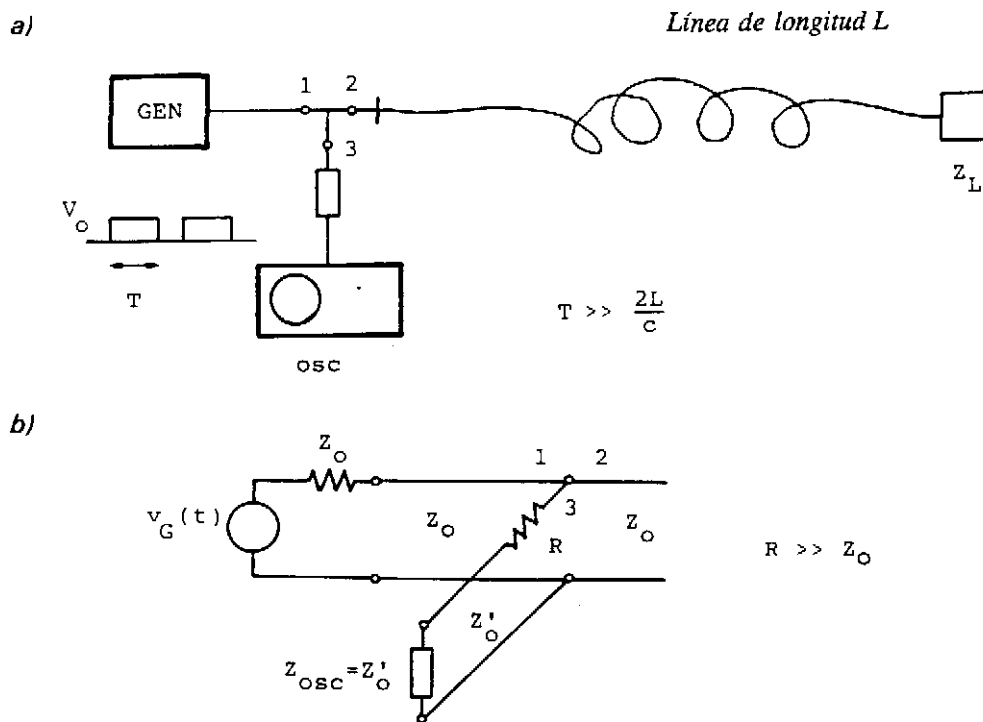


Fig. 2.12 Reducción del cálculo de la onda reflejada en el dominio de  $t$  por una carga no resistiva al caso de un circuito sin retardo

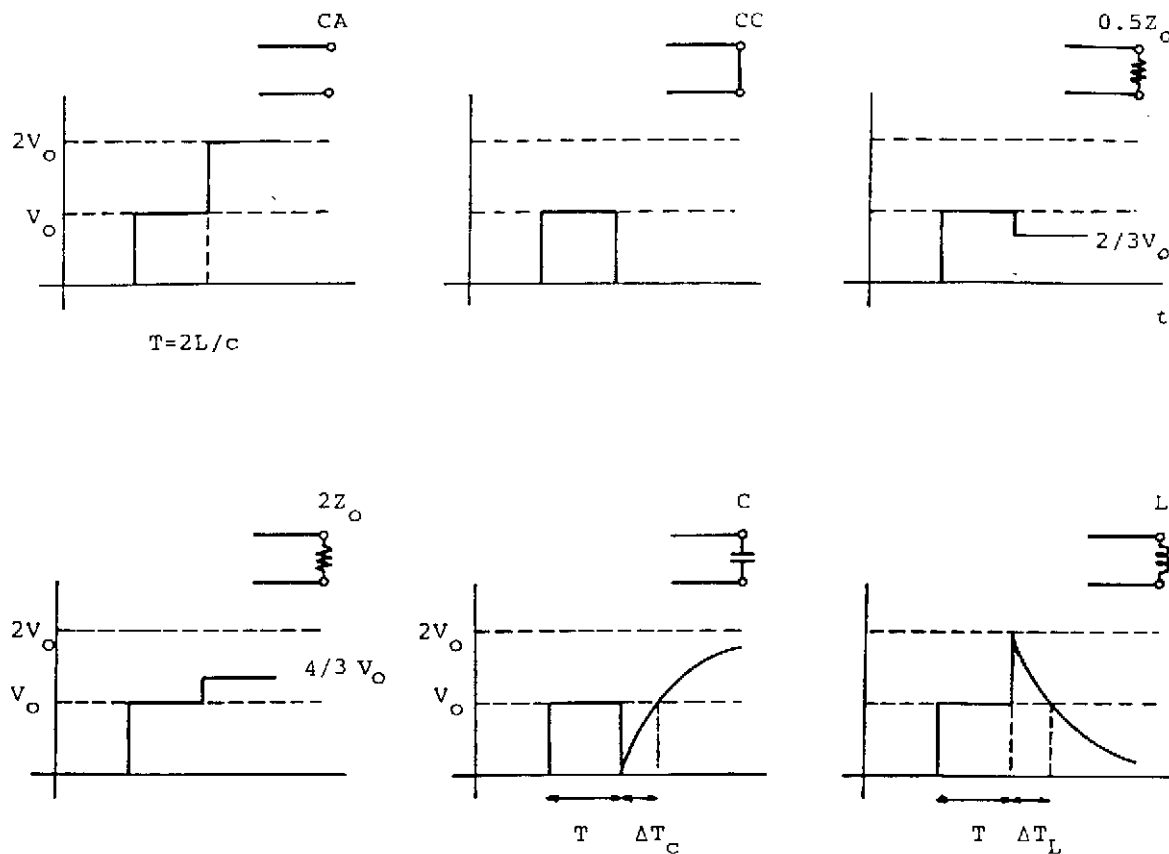
**Ejemplo** Reflectómetro temporal

En la figura 2.13 se esquematiza un sencillo montaje de laboratorio que permite observar reflexiones de cargas reactivas como las descritas. El generador produce trenes de impulsos rectangulares de duración suficientemente larga comparada con los tránsitos de las señales en la línea ( $T \gg 2L/c$ ), como para suponer cada impulso como un escalón de tensión  $v_o \cdot u(t)$ . Al mismo tiempo, el generador ha de estar adaptado a la línea para absorber las reflexiones secundarias. De la misma manera, la derivación del osciloscopio tampoco ha de producir reflexiones, lo que puede conseguirse con una resistencia muy elevada ( $R \gg Z_o$ ) como en la figura 2.13b. De esta manera, con el osciloscopio sincronizado al tren de impulsos del generador, en su pantalla se observa la tensión en el plano de conexión a la línea, que consiste en la onda positiva (escalón de tensión) más la reflejada en la carga retardada el tiempo  $2L/c$ .



**Fig. 2.13** Reflectómetro temporal de laboratorio. Es necesario que la duración de los pulsos sea muy larga comparada con el tiempo de tránsito de las señales en la línea, que el generador esté adaptado para no producir reflexiones secundarias y que la derivación del osciloscopio tenga resistencia elevada por la misma razón (fig. b)

En la figura 2.14 se resume el aspecto de las respuestas de diferentes cargas de estructura sencilla.



$$\Delta t_C = 0,69\tau = 0,69 C Z_0$$

$$\Delta T_L = 0,69\tau = 0,69 \frac{L}{Z_0}$$

Fig 2.14a Visualización, en el reflectómetro de la figura 2.11, de las tensiones a la entrada de la línea cargada con impedancias sencillas

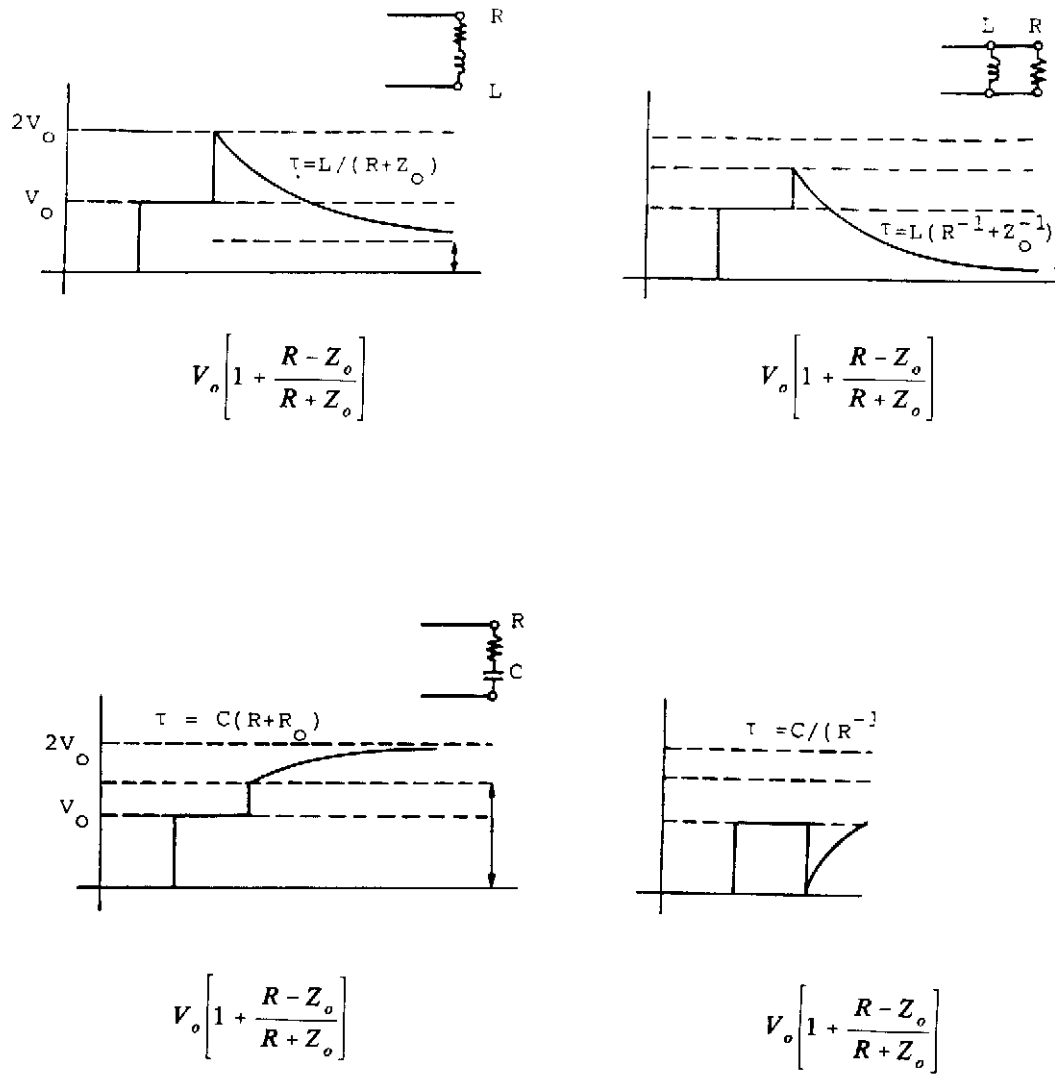


Fig. 2.14b Continuación de la figura 2.14a

## 2.5 Señales senoidales

A continuación, consideremos el caso importante de líneas excitadas por generadores senoidales en régimen permanente. Todas las señales serán de la forma  $A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$  o, en notación compleja,  $A \cdot \exp[j\omega t + j\phi] = C \cdot \exp[j\omega t]$ , con  $C = A \cdot \exp[j\phi]$ . Esta última constante compleja contiene toda la información necesaria (amplitud y fase) una vez conocida la frecuencia.

En este caso,  $v^+(t-z/c)$  es  $V^+ \cdot \exp[j\omega(t-z/c)]$  y análogamente para  $v(t+z/c)$ , por lo que (2.11) y (2.12) toman la forma compleja (prescindiendo del factor  $\exp[j\omega t]$  común a todos los términos):

$$V = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \quad (2.34)$$

$$I = \frac{1}{Z_0} [V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{\gamma z}] \quad (2.35)$$

siendo  $\gamma = j(\omega/c) = j\beta$  ( $\gamma$  = constante de propagación,  $\beta$  = constante de fase, en radianes por segundo).

La onda positiva en el dominio del tiempo toma la forma explícita:

$$v^+(z,t) = |V^+| \sin(\omega t - \beta z + \phi^+) \quad (2.36)$$

$$i^+(z,t) = \frac{|V^+|}{Z_0} \sin(\omega t - \beta z + \phi^+) \quad (2.37)$$

$$\text{con } V^+ = |V^+| e^{j\phi^+}$$

Las expresiones (2.36) y (2.37) indican que el voltaje (y la corriente), en todos los puntos de la línea, experimentan el mismo tipo de variación senoidal, los cuales estarán tanto más retrasados en su oscilación cuanto más a la derecha se hallen ( $z$  mayor). El retraso entre dos puntos distanciados un  $\Delta z$  es el tiempo que tardaría un observador en desplazarse de uno a otro punto a la velocidad  $c$ , y por esta razón se le llama *velocidad de fase* (el observador que se desplaza hacia la derecha a esta velocidad va pasando por puntos de fase  $(\omega t - \beta z + \phi^+)$  idéntica).

La distancia mínima entre dos puntos de la línea que estén siempre en fase se llama *longitud de onda* ( $\lambda$ ). Evidentemente,  $\beta\lambda=2\pi$ , es decir:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{f} \quad (2.38)$$

Volviendo a las expresiones complejas (2.34) y (2.35), debe observarse que la representación de (2.34) en el plano complejo da  $V$  como suma de dos vectores que giran en los sentidos indicados (fig. 2.15) a razón de  $360^\circ$  cada longitud de onda cuando nos movemos a lo largo de la línea (con  $z$  creciente), por lo que  $|V|$  variará entre un máximo, cuando ambos vectores se sumen en fase (misma dirección), y un mínimo, cuando lo hagan en oposición de fase (direcciones opuestas). Por otra parte, de los signos de la expresión (2.35), se concluye inmediatamente que cuando  $|V|$  es máximo  $|I|$  es mínimo, y viceversa, por lo que la impedancia a lo largo de la línea variará. Para calcularla consideremos una sección de línea de longitud  $\ell$  cargada con una impedancia (en general compleja)  $Z_L$ . Por conveniencia fijaremos el origen de coordenadas en la carga (fig. 2.16).

Definimos el *coeficiente de reflexión*  $\rho(z)$  como antes:

$$\rho(z) = \frac{v^-}{v^+} = \frac{V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} = \rho_L e^{2j\beta z} \quad (2.39)$$

donde hemos tenido en cuenta que en la carga ( $z=0$ ),  $\rho(0)=\rho_L=V^-/V^+$ .

Por otra parte, y por un cálculo idéntico al efectuado en el caso de carga resistiva (fig. 2.5),  $\rho_L$  vale:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (2.40)$$

Por tanto, la impedancia de entrada vale:

$$\begin{aligned} Z_i &= Z_0 \left. \frac{V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z}} \right|_{z=-\ell} = \\ &= Z_0 \frac{e^{j\beta\ell} + \rho_L e^{-j\beta\ell}}{e^{j\beta\ell} - \rho_L e^{-j\beta\ell}} \end{aligned}$$



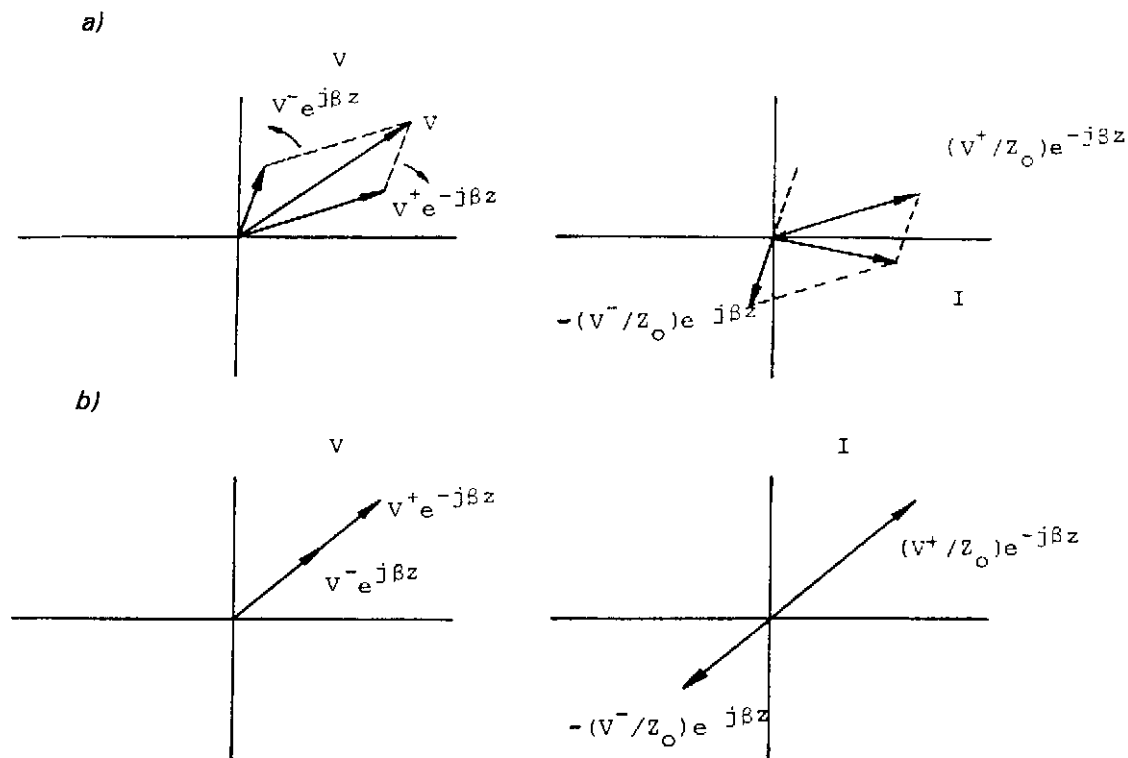
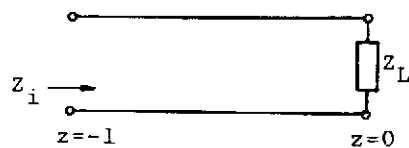


Fig. 2.15 Composición en el plano complejo de  $V$  y  $I$  a partir de las correspondientes ondas positivas y negativas. (b) Caso particular de  $|V|_{\text{máx}}$  y  $|I|_{\text{mín}}$



$$\rho_L = \frac{V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} \Big|_{\text{carga}} = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Fig. 2.16 Situación utilizada para el cálculo de la impedancia de entrada de una línea,  $Z_i(\omega)$

que, teniendo en cuenta (2.39) y tras sencillas operaciones, puede escribirse:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta \ell + j Z_0 \sin \beta \ell}{Z_0 \cos \beta \ell + j Z_L \sin \beta \ell} \quad (2.41)$$

Esta expresión es más fácil de recordar escrita de la forma siguiente:

$$Z_i = Z_0 \tanh(\gamma \ell + \delta_Z) \quad , \quad \text{siendo} \quad \tanh \delta_Z = \frac{Z_L}{Z_0} \quad (2.42)$$

como se puede comprobar desarrollando la fórmula de la tangente hiperbólica de una suma:

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \quad (2.43)$$

Para la admitancia se obtiene una expresión idéntica:

$$Y_i = Y_0 \tanh(\gamma \ell + \delta_Y) \quad , \quad \text{siendo} \quad \tanh \delta_Y = \frac{Y_L}{Y_0} \quad (2.44)$$

Se observa en (2.41) que la impedancia es una función periódica de la longitud  $\ell$ , de período  $\ell = \lambda/2$ . Esto quiere decir que la impedancia de entrada de la línea que consideramos no varía si se inserta un trozo de línea de un número entero de  $\lambda/2$ . Tienen un interés particular las impedancias de entrada de las líneas cortocircuitadas o en circuito abierto. En estos casos:

$$\begin{aligned} (Z_L = 0) \quad Z_{cc} &= j Z_0 \tan \beta \ell = j X_{cc} \\ (Y_L = 0) \quad Y_{ca} &= j Y_0 \tan \beta \ell = j B_{ca} \end{aligned} \quad (2.45)$$

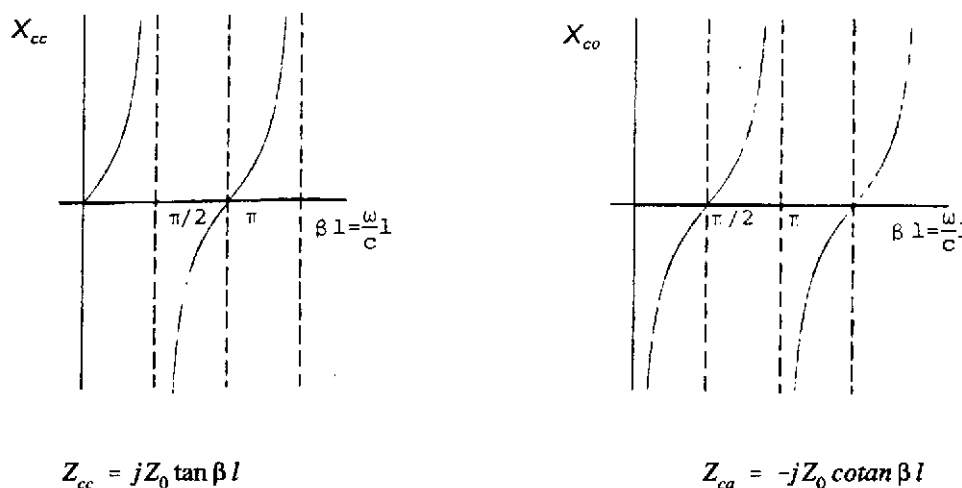


Fig. 2.17 Reactancia de entrada de líneas en cortocircuito ( $Z_{cc}$ ) o en circuito abierto ( $Z_{co}$ ) en función de  $\beta l = \omega l/c$

En estos casos la impedancia de entrada siempre es reactiva y su reactancia varía entre  $(-\infty)$  i  $(+\infty)$  según la longitud de la línea. Se representa gráficamente en la figura 2.17, donde además puede observarse que ambas curvas son idénticas excepto por un desplazamiento de  $\pi/2$  radianes:

$$Z_{cc}(\beta l) = Z_{co}\left(\beta l + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.46)$$

Esta conclusión es consecuencia de la propiedad más general de las líneas de transmisión de actuar como inversores de impedancias (fig. 2.18). En efecto, cada vez que avanzamos o retrocedemos  $\lambda/4$  en la línea, la impedancia vista hacia la derecha referida a  $Z_0$  cambia exactamente a su inversa. En el caso de la línea en *c.a.*, a  $\lambda/4$  del mismo se tiene un *c.c.*, de manera que  $Z_{co}(\beta l)$  es la misma que  $Z_{cc}(\beta l - \pi/2)$ . Nótese que las transformaciones de impedancia en líneas de transmisión toman un aspecto más general si utilizamos impedancias normalizadas a la característica de la línea:

$$\bar{Z}_i = \frac{Z_i}{Z_0} = \tanh(\beta \ell + \delta_z) \quad (2.47)$$

$$\bar{Y}_i = \frac{Y_i}{Y_0} = \tanh(\beta \ell + \delta_y) \quad (2.48)$$

**Ejemplo** Como ejercicio de utilización de los conceptos de este apartado, en la figura 2.19 se calcula la onda positiva a la entrada de una línea de transmisión en función de los parámetros del generador y del coeficiente de reflexión a la entrada de la línea.

Evidentemente,  $V^+ = V_G Z_0 / (Z_G + Z_0)$  cuando la línea está adaptada ( $\rho_L = 0$ ). Pero esto también sucede, incluso estando la línea desadaptada, si lo está el extremo generador ( $Z_S = Z_0$ ;  $\rho_G = 0$ ).

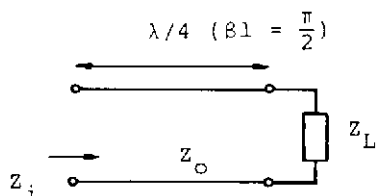
La misma expresión puede obtenerse de forma muy instructiva examinando cómo se establece el régimen permanente. En efecto, imaginemos un interruptor en el generador, como en la figura 2.20, que se cierra en el instante inicial, con la línea previamente en estado de reposo. En  $t=0$  se genera una onda senoidal positiva de valor:

$$V_1^+ = \frac{V_G Z_0}{Z_G + Z_0} \quad (2.49)$$

y sucesivamente se generan, como en ejemplos anteriores, ondas positivas y negativas cuyas amplitudes, evaluadas en los planos de generador y carga, se calculan fácilmente sin más que considerar el desfase introducido por la longitud recorrida y el correspondiente coeficiente de reflexión (fig. 2.20). De esta manera, la onda positiva en régimen estacionario en el plano  $z=0$  viene dada como la suma de todas las ondas positivas generadas:

$$V^+ = \sum_{i=1}^{\infty} V_i^+ \quad (2.50)$$

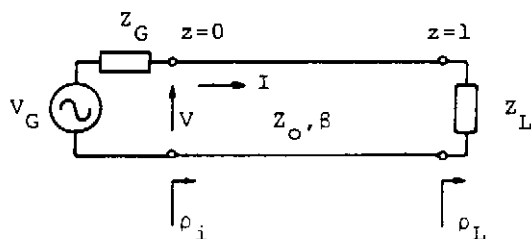
que es la suma de una progresión geométrica de razón  $\rho_G \rho_L e^{2j\beta \ell}$  (menor que la unidad si  $R_L$  i  $R_G$  son positivas), con lo que se obtiene de nuevo el valor hallado para  $V^+$ . ■



$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L \cos \frac{\pi}{2} + j Z_0 \sin \frac{\pi}{2}}{Z_0 \cos \frac{\pi}{2} + j Z_L \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

$$\frac{Z_i}{Z_0} = \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_0}} \quad \rightarrow \quad \bar{Z}_i = \frac{1}{\bar{Z}_L}$$

Fig. 2.18 Efecto inversor de impedancias de una sección de línea de longitud  $\lambda/4$



$$V = V_G - Z_G I \quad \Rightarrow$$

$$\rightarrow V^+ + V^- = V_G - Z_G \left( \frac{V^+}{Z_0} - \frac{V^-}{Z_0} \right)$$

$$\frac{V^-}{V^+} = \rho_i = \rho_L e^{-2j\beta l} \quad \text{se obtiene:}$$

$$V^+ = \frac{V_G Z_0}{Z_G + Z_0} \cdot \frac{1}{1 - \rho_i \rho_G}$$

$$\text{con } \rho_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0}$$

Fig. 2.19 Cálculo de la onda positiva de tensión en una situación general

Acabaremos este apartado con las siguientes observaciones:

a) La potencia media neta que fluye en la línea hacia la derecha vale:

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V(z) I^*(z)] = \\
 &= \frac{1}{2Z_0} \operatorname{Re} \{ (V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}) [(V^+)^* e^{j\beta z} - (V^-)^* e^{-j\beta z}] \} = \\
 &= \frac{1}{2Z_0} \operatorname{Re} [ |V^+|^2 - |V^-|^2 - V^+ (V^-)^* e^{2j\beta z} + V^- (V^+)^* e^{2j\beta z} ] = \\
 &= \frac{1}{2Z_0} \operatorname{Re} [ |V^+|^2 + 2j |V^+| |V^-| \sin(2\beta z + \phi_- - \phi_+) ] = \\
 &= \frac{1}{2Z_0} ( |V^+|^2 - |V^-|^2 ) = P^+ - P^- \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

con las evidentes definiciones para las potencias  $P^+$  y  $P^-$  asociadas con las ondas positiva y negativa, respectivamente. En términos del coeficiente de reflexión:

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \frac{|V^+|^2}{2Z_0} (1 - |\rho(z)|^2) = \\
 &= \frac{|V^+|^2}{2Z_0} (1 - |\rho_L|^2) = P^+ (1 - |\rho_L|^2) \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

ya que  $|\rho(z)|$  es constante en toda la línea.

b) Para cargas pasivas ( $Z_L = R_L + jX_L$ , con  $R_L > 0$ )  $|\rho_L| < 1$ ; en efecto:

$$|\rho_L|^2 = \frac{(R_L - Z_0)^2 + X_L^2}{(R_L + Z_0)^2 + X_L^2} \leq 1 \quad (2.53)$$

lo cual es consistente con el resultado anterior para  $P$ ; la potencia reflejada nunca puede ser mayor que la incidente.

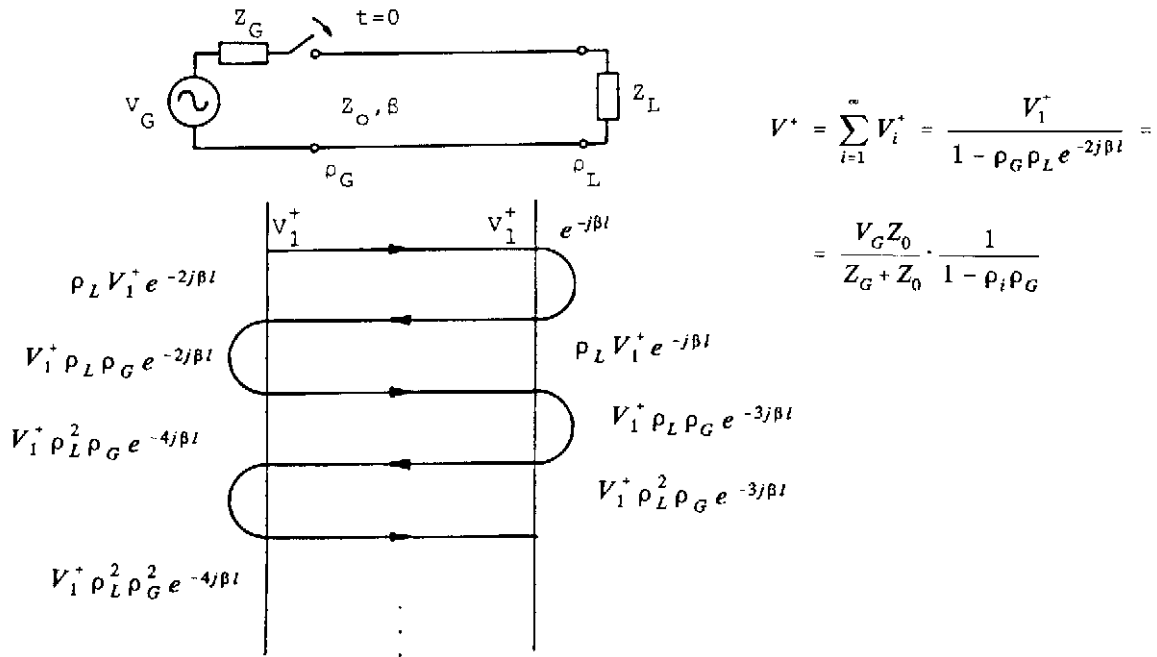


Fig. 2.20 Repetición del cálculo de la figura anterior, considerando el régimen transitorio generado a partir del cierre del interruptor

### 2.6 Ondas estacionarias

Cuando una línea en régimen senoidal está excitada sólo una onda progresiva (positiva o negativa), un observador puede identificar experimentalmente la situación con un voltímetro (que mide la amplitud o el valor eficaz de la tensión de r.f.) ya que, al desplazarse a lo largo de la línea, la lectura permanecerá constante:

$$|V(z)| = |V^+ e^{-j\beta z}| = |V^+| \tag{2.54}$$

Sin embargo, en la situación más general, cuando se propagan en línea simultáneamente una onda positiva y otra negativa, hemos visto en el párrafo anterior que el módulo de la tensión fluctúa entre un valor máximo:

$$|V|_{\text{máx}} = |V^+| + |V^-| \quad (2.55)$$

que se produce cuando los vectores  $V^+ e^{j\beta z}$  i  $V^- e^{j\beta z}$  se suman en fase, y un valor mínimo:

$$|V|_{\text{mín}} = |V^+| - |V^-| \quad (2.56)$$

que se produce justamente a una distancia de  $\lambda/4$  a la derecha o a la izquierda de la situación del máximo, como puede comprobarse fácilmente a partir de la interpretación gráfica de la figura 2.15, ya que cada vector avanza o retrocede  $\pi/2$ , acumulándose un desfase relativo de  $\pi$  radianes.

De manera más precisa, en esta situación general tendremos:

$$V(z) = V^+ [e^{-j\beta z} + \rho(0) e^{j\beta z}] = V^+ e^{-j\beta z} [1 + |\rho(0)| e^{2j\beta z + j\theta}] \quad (2.57)$$

siendo  $\rho(0) = |\rho(0)| \exp(j\theta)$  y, en consecuencia:

$$|V(z)|^2 = |V^+|^2 [1 + |\rho(0)|^2 + 2|\rho(0)| \cos(2\beta z + \theta)] \quad (2.58)$$

situación que se representa en la figura 2.21 y a la que nos referimos como *onda estacionaria*. Si bien una onda estacionaria queda bien definida mediante el módulo del coeficiente de reflexión, suele caracterizarse a partir del cociente:

$$S = \frac{|V|_{\text{máx}}}{|V|_{\text{mín}}} = \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (2.59)$$

denominado *relación de onda estacionaria* (en inglés, *VSWR* o *Voltage Standing Wave Ratio*), cuya magnitud varía entre los valores 1 para una línea adaptada (sin reflexiones) e  $\infty$  si en la línea existe un obstáculo que refleja toda la energía incidente,  $|\rho| = 1$ . Con frecuencia su valor se da en decibelios (recuérdese que  $S$  representa un cociente de tensiones):

$$S(\text{dB}) = 20 \log S \quad (2.60)$$



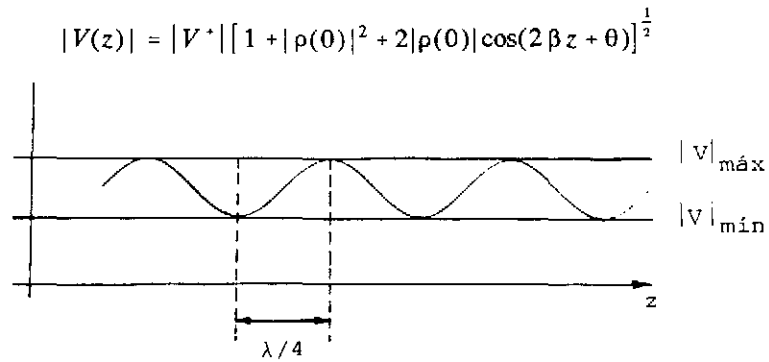


Fig. 2.21 Distribución de la amplitud (módulo) de la tensión en una línea con ondas estacionarias

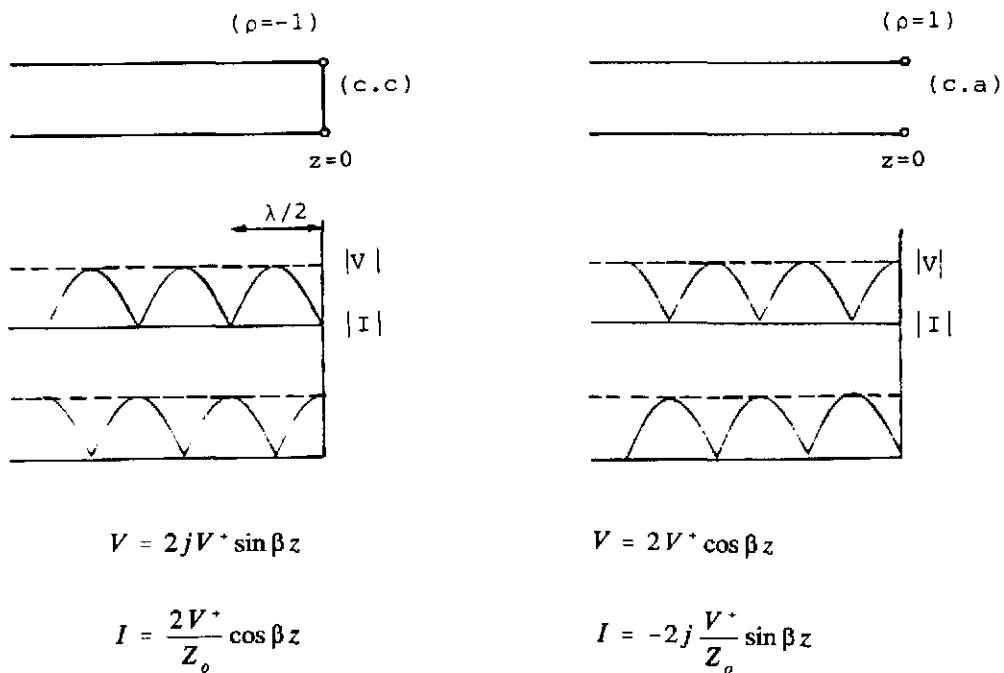


Fig. 2.22 Distribución de la tensión y de la corriente en una línea de transmisión en cortocircuito y en circuito abierto

Dos situaciones analíticamente sencillas y de mucho interés son las de una línea de cortocircuito y en circuito abierto (fig. 2.22), a las que volveremos más adelante cuando hablemos de líneas resonantes. Obsérvese cómo en este caso las tensiones y corrientes están en cuadratura, proporcionando potencia media hacia la derecha nula. Al mismo tiempo, ha desaparecido todo vestigio de propagación, ya que, por ejemplo, en el caso de c.c.:

$$v(z,t) = 2 |V^+| \sin(\beta z) \cdot \cos\left(\omega t + \phi^+ + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.61)$$

Es decir, todos los puntos de la línea están simultáneamente en fase, con independencia de su posición.

## 2.7 La carta de Smith

La expresión (2.41), que da la transformación de impedancias a lo largo de una línea, no solamente es de cálculo engorroso (cuestión hoy poco grave por la ayuda de calculadoras y ordenadores) sino que es de difícil interpretación y no permite sacar conclusiones sencillas sin recurrir a cálculos complejos. Una ayuda gráfica de gran utilidad es la propuesta por P.H. Smith en 1939 (los rusos la atribuyen a Volpert, que al parecer la propuso, independientemente de Smith, en el mismo año, en la Unión Soviética) y que pasamos a describir.

Descartado el plano de  $Z=R+jX$  como base, ya que valores infinitos de  $R$  y  $X$  forman parte de situaciones prácticas, la conveniencia de utilizar el plano de coeficientes de reflexión  $\rho$  es inmediata, ya que todas las impedancias (pasivas) producen  $|\rho| < 1$  y, por tanto, todas están contenidas en el interior de un círculo de radio unidad.

Por tanto, la transformación:

$$\rho = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1}, \quad \bar{Z} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (2.62)$$

(nótese que utilizamos impedancias normalizadas a  $Z_0$ ) transforma puntos del plano complejo  $\bar{Z} = \bar{R} + j\bar{X}$  en puntos del plano complejo  $\rho = u + jv$  con la siguiente importante propiedad: cualquier circunferencia en el plano  $\bar{Z}$  se transforma en otra circunferencia del plano  $\rho$ . Recuérdese aquí que las líneas rectas son un caso particular de circunferencias cuando su radio se hace infinito.

Esta propiedad se puede verificar fácilmente si recordamos (fig. 2.23) que la ecuación (en lo sucesivo prescindiremos de la barra sobre la  $Z$  para indicar normalización)

$$|Z|^2 - (ZC^* + Z^*C) + B = 0 \quad (2.63)$$

con  $C$  complejo y  $B$  real, representa una circunferencia de centro  $C$  (coeficiente de  $Z^*$  cambiado de signo) y radio:

$$|A| = \sqrt{|C|^2 - B} \quad (2.64)$$

Si volvemos a (2.62) y suponemos que  $Z$  pertenece a una circunferencia, entonces:

$$Z = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = C + A \quad \frac{1 + \rho}{1 - \rho} - C = \frac{(1 - C) + \rho(1 + C)}{1 - \rho} = A \quad (2.65)$$

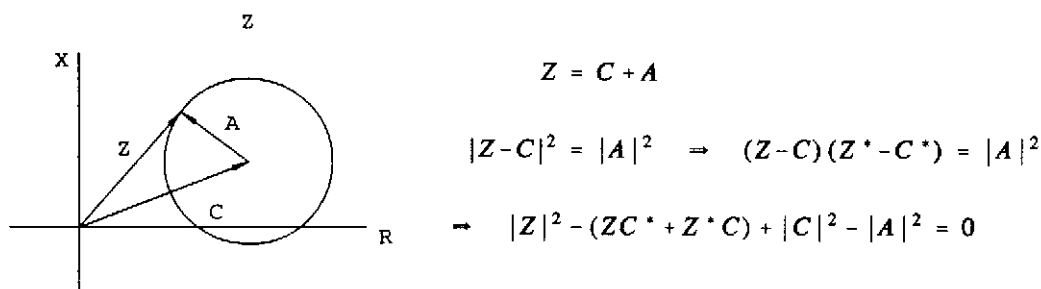


Fig. 2.23 Ecuación, en el plano complejo de las  $Z$ , de una circunferencia de centro  $C$  y radio  $|A|$

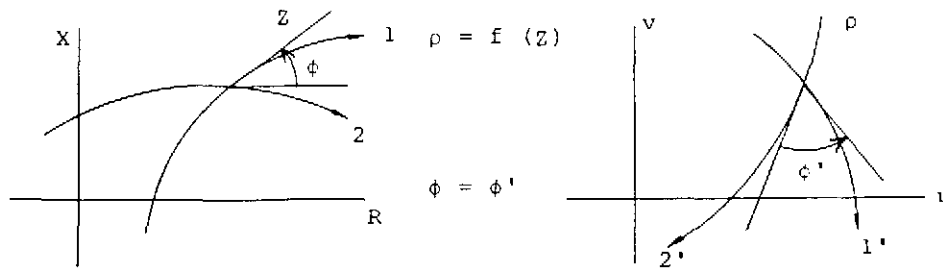


Fig. 2.24 Propiedad de conformidad de las transformaciones del plano complejo,  $\rho = f(z)$ . Los ángulos transformados  $\phi$  y  $\phi'$  son iguales

Si tomamos el módulo en ambos miembros resulta:

$$|A|^2 [|\rho|^2 + 1 - (\rho + \rho^*)] =$$

$$= |1 - C|^2 + |\rho|^2 |1 + C|^2 + \rho(1 + C)(1 - C^*) + \rho^*(1 + C^*)(1 - C) \quad (2.66)$$

$$|\rho|^2 - \frac{\rho [ |A|^2 + (1 - C)(1 + C) ] + \rho^* [ |A|^2 + (1 - C^*)(1 + C^*) ]}{|A|^2 - |1 + C|^2} +$$

$$+ \frac{|A|^2 - |1 - C|^2}{|A|^2 - |1 + C|^2} = 0 \quad (2.67)$$

ecuación identificable con la de una circunferencia en el plano de  $\rho$ , de centro y radio calculables inmediatamente, como queríamos demostrar.

En general, toda transformación compleja además tiene la propiedad de ser conforme excepto en puntos singulares; es decir, si dos curvas se cortan formando un cierto ángulo en el plano  $Z$ , sus transformadas se cortan formando el mismo ángulo, en magnitud y sentido (fig. 2.24).

La construcción de las líneas de resistencia constante y de reactancia constante en el plano de  $\rho$  (carta de Smith) podría realizarse a partir de la expresión (2.67), pero es más sencillo e instructivo realizarlo de acuerdo con las siguientes consideraciones:

a) Una circunferencia queda determinada si conocemos tres puntos de ella. Si además tenemos información suplementaria (por ejemplo, conocemos la recta en la que se encuentra su centro), el número de puntos puede reducirse (por ejemplo, las dos intersecciones con la recta del centro, que determinan un diámetro).

b) A todos los puntos del infinito del plano  $Z$  ( $R \rightarrow \infty$ ,  $X \rightarrow \infty$  o ambos) corresponde  $\rho = 1$ .

c) A valores de  $Z$  simétricos respecto al eje de abscisas corresponden valores de  $\rho$  también simétricos respecto del eje de abscisas:

$$Z_2 = Z_1^* \quad , \quad \rho_2 = \frac{Z_2 - 1}{Z_2 + 1} = \frac{Z_1^* - 1}{Z_1^* + 1} = \rho_1^* \quad (2.68)$$

Por tanto, a curvas simétricas con respecto al eje  $R$  en  $Z$  también corresponden curvas en  $\rho$  con la misma simetría. En particular, las líneas de resistencia constante en  $Z$  serán transformadas en círculos en  $\rho$  con un diámetro sobre el eje real (fig. 2.25), por lo que su identificación sólo requiere dos puntos, de los cuales uno es  $\rho = 1$ .

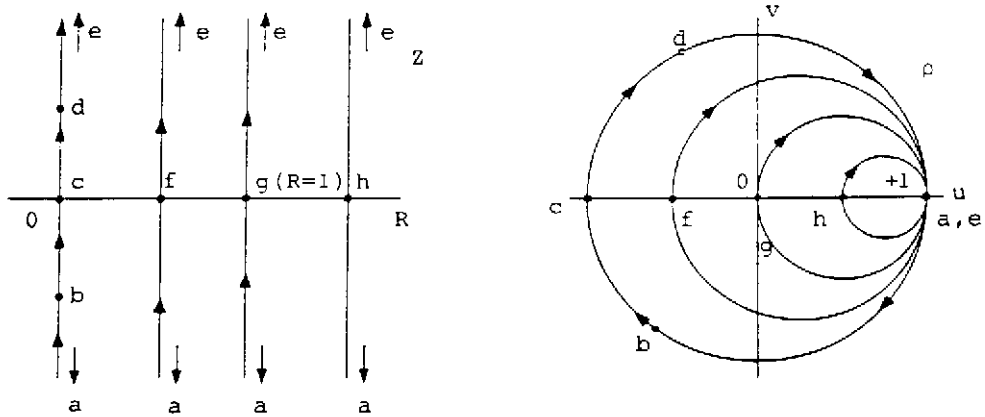
Entonces la construcción de los círculos de resistencia constante de la figura 2.25 es muy sencilla y no requiere explicaciones adicionales. Para construir los de reactancia constante, una vez en posesión de los anteriores, basta con partir de los puntos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$  (fig. 2.26), y recordar que, en virtud de la conformidad, han de cortar ortogonalmente a las líneas  $R = \text{cte}$  y confluir en el transformado del punto del infinito del plano  $Z$ , es decir, el punto  $\rho = 1$ .

Que todas estas circunferencias de  $X = \text{cte}$  tienen su centro en la recta  $u = 1$  (recta vertical tangente a la carta de Smith por la derecha) puede verse de la manera siguiente: si  $Z_1 = R + jX$  y  $Z_2 = -(R + 2) + jX$ , entonces:

$$\rho_1 - 1 = \frac{R + jX - 1}{R + jX + 1} - 1 = \frac{-2}{(1 + R) + jX}$$

$$\rho_2 - 1 = \frac{-2}{-(1 + R) + jX} \quad (2.69)$$

es decir,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son simétricos respecto a la recta  $u = 1$ . Por tanto, la circunferencia completa transformada de la recta  $x = \text{cte}$  ( $-\infty < R < \infty$ ) ha de ser simétrica respecto a esta recta y tener su centro en ella.



$R=0, |\rho|=1$ , círculo de radio unidad. El punto  $c$  ( $R=0, X=0$ ) corresponde a  $\rho=-1$ .  
 A los puntos del infinito ( $a, e$ ) les corresponde  $\rho=1$ .

$R \neq 0, R < 1$ : al punto  $f$  le corresponde  $\rho = (R-1)/(R+1) < 0$

$R \neq 0, R = 1$ : al punto  $g$  le corresponde  $\rho = 0$

$R > 1$ : al punto  $h$  le corresponde  $\rho = (R-1)/(R+1) > 0$

Fig. 2.25 Construcción de las líneas de resistencia constante en la carta de Smith

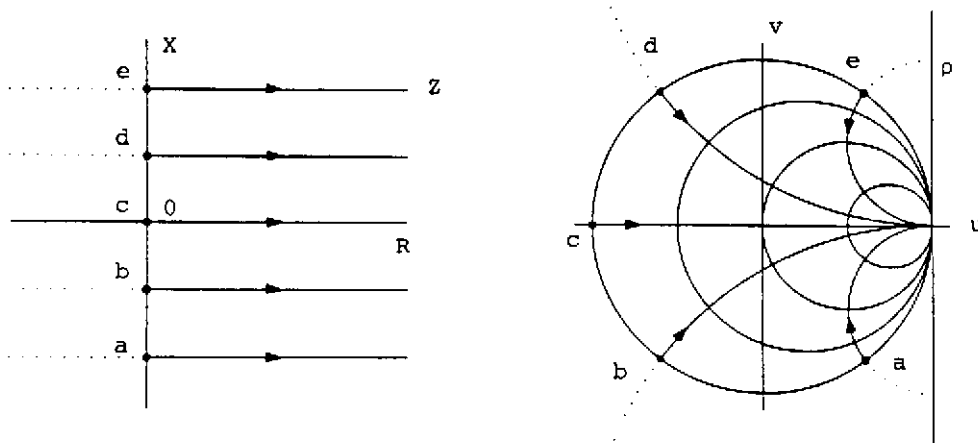


Fig. 2.26 Construcción de las líneas de reactancia constante

De esta manera nos encontramos con la construcción de la figura 2.27, que es la versión de la carta de Smith utilizada con más frecuencia.

Por lo que se refiere a la transformación de admitancias:

$$\rho = \frac{1 - Y}{1 + Y} \quad (2.70)$$

se observa que es idéntica a la de impedancias (2.62) excepto por un cambio de signo que supone un giro de 180°. No es preciso, por tanto, volverla a dibujar.

Idealmente, sería deseable disponer de una carta que tuviera dibujadas simultáneamente las mallas de líneas de  $Z$  y de  $Y$  (fig. 2.28). De esta manera, dado un cierto valor de  $\rho$ , su localización en la carta de Smith nos proporcionaría simultáneamente, por lectura directa, los valores de  $Z$  y de  $Y$  a los que corresponde.

## 2.8 Propiedades básicas de la carta de Smith

Hemos visto que existe una correspondencia biunívoca (excepto para los puntos del infinito) entre los puntos del plano de  $\rho$  y los del plano de  $Z$  o  $Y$ , de manera que la situación de un valor particular de  $\rho$  en la carta de Smith nos proporciona, por lectura en las mallas de líneas de  $Z$  o  $Y$ , los valores correspondientes. Recíprocamente, la situación de un valor particular de  $Z$  (o de  $Y$ ) en la malla correspondiente coincide con el extremo del vector del  $\rho$  asociado, que puede leerse teniendo en cuenta que el radio de la carta de Smith se corresponde con  $|\rho|=1$  (véase una de las escalas anteriores), y que la periferia de la carta de Smith está marcada en grados sexagesimales. Por lo que se refiere a la carta de las  $Z$ , nótese las siguientes propiedades básicas:

- 1) La parte superior,  $v > 0$ , corresponde a impedancias inductivas,  $X > 0$ , y la inferior a capacitivas,  $X < 0$ .
- 2) Las resistencias mayores que la unidad,  $R > 1$ , están contenidas dentro del círculo de resistencia constante que pasa por el origen. Este último (punto  $R=1$ ) se corresponde con la impedancia (resistencia) que adapta la línea.
- 3) El coeficiente de reflexión en una línea vale:

$$\rho(z) = \rho(0) e^{2j\beta z} \quad (2.71)$$

De manera que cuando nos movemos por toda la línea  $|\rho(z)|$  permanece constante, mientras que su fase varía linealmente con la longitud a razón de una circunferencia completa ( $360^\circ$ ) cada media longitud de onda. De esta manera, el vector representativo en la carta de Smith gira, pudiéndose leer en cada momento la impedancia  $Z(z)$  sobre la malla de líneas de la carta de Smith (fig. 2.29). Obsérvese que el sentido de giro es positivo (antihorario) si nos movemos hacia la derecha (hacia la carga) y negativo (horario) si nos movemos hacia la izquierda (hacia el generador). Nótese (fig. 2.27) que la periferia de la carta de Smith está graduada también en longitudes de onda y que los sentidos de giro (generador y carga) también están indicados.

4) En los puntos en que  $|V|$  es máximo,  $|I|$  es mínimo y la impedancia es resistiva y toma el valor máximo dado por:

$$|Z(z)|_{\text{máx}} = R_m = S \quad (2.72)$$

En efecto,  $|V|$  es máximo cuando  $V^+ \exp[-j\beta z]$  y  $V^- \exp[j\beta z]$  se suman en fase, y entonces  $I^+ = V^+/Z_0$  y  $I^- = -V^-/Z_0$  se suman en oposición de fase y producen un vector  $I$  colineal con el vector  $V$  (fig. 2.15).

De manera que:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} Z_0 = SZ_0 \quad (2.73)$$

Con  $Z_0=1$  (valores normalizados) resulta  $Z=S$ , como queríamos demostrar.

Análogamente, donde  $|V|$  es mínimo,  $|I|$  es máximo y la impedancia vuelve a ser resistiva y, esta vez, mínima y de valor:

$$|Z(z)|_{\text{mín}} = R_m = \frac{1}{S} \quad (2.74)$$

Estos puntos se corresponden con la carta de Smith con el eje real (reactancia nula).

Por lo que se refiere a la carta de admitancias, ya hemos indicado más arriba que es la misma de impedancias girada  $180^\circ$ , y que lo ideal sería disponer de una malla doble como la de la figura 2.28. En la práctica, estas mallas dobles son muy engorrosas, y resulta más sencillo, para calcular el valor de la admitancia, leer el valor del opuesto por el origen en la misma carta de  $Z$  (fig. 2.30). En este caso, es necesario tener cuidado con los signos de la susceptancia  $B$  y recordar que son opuestos a los del valor correspondiente de  $X$ .



NAME	TITLE	DWG. NO. A
SMITH CHART FORM 82-BSPR (9-66)	KAY ELECTRIC COMPANY, PINE BROOK, N.J. © 1966, PRINTED IN U.S.A.	DATE

IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

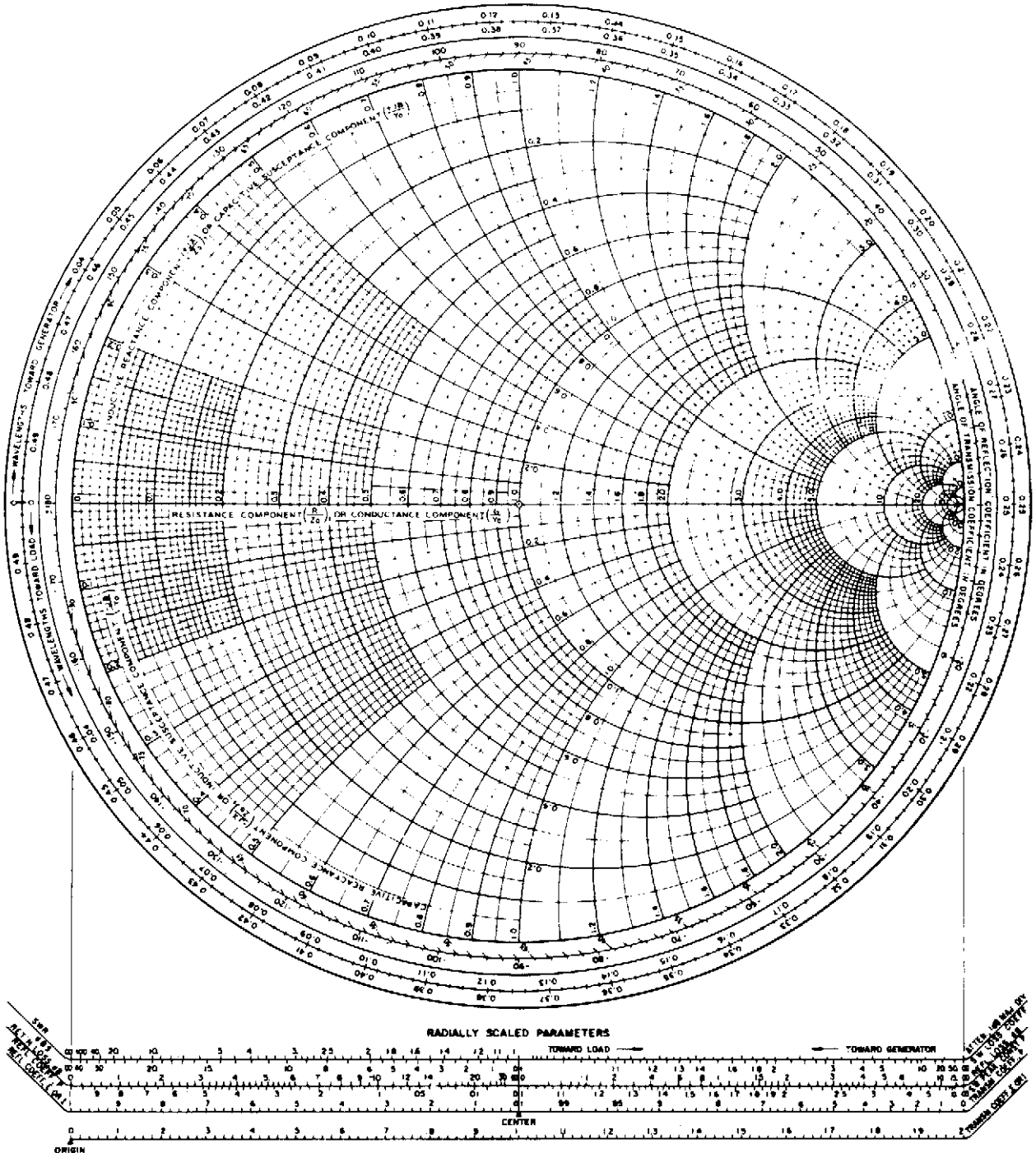


Fig. 2.27 Carta de Smith

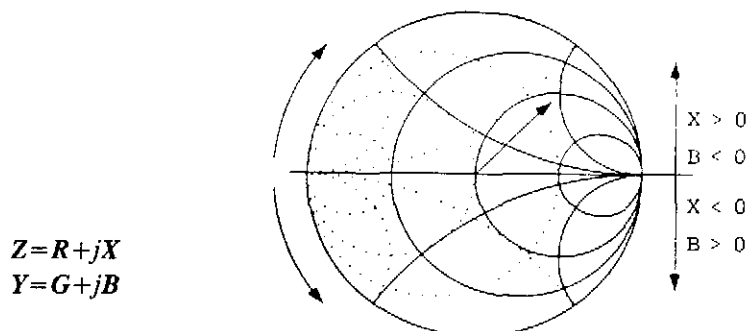


Fig. 2.28 Carta de Smith con mallas de líneas de  $Z$  (líneas continuas) y de  $Y$  (líneas discontinuas)

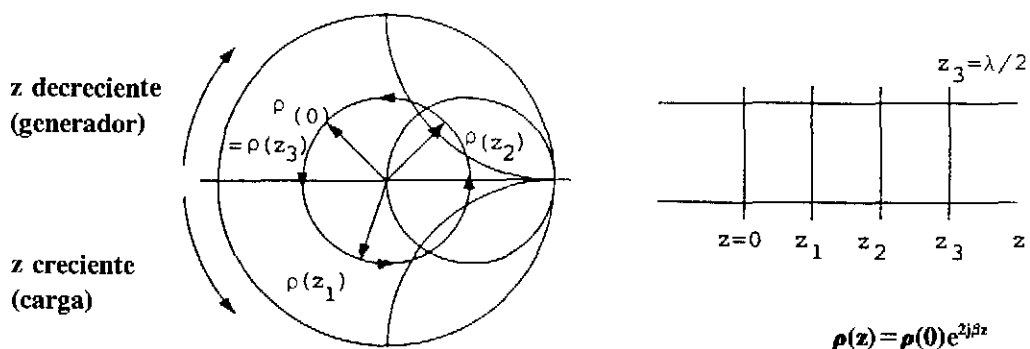


Fig. 2.29 Evolución de  $\rho(z)$  en la carta de Smith cuando nos movemos por toda la línea

**Ejemplo 1** El proceso básico en que se apoya el manejo de la carta de Smith es el siguiente: Supongamos una línea cargada con una impedancia (normalizada)  $Z = 1 + j$ . Este punto se localiza en la carta de Smith (punto  $A$ , fig. 2.30); el coeficiente de reflexión  $\rho$  viene dado en módulo y fase por el vector complejo  $OA$  (en este caso  $OA = 0,45 \cdot e^{j1,11}$ ). Si ahora nos movemos hacia el generador, en vista de (2.71) el punto representativo se mueve en la carta de Smith a lo largo de la circunferencia centrada en el origen y que pasa por  $A$  en el sentido de las agujas del reloj y que indica, para cada

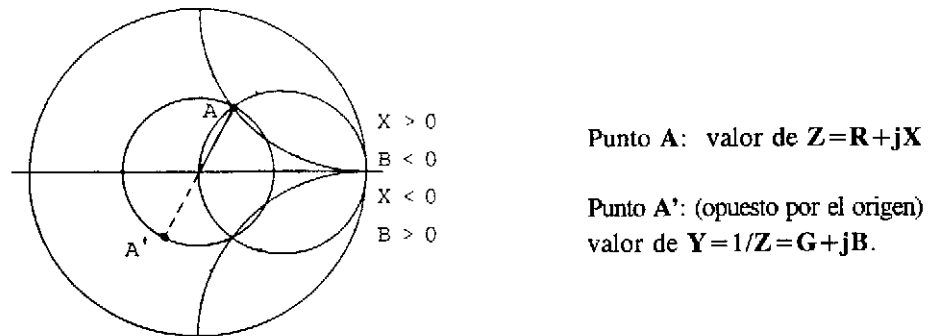


Fig. 2.30 Lectura del valor de la admitancia correspondiente a un punto A

valor de la posición en la línea,  $z$ , el correspondiente valor de la impedancia. Nótese que cuando se recorre  $\lambda/2$  el punto vuelve a la misma posición en la carta, lo que se corresponde con el hecho de que la impedancia a lo largo de la línea es periódica de período  $\lambda/2$ . ■

### Ejemplo 2 Determinación de impedancias en el laboratorio

Supongamos que en el laboratorio se hacen las siguientes medidas en una línea de transmisión de  $Z_0 = 50 \Omega$  a 500 Mhz:

$$|V|_{m\acute{a}x} = 6,0 \text{ V};$$

$$|V|_{m\acute{i}n} = 3,0 \text{ V};$$

distancia de un cierto mínimo de voltaje a la carga: 142,5cm.

Deseamos calcular el valor de la impedancia de carga  $Z_L$ .

En primer lugar obtenemos  $S$ :  $S = |V|_{m\acute{a}x} / |V|_{m\acute{i}n} = 2$ . De aquí podemos obtener  $|\rho| = (S-1)/(S+1) = 1/3$ , pero también podemos localizarlo directamente en la carta teniendo en cuenta que  $S = R_M$ , con lo que inmediatamente situamos el círculo en que hemos de movernos (fig. 2.31; punto A).

Por otra parte, a 500 Mhz ( $\lambda = 60$  cm), 142,5 cm son  $2\lambda + (3\lambda/8)$ , que a su vez, a efectos de impedancia, equivalen a  $3\lambda/8$ .

NAME	TITLE	DWG NO A
		DATE

IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

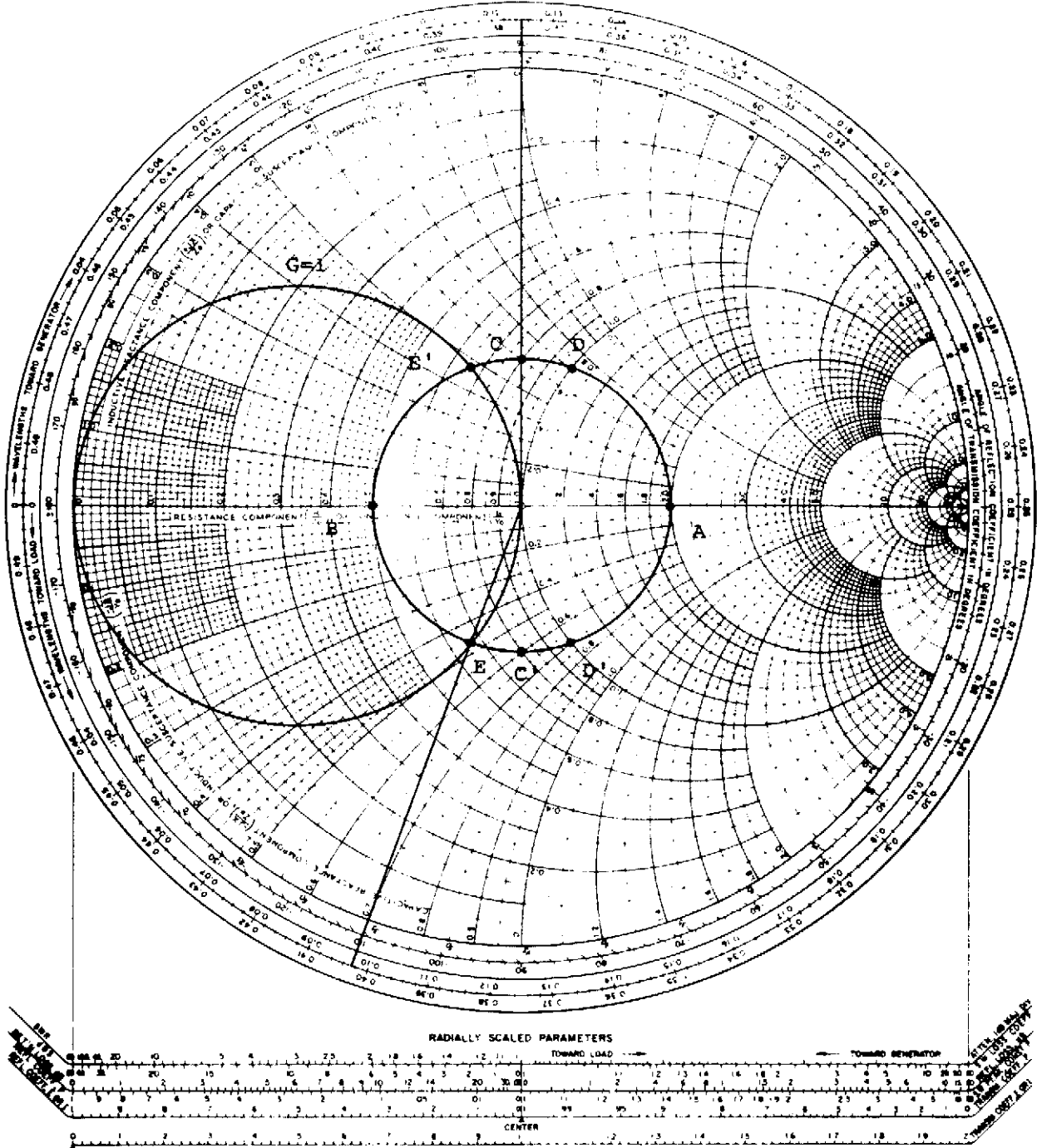


Fig. 2.31 Utilización básica de la carta de Smith para adaptar impedancias (ejemplo 2)

Localizando en la carta el punto correspondiente a un mínimo de voltaje (punto *B*, mínimo de impedancia) la impedancia de carga buscada se obtendrá girando en sentido contrario a las agujas del reloj el ángulo equivalente a  $3\lambda/8$  ( $3/4$  de circunferencia) hasta llegar a *C*; leemos entonces  $Z_L = (0,8 + j0,6)$ , es decir,  $Z_L = (40 + j30)\Omega$ . Si descamos el valor de la admitancia correspondiente podemos obtenerlo por lectura directa de la carta (punto *C'*):

$$Y_L = 0,8 - j0,6 = (16 - j12) \text{ mS.}$$

En muchos casos no es posible determinar con precisión la distancia entre la zona de medida y la carga. En este caso, si se sustituye ésta por un cortocircuito, basta, a efectos de cálculo de impedancias, con suponer la carga en un punto de tensión nula en la zona de medida, ya que la distancia de este punto a la carga será un número entero de semilongitudes de onda.

## 2.9 Adaptación de impedancias

Fijémonos en el punto *D* de la figura 2.31 del ejemplo anterior. Corresponde a todos los puntos de la línea que se encuentran a una distancia de  $0,027\lambda + n\lambda/2$ , con  $n=0,1,2,\dots$  y en ellos  $Z=1+j0,7$ . Si en uno cualquiera de estos puntos introducimos en serie con la línea una impedancia reactiva  $jX=-0,7$ , la línea queda adaptada (fig. 2.32), ya que inmediatamente a la izquierda de esta impedancia añadida tenemos:

$$Z = (1 + j0,7) - j0,7 = 1 \quad (2.75)$$

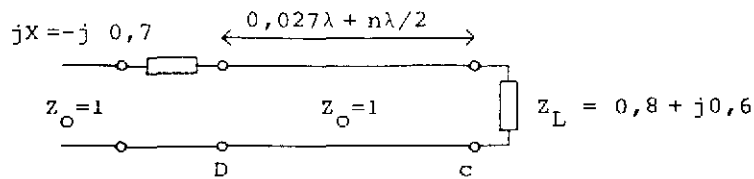
Hubiésemos podido proceder análogamente en los puntos de la línea correspondiente a *D'*; para ellos  $Z=1-j0,7$  y la impedancia que habría que añadir sería inductiva,  $jX=j0,7$ .

Este procedimiento de adaptar impedancias no suele ser, sin embargo, el más utilizado, ya que normalmente es más fácil introducir elementos en paralelo en una línea de transmisión que no en serie (que requiere la interrupción de los dos conductores de la línea). En este caso habríamos de fijarnos en el punto *E* (fig. 2.31) para el que  $Y=1+j0,7$ . El plano correspondiente se encuentra a  $0,277\lambda$  ( $+n\lambda/2$ ) de la carga y si en este plano añadimos en paralelo una susceptancia de valor  $jB=-j0,7$ , la admitancia vista inmediatamente a sus izquierda será  $Y=1$  (fig. 2.32) y la línea también quedará adaptada. Debe notarse que, al ser el elemento adaptador reactivo, tanto en un caso como en otro toda la potencia entregada por el generador a la línea de la izquierda es absorbida por  $Z_L$ . Sin embargo, en el trozo de la línea a la derecha de  $jX_s$  o  $jB_p$  existe una onda estacionaria con un coeficiente de reflexión:

$$\rho_L = \frac{Z_L - 1}{Z_L + 1} \quad (2.76)$$

También debemos decir que normalmente la susceptancia que se introduce se realiza con una sección de línea de transmisión con su extremo en cortocircuito o circuito abierto con la que, como vimos, se puede conseguir cualquier valor de reactancia variando la posición del cortocircuito o del circuito abierto.

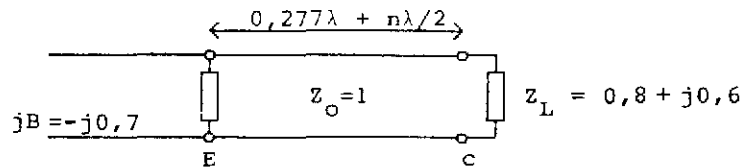
a)



$$Z_i = 1 + j0,7$$

$$Z = Z_i + jX = 1 + j0,7 - j0,7 = 1$$

b)

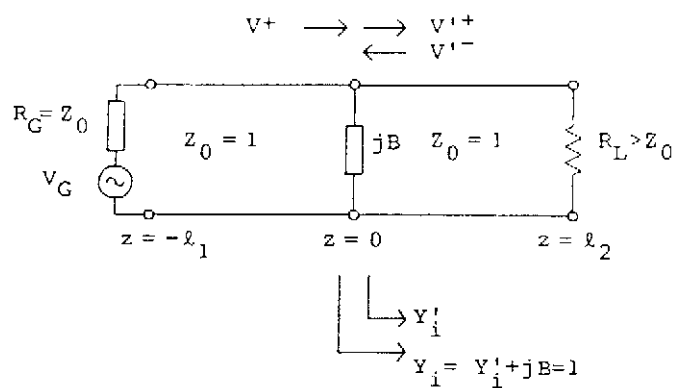


$$Y_i = 1 + j0,7$$

$$Y = Y_i + jB = 1 + j0,7 - j0,7 = 1$$

Fig. 2.32 Adaptación de impedancias en una línea. Adaptación con una reactancia en serie, a, y con una susceptancia en derivación, b. Los valores indicados hacen referencia al ejemplo de la figura 2.31.

**Ejemplo 1** Supongamos, para simplificar un poco las expresiones, que la impedancia de carga es resistiva y mayor que  $Z_0$ , de manera que  $\rho_L$  sea real y positivo (fig. 2.33). En el plano de  $jB$  ( $z=0$ ) tendremos:



$$\rho'_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} > 0$$

$$\rho'(0) = \frac{V'^-}{V'^+} = \rho'_L e^{-2jB l_2}$$

$$P = \frac{|V^+|^2}{2}$$

$$P' = \frac{1}{2} (|V'^+|^2 - |V'^-|^2) = \frac{|V'^+|^2}{2} (1 - |\rho'_L|^2)$$

Fig. 2.33 Circuito utilizado como ejemplo en el apartado 2.9. Se supone que  $jB$  adapta  $R_L$  a la línea

$$\rho'(0) = \frac{V'^-}{V'^+} = \rho'_L e^{-2j\beta \ell_2} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} Y_i &= \frac{1 - \rho'_L e^{2j\beta \ell_2}}{1 + \rho'_L e^{-2j\beta \ell_2}} = \frac{(1 - \rho'_L e^{2j\beta \ell_2})(1 + \rho'_L e^{2j\beta \ell_2})}{(1 + \rho'_L e^{-2j\beta \ell_2})(1 + \rho'_L e^{2j\beta \ell_2})} = \\ &= \frac{1 - \rho'^2_L + 2j\rho'_L \sin 2\beta \ell_2}{1 + \rho'^2_L + 2\rho'_L \cos 2\beta \ell_2} = 1 - jB \quad (2.78) \end{aligned}$$

De manera que :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \rho'^2_L}{1 + \rho'^2_L + 2\rho'_L \cos 2\beta \ell_2} &= 1 \\ -B &= \frac{2\rho'_L \sin 2\beta \ell_2}{1 + \rho'^2_L + 2\rho'_L \cos 2\beta \ell_2} = \frac{2\rho'_L \sin 2\beta \ell_2}{1 - \rho'^2_L} \quad (2.79) \end{aligned}$$

De la primera también se obtiene:

$$\cos 2\beta \ell_2 = -\rho'_L \quad (2.80)$$

ecuación que, evidentemente, tiene dos soluciones (puntos  $E$  y  $E'$  de la figura 2.31). Si por ejemplo escogemos la que se encuentra en el segundo cuadrante ( $90^\circ < 2\beta \ell_2 < 180^\circ$ ), de manera que el  $\sin(2\beta \ell_2)$  sea positivo, resulta:

$$\sin(2\beta \ell_2) = \sqrt{1 - \cos^2(2\beta \ell_2)} = \sqrt{1 - \rho'^2_L} \quad (2.81)$$

y, por tanto,

$$B = -\frac{2\rho'_L}{\sqrt{1 - \rho'^2_L}} \quad (2.82)$$

Este resultado pone de manifiesto la propiedad evidente en la carta de Smith (fig. 2.31) de que si el coeficiente de reflexión a adaptar es próximo a la unidad, la reactancia necesaria toma valores muy



grandes. En este caso además sucede que la adaptación es muy sensible a la frecuencia, y pequeñas variaciones de esta desadaptan fuertemente la línea.

Consideremos ahora el balance de potencia en ambos trozos de línea:

$$P = \frac{|V^+|^2}{2} \quad P' = \frac{1}{2} (|V'^+|^2 - |V'^-|^2) = \frac{|V'^+|^2}{2} (1 - |\rho'_L|^2) \quad (2.83)$$

Por continuidad de tensiones en  $z=0$ :

$$V' = V'^+ + V'^- = V'^+ (1 + \rho'(0)) = V'^+ (1 + \rho'_L e^{-2j\beta \ell_2}) \quad (2.84)$$

de manera que:

$$|V'^+|^2 = \frac{|V^+|^2}{|1 + \rho'_L e^{-2j\beta \ell_2}|^2} = \frac{|V^+|^2}{1 + \rho'^2_L + 2\rho'_L \cos(2\beta \ell_2)} \quad (2.85)$$

expresión que, en vista de (2.79), también se puede escribir

$$|V'^+|^2 = \frac{|V^+|^2}{1 - \rho'^2_L} \quad (2.86)$$

de manera que  $P=P'$ , como era de esperar.

Junto al procedimiento de adaptación expuesto, existen otros utilizados también muy frecuentemente que expondremos a continuación:

#### 1) Transformador en $\lambda/4$

Hemos visto anteriormente la propiedad inversora de impedancias de una sección de línea en  $\lambda/4$ . De esta manera, una carga resistiva  $R_L$  puede adaptarse a una línea de impedancia característica  $Z_0$  mediante una de estas secciones (transformador en  $\lambda/4$ ) de impedancia característica  $(Z_0')^2 = Z_0 R_L$  (fig. 2.34a).

Si la carga no es resistiva existen dos opciones. Una consiste en insertar el transformador en un plano donde la impedancia de entrada sea resistiva (planos 1 o 2, fig. 2.34b). La otra consiste en cancelar la parte reactiva de la impedancia de carga con un elemento reactivo en serie o en paralelo y añadir después el transformador (fig. 2.34c).

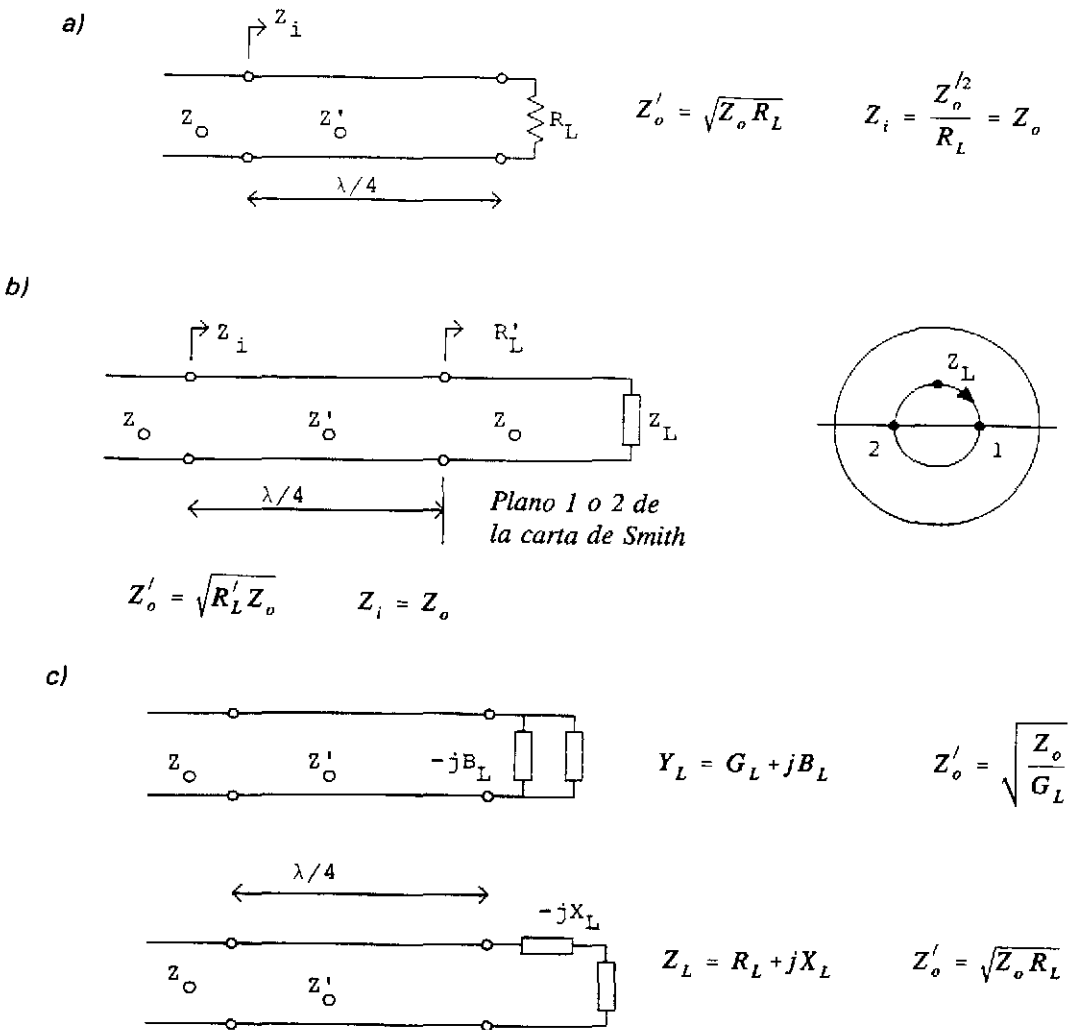


Fig. 2.34 Adaptación de impedancias con transformadores en  $\lambda/4$ :

- a) De una carga resistiva
- b) De una carga compleja
- c) Idem por cancelación de la parte reactiva y reducción al caso a

2) Sintonizador doble

En este caso se disponen en la línea, en posiciones fijas, dos reactancias variables, normalmente construidas con secciones de línea en cortocircuito de longitud variable. De esta manera, si se cambia la impedancia de carga o se varía la frecuencia, la adaptación puede rehacerse cambiando solamente la posición de los cortocircuitos de las líneas conectadas en paralelo.

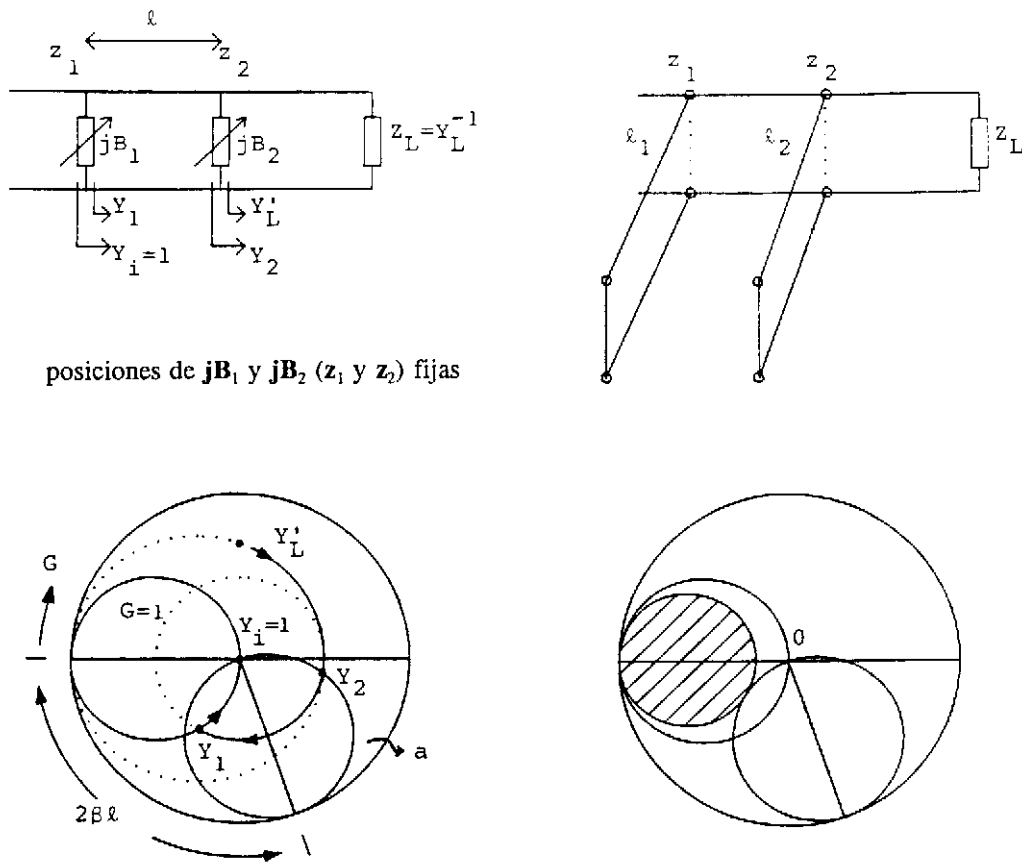


Fig. 2.35 Adaptación de una impedancia con un sintonizador doble. La zona rayada es el lugar geométrico de las  $Y_L'$  que no se pueden adaptar

El procedimiento de adaptación es sencillo de comprender con la ayuda de la carta de Smith (fig. 2.35). En primer lugar, manejaremos el valor de admitancia  $Y_L'$  en el plano  $z_2$ , ya que su transformación desde  $Y_L$  en la carta de Smith es evidente. En segundo lugar, es necesario dibujar el círculo  $a$  obtenido de girar el  $G=1$  la distancia  $\ell$  en dirección hacia la carga.

Consideramos ahora la admitancia vista inmediatamente a la izquierda de  $jB_2$ :

$$Y_2 = Y_L' + jB_2 \quad (2.87)$$

Este valor estará situado sobre el círculo de  $G$  constante que pasa por  $Y_L'$ . Si hacemos que  $jB_2$  sea tal que  $Y_2$  esté también en el círculo  $a$ , la admitancia  $Y_1$ , vista desde la derecha de  $jB_1$ , estará situada

sobre el círculo  $G=1$  (por la propia construcción del círculo  $a$ ). Es decir:

$$Y_i = 1 + jB \quad (2.88)$$

y solo queda hacer  $B_i = -B$  para conseguir la adaptación que buscábamos.

En este proceso es evidente la necesidad de que el círculo de  $G=\text{cte}$  que pasa por  $Y_L$  corte al círculo  $a$ . Por tanto, todas las admitancias  $Y_L$  que estén en el interior del círculo de  $G=\text{cte}$  tangente al círculo  $a$  no podrán ser adaptadas (fig. 2.35, zona rayada).

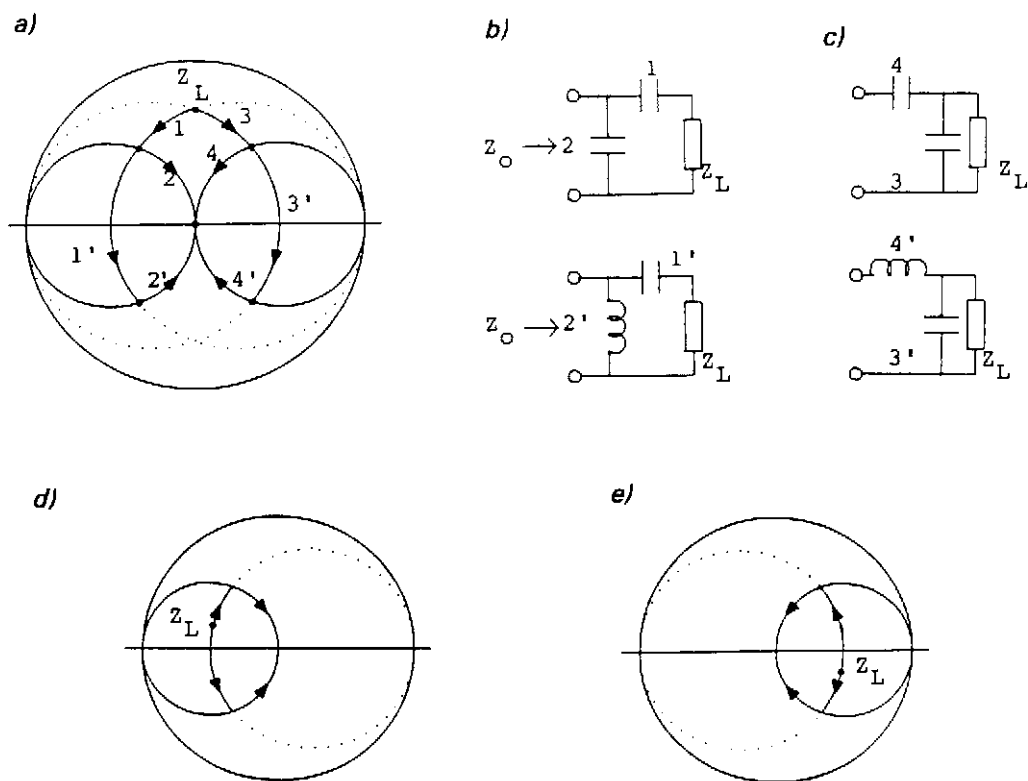
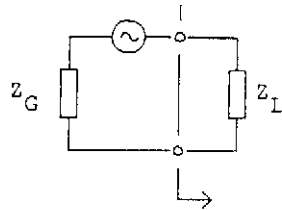


Fig. 2.36 Adaptación de impedancias con redes reactivas en L:

- a) Caminos posibles dibujados sobre la carta de Smith que conducen a dos soluciones en serie y en paralelo (1-2, 1'-2', fig. b) o dos soluciones en paralelo y en serie (3-4, 3'-4', fig. c)
- d) Situación en la que desaparecen las soluciones en paralelo y en serie ( $G_L > 1$ )
- e) Situación en la que desaparecen las soluciones en serie y en paralelo ( $R_L > 1$ )



Máxima transferencia de potencia si  $Z_L = Z_G^*$

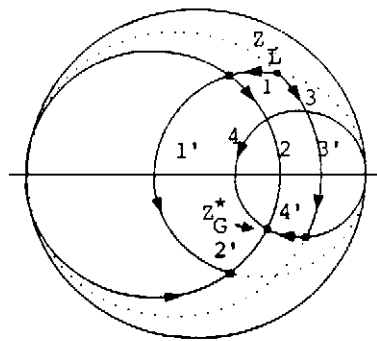


Fig. 2.37 Modificación del proceso de adaptación de la figura anterior para conseguir adaptación de máxima transferencia de potencia a un generador arbitrario. Nótese que la impedancia de referencia ( $Z_0$ ) es irrelevante en este problema

### 3) Redes reactivas en $L$

Recordemos que, si a una carga  $Z_L$  le añadimos una reactancia en serie, el punto representativo sobre la carta de Smith se mueve sobre el círculo de  $R$  constante que pasa por  $Z_L$ ; y si la añadimos en paralelo, lo hace sobre el círculo de  $G$  constante.

Con estas normas básicas la figura 2.36 es autoexplicativa; la adición sucesiva de elementos en serie y en paralelo o viceversa nos lleva de  $Z_L$  al origen ( $\rho=0$ ) a través de líneas de  $R$  constante- $G$  constante, si los valores de las reactancias se eligen adecuadamente. Se obtienen así cuatro posibles soluciones de redes adaptadoras.

Sin embargo, si la impedancia a adaptar está dentro del círculo de  $G=1$  (fig. 2.36d), o dentro del de  $R=1$  (fig. 2.36e), es evidente que el número de posibles redes solución se reduce a solamente dos.

## 2.10 Comportamiento con la frecuencia

Hasta ahora, los procesos de adaptación de impedancias los hemos realizado a frecuencia constante, sin ocuparnos de su comportamiento al variar ésta. Como ejemplo consideremos la figura 2.38 en la que se muestra un transformador en  $\lambda/4$  a la frecuencia  $f_0$ , y estudiemos cómo cambia el coeficiente de reflexión en la línea de entrada inmediatamente antes del transformador,  $\rho_1$ .

Tendremos que:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{Z_i - Z_{01}}{Z_i + Z_{01}} \quad ; \quad Z_i = Z_{02} \frac{1 + \rho_i}{1 - \rho_i} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_1 &= \frac{Z_{02}(1 + \rho_i) - Z_{01}(1 - \rho_i)}{Z_{02}(1 + \rho_i) + Z_{01}(1 - \rho_i)} = \\ &= \frac{(Z_{02} - Z_{01}) + \rho_i(Z_{02} + Z_{01})}{(Z_{02} + Z_{01}) + \rho_i(Z_{02} - Z_{01})} = \frac{\rho_1^0 + \rho_i}{1 + \rho_1^0 \rho_i} \end{aligned} \quad (2.89)$$

donde hemos definido:

$$\rho_1^0 \equiv \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (2.90)$$

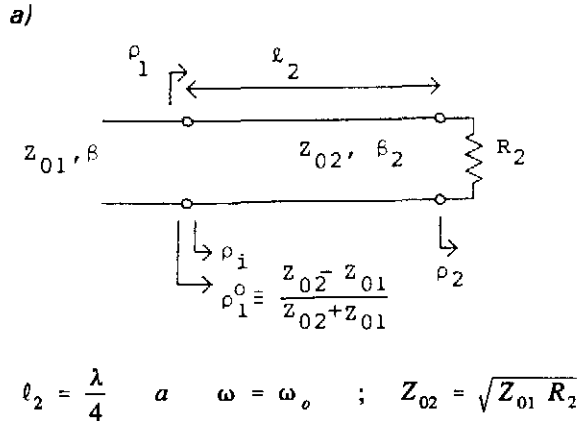
Nótese ahora que:

$$\rho_i = \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2} \quad (2.91)$$

al cambiar la frecuencia describe sobre la carta de Smith un círculo de radio  $|\rho_2|$  (fig. 2.38b, donde se ha supuesto  $R_2 > Z_{02}$  para fijar ideas). Por tanto, dado que  $\rho_1^0$  es constante y (2.89) es, por tanto, una transformación bilineal,  $\rho_1$  también describe un círculo en la carta de Smith cuando cambia la frecuencia (fig. 2.38c), de tal manera que para  $\omega = \omega_0$  (línea en  $\lambda/4$ ) la línea de entrada está adaptada (centro de la carta de Smith).

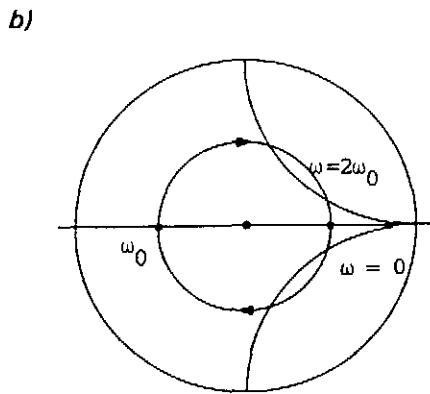
Si bien la terminación del problema de manera exacta no supone complicación grave, es conveniente en este punto hacer la aproximación de que los coeficientes de reflexión implicados son pequeños; concretamente que:

$$|\rho_1^0| \ll 1 \quad , \quad |\rho_2| \ll 1$$



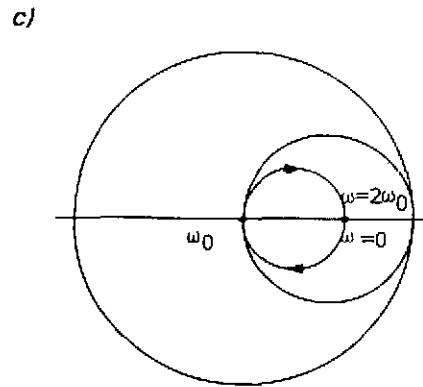
$$\rho_i = \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2} \quad \rho_2 = \frac{R_2 - Z_{02}}{R_2 + Z_{02}}$$

$$\rho_1 = \frac{Z_i - Z_{01}}{Z_i + Z_{01}} = \frac{\rho_1^0 + \rho_i}{1 + \rho_1^0 \rho_i} = \frac{\rho_1^0 + \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2}}{1 + \rho_1^0 \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2}}$$



$$\rho_i = \rho_2 e^{-2j\beta_2 l_2}$$

(Suponiendo  $R_2 > Z_{02}$ )  
 $\omega_0$  tal que  $\beta_2(\omega_0)l_2 = \pi/2$



$$\rho_1 = \frac{\rho_1^0 + \rho_i}{1 + \rho_1^0 \rho_i}$$

(Suponiendo  $R_2 > Z_{02} > Z_{01}$ )

Fig. 2.38 Comportamiento con la frecuencia de un transformador en  $\lambda/4$ :

- a) Definiciones y relaciones básicas
- b) Evolución de  $\rho_i$  con la frecuencia en la carta de Smith
- c) Idem para  $\rho_1$

de manera que:

$$1 + \rho_1^0 \rho_i = 1 + \rho_1^0 \rho_2 e^{-2j\beta_2 \ell_2} \approx 1 \quad (2.92)$$

En este caso, (2.89) se simplifica a:

$$\rho_1 = \rho_1^0 + \rho_i = \rho_1^0 + \rho_2 e^{-2j\beta_2 \ell_2} \quad (2.93)$$

La representación gráfica en la carta de Smith continúa siendo un círculo (fig. 2.39), pero más fácil de interpretar que en el caso general.

Con este grado de aproximación es evidente que, para conseguir adaptación (suponemos  $R_2 > Z_{02} > Z_{01}$ ):

$$\rho_1^0 = \rho_2 \quad \rightarrow \quad \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{R_2 - Z_{02}}{R_2 + Z_{02}} \quad \rightarrow \quad \frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \frac{R_2}{Z_{02}} \quad (2.94)$$

es decir,  $Z_{02} = \sqrt{Z_{01} R_2}$ . Además de (2.93) también se obtiene:

$$\begin{aligned} |\rho_1| &= \rho_1^0 |1 + e^{-2j\beta_2 \ell_2}| = \rho_1^0 |e^{j\beta_2 \ell_2} + e^{-j\beta_2 \ell_2}| |e^{-j\beta_2 \ell_2}| = \\ &= 2 \rho_1^0 |\cos \beta_2 \ell_2| \quad (2.95) \end{aligned}$$

Con esta expresión es fácil calcular el ancho de banda del transformador para un valor máximo permitido de  $|\rho|$ ,  $|\rho|_M$  (fig. 2.39).

**Ejemplo 1** Supongamos la adaptación de 75Ω a 50Ω ( $R_2=75\Omega$ ,  $Z_{01}=50\Omega$ ). En este caso:

$$\begin{aligned} Z_{02} &= \sqrt{50 \cdot 75} = 61,24 \Omega \\ \rho_1^0 = \rho_2 &= 0,101 \quad |\rho_1^0 \rho_2| = 0,010 \quad (2.96) \end{aligned}$$

Resulta,  $\rho_1(\omega=0) = 2\rho_1^0 = 0,202$  (el valor exacto es 0,2). Si fijamos un valor máximo permitido  $|\rho|_M$  el ancho de banda relativo es:



$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{2(\omega_0 - \omega_1)}{\omega_0} = 2 \left| 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{|\rho|_M}{2\rho_1^0} \right) \right| = \\
 &= 2 \frac{\beta_0 \ell_2 - \beta_1 \ell_2}{\beta_0 \ell_2} = 2 \frac{\Delta(\beta \ell_2)}{\beta_0 \ell_2} \quad (2.97)
 \end{aligned}$$

y, en particular,

$$\begin{aligned}
 |\rho|_M = 0,01 & \quad - \quad B = 6,3 \% \\
 |\rho|_M = 0,02 & \quad - \quad B = 12,62 \% \\
 |\rho|_M = 0,05 & \quad - \quad B = 31,85 \% \quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Observemos lo siguiente: el transformador también funcionaría a la frecuencia  $\omega_0$  si en lugar de  $\lambda/4$  tuviera  $3\lambda/4 = (\lambda/4) + (\lambda/2)$  de longitud y, en general, si tuviese  $(\lambda/4) + (n\lambda/2)$ . En cambio, en el caso  $3\lambda/4$ , por ejemplo, la variación de  $|\rho_1|$  con la frecuencia es más rápida (fig. 2.39, línea de puntos) y, por tanto, el ancho de banda conseguido sería menor. Para concretar, se puede comprobar que se reduce a un tercio del valor anterior, ya que a (2.97) el numerador  $\Delta(\beta \ell_2)$  (en radianes) continúa tomando el mismo valor mientras que el denominador pasa de valer  $\pi/2$  a valer  $3\pi/2$ .

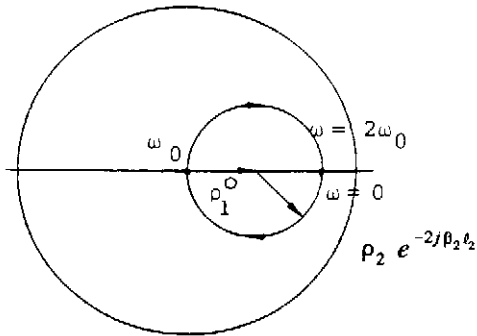
Esta conclusión es completamente general; el ancho de banda de las estructuras en que intervienen líneas de transmisión se reduce proporcionalmente a su longitud cuando se añade un número entero de semilongitudes de onda. Es evidente que, si en lugar de una sección en  $\lambda/4$  ponemos varias, aumentamos los grados de libertad del sistema y así podremos modificar el ancho de banda de la adaptación, definido este como en el ejemplo anterior. En particular, podremos aumentar el número de ceros de  $|\rho|$ , como indicamos en el siguiente ejemplo.

Respecto a la figura 2.40, consideremos dos secciones en  $\lambda/4$  a la frecuencia  $\omega_0$ , las dos con la misma constante de propagación, para simplificar. Con las mismas definiciones y aproximaciones anteriores tendremos:

$$\rho_2 = \rho_2^0 + \rho_3 e^{-2j\beta \ell} \quad (2.98)$$

$$\rho_1 = \rho_1^0 + \rho_2 e^{-2j\beta \ell} = \rho_1^0 + \rho_2^0 e^{-2j\beta \ell} + \rho_3 e^{-4j\beta \ell}$$

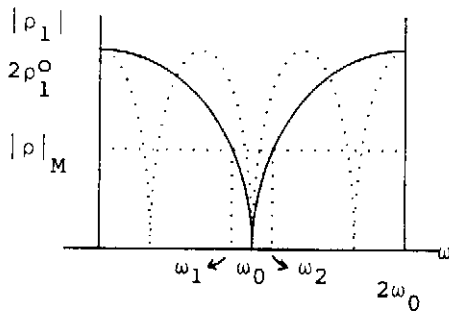
$$\rho_1 = \rho_1^0 + \rho_2^0 s + \rho_3 s^2 \quad \text{con} \quad s = e^{-2j\beta \ell} \quad (2.99)$$



$$\rho_1 = \frac{\rho_1^0 + \rho_2 e^{-2j\beta_2 \ell_2}}{1 + \rho_1^0 \rho_2 e^{-2j\beta_2 \ell_2}} \approx$$

$$\approx \rho_1^0 + \rho_2 e^{-2j\beta_2 \ell_2}$$

(si  $|\rho_1^0 \rho_2| \ll 1$ )

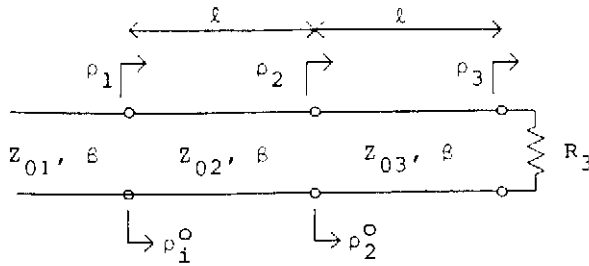


$$|\rho_1| = \rho_1^0 |1 + e^{-2j\beta_2 \ell_2}| =$$

$$= 2 \rho_1^0 |\cos \beta_2 \ell_2|$$

(Suponiendo  $R_2 > Z_{02} > Z_{01}$ )

Fig. 2.39 Versión del círculo  $\rho_1$  de la figura anterior para el caso de reflexiones pequeñas y representación gráfica del módulo del coeficiente de reflexión en función de la frecuencia



$$\rho_i^o = \frac{Z_{oi+1} - Z_{oi}}{Z_{oi+1} + Z_{oi}}$$

$$(i = 1, 2) ; \rho_3^o = \rho_3$$

$$\rho_1 = \rho_1^o + \rho_2 e^{-2j\beta l}$$

$$\rho_2^o = \rho_2 + \rho_3 e^{-2j\beta l}$$

$$\rho_1 = \rho_1^o + \rho_2^o S + \rho_3^o S^2 \quad \text{con} \quad S = e^{-2j\beta l}$$

(Supondremos  $R_3 > Z_{03} > Z_{01}$  de manera que los  $\rho_i^o$  sean positivos)

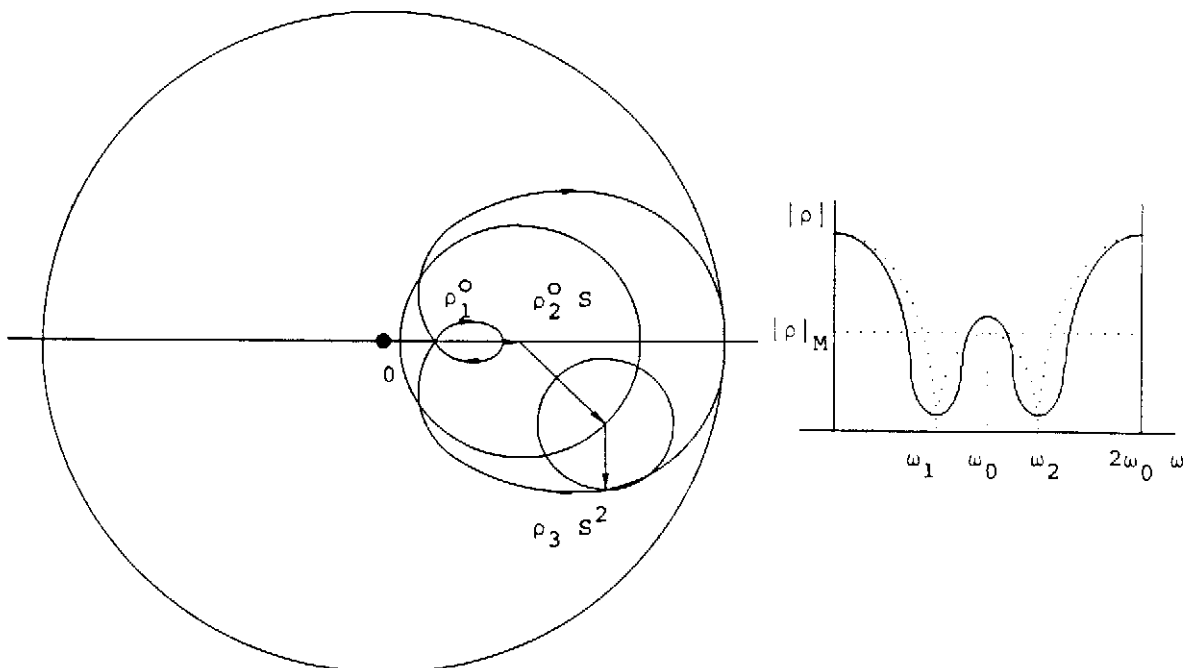


Fig. 2.40 Transformador de dos secciones, construcción gráfica en la carta de Smith para obtener el coeficiente de reflexión, y presentación gráfica de  $|\rho|$  (línea sólida). La línea de puntos para  $|\rho|$  representa el caso particular de comportamiento con dos ceros

De esta manera,  $\rho_1$ , sobre la carta de Smith, viene dado por la composición de tres vectores  $\rho_1^0$  (fijo),  $\rho_2^0$ , que gira a razón de una vuelta completa para  $0 < \omega < 2\omega_0$ , y  $\rho_3$ , que gira dos vueltas completas en el mismo margen (en la figura se representa el caso  $R_3 > Z_{03} > Z_{02} > Z_{01}$ , de manera que  $\rho_3, \rho_2, \rho_1 > 0$ ). Es evidente de la construcción gráfica que  $\rho_1$  describe una cicloide (en un proceso del todo idéntico al que, en el sistema de Ptolomeo, los astrónomos hacían girar a los planetas para explicar sus aparentes complejas trayectorias), y se comprende la aparición de bucles en la trayectoria, que volveremos a encontrar más adelante, al hablar de circuitos resonantes.

Volviendo al ejemplo, si queremos tener dos ceros de  $|\rho|$  (línea de puntos, fig. 2.40), es decir, si queremos que el vértice del bucle pase por el origen de la carta de Smith, es necesario que:

$$\rho_1^0 + \rho_2^0 s + \rho_3 s^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{-\rho_2^0 \pm \sqrt{(\rho_2^0)^2 - 4\rho_1^0\rho_3}}{2\rho_3} \quad (2.100)$$

Pero  $s$  debe ser complejo y de módulo unidad:

$$(\rho_2^0)^2 < 4\rho_1^0\rho_3$$

$$|s|^2 = \left(\frac{\rho_2^0}{2\rho_3}\right)^2 + \frac{4\rho_1^0\rho_3 - (\rho_2^0)^2}{(2\rho_3)^2} = \frac{\rho_1^0}{\rho_3} = 1 \quad (2.101)$$

Así pues, tendremos:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_1^0(1 + e^{-4j\beta\ell}) + \rho_2^0 e^{-2j\beta\ell} = \\ &= e^{-2j\beta\ell} \left| \rho_1^0(e^{2j\beta\ell} + e^{-2j\beta\ell}) + \rho_2^0 \right| \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} |\rho_1|^2 &= (\rho_2^0 + 2\rho_1^0 \cos 2\beta\ell)^2 \\ |\rho_1| &= |\rho_2^0 + 2\rho_1^0 \cos 2\beta\ell| \end{aligned} \quad (2.103)$$

mientras que:

$$|\rho_1|_M = |\rho_1(\omega_0)| = |\rho_1^0 - \rho_2^0 + \rho_3^0| = |2\rho_1^0 - \rho_2^0| \quad (2.104) \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 2** Supongamos, como en el ejemplo 1,  $Z_{01}=50\Omega$  y  $R_L=R_3=75\Omega$ , y  $|\rho|_M=0.01$ .

**Ejemplo 2** Supongamos, como en el ejemplo 1,  $Z_{01}=50\Omega$  y  $R_1=R_3=75\Omega$ , y  $|\rho|_M=0,01$ . Tendremos que (nótese que  $\rho_1, \rho_2$  y  $\rho_3 > 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \rho_1^0 + \rho_2^0 + \rho_3^0 &= \rho_2^0 + 2\rho_1^0 = \frac{75-50}{75+50} = 0,2 \\ 2\rho_1^0 - \rho_2^0 &= 0,01 \\ \rho_1^0 &= 0,0525 = \rho_3^0 \\ \rho_2^0 &= 0,095 \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

Para el ancho de banda ( $\omega_1$ =extremo inferior de la banda, fig. 2.40):

$$\begin{aligned} |\rho_1|_M &= \rho_2^0 + 2\rho_1^0 \cos(2\beta_1 \ell) \\ \cos(2\beta_1 \ell) &= \frac{|\rho_1|_M - \rho_2^0}{2\rho_1^0} \quad \Rightarrow \quad \beta_1 \ell = 72,02^\circ \\ B &= 2 \frac{90^\circ - 72,02^\circ}{90^\circ} 100 = 39,95 \% \end{aligned} \quad (2.106)$$

Compárese con un único transformador (ejemplo 1), donde para el mismo valor de  $|\rho_1|_M$  se obtenía  $B=6,3\%$ .

Si hubiésemos optado por hacer los dos ceros de  $|\rho_1|$  coincidentes en  $\omega=\omega_0$  (cero doble):

$$|\rho_1(\omega_0)| = 2\rho_1^0 - \rho_2^0 = 0$$

por tanto:

$$\left. \begin{aligned} 2\rho_1^0 + \rho_2^0 &= 0,2 \\ 2\rho_1^0 - \rho_2^0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\rho_1^0 = 0,050 \quad \rho_2^0 = 0,10$$

$$\cos(2\beta\ell) = \frac{|P_1|_M - \rho_2^0}{2\rho_1^0} \Rightarrow \beta_1\ell = 77,08^\circ \quad ; \quad B = 28,71\% \quad (2.107)$$

Lo que acabamos de hacer no es más que un ejemplo sencillo de síntesis de  $|\rho_1|$  con respuesta de Chebychev (ceros diferentes, rizado constante) o Butterworth (ceros múltiples, con respuesta maximalmente plana). La teoría general de síntesis de transformadores múltiples de impedancias es sencilla y puede encontrarse en textos de microondas más avanzados.

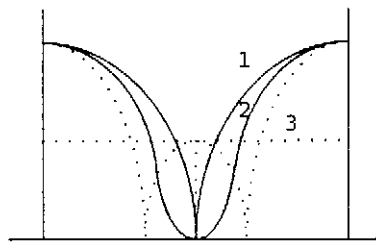


Fig. 2.41 Respuesta de un transformador sencillo (1), doble con dos ceros separados (2) (Chebychev), y doble con dos ceros coincidentes (3) (Butterworth)

## Capítulo 3 Líneas de transmisión (II). Pérdidas, dispersión y líneas más comunes

### 3.1 Introducción

Hasta ahora hemos considerado líneas ideales, es decir, hemos ignorado la resistencia de los conductores y la posible conductividad (pequeña, pero presente) del medio dieléctrico. De manera que en lugar de la célula elemental de la figura 2.3 se debería considerar más correctamente la de la figura 3.1a, donde  $R$  y  $G$  representan la resistencia de los conductores por unidad de longitud (es decir, la resistencia que ofrece el bucle formado por los dos conductores de 1 metro de línea) y la conductancia por unidad de longitud, respectivamente. Veremos que una de las consecuencias de la presencia de pérdidas en la línea es la aparición de *dispersión*, es decir, que señales senoidales de frecuencia diferentes se propagan con velocidades de fase también diferentes. Por otra parte existen otros sistemas de propagación de energía (guías de onda) que presentan dispersión incluso en el caso ideal sin pérdidas. Estas guías pueden modelarse, a efectos de propagación, por una línea de transmisión hipotética con célula elemental como en las figuras 3.1b o 3.1c. Tanto en este caso como en el anterior, ambas líneas de transmisión corresponden, a efectos de estudio en régimen senoidal permanente (al que nos limitaremos; el estudio en el dominio del tiempo puede hacerse, cuando interese, con ayuda de la transformación de Fourier), al tipo de línea más general cuya célula básica presentase impedancia serie  $Z$  y admitancia paralelo  $Y$ , ambas por unidad de longitud (fig. 3.1d).

### 3.2 Línea con célula elemental general

Refiriéndonos a la figura 3.1d con el mismo convenio de sentidos de voltajes y corrientes de la figura 2.3, los efectos de la impedancia en serie y admitancia en paralelo se traducen en una caída de tensión y una derivación de corrientes dadas por:

$$dV = -(Zdz)I$$

$$dI = -(Ydz)V$$

o bien:

$$\frac{dV}{dz} = -ZI \quad (3.1)$$

$$\frac{dI}{dz} = -YV \quad (3.2)$$

Las derivadas son totales porque no consideramos la variación temporal  $e^{j\omega t}$  explícitamente. Estas dos últimas fórmulas son equivalentes a la (2.2) y la (2.3) en el caso de variación senoidal, como puede comprobarse fácilmente.

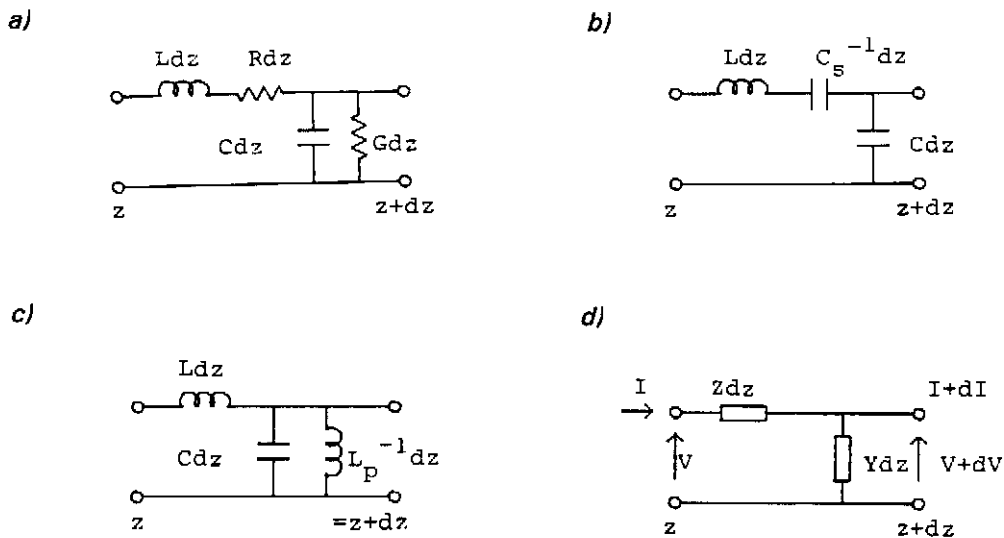


Fig. 3.1 a) Célula elemental para una línea de transmisión con pérdidas  
 b) y c) idem para las líneas hipotéticas que describen la propagación en guía de ondas  
 d) Célula básica general que en régimen senoidal, resume los dos casos anteriores



En (3.1) y (3.2) se puede eliminar la corriente por derivación, por ejemplo, con lo que se obtiene:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = (ZY)V \quad (3.3)$$

ecuación diferencial con soluciones de la forma  $e^{\mp\gamma z}$ :

$$V = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \quad (3.4)$$

con  $\gamma$  (constante de propagación) definida por:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY} \quad (3.5)$$

(se toma por convenio el signo de la raíz que proporcione un valor positivo de  $\alpha$ ) y, por sustitución de (3.4) en (3.1), se obtiene:

$$I = \frac{1}{Z_0} (V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{\gamma z}) \quad (3.6)$$

con  $Z_0$  (impedancia característica) dada por:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = R_0 + jX_0 \quad (3.7)$$

Se observa que estas fórmulas son idénticas a las obtenidas en el caso de la línea ideal sin más que asignar a la constante de propagación y a la impedancia característica los valores (3.5) y (3.7), valores que antes eran reales ( $Z_0$ ) o bien imaginarios puros ( $\gamma$ ) y ahora, en el caso más general serán complejos.

En el caso de  $\gamma$ ,  $\beta$  es la constante de fase y sus dimensiones (como anteriormente) son de radian/metro (aunque el radián carece de dimensiones). Análogamente,  $\alpha$  es la constante de atenuación y tiene dimensiones de  $(\text{metro})^{-1}$ , si bien, como en el caso de los radianes, se introduce la unidad sin dimensiones de *neper* para el producto  $\alpha z$ , de manera que a  $\alpha$  le asignamos neper/metro.

Todas las fórmulas obtenidas para la línea ideal pueden, por tanto, generalizarse sin más que tener en consideración el carácter complejo de  $\gamma$  y  $Z_0$ . Por ejemplo, la impedancia de entrada de una sección de línea de longitud  $\ell$  cargada con  $Z_L$  viene dada por:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L \cosh(\gamma \ell) + Z_0 \sinh(\gamma \ell)}{Z_0 \cosh(\gamma \ell) + Z_L \sinh(\gamma \ell)} = Z_0 \tanh(\gamma \ell + \delta_Z) \quad (3.8)$$

donde

$$\delta_Z = \tanh^{-1} \left( \frac{Z_L}{Z_0} \right) \quad (3.9)$$

Asimismo, el coeficiente de reflexión en función de la posición vale:

$$\rho(z) = \rho(0) e^{2\gamma z} = \rho(0) e^{2\alpha z} e^{2j\beta z} \quad (3.10)$$

y, por tanto, su representación en la carta de Smith son espirales logarítmicas (el módulo del vector cambia de magnitud a medida que gira) en lugar de circunferencias.

En la tabla 3.1 se resumen algunas de las propiedades importantes de las funciones hiperbólicas que manejaremos con frecuencia en lo sucesivo.

Desde el punto de vista físico, el efecto más notable de una constante de propagación compleja es la aparición de atenuación. Para una onda positiva tendremos:

$$V(z) = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (3.11)$$

o, en el dominio del tiempo:

$$v(z,t) = |V^+| e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \phi^+) \quad (3.12)$$

**Tabla 3.1** Propiedades de las funciones hiperbólicas ( $z=x+jy$ )

<i>Funciones hiperbólicas</i>
$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
$\sinh(jy) = j \sin y$
$\cosh(jy) = \cos y$
$\tanh(jy) = j \tan y$
$\sinh(z \pm w) = \sinh z \cdot \cosh w \pm \cosh z \cdot \sinh w$
$\cosh(z \pm w) = \cosh z \cdot \cosh w \pm \sinh z \cdot \sinh w$
$\cosh z = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots \quad ( z  < \infty)$
$\sinh z = z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \dots \quad ( z  < \infty)$
$\tanh z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 - \frac{17}{315}z^7 + \dots \quad ( z  < \frac{\pi}{z})$

La potencia transportada por esta onda vale:

$$P'(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(VI^*) = \frac{1}{2} G_0 |V^+|^2 e^{-2\alpha z} = P^+(0) e^{-2\alpha z} \quad (3.13)$$

con

$$Y_0 = G_0 + jB_0 = Z_0^{-1}$$

La atenuación experimentada por la onda entre dos planos (por ejemplo el  $z=0$  y el  $z=\ell$ ) viene dada, en nepers y decibelios, por las expresiones siguientes:

$$L(\text{nepers}) = \alpha \ell = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{P^+(0)}{P^+(\ell)} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} L(\text{dB}) &= 10 \log \frac{P^+(0)}{P^+(\ell)} = 10 \log(e^{2\alpha\ell}) - \alpha \ell \cdot 20 \log e = \\ &= 8,686 (\alpha \ell \text{ (en nepers)}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por tanto, 1 neper = 8,686 dB

### 3.3 Relación entre potencias y energías

Puede obtenerse una relación general entre potencias y energías a partir de 1 y 2 si calculamos el valor de la expresión:

$$\frac{d}{dz} (VI^*) = \frac{dV}{dz} I^* + V \frac{dI^*}{dz} \quad (3.16)$$

Se obtiene fácilmente la expresión siguiente:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} (VI^*) + \frac{1}{2} (RII^* + GVV^*) + \frac{j}{2} (XII^* - BVV^*) = 0 \quad (3.17)$$

donde hemos puesto  $Z=R+jX$ ,  $Y=G+jB$ . También podemos escribir (3.17) como:

$$\frac{d}{dz} \bar{P}(z) + P_L(z) + \frac{1}{2} j (X |I|^2 - B |V|^2) = 0 \quad (3.18)$$

donde:

$$\bar{P}(z) = \frac{1}{2} VI^* = \text{potencia compleja en la línea.}$$

$$P_L(z) = \frac{1}{2} (R |I|^2 + G |V|^2) = \text{potencia disipada por unidad de longitud de línea.}$$

Si tomamos la parte real y la imaginaria en (3.18):

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Re} \tilde{P}(z) = \frac{d}{dz} P(z) = P_L(z) \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Im} \tilde{P}(z) = \frac{1}{2} (B |V|^2 - X |I|^2) \quad (3.20)$$

La expresión (3.20), menos obvia que la (3.19), relaciona la potencia reactiva con las energías almacenadas. Si integramos (3.19) entre dos planos de la línea  $z_1$  y  $z_2$ , tendremos:

$$P(z_2) - P(z_1) = - \int_{z_1}^{z_2} P_L(z) dz \quad (3.21)$$

Es decir, la potencia neta que sale de la sección de línea  $(z_1, z_2)$  es igual a la potencia disipada.

### 3.4 Línea con pérdidas bajas

Volviendo a la línea con pérdidas (fig. 3.1a) tendremos:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (3.22)$$

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (3.23)$$

El caso de interés para frecuencias de microondas es el de línea con bajas pérdidas, entendiéndose por esto que se verifiquen las desigualdades:

$$R \ll \omega L \quad G \ll \omega C \quad (3.24)$$

En estas condiciones se pueden obtener expresiones aproximadas para (3.25) y (3.26) de estructura más simple. Si ponemos  $u = R/j\omega L$ ,  $v = G/j\omega C$  y recordamos que  $u \ll 1$  y  $v \ll 1$ , tendremos:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \sqrt{-\omega^2 LC} \sqrt{(1-ju)(1-jv)} = j\omega \sqrt{LC} [1-uv-j(u+v)]^{\frac{1}{2}} \approx \\
 &\approx j\omega \sqrt{LC} [1-j(u+v)]^{\frac{1}{2}} = \\
 &= j\omega \sqrt{LC} \left[ 1 - \frac{1}{2}j(u+v) + \frac{1}{8}(u+v)^2 + \dots \right] \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

De manera que, reteniendo términos de primer orden en  $u, v$ :

$$\alpha \approx \omega \sqrt{LC} \left( \frac{u+v}{2} \right) = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} + \frac{G\sqrt{\frac{L}{C}}}{2} \quad (3.26)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{LC} \quad (3.27)$$

Análogamente, se obtiene para  $Z_0$ :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ 1 - \frac{1}{2}j(u-v) \right] = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ 1 - j \left( \frac{R}{2\omega L} - \frac{G}{2\omega C} \right) \right] \quad (3.28)$$

Es decir, los efectos más importantes (términos de primer orden en  $u, v$ ) son la aparición de atenuación  $\alpha$  y de parte reactiva en la impedancia característica, mientras que la variación de la constante de fase  $\beta$  es de segundo orden en  $u, v$  y su efecto es imperceptible.

Se puede obtener un procedimiento alternativo para el cálculo aproximado de la atenuación en el caso de pérdidas bajas que no requiere el conocimiento de la expresión exacta para  $\gamma$  a partir de las expresiones (3.19) y (3.13) de la manera siguiente:

Para una onda progresiva (por ejemplo, positiva):

$$P^+(z) = P^+(0) e^{-2\alpha z} \quad (3.13)$$

y, por tanto, (3.19) se puede escribir:

$$\frac{d}{dz} P^+(z) = -P_L' \quad \rightarrow \quad -2\alpha P^+(z) = -P_L'(z) \quad (3.29)$$

donde:

$$\alpha = \frac{P_L'(z)}{2P^+(z)} = \frac{\frac{1}{2}(R|I^+|^2 + G|V^+|^2)}{2 \frac{1}{2} G_0 |V^+|^2} = \frac{R|Y_0|^2 + G}{2G_0} \quad (3.30)$$

Hasta aquí la expresión es exacta, pero tiene el inconveniente de que requiere el conocimiento de  $Y_0 = G_0 + jB_0$ . Pero dado que las pérdidas son pequeñas, podemos aproximar  $|Y_0|^2$  por el valor que tomaría en caso de no haberlas, es decir, tomar:

$$|Y_0|^2 = |Z_0|^{-2} \approx \frac{C}{L} = G_0^2 \quad (3.31)$$

con lo cual (3.33) proporciona la misma expresión obtenida anteriormente:

$$\alpha = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} + \frac{G\sqrt{\frac{L}{C}}}{2} \quad (3.26)$$

Este procedimiento para obtener la atenuación partiendo de (3.30) y el conocimiento de la solución del problema sin pérdidas es esencial para el estudio de las guías de onda con pérdidas.

### 3.5 Dispersión

Supongamos una línea de transmisión general con  $\gamma = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$  alimentada por un generador de tensión arbitraria  $v_G(t)$  (sin impedancia, para simplificar las expresiones) expresable mediante una integral de Fourier (o una serie de Fourier, si  $v_G$  fuese periódica) de la manera siguiente (fig. 3.2):

$$v_G(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.32)$$

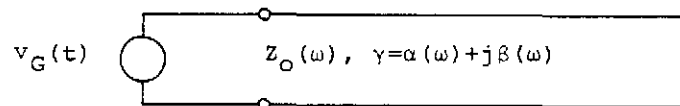
Dado el carácter real de  $v_G(t)$ ,  $F(-\omega) = F^*(\omega)$  y (3.32) se puede escribir de nuevo como:

$$v_G(t) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.33)$$

En el último paso hemos prescindido de indicar el proceso de tomar la parte real, como es normal en el caso de señales senoidales. Esta expresión indica que  $v_G(t)$  es la superposición de infinitas señales senoidales y, dado el comportamiento lineal de la línea de transmisión podemos escribir:

$$v^+(z,t) = \int_0^{\infty} F(\omega) e^{[j\omega t - \gamma z]} d\omega = \int_0^{\infty} F(\omega) e^{[j\omega t - \alpha(\omega)z - j\beta(\omega)z]} d\omega \quad (3.34)$$

Una conclusión importante de esta expresión es que, a diferencia del caso de la línea ideal,  $v^+(z,t)$  ya no reproducirá en cada plano  $z$  el comportamiento de  $v_G(t)$ , ya que cada una de las componentes sinusoidales de esta última variará su amplitud y su fase de manera distinta con la frecuencia a medida que se propaga. Nótese, para poder comparar, que en el caso de la línea ideal  $\beta = \omega/c$ , y (3.34)



$$v_G(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Fig. 3.2 Línea alimentada por un generador de tensión arbitraria,  $v_G(t)$ , expresable como integral de Fourier, utilizada para analizar el fenómeno de la dispersión



proporciona:

$$v^+(z,t) = \int_0^\infty F(\omega) e^{j\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} d\omega = v_G\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad (3.35)$$

resultado obtenido anteriormente a partir de las ecuaciones diferenciales de la línea.

**Ejemplo 1** Volvamos a la línea sin pérdidas con célula elemental como en la figura 3.1b que, como ya hemos indicado, describe exactamente la propagación de ondas electromagnéticas en guías metálicas. En este caso tenemos:

$$Z = j\omega L - \frac{j}{\omega C_s}, \quad Y = j\omega C \quad (3.36)$$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = j\omega \sqrt{LC} \sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}}, \quad \text{con} \quad \omega_s^2 = \frac{1}{LC_s} \quad (3.37)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}} \quad (3.38)$$

Se observa que para  $\omega < \omega_s$  no existe propagación ya que entonces, para una onda progresiva, tendremos:

$$\gamma = \alpha = \omega \sqrt{LC} \sqrt{\frac{\omega_s^2}{\omega^2} - 1} \quad (3.39)$$

$$Z_0 = jX_0 = j \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\omega_s^2}{\omega^2} - 1} \quad (3.40)$$

y, por tanto,

$$V(z) = V^+ e^{-\alpha z}, \quad v(z,t) = |V^+| e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \phi) \quad (3.41)$$

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(VI^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{|V^+|^2}{jX_0}\right) = 0 \quad (3.42)$$

Es decir, en la línea existe una perturbación con decaimiento exponencial tal que todos los planos están en fase y que no transporta potencia.

Para  $\omega > \omega_s$ , sí que existe propagación, pero el diagrama  $\omega$ - $\beta$  (fig. 3.3) no es una recta como en el caso de la línea ideal. Nótese que:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}}} > c \quad (3.43)$$

Es decir, la velocidad de fase siempre es mayor que la velocidad de la luz en el medio (véase también la figura 3.3); de hecho, cuando  $\omega \rightarrow \omega_s$ ,  $v_p \rightarrow \infty$ , cosa que físicamente se corresponde con que para  $\omega = \omega_s$  todos los planos de línea están en fase. ■

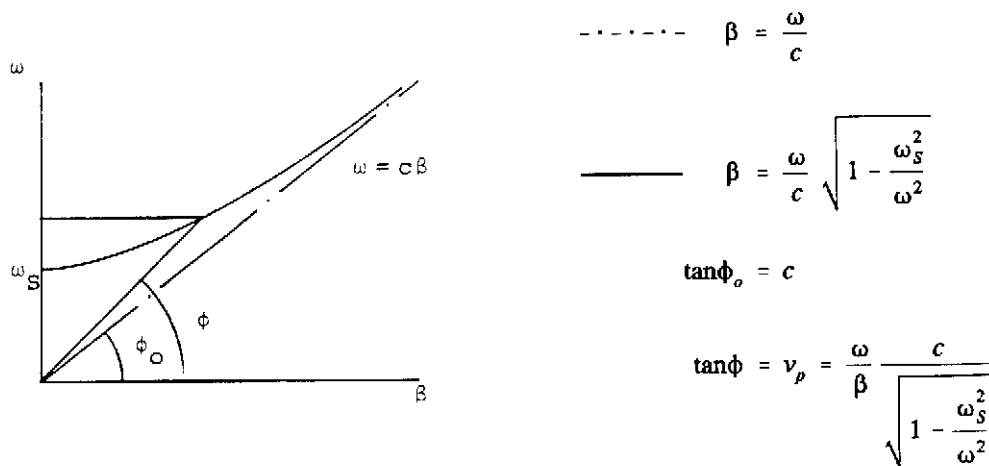


Fig. 3.3 Diagrama  $\omega$ - $\beta$  (curva de dispersión) para la línea con célula elemental como en la figura 3.1b. Obsérvese que la velocidad de fase siempre es mayor que  $c$

**Ejemplo 2** Supongamos que la línea de la figura 3.2 se comporta como la del ejemplo anterior y que el generador produce una tensión dada por:

$$v_G(t) = J_0(\omega_s t) \quad (3.44)$$

con  $J_0$  la función de Bessel de primera especie y de orden cero, y:

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_s}}$$

La elección de esta función tan singular viene impuesta por la simplicidad del análisis matemático posterior, como veremos. En este caso es más conveniente trabajar con transformadas de Laplace. Formalmente, el análisis es el mismo que con las de Fourier, pero cambiando  $j\omega$  por  $S$ . Tenemos entonces:

$$\gamma = j\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}} = j\frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_s^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_s^2 - \omega^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_s^2 + S^2} \quad (3.45)$$

La transformada de  $J_0(\omega_s t)$  se encuentra fácilmente en tablas y resulta ser

$$V_G(S) = L\{V_G(t)\} = \frac{1}{\sqrt{S^2 + \omega_s^2}} \quad (3.46)$$

De manera que la solución para  $v(z,t)$  será:

$$v(z,t) = L^{-1}\{V_G(S) e^{-\gamma z}\} = L^{-1}\left\{ \frac{e^{-\frac{z}{c} \sqrt{S^2 + \omega_s^2}}}{\sqrt{S^2 + \omega_s^2}} \right\} \quad (3.47)$$

Esta transformada también se encuentra en las tablas (esto justifica la elección de  $v_G(t)$ ), y así obtenemos:

$$\omega_s \sqrt{t'(t' + 2t_0)} = \omega_s \sqrt{t' 2t_0} \quad (3.50)$$

Para un plano determinado  $z_0$  pongamos:

$$t_0 = \frac{z_0}{c}, \quad t' = t - t_0 \quad \Rightarrow$$

$$\rightarrow v(z_0, t) = J_0 \left[ \omega_s \sqrt{t'(t' + 2t_0)} \right] u(t') \quad (3.49)$$

Examinemos primero qué sucede para valores de  $t' \ll t_0$ , es decir, los instantes iniciales. El argumento de (3.49) vale:

y, por tanto, los primeros ceros de  $v(z_0, t)$  toman los valores:

$$p'_{oi} = \omega_s t' = \frac{p_{oi}^2}{2\omega_s t_0} \quad (3.51)$$

con  $p_{oi}$  el  $i$ -ésimo cero de  $J_0(x)$  (fig. 3.4). Supongamos, para fijar ideas, que  $t_0$  es cien veces

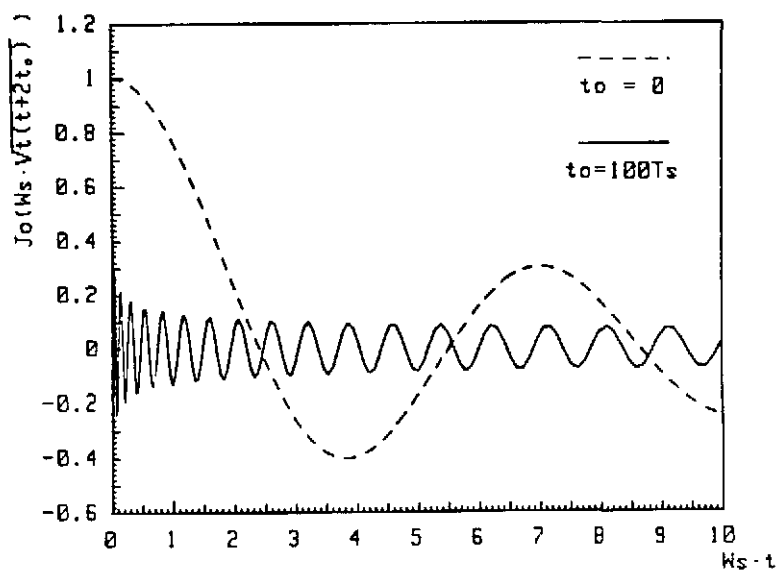


Fig. 3.4 Señal a la entrada de la línea dispersiva (línea de puntos,  $t_0=0$ ), y en un plano  $z_0$  tal que  $t_0=z_0/c=100T_s$  (línea continua)

el período asociado a  $\omega_S$ :

$$t_0 = 100 T_S, \quad \omega_S t_0 = \frac{2\pi}{T_S} 100 T_S = 200\pi \rightarrow \omega_S t' = \frac{p_{oi}^2}{400\pi} \quad (3.52)$$

Dado que  $\{p_{oi}\} = \{2,40, 5,52, 8,65, 11,79, \dots\}$ , en este caso resulta para los primeros ceros de  $v(z_o, t)$ :

$$\{p'_{oi}\} = \{4,6 \times 10^{-3}, 2,42 \times 10^{-2}, 5,95 \times 10^{-2}, 1,11 \times 10^{-1}, \dots\} \quad (3.53)$$

Es decir, se aglomeran en los primeros instantes, por lo que  $v(z_o, t)$  toma la forma cualitativa de la figura 3.3. Se observa, por tanto, que la señal, al comienzo de su recepción en el plano  $z_o$  está muy distorsionada, y excepto por sus valores iniciales, su valor se reduce prácticamente a cero muy rápido. Sin embargo, cuando  $t' \gg t_o$ :

$$v(z_o, t) \rightarrow J_0(\omega_S t') \quad (3.54)$$

Es decir, la señal en el plano  $z_o$  sigue fielmente a la del generador, solamente retardada en  $t_o = z_o/c$ . Nos podemos hacer una mejor idea del proceso si examinamos la relación entre la señal del generador en un cierto instante  $t$  y en el plano  $z = z_o$  en el instante posterior  $t + t_o = t + z_o/c$ . Si definimos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(t)} &= \frac{\text{Envolvente de } v_G(t)}{\text{Envolvente de } v(z_o, t + t_o)} = \\ &= \frac{\text{Envolvente de } J_0(\omega_S t)}{\text{Envolvente de } J_0[\omega_S \sqrt{t(t + 2t_o)}]} \quad (3.55) \end{aligned}$$

y tenemos en cuenta que, para valores grandes del argumento:

$$\text{envolvente de } J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \quad (3.56)$$

(el error es menor del 1% para  $x > P_{02} = 5,52$ ) tendremos:

$$f(t) \approx \frac{\sqrt{t}}{[t(t+2t_0)]^{\frac{1}{4}}} = \left(1 + \frac{2t_0}{t}\right)^{-\frac{1}{4}} \quad (3.57)$$

Esta función se representa en figura 3.5. Nótese que para el valor de  $t_0 = 100T_s$  utilizado anteriormente, el valor de  $f(t)$ , obtenido a partir del valor aproximado (3.56), tiene un error menor del 2% para valores de  $t > 8,8 \cdot 10^{-3}t_0 \approx t_0/100$ . ■

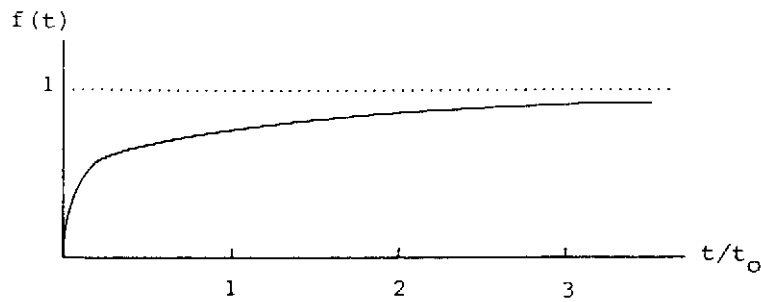


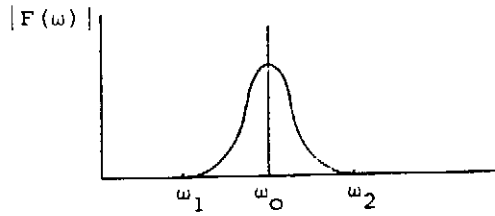
Fig. 3.5 Relación entre las envolventes de las señales en el plano  $z_0$  y en el extremo generador en función del tiempo (expresiones (3.55) y (3.57)).

### 3.6 Velocidad de grupo

Hemos visto en el párrafo anterior cómo una línea dispersiva distorsiona las señales. Un caso particular de gran interés es la propagación en una de estas líneas de una señal de banda estrecha, es decir, una señal con un espectro no nulo solamente en una banda de frecuencias ( $\omega_0 - \Delta\omega/2$ ,  $\omega_0 + \Delta\omega/2$ ) (fig. 3.6):

$$\begin{aligned} v_G(t) &= A(t) e^{j\omega_0 t} = \int_0^\infty F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= e^{j\omega_0 t} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} F(\omega) e^{j(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (3.58)$$

a)



$$v_g(t) = A(t) e^{j\omega t}$$

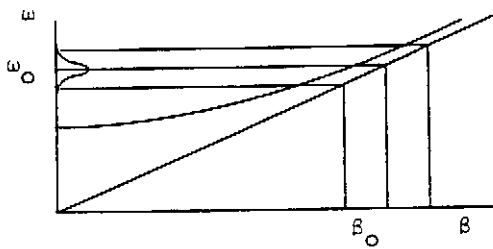
$$A(t) = \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} F(\omega) e^{j(\omega-\omega_0)t} d(\omega - \omega_0)$$

$$A(t) \in \mathfrak{R} \rightarrow F(\omega_0 - \omega) = F^*(\omega - \omega_0)$$

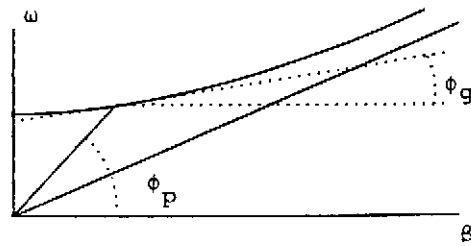
$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$$

b)

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$$



c)



$$\tan\phi_p = v_p \quad \tan\phi_g = v_g$$

Fig. 3.6 a) Señal de banda estrecha utilizada para introducir la velocidad de grupo  
 b) La aproximación requerida consiste en substituir la sección de curva por su tangente en  $(\omega_0, \beta_0)$   
 c) Interpretación gráfica de las velocidades de fase y de grupo

Es conocido que una señal de este tipo puede interpretarse como una portadora de frecuencia  $f_0$ , cuya amplitud  $A(t)$  varía lentamente (en relación a  $1/f_0$ ) en el tiempo.

Para este caso, el término  $\beta z$  que aparece en la expresión (3.34) y que da  $v^+(z,t)$ , puede escribirse:

$$\beta z = z\beta_0 + z \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} z \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (3.59)$$

Ahora es necesario suponer que todos los términos de esta serie que siguen al segundo cumplen las siguientes condiciones:

- Son mucho más pequeños que los dos primeros, que predominan.
- Su valor absoluto es mucho menor que la unidad.

Nótese que la condición *b*, aunque la señal sea de banda estrecha (margen de  $\omega - \omega_0$ , pequeño), solamente se cumplirá para un rango limitado de valores de  $z$ , ya que cualquier término crece indefinidamente con  $z$ .

Según las hipótesis anteriores, que suponen aproximar la curva  $\beta(\omega)$  por la tangente trazada en el punto  $(\omega_0, \beta_0)$  (fig. 3.6), tendremos:

$$\beta z \approx \beta_0 z + \frac{z}{v_g} (\omega - \omega_0) \quad , \quad \text{amb} \quad \frac{1}{v_g} = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \quad (3.60)$$

( $v_g$  así definido es la pendiente de la tangente)

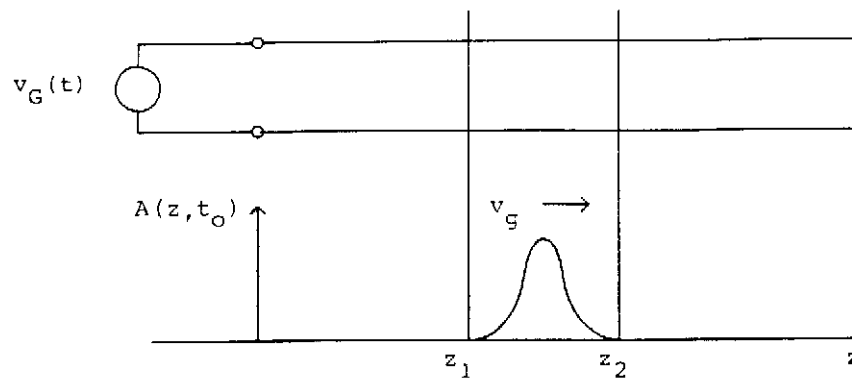
$$\begin{aligned} v^+(z,t) &= \int_0^\infty F(\omega) e^{j\left[\omega t - \beta_0 z - \frac{z}{v_g} (\omega - \omega_0)\right]} d\omega = \\ &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} F(\omega) e^{j(\omega - \omega_0)\left(t - \frac{z}{v_g}\right)} d(\omega - \omega_0) = \\ &= A \left( t - \frac{z}{v_g} \right) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \quad (3.61) \end{aligned}$$

Es decir, en cada plano  $z$  de la línea la señal reproduce la del generador, pero las variaciones de la amplitud están retardadas en el tiempo  $\tau = z/v_g$ , correspondiente a una velocidad de propagación  $v_g = d\omega/d\beta$  que se denomina *velocidad de grupo*. De manera que en este problema aparecen de manera natural dos conceptos de velocidad: la de fase, ya introducida anteriormente, que corresponde con la de un observador que se mantuviera a lo largo de la línea en planos de fase constante, y la de grupo, que correspondería al seguimiento de la "forma" o envolvente de la señal. Este concepto de velocidad de grupo puede comprenderse más fácilmente si imaginamos el seguimiento en la línea de un impulso de duración finita (fig. 3.7).

Nótese que la propagación sin distorsión es una conclusión aproximada para rangos de distancias limitados, y que, para distancias suficientemente grandes, la distorsión aumenta indefinidamente.



$$v_G(t) = A(t) e^{j\omega_0 t}$$



$$U_m(z, t_0) = U_e(z, t_0) = 0 \quad \text{para} \quad z < z_1, \quad z > z_2$$

Fig. 3.7 Representación instantánea de la propagación de un impulso de duración finita en una línea dispersiva (aproximaciones de propagación sin distorsión). La energía almacenada en la línea es nula, excepto en la zona donde se encuentra el pulso, cosa que permite introducir el concepto de velocidad de propagación de la energía,  $v_E$ . En este caso, evidentemente,  $v_E = v_g$ .

**Ejemplo** Supongamos que en una línea dispersiva un generador excita una señal de envolvente gaussiana de la forma:

$$v_G(t) = e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} e^{j\omega_0 t} = A(t) e^{j\omega_0 t} \quad (3.62)$$

Su transformada de Fourier se encuentra fácilmente en las tablas y es:

$$V_G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_G(t) e^{-j\omega_0 t} dt = -\frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \tau^2} \quad (3.63)$$

La onda positiva de tensión excitada en la línea valdrá, como anteriormente:

$$v^+(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} V_G(\omega) e^{-j[\omega t - \beta(\omega)z]} d\omega \quad (3.64)$$

En este ejemplo, el desarrollo en serie de Taylor de  $\beta(\omega)$  en torno a  $\omega_0$  lo aproximaremos por un término más:

$$\beta \approx \beta_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{v_g} (\omega - \omega_0)^2 \quad (3.65)$$

donde hemos definido la constante  $\epsilon$  (con dimensiones de tiempo) mediante:

$$\frac{\epsilon}{v_g} = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \quad (3.66)$$

Con la aproximación anterior:

$$\begin{aligned} v^+(z,t) &= \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} (\tau^2 + j\epsilon \frac{z}{v_g})} e^{j(\omega - \omega_0) \left( t - \frac{z}{v_g} \right)} d\omega = \\ &= \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega'^2}{2} (\tau^2 + j\epsilon t_0)} e^{j\omega' t'} d\omega' \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\text{con } \omega - \omega_0 = \omega', \quad t - \frac{z}{v_g} = t', \quad \frac{z}{v_g} = t_0 \quad (3.68)$$

La inversión de la integral es inmediata:

$$\begin{aligned} v^+(z,t) &= \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + j\epsilon t_0}} e^{-\frac{t'^2}{2(\tau^2 + j\epsilon t_0)}} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} = \\ &= A(z,t) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z + \phi)} \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde la amplitud  $A(z,t)$  viene dada por:

$$\begin{aligned}
 A(z,t) &= \frac{\tau}{\left(\tau^4 + \epsilon^2 t_0^2\right)^{\frac{1}{4}}} \cdot e^{-\frac{t'^2 \tau^2}{2\left(\tau^4 + \epsilon^2 t_0^2\right)}} = \\
 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\epsilon^2}{\tau^4} t_0^2\right)^{\frac{1}{4}}} \cdot e^{-\frac{t'^2}{2\tau^2\left(1 + \frac{\epsilon^2}{\tau^4} t_0^2\right)}} \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

Es decir, la amplitud de la señal continúa siendo gaussiana y su máximo se desplaza con la velocidad de grupo  $v_g$ , pero la *duración* de la señal, que en el generador es del orden de magnitud de  $\tau$ , aumenta progresivamente con  $z$ , de acuerdo con la expresión:

$$\tau \sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{\tau^4} t_0^2} = \tau \sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{\tau^4} \cdot \frac{z^2}{v_g^2}} \quad (3.71)$$

Nótese que, para una dispersión de la línea dada ( $\epsilon$  fijo) la amplitud del impulso se distorsiona menos cuanto mayor sea su *duración* inicial,  $\tau$ . ■

Volvamos al caso de un impulso de duración finita que se propaga, aproximadamente, sin distorsión en la línea, como en la figura 3.7. Es evidente que solamente existe energía almacenada en la zona de la línea donde, en un instante dado, está el impulso. De esta manera,  $v_g$  se puede interpretar como la *velocidad con la que se propaga la energía*,  $v_E$ .

Este concepto puede extenderse al caso de la línea en régimen senoidal si definimos, para una onda progresiva (por ejemplo, positiva):

$$v_E = \frac{P^+(z)}{U^+(z)} \quad (3.71)$$

con  $P^+(z)$  la potencia transportada por la onda y  $U^+(z)$  la densidad de energía almacenada por unidad de longitud, ambas evaluadas en el mismo plano. Para la línea ideal, esta expresión proporciona, con

cálculos elementales,  $v_E=c$ , como era de esperar. Por otra parte, para una línea dispersiva como la de la figura 3.1b, ya utilizada anteriormente en varios ejemplos:

$$\begin{aligned}
 P^+ &= \frac{1}{2} Z_0 |I^+|^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{L}{C} \left( 1 - \frac{\omega_S^2}{\omega^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} |I^+|^2 \\
 U^+ &= \frac{1}{4} C |V^+|^2 + \frac{1}{4} L |I^+|^2 + \frac{1}{4} C_S \frac{|I^+|^2}{\omega^2 C_S^2} = \\
 &= \frac{L}{4} \left( \frac{C Z_0^2}{L} + 1 + \frac{\omega_S^2}{\omega^2} \right) |I^+|^2 = \frac{L}{2} |I^+|^2 \quad (73)
 \end{aligned}$$

de manera que:

$$v_E = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left( 1 - \frac{\omega_S^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} = c \left( 1 - \frac{\omega_S^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.74)$$

Por otra parte, para esta misma línea:

$$\beta^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_S^2) \quad , \quad 2\beta \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c^2} 2\omega \quad (3.75)$$

$$\frac{d\beta}{d\omega} - \frac{1}{v_g} = \frac{1}{c^2} \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_p}{c^2} \quad , \quad v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_S^2}{\omega^2}} = v_E \quad (3.76)$$

Es decir, la velocidad de grupo (definida a partir de la propagación de una señal de banda estrecha) y la de propagación de la energía (definida en régimen senoidal) coinciden. Se puede demostrar que esta coincidencia es una propiedad general para todas las perturbaciones electromagnéticas que se propagan en un medio sin pérdidas.

### 3.7 Líneas con dieléctrico homogéneo

En este apartado nos referimos a aquellas líneas constituidas, además de por dos conductores, por un solo dieléctrico de propiedades uniformes. Antes de entrar en configuraciones concretas, estableceré-

mos las siguientes propiedades generales comunes a todas ellas:

a) Para todos los dieléctricos,  $\mu = \mu_0$  y, por tanto, la inductancia por unidad de longitud  $L$  es la misma que en ausencia de dieléctrico,  $L = L_0$ .

b) Se puede demostrar que:

$$LC = \mu \epsilon = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \quad (3.77)$$

y, en consecuencia:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{1}{v_p C} = v_p L$$

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{c}{f \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (3.78)$$

c) Para una frecuencia de trabajo dada, las pérdidas en un dieléctrico se traducen en la aparición de una parte imaginaria negativa en la constante dieléctrica:

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon' \left( 1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right) = \epsilon' (1 - j \tan \delta_t) \quad (3.79)$$

Normalmente se prescinde del acento en  $\epsilon'$  y escribimos:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r (1 - j \tan \delta_t) \quad (3.80)$$

Los mecanismos físicos que producen las pérdidas son varios, pero formalmente pueden atribuirse a una conductividad equivalente  $\sigma_e$  tal que, de ser la única causa de pérdidas, produjera la misma tangente de pérdidas  $\tan \delta_t$ . Esta conductividad se define mediante

$$\sigma_e = \omega \epsilon \tan \delta_t \quad (3.81)$$

d) Cuando el dieléctrico tiene pérdidas, la línea posee una conductancia por unidad de longitud  $G$  no nula relacionada con  $C$  mediante la expresión:

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma_e}{\epsilon} \quad (3.82)$$

En efecto, para la línea ideal:

$$C = \epsilon F(\text{geometría}) ; \quad Y = j \omega C = j \omega \epsilon F \quad (3.83)$$

con  $F$  una constante función de la geometría de la línea. Si el dieléctrico tiene pérdidas:

$$Y = j \omega \epsilon (1 - j \tan \delta_e) F = j \omega \epsilon F + \omega \epsilon \tan \delta_e F = j \omega C + G \quad (3.84)$$

de manera que:

$$\frac{G}{C} = \omega \tan \delta_e = \frac{\sigma_e}{\epsilon}$$

c) Hemos visto que, para pérdidas pequeñas, la atenuación viene dada por:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{R}{Z_0} + \frac{1}{2} G Z_0 = \alpha_c + \alpha_d \quad \text{con} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.85)$$

Los subíndices  $c$  y  $d$  se refieren a *conductor* y a *dieléctrico*, respectivamente. Para la atenuación debida a pérdidas en el dieléctrico:

$$\begin{aligned} \alpha_d &= \frac{1}{2} G \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_e}{\epsilon} e \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_e}{\omega \epsilon} \cdot \frac{\omega}{v_p} = \\ &= \frac{1}{2} \beta \tan \delta_e = \frac{\pi}{\lambda} \tan \delta_e \quad (3.86) \end{aligned}$$

A frecuencias de microondas la tangente de pérdidas varía poco con la frecuencia. Si la suponemos constante:

$$\alpha_d \lambda = \pi \tan \delta_t = \text{constante} \quad (3.87)$$

Es decir, la atenuación por longitud de onda es aproximadamente constante. Los valores típicos de  $\tan \delta_t$  para buenos dieléctricos son del orden de magnitud de  $10^{-4}$  y, por tanto, la atenuación por longitud de onda, en *dB* (para  $\tan \delta_t = 10^{-4}$ ), es:

$$8,686 \times \alpha_d \lambda = 8,686 \pi \tan \delta_t \approx 2,7 \times 10^{-3} \text{ dB} \quad (3.88)$$

la atenuación producida por pérdidas en los conductores,  $\alpha_c$ , requiere el conocimiento de  $R$  que, cuando la distribución de corrientes no es uniforme, es de cálculo difícil.

En vista de los puntos anteriores, la información necesaria sobre una línea con dieléctrico homogéneo se reduce a la constante dieléctrica, la capacidad por unidad de longitud  $C$  y la resistencia por unidad de longitud  $R$ .

El procedimiento más potente para el cálculo de capacidades de estructuras bidimensionales (es decir, definidas en el plano), como las que nos ocupan, es el uso de transformaciones conformes (de variable compleja), que omitiremos en este tema.

**Línea de placas paralelas** Su estudio tiene interés como modelo teórico aproximado que proporciona una buena comprensión de otras líneas planas reales. Consiste en dos tiras conductoras de ancho  $W$  que discurren paralelas separadas una distancia  $h$  por el material dieléctrico (fig. 3.8a). Su análisis resulta extraordinariamente sencillo si hacemos la aproximación de distribución de campo uniforme, es decir, si ignoramos la dispersión de campo eléctrico que se produce en los bordes de las tiras conductoras (aproximación buena solamente si  $W \gg h$ ), ya que entonces la capacidad se calcula mediante la expresión del condensador plano (fig. 3.8a). Con esta aproximación la corriente también está distribuida uniformemente en las tiras y el parámetro  $R$  es:

$$R = 2 \frac{R_s}{W} \quad \left( R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} \right) \quad (3.89)$$

siendo  $\sigma$  la conductividad del conductor y  $\delta$ , la profundidad de penetración en el mismo a la frecuencia  $f$ :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (3.90)$$

De esta manera obtenemos:

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \omega \sqrt{\mu \epsilon} \tan \delta_t \quad (3.91)$$

$$\alpha_c = \frac{1}{2} \frac{R}{Z_0} = R_S \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left( \frac{1}{h} \right) \quad (3.92)$$

De estas expresiones se observa que, si suponemos  $\tan \delta_t$  constante con la frecuencia (ya hemos dicho que para un buen dieléctrico varía poco),  $\alpha_d$  crece con la frecuencia mientras que  $\alpha_c$  lo hace con su raíz cuadrada. A frecuencias bajas predomina, normalmente,  $\alpha_c$ , pero a frecuencias suficientemente altas  $\alpha_d$  llega a hacerse mayor que  $\alpha_c$ . Veámoslo:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_d}{\alpha_c} &= \frac{1}{2} \frac{\omega \mu}{R_S} h \tan \delta_t = \delta_h \left( \frac{\omega \mu \sigma}{2} \right) \tan \delta_t = \\ &= \delta h \frac{1}{\sigma^2} \tan \delta_t = \frac{h}{\delta} \tan \delta_t \end{aligned} \quad (3.93)$$

Para  $\tan(\delta_t) \approx 2 \cdot 10^{-4}$  y conductor de cobre ( $\delta = 66 \text{ mm}/\sqrt{f}$ ),  $\alpha_d = \alpha_c$  para una frecuencia  $f_0$ :

$$\sqrt{f_0} = \frac{66}{2h \times 10^{-4}} \Rightarrow f_0 \sim \frac{10^{11}}{h^2} \quad (h \text{ en mm}) \quad (3.94)$$

$$h = 10 \text{ mm} \Rightarrow f_0 = 10^9 = 1 \text{ Ghz}$$

$$h = 1 \text{ mm} \Rightarrow f_0 = 100 \text{ Ghz} \quad \text{etc.}$$

El resultado anterior, que da la frecuencia por debajo de la cual predominan las pérdidas en los conductores sobre las pérdidas en el dieléctrico, puede utilizarse de forma aproximada (indicativa al menos en orden de magnitud) para una línea formada por dos conductores cualesquiera separados una distancia  $h$ .



**Línea bifilar** Está formada por dos conductores idénticos tendidos paralelamente el uno respecto al otro (fig. 3.8b), y históricamente ha ocupado, durante casi cien años, un papel exclusivo o predominante en las comunicaciones (líneas telefónicas y telegráficas). A frecuencias de microondas su interés es nulo por ser una estructura abierta y por tanto sujeta a radiación y a interferencias, por su atenuación comparativamente alta, y la dificultad de obtener impedancias características bajas (para  $Z_0=50\Omega$  y dieléctrico aire resulta  $D=1,09d$ , es decir, conductores muy próximos).

**Línea coaxial** Está constituida por dos conductores cilíndricos concéntricos (fig. 3.8c), lo que facilita la fabricación de cables flexibles ya que el conductor exterior se realiza con una malla de hilos finos trenzados sobre un núcleo dieléctrico (teflón o polietileno) que, al mismo tiempo, sirve para mantener centrado el conductor interior. La otra gran ventaja de esta línea es su carácter cerrado (los campos están contenidos en la zona comprendida entre los conductores) y por tanto su perfecto blindaje evita problemas de radiación e interferencias. Por esta razón su utilización es muy general desde muy bajas frecuencias hasta aproximarse a 50 GHz. Dada la simetría de la estructura el cálculo de la capacidad es muy sencillo mediante técnicas elementales. Por la misma razón, la corriente está distribuida uniformemente en los conductores, y la resistencia unitaria resulta:

$$R = \frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (3.95)$$

y, por tanto, la atenuación por pérdidas en los conductores:

$$\alpha_c = \frac{R}{2Z_0} = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r}}{120 \cdot 2\pi a} \cdot \frac{\left(1 + \frac{a}{b}\right)}{\ln \frac{a}{b}} \quad (3.96)$$

Para un diámetro fijo del conductor exterior,  $2a$ , esta expresión es función del cociente  $x=a/b$ . Se puede comprobar que toma valor mínimo para  $a/b=3.59$ , valor que proporciona las impedancias características siguientes:

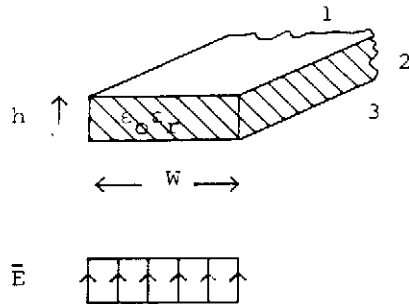
aire ( $\epsilon_r=1$ ):  $Z_0=76,7\Omega$

teflón ( $\epsilon_r=2,05$ ):  $Z_0=53,6\Omega$

polietileno ( $\epsilon_r=2,28$ ):  $Z_0=50,8\Omega$

Nótese que, en todo caso, la atenuación es inversamente proporcional al diámetro del cable y, por tanto, para tramos largos (por ejemplo, tendidos de distribución de televisión por cable) conviene hacer que éste sea lo más grueso posible.

## a) Línea de placas paralelas (aproximación de campo uniforme)



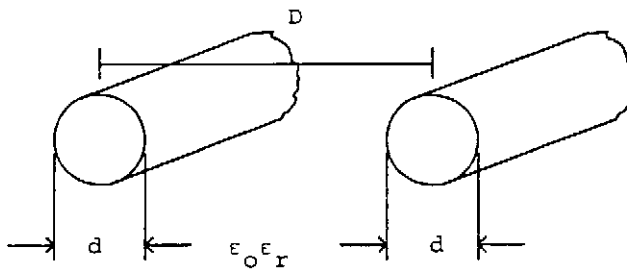
$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{W}{h}$$

$$Z_o = \frac{1}{v_p C} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c C} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{h}{W}$$

$$R = 2 \frac{R_s}{W} \quad \left( R_s = \frac{1}{\sigma \delta} \right)$$

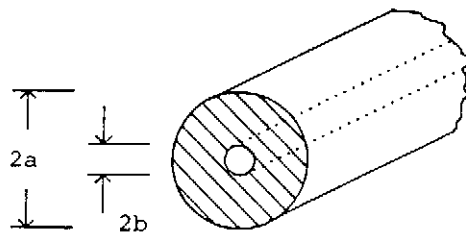
1 y 3: tiras conductoras  
2: dieléctrico

## b) Línea bifilar



$$Z_o = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1} \left( \frac{D}{d} \right)$$

## c) Línea coaxial

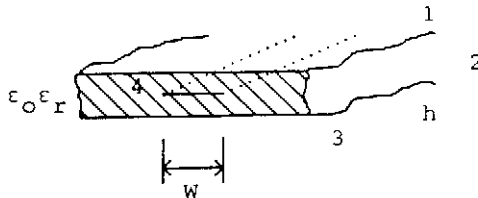


$$Z_o = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{a}{b}$$

$$R = \frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Fig. 3.8 Tipos más importantes de líneas con dieléctrico homogéneo

## d) Línea triplaca (Stripline)



$$Z_o = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K'(x)}{K(x)}$$

$$x = \tanh\left(\frac{\pi W}{2b}\right)$$

$$K(x) = \text{integral elíptica de primera especie} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \phi}}$$

$$K'(x) = K(\sqrt{1-x^2})$$

1 y 3 : planos (conductores) de masa

2: dieléctrico

4: tira conductora

Expresiones aproximadas (error inferior a 10 ppm):

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{1}{\pi} \cdot \ln \left( 2 \frac{1+\sqrt{x'}}{1-\sqrt{x'}} \right) = F(x') \quad \text{donde} \quad x' = \sqrt{1-x^2} \quad ; \quad 0 \leq x^2 \leq 1$$

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{1}{F(x)} \quad 0.5 \leq x^2 \leq 1$$

Fig. 3.8 (Continuación)

**Línea triplaca (Stripline)** Las ventajas de esta línea, formada por una tira conductora centrada entre dos planos conductores (fig. 3.8d), son su carácter blindado y la facilidad de fabricar circuitos complejos mediante técnicas fotolitográficas, ya que, en la práctica, la estructura está constituida por dos láminas dieléctricas metalizadas por una de las caras (conductores exteriores o planos de masa). De estas dos láminas una de ellas tiene, además, en la otra cara, la tira conductora central. La estructura se completa poniendo en contacto las láminas dieléctricas y apretándolas firmemente. Su mayor inconveniente se deriva precisamente de su carácter cerrado y la dificultad, por tanto, de

fabricar circuitos activos, que requieren la inserción de transistores, diodos, condensadores, etc.

La impedancia característica viene dada en función de integrales elípticas pero, en la práctica, las expresiones aproximadas de la figura 3.8d proporcionan exactitud más que suficiente en todos los casos (error relativo inferior a 10 ppm, es decir,  $10^{-5}$ ).

La resistencia unitaria es de cálculo muy complejo, por la distribución no uniforme de la corriente en la tira y en los planos de masa, por lo que la omitimos. Un valor aproximado para la atenuación se puede obtener interpretando esta línea (si  $W \gg h/2$ ) como dos de placas paralelas superpuestas.

### 3.8 Líneas con dieléctrico inhomogéneo

La presencia de un dieléctrico inhomogéneo o dos o más dieléctricos en una línea de transmisión supone, normalmente, la introducción de una mayor complejidad en el cálculo de la capacidad (impedancia característica) de la misma. Solamente en casos de gran simplicidad y simetría en la estructura de los dieléctricos resulta sencillo su cálculo. En todos los casos de líneas inhomogéneas hemos de tener en cuenta lo siguiente:

a) Como anteriormente,  $\mu = \mu_0$  para todos los dieléctricos, y por tanto la inductancia unitaria  $L$  es la misma que si la estructura estuviese vacía,  $L = L_0$ .

b) Ahora la propiedad  $LC = \mu\epsilon$  no se puede aplicar, porque  $\epsilon$  no está definida de manera única.

Definiremos la permitividad (constante dieléctrica) efectiva  $\epsilon_{ef} = \epsilon_{ref}\epsilon_0$  como:

*La permitividad que debería tener un dieléctrico homogéneo para, ocupando él solo toda la estructura, proporcionar el mismo valor de capacidad unitaria.*

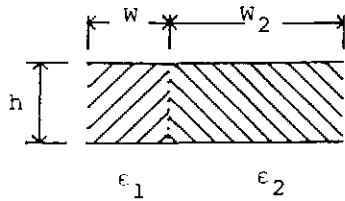
De acuerdo con esta definición, si llamamos  $C_0$  a la capacidad unitaria de la estructura vacía (sin dieléctricos), tendremos:

$$C = \epsilon_{ref} C_0 \quad (3.97)$$

y por tanto:

$$LC = L_0 \epsilon_{ref} C_0 = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{ref} = \mu_0 \epsilon_{ef} \quad (3.98)$$

a) Línea de placas paralelas



(Condensadores en paralelo)

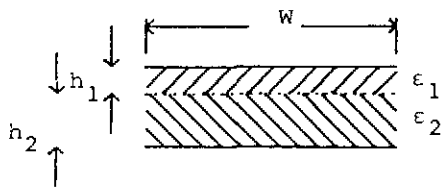
$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_1 \frac{W_1}{h} + \epsilon_2 \frac{W_2}{h} = \frac{\epsilon_{r1} W_1 + \epsilon_{r2} W_2}{W} \epsilon_0 \frac{W}{h}$$

$$\epsilon_{ref} \equiv \frac{\epsilon_{r1} W_1 + \epsilon_{r2} W_2}{W}, \quad \epsilon_{ef} \equiv \epsilon_0 \epsilon_{ref}$$

Resulta  $C = \epsilon_0 \epsilon_{ref} \frac{W}{h} = \epsilon_{ref} C^0$

( $C^0$  = capacidad de la línea con dieléctrico aire)

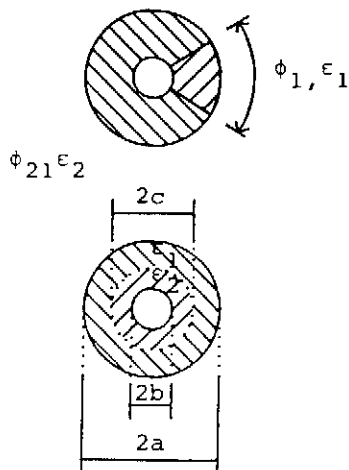
(condensadores en serie)



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{h_1}{\epsilon_1 W} + \frac{h_2}{\epsilon_2 W} \equiv \frac{h}{\epsilon_{ef} W}$$

con  $\epsilon_{ef}^{-1} = (h_1 \epsilon_1^{-1} + h_2 \epsilon_2^{-1})/h$

b) Línea coaxial



$$\epsilon_{ef} = \frac{\phi_1 \epsilon_1 + \phi_2 \epsilon_2}{2\pi} \quad ; \quad C = \frac{2\pi \epsilon_{ef}}{\ln \frac{a}{b}}$$

$$\frac{1}{\epsilon_{ef}} = \frac{\frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{c}{b} + \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{a}{c}}{\ln \frac{a}{b}} \quad ; \quad C = \frac{2\pi \epsilon_{ef}}{\ln \frac{a}{b}}$$

Fig. 3.9 Introducción del concepto de permitividad efectiva en líneas con dieléctrico inhomogéneo de estructura sencilla

En consecuencia:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{v_p C} = v_p L \quad (3.99)$$

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \quad (3.100)$$

En el caso frecuente de dos dieléctricos diferentes,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , e introduce el concepto de factor de llenado  $q_1$  y  $q_2$  de acuerdo con las condiciones:

$$q_1 + q_2 = 1$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ef} &= q_1 \epsilon_1 + q_2 \epsilon_2 = q_1 \epsilon_1 + (1 - q_1) \epsilon_2 = q_1 (\epsilon_1 - \epsilon_2) + \epsilon_2 = \\ &= (1 - q_2) \epsilon_1 + q_2 \epsilon_2 = \epsilon_1 + q_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) \end{aligned} \quad (3.101)$$

Obviamente, estas definiciones pueden extenderse al caso de más de dos dieléctricos.

c) Si los dieléctricos tienen pérdidas:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ef} &= q_1 \epsilon_1 (1 - j \tan \delta_1) + (1 - q_1) \epsilon_2 (1 - j \tan \delta_2) = \\ &= [q_1 \epsilon_1 + (1 - q_1) \epsilon_2] - j [q_1 \epsilon_1 \tan \delta_1 + (1 - q_1) \epsilon_2 \tan \delta_2] = \\ &= \epsilon'_{ef} - j \epsilon''_{ef} = \epsilon'_{ef} (1 - j \tan \delta_{ef}) \end{aligned} \quad (3.102)$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} \gamma &= j \omega \sqrt{LC} = L_0 C_0 \sqrt{\epsilon'_{ef} (1 - j \tan \delta_{ef})} = \\ &= j \beta \left( 1 - \frac{1}{2} j \tan \delta_{ef} \right) \end{aligned} \quad (3.103)$$

de donde se obtiene:

$$\alpha_D = \frac{1}{2} \beta \tan \delta_{ef} \quad (3.104)$$

**Línea microtira (*Microstrip*)** La línea microtira está formada por una tira conductora sobre una lámina dieléctrica que en la otra cara tiene un plano de masa (fig. 3.10a) y cuya estructura es similar a la de la línea triplaca. La línea microtira tiene la ventaja, sobre la línea triplaca, de estar abierta (útil para realizar circuitos activos) y su mayor simplicidad de fabricación. Es la línea de transmisión más utilizada para la realización de circuitos y, su uso, junto con la disponibilidad de transistores y diodos operativos a frecuencias de microondas, ha revolucionado la tecnología.

La capacidad se puede calcular con la ayuda de transformaciones conformes, si bien, en este caso, debido a la inhomogeneidad del dieléctrico, es necesario introducir aproximaciones simplificadoras que hacen que las expresiones de la figura 3.10a no sean realmente exactas. En todo caso, su grado de error ( $\leq 1\%$ ) suele ser inferior a la propia precisión de fabricación y a la exactitud del valor de permitividad.

La atenuación debida al dieléctrico,  $\alpha_D$ , puede calcularse de acuerdo con lo indicado más arriba: si asignamos el subíndice 1 al dieléctrico, 2 al aire y hacemos  $q_1=q$ , (3.101) y (3.102) quedan:

$$\epsilon_{ref} = q(\epsilon_r - 1) + 1 \quad (3.105)$$

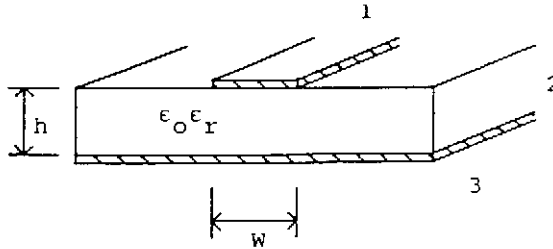
$$\tan \delta_{ef} = q \left( \frac{\epsilon_r}{\epsilon_{ref}} \right) \tan \delta_t \quad (3.106)$$

De (3.105) se puede calcular  $q$ , y  $\tan \delta_t$  en (3.106) se refiere al dieléctrico. La atenuación producida por los conductores, como en el caso de la línea triplaca, es de cálculo complicado y omitimos su cálculo.

**Línea coplanaria** En la línea microtira, los contactos a masa de los transistores, diodos, etc., deben realizarse a través del sustrato dieléctrico, perforando éste. Esto, en el caso de sustratos duros (cerámica, cuarzo) supone cierta complicación. Una alternativa a la línea microtira sin este inconveniente, y que encuentra cada vez más uso, es la formada por una tira conductora y dos semiplanos conductores (masa) equidistantes de ella y situados en el mismo plano (línea coplanaria, fig. 3.10b).

Las consideraciones realizadas para  $\alpha_C$  y  $\alpha_D$  en el caso de la línea microtira también se pueden aplicar en este caso.

## a) Línea microtira (microstrip)



$$\epsilon_{ref} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{10h}{W}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

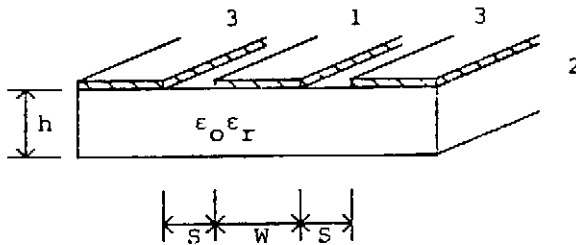
$$Z_o = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \ln \left( \frac{8h}{W} + 0.25 \frac{W}{h} \right) \quad \left( \frac{W}{h} \leq 1 \right)$$

$$Z_o = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \left[ \frac{W}{h} + 1.393 + 0.667 \ln \left( \frac{W}{h} + 1.444 \right) \right]^{-1} \quad \left( \frac{W}{h} \geq 1 \right)$$

(Para  $W/h=1$  ambas expresiones difieren en un 0.4%)

1. Tira conductora 2. Dieléctrico 3. Plano de masa

## b) Línea coplanaria



$$Z_o = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \frac{K'(x)}{K(x)}$$

$$x = \frac{W}{W + 2S}$$

$$\epsilon_{ref} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} \left\{ \tanh \left[ 0.775 \ln \frac{h}{S} + 1.75 \right] + \frac{xS}{h} \left[ 0.04 - 0.7x + 0.01 (1 - 0.1 \epsilon_r) (0.25 + x) \right] \right\}$$

$K(x)$  = integral elíptica de primera especie definida en la figura 3.8d.

1. Tira conductora 2. Dieléctrico 3. Planos de masa

Fig. 3.10 Líneas de dieléctrico más utilizadas para la realización de circuitos de microondas



## Capítulo 4 Circuitos resonantes

### 4.1 Introducción

Se presentan las propiedades de la resonancia en circuitos eléctricos poniendo énfasis en los conceptos de energías y de pérdidas, que nos serán de utilidad en lo sucesivo. En esta línea, se realiza una presentación sencilla del teorema del invariante adiabático, que permite derivar gran número de las propiedades de los circuitos resonantes sin necesidad de recurrir a la disposición concreta de sus elementos componentes ( $R, L, C$ ).

### 4.2 Propiedades básicas

Consideremos el circuito de la figura 4.1 y las relaciones básicas que lo gobiernan. Se obtiene fácilmente que:

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0 \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (4.1)$$

que con una elección adecuada del origen de tiempos tiene como solución:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t) \quad , \quad i(t) = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad (4.2)$$

Las energías almacenadas en la inductancia y el condensador valen, en cada instante:

$$u_m(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2C} q_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad (4.3)$$

$$u_e(t) = \frac{1}{2C} q^2(t) = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad (4.4)$$

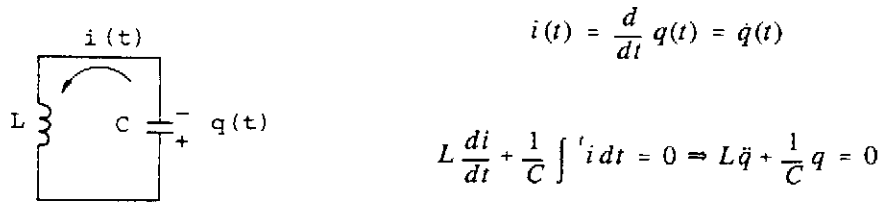


Fig. 4.1 Configuración y relaciones básicas en un circuito resonante sin pérdidas

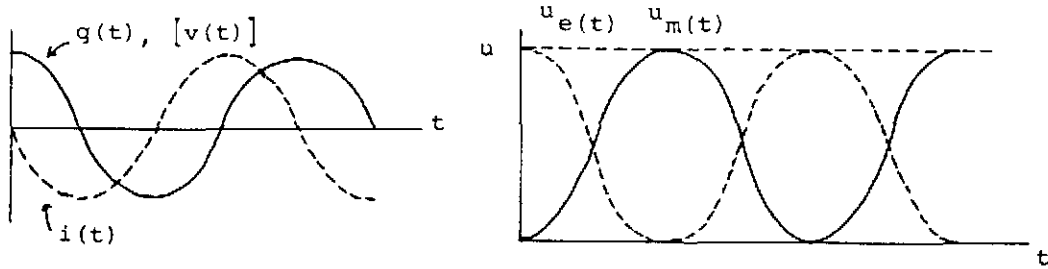


Fig. 4.2 Variación de corriente, carga (tensión) y energías eléctrica y magnéticas con el tiempo en el circuito de la figura 4.1

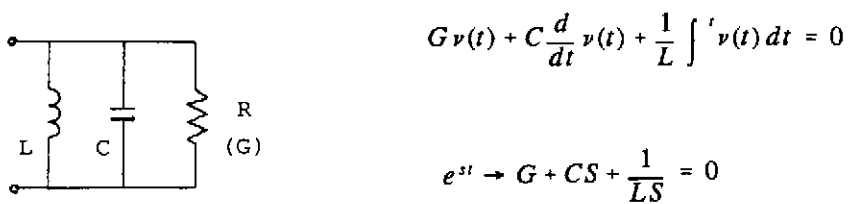


Fig. 4.3 Circuito resonante con pérdidas en paralelo con el condensador

y están representadas en la figura 4.2. Nótese que cuando  $u_m$  (o bien  $u_e$ ) se anula, la otra energía es máxima y están, por tanto, intercambiándose. Dado que el sistema carece de pérdidas, la energía total,  $u(t) = u_e(t) + u_m(t)$ , ha de ser constante y igual al valor máximo de  $u_m$  o  $u_e$ , lo que puede verificarse

fácilmente a partir de (4.3) y (4.4).

Si consideramos a continuación la inclusión de pérdidas en la forma de una resistencia en paralelo con el condensador (que puede representar, por ejemplo, las pérdidas en el dieléctrico de este último), se obtiene fácilmente para el exponente  $s$  (fig. 4.3):

$$s = -\frac{G}{2C} \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \frac{G^2}{4C^2}} = -\alpha_t \pm j \omega_{nr} \quad (4.5)$$

de manera que, si escogemos adecuadamente el origen de tiempos, las señales en el circuito son de la forma:

$$e^{-\alpha_t t} \cos(\omega_{nr} t) \quad , \quad \omega_{nr} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{G}{2\omega_0 C}\right)^2} \quad (4.6)$$

donde a  $\omega_{nr}$  la llamamos *frecuencia natural de resonancia* la cual, evidentemente, corresponde a las oscilaciones libres del circuito.

Si ahora el circuito de la figura 4.3 está excitado mediante un generador senoidal de frecuencia  $f$  conectado entre los dos terminales indicados, se define la *frecuencia de resonancia*  $f_r$  como aquella para la que se cumple una de las dos condiciones equivalentes siguientes:

- a) La impedancia de entrada del circuito es real.
- b) Las energías medias magnética,  $U_m$ , y eléctrica,  $U_e$ , almacenadas en el circuito son iguales.

La equivalencia entre estas condiciones se omite. Pero nótese que si  $U_m = U_e$  la inductancia y la capacidad intercambian sus energías entre sí exactamente sin que exista sobrante perceptible por el generador, que se limita a entregar la potencia disipada por la resistencia. Cuando la frecuencia no coincide con  $f_r$  y  $U_m \neq U_e$ , el exceso de energía que predomina se intercambia con el generador, que percibe, por tanto, una impedancia reactiva.

La utilidad de la condición *b* estriba en su carácter más general, desvinculado del concepto concreto de impedancia. Nótese además que  $f_r$  se define en régimen permanente y no tiene por qué coincidir, en general, con  $f_{nr}$ , que se refiere al circuito oscilando abandonado a sí mismo.

Volviendo al circuito de la figura 4.3, la aplicación de la condición  $b$  proporciona:

$$U_m = \frac{1}{4} L |I|^2 = \frac{1}{4} L \frac{|V|^2}{\omega_r^2 L^2} \quad ; \quad U_e = \frac{1}{4} C |V|^2 \quad (4.7)$$

de donde, igualando, resulta:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_o$$

### 4.3 Factor de calidad y admitancia

En (4.5) y (4.6) hemos supuesto implícitamente que  $G < 2\omega_o C$  para hacer que el radicando sea positivo.

Normalmente es  $G \ll 2\omega_o C$ , en cuyo caso decimos que las pérdidas son pequeñas, interpretando  $G$  como las pérdidas (generalmente no deseadas) asociadas con el circuito resonante; en el caso de la figura 4.3, asociadas concretamente al condensador.

La cuantificación de las pérdidas de un circuito resonante se realiza a través de su factor de calidad  $Q$  definido, para régimen senoidal permanente (es decir, con el circuito excitado con un generador senoidal), como:

$$Q = \frac{\text{energía media almacenada}}{\text{potencia media disipada}} \Big|_{\omega = \omega_r} \quad (4.8)$$

En virtud de esta definición, para la figura 4.3 se obtiene:

$$Q = \omega_r \frac{U_m + U_e}{P_L} \Big|_{\omega = \omega_r} = \omega_o \frac{2 U_e}{P_L} = \omega_o \frac{2 \frac{1}{4} C |V|^2}{\frac{1}{2} G |V|^2} = \frac{\omega_o C}{G} \quad (4.9)$$

De manera que la condición de pérdidas bajas se puede escribir como  $Q \gg 1$ .

En función del factor  $Q$ , la frecuencia natural de resonancia queda:

$$\omega_{nr} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (4.10)$$

A frecuencias de microondas lo habitual es trabajar con valores de  $Q$  que varían desde 100 o 200 hasta 5000 o 10000.

Obsérvese que incluso para un valor tan bajo en la práctica como  $Q=50$  resulta:

$$\omega_{nr} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{10.000}} \quad (4.11)$$

y por esa razón, en la práctica no suele distinguirse entre  $f_r$  y  $f_{nr}$ , y se habla solamente de *frecuencia de resonancia* considerando esta como:

$$f_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si ahora calculamos la admitancia vista en bornes del condensador (fig. 4.3):

$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\omega_o C \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) = G(1 + 2jQ\Delta) \quad (4.12)$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \quad (4.13)$$

Para frecuencias en la proximidad de la resonancia  $\omega_o$ , la expresión para  $\Delta$  puede linealizarse:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\omega_o\omega} = \frac{(\omega - \omega_o)(\omega + \omega_o)}{2\omega_o\omega} \approx \frac{\omega - \omega_o}{\omega_o} \equiv \delta \quad (4.14)$$

y queda la expresión aproximada:

$$Y = G(1 + 2jQ\delta) \quad , \quad f = f_o (1 + \delta) \quad (4.15)$$

Nótese que para  $f=f_o$ ,  $|Y|$  tiene un mínimo ( $|Z|$  un máximo), y que el ancho de banda relativo  $W$  a  $3dB$ , definida a partir de las frecuencias para las que  $|Z|$  disminuye en el factor  $\sqrt{2}$  (fig. 4.4), es igual al inverso del factor  $Q$  del circuito, como puede calcularse fácilmente a partir de (4.15).

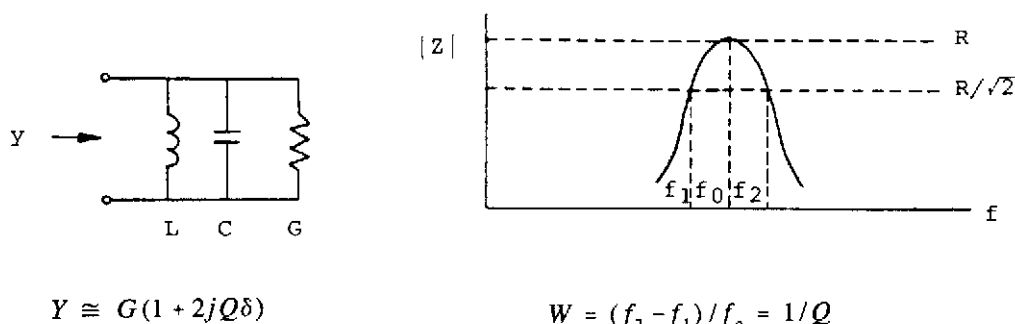


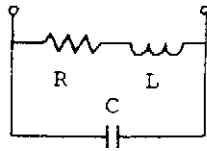
Fig. 4.4 Admitancia de entrada en un circuito resonante paralelo

#### 4.4 Más sobre pérdidas

Hasta ahora hemos considerado que las pérdidas en el circuito se producían en una resistencia en paralelo con la  $C$  y la  $L$ . Estudiemos que sucede en el caso de una resistencia en serie (figura 4.5). Se obtiene:

$$s = -\frac{R}{2L} + j\omega_o \sqrt{1 - \left(\frac{R}{2\omega_o L}\right)^2} \cong -\alpha_r + j\omega_{nr} \quad (4.16)$$

La frecuencia de resonancia en régimen permanente  $f$ , se calcula como en el caso anterior (generador entre terminales):



$$Ri(t) + L \frac{d}{dt}i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0$$

$$e^{st} \rightarrow R + LS + \frac{1}{CS} = 0$$

Fig. 4.5 Circuito con pérdidas en serie

$$U_e = \frac{1}{4} C |V|^2 = U_m = \frac{1}{4} L \frac{|V|^2}{R^2 + \omega_r^2 L^2} \quad (4.17)$$

$$\omega_r = \omega_o \sqrt{1 - \left(\frac{R_L}{\omega_o L}\right)^2} \quad (4.18)$$

Mientras que para el factor de calidad  $Q$ :

$$Q = \omega_r \frac{U}{P_L} \Big|_{\omega=\omega_r} = \omega_r \frac{2U_m}{P_L} \Big|_{\omega=\omega_r} = \omega_r \frac{2 \frac{1}{4} L |I|^2}{\frac{1}{2} R |I|^2} = \frac{\omega_r L}{R} \quad (4.19)$$

Las frecuencias de resonancia se pueden escribir:

$$\omega_{nr} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \omega_r = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \quad (4.20)$$

Como anteriormente, ambas prácticamente coinciden con  $\omega_o$  en la mayoría de los casos, por lo que también tomaremos:

$$Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R \omega_o C} \quad (4.21)$$

Por lo que se refiere a la admitancia de entrada al circuito de la figura 4.6a:

$$\begin{aligned}
 Y &= j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \\
 &= j\omega C + \frac{\frac{1}{R}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 Q^2} - j \frac{\frac{\omega L}{R^2}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 Q^2} \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

expresión que, para valores de  $\omega$  próximos a  $\omega_0$  y factor  $Q$  elevado, admite dos niveles sucesivos de aproximación:

$$Y \approx j\omega C + \frac{1}{RQ^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - \frac{j}{\omega L} = j\omega C + \frac{1}{RQ^2} - \frac{1}{\omega L} \quad (4.23)$$

proporcionando el mismo circuito equivalente de la figura 4.6. La demostración es similar para el caso del circuito de la figura 4.6b.

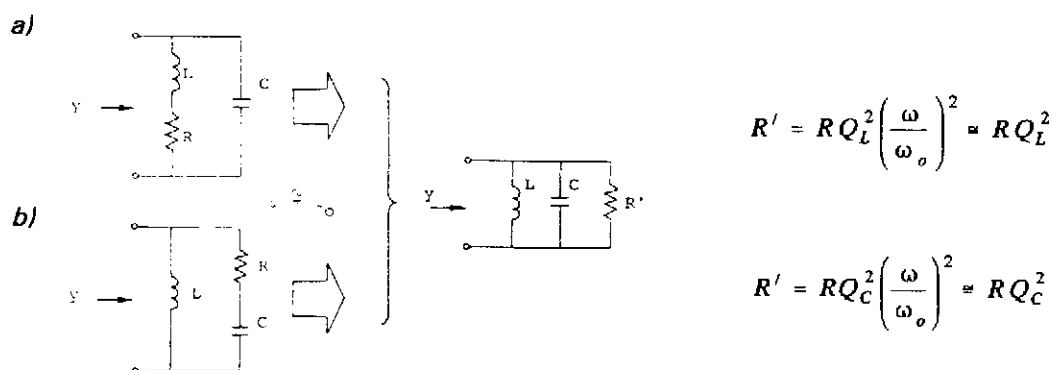


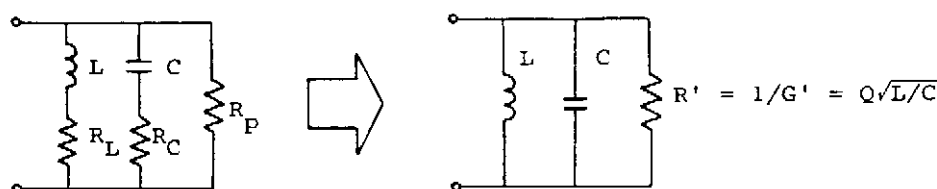
Fig. 4.6 Circuito equivalente aproximado para pérdidas en serie con la  $L$  o la  $C$ .



En conclusión, si las pérdidas son pequeñas y para frecuencias próximas a la de resonancia, las pérdidas en un circuito resonante paralelo pueden atribuirse a una resistencia en paralelo con la  $L$  y la  $C$  con independencia de donde se produzcan físicamente (fig. 4.7). Nótese también en esta figura cómo el inverso del factor  $Q$  del circuito es la suma de los inversos de cada resistencia considerada por separado, resultado también evidente a partir de la definición de  $Q$ :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{\omega_o} \cdot \frac{P_L}{U} \Big|_{\omega=\omega_o} \quad (4.8)$$

ya que las pérdidas totales  $P_L$  son la suma de las consideradas por separado a cada resistencia.



$$Q_L = \omega_o L / R_L \quad Q_C = \omega_o C R_C \quad Q_p = R_p / \omega_o L$$

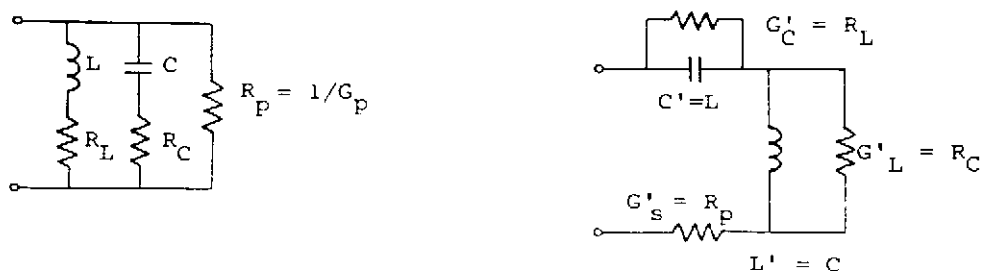
$$G' = (R_L Q_L^2)^{-1} + R_p^{-1} = 1/Q_L \omega_o L + 1/Q_C \omega_o L + 1/R_p$$

$$\text{por lo tanto } 1/Q = G' / \omega_o C = G / \omega_o L = 1/Q_C + 1/Q_p$$

Fig. 4.7 Circuito equivalente y valor del factor  $Q$  de un circuito resonante paralelo con pérdidas en diferentes sitios

Todavía podemos obtener más resultados sin atender a la estructura particular del circuito que conforma el resonador si hacemos uso de la propiedad de que, para  $Q$  elevados,  $\omega_{nr} = \omega_r = \omega_o$ , es decir, las frecuencias de resonancia son las mismas en régimen permanente y transitorio. En efecto, en ausencia de generador (régimen transitorio) y a partir de (4.8):

$$P_L = - \frac{dU}{dt} = \frac{\omega_o}{Q} U \quad \rightarrow \quad U(t) = U_o e^{-\frac{\omega_o}{Q} t} \quad (4.24)$$



$$Q_L = \omega_o L / R_L$$

$$Q'_C = \omega_o C' / G'_C (= Q_L)$$

$$Q_C = 1 / \omega_o C R_C = \omega_o L / R_C$$

$$Q'_L = 1 / G'_L \omega_o L' (= Q_C)$$

$$Q_p = R_p / \omega_o L$$

$$Q'_S = \omega_o L' / R'_S (= Q_p)$$

$$1/Q = \sum 1/Q_i$$

$$1/Q' = \sum 1/Q'_i (= 1/Q)$$

$$y(w) = Z'(w) = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{C}{L}} (1 + 2jQ\delta) = \frac{1}{Q'} \sqrt{\frac{L'}{C'}} (1 + 2jQ'\delta)$$

Fig. 4.8 Relación entre circuitos en serie y en paralelo utilizando el concepto de dualidad

de manera que las señales en el circuito son de la forma:

$$v(t) \text{ o } i(t) \sim e^{-\frac{\omega_o}{2Q}t} \cos(\omega_o t) \rightarrow e^{j\omega_o \left(1 + \frac{j}{2Q}\right)t} \quad (4.25)$$

Es decir, formalmente, la aparición de pérdidas en el circuito resonante, con independencia de cómo y dónde se produzcan éstas, se traduce en una frecuencia de resonancia compleja:

$$\Omega_o = \omega_o \left(1 + \frac{j}{2Q}\right) \quad (4.26)$$

resultado de gran utilidad en el análisis de pérdidas en situaciones resonantes complicadas que no admiten un planteamiento analítico sencillo, como en el caso de cavidades resonantes.

Para ilustrar la utilidad del resultado anterior, consideremos un circuito resonante paralelo sin pérdidas, para el que:

$$Z(\omega) = \frac{\frac{j\omega}{C}}{\omega_o^2 - \omega^2} = \frac{\frac{j\omega}{C}}{(\omega_o - \omega)(\omega_o + \omega)} \approx \frac{\frac{j}{C}}{2(\omega_o - \omega)} \quad (4.27)$$

sabiendo que la última aproximación corresponde a frecuencias en las proximidades de la resonancia. La presencia de pérdidas en el circuito modifica el resultado anterior, cambiando  $\omega_o$  por  $\Omega_o$ :

$$Z(\omega) \approx \frac{\frac{j}{C}}{2(\Omega_o - \omega)} = \frac{\frac{j}{C}}{2\omega_o + \frac{j\omega_o}{Q} - 2\omega} = \frac{\left(\frac{Q}{\omega_o C}\right)}{1 + 2jQ\delta} \quad (4.28)$$

expresión idéntica a la (4.15) obtenida anteriormente.

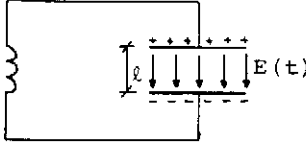
Debe advertirse que, si bien hasta ahora hemos elegido un circuito resonante paralelo como modelo de trabajo, todos los cálculos y conclusiones pueden trasladarse a un circuito serie haciendo uso de la dualidad entre ellos, tal como se resume en la figura 4.8.

#### 4.5 Perturbación de un sistema resonante

Cuando un sistema resonante se perturba ligeramente, de manera que su energía media varíe en  $\delta U$ , su frecuencia de resonancia varía en  $\delta\omega_o$ , de manera que:

$$\frac{\delta\omega_o}{\omega_o} = \frac{\delta U}{U} \quad (4.29)$$

Vamos a verificar este teorema general, que se debe a Boltzmann y Ehrenfest, para el caso de un circuito  $L$ - $C$ , cuando perturbamos el condensador (fig. 4.9). Suponiendo el campo eléctrico uniforme (sin efectos de bordes).



$$Q_o = \sigma_o S = \epsilon_o E_o S \quad E(t) = E_o \sin \omega_o t$$

$$Q(t) = Q_o \sin \omega_o t$$

$$F(t) = \frac{1}{2} E(t) Q(t) = \frac{1}{2} E_o Q_o \sin^2 \omega_o t$$

$$\langle F(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{1}{4} E_o Q_o$$

Fig. 4.9 Modelo de sistema resonante empleado para demostrar el teorema del invariante adiabático.  $S$  es la superficie de las placas del condensador.

Si desplazamos lentamente las placas del condensador de manera que en cada instante la situación pueda considerarse de equilibrio y no se produzcan cambios bruscos (de aquí el nombre de *invariante adiabático* de este teorema), el sistema realiza un trabajo medio:

$$\delta U = \langle F \rangle \delta l = \frac{1}{4} E_o Q_o \delta l = \frac{1}{4} \epsilon_o E_o^2 S \delta l \quad (*) \quad (4.30)$$

siendo  $\langle F \rangle$  el valor medio de la fuerza de atracción entre las placas y  $\delta l$  el desplazamiento (fig. 4.9). Al mismo tiempo:

$$U = 2U_e = 2 \frac{1}{4} \epsilon_o \int |E_o|^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon_o E_o^2 S l \quad (4.31)$$

de manera que:

$$\frac{\delta U}{U} = \frac{\delta l}{2l} \quad (4.32)$$

(\*) Nótese que  $\delta U$  es positivo porque al incrementar  $l$  un  $\delta l$  se realiza un trabajo contra la fuerza del sistema y, por tanto, se aumenta su energía.

Por otra parte:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \ln \omega_o = -\frac{1}{2} (\ln L + \ln C) \quad (4.33)$$

y modificando la expresión anterior para  $C$ :

$$\frac{\delta \omega_o}{\omega_o} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta C}{C} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta \left( \frac{1}{l} \right)}{\frac{1}{l}} = \frac{1}{2} l \frac{\delta l}{l^2} = \frac{\delta U}{U} \quad q.e.d. \quad (4.34)$$

Nótese que (4.30) se corresponde con el incremento de energía eléctrica producido al aumentar el volumen donde existe campo eléctrico en la cantidad  $S \cdot \delta l$ , observación que es útil para estudiar deformaciones de cavidades resonantes. Obsérvese también que si partimos de la expresión:

$$U = \frac{1}{4} C |V|^2 + \frac{1}{4} L |I|^2 \quad (4.35)$$

y suponemos que, durante la variación de  $C$ ,  $|V|$  se mantiene constante (porque está conectado a un generador, por ejemplo), obtenemos:

$$\delta U_1 = \frac{1}{4} \delta C |V|^2 = \frac{1}{4} \delta \left( \epsilon_o \frac{S}{l} \right) E_o^2 l^2 = -\frac{1}{4} \epsilon_o E_o^2 S \delta l \quad (4.36)$$

que difiere en el signo de la expresión correcta (4.30). Esto es debido a que en este caso el generador ha de suministrar una cantidad de energía  $\delta U_2$  para mantener  $|V|$  constante durante la variación, de manera que:

$$\delta U_1 + \delta U_2 = \delta U \Rightarrow \delta U_2 = \frac{1}{2} \epsilon_o E_o^2 S \delta l = -2 \delta U_1 \quad (4.37)$$

Como ilustración elemental de la utilidad del teorema, consideremos un circuito resonante que pasa a tener pérdidas en la  $L$  y la  $C$ :

$$j\omega_o L \Rightarrow j\omega_o L + R_L \quad , \quad j\omega_o C \rightarrow j\omega_o C + G_C \quad (4.38)$$

Es decir, que los valores de  $L$  y  $C$  varían:

$$L \rightarrow L \left( 1 - j \frac{R_L}{\omega_o L} \right) = L \left( 1 - \frac{j}{Q_L} \right) \quad , \quad \delta L = -j \frac{L}{Q_L} \quad (4.39)$$

$$C \rightarrow C \left( 1 - j \frac{G_C}{\omega_o C} \right) = C \left( 1 - \frac{j}{Q_C} \right) \quad , \quad \delta C = -j \frac{C}{Q_C} \quad (4.40)$$

(en el caso de la  $C$ , físicamente es como si el dieléctrico pasara a tener pérdidas y  $\epsilon$  se hiciese compleja). Si suponemos que durante la variación  $|V|$  y  $|I|$  se mantienen constantes mediante generadores exteriores, a partir de (4.35) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta U_1 &= -j \frac{1}{4} C |V|^2 \frac{1}{Q_C} - j \frac{1}{4} L |I|^2 \frac{1}{Q_L} = -j \left( \frac{U_m}{Q_L} + \frac{U_e}{Q_C} \right) = \\ &= -j \frac{U}{2} \left( \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} \right) = -j \frac{U}{2} \frac{1}{Q} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Como anteriormente, será  $\delta U_2 = -2\delta U_1$  i  $\delta U = -\delta U_1$ , de forma que:

$$\frac{\delta \omega_o}{\omega_o} = \frac{\delta U}{U} = \frac{j}{2} \cdot \frac{1}{Q} \quad (4.42)$$

con lo que se obtiene para la nueva frecuencia de resonancia la expresión ya conocida:

$$\Omega_o = \omega_o + \delta \omega_o = \omega_o \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right) \quad , \quad \frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} \quad (4.43)$$

#### 4.6 Resonancia en líneas

Para los circuitos L-C anteriores hemos definido dos conceptos de resonancia:

a) La situación que se produce cuando al circuito se le dota de energía inicial y se abandona a sí mismo, caracterizada por su frecuencia  $f_{nr}(\omega_{nr})$ .

b) En régimen senoidal estacionario, la situación que, como respuesta a la excitación de un generador, se produce cuando  $U_m = U_e$ . Esta situación se caracteriza por su frecuencia  $f_r(\omega_r)$ .

Hemos visto que, cuando no hay pérdidas,  $f_r = f_{nr}$ , y cuando existen, pero son bajas,  $f_r$  y  $f_{nr}$  son tan parecidas que pueden tomarse sus valores iguales sin error importante. También hemos visto que la situación *b* es equivalente a requerir valor real para la impedancia de entrada del circuito.

Estos conceptos pueden extenderse a situaciones más generales que las de una red *L-C* y, en particular, a líneas de transmisión.

Consideremos de nuevo una sección de longitud  $\ell$  de línea ideal en cortocircuito. Anteriormente hemos comprobado que la impedancia de entrada tiene infinitos ceros e infinitos polos (inmitancia de entrada real, en este caso nula, fig. 2.17); es decir, tiene infinitas frecuencias de resonancia de acuerdo con la condición *b*.

Por otra parte, dado que el circuito es sin pérdidas y los polos y ceros de  $Z$  (o bien  $Y$ ) está alternados, admite los dos posibles circuitos equivalentes de la figura 4.10 (formas de Foster). El de *a* pone de manifiesto los ceros de  $Z$ , ( $\omega_{sn}$ , frecuencias a las que  $\ell = n\lambda/2$  y el de *b*, los de  $Y$  ( $\omega_{pn}$ , frecuencias a las que  $\ell = (2n-1)\lambda/4$ ).

Los valores de los elementos de los circuitos equivalentes pueden calcularse del modo siguiente:

$$\text{para } \omega \approx \omega_{so} = 0, \quad \beta \ell = \frac{\omega}{c} \ell \ll 1,$$

$$Z_i = jZ_o \tan \beta \ell \approx jZ_o \beta \ell = j \sqrt{\frac{L}{C}} \omega \sqrt{LC} \ell = j\omega L \ell \quad (4.44)$$

de manera que  $L_o = L \ell$ .

Para  $\omega \approx \omega_{sn}$ :

$$Z_i = jZ_o \tan n\pi \left( 1 + \frac{\Delta \omega}{\omega_{sn}} \right) = jZ_o \tan (n\pi + n\pi \delta) = jZ_o \tan (n\pi \delta) \quad (4.45)$$

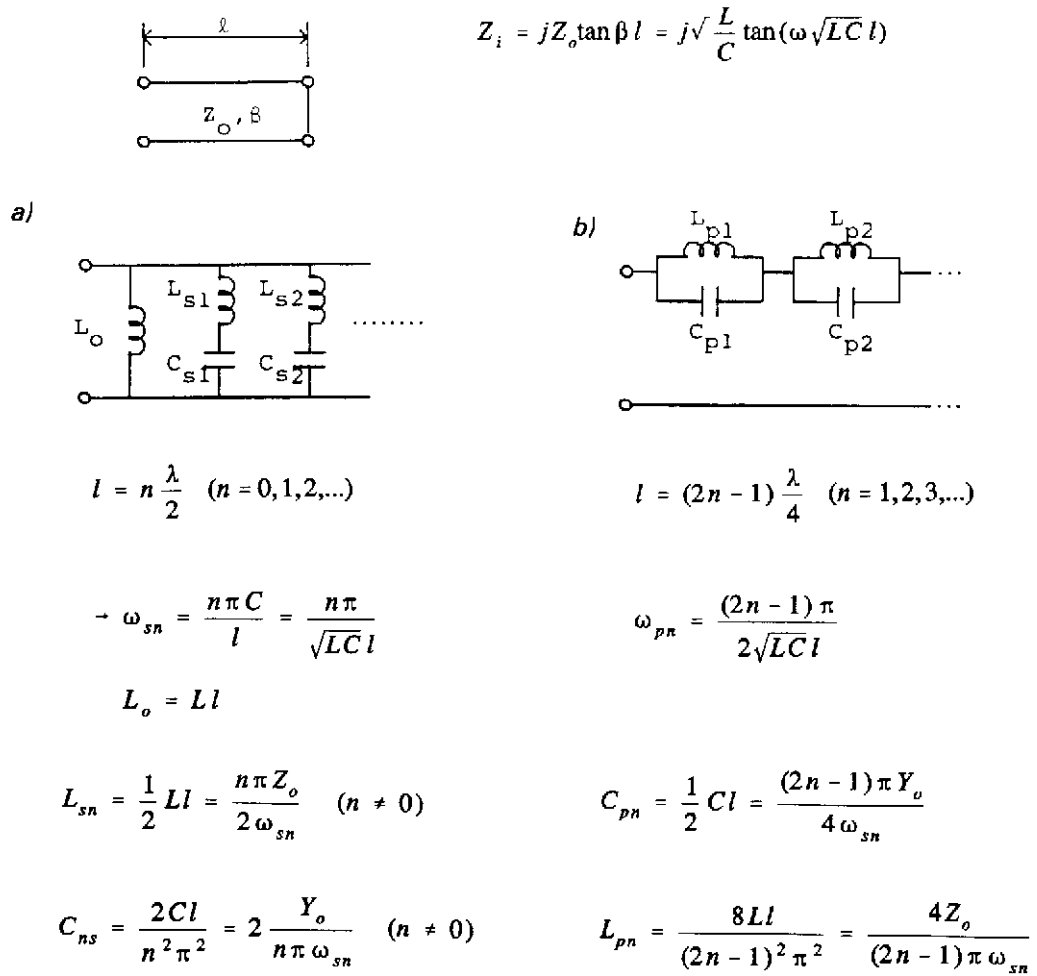


Fig. 4.10 Circuitos equivalentes posibles para una sección de línea en cortocircuito. El a pone de manifiesto los ceros de  $Z_i$ , y el b los ceros de  $Y_i = Z_i^{-1}$  (polos de  $Z_i$ )

con  $\delta = \Delta\omega/\omega_{sn}$ . Para  $n\pi\delta \ll 1$ :

$$Z_i \approx jZ_o n\pi\delta \quad (4.46)$$

Al mismo tiempo, en las proximidades de  $\omega_{sn}$  todos los circuitos en serie de la figura 4.10a presentan una impedancia finita, excepto el formado por  $L_{sn}-C_{sn}$ , para el que se hace arbitrariamente pequeña. Por tanto, del circuito equivalente:



$$Z_i = j \left( \omega L_{sn} - \frac{1}{\omega C_{sn}} \right) = j \omega_{sn} L_{sn} \left( \frac{\omega}{\omega_{sn}} - \frac{\omega_{sn}}{\omega} \right) = 2j \omega_{sn} L_{sn} \delta \quad (47)$$

expresión que, al igualarse con (4.46), proporciona:

$$L_{sn} = \frac{n\pi Z_o}{2\omega_{sn}} = \frac{n\pi \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{LC\ell}}{2n\pi} = \frac{1}{2} L\ell \quad (4.48)$$

$C_{sn}$  se obtiene inmediatamente a partir de la condición:

$$L_{sn} C_{sn} = \frac{1}{\omega_{sn}^2} \quad (4.49)$$

Los elementos del circuito de la figura 4.10b se pueden obtener de manera análoga. Para este último circuito nótese que, cuando  $\omega \rightarrow 0$ , se reduce a una inductancia de valor:

$$L'_o = \sum_{i=1}^{\infty} L_{pi} = \frac{8L\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = L\ell = L_o \quad (4.50)$$

resultado que coincide con el examen del circuito *a* cuando  $\omega \rightarrow 0$ .

Las conclusiones para el último caso de una línea en circuito abierto (fig. 4.11) son análogas.

Frecuentemente, el comportamiento de estos circuitos solo interesan en las proximidades de una determinada resonancia, en cuyo caso el circuito equivalente puede simplificarse considerando únicamente aquel circuito *L-C* que produce el cero o el polo en cuestión. Si además, como es normal, las resonancias de interés se limitan a las dos primeras, los circuitos equivalentes simplificados son lo que se recogen en la figura 4.12.

Para terminar este análisis, basado en la búsqueda de ceros y polos de inmitancias, nos resta verificar que para las resonancias halladas se cumple la condición  $U_m = U_e$ .

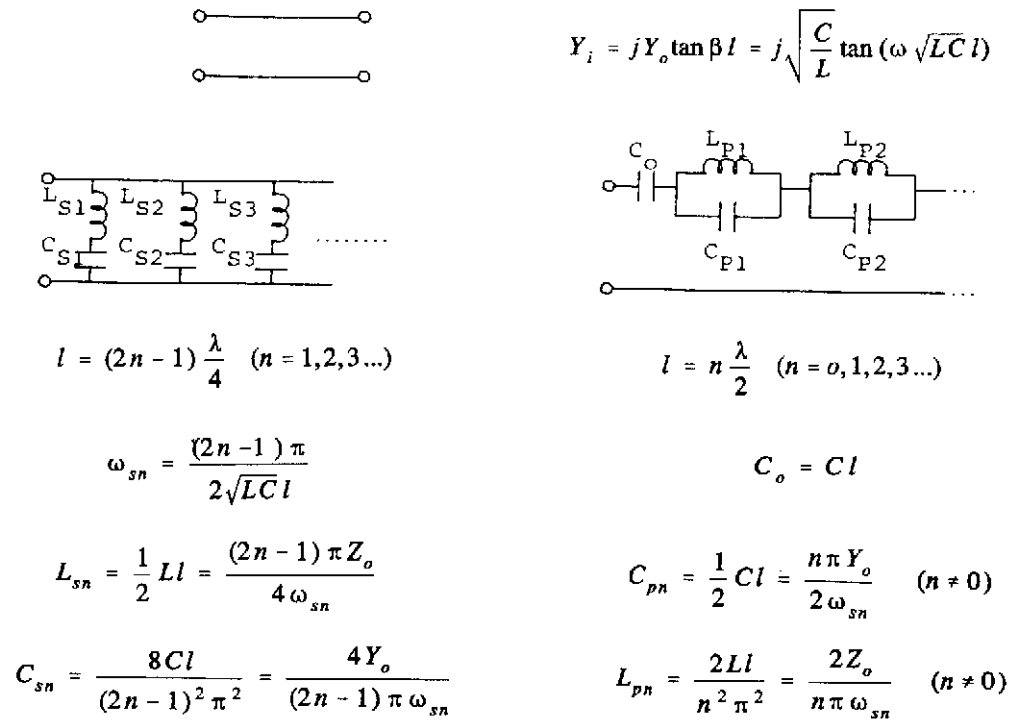


Fig. 4.11 Circuitos equivalentes para una sección de línea en circuito abierto (véase la figura anterior)

En efecto, para la línea en cortocircuito (fig. 4.10) con el origen de las  $z$  situado en éste, tenemos:

$$V = -2jV^+ \sin \beta z \quad (4.51)$$

$$I = 2Y_0 V^+ \cos \beta z \quad (4.52)$$

Para  $\ell = \lambda/4$  (primera resonancia):

$$U_e = \frac{1}{4} C \int_{-\lambda/4}^0 |V|^2 dz = \frac{C}{4} 4 |V^+|^2 \int_{-\lambda/4}^0 \sin^2 \beta z dz = \frac{1}{8} C |V^+|^2 \lambda \quad (4.53)$$

$$U_m = \frac{1}{4} L \int_{-\lambda/4}^0 |I|^2 dz = \frac{L}{4} 4 Y_0^2 |V^+|^2 \int_{-\lambda/4}^0 \cos^2 \beta z dz = \frac{1}{8} L |V^+|^2 Y_0^2 \lambda \quad (4.54)$$

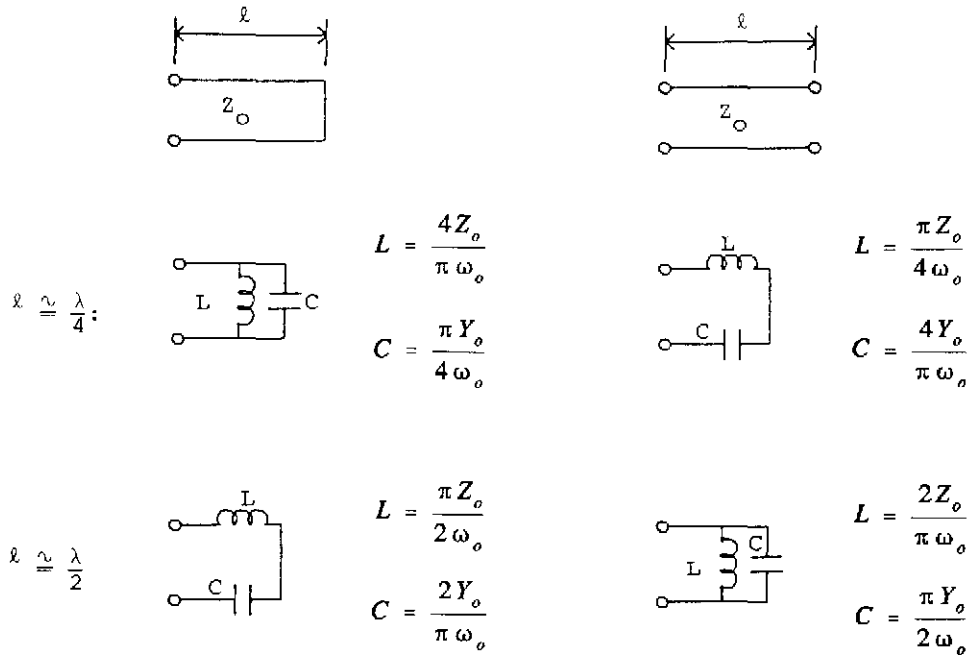


Fig. 4.12 Simplificación de los circuitos equivalentes de las figuras 4.10 y 4.11 en las proximidades de las dos primeras resonancias

que teniendo en cuenta que  $Y_0^2 = C/L$  resultan iguales.

En las restantes resonancias,  $l$  es  $n$  múltiplo de  $\lambda/4$ ,  $l = n\lambda/4$ , y el cálculo de  $U_e$  y  $U_m$  proporciona, de forma inmediata,  $n$  veces los valores (4.53) y (4.54), de manera que continúa verificándose la igualdad.

#### 4.7 Resonancia y ondas estacionarias

En el apartado anterior, hemos analizado las resonancias de una sección de línea a través de su inmitancia de entrada (condición  $b$ ). Alternativamente, podemos tomar el punto de vista  $a$  y preguntarnos: si consideramos una sección de línea ideal con sus extremos en *c.c.*, *c.o.* o uno en cada situación, aislada de cualquier otro sistema, ¿bajo qué condiciones podrán existir en las mismas distribuciones de tensión y corrientes no nulas?

Una respuesta posible resulta de considerar, por ejemplo, la distribución estacionaria de tensión y corrientes en una línea en *c.c.* (fig. 4.13). Para todos los planos que distan del *c.c.* un número impar de  $\lambda/4$  ( $A_1, A_2, \dots$ ) la corriente  $I$  es nula y, por tanto, los conductores pueden cortarse sin perturbar

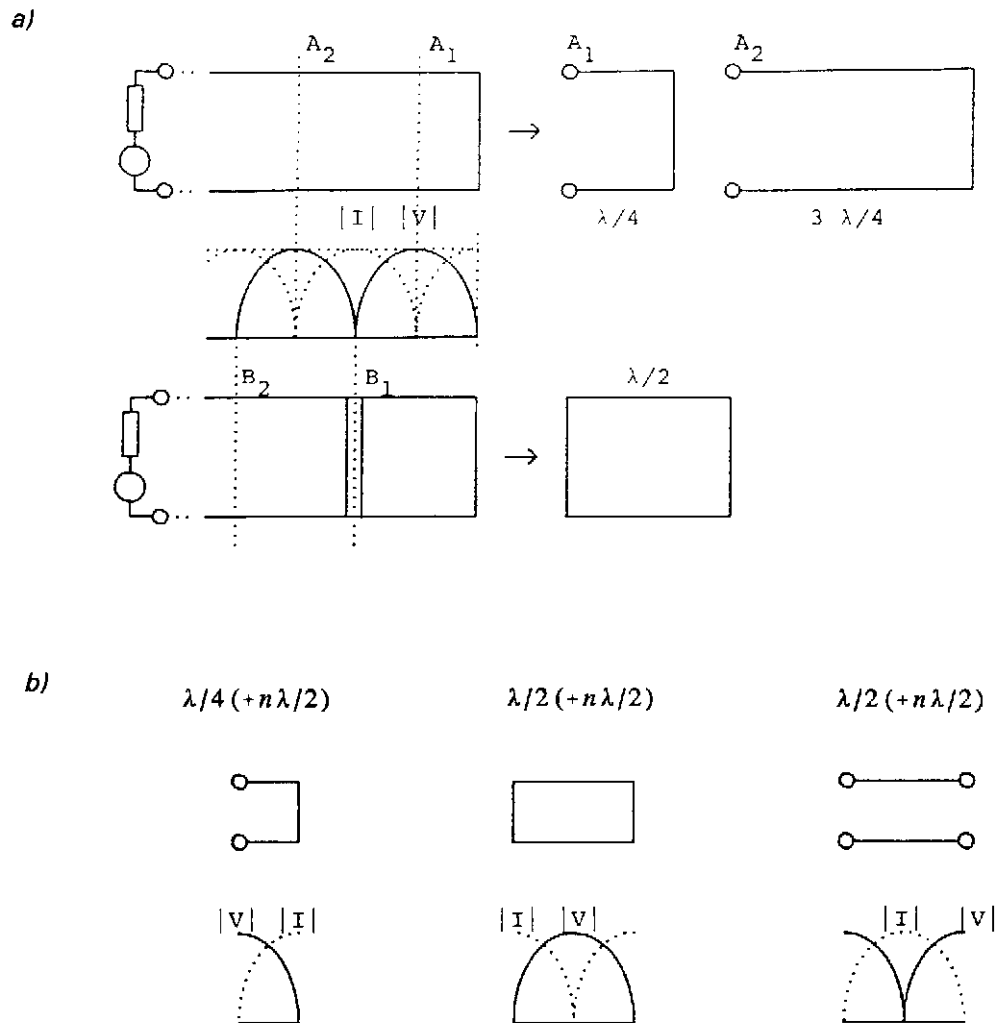


Fig. 4.13 a) Obtención de secciones de línea resonantes partiendo de una distribución estacionaria de tensión y corriente

b) Elementos resonantes básicos. Sólo están dibujadas las distribuciones de  $|I|$  y de  $|V|$  para los modos más bajos ( $n=0$ )

el sistema ni a la izquierda ni a la derecha (fig. 4.13a), con lo que se obtienen de esta manera trozos de línea aislados con distribuciones de corriente y tensión idénticas a los que tenían antes de ser cortados.

Análogamente, en los planos que distan  $n\lambda/2$  del *c.c.* ( $B_1, B_2, \dots$ ), por ser la tensión nula, podemos conectar entre sí los dos conductores de la línea mediante dos hilos y posteriormente cortar como en el caso anterior (fig. 4.13a). Ahora obtendremos trozos de línea con sus extremos en *c.c.*

De igual manera podríamos proceder partiendo de una línea en *c.a.*, llegando, en definitiva, a las tres posibles situaciones básicas de la figura 4.13b, donde se han dibujado las distribuciones de  $|I|$  y de  $|V|$  para los modos resonantes más bajos. Es evidente que, desde este punto de vista, hemos vuelto a encontrar las mismas resonancias del párrafo anterior.

Por otra parte, también existe una onda estacionaria con ceros de  $|V|$  y de  $|I|$  si la impedancia de carga es puramente reactiva, ya que también produce una reflexión total. De manera que la construcción de la figura 4.13 podríamos haberla realizado en este caso más general, sin más diferencia que ahora en la carga no habría ni un mínimo ni un máximo de  $|V|$  o  $|I|$  y las secciones obtenidas no serían de longitud  $\lambda/4$  o  $\lambda/2$ .

Podemos, por tanto, preguntarnos por las resonancias de una sección de línea con dos reactancias en sus extremos (fig. 4.14), ya que es una estructura sin pérdidas. La respuesta puede darse, en vista de las anteriores, interpretando la resonancia como una onda estacionaria atrapada entre las dos reflexiones totales de los extremos. Si elegimos un plano de referencia cualquiera y denominamos  $Z_D$  y  $Z_I$  a las impedancias vistas a la derecha y la izquierda, respectivamente, y  $V^+$  y  $V^-$  a las amplitudes de las ondas positiva y negativa en el plano, tendremos, según miremos a la derecha o a la izquierda:

$$\frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_D - Z_o}{Z_D + Z_o} \quad \frac{V^+}{V^-} = \frac{Z_I - Z_o}{Z_I + Z_o} \quad \rightarrow \quad (4.55)$$

$$\Rightarrow \frac{Z_D - Z_o}{Z_D + Z_o} = \frac{Z_I + Z_o}{Z_I - Z_o} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z_I + Z_D = 0 & (4.56a) \\ \text{o bien} \\ Z_I, Z_D = \pm j\infty & (4.56b) \end{cases}$$

El cumplimiento de las condiciones (4.56a) y (4.56b) nos dará, por tanto, las resonancias del circuito.

**Ejemplo 1** Consideremos de nuevo una sección de línea con sus extremos en *c.c.* y longitud  $\ell$ , para la que ya sabemos que las frecuencias de resonancia son aquellas que hacen que  $\ell = n\lambda/2$ . Para aplicar las condiciones anteriores podemos elegir como plano de referencia el de simetría ( $z = \ell/2$ , fig. 4.15a)

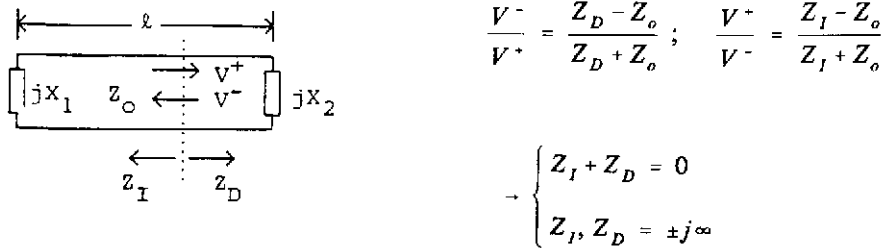
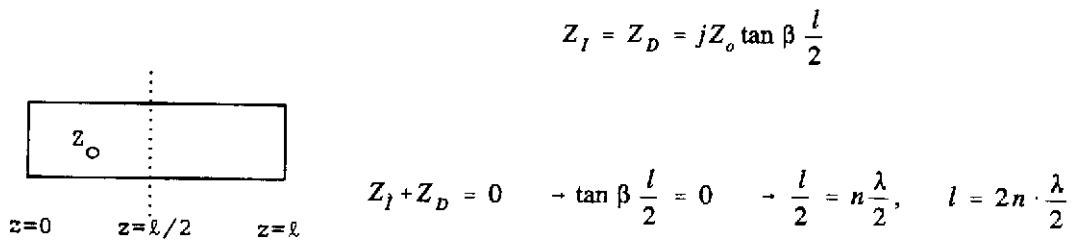


Fig. 4.14 Obtención de las condiciones de resonancia para una sección de línea con cargas reactivas en sus extremos (circuito sin pérdidas), a partir de su interpretación como ondas estacionarias.

a) Plano  $z = l/2$



$$Z_I, Z_D = \pm j\infty \rightarrow \tan \beta \frac{l}{2} = \pm \infty \rightarrow \frac{l}{2} = (2n+1) \frac{\lambda}{4}, \quad l = (2n+1) \frac{\lambda}{2}$$

b) Plano  $z=0$

$$Z_I = 0; \quad Z_D = jZ_o \tan \beta l$$

$$Z_I + Z_D = 0 \rightarrow \tan \beta l = 0, \quad l = n \frac{\lambda}{2}$$

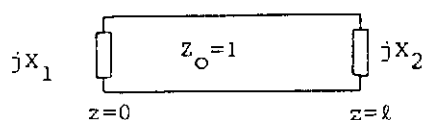
$$Z_I, Z_D = \pm j\infty; \quad \text{No se puede cumplir}$$

Fig. 4.15 Obtención de las resonancias de una sección de línea con los extremos en c.c. a partir de las condiciones (4.56a) y (4.56b). El cálculo se realiza en dos planos diferentes

y obtenemos, de (4.56a), que  $l$  sea un número par de  $\lambda/2$ , y de (4.56b), que sea un número impar (fig. 4.15a). Otra opción es tomar como referencia uno de los extremos, por ejemplo  $z=0$  (fig. 4.15b). En este caso, (4.56a) proporciona la totalidad de soluciones, mientras que (4.56b) no se puede aplicar porque  $Z_l=0$  a causa de la elección del plano. ■

**Ejemplo 2** La situación de la figura 4.14 puede volver a considerarse en más detalle, como se resume en la figura 4.16. Nótese que tomamos  $Z_o=1$  por simplicidad.

a)

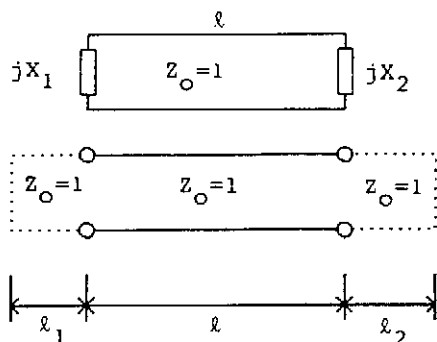
plano  $z = 0$ 

$$Z_l = jX_l; \quad Z_D = \frac{jX_2 + jS}{1 + jX_2 jS}$$

$$\text{con } S = \tan\beta l$$

$$Z_l + Z_D = 0 \rightarrow X_1 + X_2 + S(1 - X_1 X_2) = 0 \rightarrow S = \frac{X_1 + X_2}{X_1 X_2 - 1} = \tan\beta l$$

b)



$$jX_1 = j \tan\beta l_1$$

$$jX_2 = j \tan\beta l_2$$

$$\text{Resonancia: } l_1 + l + l_2 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta(l_1 + l + l_2) = n\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\beta l = -\tan\beta(l_1 + l_2) = -\frac{\tan\beta l_1 + \tan\beta l_2}{1 - \tan\beta l_1 \tan\beta l_2} = \frac{X_1 + X_2}{X_1 X_2 - 1}$$

Fig. 4.16 Obtención de las resonancias del circuito de la figura:

a) directamente;

b) substituyendo las cargas reactivas por secciones de líneas en cortocircuito

La solución general está descrita en la figura 4.16a, resultado de la aplicación literal de (4.56a). Alternativamente, podemos substituir las reactancias  $jX_1$  y  $jX_2$  por secciones de la misma línea de transmisión ( $Z_0=1$ ) en c.c. que proporcionan valores equivalentes, y obtener las resonancias de la línea resultante, de longitud  $(\ell + \ell_1 + \ell_2)$ , a partir del resultado conocido que es un múltiplo de  $\lambda/2$  (fig. 4.16b). ■

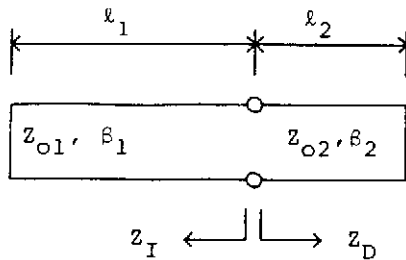
**Ejemplo 3** Cuando hay involucradas varias líneas de características diferentes, como en la figura 4.17, puede apreciarse mejor la utilidad de las expresiones (4.56a) y (4.56b). En efecto, en el caso de la figura, de (4.56a) se obtiene sin esfuerzo:

$$Z_{o1} \tan\left(\frac{\omega}{c_1} \ell_1\right) + Z_{o2} \tan\left(\frac{\omega}{c_2} \ell_2\right) = 0 \quad (4.57)$$

Por otra parte, 56b proporciona las ecuaciones:

$$\tan\left(\frac{\omega}{c_1} \ell_1\right) = \tan\left(\frac{\omega}{c_2} \ell_2\right) = \pm\infty \quad (4.58)$$

el cumplimiento simultáneo generalmente es imposible (es decir, no proporcionan ninguna solución) a menos que el cociente entre  $\ell_1/c_1$  y  $\ell_2/c_2$  sea un número racional. ■



$$Z_I + Z_D = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow Z_{o1} \tan\beta_1 \ell_1 + Z_{o2} \tan\beta_2 \ell_2 = 0$$

$$Z_I, Z_D = \pm j\infty \rightarrow \tan\beta_1 \ell_1 = \tan\beta_2 \ell_2 = \pm\infty \quad (\text{imposible en general})$$

Fig. 4.17 Cálculo de la resonancia de la estructura dibujada, formada por dos líneas de transmisión diferentes.



### 4.8 Efecto de las pérdidas

Cuando la línea tiene pérdidas (bajas), es necesario rehacer los cálculos que proporcionan los valores de los elementos de los circuitos equivalentes de las figuras 4.10, 4.11 y 4.12. Volviendo al ejemplo de sección en línea en c.c.:

$$Z_i = Z_o \tanh(\alpha \ell + j\beta \ell) = Z_o \frac{\tanh \alpha \ell + j \tan \beta \ell}{1 + j \tanh \alpha \ell \cdot \tan \beta \ell} \quad (4.59)$$

Si las pérdidas son bajas:

$$\alpha \ell \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \tanh \alpha \ell \approx \alpha \ell \quad (4.60)$$

y si estamos en las proximidades de la  $n$ -ésima resonancia en serie:

$$\omega = \omega_{sn} = \frac{n\pi}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad \omega = \omega_{sn}(1 + \delta) \quad ; \quad \beta \ell = n\pi(1 + \delta) \quad (4.61)$$

$$\rightarrow \tan \beta \ell = \tan(n\pi + n\pi\delta) = \tan n\pi\delta \approx n\pi\delta \quad (4.62)$$

La última aproximación se ha hecho considerando  $n\pi\delta \ll 1$ . De manera que:

$$Z_i \approx Z_o \frac{\alpha \ell + jn\pi\delta}{1 + j\alpha \ell n\pi\delta} \approx Z_o (\alpha \ell + jn\pi\delta) = Z_o \alpha \ell (1 + j \frac{n\pi}{\alpha \ell} \delta) \quad (4.63)$$

Esta última expresión puede escribirse de la forma:

$$Z_i = R_{sn} (1 + 2jQ_{sn}\delta)$$

$$\text{donde} \quad R_{sn} = Z_o \alpha \ell \quad ; \quad Q_{sn} = \frac{n\pi}{2\alpha \ell} \quad (4.64)$$

que corresponde a la impedancia de entrada de un circuito resonante en serie con pérdidas.

Los valores de  $R_{sn}$  y  $Q_{sn}$  son consistentes, puesto que:

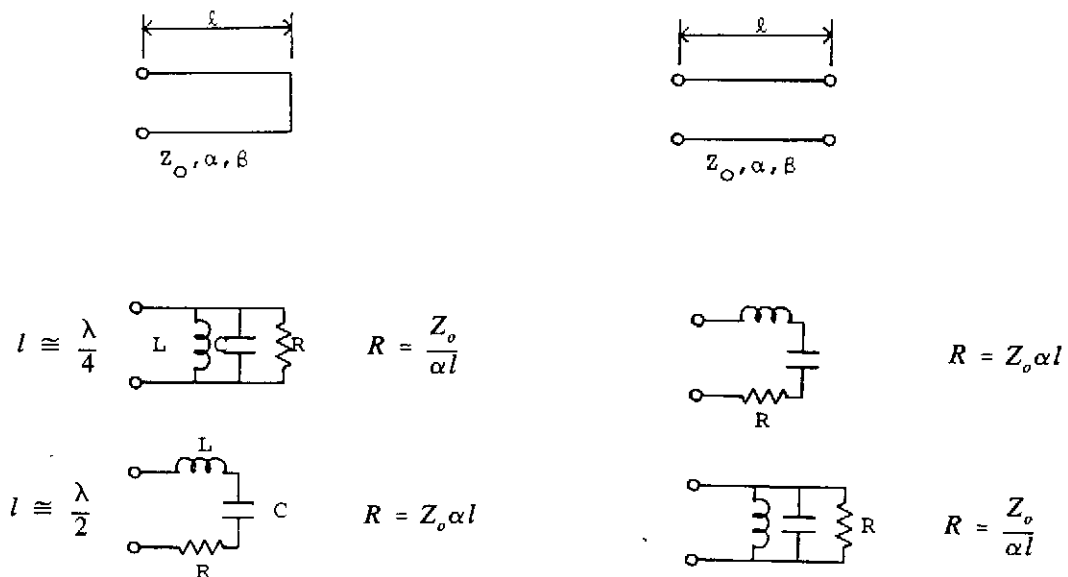
$$Q_{sn} = \frac{\omega_{sn} L_{sn}}{R_{sn}} = \frac{n\pi Z_o}{2Z_o \alpha \ell} = \frac{n\pi}{2\alpha \ell} \quad (4.65)$$

Por otra parte, el valor de  $Q_{sn}$  puede escribirse:

$$Q_{sn} = \frac{n\pi}{2\alpha l} - \frac{\beta l}{2\alpha l} \Big|_{\omega = \omega_{sn}} = \frac{\beta}{2\alpha} \Big|_{\omega = \omega_{sn}} \quad (4.66)$$

Esta expresión para el  $Q_{sn}$  es independiente de  $n$ , es decir, del orden de la resonancia, y puede comprobarse que también es válida para las resonancias en paralelo, así como para una sección de línea en circuito abierto.

En consecuencia, cuando la línea tiene pérdidas, los circuitos equivalentes de las figuras 4.10, 4.11 y 4.12 han de modificarse introduciendo resistencias de valor adecuado en cada circuito resonante, de manera que proporcionen un valor de  $Q = \beta/2\alpha$ .



En todos los casos  $Q = \beta/2\alpha$

Fig. 4.18 Modificación de los circuitos equivalentes de la figura 4.12 para el caso de pérdidas en la línea. Los valores de  $L$  y  $C$  son los mismos de la figura 4.12

Es instructivo volver a obtener los resultados anteriores por el procedimiento aproximado de calcular las pérdidas a partir de las distribuciones de tensión y de corriente en el caso ideal sin pérdidas.

Volviendo a los ejemplos de líneas en *c.c.* o en *c.a.* indiferentemente:

$$\begin{aligned}
 P_L &= \frac{1}{2} R \int_{z_1}^{z_2} |I|^2 dz + \frac{1}{2} G \int_{z_1}^{z_2} |V|^2 dz = \\
 &= \frac{1}{2} R Y_o^2 \int_{z_1}^{z_2} |V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z}|^2 dz + \frac{1}{2} G \int_{z_1}^{z_2} |V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}|^2 dz = \\
 &= \frac{1}{2} R Y_o^2 \int_{z_1}^{z_2} (|V^+|^2 + |V^-|^2 \pm 2 |V^+ V^-| \cos 2\beta z) dz + \\
 &+ \frac{1}{2} G \int_{z_1}^{z_2} (|V^+|^2 + |V^-|^2 \mp 2 |V^+ V^-| \cos 2\beta z) dz \quad \begin{pmatrix} \pm = c c \\ \mp = c o \end{pmatrix} \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

Cuando la sección de la línea es un múltiplo entero de  $\lambda/4$ , como en los casos resonantes que nos ocupan, y solamente en este caso:

$$\int_{z_1}^{z_2} \cos 2\beta z dz = 0 \quad ; \quad \left( z_2 = z_1 + n \frac{\lambda}{4} \right) \quad (4.68)$$

y, en consecuencia:

$$P_L = P_L^+ + P_L^- \quad (4.69)$$

donde hemos definido  $P_L^\pm$ :

$$P_L^+ = \left( \frac{1}{2} R Y_o^2 + \frac{1}{2} G \right) \int_{z_1}^{z_2} |V^+|^2 dz \quad ; \quad \left( z_2 = z_1 + n \frac{\lambda}{4} \right) \quad (4.70)$$

como las potencias que disiparían, por separado, las ondas positiva y negativa.

Análogamente, podemos poner:

$$U_m = U_m^+ + U_m^- \quad ; \quad U_e = U_e^+ + U_e^- \quad ; \quad U = U^+ + U^- \quad (4.71)$$

Por otra parte, para un c.c. o un c.a. es  $|V^+| = |V^-|$  y, en consecuencia:

$$P_L^+ = P_L^- \quad ; \quad U^+ = U^- \quad (4.72)$$

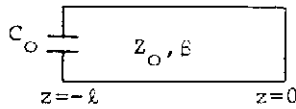
Con todas estas expresiones podemos calcular el factor  $Q$  de una sección múltiplo entero de  $\lambda/4$ :

$$\begin{aligned} Q &= \omega_o \frac{U}{P_L} = \omega_o \frac{2U^+}{2P_L^+} = \frac{\omega_o}{v_E} \frac{v_p U^+}{P_L^+} = \frac{\omega_o}{v_E} \frac{P^+}{P_L^+} = \\ &= \frac{\omega_o}{v_p} \frac{v_p}{v_E} \frac{1}{2} \frac{P_L^+}{P^+} = \frac{v_p}{v_E} \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{v_p}{v_g} \frac{\beta}{2\alpha} \end{aligned} \quad (4.73)$$

En estos cálculos hemos hecho uso del concepto de velocidad de propagación de la energía, ( $v_E = v_g$ ), y de la expresión de  $\alpha$  en función de  $P_L^+$  y  $P^+$ . Para el caso de línea no dispersiva  $v_p = v_g = c$ , y (4.73) se reduce a (4.66).

**Ejemplo 1** Consideremos el circuito de la figura 4.19. La condición de resonancia se obtiene inmediatamente (véase la misma figura); sin embargo, en el caso de pérdidas, la expresión  $Q = \beta/2\alpha$  no es válida puesto que ahora el condensador  $C_o$  contribuye a almacenar energía. Por tanto, para calcular  $Q$  es preferible la energía magnética  $U_m$ :

$$\begin{aligned} U &= 2 U_m = 2 \frac{1}{4} L \int_{-\ell}^{\ell} |I|^2 dz = \frac{1}{2} L Y_o^2 |V^+|^2 \int_{-\ell}^{\ell} \cos^2 \beta z dz = \\ &= \frac{1}{4} L Y_o^2 |V^+|^2 \int_{-\ell}^{\ell} (1 + \cos 2\beta z) dz = \\ &= \frac{1}{4} L Y_o^2 |V^+|^2 \left( \ell + \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta \ell \right) \end{aligned} \quad (4.74)$$



$$Z_I = \frac{1}{j\omega C_0}, \quad Z_D = jZ_0 \tan \beta l$$

$$Z_I + Z_D = 0 \rightarrow Z_0 \tan \beta l = \frac{1}{\omega C_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta l = \tan^{-1} \left[ \frac{Y_0}{\omega C_0} \right] \rightarrow l < \lambda/4$$

Fig. 4.19 Circuito resonante del ejemplo 1.

La potencia disipada la calculamos evaluando (4.67) en el intervalo  $(-\ell, 0)$  y teniendo en cuenta que  $|V^+| = |V^-|$ :

$$P_L = R Y_0^2 |V^+|^2 \left( \ell + \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta \ell \right) + G |V^+|^2 \left( \ell - \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta \ell \right) \quad (4.75)$$

(4.74) y (4.75) nos permiten escribir inmediatamente la expresión del factor  $Q$ . ■

**Ejemplo 2** En la expresión (4.73), obtuvimos un resultado referido a una línea dispersiva. Cabe preguntarse cómo hemos de modificar todos los resultados anteriores en el caso de dispersión, y en particular, los circuitos equivalentes.

Para una línea dispersiva:

$$\beta = \frac{\omega}{v_p}, \quad \text{con } v_p = v_p(\omega) \quad (4.76)$$

En las proximidades de una resonancia  $(\omega_0, \beta_0)$ :

$$\begin{aligned} \beta \ell &= \beta_0 \ell + \Delta \beta \ell = \beta_0 \ell + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \Delta \omega \ell = \beta_0 \ell + \frac{\Delta \omega}{v_g} \ell = \\ &= \beta_0 \ell \left( 1 + \frac{\Delta \omega}{v_g} \frac{v_p}{\omega_0} \right) = \beta_0 \ell \left( 1 + \frac{v_p}{v_g} \delta \right) \end{aligned} \quad (4.77)$$

Esta expresión se diferencia del argumento de (4.45) en el factor  $v_p/v_g$  que acompaña a  $\delta$ . Por tanto, si la línea tiene dispersión, todos los elementos  $L$  y  $C$  de los circuitos equivalentes obtenidos anteriormente han de ser multiplicados por  $v_p/v_g$ , que ahora son dependientes de la frecuencia.

Debemos hacer lo mismo con la expresión del factor  $Q$ , como ya encontramos en (4.73). Sin embargo, los valores de los elementos resistivos equivalentes de las pérdidas no se modifican. En efecto, para un circuito resonante serie, por ejemplo, teníamos antes:

$$Q_{sn} = \frac{\omega_{sn} L_{sn}}{R_{sn}} \quad (4.78)$$

y ahora:

$$\frac{v_p}{v_g} Q_{sn} = \frac{\omega_{sn} \left( \frac{v_p}{v_g} \right) L_{sn}}{R_{sn}} \quad (4.79)$$

■

**Ejemplo 3** La expresión para el factor  $Q$  de una sección de línea toma la forma explícita:

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\beta} = \frac{2}{\omega\sqrt{LC}} \left[ \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} + \frac{G}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} \right] = \frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} = \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C}$$

Es decir, el factor  $Q$  de la línea coincide con el factor  $Q$  de su célula elemental (fig. 3.1a). ■

## Capítulo 5 Circuitos de microondas (I). Propiedades generales. Redes de dos accesos

### 5.1 Introducción

Históricamente, la teoría de circuitos de microondas surge por la necesidad de dar un tratamiento sencillo a los sistemas en guía de ondas y cavidades resonantes, que inicialmente solo son tratables a través de su descripción electromagnética completa.

Para nosotros, que obviamos estos temas, la tarea consiste en incorporar las líneas de transmisión. Dado que su funcionamiento viene descrito en términos de tensiones y corrientes, la tarea no es complicada; pero la peculiaridad de su comportamiento (ondas positivas y negativas, coeficientes de reflexión, etc.), sugiere una descripción nueva, denominada parámetros de dispersión o parámetros  $S$ , que pone de manifiesto de forma evidente los aspectos de propagación del circuito que se estudie.

La importancia de estos parámetros  $S$  es muy grande ya que, como veremos, su medida puede hacerse de manera más directa y sencilla que la de impedancias o admitancias, y posteriormente permitirán incorporar fácilmente las guías de onda, las cavidades y otros elementos al mundo, bien conocido por todos, de circuitos equivalentes analizables en términos de tensiones y corrientes.

### 5.2 Definiciones y propiedades básicas

Por el momento consideraremos como *circuito de microondas* el circuito formado por elementos pasivos concentrados ( $R, L, C$ ), dispositivos activos (transistores, diodos) y líneas de transmisión. Estas últimas son las que tienen en cuenta el retardo debido a la velocidad de propagación finita; dicho de otro modo, los efectos de retardo serán tenidos en cuenta exclusivamente mediante la presencia de líneas de transmisión, tanto formando parte del circuito, como para transportar las señales desde el circuito o hacia el mismo.

Dado que las líneas de transmisión son elementos pasivos lineales y recíprocos, las propiedades genéricas de los circuitos de microondas así definidos son las mismas que las de los convencionales.

Recordemos, en todo caso, que una red recíproca es aquella en la que el intercambio entre un generador y un medidor, ambos sin impedancia, no produce modificación de la lectura del segundo. Asimismo es cierto que todas las redes pasivas son recíprocas; sin embargo a frecuencias de microondas existen dispositivos (aisladores, circuladores) formados por materiales magnéticos (ferritas) que son pasivos pero no recíprocos.

Es importante recalcar que la conexión de nuestro circuito con el exterior se realiza exclusivamente mediante líneas de transmisión, que denominaremos accesos (en inglés *port*). En cada una de estas líneas es necesario fijar un plano de referencia donde mediremos las tensiones y corrientes,  $\{V_i, I_i, i=1, 2, \dots\}$ , que servirán para describir las propiedades de la red o circuito (fig. 5.1), con el convenio de tomar como positiva la corriente si entra en la red. De esta manera, una red de  $N$  accesos viene descrita por las  $2N$  variables  $\{V_i, I_i\}$  de las que solamente la mitad son independientes.

La descripción más frecuente de la red es a través de sus matrices de impedancias o admitancias:

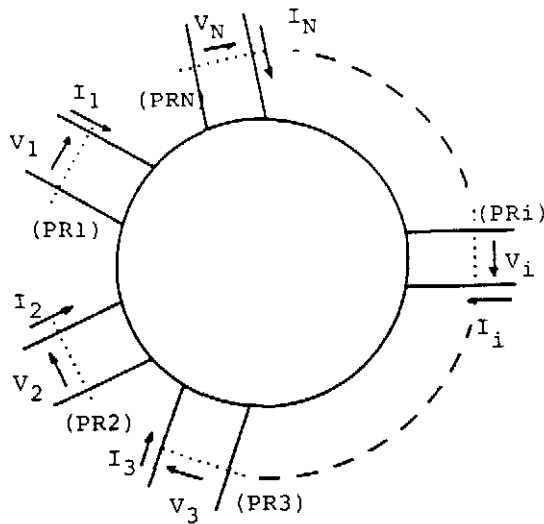
$$\begin{aligned} [V] &= [Z][I] \\ [I] &= [Y][V] \\ [Z] &= [Y]^{-1} \quad (5.1) \end{aligned}$$

donde  $[V]$  y  $[I]$  son matrices columna (vectores) de dimensión  $N$ , y  $[Z]$  y  $[Y]$  matrices cuadradas  $N \times N$ :

$$[V] = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_N \end{pmatrix}; \quad [I] = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_N \end{pmatrix}; \quad [Z] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{2N} \\ - & - & - & - & - & - \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{NN} \end{pmatrix}, \quad \text{etc.} \quad (5.2)$$



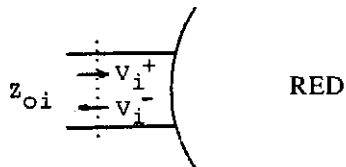
a)



-  $V_i, I_i$  : definidas en el plano de referencia  $i$  (PRi)

-  $I_i$  positiva si fluye hacia la red

b)



$$V_i = V_i^+ + V_i^-$$

$$I_i = Y_{oi}(V_i^+ - V_i^-)$$

$$\rightarrow V_i^- = \frac{1}{2}(V_i - Z_{oi}I_i)$$

$$V_i^- = \frac{1}{2}(V_i - Z_{oi}I_i)$$

Fig. 5.1 a) Definición de tensiones y corrientes en los planos de referencia de los accesos a la red  
 b) En cada línea de acceso se toma como onda positiva la que se dirige hacia la red

También se pueden definir matrices híbridas, que relacionan vectores mixtos, formados por tensiones y corrientes.

Las matrices  $[Z]$  y  $[Y]$ , sin embargo, a frecuencias de microondas presentan los siguientes inconvenientes:

a) Un desplazamiento de los planos de referencia produce cambios en los valores de  $V_i$  y  $I_i$  gobernados por expresiones no triviales (considérese, por ejemplo, la variación de la impedancia a lo largo de una línea de transmisión) y, por tanto, modificaciones profundas en la forma de las matrices. De manera que puede resultar muy difícil identificar dos redes idénticas pero con planos de referencia distintos.

b) Los elementos  $Z_{ij}$  y  $Y_{ij}$  se miden con circuitos abiertos o cortocircuitos en los planos de referencia, y a frecuencias de microondas:

- b.1) Es difícil producir buenos circuitos abiertos (una línea en circuito abierto tiende a radiar energía, y por tanto presenta una inmitancia finita);
- b.2) Aunque puedan lograrse buenos cortocircuitos y circuitos abiertos, no siempre es posible situarlos en el plano de interés;
- b.3) En el caso de dispositivos activos, un cortocircuito o circuito abierto puede producir daños irreversibles, oscilaciones u otros efectos indeseados.

### 5.3 Matriz de dispersión

Los inconvenientes anteriores se eliminan si, en lugar de utilizar las tensiones y corrientes en los planos de referencia para describir la red, utilizamos las amplitudes de las ondas positiva y negativa de tensión:

$$V_i = V_i^+ + V_i^- \quad (5.3)$$

$$I_i = Y_{oi}(V_i^+ - V_i^-) \quad (5.4)$$

De esta manera disponemos también de un conjunto de  $2N$  variables  $\{V_i^+, V_i^-, i=1,2,\dots,N\}$  relacionadas linealmente con las  $\{V_i, I_i, i=1,2,\dots,N\}$ .

Antes de proseguir es necesario introducir los siguientes convenios:

- 1) Tomaremos como ondas positivas, en cada acceso, las que se dirigen hacia la red (fig.5.1b).
- 2) En lugar de las tensiones y corrientes ordinarias manejaremos valores normalizados definidos mediante:

$$a_i = \bar{V}_i^+ = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{oi}}} = \sqrt{Y_{oi}} V_i^+ \quad ; \quad b_i = \bar{V}_i^- = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{oi}}} = \sqrt{Y_{oi}^-} V_i^- \quad (5.5)$$

$$\bar{I}_i^+ = \sqrt{Z_{oi}} I_i^+ = \bar{V}_i^+ \quad ; \quad \bar{I}_i^- = \sqrt{Z_{oi}} I_i^- = -\bar{V}_i^- \quad (5.6)$$

de manera que

$$V_i = \sqrt{Y_{oi}} V_i \quad ; \quad I_i = \sqrt{Z_{oi}} I_i \quad (5.7)$$

$$P_i^+ = \frac{|V_i^+|^2}{2 Z_{oi}} = \frac{1}{2} |\bar{V}_i^+|^2 = \frac{1}{2} |a_i|^2 \quad ; \quad P_i^- = \frac{1}{2} |\bar{V}_i^-|^2 = \frac{1}{2} |b_i|^2 \quad (5.8)$$

En función de estas variables definiremos la matriz de dispersión (en inglés, *scattering*),  $|S_{ij}|$ , mediante la relación:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdot & \cdot & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdot & \cdot & S_{2N} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdot & \cdot & S_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{pmatrix} \Rightarrow [b] = [S][a] \quad (5.9)$$

que proporciona las amplitudes (normalizadas) de las ondas negativas o reflejadas en función de las amplitudes positivas o incidentes.

En lo sucesivo, y mientras no exista riesgo de confusión, prescindiremos de los corchetes para denotar matrices y escribiremos

$$b = S a \quad , \quad \bar{V}^- = S \bar{V}^+ \quad , \quad \text{etc.} \quad (5.10)$$

De acuerdo con la definición, los elementos  $S_{ij}$  vienen dados por:

$$S_{ii} = \left. \frac{b_i}{a_i} \right|_{a_k=0 \ (k \neq i)} = \left. \frac{\bar{V}_i^-}{\bar{V}_i^+} \right|_{\bar{V}_k^+=0 \ (k \neq i)} \quad (5.11)$$

$$S_{ji} = \left. \frac{b_j}{a_i} \right|_{a_k=0 \ (k \neq i)} = \left. \frac{\bar{V}_j^-}{\bar{V}_i^+} \right|_{\bar{V}_k^+=0 \ (k \neq i)} \quad (5.12)$$

La condición  $a_k=0$  en el  $n$ -ésimo acceso se consigue, en general, situando algún plano del mismo una resistencia de valor igual a la impedancia característica de la línea (figura 5.2a). En estas condiciones diremos que el acceso  $n$ -ésimo está *terminado* (*terminación* se suele utilizar como sinónimo de carga adaptada a una línea), concepto que no debe confundirse con el de acceso *adaptado* que reservaremos para cuando  $S_{kk}=0$ .

Con esta nomenclatura, las definiciones (5.11) y (5.12) de los elementos  $S_{ij}$  tienen el significado:

- 1)  $S_{ii}$  es el coeficiente de reflexión visto desde el plano de referencia  $i$ -ésimo cuando situamos en este acceso un generador y todos los demás están terminados (fig. 5.2b).
- 2)  $S_{ji}$  es el coeficiente de transmisión (señal saliente en el plano de referencia  $j$  dividido por la señal entrante en el plano de referencia  $i$ , en la misma situación anterior, es decir, con un generador en el acceso  $i$ , y todos los demás terminados figura 5.2b).

Este significado de los elementos  $S_{ij}$ , además de proporcionar su procedimiento de medida, pone de manifiesto la desaparición de los inconvenientes señalados en el párrafo anterior para las matrices  $Z$  y  $Y$ , puesto que:

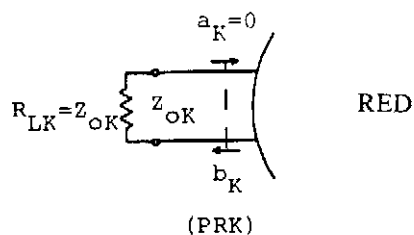
- a) Un desplazamiento de planos de referencia produce solamente cambios de fase de las amplitudes de las ondas positivas y negativas y, por tanto, solamente cambios de fase en los valores de  $S_{ij}$ .
- b) La condición de *acceso terminado* es independiente del plano donde se sitúe la terminación. Por lo que se refiere a dispositivos activos, la medida se realiza en condiciones de carga resistiva, menos peligrosa que con un cortocircuito o un circuito abierto.

La consideración *a* puede precisarse de la siguiente manera: Supongamos que desplazamos todos los planos de referencia alejándolos de la red de manera que (fig. 5.2c):

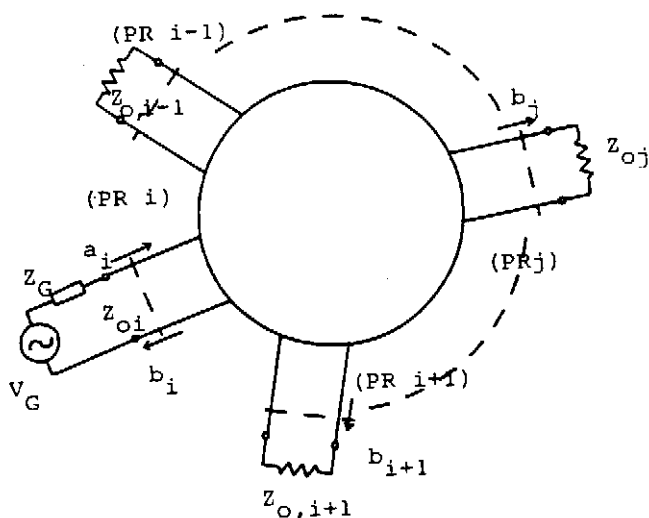
$$\beta_k l_k = \phi_k \quad , \quad k = 1, 2, 3 \dots N \quad (5.13)$$

$$a'_k = a_k e^{j\phi_k} \quad , \quad b'_k = b_k e^{-j\phi_k} \quad (5.14)$$

a)



b)



c)

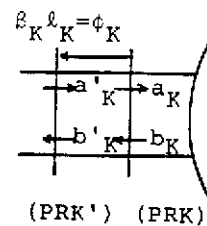


Fig. 5.2 a) Definición del concepto de terminación de un acceso (colocación en la línea exterior de una carga adaptada o terminación)  
 b) Situación utilizada para definir los parámetros  $S_{ii}$  y  $S_{ji}$   
 c) Desplazamiento del plano de referencia en el acceso  $k$ -ésimo

En estas condiciones, tendremos:

$$S'_{ii} = \left. \frac{b'_i}{a'_i} \right|_{a'_k=0} = \left. \frac{b_i}{a_i} e^{-2j\Phi_i} \right|_{a_k=0} = S_{ii} e^{-2j\Phi_i} \quad (5.15)$$

$$S'_{ji} = \left. \frac{b'_j}{a'_i} \right|_{a'_k=0} = \left. \frac{b_j}{a_i} e^{-j(\Phi_i + \Phi_j)} \right|_{a_k=0} = S_{ji} e^{-j(\Phi_i + \Phi_j)} \quad (5.16)$$

**Ejemplo** La figura 5.3 muestra el cálculo de una red sencilla (un cuadripolo en nomenclatura convencional, o 2-accesos) formada por una admitancia conectada en el plano de conexión de dos líneas de impedancias características diferentes. Tomaremos como planos de referencia a la entrada y la salida del plano de conexión, si bien, para facilitar el dibujo, éste normalmente se desdobra en dos unidos con conexiones ideales sin retardo.

La misma figura indica el procedimiento del cálculo: primero se termina la salida (es decir, se carga con su impedancia característica: nótese que al no haber onda reflejada por la terminación, la elección de plano de conexión es irrelevante) y se calculan el coeficiente de reflexión a la entrada y  $S_{21}$ . Para éste último es necesario establecer una relación entrada-salida, que en este caso es trivial (continuidad de tensiones).

El procedimiento se repite situando a continuación una terminación (nótese, diferente de la anterior) en la línea de entrada. ■

#### 5.4 Propiedades de la matriz de dispersión

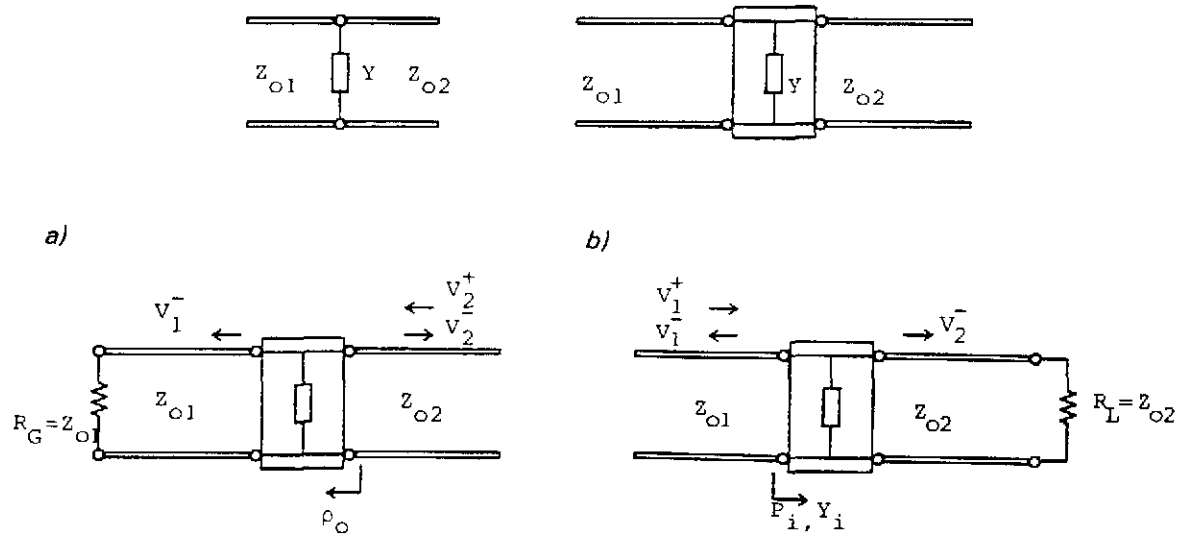
Si la red es pasiva (aunque no sea recíproca):

$$|S_{ii}|, |S_{ji}| \leq 1 \quad (5.17)$$

ya que  $S_{ii}$  es un coeficiente de reflexión, y en las condiciones de definición  $S_{ji}$  (Fig. 5.2b):

$$\frac{1}{2} |b_j|^2 = |S_{ji}|^2 \frac{1}{2} |a_i|^2 \leq \frac{1}{2} |a_i|^2 \quad (5.18)$$

ya que la potencia que sale ( $(1/2)|b_j|^2$ ) no puede ser mayor que la entrante ( $(1/2)|a_i|^2$ ).



$$Y_i = Y + Y_{o2} \quad \rho_i = \frac{Y_{oi} - Y_i}{Y_i + Y_{oi}}$$

$$= \frac{Y_{o1} - Y - Y_{o2}}{Y + Y_{o1} + Y_{o2}} = S_{11}$$

$$S_{22} = \frac{Y_{o2} - Y - Y_{o1}}{Y + Y_{o1} + Y_{o2}}$$

$$V_1^+ + V_1^- = V_2^-; \quad 1 + \frac{V_1^-}{V_1^+} = 1 + S_{11} =$$

$$S_{12} = \sqrt{\frac{Z_{o2}}{Z_{o1}}} (1 + S_{22}) =$$

$$= \frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{\sqrt{Z_{o2}}}{\sqrt{Z_{o1}}} \rightarrow S_{21} = \frac{b_2}{a_1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{Y_{o1}Y_{o2}}}{Y + Y_{o1} + Y_{o2}}$$

$$= \sqrt{\frac{Z_{o1}}{Z_{o2}}} (1 + S_{11}) = \frac{2\sqrt{Y_{o1}Y_{o2}}}{Y + Y_{o1} + Y_{o2}}$$

Fig. 5.3 Cálculo de la matriz de dispersión de una red (cuadripolo) elemental  
 a) Situación, con la salida terminada, para el cálculo de  $S_{11}$  y  $S_{21}$   
 b) Situación, ahora con la entrada terminada, para el cálculo de  $S_{22}$  y  $S_{12}$

(Las líneas de trazo sencillo representan conexiones ideales, sin retardo; es decir, la entrada y la salida corresponden al mismo plano físico).

Si además de ser pasiva la red no tiene pérdidas, la potencia entrante y la saliente, con generadores arbitrarios, han de ser iguales:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} |b_i|^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} |a_i|^2 \quad (5.19)$$

Pero:

$$\sum_{i=1}^N |b_i|^2 = (b_1^*, b_2^* \dots b_N^*) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_N \end{pmatrix} = [b]^+ [b] = b^+ b \quad (5.20)$$

donde el signo + significa matriz adjunta o conjugada hermitica, y es igual a la conjugada compleja de la transpuesta:

$$A^+ = (A^t)^* \quad (5.21)$$

Por tanto, podemos volver a escribir (5.19):

$$\begin{aligned} b^+ b &= a^+ a \quad \rightarrow \quad a^+ S^+ S a - a^+ a = 0 \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad a^+ (S^+ S - 1) a = 0 \quad (5.22) \end{aligned}$$

donde 1 representa la matriz unidad de orden  $N \times N$ . Como (5.22) ha de verificarse para cualquier vector  $a$  arbitrario (podemos cambiar sus componentes a voluntad manipulando los generadores exteriores), se sigue la condición de unitariedad:

$$S^+ S = 1 \quad ; \quad S^+ = S^{-1} \quad ; \quad S S^+ = 1 \quad (5.23)$$



Es decir:

$$S^+ S = \begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* & & S_{N1}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & \dots & S_{N2}^* \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ S_{1N}^* & S_{2N}^* & & S_{NN}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2N} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ S_{N1} & S_{N2} & \dots & S_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 + \dots + |S_{N1}|^2 &= 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 + \dots + |S_{N2}|^2 &= 1 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ |S_{1N}|^2 + |S_{2N}|^2 + \dots + |S_{NN}|^2 &= 1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} + \dots + S_{N1}^* S_{N2} &= 0 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S_{11}^* S_{1N} + S_{21}^* S_{2N} + \dots + S_{N1}^* S_{NN} &= 0 \\ S_{12}^* S_{13} + S_{22}^* S_{23} + \dots + S_{N2}^* S_{N3} &= 0 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (5.26)$$

O lo que es igual, el módulo de cada vector columna de  $S$  vale la unidad, y el producto escalar de un vector columna por otro paralelo es cero (si hubiéramos partido de  $S \cdot S^+ = 1$  en lugar de  $S^+ S = 1$ , habríamos obtenido las mismas conclusiones para vectores fila en lugar de columna). Esta condición de unitariedad proporciona un número muy elevado de ecuaciones, evidentemente no todas independientes. Pero en todo caso imponen fuertes restricciones en el número de parámetros  $S_{ij}$  libres (es decir, que puedan elegirse arbitrariamente).

**Ejemplo 1** Consideremos un 2-accesos (cuadripolo) pasivo y sin pérdidas (pero no necesariamente recíproco). Pongamos:

$$[S] = \begin{pmatrix} a e^{j\phi_1} & b e^{j\phi_2} \\ c e^{j\phi_3} & d e^{j\phi_4} \end{pmatrix} \quad |a|, |b|, |c|, |d| \leq 1 \quad (5.27)$$

En virtud de la unitariedad:

$$a^2 + b^2 = 1, \quad c^2 + d^2 = 1, \quad a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1 \quad (5.28)$$

de manera que podemos escribir:

$$[S] = \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \sin \tau e^{j\phi_2} \\ \sin \tau e^{j\phi_3} & \cos \tau e^{j\phi_4} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

También por unitariedad:

$$\cos \tau \sin \tau (e^{j(\phi_1 - \phi_3)} + e^{j(\phi_2 - \phi_4)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 - \phi_3 = \phi_2 - \phi_4 + \pi \quad (5.30)$$

con lo que nos queda, finalmente:

$$[S] = \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \sin \tau e^{j\phi_2} \\ \sin \tau e^{j\phi_3} & -\cos \tau e^{j(\phi_2 - \phi_1 + \phi_3)} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

expresión más general para el cuadripolo en cuestión. Nótese que de los 8 parámetros iniciales (4 números complejos) solamente cuatro ( $\tau$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  i  $\phi_3$ ) son libres. ■

Nos quedan por establecer las relaciones entre la matriz  $S$  y las  $Z$  y  $Y$ .

Si definimos las matrices diagonales:

$$\sqrt{Z_o} = \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{o1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{o2}} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & \dots & \dots & \sqrt{Z_{oN}} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{Y_o} = (\sqrt{Z_o})^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{Y_{o1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{o2}} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & \dots & \dots & \sqrt{Y_{oN}} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

podemos volver a escribir las relaciones (5.5), (5.6) y (5.7) de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} a &= \bar{V}^+ = \sqrt{Y_o} V^+ \quad ; \quad b = \bar{V}^- = \sqrt{Y_o} V^- \\ \bar{V} &= \sqrt{Y_o} V \quad ; \quad \bar{I}^+ = \sqrt{Z_o} I^+ = a \\ \bar{I}^- &= \sqrt{Z_o} I^- \quad ; \quad I = \sqrt{Z_o} I \end{aligned} \quad (5.33)$$

Se pueden definir matrices de impedancias y admitancias normalizadas:

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I} \quad , \quad \bar{I} = \bar{Y} \bar{V} \quad , \quad \bar{Y} = \bar{Z}^{-1} \quad (5.34)$$

relacionadas con las ordinarias mediante:

$$\begin{aligned} \sqrt{Y_o} V &= \bar{Z} \sqrt{Z_o} I \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{Z_o} \bar{Z} \sqrt{Z_o} I \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad Z &= \sqrt{Z_o} \bar{Z} \sqrt{Z_o} \quad ; \quad \bar{Z} = \sqrt{Y_o} Z \sqrt{Y_o} \\ Y &= \sqrt{Y_o} \bar{Y} \sqrt{Y_o} \quad ; \quad \bar{Y} = \sqrt{Z_o} Y \sqrt{Z_o} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{V}^+ + \bar{V}^- = a + b = (1+S)a \quad ; \quad 2a = \bar{V} + \bar{I} = (\bar{Z}+1)\bar{I} \\ \bar{I} &= \bar{I}^+ + \bar{I}^- = a - b = (1-S)a \quad ; \quad 2b = \bar{V} - \bar{I} = (\bar{Z}-1)\bar{I} \end{aligned} \quad (5.36)$$

es decir:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= (1+S)(1-S)^{-1}\bar{I} \quad \rightarrow \quad Z = (1+S)(1-S)^{-1} \\ b &= (\bar{Z}-1)(\bar{Z}+1)^{-1}a \quad \rightarrow \quad S = (\bar{Z}-1)(\bar{Z}+1)^{-1}\end{aligned}\quad (5.37)$$

y análogamente:

$$\bar{Y} = (1-S)(1+S)^{-1} \quad ; \quad S = (1-\bar{Y})(1+\bar{Y})^{-1} \quad (5.38)$$

Estas relaciones son fáciles de recordar ya que, en el caso de dimensión 1 ( $N=1$ , red de 1-acceso), la matriz  $S$  se reduce a un escalar que coincide con el coeficiente de reflexión  $\rho$ , y en este caso:

$$\rho = \frac{\bar{Z}-1}{\bar{Z}+1} = \frac{1-\bar{Y}}{1+\bar{Y}} \quad ; \quad \bar{Z} = \frac{1+\rho}{1-\rho} \quad ; \quad Y = \frac{1-\rho}{1+\rho} \quad (5.39)$$

Al mismo tiempo, debe observarse que en (5.37) y en (5.38) los productos de matrices conmutan; en efecto, tomemos, por ejemplo:

$$\begin{aligned}S &= (\bar{Z}-1)(\bar{Z}+1)^{-1} = \{[\bar{Z}] + [1] - 2[1]\} \{[\bar{Z}] + [1]\}^{-1} = \\ &= [1] - 2\{[\bar{Z}] + [1]\}^{-1} = (\bar{Z}+1)^{-1}(\bar{Z}+1) - 2(\bar{Z}+1)^{-1} = \\ &= \{[\bar{Z}] + [1]\}^{-1} \{[\bar{Z}] + [1] - 2[1]\} = (\bar{Z}+1)^{-1}(\bar{Z}-1)\end{aligned}\quad (5.41)$$

Si la red es recíproca, sabemos que  $Z$  y  $Y$  son simétricas:

$$Z = Z^t \quad ; \quad Y = Y^t \quad (5.40)$$

lo que implica la simetría de  $Z$  y  $Y$ :

$$\bar{Z}^t = (\sqrt{Y_o} Z \sqrt{Y_o})^t = \sqrt{Y_o} Z \sqrt{Y_o} = \bar{Z} \quad , \text{ etc.} \quad (5.41)$$

y la de  $S$ :

$$\begin{aligned} S^t &= \{(\bar{Z}-1)(\bar{Z}+1)^{-1}\}^t = \{(\bar{Z}+1)^{-1}\}^t (\mathbf{Z}-1)^t = \\ &= (\bar{Z}+1)^{-1} (\bar{Z}-1) = S \end{aligned} \quad (5.42)$$

Esta propiedad de simetría de la matriz  $S$  cuando la red es recíproca es muy importante porque reduce el número de parámetros a medir o calcular en la red. Si ésta, además, es sin pérdidas, la reducción es todavía mayor. ■

**Ejemplo 2** Si en el ejemplo anterior (cuadripolo pasivo sin pérdidas) hacemos que también sea recíproco, si matriz  $S$  queda reducida a:

$$S = \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \sin \tau e^{j\phi_2} \\ \sin \tau e^{j\phi_2} & -\cos \tau e^{j(2\phi_2-\phi_1)} \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

Si además el cuadripolo es simétrico, es decir, si  $S_{11} = S_{22}$ , entonces  $\phi_1 = 2\phi_2 - \phi_1 \pm \pi \rightarrow \phi_2 = \phi_1 \pm \pi/2$  y:

$$S = \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \pm \sin \tau e^{j\phi_1} \\ \pm j \sin \tau e^{j\phi_1} & \cos \tau e^{j\phi_1} \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Nótese lo siguiente: cualquier cuadripolo recíproco y sin pérdidas puede convertirse en simétrico mediante un cambio de planos de referencia. En efecto, si alejamos el plano 2 la longitud  $\ell_2$  tal que  $\beta_2 \ell_2 = \phi_2' = \phi_2 - \phi_1 \pm \pi/2$ , (5.44) cambia a:

$$\begin{aligned} S' &= \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \sin \tau e^{j(\phi_2 - \phi_2')} \\ \sin \tau e^{j(\phi_2 - \phi_2')} & -\cos \tau e^{j(2\phi_2 - \phi_1 - 2\phi_2')} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \tau e^{j\phi_1} & \pm j \sin \tau e^{j\phi_1} \\ \pm j \sin \tau e^{j\phi_1} & \cos \tau e^{j\phi_1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Todavía más, si ahora movemos los planos 1 y 2 de manera que  $\phi'_1 = \phi'_2 = \phi_2/2$ , (5.46) queda:

$$S' = \begin{pmatrix} \cos \tau & \pm j \sin \tau \\ \pm j \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

que es la expresión general de la matriz  $S$  para un cuadripolo recíproco y sin pérdidas referido a aquellos planos de referencia que hagan que  $S_{11}$  y  $S_{22}$  sean reales. ■

**Ejemplo 3** Comprobemos como ejercicio los resultados anteriores para la red analizada en el ejemplo del apartado 5.3 (fig. 5.3). Teníamos:

$$S_{11} = \frac{Y_{o1} - Y_{o2} - Y}{Y + Y_{o1} + Y_{o2}} \quad S_{22} = \frac{Y_{o2} - Y_{o1} - Y}{Y + Y_{o1} + Y_{o2}}$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{2\sqrt{Y_{o1}Y_{o2}}}{Y + Y_{o1} + Y_{o2}} \quad (5.48)$$

La verificación de reciprocidad (5.43) es automática. La identificación con la forma (5.47) no es tan evidente cuando la admitancia  $Y$  es reactiva (cuadripolo sin pérdidas),  $Y = jB$ :

$$S_{11} = \frac{Y_{o1} - Y_{o2} - jB}{Y_{o1} + Y_{o2} + jB} = \sqrt{\frac{(Y_{o1} - Y_{o2})^2 + B^2}{(Y_{o1} + Y_{o2})^2 + B^2}} e^{j\phi_1} \quad (5.49)$$

$$\angle S_{11} = \phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-B}{Y_{o1} - Y_{o2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) \quad (5.50)$$

Se comprueba fácilmente que

$$|S_{11}| = |S_{22}| = \cos \tau \quad (5.51)$$

$$|S_{12}|^2 = \frac{4 Y_{o1} Y_{o2}}{(Y_{o1} + Y_{o2})^2 + B^2} = 1 - |S_{11}|^2 = 1 - \cos^2 \tau = \sin^2 \tau \quad (5.52)$$

$$\underline{S}_{12} = -\tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) = \phi_2 \quad (5.53)$$

$$\underline{S}_{22} = \tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o2} - Y_{o1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{-B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) \quad (5.54)$$

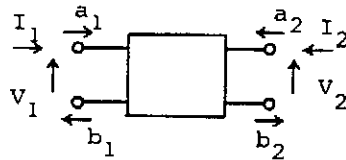
$$\underline{S}_{11} + \underline{S}_{22} = \pi - 2 \tan^{-1}\left(\frac{B}{Y_{o1} + Y_{o2}}\right) = \pi - 2 \phi_1 \quad (5.55)$$



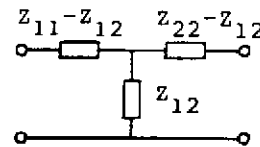
### 5.5 Redes de dos accesos

Las llamaremos más brevemente 2-accesos y se corresponden con el concepto familiar de cuadripolo. Su definición en términos de matrices de impedancias o admitancias admite, en el caso recíproco, los conocidos circuitos equivalentes de las figuras 5.4b y 5.4c. Recuérdese que cuando manejemos parámetros de dispersión o tensiones y corrientes normalizadas es esencial conocer las impedancias características de referencia a la entrada y la salida,  $Z_{o1}$  y  $Z_{o2}$ .

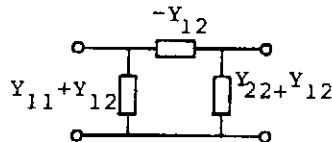
a)



b)



c)



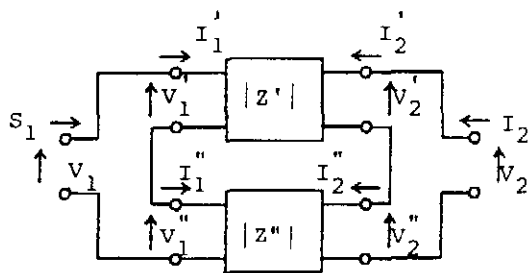
$$V = Z \cdot I \text{ o bien } \bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

$$I = Y \cdot V \text{ o bien } \bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{V}$$

Fig. 5.4 Definición de las magnitudes básicas de un 2-accesos (cuadripolo) y circuitos equivalentes en  $T$  y en  $\pi$  en el caso de reciprocidad.

Una propiedad conocida de las matrices  $Z$  y  $Y$  es que permiten el cálculo directo por suma de las matrices de cuádrupolos conectados en serie (fig. 5.5a) o en paralelo (fig. 5.5b). Veremos más adelante que el cálculo de matrices globales de cuádrupolos en cascada puede realizarse mediante el producto de matrices, lo que permite establecer procedimientos de análisis muy potentes de redes complejas mediante la manipulación de matrices.

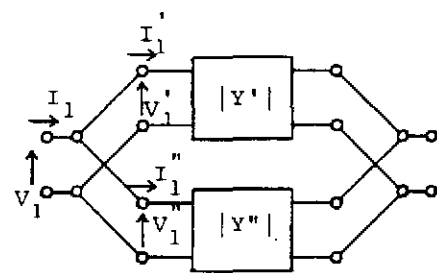
a)



$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = I' = I''$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1'' + V_2'' \\ V_2'' + V_2'' \end{bmatrix} = V' + V''$$

b)



$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = V' = V''$$

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1'' + I_2'' \\ I_2'' + I_2'' \end{bmatrix} = I' + I''$$

$$= Y' I' + Y'' I'' = (Y' + Y'') I = YI$$

Fig. 5.5 La matriz  $Z$  de 2-accesos en serie (a) es la suma de las matrices componentes, y lo mismo sucede con las matrices  $Y$  en el caso de conexión en paralelo (b).

**Ejemplo 1** Calculemos la matriz de admitancias de una sección de línea de transmisión de longitud  $\ell$  y admitancia característica  $Y_0$  (fig. 5.6):

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \quad (5.56a)$$

$$I_2 = Y_{12} V_1 + Y_{22} V_2 \quad (5.56b)$$



Inmediatamente, obtenemos:

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = -jY_o \cotan \phi = Y_{22} \quad (\phi = \beta \ell) \quad (5.57)$$

Para  $Y_{12}$  tenemos:

$$Y_{12} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

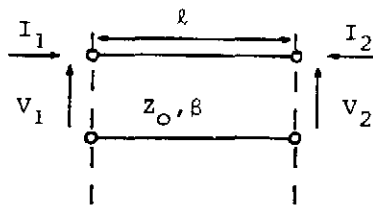
Pero cuando  $V_2=0$  (cortocircuito a la salida) las distribuciones de  $V$  y  $I$  en la línea, con el origen en el acceso 2, son:

$$V(z) = -2jV^+ \sin(\beta z) \quad ; \quad V_1 = V(-\ell) = 2jV^+ \sin \phi \quad (5.58a)$$

$$I(z) = 2V^+ Y_o \cos(\beta z) \quad ; \quad I_2 = -I(0) = -2V^+ Y_o \quad (5.58b)$$

y obtenemos inmediatamente:

$$Y_{12} = j \frac{Y_o}{\sin \phi} \quad ; \quad Y = \frac{jY_o}{\sin \phi} \begin{pmatrix} -\cos \phi & 1 \\ 1 & -\cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.59)$$



$$[Y] = \frac{jY_o}{\sin \phi} \begin{bmatrix} -\cos \phi & 1 \\ 1 & -\cos \phi \end{bmatrix}$$

Fig. 5.6 Sección de línea de transmisión de longitud  $\ell$  y matriz  $Y$

De manera análoga, o bien por inversión de  $Y$ , se obtiene la matriz de impedancias:

$$Z = \frac{-jZ_o}{\sin \phi} \begin{pmatrix} \cos \phi & 1 \\ 1 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

■

El ejemplo anterior presenta dos situaciones de interés:

a)  $\ell = \lambda/4$ . En este caso  $\phi = \pi/2$  y:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & jY_o \\ jY_o & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & -jZ_o \\ -jZ_o & 0 \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

b)  $\ell = 3\lambda/4$ . Ahora es  $\phi = 3\pi/2$  y:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -jY_o \\ -jY_o & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & jZ_o \\ jZ_o & 0 \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

situaciones que admiten los circuitos equivalentes en  $T$  y en  $\Pi$  de la figura 5.7a. A su vez estos permiten establecer, para una red arbitraria dada por su matriz de impedancias o admitancias, los circuitos equivalentes de la figura 5.7b, formados por una sección de línea en  $\lambda/4$  o  $3\lambda/4$ , y dos inmitancias en serie o en paralelo a la entrada y a la salida.

En estos circuitos, la elección de la longitud de línea ( $\lambda/4$  o  $3\lambda/4$ ) se debe hacer en función de la realizabilidad física de las longitudes; es decir,  $Z_o$  y  $Y_o$  deben tener parte real (resistiva o conductiva) positiva. El caso más interesante es el de redes con  $Y_{12}$  ( $Z_{12}$ ) imaginarias, que proporcionan líneas de transmisión sin pérdidas ( $Z_o$  y  $Y_o$  reales).

Tampoco debemos olvidar que la equivalencia entre los circuitos de la figura 5.7b se cumple solamente para aquella frecuencia en que las líneas tienen una longitud definida; es decir, el procedimiento de síntesis de un 2-accesos a partir de su matriz  $Z$  o  $Y$  establecido anteriormente es válido solamente para una frecuencia fija.

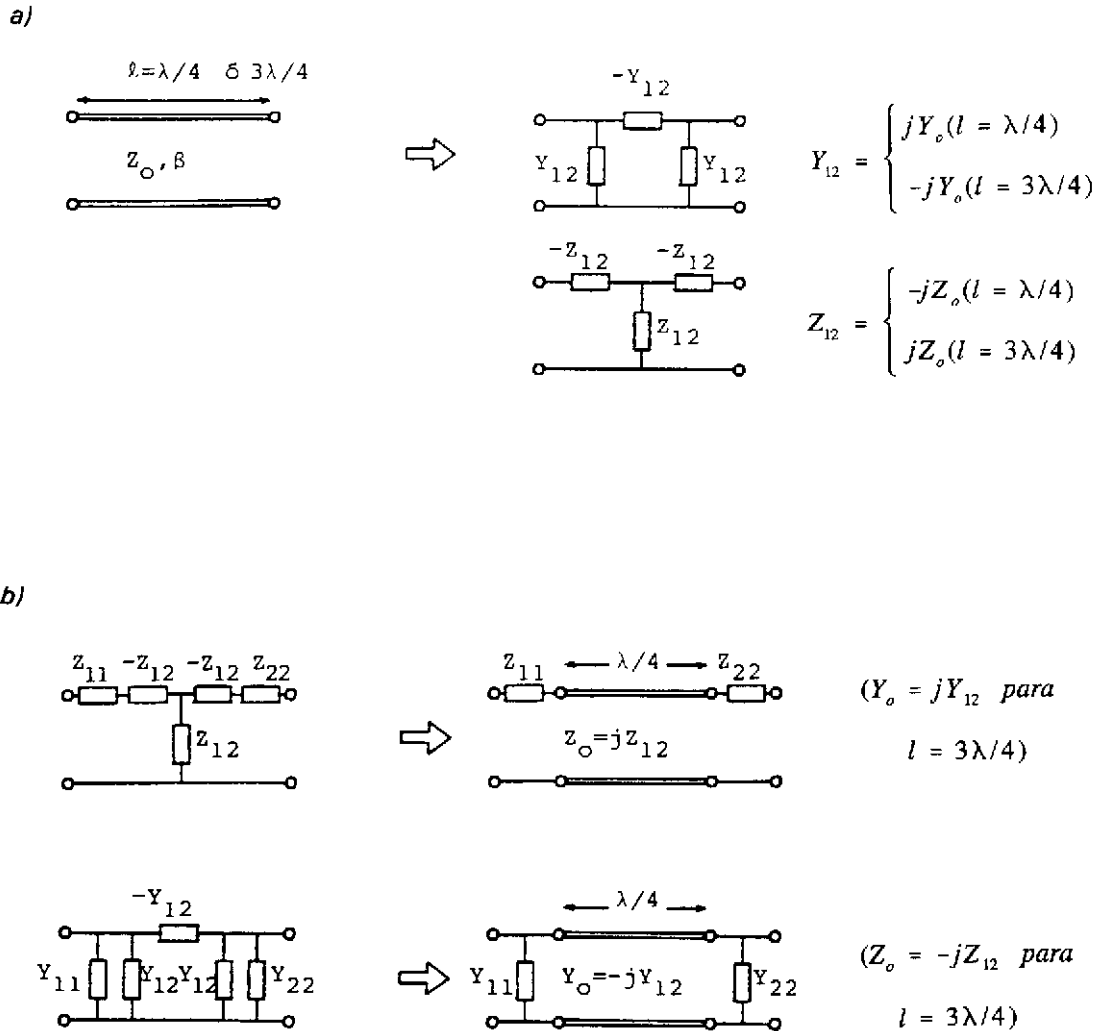


Fig. 5.7 a) Circuitos equivalentes de una línea de transmisión en  $\lambda/4$  o en  $3\lambda/4$   
 b) Utilización del resultado anterior para sintetizar redes recíprocas arbitrarias, a una frecuencia dada, mediante líneas de transmisión en  $\lambda/4$  o en  $3\lambda/4$

**Ejemplo 2** Consideremos un 2-accesos recíproco y sin pérdidas dado por su matriz de impedancias  $Z$ . La potencia total de entrada en la red valdrá (fig. 5.4a):

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_1 I_1^* + V_2 I_2^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(I^* V) = \frac{1}{4} (I^* V + V^* I) = \\
 &= \frac{1}{4} (I^* Z I + I^* Z^* I) = \frac{1}{4} I^* (Z + Z^*) I \quad (5.63)
 \end{aligned}$$

Dado que la red la suponemos sin pérdidas,  $P=0$  con independencia del particular valor del vector arbitrario  $I$ , de forma que:

$$Z + Z^* \equiv |0| \quad (\text{o también, } Y + Y^* \equiv |0|)$$

Es decir, los elementos de la matriz  $Z$  (o  $Y$ ) han de ser imaginarios; por tanto, cualquier 2-accesos recíproco y sin pérdidas se puede sintetizar, a una frecuencia dada, mediante una sección de línea ideal en  $\lambda/4$  o  $3\lambda/4$  y dos reactancias (que a su vez pueden realizarse con líneas de transmisión ideal en circuito abierto o en cortocircuito (fig. 5.8)). ■

A continuación calculamos las expresiones más importantes de un 2-accesos en función de sus parámetros de dispersión:

1) Impedancia (coeficiente de reflexión) a la entrada.

Partimos de la relación básica:

$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$$

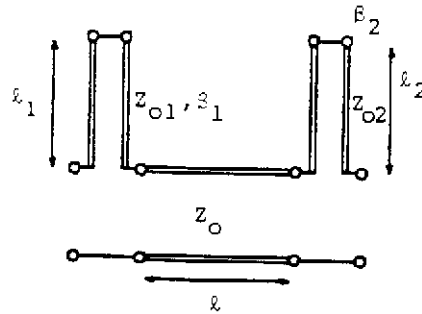
Si la salida (plano 2 en la figura 5.4a) está cargada con una impedancia  $Z_L$ , entonces:

$$\frac{a_2}{b_2} = \rho_L = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}}$$

y a la entrada:

$$\rho_i = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + S_{12} \frac{a_2}{a_1} \quad \text{pero} \quad \frac{b_2}{a_2} = \frac{1}{\rho_L} = S_{21} \frac{a_1}{a_2} + S_{22}$$

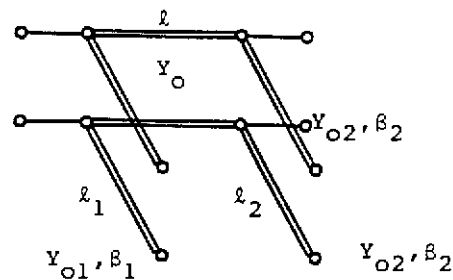
$$Z = \begin{bmatrix} jX_{11} & jX_{12} \\ jX_{12} & jX_{22} \end{bmatrix}$$



$$Z_o = -X_{12}(l = \lambda/4) \quad \text{o} \quad +X_{12}(l = 3\lambda/4)$$

$$X_{11} = Z_{o1} \tan \beta_1 l_1 \quad X_2 = Z_{o2} \tan \beta_2 l_2$$

$$Y = \begin{bmatrix} jB_{11} & jB_{12} \\ jB_{12} & jB_{22} \end{bmatrix} \rightarrow$$



$$Y_o = B_{12}(l = \lambda/4) \quad \text{o} \quad -B_{12}(l = 3\lambda/4)$$

$$B_{11} = Y_{o1} \tan \beta_1 l_1 \quad B_{22} = Y_{o2} \tan \beta_2 l_2$$

Fig. 5.8 Síntesis de 2-accesos recíprocos y sin pérdidas (reactivos) mediante secciones de línea de transmisión ideales (véase el ejemplo 2 del texto). Nótese que en cada síntesis la elección de c.c. o c.o. es arbitraria y que, en todo caso, hay un grado de libertad para fijar arbitrariamente dos de los cuatro parámetros ( $Z_{o1}$ ,  $\ell_1$ ,  $Z_{o2}$ ,  $\ell_2$ )

de donde puede despejarse el cociente  $a_2/a_1$  con lo que se obtiene finalmente:

$$\rho_i = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_L}{1 - S_{22} \rho_L} \quad (5.64)$$

2) Impedancia (coeficiente de reflexión) a la salida.

La situación es análoga al caso anterior. Si la impedancia del generador es  $Z_S$  y:

$$\rho_S = \frac{Z_S - Z_{01}}{Z_S + Z_{01}}$$

a la salida tendremos:

$$\rho_o = \frac{b_2}{a_2} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_S}{1 - S_{11} \rho_S} \quad (5.65)$$

3) Ganancia de transferencia de potencia  $G_T$  (*Transducer power gain*).

Cuando un 2-accesos está cargado, por un lado, con un generador y, por otro, con una impedancia de carga, se define la  $G_T$  como el cociente:

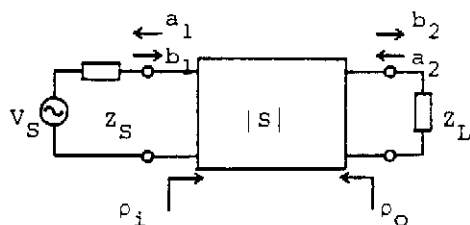
$$G_T = \frac{\text{Potencia entregada a la carga}}{\text{Potencia disponible del generador}} = \frac{P_L}{P_{avs}} \quad (5.66)$$

siendo  $P_{avs}$  la potencia entregada por el generador a una impedancia igual a  $Z_S^*$  (la conjugada de su impedancia interna).

En la figura 5.9 se resumen los cálculos básicos necesarios para calcular  $P_{avs}$  i  $G_T$ . La potencia entregada por el generador a una carga (impedancia)  $Z_L$  vale:

$$P_S = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |\rho_i|^2) = \frac{1}{2} |b_s|^2 \frac{1 - |\rho_i|^2}{|1 - \rho_i \rho_s|^2} \quad (5.67)$$

$$\text{con } b_s = \frac{V_s \sqrt{Z_{01}}}{Z_S + Z_{01}} \quad (5.68)$$



$$a_i = \frac{V_1'}{\sqrt{Z_{o1}}}$$

$$V_1' = \frac{V_S Z_{o1}}{Z_S + Z_{o1}} \frac{1}{1 - \rho_i \rho_S}$$

$$a_i = \frac{V_S \sqrt{Z_{o1}}}{Z_S + Z_{o1}} \frac{1}{1 - \rho_i \rho_S} = \frac{b_S}{1 - \rho_i \rho_S}$$

Potencia entregada por el generador  $P_S$ :

$$P_S = \frac{1}{2} |a_i|^2 (1 - |\rho_i|^2) = \frac{1}{2} |b_S|^2 \frac{1 - |\rho_i|^2}{|1 - \rho_i \rho_S|^2}$$

Potencia disponible del generador  $P_{avs}$ :

$$P_{avs} = P_S |_{\rho_i = \rho_S^*} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|b_S|^2}{1 - |\rho_S|^2}$$

Potencia entregada a la carga  $P_L$ :

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\rho_L|^2)$$

Ganancia de transferencia de potencia  $G_T$ :

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \left| \frac{b_2}{b_S} \right|^2 (1 - |\rho_L|^2) (1 - |\rho_S|^2) = \left| \frac{b_2}{a_1} \right|^2 \frac{(1 - |\rho_L|^2)(1 - |\rho_S|^2)}{|1 - \rho_i \rho_S|^2}$$

Calculando  $b_2/a_1$  y  $\rho_i$ , se obtiene la expresión final

$$G_T = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |\rho_S|^2) (1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - S_{11} \rho_S)(1 - S_{22} \rho_L) - S_{12} S_{21} \rho_S \rho_L|^2}$$

Fig. 5.9 Circuito y cálculos básicos utilizados para obtener la expresión de la ganancia de transferencia de potencia

$P_{avs}$  se obtiene la expresión anterior haciendo  $\rho_i = \rho_s^*$ :

$$P_{avs} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|b_s|^2}{1 - |\rho_s|^2} \quad (5.69)$$

Por otra parte:

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\rho_L|^2)$$

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \left| \frac{b_2}{a_1} \right|^2 \frac{(1 - |\rho_L|^2)(1 - |\rho_s|^2)}{|1 - \rho_i \rho_s|^2}$$

Para completar la expresión que buscamos, es necesario sustituir en el anterior valores explícitos para  $b_2/a_1$  y  $\rho_i$ , en función de los parámetros de dispersión:

$$\rho_i = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_L}{1 - S_{22} \rho_L}$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \Rightarrow 1 = S_{21} \frac{a_1}{b_2} + S_{22} \frac{a_2}{b_2} = S_{21} \frac{a_1}{b_2} + S_{22} \rho_L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_2}{a_1} = \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \rho_L}$$

y obtenemos, finalmente:

$$G_T = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |\rho_s|^2)(1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - S_{11} \rho_s)(1 - S_{22} \rho_L) - S_{12} S_{21} \rho_s \rho_L|^2} \quad (5.70)$$



**Ejemplo 3. Atenuadores**

Idealmente, un atenuador es un elemento que, además de reducir los niveles de señal transmitida en una cantidad prefijada, debería:

- a) Respetar las condiciones de adaptación (de generador y carga) del sistema en el que se inserta.
- b) No introducir desfases indeseados, especialmente si éstos variasen con la frecuencia.

Las condiciones anteriores se satisfacen si la matriz de dispersión del atenuador es de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\gamma} \\ e^{-\gamma} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.71)$$

con  $\gamma$  real, ya que entonces:

$$\rho_i = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_L}{1 - S_{22} \rho_L} = e^{-2\gamma} \rho_L \quad ; \quad \text{y} \quad \rho_i = 0 \quad \text{si} \quad \rho_L = 0 \quad (5.72a)$$

$$\rho_o = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_S}{1 - S_{11} \rho_S} = e^{-2\gamma} \rho_S \quad ; \quad \text{y} \quad \rho_o = 0 \quad \text{si} \quad \rho_S = 0 \quad (5.72b)$$

Al mismo tiempo:

$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 = e^{-\gamma} a_2 \quad (5.73a)$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 = e^{-\gamma} a_1 \quad (5.73b)$$

y entonces:

$$G_T = \frac{e^{-2\gamma} (1 - |\rho_S|^2) (1 - |\rho_L|^2)}{|1 - e^{-2\gamma} \rho_S \rho_L|^2} \quad (5.74)$$

La atenuación se define en condiciones de adaptación ( $\rho_s = \rho_l = 0$ ) como:

$$L(\text{dB}) = -10 \log G_T = -10 \log e^{-2\gamma} = 20\gamma \log e = 8,686\gamma \quad (5.75)$$

Una manera sencilla de fabricar atenuadores que cumplan estas condiciones es con redes resistivas en  $T$  o en  $\Pi$ , como se indica en la figura 5.10. Con la relación de la red en  $T$  (fig. 5.10a), la condición de  $S_{11}=0$  es la misma que tener impedancia de entrada igual a la de referencia ( $Z_i=1$ ) cuando la salida está terminada ( $Z_L=1$ ):

$$\begin{aligned} Z_i = R_s + R' &= R_s + \frac{R_p(R_s+1)}{R_p+R_s+1} = 1 \quad \rightarrow \\ \rightarrow R_s(R_s+R_p) &= 1 \quad \rightarrow R_p = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_s} - R_s \right) \end{aligned} \quad (5.76)$$

Para el cálculo de  $S_{21}=S_{12}$  (fig. 5.10a):

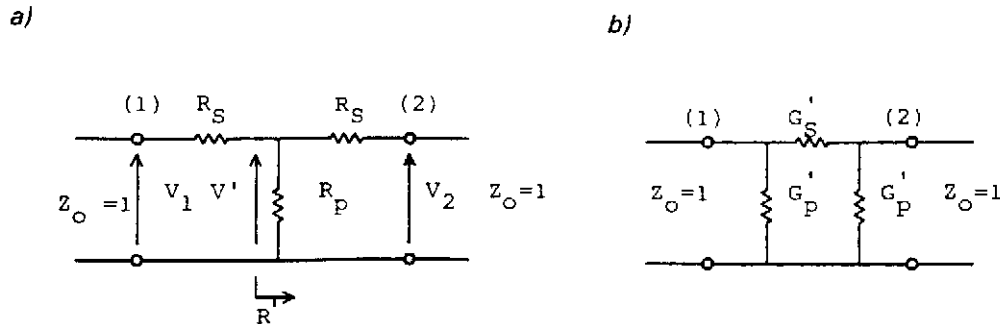
$$S_{21} = \left. \frac{V_2^-}{V_1^+} \right|_{V_2^+=0}$$

Pero, con la salida terminada ( $V_2^+=0$ ) la entrada también está adaptada ( $V_1^-=0$ ) y  $V_1^+=V_1$  por tanto:

$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{V'} \cdot \frac{V'}{V_1} = \frac{1}{(1+R_s)} \cdot \frac{R'}{(R'+R_s)} = \frac{1}{1+R_s} \cdot \frac{1-R_s}{1} = \frac{1-R_s}{1+R_s} \quad (5.77)$$

$$L(\text{dB}) = -20 \log S_{21} = 20 \log \left( \frac{1+R_s}{1-R_s} \right) \Rightarrow R_s = \frac{10^{\frac{L}{20}} - 1}{10^{\frac{L}{20}} + 1} \quad (5.78)$$

Los cálculos para la red  $\Pi$  (dual a la anterior) son completamente similares, y el análisis puede extenderse fácilmente al caso de impedancias de entrada y salida diferentes.



Condición de adaptación:

$$(S_{11} = S_{22} = 0)$$

$$R_p = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_s} - R_s \right)$$

$$G'_s = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G'_p} - G'_p \right)$$

Valor de atenuación  $L(\text{dB})$ :

$$L(\text{dB}) = 20 \log \left( \frac{1 + R_s}{1 - R_s} \right)$$

$$L(\text{dB}) = 20 \log \left( \frac{1 + G'_p}{1 - G'_p} \right)$$

Fig. 5.10 Realización de atenuadores mediante redes resistivas en T y en  $\Pi$ . Adviértase que poner  $Z_o=1$  es lo mismo que suponer que los valores de  $R_s$ ,  $R_p$ ,  $G'_s$  y  $G'_p$  están normalizadas a la impedancia de referencia.

Una propiedad interesante de los atenuadores es que reducen en el factor  $e^{-2\gamma}$  los coeficientes de reflexión, lo que los hace útiles para proteger generadores sensibles a reflexiones fuertes, si bien pagando el precio de la pérdida asociada de señal.

Nótese también que (5.74) el valor efectivo de la atenuación introducida depende de las desadaptaciones de generador y carga. ■

## 5.6 Inversores de inmitancias

El concepto de inversor de impedancias o admitancias (o solo inversor) es muy útil en circuitos de microondas, como veremos en el tema siguiente cuando hablemos de filtros. En el caso ideal, lo definiremos como una red de dos accesos recíproca, sin pérdidas y simétrica tal que, para una impedancia de carga  $Z_L(Y_L)$ , a la entrada vemos (fig. 5.11):

$$Z_i = \frac{K^2}{Z_L} \quad ; \quad Y_i = \frac{J^2}{Y_L} \quad (5.79)$$

con  $K^2=J^2$  reales y positivas, llamadas constantes del inversor. Nótese que  $K$  ha de tener dimensiones de ohmios ( $\Omega$ ) y  $J$  de Siemens ( $S$ ).

Dado que la definición de inversor se realiza a partir de cocientes  $V_2/I_2$ , es insensible a desfases entre la entrada y la salida que actúen simultáneamente sobre  $V$  y  $I$ ; es decir, de la forma:

$$\begin{aligned} V_2' &= V_2 e^{j\phi} \\ I_2' &= I_2 e^{j\phi} \end{aligned} \quad (5.80)$$

característica que hemos de tener presente cuando esta cuestión sea de interés (por ejemplo si hay realimentación implicada). Se puede comprobar inmediatamente que las redes sin pérdidas con matrices:

$$\begin{aligned} Z &= \begin{pmatrix} 0 & Z_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{12} & 0 \end{pmatrix} \\ (Z_{12} + Z_{12}^* &= Y_{12} + Y_{12}^* = 0) \end{aligned} \quad (5.81)$$

se comportan como inversores con constantes:

$$K^2 = -Z_{12}^2 \quad ; \quad J^2 = -Y_{12}^2$$

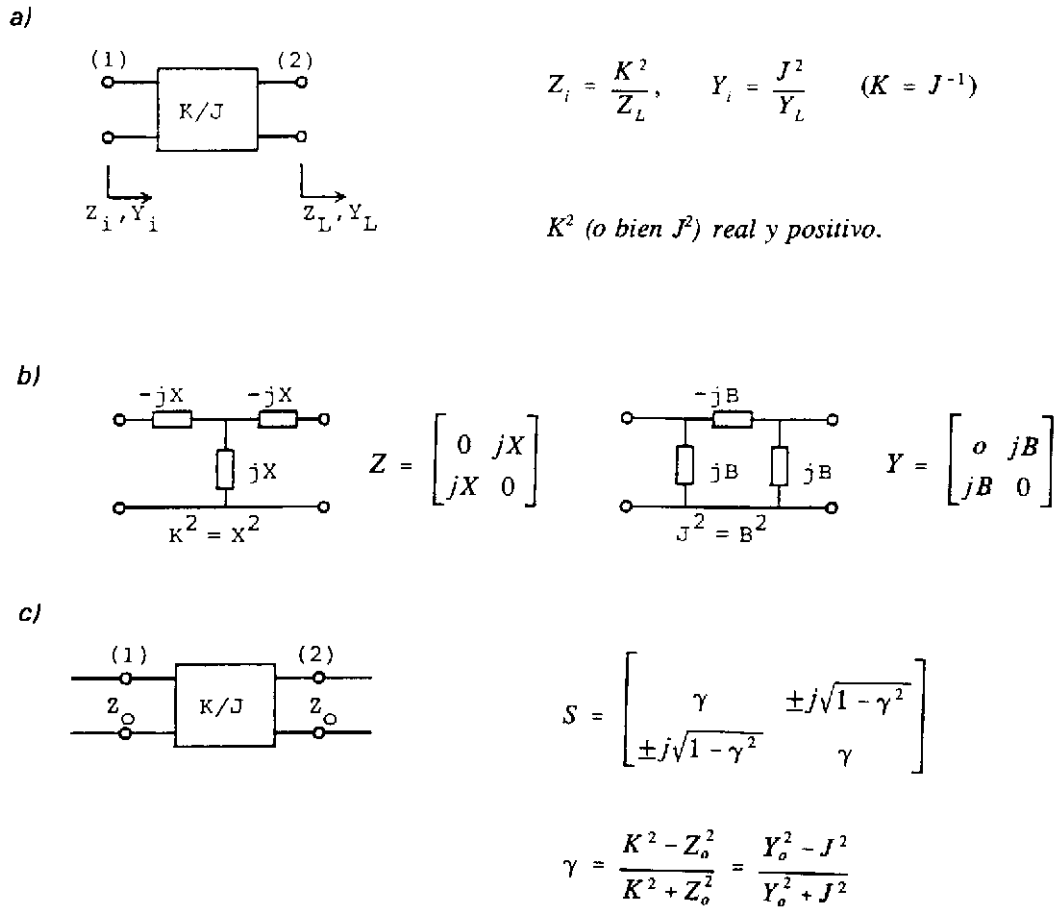


Fig. 5.11 a) Definición de un inversor de impedancias/admitancias (red simétrica, recíproca, sin pérdidas)  
 b) Síntesis básicas de inversores obtenidas a partir de las matrices  $Z$  y  $Y$   
 c) Matriz  $S$  referida a impedancias de entrada/salida iguales

En efecto:

$$V_1 = Z_{12} I_2 \quad ; \quad V_2 = Z_{12} I_1 \quad \Rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_{12}^2}{\frac{V_2}{I_2}} \quad \rightarrow \quad Z_i = -\frac{Z_{12}^2}{Z_L} \quad (5.82)$$

Esta propiedad conduce inmediatamente a las realizaciones físicas de la figura 5.11b, donde  $X$  y  $B$  pueden ser positivas o negativas. Su signo afecta a la relación de fases entrada/salida, pero no a su comportamiento como inversor.

Para calcular la matriz  $S$  de un inversor supondremos impedancias de referencia iguales a la entrada y a la salida (fig. 5.11c). Se obtiene inmediatamente:

$$S_{11} = S_{22} = \frac{\frac{K^2}{Z_0} - Z_0}{\frac{K^2}{Z_0} + Z_0} = \frac{K^2 - Z_0^2}{K^2 + Z_0^2} = \frac{Y_0^2 - J^2}{Y_0^2 + J^2} \equiv \gamma \quad (5.83)$$

Si hacemos uso de la reciprocidad y ausencia de pérdidas podemos poner (véase la ecuación (5.45)):

$$S_{12} = S_{21} = \pm j\sqrt{1-\gamma^2} \quad (5.84)$$

$$S = \begin{bmatrix} \gamma & +j\sqrt{1-\gamma^2} \\ \pm j\sqrt{1-\gamma^2} & \gamma \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

expresión que nos permite afirmar que un inversor es *cualquier 2-accesos recíproco y sin pérdidas con  $S_{11}=S_{22}$  reales*.

**Ejemplo 1** Una línea de transmisión en  $\lambda/4$ , de impedancia característica  $Z_0'$ , se comporta como un inversor con:

$$\gamma = \frac{Z_0'^2 - Z_0^2}{Z_0'^2 + Z_0^2} \quad ; \quad K = Z_0' \quad (5.86)$$

La indeterminación de signo de  $S_{12}$  se puede aclarar fácilmente, en este caso, si imaginamos que  $Z_0' \rightarrow Z_0$ , ya que, entonces:

$$S \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

y, en consecuencia, el signo que aplica es el negativo:

$$S = \begin{bmatrix} \gamma & -j\sqrt{1-\gamma^2} \\ -j\sqrt{1-\gamma^2} & \gamma \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

■

Una síntesis muy importante de inversores es la formada por una reactancia en serie o en paralelo entre dos secciones de línea de transmisión de longitud idéntica (fig. 5.12). Refiriéndonos al caso paralelo (fig. 5.12a) tenemos (fig. 5.3, con  $Z_{o1}=Z_{o2}=1$  y planos de referencia alejados  $\beta l = \phi$ ):

$$|S| = \frac{e^{-2j\phi}}{2+j\bar{B}} \begin{bmatrix} -j\bar{B} & 2 \\ 2 & -j\bar{B} \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

( $\bar{B}$  es un valor normalizado como consecuencia de tomar  $Z_{o1}=Z_{o2}=1$ ). Es decir:

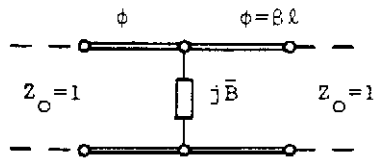
$$S_{11} = e^{-2j\phi} \frac{-j\bar{B}}{2+j\bar{B}} = \frac{-e^{-2j\phi}}{\left(1 + \frac{2}{j\bar{B}}\right)} = \frac{-e^{+2j(\psi-\phi)}}{\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{B}^2}}} \quad (5.90)$$

$$\text{con } 2\psi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\bar{B}}\right) \quad (5.91)$$

$S_{11}$  será real y, por tanto, el circuito será un inversor si  $\psi = \phi$ , o sea, si:

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2}{\bar{B}}\right) \quad (5.92)$$

a)

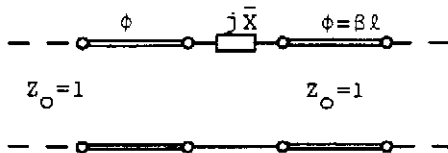


$$\bar{K} = \frac{K}{Z_0} \quad \text{tal que}$$

$$\bar{B} = \frac{1 - \bar{K}^2}{\bar{K}} \quad \text{si} \quad \phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2}{\bar{B}}$$

$$(\bar{K} < 1)$$

b)



Ídem con

$$|\bar{X}| = \frac{1 - \bar{J}^{-2}}{\bar{J}} \quad \text{si} \quad \phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}}$$

$$(\bar{J} < 1)$$

Fig. 5.12 Realizaciones de inversores con elementos reactivos en serie o en paralelo y secciones de línea de transmisión

y, entonces:

$$S_{11} = \gamma = \frac{\bar{K}^2 - 1}{\bar{K}^2 + 1} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{B}^2}}} \quad (5.93)$$

de donde se sigue fácilmente que:

$$|\bar{B}| = \frac{1 - \bar{K}^2}{\bar{K}} \quad (5.94)$$

(Nótese que utilizamos una constante de inversión normalizada,  $\bar{K} = K/Z_0$ ). De (5.93) y (5.94) se sigue inmediatamente que  $\bar{K} < 1$ .



El análisis para el circuito de la figura 5.12b (dual del 12a) se puede obtener por un procedimiento análogo o bien directamente por dualidad. En la figura 5.13 se representan las realizaciones concretas con inductancias y capacidades: se prefieren las que corresponden a longitudes de líneas negativas (es decir, tales que añadidas a otros tramos de línea las acortan) porque se comportan mejor en frecuencia. En efecto, con referencia a la inductancia en paralelo, por ejemplo, la condición de inversor  $|S_{11}| = \pi$  puede escribirse:

$$\phi_{11} = 2(\psi - \phi) = 0 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\bar{B}}\right) - 2\phi \quad (5.95)$$

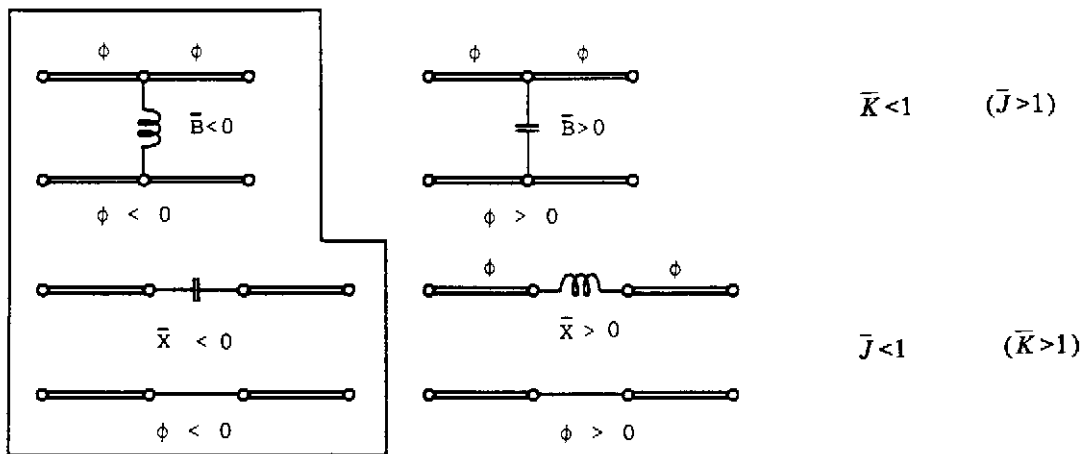


Fig. 5.13 Realizaciones concretas de los modelos de la figura 5.12. Se prefieren los del recuadro, con secciones de línea de longitud negativa, porque se comportan mejor con la frecuencia

Para el caso importante de valores de  $\bar{K} \ll 1$  resulta, por (5.94),  $|\bar{B}| \gg 1$ , y en consecuencia

$$\phi_{11} = \frac{2}{\bar{B}} - 2\phi = -2\omega L - 2\left(\frac{\omega}{v_p}\right)\ell \quad (5.96)$$

expresión que, si  $L = -\ell/v_p$ , se anula con independencia de la frecuencia. Sin embargo, si utilizáramos una capacidad en paralelo tendríamos:

$$\phi_{11} \approx \frac{2}{\omega C} - 2 \left( \frac{\omega}{v_p} \right) \ell \quad (5.97)$$

que solo se anula para una frecuencia dada. Por tanto, las realizaciones recuadradas en la figura 5.13 se prefieren porque (para  $\bar{K} \ll 1$  y  $\bar{J} \ll 1$ ) se comporta como inversores con independencia de la frecuencia, aunque la constante del inversor varíe con esta última:

$$\bar{K} \approx \frac{1}{|\bar{B}|} = \omega L \quad ; \quad \bar{J} \approx \frac{1}{|\bar{X}|} = \omega C \quad (5.98)$$

**Ejemplo 2** Para una sección de línea de longitud  $\ell$  ( $\beta\ell = \phi$ ):

$$\begin{aligned} |Y| &= j \frac{Y_0}{\sin\phi} \begin{pmatrix} -\cos\phi & 1 \\ 1 & -\cos\phi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -jY_0 \cot\phi & 0 \\ 0 & -jY_0 \cot\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & j \frac{Y_0}{\sin\phi} \\ j \frac{Y_0}{\sin\phi} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.99) \end{aligned}$$

De las dos matrices de la derecha, la segunda corresponde a un inversor de constante  $J^2 = \frac{Y_0^2}{\sin^2\phi}$ , y en vista del circuito equivalente en  $\pi$  (figuras 5.4 y 5.14), la sección de línea admite el circuito equivalente de la figura 5.14b, formado por un inversor ideal y dos admitancias:

$$Y_{11} = Y_{22} = -jY_0 \cot\phi \quad (5.100)$$

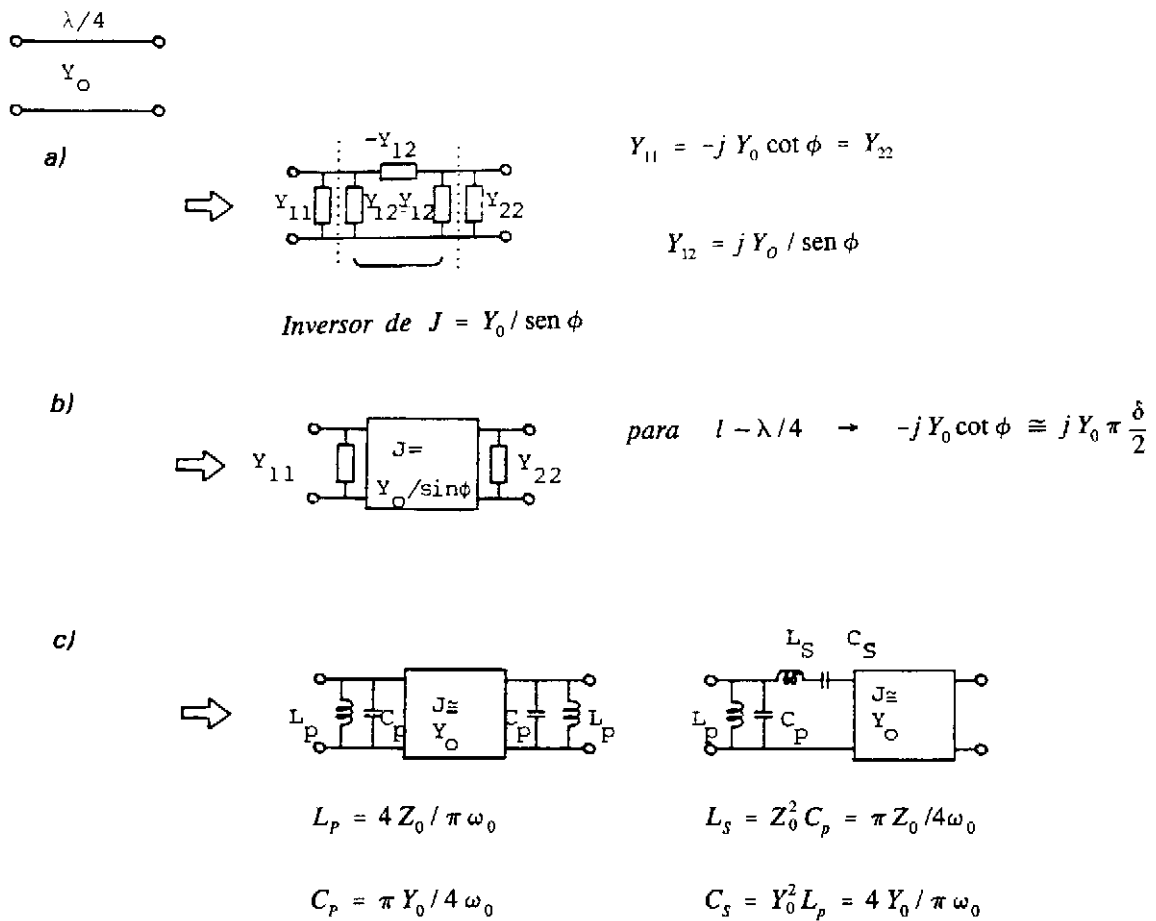


Fig. 5.14 Circuito equivalente de una sección de línea de longitud  $l$  (a) formado por un inversor y dos admitancias (b), y el mismo circuito en el caso de frecuencias en la proximidad de  $l = \lambda/4$  (c)

En las proximidades de  $l = \lambda/4$  la expresión anterior puede aproximarse ( $\delta < 1$ ):

$$\cot \phi = \cot \frac{\pi}{2} (1 + \delta) = -\tan \pi \frac{\delta}{2} \approx -\pi \frac{\delta}{2} \quad (5.101)$$

$$Y_{11} = Y_{22} = j Y_0 \pi \frac{\delta}{2} \quad (= 2 j \omega_0 C_p \delta) \quad (5.102)$$

expresión igual a la de un circuito resonante en paralelo con capacidad e inductancia equivalentes dadas por:

$$C_p = \frac{\pi Y_0}{4 \omega_0} \quad ; \quad L_p = \frac{4 Z_0}{\pi \omega_0} \quad (5.103)$$

con el resultado del circuito equivalente de la figura 5.14c donde además, se ha tenido en cuenta que para  $\phi = \frac{\pi}{2} \cdot (1 + \delta) \rightarrow \sin \phi \approx 1$ .

Sobre la calidad de la aproximación anterior considérense los siguientes errores relativos en  $Y_{11}=Y_{22}$  y  $J$ :

**Tabla 5.1** Errores relativos

$\delta$	Error $Y_{11}$ (%)	Error $J$ (%)
0,05	0,21	0,31
0,10	0,82	1,25
0,15	1,86	2,84
0,20	3,31	5,15
0,25	5,19	8,24

Obsérvese que la aproximación es muy buena (errores inferiores al 3%) para desviaciones relativas en frecuencia de hasta un 15% (desviación relativa total de un 30%).

El circuito equivalente para una línea en  $\lambda/2$  se puede obtener por yuxtaposición de dos de los anteriores, como en la figura 5.15. Nótese que el efecto de dos inversores consecutivos se anula, si bien es necesario recordar que entre la entrada y la salida puede haber un desfase que el inversor no indicaba. En el caso de la línea en  $\lambda/2$ , se puede comprobar que este desfase corresponde a un cambio de sentido de tensión y corriente (basta con considerar la línea a la frecuencia exacta de  $\ell = \lambda/2$ ) que puede introducirse en el circuito equivalente mediante un transformador ideal de relación 1:-1 (fig. 5.15).

Los circuitos equivalentes de las figuras 5.14 y 5.15 permiten volver a obtener de manera inmediata los comportamientos de líneas en  $\lambda/4$  y  $\lambda/2$  en *c.c.* o en *c.o.* que ya hemos visto en el apartado (fig. 4.12). También es evidente que la presencia de pérdidas bajas a la línea de transmisión se puede tener en cuenta mediante la inclusión de resistencias que proporcionen a los circuitos resonantes el factor  $Q$  correspondiente a la línea (véase el apartado 4.8):

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha} \quad (5.104) \quad \blacksquare$$

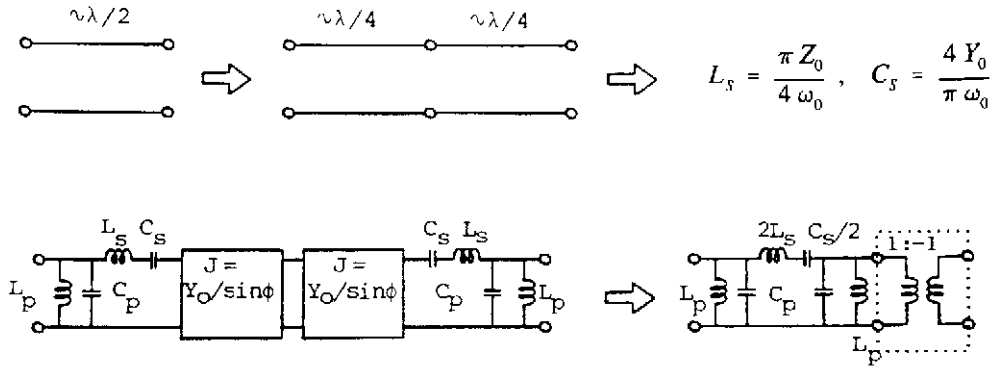


Fig. 5.15 Circuito equivalente de una línea de  $\ell \approx \lambda/2$  construido a partir de la equivalencia de la figura anterior. Debe advertirse que el transformador 1:-1 (cambio de signo de  $V$  y  $I$ ) está oculto en los inversores, que no consideran el desfase entrada/salida

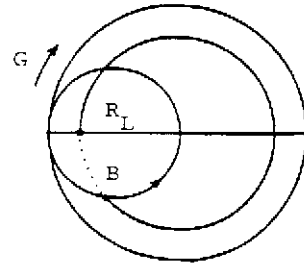
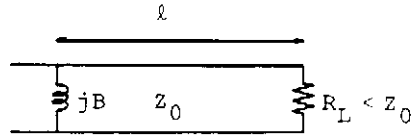
**Ejemplo 3** La adaptación de una carga con una reactancia en una línea de transmisión es un problema estudiado anteriormente. En la figura 5.16 se dibuja de nuevo el proceso en la carta de Smith para un caso particular. En este problema sucede que, si  $R_L \ll Z_0$ , el círculo que pasa por  $R_L$  está muy cercano a la periferia ( $|\rho|=1$ ), y el punto  $B$  está situado en una zona de valores de susceptancia grandes y que, además, varían muy deprisa. Así, si la frecuencia cambia ligeramente, la adaptación se destruye y, por tanto, el circuito dibujado es muy sensible a la frecuencia.

Un procedimiento muy sencillo y clarificador para analizar el problema es la aplicación del concepto de inversor de  $Z$  para la inductancia y dos trozos de línea de transmisión adyacentes, así como del circuito equivalente para una línea de longitud cercana a  $\lambda/2$  (fig. 5.16b). A la frecuencia de diseño  $f_0$ , el circuito se comporta como un inversor ( $K$ ) seguido de una resistencia  $R_L$  y se obtiene fácilmente la siguiente condición de adaptación, así como el valor de la longitud  $\ell$ , también indicada en la figura 5.16.

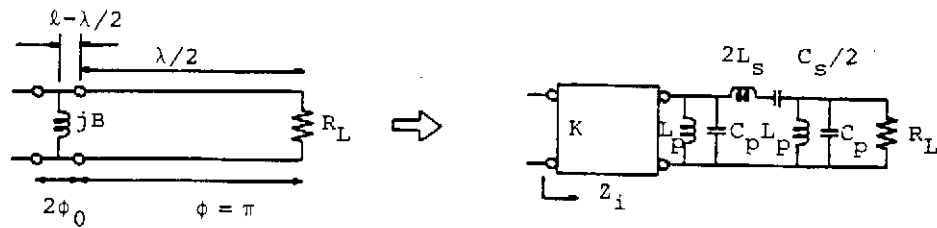
$$Z_i = \frac{K^2}{R_L} \equiv Z_0 \Rightarrow K^2 = R_L Z_0 \quad ; \quad \bar{K}^2 = \bar{R}_L \quad (5.105)$$

$$|\bar{B}| = \frac{1 - \bar{K}^2}{\bar{K}} = \frac{1 - \bar{R}_L}{\sqrt{\bar{R}_L}} \quad (5.106)$$

a)



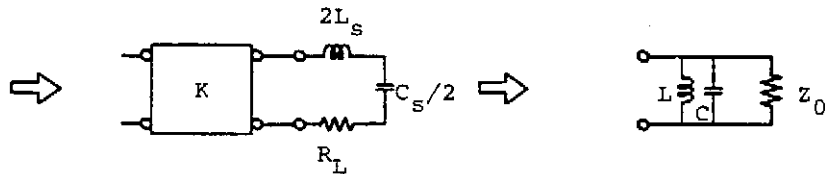
b)



$$\text{para } f = f_0 \quad \left( \ell = \frac{\lambda}{2} \right) ; Z_i = \frac{K^2}{R_L} \equiv Z_0 ; |\bar{B}| = \frac{1 - \bar{K}^2}{\bar{K}}$$

$$|\bar{B}| = \frac{1 - \bar{R}_L}{\sqrt{\bar{R}_L}} ; \ell = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2}{\bar{B}} \right) = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\bar{R}_L}}{1 - \bar{R}_L} \right)$$

c) En las proximidades de  $f_0$  :



$$L = K^2 \frac{C_s}{2} = Z_0 R_L \frac{2 Y_0}{\pi \omega_0} = \frac{2 R_L}{\pi \omega_0} ; C = \frac{\pi}{2 R_L \omega_0} ; Q = \frac{Z_0}{\omega_0 L} = \frac{\pi Z_0}{2 R_L}$$

Fig. 5.16 a) Adaptación de  $R_L$  mediante la carta de Smith

b) Análisis del mismo problema utilizando un inversor de impedancias y el circuito equivalente de una línea en  $\lambda/2$

c) Circuito equivalente visto a la entrada en las proximidades de la frecuencia de adaptación  $f_0$

Además, para  $f=f_o(1+\delta)$  con  $\delta$  pequeño, los circuitos resonantes en paralelo ( $L_p, C_p$ ) presentan una impedancia elevada y pueden despreciarse frente al circuito en serie ( $2L_s, C_s/2$ ) y  $R_L \ll Z_o$ . De esta manera, obtenemos el circuito equivalente de la figura 5.16c, un circuito resonante en paralelo con los valores indicados para  $L, C$  y  $Q$ . En particular:

$$Q = \frac{\pi Z_o}{2 R_L} = \frac{\pi}{2 \bar{R}_L} \quad (5.107)$$

expresión que confirma la sensibilidad del circuito con la frecuencia ( $Q$  grande) cuando la resistencia normalizada de carga es pequeña. ■

### 5.7 Cadenas de 2-accesos

Cuando dos o más redes de dos accesos se encadenan en cascada es más conveniente describirlas mediante matrices que relacionan parámetros de entrada/salida, ya que de esta manera la matriz total de una cadena viene dada por el producto de las matrices componentes.

Las más comunes de estas matrices de transferencia son las ( $ABCD$ ), denominada, para abreviar  $A$ , y la de transmisión  $T$ , definidas mediante las relaciones (fig. 5.4a):

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_2 \\ -\bar{I}_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (5.108)$$

De esta manera, si tenemos diferentes 2-accesos en cascada descritos, de izquierda a derecha, por  $A^1, A^2 \dots A^N$  o  $T^1, T^2 \dots T^N$ , las matrices totales de la cadena serán:

$$A = A^1 A^2 \dots A^N \quad ; \quad T = T^1 T^2 \dots T^N \quad (5.109)$$

Nótese que en (5.108) las definiciones utilizan valores normalizados de tensión/corriente u ondas positivas/negativas, iguales que los introducidos en (5.5)-(5.7). Esto presupone que, como en el caso de los parámetros  $S$ , hayamos definido impedancias de referencia a la entrada y a la salida del 2-accesos, lo que a su vez exige, para poder aplicar (5.109), que *la impedancia de referencia de salida de una red coincida con la de referencia de entrada de la siguiente*, ya que de otro modo los parámetros de salida del primero no coincidirán con los de entrada del segundo. Es fácil establecer la relación entre las matrices  $A$  y  $T$ :

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \bar{V}_2 \\ -\bar{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + b_2 \\ -a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (5.110)$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (5.111)$$

es decir:

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A+B+C+D & A-B+C-D \\ A+B-C-D & A-B-C+D \end{pmatrix} \quad (5.112)$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22} & T_{11} - T_{12} + T_{21} - T_{22} \\ T_{11} + T_{12} - T_{21} - T_{22} & T_{11} - T_{12} - T_{21} + T_{22} \end{pmatrix} \quad (5.113)$$

No se pueden establecer las relaciones entre matrices de los grupos  $(A, T)$  y  $(S, Z, Y)$  por este procedimiento, ya que no existen relaciones lineales (expresables mediante matrices) entre los vectores representativos porque están mezclados en  $(A, T)$ , en un mismo vector, parámetros de entrada y salida, cosa que no ocurre con  $(S, Z, Y)$ . En todo caso, es muy fácil calcular, por ejemplo, que:

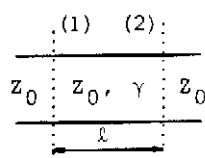
$$T = \frac{1}{S_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & -\Delta_S \end{pmatrix} \quad ; \quad S = \frac{1}{T_{11}} \begin{pmatrix} T_{21} & \Delta_T \\ 1 & -T_{12} \end{pmatrix} \quad (5.114)$$

$$A = \frac{1}{\bar{Y}_{21}} \begin{pmatrix} -\bar{Y}_{22} & -1 \\ -\Delta_Y & -\bar{Y}_{11} \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} D & -\Delta_A \\ -1 & A \end{pmatrix} \quad (5.115)$$

con  $\Delta_S = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} = \det[S]$ , etc. En la figura 5.17, se indican las matrices de transferencia de cuatro elementos básicos que permiten calcular, por multiplicaciones sucesivas, la de cualquier 2-accesos formado por líneas de transmisión y elementos concentrados  $(R, L, C)$ . Tanto el cálculo de todos ellos como su utilización son muy sencillos y se ilustran en los ejemplos siguientes.



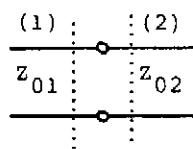
a)



$$A = \begin{pmatrix} \cosh \gamma l & \sinh \gamma l \\ \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{pmatrix}$$

$$\gamma = j\beta \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & j \sin(\beta l) \\ j \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{pmatrix} \quad ; \quad T = \begin{pmatrix} e^{\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma l} \end{pmatrix}$$

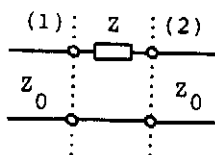
b)



$$A = \begin{pmatrix} (Z_{02}/Z_{01})^{1/2} & 0 \\ 0 & (Z_{01}/Z_{02})^{1/2} \end{pmatrix}$$

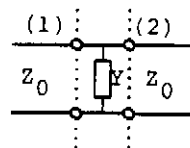
$$T = \frac{1}{\sqrt{Z_{01} Z_{02}}} \begin{pmatrix} Z_{02} + Z_{01} & Z_{02} - Z_{01} \\ Z_{02} - Z_{01} & Z_{02} + Z_{01} \end{pmatrix}$$

c)



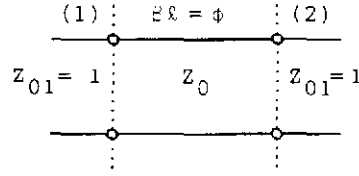
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \bar{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Z} = \frac{Z}{Z_0} \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + \bar{Z} & -Z \\ \bar{Z} & 2 - \bar{Z} \end{pmatrix}$$

d)



$$A = \begin{pmatrix} 1 & \bar{0} \\ \bar{Y} & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \frac{Y}{Y_0} \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + \bar{Y} & \bar{Y} \\ -\bar{Y} & 2 - \bar{Y} \end{pmatrix}$$

Fig. 5.17 Matrices de transferencia entrada-salida para cuatro elementos básicos



$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{Z_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & j \sin \phi \\ j \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Y_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_0} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \phi & j Z_0 \sin \phi \\ j Y_0 \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Fig. 5.18 Ejemplo de cálculo de matriz  $A$  a partir de su descomposición en elementos contenidos en la figura 5.17

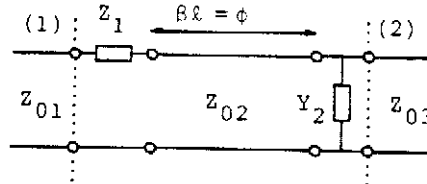
**Ejemplo** Consideremos la figura 5.18: una sección de línea de transmisión de impedancia  $Z_0$  referida a impedancias de entrada y salida unidad. En vista del cuadro de la figura 5.17, podemos descomponer esta red en una sección de línea como en la figura 5.17a como dos cambios de impedancia a la entrada y a la salida como en la figura 5.17b, de manera que la matriz  $A$  se puede calcular como se indica en la misma figura 5.18 y obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & j Z_0 \sin \phi \\ j Y_0 \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.116)$$

Además también podemos utilizar las transformaciones (5.112)-(5.115) y obtener sucesivamente:

$$T = \begin{pmatrix} \cos \phi + \frac{1}{2} j (Z_0 + Y_0) \sin \phi & j (Z_0 - Y_0) \sin \phi \\ j (Y_0 - Z_0) \sin \phi & \cos \phi - \frac{1}{2} j (Z_0 + Y_0) \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5.117)$$

$$S = \frac{1}{\cos \phi + \frac{1}{2} j (Z_0 + Y_0) \sin \phi} \begin{pmatrix} j (Z_0 - Y_0) \sin \phi & 1 \\ 1 & j (Z_0 - Y_0) \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5.118)$$



$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{Z_1}{Z_{01}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & j \sin \phi \\ j \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{Y_2}{Y_{02}} & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Z_{03}}{Z_{02}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{03}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$A = \left( \sqrt{\frac{Z_{03}}{Z_{02}}} + Y_2 Z_1 \sqrt{Z_{03} Z_{01}} \right) \cos \phi + \frac{Z_1}{Z_{02}} \sqrt{\frac{Z_{03}}{Z_{01}}} j \sin \phi + j \sqrt{\frac{Z_{03}}{Z_{01}}} \cdot \frac{Y_2}{Y_{02}}$$

$$B = \dots \quad C = \dots \quad D = \dots$$

Fig. 5.19 Ejemplo adicional de cálculo de matriz A.

Adviértase que la matriz S del ejemplo que estudiamos no es trivial y que su cálculo directo también es difícil (puede hacerse como ejercicio).

Finalmente, la figura 5.19 propone un ejemplo de estructura más compleja cuyo análisis, por el procedimiento anterior, no tiene ninguna dificultad conceptual. ■

## Capítulo 6 Circuitos de microondas (II). Redes de más de dos accesos. Filtros

### 6.1 Propiedades de simetría

Una situación frecuente es la de circuitos simétricos con respecto a algún plano. Para analizarlos, es necesario recordar los conceptos de pared magnética y eléctrica (fig. 6.1):

#### Paredes eléctricas y magnéticas

a) Entendemos por pared eléctrica una superficie plana conductora ideal en la que el campo eléctrico tangencial se anula:

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad (6.1)$$

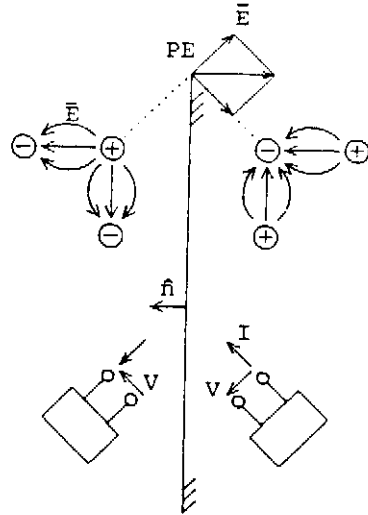
(donde  $\hat{n}$  vector normal a la superficie)

y, como consecuencia de lo que se ha dicho, también se debe anular la inducción magnética normal:

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.2)$$

Es bien conocido en la teoría electromagnética que la situación de un semiespacio frente a una pared eléctrica es idéntica a la del espacio completo donde se ha eliminado la pared y se han introducido *imágenes* de las cargas y las corrientes. En electrostática, el concepto de cargas imagen, y como estas cargas producen campo eléctrico normal a la superficie donde se encontrará la pared, es inmediato (fig. 6.1a). Por otra parte, la imagen de una corriente se puede obtener con facilidad a partir de la

a)

**Pared eléctrica**

En la superficie del conductor

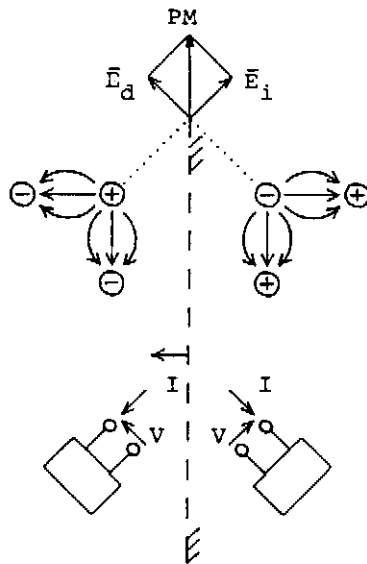
$\hat{n} \times \vec{E} = 0$ ,  $\vec{E}$  normal a la superficie.

→ DDP entre dos puntos cualesquiera de la superficie nula.

$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0$ ,  $\vec{B}$  tangente a la superficie.

→ Corriente contenida en la pared eléctrica de  $\vec{J} = \hat{n} \times \vec{B}$  de valor

b)

**Pared magnética**

En la superficie del conductor

$\hat{n} \times \vec{B} = 0$ ,  $\vec{E}$  normal a la superficie.

→ Corriente en la pared magnética nula.

$\hat{n} \cdot \vec{E} = 0$ ,  $\vec{E}$  tangente a la superficie.

Fig. 6.1 Definiciones de pared eléctrica y magnética y sus propiedades de simetría/antisimetría con relación a tensiones y corrientes

imagen del campo eléctrico, si tenemos en cuenta que:

$$\vec{i} = \sigma \vec{E} \quad (6.3)$$

De esta manera, llegamos a la conclusión de que una red (en el caso de la figura 6.1a, una red de un acceso) frente a una pared eléctrica es equivalente a una situación sin pared y con una red imagen con las corrientes y las tensiones calculadas como las imágenes del original (imagen especular seguida de una inversión de sentido).

b) Se define como pared magnética una superficie (sin existencia real) tal que en ella se cumpla que el campo magnético tangencial se anule:

$$\hat{n} \times \vec{H} = 0 \quad (6.4)$$

y, como consecuencia, también se anulará el desplazamiento eléctrico normal:

$$\hat{n} \cdot \vec{D} = 0 \quad (6.5)$$

Este caso es similar al anterior, pero con cargas imagen del mismo signo en lugar del signo contrario (fig. 6.1b), y para redes en las que intervienen tensiones y corrientes, las imágenes se calculan como las imágenes especulares de las originales.

De las definiciones y las propiedades anteriores se deduce que:

1) Entre dos puntos cualquiera de la pared eléctrica (o de la superficie que ocupa cuando la sustituimos por las imágenes correspondientes) la diferencia de potencial es cero. Es evidente, ya que no hay campo eléctrico contenido en la superficie.

Al mismo tiempo, la superficie que ocupa en el problema equivalente puede contener o ser atravesada perpendicularmente por corrientes eléctricas, ya que estas situaciones son compatibles con la simetría requerida (reflexión especular e inversión de sentido).

2) En una pared magnética (o en la superficie que ocupa cuando la sustituimos por sus imágenes) no hay corrientes eléctricas; en efecto, la densidad de corriente superficial  $\vec{J}$  está relacionada con el campo magnético  $\vec{H}$  mediante la relación:

$$\vec{J} = \hat{n} \times \vec{H} = 0 \quad \text{en la p.m.} \quad (6.6)$$

También se puede ver que no es posible que la superficie que ocupa sea atravesada perpendicularmente por corrientes, ya que esta situación es incompatible con la simetría impuesta sobre estas superficies (reflexión especular).

Es decir, una pared eléctrica introduce *condiciones de cortocircuito* en el plano que ocupa, mientras que una pared magnética las introduce de *circuito abierto* (interrupción de las corrientes que circularán en la superficie o a través de la superficie).

### Redes simétricas (número par de accesos)

Consideremos ahora una red con un número par de accesos  $2N$ , dotada de un plano de simetría bilateral que no corta ni contiene ninguno de los accesos (fig. 6.2). Numeraremos estos accesos de forma que los  $(1, N)$  estén a un lado del plano y los  $(N+1, 2N)$ , al otro, y de forma que el plano  $i$  y el plano  $N+i$  sean simétricos. Con esta numeración es fácil ver que si escribimos la matriz  $S$  en forma de bloques:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & | & S_2 \\ \hline S_3 & | & S_4 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

con  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  matrices cuadradas de orden  $N \times N$ , se cumple que:

$$S_1 = S_4 \quad \text{y} \quad S_2 = S_3 \quad (6.8)$$

ya que, por la simetría:

$$\begin{aligned} S_{ij} (i \leq N, j \leq N) &= (\text{coeficientes de transmisión entre dos accesos de la mitad izquierda}) = \\ &= S_{i+N, j+N} = \begin{pmatrix} \text{coeficiente de transmisión entre los accesos simétricos de los anteriores} \\ \text{en la mitad derecha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$S_{ij} \ (i \leq N, N+1 \leq j \leq 2N) = \left( \begin{array}{l} \text{coeficiente de transmisión entre un acceso de la izquierda} \\ \text{y uno de la derecha} \end{array} \right) =$$

$$= S_{i+N, j-N} = \left( \begin{array}{l} \text{coeficiente de transmisión entre los accesos} \\ \text{simétricos de los anteriores} \end{array} \right)$$

Por tanto:

$$S = \left( \begin{array}{cc|cc} S_1 & | & S_2 & \\ \hline - & - & - & - \\ S_2 & | & S_1 & \end{array} \right) \quad ; \quad \left( \begin{array}{c} b_i \\ \hline b_d \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} S_1 & | & S_2 & \\ \hline - & - & - & - \\ S_2 & | & S_1 & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} a_i \\ \hline a_d \end{array} \right) \quad (6.9)$$

donde  $[a_i], [b_i]$  y  $[a_d], [b_d]$  son vectores de dimensión  $N$  referidos a la mitad izquierda y a la derecha de la red, respectivamente.

Si excitamos la red con generadores idénticos y en posición simétrica en los accesos simétricos, de manera que  $a_i (1 \leq i \leq N) = a_{i+N}$  (fig. 6.2b), por lo que hemos visto anteriormente podemos substituir, por ejemplo, la mitad derecha de la red por una pared magnética y, por tanto:

$$[a_i] = [a_d] \quad \rightarrow \quad [b_i] = [b_d] \quad (6.10)$$

$$\left( \begin{array}{c} b_i \\ \hline b_i \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} S_1 & | & S_2 & \\ \hline - & - & - & - \\ S_2 & | & S_1 & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} a_i \\ \hline a_i \end{array} \right) \quad \rightarrow \quad [b_i] = [S_1 + S_2] [a_i] \quad (6.11)$$

Pero al mismo tiempo podemos poner:

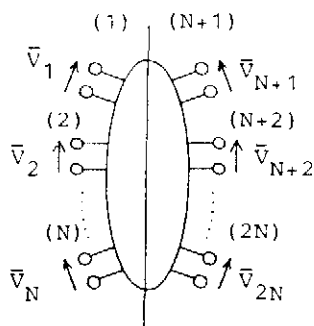
$$[b_i] = [S^e] [a_i] \quad (S^e \text{ de orden } N \times N) \quad (6.12)$$

donde  $S^e$  representa la matriz  $S$  de la red de  $N$  accesos formada por los de la izquierda, por ejemplo, y una pared magnética instalada en el plano de simetría. De manera que:

$$S^e = S_1 + S_2 \quad (6.13)$$



a)



$$S = \begin{bmatrix} S_1 & | & S_2 \\ \hline - & - & - \\ S_3 & | & S_4 \end{bmatrix}$$

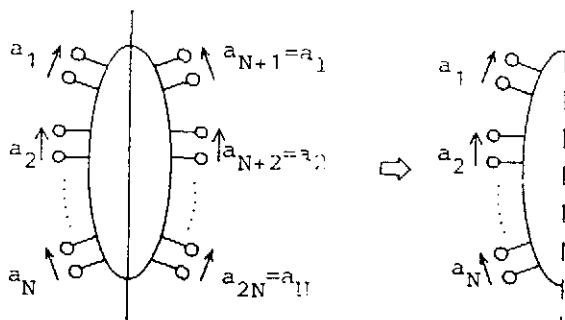
Por simetría:  $S_1 = S_4$ ,  $S_2 = S_3$

$$\begin{bmatrix} b_i \\ \hline b_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & | & S_2 \\ \hline S_2 & | & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ \hline a_d \end{bmatrix}$$

Excitación simétrica (EVEN):

$$[a_i] = [a_d]$$

b)



PM (Pared magnética =  
= plano de circuito  
abierto)

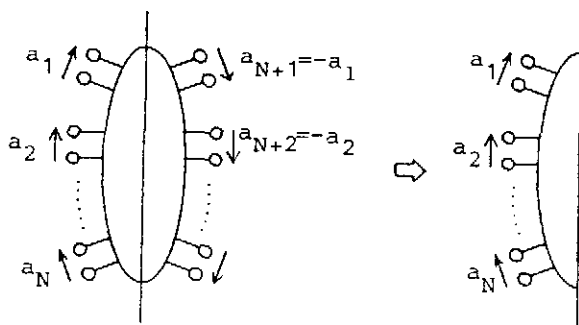
$$b_i = S^e a_i$$

$S^e$  de orden  $N \times N$

Excitación antisimétrica (ODD):

$$[a_i] = -[a_d]$$

c)



PE (Pared eléctrica =  
= plano de cortocircuito)

$$b_i = S^o a_i$$

$S^o$  de orden  $N \times N$

Fig. 6.2 a) Orden de numeración requerido para un análisis de una estructura simétrica  
b) Excitación con generadores organizados de manera simétrica (pared magnética)  
c) Idem de manera antisimétrica (pared eléctrica)

Si ahora excitamos la red con generadores idénticos pero con posición antisimétrica, de manera que  $[a_i] = -[a_d]$  (fig. 6.2c), podemos sustituir la mitad derecha de la red por una pared eléctrica y, por tanto:

$$[a_i] = -[a_d] \quad \Rightarrow \quad [b_i] = -[b_d] \quad (6.14)$$

$$\begin{pmatrix} b_i \\ \dots \\ -b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & | & S_2 \\ \dots & -| & \dots \\ S_2 & | & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ \dots \\ -a_i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [b_i] = [S_1 - S_2] [a_i] \quad (6.15)$$

Por otra parte, si  $S^0$  representa la matriz  $S$  de la red de  $N$  accesos formada por los de la izquierda, por ejemplo, y una pared eléctrica en el plano de simetría:

$$[b_i] = [S^0] [a_i] \quad \Rightarrow \quad S^0 = S_1 - S_2 \quad (6.16)$$

De (6.13) y (6.16) se obtiene:

$$S_1 = \frac{1}{2}(S^e + S^0) \quad ; \quad S_2 = \frac{1}{2}(S^e - S^0)$$

y, finalmente:

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^e + S^0 & | & S^e - S^0 \\ \dots & -| & \dots \\ S^e - S^0 & | & S^e + S^0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

De esta manera, hemos reducido el cálculo de la matriz  $2N \times 2N$  original al de dos matrices  $N \times N$ ,  $S^0$  y  $S^e$  representativas de la mitad de la red con paredes eléctrica y magnética, respectivamente.

**Ejemplo 1** Volvamos al ejemplo del apartado 5.7. Se trata de calcular la matriz  $S$  de una línea de transmisión de longitud  $\ell$  referida a una impedancia diferente de la suya propia (fig. 6.3).

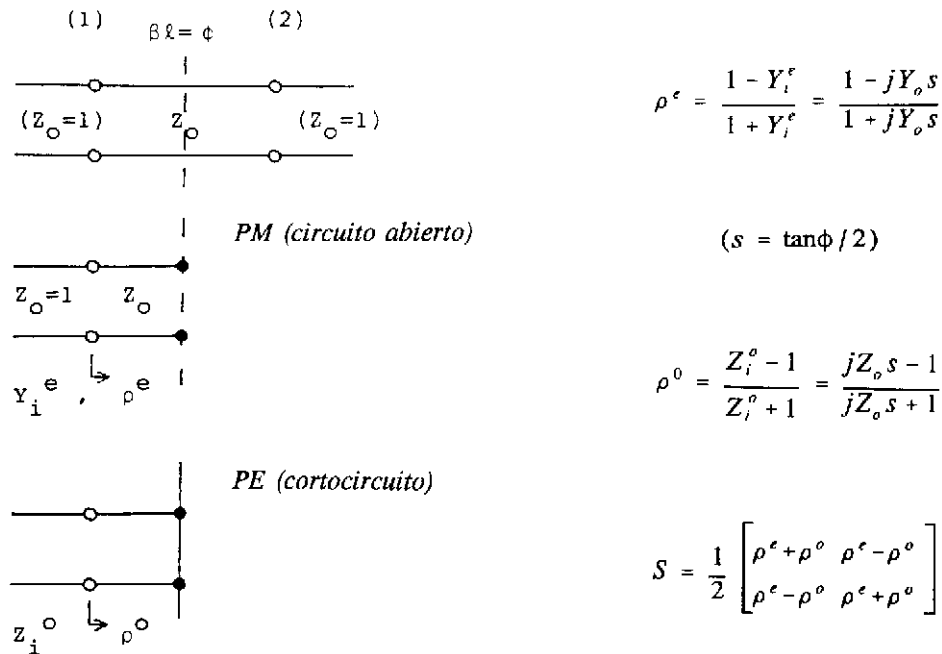


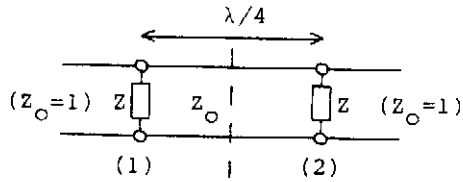
Fig. 6.3 Utilización de las propiedades de simetría en el cálculo de la matriz  $S$  de una sección de línea de transmisión

En este caso, reducimos el cálculo de un 2-accesos al de dos redes de un acceso, y para uno de estos la matriz  $S$  se reduce a un escalar (su coeficiente de reflexión). Por tanto, hemos de dejar el plano de simetría en circuito abierto (pared magnética) y calcular el coeficiente de reflexión del trozo de línea resultante como en la figura 6.3,  $\rho^e$ , y, posteriormente, cortocircuitar el plano de simetría (pared eléctrica) y calcular el coeficiente de reflexión  $\rho^o$ . Finalmente tendremos

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho^e + \rho^o & \rho^e - \rho^o \\ \rho^e - \rho^o & \rho^e + \rho^o \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Se propone como ejercicio verificar que los valores obtenidos para  $S_{11}$  y  $S_{12}$  coinciden con los calculados en el ejemplo del apartado 5.7. ■

**Ejemplo 2** La figura 6.4 muestra un circuito de análisis similar al anterior y que es interesante para estructuras más complejas que veremos más adelante.



$$Z = 1 / Y$$

$$S_{11} = S_{22} = 0 \text{ si } Y^2 = 1 - Y_0^2$$

$$\text{entonces } S_{12} = -j \frac{Y_0}{1 + Y}$$

Fig. 6.4 Circuito discutido en el ejemplo 2

Para las situaciones simétricas (*even*, pared magnética) y antisimétrica (*odd*, pared eléctrica), tendremos:

$$\rho^e = \frac{1 - (Y + jY_0)}{1 + Y + jY_0} \quad ; \quad \rho^o = \frac{1 - (Y - jY_0)}{1 + Y - jY_0} \quad (6.19)$$

y, por tanto:

$$2S_{11} = \rho^e + \rho^o = 2 \frac{1 - Y^2 - Y_0^2}{(1 + Y)^2 + Y_0^2} \quad (6.20)$$

$$2S_{12} = \rho^e - \rho^o = -2 \frac{2jY_0}{(1 + Y)^2 + Y_0^2} \quad (6.21)$$

La red estará completamente adaptada ( $S_{11} = S_{22} = 0$ ) si:

$$Y^2 = 1 - Y_0^2 \quad \Rightarrow \quad Y = \pm \sqrt{1 - Y_0^2} \quad (6.22)$$

y, entonces:

$$S_{12} = -j \frac{Y_0}{1 + Y} \quad (6.23)$$

Además la red será sin pérdidas si  $Y_0 > 1$  y en este caso:

$$Y = jB = \pm j\sqrt{Y_0^2 - 1} \quad ; \quad S_{12} = \frac{-jY_0}{1 \pm j\sqrt{Y_0^2 - 1}} \quad ; \quad |S_{12}| = 1 \quad (6.24)$$

■

## 6.2 Redes de tres accesos

Recordemos que una red está completamente adaptada si todos los elementos diagonales de su matriz  $S$ ,  $S_{ii}$ , se anulan.

Es fácil demostrar que no es posible hacer que un 3-accesos recíproco y sin pérdidas esté completamente adaptado. En efecto, supongamos que lo estuviera:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Las condiciones de unitariedad son:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (6.26a) \quad \beta\gamma^* = 0 \quad (6.26d)$$

$$|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \quad (6.26b) \quad \alpha\gamma^* = 0 \quad (6.26e)$$

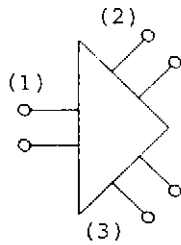
$$|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \quad (6.26c) \quad \alpha\beta^* = 0 \quad (6.26f)$$

Si suponemos, por ejemplo, que  $\beta=0$  entonces:

$$(6.26a) \Rightarrow |\alpha| = 1 \quad , \quad (6.26b) \rightarrow |\gamma| = 0 \quad , \quad (6.26c) \Rightarrow 0 = 1$$

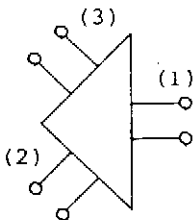
es decir, la forma (6.25) para  $S$  conduce a una contradicción insalvable.

Los dispositivos recíprocos de 3 accesos más comunes son los divisores y los combinadores de potencia. Para los primeros, si tomamos el acceso 1 como el de potencia incidente a dividir, su



Divisor de potencia simétrico  
(sin pérdidas):

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \gamma & -\gamma \\ \alpha & -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |\gamma| = \frac{1}{2}$$



Combinador de potencia simétrico  
(sin pérdidas). No se puede hacer  
que 2 y 3 estén adaptados  
simultáneamente,  $S_{22} = S_{23} = 0$

Fig. 6.5 Redes de tres accesos sin pérdidas; divisores y combinadores de potencia y propiedades básicas de sus matrices  $S$

matriz  $S$  conviene que sea de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & \gamma & \delta \\ \beta & \delta & \epsilon \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Aquí  $|\alpha|^2$  y  $|\beta|^2$  representan las fracciones de potencia incidente que se reparten a los accesos 2 y 3, respectivamente. Si el divisor es simétrico,  $\alpha = \beta$ ,  $\gamma = \epsilon$  y, en este caso, la unitariedad requiere una matriz de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \gamma & -\gamma \\ \alpha & -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad |\gamma| = \frac{1}{2} \quad (6.28)$$

Para un combinador de potencia interesaría (entradas de potencia a combinar para 2 y 3, salida para 1):

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

forma que es imposible, ya que la unitariedad requiere (fila 2 x fila 3\*)  $\beta\beta^* = |\beta|^2 = 0$ . Es decir, los accesos 2 y 3 estarían aislados del 1, contrariamente a lo que queríamos. Por tanto, las redes sin pérdidas no son adecuadas para realizar combinadores de potencia de características aceptables.

La construcción de divisores de potencia con secciones de línea de transmisión, utilizando transformadores en  $\lambda/4$  para adaptar la entrada, es inmediata y se analiza con detalle en los ejemplos siguientes.

**Ejemplo 1** La figura 6.6 representa dos realizaciones posibles que conducen a  $S_{11}=0$ , y, por tanto, se corresponden con la forma (6.28).

El cálculo detallado de la configuración de la figura 6.6a se puede realizar con la ayuda de la figura 6.6c:

$$S_{12} = S_{21} = \frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{-jV^+ + jV^-}{V^+ + V^-} = -j \frac{V^+ - V^-}{V^+ + V^-} = -j \frac{\left(1 - \frac{V^-}{V^+}\right)}{\left(1 + \frac{V^-}{V^+}\right)} = -j \frac{1 - \rho_i}{1 + \rho_i}$$

$$\rho_i = \frac{\left(Z_i - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(Z_i + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad ; \quad S_{12} = S_{21} = -\frac{j}{\sqrt{2}} \quad (6.30)$$

La impedancia de entrada que podemos ver desde 2 cuando 1 y 3 están terminados (cargados con  $R=1$ ) es 1 en paralelo con  $1/2$ , es decir,  $Y=3$  y, por tanto:

$$S_{22} = S_{33} = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j\sqrt{2} & -j\sqrt{2} \\ -j\sqrt{2} & -1 & 1 \\ -j\sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

De manera similar, se puede hallar  $S$  para el circuito de la figura 6.6b, y obtenemos

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j\sqrt{2} & -j\sqrt{2} \\ -j\sqrt{2} & 1 & -1 \\ -j\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

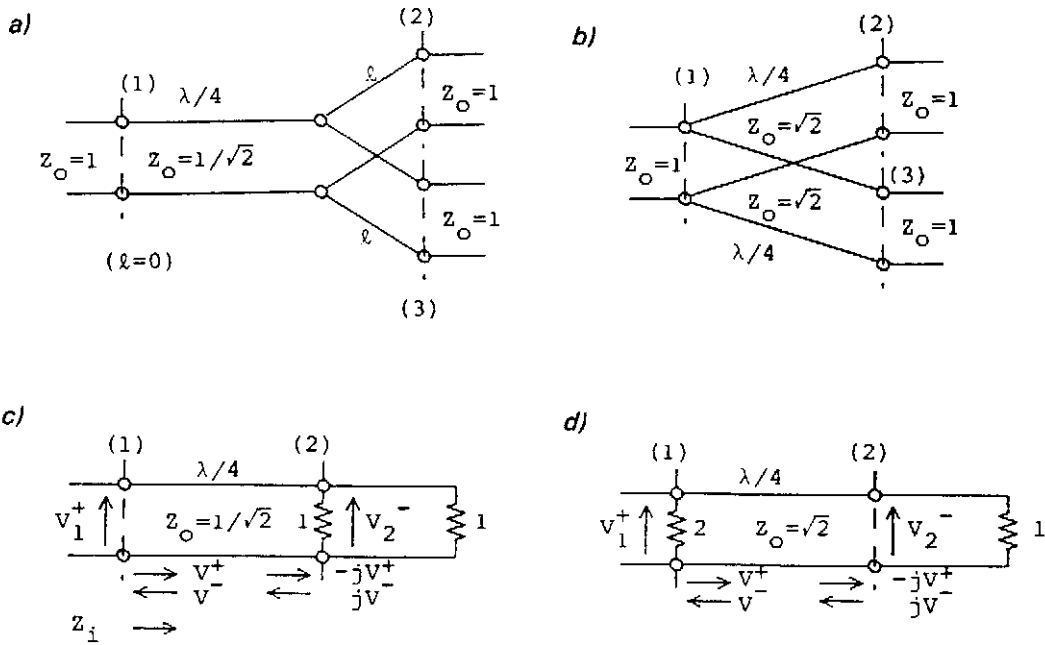


Fig. 6.6 Divisores de potencia realizados con transformadores de impedancias (líneas en  $\lambda/4$ ) y sus circuitos equivalentes para el cálculo de  $S_{12}=S_{21}$



**Ejemplo 2** Supongamos que el divisor de la figura 6.6b no tiene los accesos 2 y 3 terminados, sino cargados con impedancias  $Z_2$  y  $Z_3$  tales que:

$$\rho_2 = \frac{Z_2 - 1}{Z_2 + 1} = \frac{a_2}{b_2} \quad ; \quad \rho_3 = \frac{Z_3 - 1}{Z_3 + 1} = \frac{a_3}{b_3}$$

Tendremos:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \rho_2 b_2 \\ \rho_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (S \text{ dado por (6.32)}) \quad (6.33)$$

De las tres ecuaciones anteriores, se pueden aislar  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  en función de  $a_1$  y obtenemos:

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\rho_2 + \rho_3 - 2\rho_2\rho_3}{2 - \rho_2 - \rho_3} a_1 \\ b_2 &= \frac{-j\sqrt{2}(1 - \rho_3)}{2 - \rho_2 - \rho_3} a_1 \\ b_3 &= \frac{-j\sqrt{2}(1 - \rho_2)}{2 - \rho_2 - \rho_3} a_1 \end{aligned} \quad (6.34)$$

expresiones que definen completamente la situación. Supongamos, por ejemplo, que:

$$Z_2 = 3 \quad \left( \rho_2 = \frac{1}{2} \right) \quad ; \quad Z_3 = \frac{1}{3} \quad \left( \rho_3 = -\frac{1}{2} \right)$$

En este caso, se obtiene:

$$b_1 = -\frac{1}{4} a_1 \quad ; \quad b_2 = -j\frac{3\sqrt{2}}{4} a_1 \quad ; \quad b_3 = -j\frac{\sqrt{2}}{4} a_1$$

Puede llamar la atención que  $|b_2| = 1.061 |a_1| > |a_1|$ , es decir, que la potencia de la onda positiva que sale en la línea de transmisión del acceso 2 sea más grande que la potencia de la onda incidente en 1. Sin embargo, podemos probar que el balance de potencias se mantiene (cosa que ya estaba garantizada por el carácter unitario de  $S$ ):

$$P_{ii} = \frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{2} |b_1|^2 = \frac{1}{2} |a_1|^2 \left( 1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{30}{64} |a_1|^2$$

$$P_{02} = \frac{1}{2} |b_2|^2 - \frac{1}{2} |a_2|^2 = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\rho_2|^2) = \frac{27}{64} |a_1|^2$$

$$P_{03} = \frac{1}{2} |b_3|^2 - \frac{1}{2} |a_3|^2 = \frac{1}{2} |b_3|^2 (1 - |\rho_3|^2) = \frac{3}{64} |a_1|^2$$

y, evidentemente,  $P_{ii} = P_{02} + P_{03}$ . ■

### Divisores resistivos

La figura 6.7 muestra dos tipos de divisores construidos con resistencias solamente. En el caso *a*, se indica el cálculo de la matriz  $S$  en la misma figura; el del caso *b*, se puede realizar de manera análoga, pero con mayor sencillez todavía, dado que, por la simetría del circuito,  $S_{13} = S_{12} = S_{23}$ .

En ambos casos debe notarse, por una parte, que no puede hacerse uso de propiedades de unitariedad de la matriz  $S$  para su cálculo, ya que las redes tienen pérdidas; y por otra, que la potencia que sale por 2 y 3 (cuando hay adaptación) es una cuarta parte de la que entra por 1 ( $-6$  dB), en lugar de ser la mitad ( $-3$  dB) como en el caso de los divisores realizados con líneas de  $\lambda/4$ . Es decir, estos divisores desaprovechan la mitad de la potencia incidente; pero en contrapartida, su carácter resistivo hace que su comportamiento como divisores sea independiente de la frecuencia, por lo que son ampliamente utilizados en el laboratorio como elementos auxiliares de instrumentación.

### 6.3 El divisor de Wilkinson

Tanto en los divisores resistivos como en los realizados con secciones de línea en  $\lambda/4$ , estudiados anteriormente, los accesos de salida (2 y 3) no están aislados ( $S_{23} \neq 0$ ) y, además, la simetría en la

división de potencia se destruye si los accesos 2 y 3 se cargan de manera asimétrica.

Estos inconvenientes se eliminarían en un divisor cuya matriz  $S$  tuviera la forma siguiente:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \rho_2 b_2 \\ \rho_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

con  $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ya que en este caso tendríamos  $b_2 = \alpha a_1$  y  $b_3 = \alpha a_1$  independientemente de  $\rho_2$  y  $\rho_3$ .

Al mismo tiempo este dispositivo se comporta como un combinador ideal ya que, si instalamos generadores en 2 y 3, tendremos:

$$b_1 = \alpha (a_2 + a_3)$$

La matriz  $S$  dada por (6.35) no es unitaria, por lo que no se puede sintetizar con elementos sin pérdidas. Podemos comprobar que el circuito de la figura 6.8, un divisor con dos transformadores en  $\lambda/4$  al que se le ha añadido una resistencia de valor normalizado 2 conectada entre los accesos 2 y 3 (divisor de Wilkinson), tiene una matriz  $S$  de la forma (6.35).

Este circuito es difícil de analizar a partir de la definición de los parámetros  $S$  por la retroacción que hemos introducido; pero podemos utilizar su simetría de la manera siguiente:

Consideremos una red simétrica de  $2N+1$  accesos tales que uno de ellos, con sus dos terminales, esté conectado en el plano de simetría (fig. 6.9a); si este acceso particular llamado 0 en la figura 6.9 se termina, la red de  $2N$  accesos resultante tiene una matriz  $S'$  que coincide con la original, con la primera fila y la primera columna suprimidas. Por otra parte, esta matriz  $S'$  puede calcularse utilizando las propiedades de simetría del apartado 6.1 sin ninguna otra precaución que descomponer la terminación (resistencia) del acceso 0 en dos resistencias en paralelo (fig. 6.9c) con el fin de poder insertar planos de circuito abierto y cortocircuito.

Evidentemente, no podemos calcular los elementos  $S_{0i}$  con este procedimiento, sino que se han de evaluar directamente. Si aplicamos esto al divisor de Wilkinson, teniendo en cuenta que el plano de simetría contiene el acceso que hemos llamado 1 en la figura 6.8 y que corta por la mitad

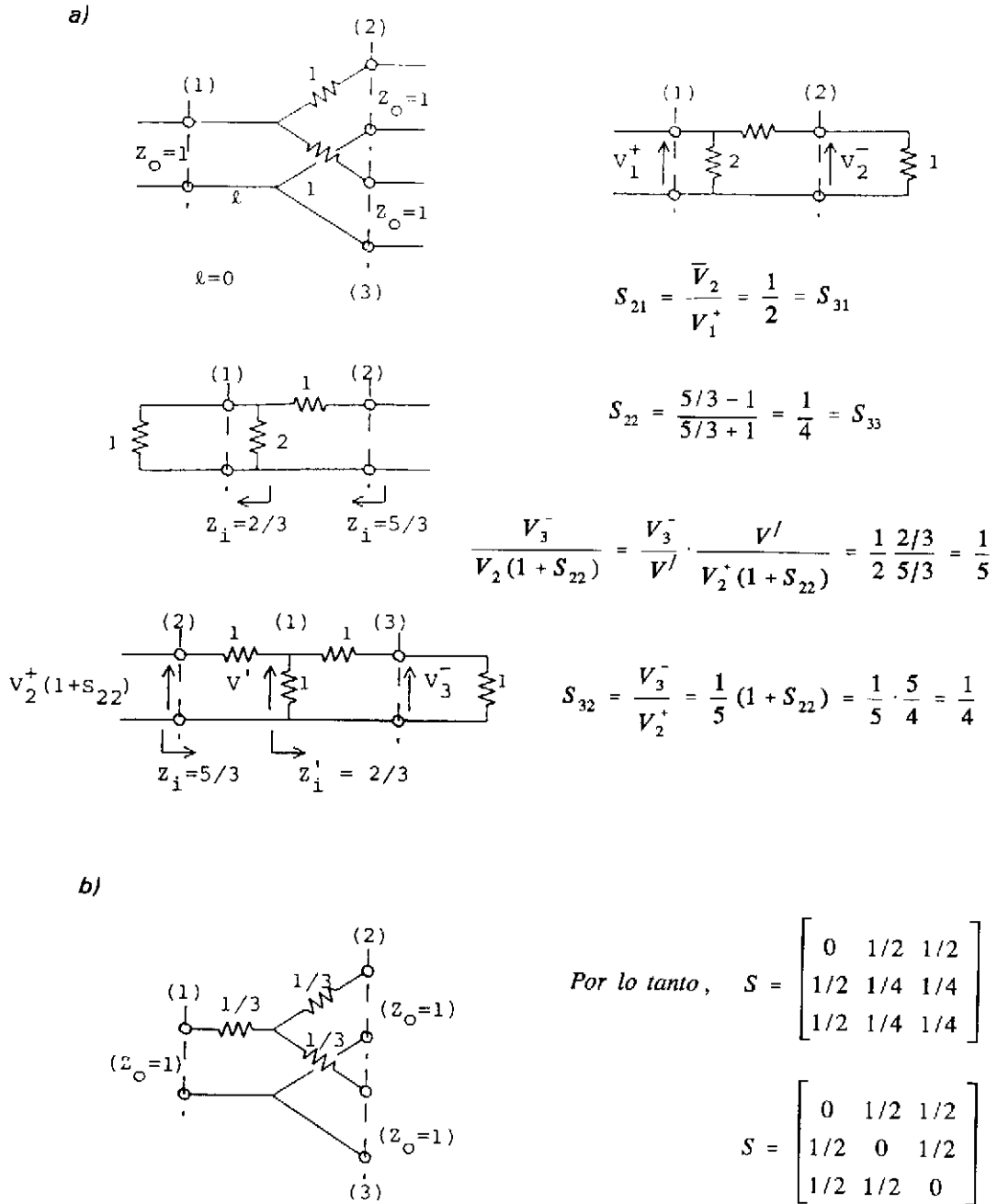


Fig. 6.7 Ejemplos de realizaciones de divisores de potencia resistivos y cálculo de sus parámetros  $S$ . La forma  $a$  es superior en cuanto a aislamiento entre los accesos 2 y 3, y la  $b$  es superior en cuanto adaptación de los mismos

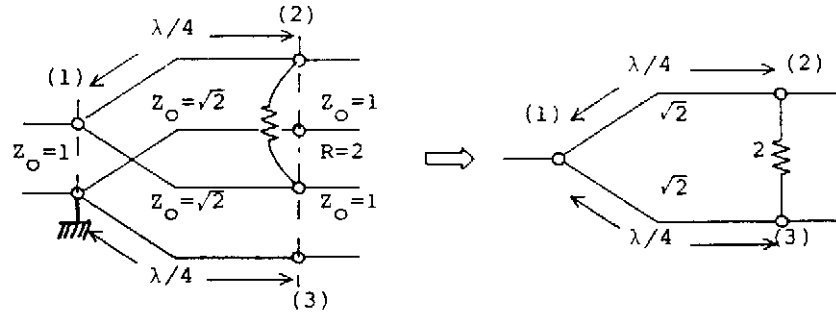


Fig. 6.8 Divisor de Wilkinson y su dibujo simplificado donde se ha omitido uno de los conductores de las líneas de transmisión (por ejemplo, en sistemas de línea microtira, el plano de masa)

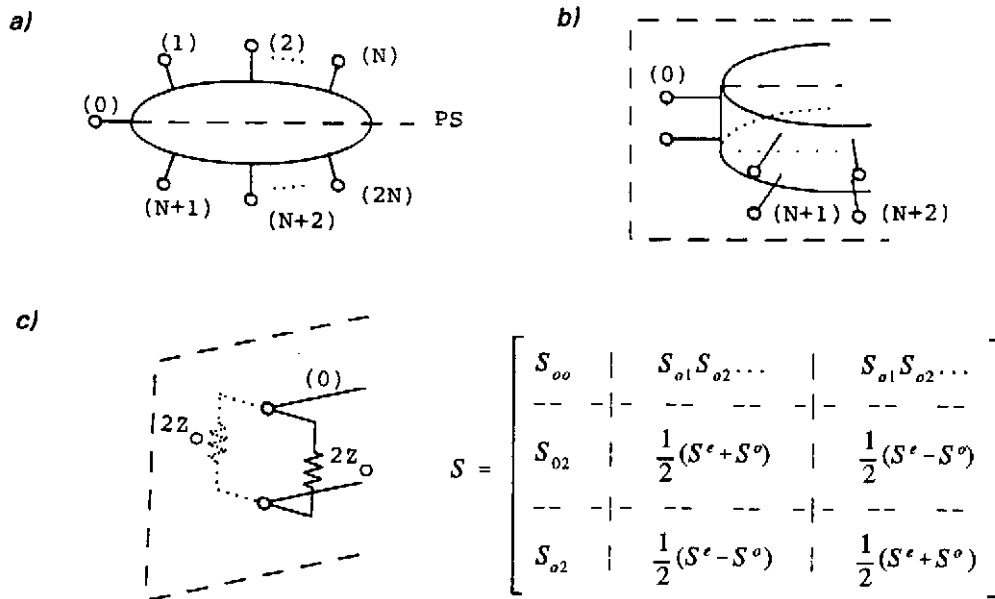
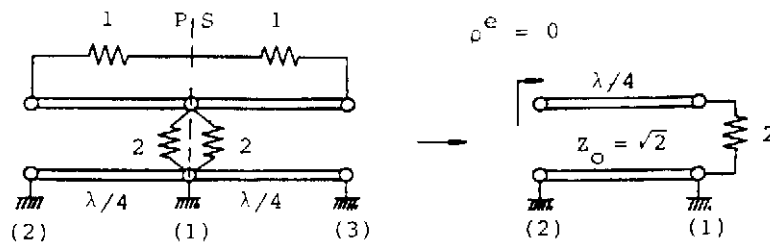
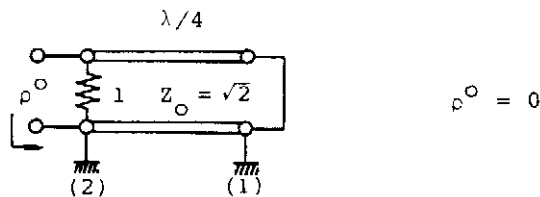


Fig. 6.9 a) Circuito simétrico con un plano de simetría (PS) y un acceso (los dos conductores) contenido en el circuito (nótese que cada acceso está representado únicamente por una sola línea)  
 b) Diagrama tridimensional del circuito anterior  
 c) Descomposición de una terminación  $Z_0$  en dos resistencias en paralelo, una a cada lado del plano PS

a) Pared magnética/circuito abierto (situación par, even)



b) Pared eléctrica/cortocircuito (situación impar, odd)



$$\text{Por tanto, } S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -j & -j \\ -j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fig. 6.10 Análisis del divisor de Wilkinson utilizando el plano de simetría que contiene el acceso 1 (advértase que en la figura 6.9 lo llamábamos acceso 0)

la resistencia de valor normalizado 2, tenemos:

1)  $S_{11}$ ,  $S_{21}$  y  $S_{31}$  valen lo mismo que si no estuviese la resistencia, ya que para calcularlos se debe terminar los accesos 2 y 3, y por simetría los puntos en que está conectada han de estar al mismo potencial y por ella no circulará corriente. Por tanto, sabemos de momento que:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-j}{\sqrt{2}} & \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ \frac{-j}{\sqrt{2}} & S_{22} & S_{23} \\ \frac{-j}{\sqrt{2}} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

2) Para calcular la submatriz de orden 2x2 que todavía desconocemos, terminamos el acceso 1 con dos resistencias de valor normalizado 2 en paralelo, una a cada lado del plano de simetría, y a la red simétrica resultante le instalaremos una pared magnética (fig. 6.10a) y otra pared eléctrica (fig. 6.10b) sucesivamente, con lo que se obtiene para los coeficientes de reflexión en el acceso 2 (o en el 3):

$$\rho^e = \rho^o = 0$$

Obtenemos, finalmente, para el divisor:

$$S = -\frac{j}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

#### 6.4 Circuladores

Se denomina circulador ideal a una red de tres accesos (también existen de cuatro, pero su uso es menos frecuente) sin pérdidas y *no* recíproca, cuya matriz  $S$  valga:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.38a) \quad ; \quad \text{o bien} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.38b)$$

Las matrices anteriores son, evidentemente, no simétricas y unitarias, y la red tiene la propiedad de que, en condiciones de accesos terminados, la señal que se inyecta en uno de ellos solo sale por uno de los dos restantes, mientras que por el otro no sale nada, con lo que se mantiene por tanto, aislado.

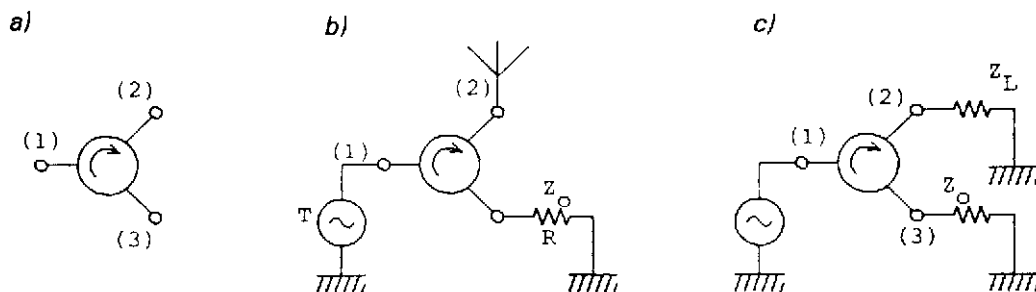


Fig. 6.11 a) Diagrama de circulator  
 b) Utilización como duplexor de antena  
 c) Utilización para aislar un generador de las reflexiones de la carga  $Z_L$  (aislador)

La figura 6.11a representa esquemáticamente un circulator con matriz  $S$  de la forma (6.38a). La flecha curva interior representa el *sentido de circulación* o de flujo de señales entre accesos. En este caso:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = a_3 \\ b_2 = a_1 \\ b_3 = a_2 \end{cases} \quad (6.39)$$

Es evidente que la forma (6.38b) corresponde al sentido opuesto de circulación.

Una aplicación típica de los circulares es como duplexores de antena (fig. 6.11b): la misma antena sirve simultáneamente para transmisor ( $T$ ) y receptor ( $R$ ), y el circulator se encarga del correcto direccionamiento de las señales.

En la otra aplicación importante, el circulator se utiliza para aislar un generador de las señales reflejadas por una carga desadaptada (fig. 6.11c); estas cargas son dirigidas hacia la terminación del acceso 3, donde son absorbidas. De esta manera, el generador no percibe nunca reflexiones y, en consecuencia, es como si estuviese siempre conectado a una carga adaptada.

En esta configuración, la red de dos accesos resultante de considerar solo los 1 y 2 (con el 3 terminado), se llama aislador y, como acabamos de ver, se caracteriza porque permite el paso de



señales sin impedimento de 1 a 2 y no lo permite en sentido inverso. Su  $S$  será, por tanto:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Los circuladores se construyen con ferritas (materiales cerámicos no conductores, pero con propiedades magnéticas muy intensas) sometidas a la acción de un campo magnético estático. Su estudio queda fuera del ámbito de este libro.

En la realidad, las matrices  $S$  no toman la forma ideal (6.38), ya que, por una parte, los circuladores presentan pérdidas y, por otra, los accesos aislados no lo están completamente. Es decir,

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} |S_{11}|, |S_{22}|, |S_{33}| \ll 1 (\approx 0) \\ |S_{13}|, |S_{21}|, |S_{32}| < 1 (\approx 1) \\ |S_{12}|, |S_{23}|, |S_{31}| \ll 1 (\approx 0) \end{array}$$

En este caso, se definen:

a) Para un acceso, la *pérdida de retorno* o medida de la desviación de adaptación mediante:

$$L_R \text{ (dB)} = -20 \log |S_{ii}| \quad (i=1,2,3) \quad (6.41)$$

(Si el acceso está adaptado,  $|S_{ii}| = 0$  i  $L_R \rightarrow \infty$  )

b) Entre dos accesos entre los que hay transferencia de señal, la *pérdida de inserción* mediante:

$$L_I \text{ (dB)} = -20 \log |S_{ij}| \quad (6.42)$$

(idealmente  $|S_{ij}| = 1$  y  $L_I = 0 \text{ dB}$  )

c) Entre dos accesos idcalmente aislados, el *aislamiento* mediante:

$$I \text{ (dB)} = -20 \log |S_{ij}| \quad (6.43)$$

$$\text{o b} \quad \quad \quad \text{i} \quad \quad \quad \text{e} \quad \quad \quad \text{n} \\ I \text{ (dB)} = -2 \log |S_{ij}| - L_i \text{ (dB)} \quad (6.44)$$

La segunda definición es más correcta que la primera, ya que tiene en consideración las pérdidas de inserción en la dirección deseada y, por tanto, nos dice el nivel (en *dB*) de la señal no deseada relativo o por debajo de la no deseada. En la práctica, si las pérdidas de inserción son pequeñas (0,2 dB es un valor corriente) y el aislamiento es grande (25 dB también es corriente), la diferencia entre (6.43) y (6.44) se hace irrelevante.

### 6.5 Redes de cuatro accesos

Les redes pasivas de cuatro accesos más importantes son los acopladores direccionales (*AD*), elementos que permiten medir por separado ondas positivas y negativas de manera directa. La propiedad definitoria de un *AD* es la de tener *dos pares de accesos desacoplados*, es decir, cuatro elementos de su matriz *S*, que no pertenezcan a la diagonal principal, nulos.

Ahora, nos interesa demostrar la proposición siguiente:

**Prop.** Si un 4-accesos recíproco y sin pérdidas está completamente adaptado, es decir, si  $S_{ii}=0$  ( $i=1,2,3,4$ ), es un acoplador direccional. (Es decir, *S* tiene cuatro elementos más nulos).

En efecto, supongamos:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \delta & \epsilon \\ \beta & \delta & 0 & \sigma \\ \gamma & \epsilon & \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

Por unitariedad:

$$1f \times 2f^* \rightarrow \beta \delta^* + \gamma \epsilon^* = 0 \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} 1f \times 3f^* &\rightarrow \alpha \delta^* + \gamma \sigma^* = 0 \\ 1f \times 4f^* &\rightarrow \alpha \epsilon^* + \beta \sigma^* = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta^* & \gamma \\ \epsilon^* & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \sigma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

En el sistema (6.47), si el determinante  $\Delta$  es no nulo:

$$\Delta = \delta^* \beta - \gamma \epsilon^* \neq 0 \quad (6.48)$$

entonces  $\alpha = \sigma = 0$  y la proposición quedaría demostrada. Por otra parte, si  $\Delta = 0$ , entonces, sumando y restando de (6.46), se obtiene:

$$\beta \delta^* = \gamma \epsilon^* = 0 \quad (6.49)$$

y necesariamente tendríamos otro par de valores de entre  $(\beta, \delta, \gamma, \epsilon)$  nulos.

Obtenemos, de esta manera una matriz  $S$  con 8 elementos nulos que, mediante un cambio de numeración de los accesos si es necesario, siempre puede ponerse de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \epsilon \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ \gamma & \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline -- & -- \\ B^t & 0 \end{array} \right) \quad (6.50)$$

(Es decir, hemos asignado los números 1-2 y 3-4 a los dos pares de accesos desacoplados. Numeraciones diferentes sitúan los ceros en otras posiciones, pero de momento manejaremos siempre matrices como la (6.50)).

Dada la estructura de (6.50), es fácil de ver que las submatrices 2x2 no nulas han de ser también unitarias:

$$SS^* = \left( \begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline -- & -- \\ B^t & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 0 & B^* \\ \hline -- & -- \\ B^+ & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} BB^+ & 0 \\ \hline -- & -- \\ 0 & B^t B^+ \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -- & -- \\ 0 & 1 \end{array} \right) \quad (6.51)$$

y, por tanto, se pueden escribir:

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha e^{j\phi_1} & \sin\alpha e^{j\phi_2} \\ \sin\alpha e^{j\phi_2} & -\cos\alpha e^{j(2\phi_2-\phi_1)} \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

Si movemos adecuadamente los planos de referencia 1 o 3 podemos hacer  $\phi_1=0$ , y si movemos 2 o 4, podemos hacer  $\phi_2=0$ . Por tanto, para estos planos de referencia particulares, tendremos:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.53a)$$

De manera análoga, también podríamos haber puesto:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\alpha & j\sin\alpha \\ 0 & 0 & j\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & j\sin\alpha & 0 & 0 \\ j\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.53b)$$

Adviértase que, una vez elegidos los planos de referencia adecuados, la red queda definida por un solo parámetro, el escalar  $\alpha$ .

**Ejemplo 1** Consideremos un *AD* con *S* de la forma (6.53a) conectado como en la figura 6.12a: un generador en 1, una carga  $Z_3$  en 3, y 2 y 4 terminados. Para simplificar, supondremos inicialmente  $\alpha \ll 1$  (aunque esto no invalida las conclusiones que deseamos obtener) y por tanto,  $\cos\alpha \approx 1$ ,  $\sin\alpha \approx \alpha$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & -1 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_1 \approx a_3 \\ b_2 \approx \alpha a_3 \\ b_3 \approx a_1 \\ b_4 \approx \alpha a_1 \end{matrix} \quad (6.54)$$

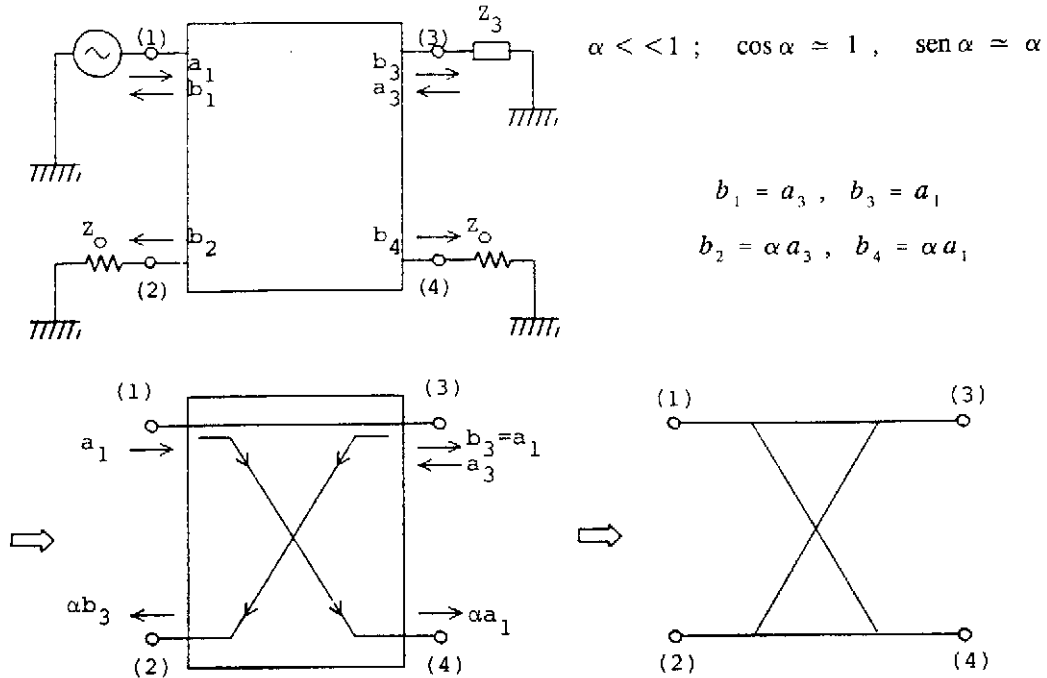


Fig. 6.12 a) Ejemplo de utilización de un AD. Las señales en 2 y 4 son proporcionales, respectivamente, a las ondas positiva y negativa en la rama superior 2-3 (fig.b)  
 c) Esquema simbólico del AD

Es decir, la señal se transmite por la rama superior 1-3 sin perturbación, mientras que en 2 y 4 obtenemos señales proporcionales a las ondas positiva y negativa en la rama superior (fig. 12b); de aquí el nombre de acoplador direccional.

Obsérvese además que:

$$\frac{b_2}{b_4} = \frac{\alpha a_3}{\alpha a_1} = \frac{\rho_3 b_3}{a_1} = \rho_3 \tag{6.55}$$

es decir, que podemos obtener una indicación directa del coeficiente de reflexión de la impedancia  $Z_3$ . En el análisis anterior debemos tener en cuenta que:

1) Dada la simetría de  $S$  (ecuación (6.54)) las ramas 1-3 y 2-4 son equivalentes. es decir, se pueden intercambiar la rama principal y la acoplada sin que las conclusiones cambien, razón por la que el esquema simbólico de la figura 12c las representa simétricas.

2) Si  $\alpha$  no es muy pequeño y no podemos hacer aproximaciones, tendremos, en vez de (6.54):

$$b_1 = \cos\alpha \cdot a_3, \quad b_2 = \sin\alpha \cdot a_3, \quad b_3 = \cos\alpha \cdot a_1, \quad b_4 = \sin\alpha \cdot a_1 \quad (6.56)$$

En este caso, la onda que sale de la rama principal,  $b_3$ , no se puede aproximar por  $a_1$ , ya que no podemos despreciar la fracción de potencia que se extrae por 4. En lugar de (6.55), ahora tendremos:

$$\frac{b_2}{b_4} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{\rho_3 b_3}{\left(\frac{b_3}{\cos\alpha}\right)} = \cos\alpha \cdot \rho_3 \quad (6.57)$$

expresión que también caracteriza  $\rho_3$  una vez conocido  $\alpha$ . ■

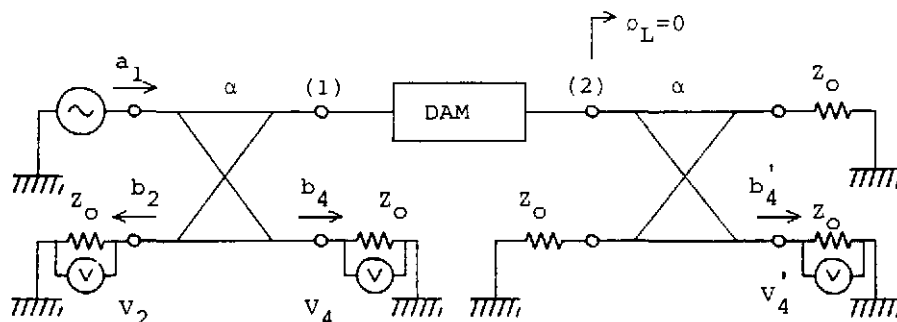
**Ejemplo 2** La figura 6.13 muestra cómo dos acopladores direccionales iguales, junto con tres voltímetros adaptados al sistema (es decir, de impedancia interna  $Z_0$ ) y dos terminaciones adicionales, forman un sistema básico de medida de los parámetros de  $S$  de un 2-accesos (o bien un  $n$ -accesos en general).

Nótese que la salida del dispositivo a medir está terminada, ya que también lo están las tres ramas del  $AD$ . Las expresiones que dan  $S_{11}$  y  $S_{21}$  en función de las tensiones medidas ( $V_2, V_4, V_4'$ ) son de obtención inmediata.

Para medir  $S_{22}$  y  $S_{12}$  es suficiente con invertir la posición en que está instalado el dispositivo en el sistema. ■

Para un  $AD$  se define el acoplamiento  $C$  en  $dB$  mediante la expresión:

$$C = -20 \log |S_{14}| = -20 \log (\sin\alpha) \quad (6.58)$$



DAM = Dispositivo a medir    V = Voltímetro ideal ( $Z_{in} = \infty$ )

$$S_{11} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{b_2}{b_4} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{V_2}{V_4} \quad ; \quad S_{21} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{b'_4}{b_4} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{V'_4}{V_4}$$

Fig. 6.13 Disposición de dos AD iguales y voltímetros ideales como sistema básico de medida de parámetros S. Para medir  $S_{22}$  y  $S_{12}$  se invierte el DAM

Si los accesos no están perfectamente adaptados ni aislados:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{11} & S_{14} & -S_{13} \\ S_{13} & S_{14} & S_{11} & S_{12} \\ S_{14} & -S_{13} & S_{12} & S_{11} \end{pmatrix}$$

se definen también las pérdidas de retorno en cualquier acceso (que hemos supuesto iguales)  $L_R$ , y la directividad,  $D$ , mediante las expresiones:

$$L_R = -20 \log |S_{11}| \quad (6.59) \quad (\text{pérdidas de retorno en dB})$$

$$D = 20 \log \frac{|S_{14}|}{|S_{12}|} \quad (6.60) \quad (\text{directividad en dB})$$

La directividad indica el nivel (en dB) de la señal indeseada en el acceso que debería estar desacoplado en relación con la señal acoplada.

## 6.6 Híbridos

Un  $AD$  de 3 dB ( $C=3$  dB) se denomina *circuito híbrido* o híbrido. En este caso:

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y las formas canónicas para la matriz  $S$  dadas por (6.53) quedan:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & j & 1 \\ 1 & j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.61a,b)$$

Cuando el circuito responde a la forma (6.61a) se suele denominar *híbrido de 180°*, y si responde a la (6.61b), híbrido de 90° (fig. 6.14), si bien es evidente que podemos pasar de uno a otro, a una frecuencia determinada, mediante un cambio de plano de referencia.

En un híbrido de 180°, a los accesos desacoplados también se les llama suma ( $\Sigma$ ) y diferencia ( $\Delta$ ); véase la figura 6.14c donde, si se inyectan señales por 1 y 2,  $b_3$  es proporcional a su suma, y  $b_4$ , a su diferencia. Evidentemente, la denominación también se aplica a 1 y a 2 si inyectamos las señales desde 3 y 4.

A continuación, consideremos tres ejemplos básicos de aplicación del híbrido de 180°.

### Ejemplo 1 Puente de impedancias

Supongamos un híbrido 180° con un generador en 1, 2 terminado, y 3 y 4 cargados arbitrariamente (fig. 6.15a). En la misma figura se calcula el valor de  $b_2$  :



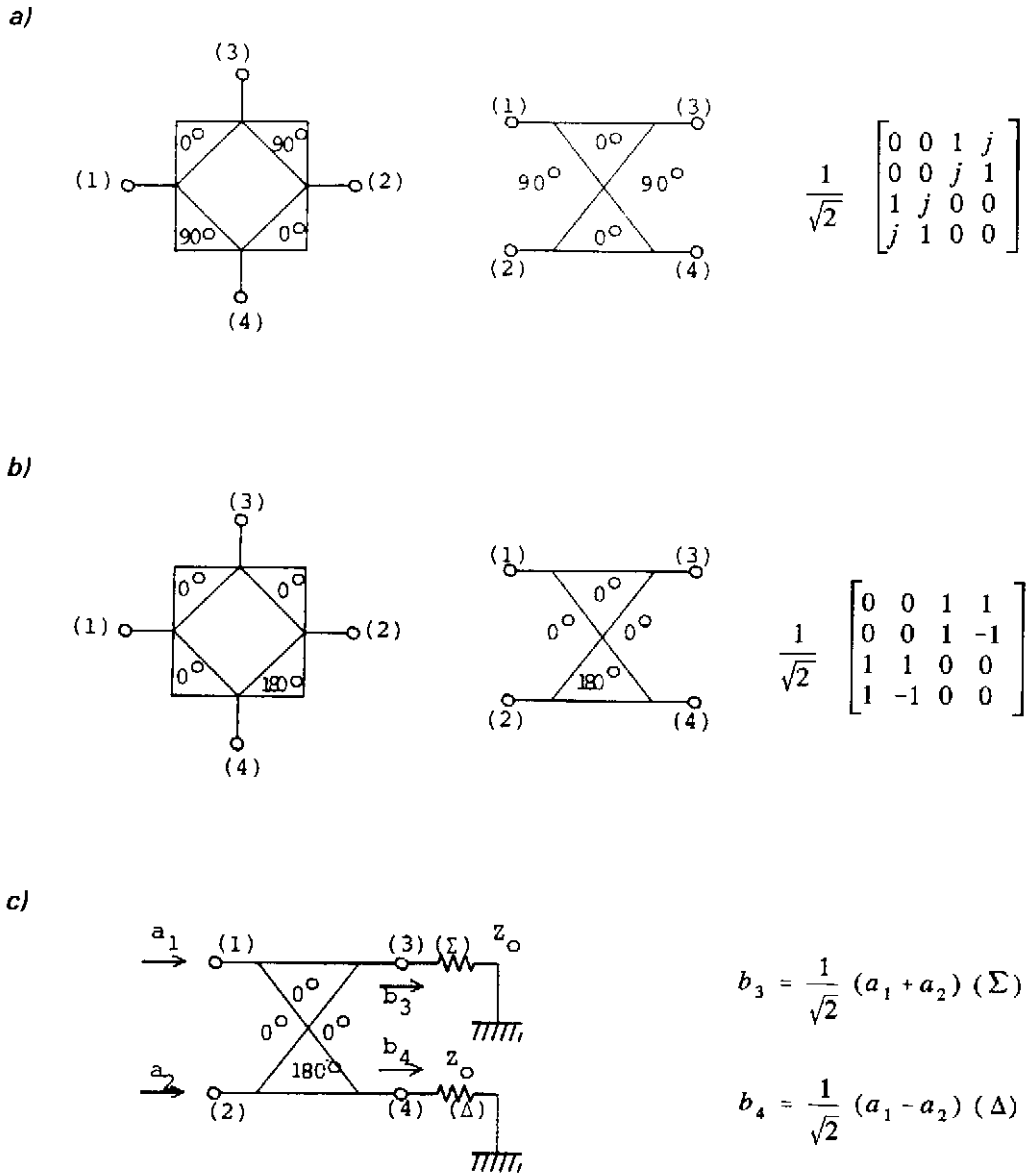
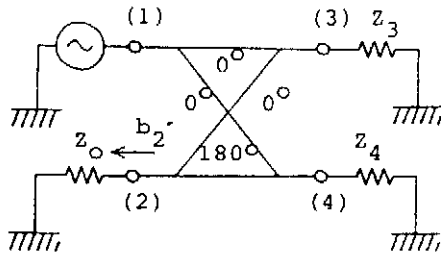


Fig. 6.14 Esquemas simbólicos de híbridos de 90°, a, y de 180°, b. Los accesos 3 y 4 de un híbrido de 180° también suelen denominarse Σ (suma) y Δ (diferencia), respectivamente

a)

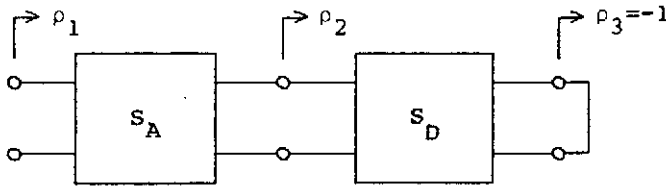


$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ \rho_3 b_3 \\ \rho_4 b_4 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 \quad ; \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_3 b_3 - \rho_4 b_4) = \frac{1}{2} (\rho_3 - \rho_4) a_1$$

$$\text{si } Z_3 = Z_4 \Rightarrow \rho_3 = \rho_4 \Rightarrow b_2 = 0 \text{ (puente de impedancias)}$$

b)



$$S_A = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\alpha} \\ e^{-\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_D = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\phi} \\ e^{-j\phi} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_i = S_{i1} + \frac{S_{i2} S_{21} \rho_L}{1 - S_{22} \rho_L}$$

$$\rho_2 = -e^{-2j\phi} \quad ; \quad \rho_1 = -e^{-2\alpha} e^{-2j\phi}$$

Fig. 6.15 a) Un híbrido de 180° como puente de impedancias: si  $Z_3 = Z_4$ , en el acceso 2 la tensión se anula

b) Síntesis de una impedancia arbitraria (coeficiente de reflexión  $\rho$ , arbitrario) mediante un atenuador variable y un desfasador variable

$$b_2 = \frac{1}{2}(\rho_3 - \rho_4)a_1 \quad (6.62)$$

donde  $\rho_3$  y  $\rho_4$  son los coeficientes de reflexión asociados con  $Z_3$  y  $Z_4$ . De manera que si  $Z_3 = Z_4$ ,  $b_2 = 0$ , y por tanto un voltímetro (adaptado al sistema) detectaría un cero de tensión.

De esta manera, si  $Z_3$ , por ejemplo, es desconocida y podemos variar  $Z_4$  de forma conocida (referencia), sabremos que  $Z_3 = Z_4$  cuando hayamos obtenido un cero de tensión en 2 (puente de impedancias).

La figura 6.15b indica la manera de realizar una impedancia arbitraria con un atenuador variable y un desfasador variable; el coeficiente de reflexión a la entrada vale:

$$\rho_1 = -e^{-2\alpha} e^{-2j\phi} \quad (6.63)$$

variando  $\alpha$  entre  $(0, \infty)$  y  $\phi$  entre  $(0, \pi)$ . Si ambos, atenuador y desfasador, están calibrados (es decir, si conocemos los valores de  $\alpha$  y  $\phi$  en cada momento) también conoceremos el valor de  $\rho_1$ . ■

### Ejemplo 2 Divisor de potencia

Si, como en el ejemplo anterior, el acceso 2 está terminado, para los otros tres accesos resultantes podemos escribir (respetando la numeración del híbrido):

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (6.64)$$

Es decir, el 3-accesos resultante se comporta como un divisor/combinador de potencia ideal. ■

### Ejemplo 3 Detector de fase

Supongamos ahora que en los accesos 1 y 2 inyectamos señales coherentes de la misma amplitud, pero con fase diferente (fig. 6.16):

$$a_1 = a e^{j\phi_1} \quad a_2 = a e^{j\phi_2} \quad (6.65)$$

En la misma figura 6.16 se calculan los valores de  $b_3$  y  $b_4$ :

$$b_3 = \frac{2a}{\sqrt{2}} \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)} \quad (6.66a)$$

$$b_4 = j \frac{2a}{\sqrt{2}} \sin \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)} \quad (6.66b)$$

Es decir, las fracciones de señal que se desvían a 3 y 4 dependen del desfase  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$  entre  $a_1$  y  $a_2$ . Todavía más, se observa que:

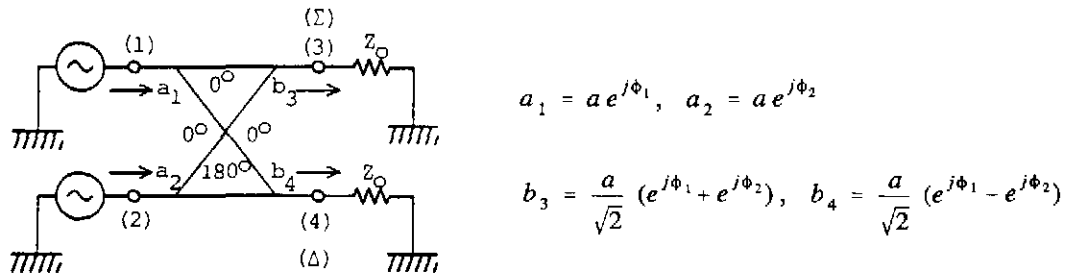
$$|b_3|^2 - |b_4|^2 = 2|a|^2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (6.67)$$

De forma que si en 3 y 4 colocamos detectores cuadráticos (de impedancia interna  $Z_0$ ) y restamos sus salidas, la señal es proporcional a  $\cos(\Delta\phi)$  (detector de fase). ■

Digamos, finalmente, que un híbrido de  $180^\circ$  se comporta, básicamente, como la bobina híbrida utilizada en telefonía, y que consiste en un transformador con una toma simétrica en el devanado secundario (fig. 6.17). Es fácil ver que, con  $Z_{03} = Z_{04}$ , 1 y 2 están aislados, y un generador en 1 produce tensiones en 3 y 4 como las dibujadas en la figura. Por otra parte, un generador en 2 excita 3 y 4 con tensiones de sentidos opuestos entre sí.

Debe notarse que, sin embargo, en una bobina híbrida los accesos 3 y 4 no están aislados, ni está la red completamente adaptada.

Más adelante veremos otras aplicaciones de los híbridos a la realización de circuitos activos (amplificadores, osciladores y mezcladores).



$$a_1 = a e^{j\phi_1}, \quad a_2 = a e^{j\phi_2}$$

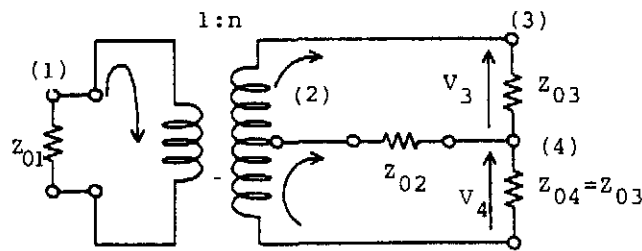
$$b_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} (e^{j\phi_1} + e^{j\phi_2}), \quad b_4 = \frac{a}{\sqrt{2}} (e^{j\phi_1} - e^{j\phi_2})$$

$$b_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)} \left[ e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)} + e^{-j\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)} \right] = \frac{2a}{\sqrt{2}} \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)}$$

Análogamente  $b_4 = j \frac{2a}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} e^{j\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)}$

$$|b_3|^2 - |b_4|^2 = 2|a|^2 \left( \cos^2 \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) = 2|a|^2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Fig. 6.16 Un híbrido de 180° como detector de fase. Si  $a_1$  y  $a_2$  son coherentes y de la misma amplitud, las amplitudes de las ondas que salen por 3 y 4 son proporcionales al coseno y seno de la mitad del desfase entre  $a_1$  y  $a_2$



Con (3) y (4) cargados de la misma manera:  $S_{12}=0$

Fig. 6.17 Bobina híbrida. Los accesos 1 y 2 están desacoplados si  $Z_{03}=Z_{04}$ , con independencia de los valores particulares de  $n$ ,  $Z_{01}$ ,  $Z_{02}$  y  $Z_{03}=Z_{04}$

### 6.7 Realización de acopladores direccionales

Las más frecuentes, en el ámbito de las líneas de transmisión, son las que utilizan líneas acopladas (que estudiaremos más adelante) y secciones de línea en  $\lambda/4$ .

Una forma de estas últimas es la esquematizada en la figura 6.18; cuatro secciones de línea en  $\lambda/4$  formando un cuadrado (o un anillo), con las impedancias características iguales dos a dos. Dada la simetría, el análisis de esta estructura puede hacerse a partir de sus mitades simétrica y antisimétrica según explicamos en 6.1, y tal como se indica en la misma figura 6.18. Adviértase que se hace uso de un resultado anterior, recogido en la figura 6.14 (ejemplo 2 del apartado 6.1).

Resumamos los resultados obtenidos en la figura 6.18; la estructura es un *AD* si:

$$Y_{01}^2 = 1 + Y_{02}^2 \quad (6.68)$$

en cuyo caso:

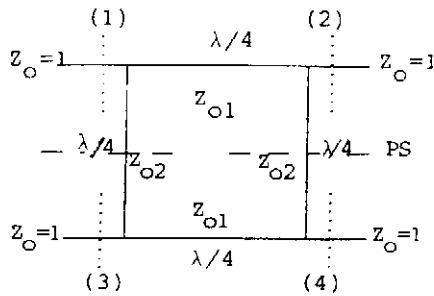
$$S = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & 0 & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{14} & 0 \\ 0 & S_{14} & 0 & S_{12} \\ S_{14} & 0 & S_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{12} = -\frac{j}{Y_{01}} = -\frac{j}{\sqrt{1 + Y_{02}^2}}$$

$$S_{14} = -\frac{Y_{02}}{Y_{01}} = -\frac{Y_{02}}{\sqrt{1 + Y_{02}^2}} \quad (6.69)$$

Adviértase que la forma de  $S$  no coincide con las formas canónicas dadas por (6.53), lo que se subsana fácilmente si renumeramos los accesos (fig. 6.19 *a* y *b*). Para realizar un híbrido,  $|S_{12}| = |S_{14}| = 1/\sqrt{2}$  y, por tanto:

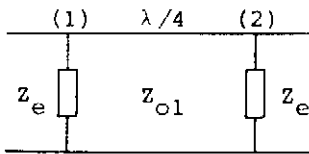
$$Y_{02} = 1 \quad ; \quad Y_{01} = \sqrt{2}$$



Para línea en  $\lambda / 8$   
 $\tan \beta l = 1$

$$Z_{i.c.c} = jZ_o, \quad Z_{i.c.a} = -jZ_o$$

Situación par (P.M./circuitos abiertos)

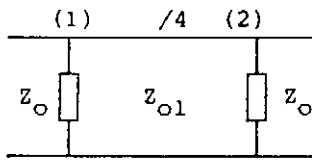


$$Z_e = -jZ_{o2}$$

$$S_{11}^e = S_{22}^e = 0 \quad \text{si} \quad Y_e^2 = 1 - Y_{o1}^2 \rightarrow Y_{o1}^2 = 1 + Y_{o2}^2$$

$$S_{12}^e = -j \frac{Y_{o1}}{1 + Y_e} = -j \frac{Y_{o1}}{1 + jY_{o2}}$$

- Situación impar (P.E./cortocircuitos)



$$Z_o = jZ_{o2}$$

$$S_{11}^o = S_{22}^o = 0 \quad \text{si} \quad Y_o^2 = 1 - Y_{o1}^2 \rightarrow Y_{o1}^2 = 1 + Y_{o2}^2$$

$$S_{12}^o = -j \frac{Y_{o1}}{1 + Y_o} = -j \frac{Y_{o1}}{1 - jY_{o2}}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^e + S^o & S^e - S^o \\ S^e - S^o & S^e + S^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & 0 & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{14} & 0 \\ 0 & S_{14} & 0 & S_{12} \\ S_{14} & 0 & S_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{12} = \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) = -j \frac{Y_{o1}}{1 + Y_{o2}^2} = -\frac{j}{Y_{o1}} \quad ; \quad S_{14} = \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = -\frac{Y_{o1} Y_{o2}}{1 + Y_{o2}^2} = -\frac{Y_{o2}}{Y_{o1}}$$

Fig. 6.18 Análisis de la estructura simétrica formada por un cuadrado de líneas en  $\lambda/4$ . Si  $Y_{o1}^2 = 1 + Y_{o2}^2$ , la estructura se comporta como un acoplador direccional

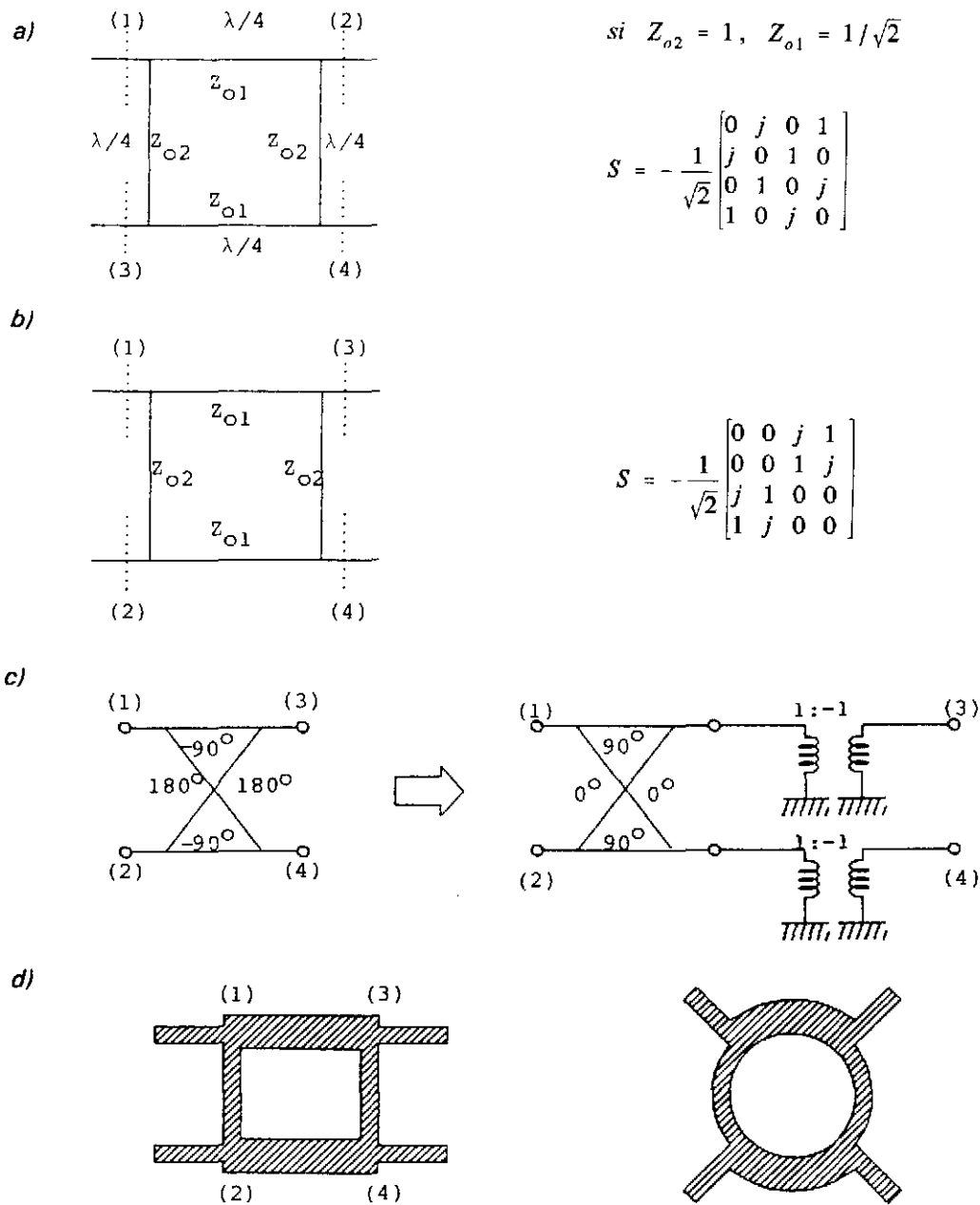


Fig. 6.19 a) Forma particular de la estructura anterior para un híbrido (AD de 3 dB)  
 b) Renumeración de los accesos  
 c) Esquema simplificado equivalente. Se suelen omitir los transformadores 1:-1 (cambios de signo de la tensión y de la corriente)  
 d) Aspecto de realizaciones en línea microtira o triplaca (se representa la forma de las tiras conductoras)



con lo que se obtiene la estructura de las figuras 6.19 *a* y *b*. Se advierte también el signo menos que afecta a todos los elementos  $S_{ij}$ , por lo que el esquema equivalente es el de la figura 6.19c; los transformadores 1:-1 representan cambios de signo simultáneos en tensión y corriente y suelen omitirse, ya que normalmente la fase de los accesos 3-4 relativa a los 1-2 no es relevante (compárese con lo dicho en el apartado 6.6 referente al circuito equivalente de una línea en  $\lambda/2$ , figura 6.15).

Este híbrido, realizado en líneas triplaca o microtira, presenta el aspecto de la figura 6.19d en sus versiones rectangular y circular. Normalmente, se prefiere ésta última por su mayor capacidad de control de longitudes de línea y menor número de discontinuidades geométricas, que siempre suponen efectos indeseados. En las mismas figuras, que están aproximadamente a escala, se observa cómo la línea de  $Z_o$  menor es más ancha que las líneas restantes. Este extremo, el ensanchamiento de las de impedancia alta, es el que limita la utilización de esta estructura cuando se desean acopladores direccionales con acoplamiento débil ( $C$  en  $dB$  grande).

Por ejemplo, si deseamos  $C=20$  dB tenemos dos posibilidades: (ecuaciones (6.69) y figura 6.18):

a)

$$|S_{12}|^2 = \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad Y_{02} = \sqrt{99} = 9,95 \quad ; \quad Y_{01} = 10$$

Por tanto, con impedancia de referencia de  $50 \Omega$ ,  $Z_{01}$  y  $Z_{02}$  serían de  $5,0 \Omega$ , y la realización física del híbrido imposible. Por ejemplo, con  $\epsilon_r=2,1$  (valor típico de un sustrato plástico) resulta  $w/h=48$ .

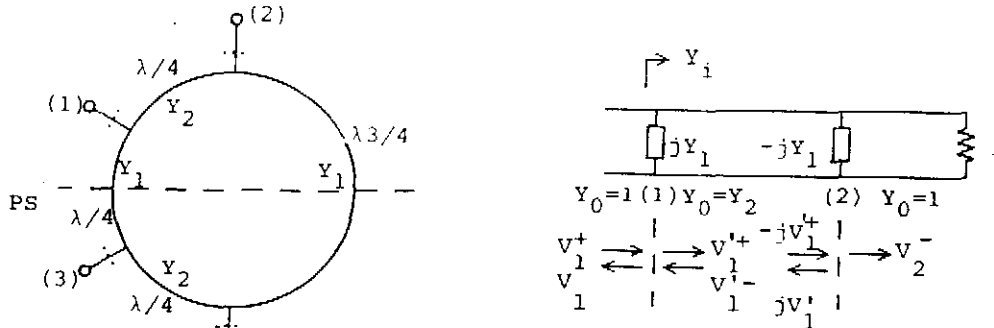
b)

$$|S_{14}| = \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad Y_{02} = \frac{1}{\sqrt{99}} = 0,10 \quad ; \quad Y_{01} = 1,005$$

En este otro caso, el problema estaría con la línea de  $Z_o=500 \Omega$ ; para  $\epsilon_r=2,1$  resulta que  $w/h = 4,5 \cdot 10^5$ , y con los espesores típicos de sustratos de microondas ( $h < 1$  mm) la anchura de la línea habría de ser muy inferior a una micra.

Otra forma posible de realizar un  $AD$  con líneas de transmisión es la esquematizada en la figura 6.20; un anillo de  $1,5\lambda$  de longitud formado por cuatro tramos de impedancias  $Z_1$  y  $Z_2$ , tres de ellos en  $\lambda/4$  y uno en  $3\lambda/4$ , conectados al exterior mediante cuatro accesos. Dado que existe un plano de simetría, puede realizarse un análisis similar a los anteriores, tal como se indica en la misma figura.

a) Situación par (P.M./C.A.)

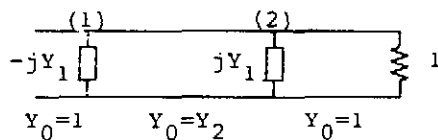


$$S_{11}^e = \frac{1 - Y_i}{1 + Y_i} = \frac{1 - jY_1 - \left( \frac{Y_2^2}{1 - jY_1} \right)}{1 + jY_1 + \left( \frac{Y_2^2}{1 - jY_1} \right)} = \frac{(1 - jY_1)^2 - Y_2^2}{1 + Y_1^2 + Y_2^2} \quad ; \quad S_{22}^e = \frac{(1 + jY_1)^2 - Y_2^2}{1 + Y_1^2 + Y_2^2}$$

$$V_1^+ + V_1^- = V_1'^+ + V_1'^- \quad ; \quad V_2^- = -j(V_1'^+ - V_1'^-) \quad ; \quad -\frac{V_1'^-}{V_1'^+} = \frac{Y_2 + jY_1 - 1}{Y_2 - jY_1 + 1}$$

$$\frac{V_2^-}{V_1'^+} \cdot \frac{1}{(1 + S_{11}^e)} = -j \frac{1 - \left( \frac{V_1'^-}{V_1'^+} \right)}{1 + \left( \frac{V_1'^-}{V_1'^+} \right)} \quad ; \quad S_{21}^e = (1 + S_{11}^e) \frac{-jY_2}{1 - jY_1} = \frac{-2jY_2}{1 + Y_1^2 + Y_2^2}$$

b) Situación impar (P.E./C.C.)



Igual que el anterior  
con el cambio  
 $Y_1 \rightarrow -Y_1$

c) Condición de AD:

$$S_{11}^e + S_{11}^o = S_{22}^e + S_{22}^o = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow (1 - jY_1)^2 - Y_2^2 + (1 + jY_1)^2 - Y_2^2 = 0 \quad \rightarrow Y_1^2 + Y_2^2 = 1$$

Fig. 6.20 Realización alternativa de un AD en líneas de transmisión. a) Cálculo de los parámetros  $S_{ij}^e$  y b) de los  $S_{ij}^o$ . Nótese que en ambos casos, y a diferencia de la estructura anterior,  $S_{11}^e$ ,  $S_{22}^e$ ,  $S_{11}^o$  y  $S_{22}^o$  no son nulos

En este caso, y a diferencia de la realización anterior,  $S_{11}^e$ ,  $S_{22}^e$ ,  $S_{11}^o$  y  $S_{22}^o$  no se anulan y la condición de AD ( $S_{ii}=0$ ) viene dada por:

$$S_{11}^e + S_{11}^o = S_{22}^e + S_{22}^o = 0 \quad \rightarrow \quad Y_1^2 + Y_2^2 = 1 \quad (6.70)$$

en cuyo caso:

$$S_{11}^e = S_{22}^o = \frac{1 - Y_1^2 - Y_2^2 - 2jY_1}{1 + Y_1^2 + Y_2^2} = -jY_1 \quad (6.71)$$

$$S_{22}^e = S_{11}^o = \frac{1 - Y_1^2 - Y_2^2 + 2jY_1}{1 + Y_1^2 + Y_2^2} = jY_1 \quad (6.72)$$

$$S_{12}^e = S_{21}^e = -jY_2 \quad ; \quad S_{12}^o = S_{21}^o = -jY_2 \quad (6.73)$$

y por tanto:

$$S_{12} = \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) = -jY_2 \quad ; \quad S_{13} = \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) = -jY_1$$

$$S_{14} = \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = 0 \quad ; \quad \text{etc.} \quad (6.74)$$

con lo que se obtiene finalmente:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -jY_2 & -jY_1 & 0 \\ -jY_2 & 0 & 0 & jY_1 \\ -jY_1 & 0 & 0 & -jY_2 \\ 0 & jY_1 & -jY_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

También como anteriormente, los accesos pueden reenumerarse para llevar S a una de las formas (6.53) (figura 6.21e); y si hacemos  $Y_1=Y_2=1/\sqrt{2}$ , obtenemos un híbrido descrito por:

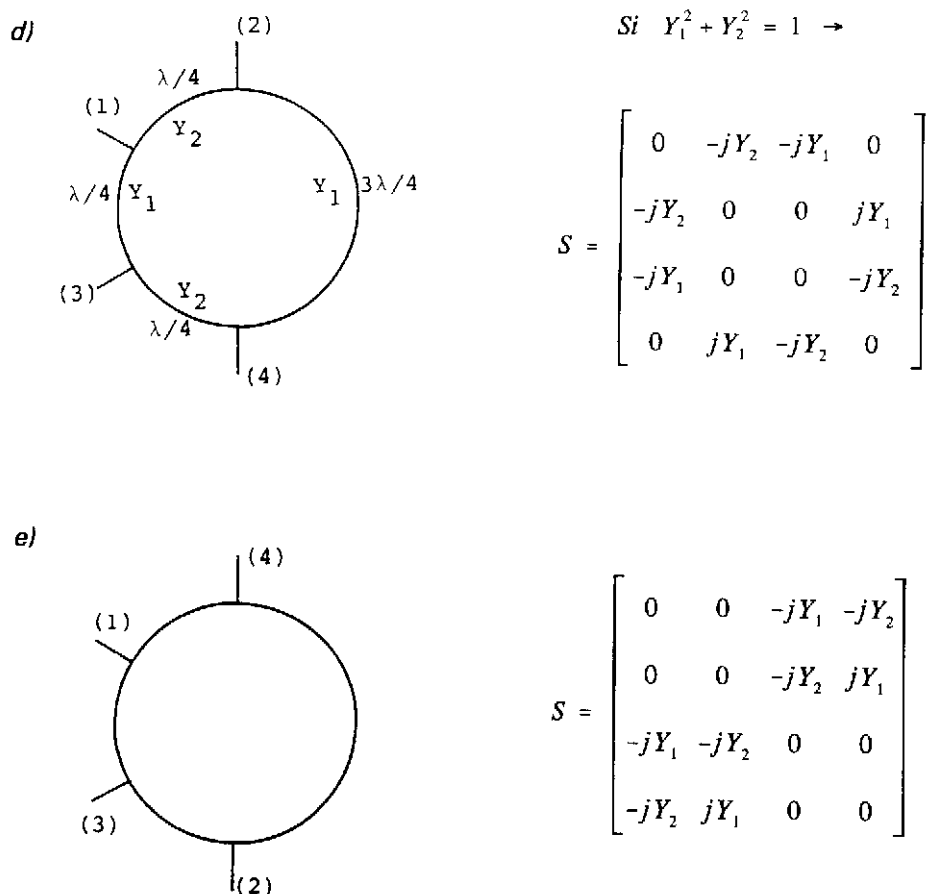


Fig. 6.21 (Continuación de la figura anterior)

d) Expresión de  $S$  con la condición de AD,  $Y_1^2 + Y_2^2 = 1$ e) Renumeración de los accesos para poner  $S$  en la forma canónica (6.53)

$$S = -\frac{j}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.76)$$

cuyo circuito equivalente simplificado, excepto por dos desfases adicionales de  $-90^\circ$  en las salidas 3-4 (o, igualmente, en las 1-2), es el de un híbrido de  $180^\circ$  (fig. 6.21g).

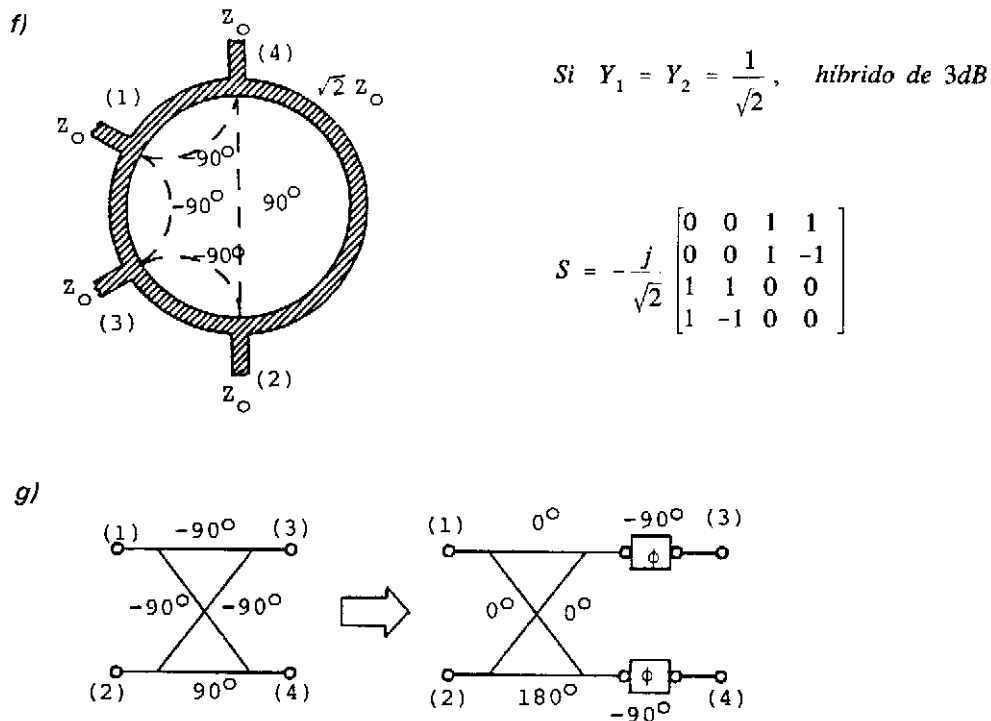


Fig. 6.21 (continuación)

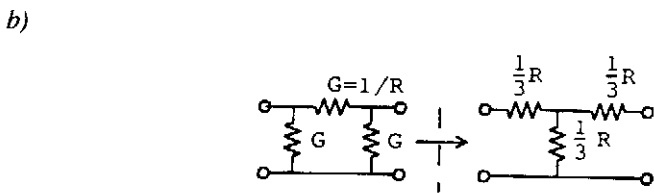
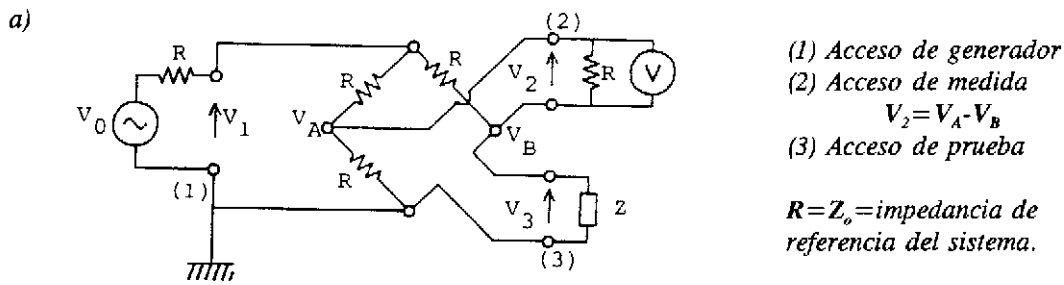
f) Híbrido realizado en línea microtira

g) Circuito equivalente simplificado del híbrido anterior

La figura 6.21f muestra el aspecto de la realización de un híbrido como éste en línea microtira.

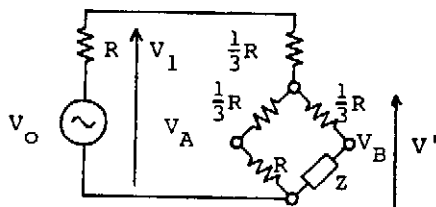
Todas estas estructuras construidas con secciones de línea de longitud definida en términos de  $\lambda$  son, evidentemente, válidas sólo a la frecuencia de diseño. Cuando nos apartamos de esta frecuencia, su comportamiento comienza a desviarse del ideal, por lo que son utilizables en la práctica, con una cierta degradación de prestaciones, en anchos de banda de hasta el 10-15%. En cualquier caso, no son apropiados como elementos de medida, a los cuales generalmente se les exige un buen comportamiento en anchos de banda cuanto más grandes mejor.

Un circuito que, por su carácter resistivo, no presenta estos inconvenientes es la red de tres accesos de la figura 6.22a: un puente resistivo (*punte de Wheatstone*) utilizado para conectar un generador (1) a la impedancia desconocida  $Z$  (3) y a un voltímetro (2). Tanto el generador como el voltímetro



$$Y = \begin{bmatrix} 2G & -G \\ -G & 2G \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}R & \frac{1}{3}R \\ \frac{1}{3}R & \frac{2}{3}R \end{bmatrix} \quad Z = Y^{-1}$$

c)



$$V_I = \frac{V_o}{6} \frac{R + 3Z}{R + Z}$$

$$V_2 = V_A - V_B = \frac{V_o}{8} \frac{R - Z}{R + Z} = -\frac{V_o}{8} \rho$$

$$V_A = \frac{3}{4} V_I, \quad V_B = \frac{3Z}{R + 3Z} V_I$$

Fig. 6.22 a) Esquema de un puente de impedancias utilizado como medidor de coeficientes de reflexión. La impedancia que debe medir es  $Z$   
 b) Equivalencia de redes utilizada para pasar al circuito c), en el cual se pueden calcular fácilmente  $V_A$  y  $V_B$

y tres brazos del puente deben tener la misma impedancia resistiva, coincidente con la impedancia característica del sistema.

Bajo estas condiciones el análisis del circuito es sencillo y está resumido en la misma figura 6.22: basta con cambiar una red en  $\pi$  por su equivalente en  $T$  (fig. 6.22b), lo que permite calcular la tensión medida por el voltímetro,  $V_2$ ; se obtiene (fig. 6.22c):

$$V_2 = -\frac{V_o}{8} \frac{Z-R}{Z+R} = -\frac{V_o}{8} \rho \quad (6.77)$$

Siendo  $\rho$  el coeficiente de reflexión asociado con la impedancia que se mide.

Por tanto, si  $Z$  está adaptada al sistema,  $Z=Z_o$ ,  $\rho=0$  y entonces  $V_2=0$ ; mientras que, en cualquier otro caso, (6.77) proporciona el valor de  $\rho$  a partir de  $V_2$ .

Sobre esta red de medida (puente reflectométrico o puente de impedancias) debemos hacer las siguientes advertencias:

- 1) Es esencial que el generador esté adaptado al sistema ( $Z_G=R=Z_o$ ), ya que de otra manera los cálculos no conducen a (6.77). Si un generador real no lo estuviera, habría que utilizar un circulator o, al menos, un atenuador de atenuación suficiente.
- 2) La señal máxima que se obtiene en 2,  $V_2$ , es (cuando  $|\rho|=1$ ):

$$|V_2|_{\max} = \frac{|V_o|}{8} \quad (6.78)$$

mientras que para el generador es:

$$|V_{1\text{ avr}}| = \frac{|V_o|}{2} \quad (6.79)$$

De manera que la máxima potencia que se obtiene en 2 está 12 dB por debajo de la potencia disponible del generador,  $P_{\text{avr}}$ .

## 6.8 Líneas acopladas simétricas

Si dos líneas que discurren paralelas están suficientemente próximas, el acoplamiento mutuo capacitivo e inductivo entre ellas hace que las señales en una no sean ajenas a las de la otra. Este proceso es bien conocido desde los comienzos de la telefonía (diafonía), y a nosotros nos interesan las situaciones de

acoplamiento intencionadamente elevado.

La situación más sencilla de análisis, que también es la más frecuente, es la de dos líneas idénticas situadas de tal manera que la geometría resultante acepte un plano de simetría dispuesto a lo largo de su eje, como en el ejemplo de la figura 6.23; dos líneas microtira de la misma anchura y construidas sobre el mismo sustrato.

La célula elemental de dos líneas como éstas incluye, como parámetros primarios, la capacidad  $C_2$  y la inductancia  $M$  mutuas por unidad de longitud. Esta célula se presenta también en la figura 6.23, y su análisis se simplifica mucho si usamos los conceptos de paredes eléctrica y magnética.

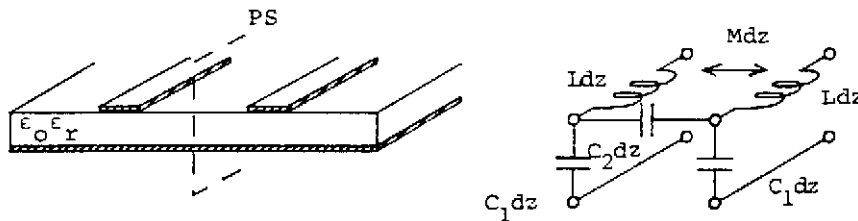


Fig. 6.23 Ejemplo de líneas acopladas simétricas: dos líneas microtira idénticas y paralelas construidas sobre el mismo sustrato, y circuito equivalente de la célula elemental.  $C_2$  y  $M$  son la capacidad y la inductancia mutuas por unidad de longitud, respectivamente

En la figura 6.24a se representa solo la parte capacitiva de la célula elemental, donde además se ha omitido el  $dz$  que debería acompañar a  $C_1$  y  $C_2$ ; la información referente a la parte inductiva ( $L$  y  $M$ ) será reintroducida más adelante.

La situación con una pared magnética en el plano de simetría es equivalente a tener las líneas excitadas de forma que  $V_1 = V_2 = V_e$  (fig. 6.24b), y en estas condiciones definimos la impedancia característica de modo par o simétrico  $Z_o^e$  mediante:

$$Z_o^e = \frac{V_e^+}{I_e^+} \quad (6.80)$$



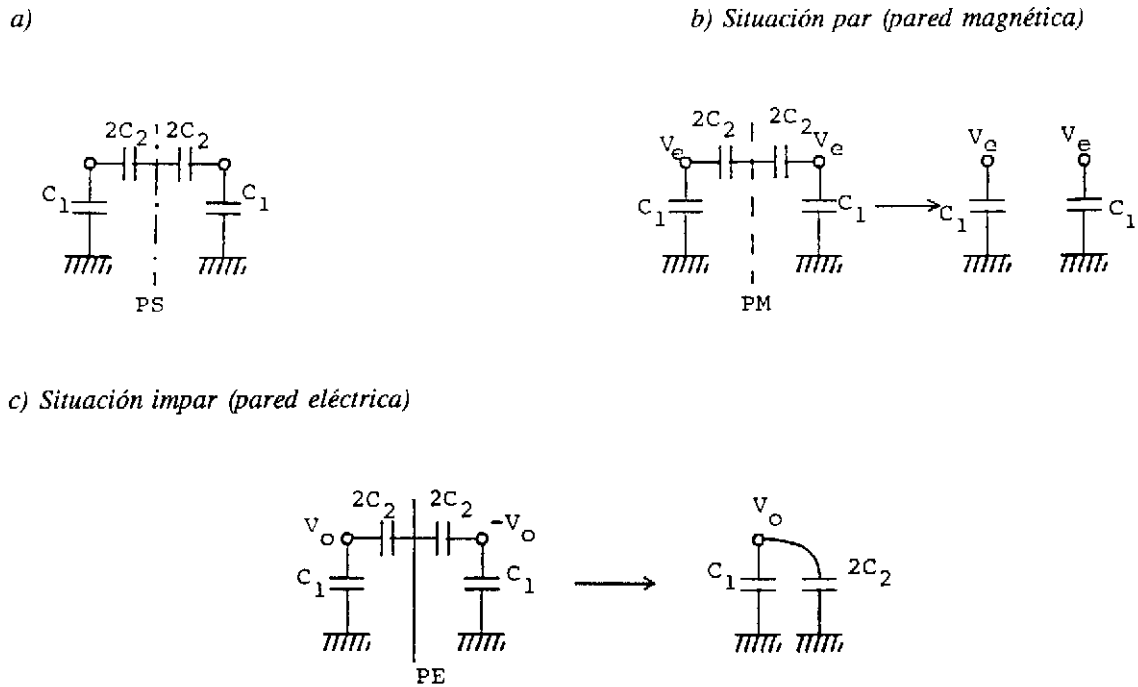


Fig. 6.24 a) Circuito equivalente de las capacidades de la célula elemental (hemos prescindido del  $dz$ )  
 b) El mismo circuito con una pared magnética en el plano de simetría (situación par)  
 c) Idem con una pared eléctrica, situación impar

siendo  $V_e^+$  la ddp entre una de las líneas y el plano de masa para una onda positiva con simetría par, y  $I_e^+$  la corriente en una de las líneas para la misma onda.

Nótese que esta onda positiva par así definida se corresponde con la situación en la que las dos tiras conductoras se comportan como un conductor único respecto al plano de masa. Además, si esta onda se propaga con velocidad de fase  $v_p^e$ , podemos escribir:

$$Z_o^e = \frac{1}{v_p^e C_1} \quad (6.81)$$

ya que, evidentemente, al estar  $C_2$  conectada entre puntos en la misma tensión, no cumple ninguna función.

Análogamente, la situación con una pared eléctrica (pared conductora a potencial cero) es equivalente a tener las líneas excitadas de forma que  $V_1 = -V_2 = V_0$  y los puntos del plano de simetría conectados a masa (fig. 6.24c). Ahora definimos la impedancia característica de modo impar o antisimétrico  $Z_o^o$  mediante:

$$Z_o^o = \frac{V_o^+}{I_o^+} \quad (6.82)$$

siendo, como en (6.80),  $V_o^+$  la ddp entre una de las líneas y masa para una onda positiva con simetría impar y  $I_o^+$  la corriente en una de las líneas.

Una onda de este tipo se puede excitar mediante dos generadores, idénticos y en oposición de fase, conectados entre el plano de masa y cada una de las líneas. Si su velocidad de propagación (de fase) es  $v_p^o$ , tendremos:

$$Z_o^o = \frac{1}{v_p^o (C_1 + 2C_2)} \quad (6.83)$$

según se desprende de la figura 6.24c.

Nótese que la introducción de las velocidades de propagación  $v_p^e$  y  $v_p^o$  es equivalente a recuperar la información de las inductancias, y que sus valores en función de las permitividades efectivas son:

$$v_p^e = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{ref}^e}} \quad ; \quad v_p^o = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{ref}^o}} \quad (6.84)$$

En general, si hay más de un dieléctrico,  $\epsilon_{ref}^e \neq \epsilon_{ref}^o$  dado que la distribución de campo eléctrico será diferente en la situación par y en la impar; pero si el medio es homogéneo como, por ejemplo, en el caso típico de dos líneas triplaca acopladas:

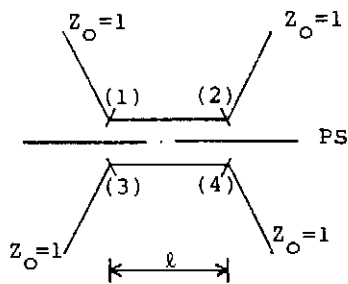
$$\epsilon_{ref}^e = \epsilon_{ref}^o = \epsilon'_r \quad (6.85)$$

y, por tanto, las velocidades de fase serán iguales. En este caso, debido a que  $C_1 + 2C_2 > C_1$  se cumple que:

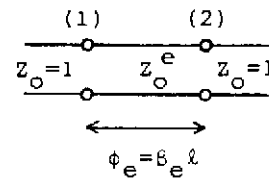
$$Z_o^e > Z_o^o$$

Una vez realizadas estas definiciones referentes a los modos de excitación par e impar, consideremos la red de cuatro accesos formada por una longitud  $\ell$  de líneas acopladas simétricas, conectadas al exterior mediante líneas de impedancia unitaria (fig. 6.25a). Es necesario suponer que el acoplamiento acaba bruscamente al pasar de la sección acoplada a las líneas de acceso, lo que en la práctica se consigue de manera aproximada haciendo que las líneas de acceso se hagan muy divergentes.

a)



b) Situación par



c) Situación impar

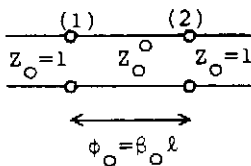


Fig. 6.25 a) Situación bajo análisis; una sección de líneas acopladas de longitud  $\ell$  conectadas al exterior mediante líneas de impedancia unitaria. Se supone que el acoplamiento acaba bruscamente al llegar a las líneas de acceso  
b) Circuito equivalente de la situación par  
c) Idem de la situación impar

Si analizamos la estructura descomponiéndola en situaciones simétrica y antisimétrica (fig. 25b y 25c), obtenemos, teniendo en cuenta las expresiones (§5,118) calculadas anteriormente:

$$S_{11}^e = S_{22}^e = \frac{j(Z_o^e - Y_o^e) \tan \phi_e}{2 + j(Z_o^e + Y_o^e) \tan \phi_e} \quad (6.86)$$

$$S_{12}^e = S_{21}^e = \frac{1}{\cos \phi_e + j \frac{1}{2} (Z_o^e + Y_o^e) \sin \phi_e} = \frac{\left( \frac{2}{\cos \phi_e} \right)}{2 + j(Z_o^e + Y_o^e) \tan \phi_e} \quad (6.87)$$

$$\text{con } \phi_e = \beta_e \ell = \frac{\omega \ell}{v_p^e}$$

Para  $S_{11}^o = S_{22}^o$  y  $S_{12}^o = S_{21}^o$ , obtenemos expresiones similares cambiando adecuadamente  $Z_o^e$  por  $Z_o^o$  y  $\phi_e$  por  $\phi_o$ .

Si queremos que nuestra red sea un *AD*, debemos conseguir que:

$$S_{11}^e + S_{11}^o = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(Z_o^e - Y_o^e) \tan \phi_e}{2 + j(Z_o^e + Y_o^e) \tan \phi_e} + \frac{(Z_o^o - Y_o^o) \tan \phi_o}{2 + j(Z_o^o + Y_o^o) \tan \phi_o} = 0 \quad (6.88)$$

expresión que, separando la parte real de la imaginaria, conduce a:

$$(Z_o^e - Y_o^e) \tan \phi_e + (Z_o^o - Y_o^o) \tan \phi_o = 0 \quad (6.89)$$

$$\left[ (Z_o^e - Y_o^e)(Z_o^o + Y_o^o) + (Z_o^o - Y_o^o)(Z_o^e + Y_o^e) \right] \tan \phi_e \cdot \tan \phi_o = 0 \quad (6.90)$$

La última expresión se anula con independencia de los valores de  $\phi_e$  y  $\phi_o$  si:

$$\begin{aligned} Z_o^e Z_o^o &= Y_o^e Y_o^o \quad \Rightarrow \quad Z_o^e Z_o^o = 1 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad Z_o^e &= Y_o^o \quad ; \quad Z_o^o = Y_o^e \quad (6.91a) \end{aligned}$$

y, con esta condición, (6.89) se convierte en:

$$(Z_o^e - Y_o^e)(\tan \phi_e - \tan \phi_o) = 0 \quad (91b)$$

que se cumple si  $v_p^e = v_p^o$ , ya que entonces  $\phi_e = \phi_o$ .

Por tanto, la conclusión a la que llegamos es la siguiente: una sección de longitud  $\ell$  de dos líneas acopladas es un *AD* si  $v_p^e = v_p^o$  y  $Z_o^e \cdot Z_o^o = 1$  (esta última expresión se sobreentiende para valores de impedancias normalizados. En caso contrario, se debe escribir como  $Z_o^e \cdot Z_o^o = Z_o^2$ , con  $Z_o$  la impedancia de referencia de los accesos).

En estas condiciones, se comprueba que:

$$S_{11}^e = -S_{11}^o \quad ; \quad S_{12}^e = S_{21}^e = S_{12}^o \quad (6.92)$$

y, por tanto:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0 \\ S_{12} &= S_{34} = \frac{1}{2} (S_{12}^e + S_{12}^o) = S_{12}^e = \frac{1}{\cos \phi + j \frac{1}{2} (Y_o^e + Z_o^e) \sin \phi} \\ S_{13} &= S_{24} = \frac{1}{2} (S_{11}^e - S_{11}^o) = S_{11}^e = \frac{j(Z_o^e - Y_o^e) \tan \phi}{2 + j(Z_o^e + Y_o^e) \tan \phi} \\ S_{14} &= S_{23} = \frac{1}{2} (S_{12}^e - S_{12}^o) = 0 \end{aligned} \quad (6.93)$$

Estas expresiones se acostumbran a escribir de la forma siguiente; definamos  $\alpha$  mediante:

$$\alpha = \frac{Z_o^e - Z_o^o}{Z_o^e + Z_o^o} \quad (> 0, \text{ ya que } Z_o^e > Z_o^o) \quad (6.94)$$

y entonces:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha^2 &= \frac{(Z_o^e + Z_o^o)^2 - (Z_o^e - Z_o^o)^2}{(Z_o^e + Z_o^o)^2} = \\ &= \frac{4 Z_o^e Z_o^o}{(Z_o^e + Z_o^o)^2} = \frac{4}{(Z_o^e + Z_o^o)^2} \end{aligned} \quad (6.95)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} S_{12} = S_{23} &= \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi} \\ S_{13} = S_{24} &= \frac{j \alpha \sin \phi}{\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi} \end{aligned} \quad (6.96)$$

Adviértase que si las líneas se alejan hasta desacoplarse,  $C_2$  tiende a cero y por tanto  $Z_o^e = Z_o^o$ . En este caso, la condición de  $AD$  se reduce a  $Z_o^e = Z_o^o = Z_o$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  y:

$$S_{12} \rightarrow \frac{1}{\cos \phi + j \sin \phi} = e^{-j\phi} \quad ; \quad S_{13} \rightarrow 0 \quad (6.97)$$

**Ejemplo 1** Supongamos que queremos construir un  $AD$  de 20 dB mediante el procedimiento anterior en un sistema de  $Z_o = 50 \Omega$ . Si la rama principal es, por ejemplo, la 1-2, la 3-4 será la rama acoplada (fig. 6.25a), y por tanto:

$$|S_{13}|^2 = \frac{\alpha^2 \sin^2 \phi}{(1 - \alpha^2) \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = \frac{\alpha^2 \sin^2 \phi}{1 - \alpha^2 \cos^2 \phi} \quad (6.98)$$

Dado que tenemos dos grados de libertad,  $\alpha$  y  $\phi$ , podemos fijar uno de ellos; normalmente se hace  $\phi = \pi/2 \rightarrow \sin \phi = 1$ , ya que, de esta manera, para un  $\alpha$  dado el acoplamiento es máximo y, ya que  $\sin \phi = 1$ , su variación relativa al cambiar la frecuencia es mínima (derivada nula).

De manera que:

$$|S_{13}|_{\phi = \frac{\pi}{2}}^2 = \alpha^2 = 10^{-2}$$

$$\frac{Z_o^e - Z_o^o}{Z_o^e + Z_o^o} = \frac{1}{10} \quad ; \quad Z_o^e \cdot Z_o^o = Z_o^2 = 2500 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Z_o^e = 55,28 \, \Omega \quad ; \quad Z_o^o = 45,23 \, \Omega \quad (6.99)$$

Cuando la frecuencia se desvía de la de diseño, el sistema continúa comportándose como un *AD* ideal ( $S_{ii}=0$ ,  $S_{14}=S_{23}=0$ ), pero el acoplamiento varía de acuerdo con (6.98) que, como  $\alpha^2=0.01$ , se puede aproximar por:

$$|S_{13}|^2 = \alpha^2 \sin^2 \phi = \alpha^2 \sin^2 \frac{\omega \ell}{v_p} \quad (6.100)$$

expresión para la que resulta la tabla de valores siguientes de  $C=20 \log |S_{13}|$ .

**Tabla 6.1** Valores de  $C$ , según  $\omega/\omega_o$ .

$\omega/\omega_o$	$C$ (dB)
0,2	9,8
0,4	15,4
0,6	18,2
0,8	19,6
1,0	20
1,2	19,6
1,4	18,2

De manera que el AD funciona en un ancho de banda del 40%, con una degradación del acoplamiento de solo 0,4 dB. ■

En la figura 6.26 se dan dos casos importantes de líneas acopladas simétricas; barras cilíndricas entre planos paralelos (estructura utilizada frecuentemente en sistemas que transportan potencias elevadas, como los radares) y líneas triplaca (*stripline*).

**Ejemplo 2** Si el acoplador direccional de 20 dB del ejemplo anterior lo realizásemos con líneas microtira acopladas en sustrato de  $\epsilon_r=2,1$  tendríamos: Para las líneas de acceso de  $50 \Omega$ ,  $W/b=0,86$ ; y en la zona de acoplamiento, para los valores calculados de  $Z_o^e$  y  $Z_o^o$ , resulta  $s/b=0,30$  y  $W/b=0,84$ .

Para un espesor típico de  $b=1,0$  mm,  $s=0,30$  mm, y este ancho de ranura es fácilmente realizable por métodos fotolitográficos. Sin embargo, si el acoplador a realizar fuese de 10 dB:

$$\frac{Z_o^e}{Z_o^o} = 1,925 \quad \Rightarrow \quad \frac{w}{b} = 0,70 \quad \frac{s}{b} = 0,041$$

y si, como antes,  $b=1$  mm y  $s=0,041$  mm, la dimensión de ranura sería muy difícil de producir fotolitográficamente con precisión.

Por tanto, con los sustratos usuales ( $\epsilon_r \approx 2$ , grosor  $\approx 0,5-1,0$  mm) es difícil realizar un AD con acoplamiento  $C \leq 10-13$  dB. ■

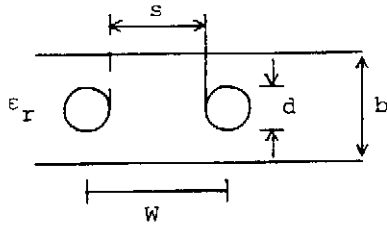
## 6.9 Realización de inversores con líneas acopladas

Si en un AD realizado con líneas acopladas dejamos dos accesos en circuito abierto, como se indica en la figura 6.27, resulta una red de dos accesos para la que podemos calcular la matriz  $S$  de la manera siguiente: si en un AD terminamos el acceso (4') tendremos:

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S'_{12} & S'_{13} & 0 \\ S'_{12} & 0 & 0 & S'_{13} \\ S'_{13} & 0 & 0 & S'_{12} \\ 0 & S'_{13} & S'_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.101)$$



- Barras entre planos paralelos

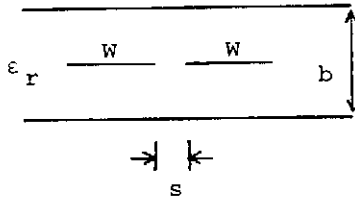


Para  $\frac{d}{b} \ll 0,25$

$$Z_o^e = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left[ \frac{4b}{\pi d} \coth \frac{\pi W}{2b} \right]$$

$$Z_o^o = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left[ \frac{4b}{\pi d} \tanh \frac{\pi W}{2b} \right]$$

- Striplines acopladas



$$Z_o^e = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K'(k_3)}{K(k_o)} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_e}} F(k_e)$$

$$Z_o^o = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K'(k_o)}{K(k_o)} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} F(k_o)$$

$$k_e = \tanh \left( \frac{\pi W}{2b} \right) \cdot \tanh \left( \frac{\pi (W+s)}{2b} \right)$$

$$k_o = \tanh \left( \frac{\pi W}{2b} \right) \cdot \coth \left( \frac{\pi (W+s)}{2b} \right)$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$$

Aproximadamente :

$$0,5 \leq k^2 \leq 1 \quad \rightarrow \quad \frac{K}{K'} = \frac{1}{\pi} \ln \left( 2 \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right) = F_1(k)$$

$$0 \leq k^2 \leq 0,5 \quad \rightarrow \quad \frac{K}{K'} = \frac{1}{F_1(k')} \quad ; \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

Fig. 6.26 Valores de  $Z_o^e$  y  $Z_o^o$  para dos ejemplos de líneas acopladas simétricas

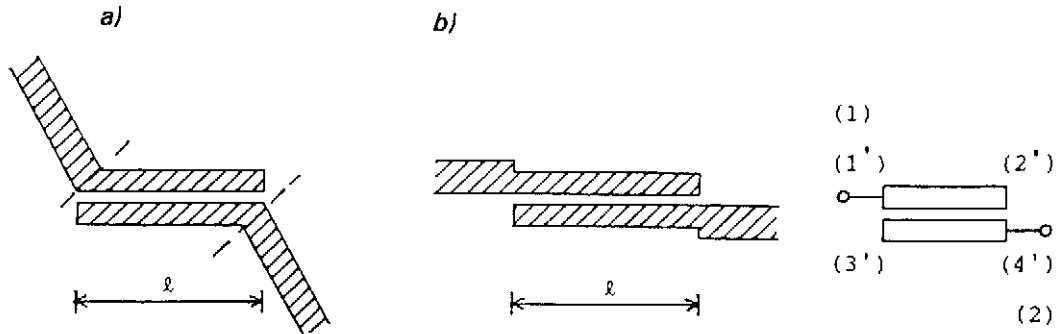


Fig. 6.27 a y b: dos posibles formas de sección de líneas acopladas de longitud  $l$  con línea triplaca con dos accesos en circuito abierto; c: representación esquemática de estas situaciones

donde hemos utilizado apóstrofes para referirnos a parámetros de la red de 4 accesos original (fig. 6.27c). De aquí se obtiene fácilmente que:

$$\left. \begin{aligned} b'_1 &= S'_{12} b'_2 + S'_{13} b'_3 \\ b'_2 &= S'_{12} a'_1 \\ b'_3 &= S'_{13} a'_1 \\ b'_4 &= S'_{13} b'_2 + S'_{12} b'_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b'_1 = (S'^2_{12} + S'^2_{13}) a'_1 \\ b'_4 = 2 S'_{12} S'_{13} a'_1 \end{cases}$$

Es decir, que para la red de dos accesos 1'-4' resultante, que podemos reenumerar 1-2, tendremos:

$$S = \begin{pmatrix} S'^2_{12} & S'^2_{13} & 2S'_{12} S'_{13} \\ 2S'_{12} S'_{13} & S'^2_{12} & S'^2_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} \end{pmatrix} \quad (6.103)$$

$$\text{con } S_{11} = \frac{1 - \alpha^2 - \alpha^2 \sin^2 \phi}{(\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi)^2} \quad ; \quad S_{12} = \frac{2j\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \sin \phi}{(\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi)^2} \quad (6.104)$$

En las proximidades de  $\phi = \pi/2$  (longitud acoplada  $\approx \lambda/4$ ),  $\phi = \pi/2 + \Delta\phi$ , y si  $\alpha^2$  es suficientemente pequeño, podemos poner:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi &= e^{j\phi} + (\sqrt{1 - \alpha^2} - 1) \cos \phi \approx \\ &\approx e^{j\phi} - \frac{1}{2} \alpha^2 \cos \left( \frac{\pi}{2} + \Delta\phi \right) = e^{j\phi} + \frac{1}{2} \alpha^2 \sin \Delta\phi \approx e^{j\phi} + \frac{1}{2} \alpha^2 \Delta\phi \end{aligned} \quad (6.105)$$

$$1 - \alpha^2 - \alpha^2 \sin^2 \phi = 1 - \alpha^2 - \alpha^2 \cos^2 \Delta\phi \approx 1 - 2\alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 (\Delta\phi)^2 \quad (6.106)$$

$$\sin \phi \approx 1 - \frac{1}{2} (\Delta\phi)^2 \quad (6.107)$$

Por tanto, con un error del orden, en el peor caso, de  $\alpha^2 \Delta\phi$  o  $(\Delta\phi)^2$  respecto de la unidad, podemos aproximar:

$$S_{11} \approx (1 - 2\alpha^2) e^{-2j\phi} \quad ; \quad S_{12} \approx 2j\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} e^{-2j\phi} \quad (6.108)$$

parámetros que definen el circuito equivalente del 2-accesos como un inversor de constante  $\bar{J}$  dada por:

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha^2 &= \frac{\bar{K}^2 - 1}{\bar{K}^2 + 1} = \frac{1 - \bar{J}^2}{1 + \bar{J}^2} = 1 - 2 \frac{\bar{J}^2}{1 + \bar{J}^2} \quad \rightarrow \\ \Rightarrow \alpha^2 &= \frac{\bar{J}^2}{1 + \bar{J}^2} \quad \Rightarrow \bar{J}^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \end{aligned} \quad (6.109)$$

y dos secciones de línea de impedancia la de referencia a la entrada y salida, y longitud eléctrica  $\phi$  (fig. 6.28).  $\bar{J}$  también se puede poner directamente en términos de  $Z_o^e$  y  $Z_o^o$  y viceversa:

$$\alpha = \frac{\bar{Z}_o^e - \bar{Z}_o^o}{\bar{Z}_o^e + \bar{Z}_o^o} = \frac{(\bar{Z}_o^e)^2 - 1}{(\bar{Z}_o^e)^2 + 1} = \frac{1 - (\bar{Z}_o^o)^2}{1 + (\bar{Z}_o^o)^2} = \frac{J}{\sqrt{1 + \bar{J}^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_o^e &= \sqrt{1 + \bar{J}^2} + \bar{J} \\ \bar{Z}_o^o &= \sqrt{1 + \bar{J}^2} - \bar{J} \end{aligned} \right\} \bar{J} = \frac{1}{2} (\bar{Z}_o^e - \bar{Z}_o^o) \quad (6.110)$$

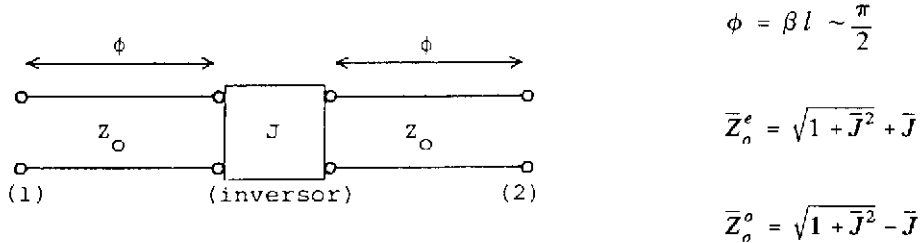


Fig. 6.28 Circuito equivalente aproximado del circuito de la figura anterior cuando se cumple la condición de AD,  $Z_o^e \cdot Z_o^o = 1$

### 6.10 Filtros paso banda con inversores en líneas de transmisión

El tema de filtros de microondas realizados en o con líneas de transmisión por sí solo llenaría todo un curso; tal es la variedad de aproximaciones teóricas y de realizaciones posibles, a las que habría que añadir los filtros realizables en guía de ondas, con cavidades resonantes o con resonadores dieléctricos.

Frente a este amplio panorama, nuestro propósito en este apartado se limita a un solo tipo de filtros (paso banda), realizable con líneas de transmisión a partir de los prototipos convencionales de filtros paso bajo (Butterworth, Chebychev), utilizando el concepto de inversor de impedancias que hemos introducido anteriormente.

A pesar de la modestia del propósito, los filtros que describiremos son ampliamente utilizados, especialmente los realizados mediante líneas acopladas, para anchos de banda que van desde valores muy bajos (0,5-1%) hasta valores moderados del 15-20%.

El punto de partida lo forman los prototipos paso bajo de la figura 6.29, que supondremos conocidos. Recuérdese que un mismo prototipo puede realizarse en dos versiones (circuitos duales) que tienen la misma función de transferencia.

El concepto de inversor nos permite transformar estos circuitos en los de las figuras 6.30 a y b, que utilizan elementos reactivos de un solo tipo (inductancias o condensadores). Los valores de los inversores  $K_j$  los calcularemos a partir de la identificación de los circuitos equivalentes; por ejemplo, si tomamos los de las figuras 29a y 30a (circuitos a los que nos restringiremos a partir de ahora):

$$\frac{1}{C_1} = \frac{K_{01}^2}{L'_1} \quad ; \quad L_2 = \frac{K_{01}^2}{\left(\frac{K_{12}^2}{L'_2}\right)} - \frac{K_{01}^2}{K_{12}^2} L'_2 \quad ; \quad etc.$$

que proporcionan:

$$K_{01} = \sqrt{\frac{L'_1}{g_1}} \quad ; \quad K_{12} = K_{01} \sqrt{\frac{L'_2}{L_2}} = \sqrt{\frac{L'_1 L'_2}{g_1 g_2}} \quad \dots$$

$$K_{i,i+1} = \sqrt{\frac{L'_i L'_{i+1}}{g_i g_{i+1}}} \quad \dots \quad K_{n,n+1} = \sqrt{\frac{L'_n}{g_n g_{n+1}}} \quad (6.111)$$

En las  $n+1$  ecuaciones anteriores tenemos  $2n+1$  incógnitas  $K_{i,i+1}$   $i=0,1,2,\dots,n$  y  $L_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , por lo que podemos fijar libremente  $n$ ; normalmente se toma:

$$L'_1 = L'_2 = \dots L'_n = L' \quad (6.112)$$

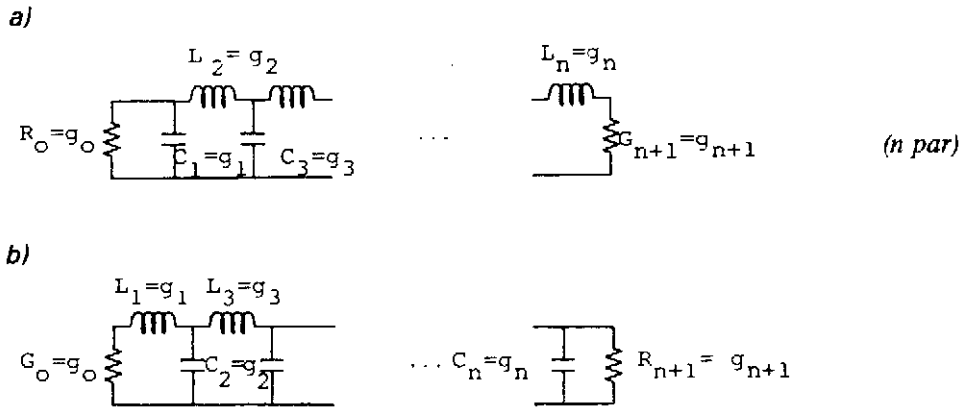


Fig. 6.29 a) Prototipos de filtro paso bajo (se ha dibujado para  $n$  par, de otro modo el elemento  $g_n$  sería un condensador en paralelo) y b), su dual. Ambos tienen la misma función de transferencia. Normalmente, se toma  $g_0=1$

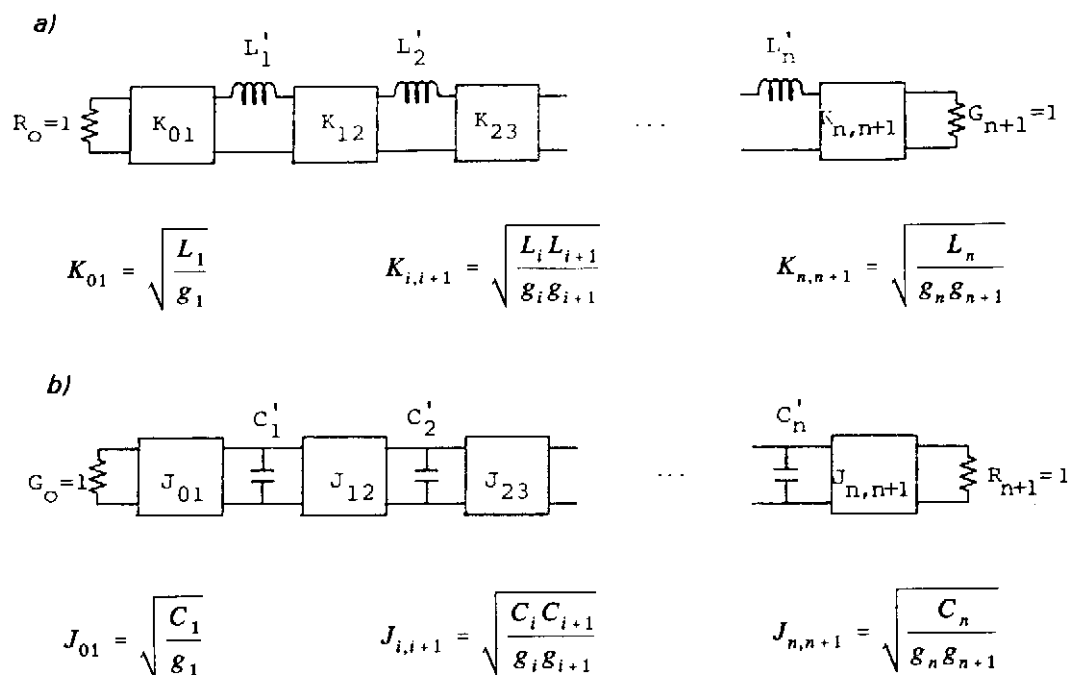


Fig. 6.30 Versiones de los prototipos de la figura anterior utilizando inversores de impedancias/admitancias. Los circuitos dibujados continúan siendo duales

(lo que fija  $n-1$  valores) y queda:

$$K_{01} = \sqrt{\frac{L'}{g_1}} \quad \dots \quad K_{i,i+1} = \frac{L'}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad \dots \quad K_{n,n+1} = \sqrt{\frac{L'}{g_n g_{n+1}}} \quad (6.113)$$

expresiones en que  $L'$  todavía está por definir.

El paso siguiente consiste en realizar la transformación de frecuencias que lleve la respuesta del prototipo paso bajo (figura 6.31a), a la banda deseada ( $\omega_1, \omega_2$ ). La transformación es equivalente a la sustitución de cada inductancia por un circuito resonante en serie:

$$\omega' L' = \omega_o L \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \quad (6.114)$$

con  $L$  y  $\omega_o$  elegidos de tal manera que a la frecuencia de corte del prototipo,  $\omega_1'$  (normalmente igual a la unidad) le correspondan los extremos de la banda de paso ( $\omega_1, \omega_2$ ):

$$\omega_1' L' = \omega_o L \left( \frac{\omega_2}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_2} \right) = -\omega_o L \left( \frac{\omega_1}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_1} \right)$$

de donde se obtiene:

$$\omega_2 - \frac{\omega_o^2}{\omega_2} = -\omega_1 + \frac{\omega_o^2}{\omega_1} \quad \rightarrow \quad \omega_o^2 = \omega_1 \omega_2 \quad (6.115)$$

$$\omega_1' L' = L(\omega_2 - \omega_1) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\omega_1' L'}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L'}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L'}{\omega_o W} \quad (6.116)$$

En la última expresión se ha utilizado  $\omega_1' = 1$  y se ha introducido el ancho de banda relativo  $W$ :

$$W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_o} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \quad (6.117)$$

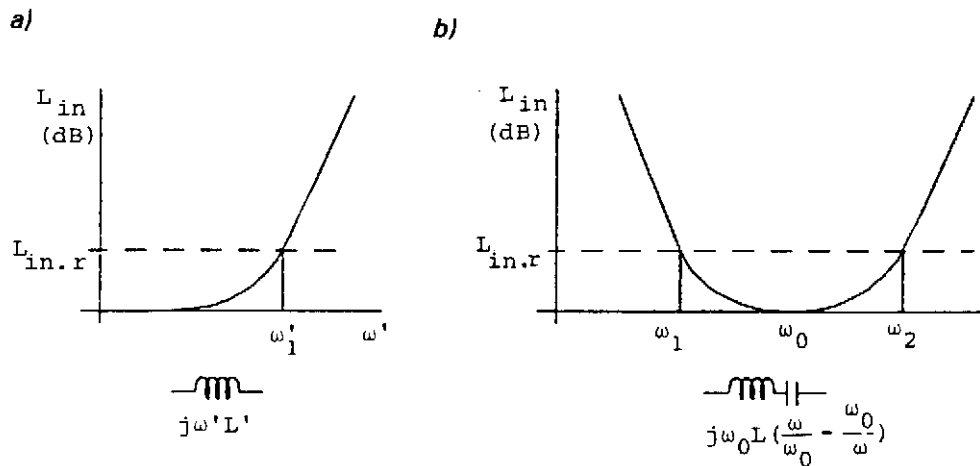


Fig. 6.31 a) Respuesta (pérdida de transferencia de potencia  $L_{in}$  versus frecuencia normalizada) del prototipo paso bajo  
 b) Idem del paso banda obtenida mediante la transformación de frecuencia inductancia  $\rightarrow$  resonante en serie (o capacidad  $\rightarrow$  resonante en paralelo)  
 Normalmente,  $\omega_1' = 1$

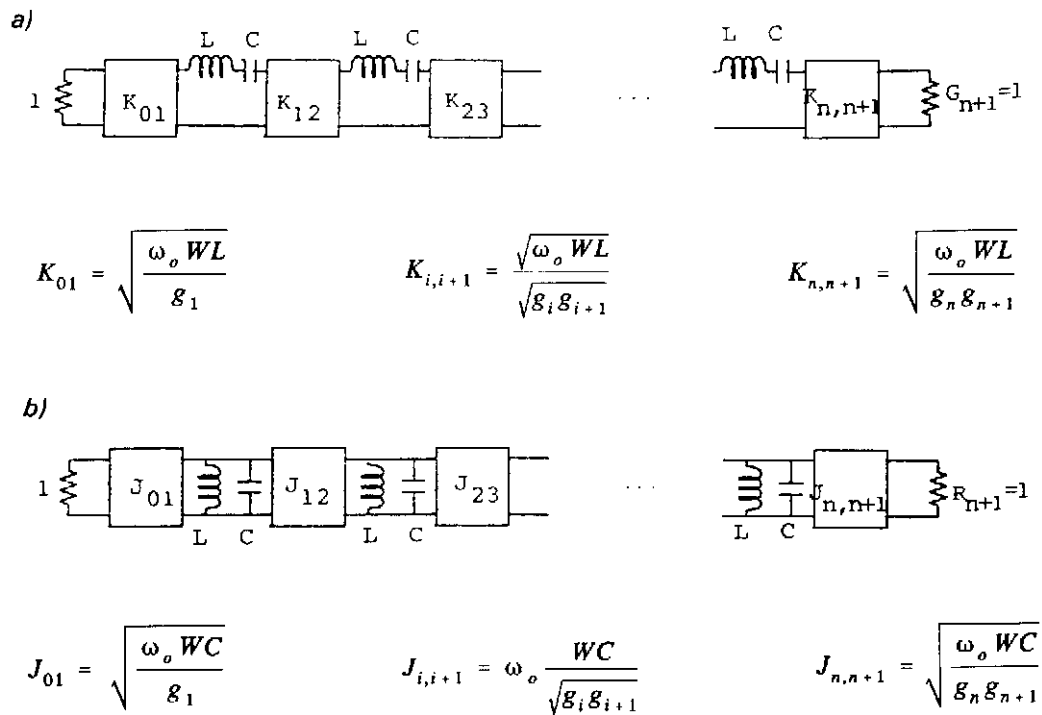


Fig. 6.32 Prototipos paso banda obtenidos con las transformaciones de frecuencia resumidas en la figura anterior.  $W$  es el ancho de banda relativo,  $(f_z f_i)/f_o$

De esta manera, se obtiene el prototipo de la figura 6.32a, donde también se indican los valores para los  $K_{ij}$  que hemos obtenido al sustituir en (6.113) el valor de  $L' = \omega_o WL$  dado por (6.116).

Evidentemente, todos estos resultados se pueden volver a obtener para los circuitos b); pero como son duales de los a), pueden escribirse directamente sin mayor complicación, por lo que no volveremos a referirnos a ellos explícitamente.

Consideremos a continuación el circuito de la figura 6.33a; una colección de susceptancias  $jB_{kl}$  (de las que solo dibujaremos dos), intercaladas en paralelo en una línea de transmisión, de manera que se pueden interpretar como inversores y tramos de línea en  $\lambda/2$ . Para los tramos de línea podemos poner su circuito equivalente, calculado en el apartado 5.6, y si suponemos:

- Que los tramos de línea  $\ell_{ij}$  y  $\ell_{jk}$  son pequeños ( $\phi_{ij}, \phi_{jk} \ll \pi$ ).
- Que las susceptancias son grandes (casi cortocircuitos):

$$|\bar{B}_{ij}| \quad ; \quad |\bar{B}_{jk}| \gg 1$$



entonces, en las proximidades de  $\omega_0$  que hace la línea de  $\lambda/2$ , podemos ignorar los circuitos  $L_p/C_p$  de impedancia alta respecto de los  $\bar{B}_{ij}$ ,  $\bar{B}_{jk}$  y al circuito serie  $2L_s-C_s/2$ . De esta manera, nuestro circuito original queda reducido a inversores y circuitos  $L-C$ , como en la figura 6.33a, que a su vez son los que forman el prototipo paso banda en la figura 6.32a.

Finalmente, resulta que la estructura de la figura 6.34a, formada por  $n+1$  reactancias intercaladas en una línea de transmisión, se comporta como un filtro paso banda de orden  $n$  si sus valores y sus longitudes de espaciamiento se escogen de acuerdo con las expresiones que aparecen en la misma figura.

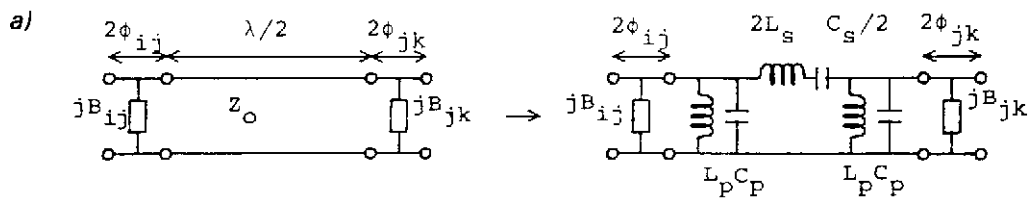
Conviene que en estos momentos resumamos las aproximaciones realizadas:

- 1) Los inversores no son ideales. En el mejor de los casos, si las reactancias son inductivas, aunque su comportamiento con la frecuencia es mejor, sus constantes  $K_{ij}$  varían con la frecuencia.
- 2) El circuito equivalente formado por inductancias y condensadores para una línea en  $\lambda/2$  es de validez limitada a un ancho de banda máximo del 30-40%, dependiendo de la exactitud deseada.
- 3) La aproximación anterior se degrada al ignorar los resonantes en paralelo frente a los resonantes en serie.
- 4) Todos los errores anteriores son acumulativos, y el efecto de acumulación aumenta, evidentemente, con el orden del filtro.

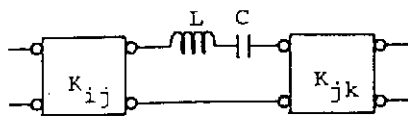
El resultado es que su respuesta coincide con la teórica en las proximidades de la frecuencia central del diseño,  $\omega_0$ , y se desvía progresivamente a medida que nos vamos alejando de dicha frecuencia. No obstante, para órdenes moderados ( $n$  hasta 7), el diseño se comporta bien para anchos de banda de hasta el 15% y, en todo caso, las desviaciones más grandes se producen a frecuencias en las que las atenuaciones previstas son altas y, por tanto, los errores menos importantes.

En todo caso, una vez fijados los parámetros del circuito de la figura 6.34a, su análisis exacto (por ejemplo, mediante el producto de matrices  $ABCD$ ) se puede realizar de manera muy sencilla con el ordenador, y de esta manera cuantificar las desviaciones para ver si son o no aceptables.

**Ejemplo 1** Podemos hacer una evaluación de los órdenes de magnitud de los parámetros implicados de la manera siguiente:

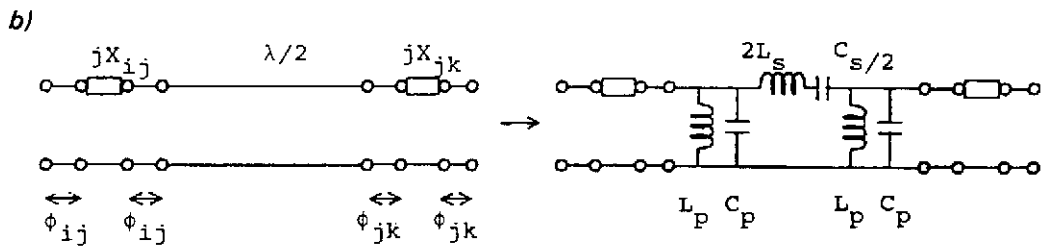


Si  $|B_{ij}|, |B_{jk}| \gg 1$  (casi cortocircuitos)  $\rightarrow |\phi_{ij}|, |\phi_{jk}| \ll 1 \Rightarrow$  (para  $\omega \approx \omega_o$ )  $\Rightarrow$

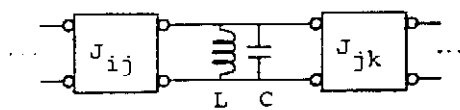


$$\bar{L} = 2\bar{L}_s = \frac{\pi}{2\omega_o}$$

$$|\bar{B}_{ij}| = \frac{1 - \bar{K}_{ij}^2}{\bar{K}_{ij}} \quad ; \quad \phi_{ij} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2}{\bar{B}_{ij}} \right)$$



Si  $|\bar{X}_{ij}|, |\bar{X}_{jk}| \gg 1$  (casi circuitos abiertos)  $\rightarrow |\phi_{ij}|, |\phi_{jk}| \ll 1 \rightarrow$  (para  $\omega \sim \omega_o$ )

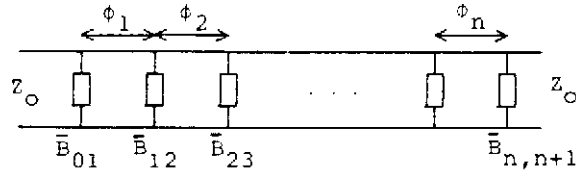


$$\bar{C} = 2\bar{C}_p = \frac{\pi}{2\omega_o}$$

$$|\bar{X}_{ij}| = \frac{1 - \bar{J}_{ij}^2}{\bar{J}_{ij}} \quad , \quad \phi_{ij} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2}{\bar{X}_{ij}} \right)$$

Fig. 6.33 a) Interpretación de dos susceptancias de valor elevado (casi cortocircuitos) insertadas en una línea de transmisión como dos inversores y un circuito resonante (célula básica del prototipo paso banda de la figura 6.32a). b) Estructura dual de la anterior

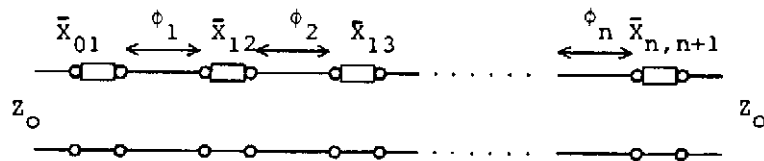
a)



$$\phi_j = \pi + \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{2}{\bar{B}_{j-1,j}} + \tan^{-1} \frac{2}{\bar{B}_{j,j+1}} \right), \quad \bar{B}_{ij} = \frac{1 - \bar{K}_{ij}^2}{\bar{K}_{ij}}$$

$$\bar{K}_{01} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{W}{g_1}}; \quad \bar{K}_{i,i+1} = \frac{\pi}{2} \frac{W}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}; \quad \bar{K}_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{W}{g_n g_{n+1}}}$$

b)



$$\phi_j = \pi + \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}_{j-1,j}} + \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}_{j,j+1}} \right)$$

$$\bar{J}_{01} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{W}{g_1}}; \quad \bar{J}_{i,i+1} = \frac{\pi}{2} \frac{W}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}; \quad \bar{J}_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{W}{g_n g_{n+1}}}$$

Fig. 6.34 Como culminación del proceso seguido a partir de la figura 6.29:

- a) Realización de un filtro paso bajo en una línea de transmisión mediante la inserción de reactancias en paralelo  
 b) Idem en serie (circuito dual del anterior)

Para filtros Butterworth con  $n \leq 6$  resulta  $0.5 \leq g_i \leq 2.0$ , y para filtros Chebychev con  $2 \leq n \leq 7$  y rizado en la banda de paso  $r \leq 0.2$  dB,  $0.67 \leq g_i \leq 2.27$ .

Por tanto, en orden de magnitud:

$$K_{i,i+1} \sim W \quad ; \quad K_{01}, K_{n,n+1} \sim \sqrt{W}$$

$$|\bar{B}_{01}|, |\bar{B}_{n,n+1}| \sim \frac{1}{\sqrt{W}} \quad ; \quad |B_{i,i+1}| \sim \frac{1}{W}$$

Por ejemplo, si en una línea de  $50 \Omega$ ,  $f_o = 3 \text{ GHz}$ ,  $f_2 - f_1 = 30 \text{ MHz}$  ( $W = 10^{-2} = 1\%$ ):

$$|\bar{B}_{i,i+1}| \sim 100 \quad \Rightarrow \quad L_{i,i+1} \sim 30 \text{ pH}$$

$$|\bar{B}_{01}|, |\bar{B}_{n,n+1}| \sim 10 \quad \Rightarrow \quad L_{01}, L_{n,n+1} \sim 300 \text{ pH}$$

Si la realización se hubiese realizado con condensadores en serie (prototipos  $b$  que conducen a la configuración final de la figura 6.34b) habríamos obtenido:

$$|\bar{X}_{i,i+1}| \sim 100 \quad \Rightarrow \quad C_{i,i+1} \sim 0,01 \text{ pF}$$

$$|\bar{X}_{01}|, |\bar{X}_{n,n+1}| \sim 10 \quad \Rightarrow \quad C_{01}, C_{n,n+1} \sim 0,1 \text{ pF}$$

■

**Ejemplo 2** Se desea conseguir un filtro Chebychev con rizado  $r = 0,5 \text{ dB}$ , banda de paso (3,047 GHz/3,157 GHz) y atenuación superior a 30 dB en las frecuencias  $f_a = 2,786 \text{ GHz}$  y  $f_b = 3,326 \text{ GHz}$ .

a) Identificación del prototipo

$$W = 3,55 \% \quad , \quad f_o = \sqrt{f_1 f_2} = 3,102 \text{ GHz}$$

La transformación de frecuencias (6.114) puede escribirse:

$$\omega' = \omega_o \frac{L}{L'} \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) = \frac{1}{W} \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \quad (\omega'_1 = 1)$$

y obtenemos:

$$\omega'_a = -6,06 \quad ; \quad \omega'_b = 3,93$$

De los gráficos normalizados de atenuación (figura 6.35), se obtiene para  $n=3$ :

$$L_A(6,06) = 49,5 \text{ dB} \quad ; \quad L_A(3,93) = 38,5 \text{ dB}$$

mientras que para  $n=2$  estaríamos fuera de las especificaciones. Por tanto tomamos  $n=3$ , con lo que tenemos un margen razonable de atenuación en  $f_a$  y  $f_b$  para absorber errores, y resulta (fig. 6.36):

$$g_0 = 1 \quad , \quad g_1 = 1,5963 \quad , \quad g_2 = 1,0967 \quad , \quad g_3 = g_1 \quad , \quad g_4 = g_1$$

(al ser  $n$ =impar, el filtro es simétrico).

#### b) Realización física

En línea microtira resulta más fácil de realizar la versión de la figura 6.34b con condensadores en serie. Se obtiene:

$$\frac{J_{01}}{Y_0} = \sqrt{\frac{\pi W}{2 g_1}} = \frac{J_{34}}{Z_0} = 0,187 \quad , \quad \bar{B}_{01} = \frac{\bar{J}_{01}}{1 - \bar{J}_{01}^2} = \bar{B}_{34} = 0,194$$

$$\frac{J_{12}}{Y_0} = \frac{\pi W}{2 \sqrt{g_1 g_2}} = \frac{J_{23}}{Y_0} = 0,0421 \quad , \quad \bar{B}_{12} = \bar{B}_{23} = 0,0422$$

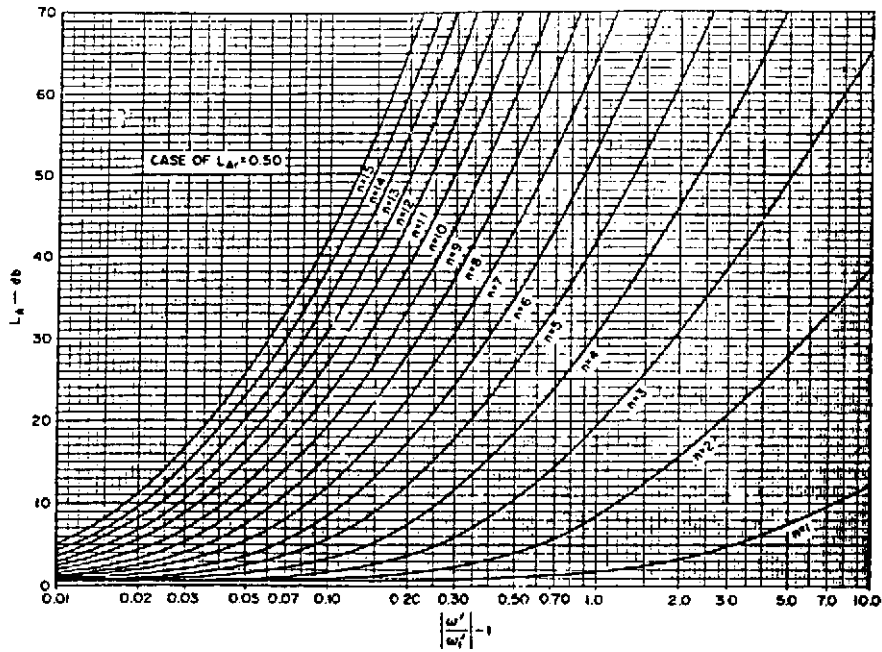


Fig. 6.35 Curvas características de filtros de Chebychev con rizado de 0,50 dB con el orden del filtro  $n$  como parámetro

VALUE OF $n$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\epsilon_5$	$\epsilon_6$	$\epsilon_7$	$\epsilon_8$	$\epsilon_9$	$\epsilon_{10}$	$\epsilon_{11}$
0.5 db ripple											
1	0.6986	1.0000									
2	1.4029	0.7071	1.9841								
3	1.5963	1.0967	1.5953	1.0000							
4	1.6703	1.1926	2.3661	0.8419	1.9841						
5	1.7058	1.2296	2.5408	1.2296	1.7058	1.0000					
6	1.7254	1.2479	2.6064	1.3137	2.4758	0.8696	1.9841				
7	1.7372	1.2583	2.6381	1.3444	2.6381	1.2583	1.7372	1.0000			
8	1.7451	1.2647	2.6564	1.3590	2.6964	1.3389	2.5093	0.8796	1.9841		
9	1.7504	1.2690	2.6678	1.3673	2.7239	1.3673	2.6678	1.2690	1.7504	1.0000	
10	1.7543	1.2721	2.6754	1.3725	2.7392	1.3806	2.7231	1.3485	2.5239	0.8842	1.9841

Fig. 6.36 Tabla de valores de los elementos de los filtros de la figura anterior con  $g_0 = 1$  y  $\omega_1' = 1$

$$C_{01} = C_{34} = 0,20 \text{ pF} \quad C_{12} = C_{23} = 0,045 \text{ pF}$$

$$\phi_1 = \pi + \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}_{01}} + \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}_{12}} \right) = 2,914 = 0,927 \frac{\lambda}{2}$$

$$\phi_2 = \pi + \frac{1}{2} 2 \tan^{-1} \frac{2}{\bar{X}_{12}} = 3,052 = 0,971 \frac{\lambda}{2}$$

Las capacidades  $C_{ij}$  se pueden realizar mediante ranuras transversales en la tira conductora, como se indica en la figura 6.37, si bien para obtener valores del orden de 0,20 pF como el que hemos calculado, la ranura debe ser tan fina que su fabricación puede resultar difícil. ■

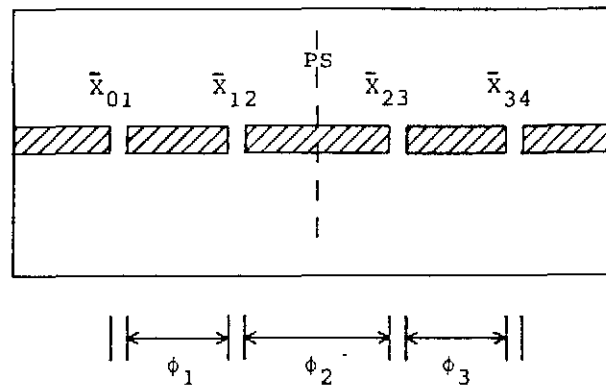


Fig. 6.37 Realización en línea microtira de un filtro como el de la figura 6.34b; los elementos de acoplamiento  $X_{ij}$  son las capacidades existentes entre los bordes de la tira conductora producidos por cortes de anchura controlada

Los tipos de filtros analizados responden a la forma general de la figura 6.38a: secciones de línea en  $\lambda/2$  entre inversores de impedancias  $K_{ij}$ /admitancias  $J_{ij}$ .

Si consideramos dos secciones de líneas acopladas con dos accesos en circuito abierto como las del apartado 6.9 (figs. 6.27 y 6.28), su circuito equivalente, en las proximidades de  $\phi = \pi/2$  (longitud de acoplamiento  $\ell = \lambda/4$ ), viene dado por dos inversores con un tramo de línea en  $\lambda/2$  en medio y tramos en  $\lambda/4$  a la entrada y salida (fig. 6.38b). Estructura que, aumentada con la adición de más secciones

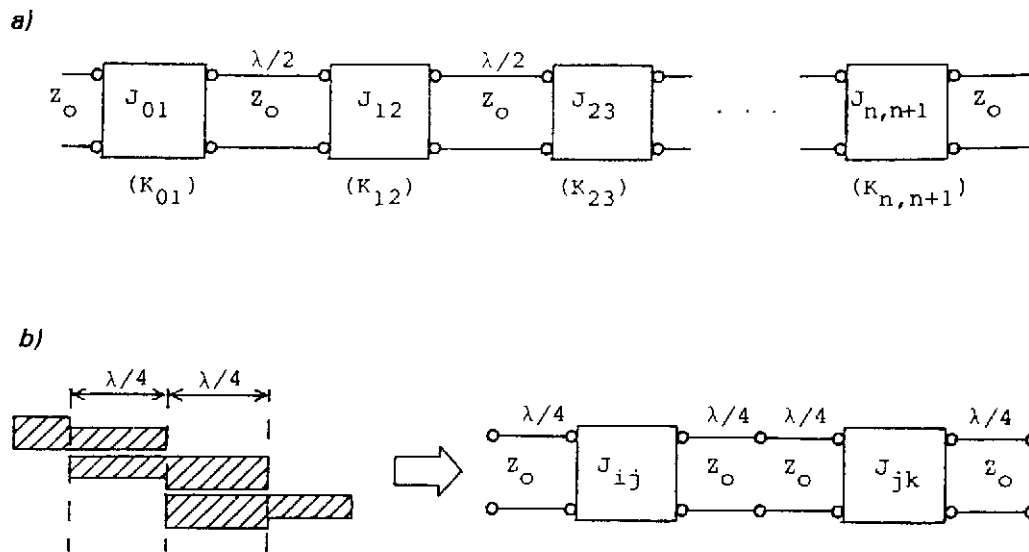


Fig. 6.38 a) Forma general de un filtro con inversores y líneas de transmisión en  $\lambda/2$ .  
 b) Circuito equivalente de dos secciones de líneas acopladas en las condiciones de la figura 6.28; adviértase que forman la estructura básica de a.

acopladas, conduce a la forma general de filtro que analizamos y que, vistas las expresiones obtenidas, resumimos en la figura 6.39.

La ventaja mayor de este tipo de filtros respecto al del ejemplo 2 (acoplamiento capacitivo por cortes en la tira conductora) está en el hecho que, para una misma respuesta, las separaciones  $s$  entre las tiras acopladas son más anchas que las de los cortes  $y$ , por tanto, más fáciles de realizar con precisión por procedimientos fotolitográficos.

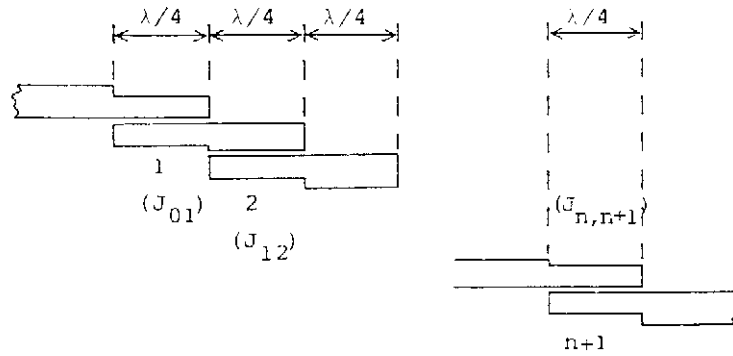
**Ejemplo 3** Para los mismos valores del ejemplo 2, la realización con líneas triplaca (*stripline*) acopladas requiere los valores siguientes para la primera y la última sección, que son las del acoplamiento más intenso:

a) Para  $\epsilon_r=2,1$ ;  $w/b=0,7588$   $s/b=0,0848$

b) Para  $\epsilon_r=10,0$ ;  $w/b=0,1669$   $s/b=0,2155$

Para  $b=1$  mm, por ejemplo, las ranuras deben ser de 84,8 y 215  $\mu\text{m}$ , respectivamente.





$$\bar{J}_{i-1,i} = \frac{\pi}{2} \frac{W}{\sqrt{g_{i-1}g_i}}, \quad \bar{J}_{01} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{W}{g_1}}, \quad J_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{W}{g_n g_{n+1}}}$$

con

$$f_o = \sqrt{f_1 f_2}, \quad W = \frac{f_2 - f_1}{f_o}$$

$$\bar{Z}_{oei} = \sqrt{1 + J_{i-1,i}^2} + \bar{J}_{i-1,i}$$

$$\bar{Z}_{ooi} = \sqrt{1 + J_{i-1,i}^2} - \bar{J}_{i-1,i} = (\bar{Z}_{oei})$$

Fig. 6.39 Aspecto de las tiras conductoras de un filtro realizado con líneas acopladas, y expresiones para su diseño