L'equació d'Einstein de la relativitat general i la seva relació amb l'equació d'ona

9 de febrer de 2005

JOAN GIRBAU

Esquema de la conferència

Esquema de la conferència

- Nocions de relativitat especial a l’espai de Minkowski

Esquema de la conferència

- Nocions de relativitat especial a l’espai de Minkowski
- Fonaments de la relativitat general i equació d’Einstein

Esquema de la conferència

- Nocions de relativitat especial a l’espai de Minkowski
- Fonaments de la relativitat general i equació d’Einstein
- Relació de l’equació d’Einstein amb l’equació d’ona clàssica

Esquema de la conferència

- Nocions de relativitat especial a l’espai de Minkowski
- Fonaments de la relativitat general i equació d’Einstein
- Relació de l’equació d’Einstein amb l’equació d’ona clàssica
- Breus pinzellades de la meva recerca personal en aquest camp

Relativitat especial (articles originals):

Relativitat especial (articles originals):

Einstein:

- Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik, 17, 1905.
- Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?, Annalen der Physik, 17, 1905.

Relativitat especial (articles originals):

Einstein:

- Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik, 17, 1905.
- Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?, Annalen der Physik, 17, 1905.

Minkoswski:

Comunicació a la 80 Assemblea de Físics alemanys, 21 de setembre de 1908.

Nocions de relativitat especial

La rel. especial pretén descriure els fenòmens físics que es produeixen en absència de camps gravitatoris.

La rel. especial pretén descriure els fenòmens físics que es produeixen en absència de camps gravitatoris.

Sistema físic de referència:

La rel. especial pretén descriure els fenòmens físics que es produeixen en absència de camps gravitatoris.

Sistema físic de referència:

- Tres eixos perpendiculars de coordenades que viatgen per l'espai.
- En cada punt immòbil respecte als eixos, un rellotge (tots sincronitzats).

La rel. especial pretén descriure els fenòmens físics que es produeixen en absència de camps gravitatoris.

Sistema físic de referència:

- Tres eixos perpendiculars de coordenades que viatgen per l'espai.
- En cada punt immòbil respecte als eixos, un rellotge (tots sincronitzats).

Sistema inercial:

Un sistema físic de referència sobre el qual no actuen forces (això és, val el principi d'inèrcia).

(Cinemàtica)

Postulats:

(Cinemàtica)

Postulats:

1. Existeixen sistemes inercials.

(Cinemàtica)
Postulats:

1. Existeixen sistemes inercials.
2. Dos s.i. es mouen un respecte a l’altre amb vel. constant. Recíprocament si viatgen amb vel. const. i un és inercial, l’altre també.

(Cinemàtica)
Postulats:

1. Existeixen sistemes inercials.
2. Dos s.i. es mouen un respecte a l'altre amb vel. constant. Recíprocament si viatgen amb vel. const. i un és inercial, l'altre també.
3. Tots els s.i. juguen el mateix paper a la teoria.

(Cinemàtica)
Postulats:

1. Existeixen sistemes inercials.
2. Dos s.i. es mouen un respecte a l'altre amb vel. constant. Recíprocament si viatgen amb vel. const. i un és inercial, l'altre també.
3. Tots els s.i. juguen el mateix paper a la teoria.
4. L'ordre temporal d'esdeveniments ocorreguts en un mateix punt d'un s.i. és el mateix quan es canvia de s.i.

(Cinemàtica)
Postulats:

1. Existeixen sistemes inercials.
2. Dos s.i. es mouen un respecte a l'altre amb vel. constant. Recíprocament si viatgen amb vel. const. i un és inercial, l'altre també.
3. Tots els s.i. juguen el mateix paper a la teoria.
4. L'ordre temporal d'esdeveniments ocorreguts en un mateix punt d'un s.i. és el mateix quan es canvia de s.i.
5. Invariància de la velocitat de la llum.

Si estem en un s.i, cada esdeveniment dóna lloc a un punt $(x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbf{R}^4$.

Si estem en un s.i, cada esdeveniment dóna lloc a un punt $(x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbf{R}^4$.

Transformacions de Lorentz:

Si estem en un s.i, cada esdeveniment dóna lloc a un punt $(x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbf{R}^4$.

Transformacions de Lorentz: S i S' dos s.i.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ & (x_1, x_2, x_3, t) & \longrightarrow & (x'_1, x'_2, x'_3, t') \\ & \text{esdeveniment} & & \text{el mateix esdev.} \end{array}$$

Si estem en un s.i, cada esdeveniment dóna lloc a un punt $(x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbf{R}^4$.

Transformacions de Lorentz: S i S' dos s.i.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ & (x_1, x_2, x_3, t) & \longrightarrow & (x_1', x_2', x_3', t') \\ & \text{esdeveniment} & & \text{el mateix esdev.} \end{array}$$

La mateixa definició de tr. de Lorentz implica la bijectivitat

Mètrica de Minkowski a $\mathbf{R}^4$:

Mètrica de Minkowski a $\mathbf{R}^4$:
(uso la paraula “mètrica” com a sinònim de “producte escalar”)

$$x = (x_1, x_2, x_3, t_x), \quad y = (y_1, y_2, y_3, t_y)$$

$$\eta(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - c^2 t_x t_y$$

Tota transformació de Lorentz és una isometria de $\mathbf{R}^4$ respecte a la mètrica de Minkowski.

Recordem que isometria de $\mathbf{R}^4$ és afinitat

$$f(x) = p + F(x)$$

amb F lineal, i tal que $\eta(F(x), F(y)) = \eta(x, y)$.

Vectors temporals: $x \in \mathbf{R}^4$ és temporal si $\eta(x, x) < 0$.

És a dir, $x = (x_1, x_2, x_3, t)$ és temporal si

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 < 0$$

Vectors temporals: $x \in \mathbf{R}^4$ és temporal si $\eta(x,x) < 0$.
És a dir, $x = (x_1, x_2, x_3, t)$ és temporal si

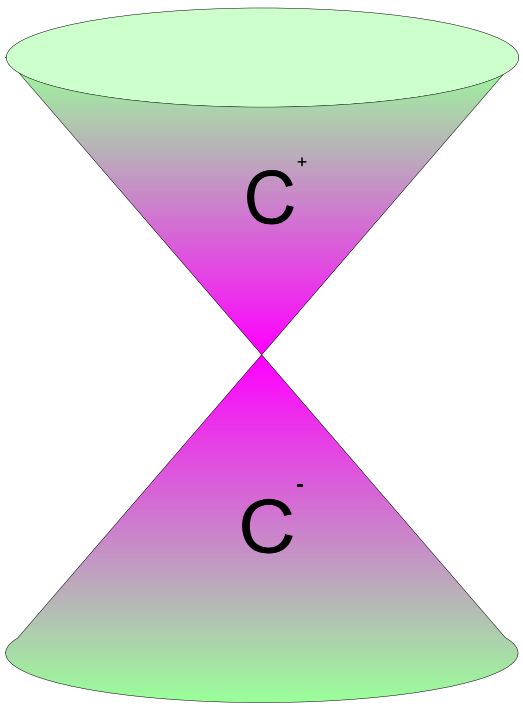
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 < 0$$

Exemple: El vector $(0,0,0,1) \in \mathbf{R}^4$ és temporal.

$C=$conjunt de vectors temporals$=\{(x_1,x_2,x_3,t)\in\mathbf{R}^4$ tals que $x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2t^2<0\}$.

C =conjunt de vectors temporals$= \{(x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbf{R}^4$ tals que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 < 0\}$.

C és un con amb dues components connexes, C^+ i C^-.



Les transformacions de Lorentz, per ser isometries, transformen vectors temp. en vectors temp.

Les transformacions de Lorentz, per ser isometries, transformen vectors temp. en vectors temp.
El postulat 4 implica que transformen vectors de C^+ en vectors de C^+.

Definició: Una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbf{R}^4$ direm que és ortonormal respecte a η si $\eta(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, $\eta(v_i, v_4) = 0$, $\eta(v_4, v_4) = -c^2$.

Definició: Una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbf{R}^4$ direm que és ortonormal respecte a η si $\eta(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, $\eta(v_i, v_4) = 0$, $\eta(v_4, v_4) = -c^2$.

La base canònica de $\mathbf{R}^4$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, és ortonormal respecte a η i, a més, $e_4 \in C^+$.

Dos punts de vista equivalents:

Dos punts de vista equivalents:

Punt de vista 1: Cada sistema inercial usa un $\mathbf{R}^4$ diferent per representar els esdeveniments. Es passa d'un a l'altre per una tr. de Lorentz.

Dos punts de vista equivalents:

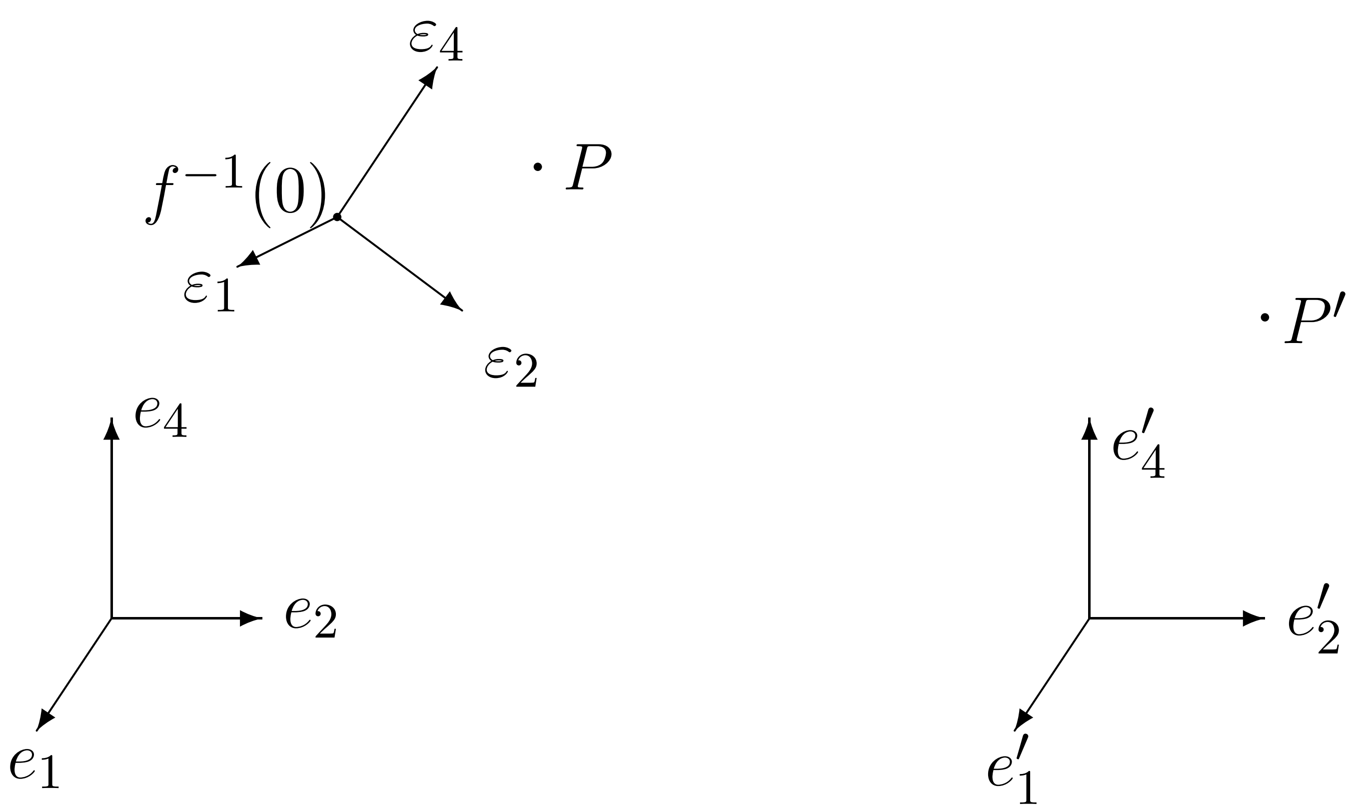
Punt de vista 1: Cada sistema inercial usa un $\mathbf{R}^4$ diferent per representar els esdeveniments. Es passa d'un a l'altre per una tr. de Lorentz.

Punt de vista 2:

Siguin S i S' dos sistemes inercials. $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ transformació de Lorentz corresponent (f és de la forma $f(x) = F(x) + p$ amb F lineal).

Nocions de relativitat especial

$$\mathbf{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^4$$



Dos punts de vista equivalents:

Punt de vista 1: Cada sistema inercial usa un $\mathbf{R}^4$ diferent per representar els esdeveniments. Es passa d'un a l'altre per una tr. de Lorentz.

Punt de vista 2: Tothom usa un mateix $\mathbf{R}^4$. Els observadors d'un sistema inercial (el que sigui), per representar els esdeveniments, usen una determinada referència afí $\{A; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ amb els $\{\varepsilon_i\}$ ortonormals i $\varepsilon_4 \in C^+$.

Dos punts de vista equivalents:

Punt de vista 1: Cada sistema inercial usa un $\mathbf{R}^4$ diferent per representar els esdeveniments. Es passa d'un a l'altre per una tr. de Lorentz.

Punt de vista 2: Tothom usa un mateix $\mathbf{R}^4$. Els observadors d'un sistema inercial (el que sigui), per representar els esdeveniments, usen una determinada referència afí $\{A; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ amb els $\{\varepsilon_i\}$ ortonormals i $\varepsilon_4 \in C^+$.

Des del punt de vista 2 les tr. de Lorentz queden substituïdes per canvis de ref. ortonomals amb $\varepsilon_4 \in C^+$.

Qualsevol problema de mesurament de longituds o de temps queda substituït per un problema únicament geomètric a l’espai de Minkowski.

Dinàmica de la rel. especial:

Dinàmica de la rel. especial:

Conceptes de massa en repòs, força de Minkowski, impulsió de Minkowski, concepte d’energia.

Dinàmica de la rel. especial:
Conceptes de massa en repòs, força de Minkowski, impulsió de Minkowski, concepte d'energia.

$E = mc^2$.

Fonaments de la relativitat general

Relativitat general:

Einstein:
Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,
Annalen der Physik, 49, 1916.

Relativitat general:

Les forces gravitatòries no existeixen: són fruit d'una elecció de coordenades.

Principi fonamental: Substituir l'espai de Minkowski $(\mathbf{R}^4, \eta)$ per un espai-temps (V, g).

Principi fonamental: Substituir l'espai de Minkowski $(\mathbf{R}^4, \eta)$ per un espai-temps (V, g).
Una v. de Lorentz (V, g) és com una v. de Riemann de dimensió 4 en la qual en cada espai tangent $T_x(V)$ es pot trobar una base respecte a la qual

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

En cada punt $x \in V$ hi ha el concepte de vect. temporal: $v \in T_x(V)$ és temporal si $g_x(v, v) < 0$.

En cada punt $x \in V$ hi ha el concepte de vect. temporal: $v \in T_x(V)$ és temporal si $g_x(v,v) < 0$.
Sigui C_x el conjunt de vectors temporals de $T_x(V)$ (té dues comp. connexes).

En cada punt $x \in V$ hi ha el concepte de vect. temporal: $v \in T_x(V)$ és temporal si $g_x(v, v) < 0$.

Sigui C_x el conjunt de vectors temporals de $T_x(V)$ (té dues comp. connexes).

(V, g) es diu orientable respecte al temps si per a cada $x \in V$ es pot escollir C_x^+ de manera que es compleixi la següent condició de coherència:

Existeix un camp vect. dif. X tal que $X_x \in C_x^+$ per a cada $x \in V$.

En cada punt $x \in V$ hi ha el concepte de vect. temporal: $v \in T_x(V)$ és temporal si $g_x(v, v) < 0$.
Sigui C_x el conjunt de vectors temporals de $T_x(V)$ (té dues comp. connexes).
(V, g) es diu orientable respecte al temps si per a cada $x \in V$ es pot escollir C_x^+ de manera que es compleixi la següent condició de coherència:
Existeix un camp vect. dif. X tal que $X_x \in C_x^+$ per a cada $x \in V$.
Un espai temps és una v. de Lorentz orientada respecte al temps.

Principi fonamental: Substituir l'espai de Minkowski $(\mathbf{R}^4, \eta)$ per un espai-temps (V, g).

Principi fonamental: Substituir l'espai de Minkowski $(\mathbf{R}^4, \eta)$ per un espai-temps (V, g).

- Però, i les forces gravitatòries?
- Per quina mètrica g s'ha de substituir η?

Primera pregunta (forces gravitatòries)

Primera pregunta (forces gravitatòries)

Una corba $x(\tau)$ de V és geodèsica si $\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0$. En coordenades (x^i) si

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \sum_{jk} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0$$

τ paràmetre geodèsic (aquí, el temps propi).

En comparació amb la física clàssica, què representen aquí les g_{ij}?

En comparació amb la física clàssica, què representen aquí les g_{ij}?

Les acceleracions són

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}$$

En comparació amb la física clàssica, què representen aquí les g_{ij}?

Les acceleracions són

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}$$

Els símbols Γ^i_{jk} depenen de les g i de les primeres derivades de les g.

En Física clàssica les acceleracions d'un camp gravitarori que deriva d'un potencial V vénen donades per

$$-\text{grad } V = -(\partial V/\partial x_1, \partial V/\partial x_2, \partial V/\partial x_3)$$

i depenen de les primeres derivades de V.

En Física clàssica les acceleracions d'un camp gravitarori que deriva d'un potencial V vénen donades per

$$-\text{grad}\, V = -(\partial V/\partial x_1, \partial V/\partial x_2, \partial V/\partial x_3)$$

i depenen de les primeres derivades de V.

Les g_{ij} són com la V clàssica.

En Física clàssica les acceleracions d'un camp gravitarori que deriva d'un potencial V vénen donades per

$$-\text{grad } V = -(\partial V/\partial x_1, \partial V/\partial x_2, \partial V/\partial x_3)$$

i depenen de les primeres derivades de V.

Les g_{ij} són com la V clàssica. Però n'hi ha 10:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{pmatrix}$$

Segona pregunta: com es determina g?

Segona pregunta: com es determina g?
En Física clàssica, equació de Poisson:

$$\Delta V = 4\pi K\rho$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Segona pregunta: com es determina g?
En Física clàssica, equació de Poisson:

$$\Delta V = 4\pi K \rho$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Però en relativitat hi ha 10 g_{ij} !

Segona pregunta: com es determina g?
En Física clàssica, equació de Poisson:

$$\Delta V = 4\pi K\rho$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Però en relativitat hi ha 10 g_{ij} !
Equació tensorial

$$G(g) = \chi T$$

$G(g)$ i T tensors simètrics d'ordre 2, T descriu la matèria i $G(g)$ depèn de g i de les seves derivades fins a l'ordre 2.

Per descriure T es necessita saber bé la mecànica clàssica de fluids.

$$\text{div}\, T = 0$$

Per descriure T es necessita saber bé la mecànica clàssica de fluids.

$$\text{div } T = 0$$

Per tant, div $G(g) = 0$.
Coneixeu algun tensor (de la geometria riemanniana) que depengui de les derivades fins a l'ordre 2 de g, que sigui d'ordre 2, simètric i tingui divergència nul·la?

El tensor de curvatura:

$$(X, Y, Z) \to R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} Z$$

depèn de les derivades fins a l'ordre 2 de g.

El tensor de curvatura:

$$(X, Y, Z) \to R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} Z$$

depèn de les derivades fins a l'ordre 2 de g.

$$R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k} = R^r_{kij}\frac{\partial}{\partial x^r}$$

El tensor de curvatura:

$$(X, Y, Z) \to R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} Z$$

depèn de les derivades fins a l'ordre 2 de g.

$$R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k} = R^r_{kij} \frac{\partial}{\partial x^r}$$

$$R^r_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^r_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^r_{ji}}{\partial x^k} + (\Gamma^s_{ki}\Gamma^r_{js} - \Gamma^s_{ji}\Gamma^r_{ks})$$

Tensor de Ricci: És la contracció (1,1) del tensor de curvatura. En coordenades $R_{ij} = R^{k}_{ikj}$

Tensor de Ricci: És la contracció (1,1) del tensor de curvatura. En coordenades $R_{ij} = R^k_{ikj}$

El tensor de Ricci és simètric. Compleix totes les condicions llevat de la divergència nul·la

Tensor de Ricci: És la contracció (1,1) del tensor de curvatura. En coordenades $R_{ij} = R^k_{ikj}$

El tensor de Ricci és simètric. Compleix totes les condicions llevat de la divergència nul·la

Si R és la curvatura escalar (contracció del tensor de Ricci), el càlcul de la divergència del tensor de Ricci mostra que $G = \text{Ric} - \frac{1}{2}Rg$ compleix totes les condicions.

Poincaré va demostrar que els únics tensors que complien totes les condicions volgudes eren de la forma

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2} R g + \Lambda g$$

amb Λ constant.

Poincaré va demostrar que els únics tensors que complien totes les condicions volgudes eren de la forma

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g$$

amb Λ constant.
Equació d'Einstein:

$$G(g) = \text{Ric}(g) - \frac{1}{2}R(g)g = \chi T$$

amb $\chi = 8K\pi/c^2$.

Per als fluids perfectes

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^* \otimes u^* + \frac{p}{c^2} g$$

amb u^* la 1-forma associada (a través de g) a un camp vect. temporal (de velocitats).

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Material previ: Una altra expressió de l'eq. d'Einstein

Material previ: Una altra expressió de l'eq. d'Einstein

L'equació d'Einstein diu

$$\text{Ric}(g) - \frac{1}{2}R(g)g = \chi T$$

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Material previ: Una altra expressió de l'eq. d'Einstein

L'equació d'Einstein diu

$$\text{Ric}(g) - \frac{1}{2}R(g)g = \chi T$$

Es pot escriure d'aquesta altra manera:

$$\text{Ric}(g) = \chi(T - \frac{1}{2}(\text{tr}_g T)g)$$

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Material previ: Una altra expressió de l'eq. d'Einstein

Demostració: Multiplico

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = T_{ij}$$

per g^{ij} i sumo:

$$R - 2R = \chi \mathrm{tr}_g T$$

O sigui $R = -\chi \mathrm{tr}_g T$. Substitueixo això a Einstein i surt.

Relació entre l’equació d’Einstein i l’equació d’ona

Material previ: Com canvia Ricci sota una pertorbació de g

Parteixo d'una mètrica de Lorentz g, i considero les $g' = g + h$ amb h petit (g fixa i h variable).

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Material previ: Com canvia Ricci sota una pertorbació de g
Parteixo d'una mètrica de Lorentz g, i considero les $g' = g + h$ amb h petit (g fixa i h variable).
Sigui $E(h) = \text{Ric}(g') - \text{Ric}(g)$. Sigui $L(h)$ la part lineal en h de $E(h)$.
Tindrem

$$\text{Ric}(g') \simeq \text{Ric}(g) + L(h)$$

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Material previ: Com canvia Ricci sota una pertorbació de g
Parteixo d'una mètrica de Lorentz g, i considero les $g' = g + h$ amb h petit (g fixa i h variable).
Sigui $E(h) = \text{Ric}(g') - \text{Ric}(g)$. Sigui $L(h)$ la part lineal en h de $E(h)$.
Tindrem

$$\text{Ric}(g') \simeq \text{Ric}(g) + L(h)$$

$$\begin{aligned} L(h)_{ij} = \; & \frac{1}{2}(-\nabla^k \nabla_k h_{ij} + \\ & + \nabla^k \nabla_i h_{jk} + \nabla_k \nabla_j h_{ik} - \nabla_i \nabla_j \text{tr}_g h) \end{aligned}$$

on ∇ és la dif. cov. associada a g.

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Recordem: Eq. Einstein: $\mathrm{Ric}(g) = \chi(T - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g T)g)$

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Recordem: Eq. Einstein: $\mathrm{Ric}(g) = \chi(T - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g T)g)$

La mètrica de Minkowski η a $\mathbf{R}^4$ compleix l'equació d'Einstein sense matèria: $\mathrm{Ric}(\eta) = 0$.

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Recordem: Eq. Einstein: Ric$(g) = \chi(T - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g T)g)$
La mètrica de Minkowski η a $\mathbf{R}^4$ compleix l'equació d'Einstein sense matèria: Ric$(\eta) = 0$.
Considerem una matèria amb tensor T petit, que crearà una g propera a η, tal que

$$\mathrm{Ric}(g) = \chi(T - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g T)g)$$

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Recordem: Eq. Einstein: Ric$(g) = \chi(T - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g T)g)$

La mètrica de Minkowski η a $\mathbf{R}^4$ compleix l'equació d'Einstein sense matèria: Ric$(\eta) = 0$.

Considerem una matèria amb tensor T petit, que crearà una g propera a η, tal que

$$\mathrm{Ric}(g) = \chi(T - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g T)g)$$

Posem $g = \eta + h$ (h serà petit). Tindrem

$$\mathrm{Ric}(g) \simeq \chi \underbrace{(T - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_\eta T)\eta)}_{S} = (def.) = \chi S$$

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Però

$$\mathrm{Ric}(g') \simeq \underbrace{\mathrm{Ric}(\eta)}_{=0} + L(h) = L(h)$$

Queda

$$L(h) \simeq \chi S$$

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Però

$$\text{Ric}(g') \simeq \underbrace{\text{Ric}(\eta)}_{=0} + L(h) = L(h)$$

Queda

$$L(h) \simeq \chi S$$

O sigui:

$$\frac{1}{2}(-\nabla^k \nabla_k h_{ij} +$$

$$+\nabla^k \nabla_i h_{jk} + \nabla_k \nabla_j h_{ik} - \nabla_i \nabla_j \text{tr}_g h) = \chi S_{ij}$$

on ∇ és la diferencial cov. respecte a η.

Amb aquesta expressió tan complicada no vaig enlloc.

Amb aquesta expressió tan complicada no vaig enlloc.
Per a les h que compleixen la condició suplementària $\nabla^k h_{ik} = \frac{1}{2}\nabla_i \text{tr } h$ (div $h = \frac{1}{2} d$ tr h) queda:

$$-\frac{1}{2}\nabla^k\nabla_k h_{ij} = \chi S_{ij}$$

Relació entre l'equació d'Einstein i l'equació d'ona

Sempre puc aconseguir que es compleixi la condició div $h = \frac{1}{2}d$ tr h que m'he tret de la màniga, utilitzant un difeomorfisme adequat. Em queda, doncs,

$$-\frac{1}{2}\nabla^k\nabla_k h_{ij} = \chi S_{ij}$$

Sempre puc aconseguir que es compleixi la condició div $h = \frac{1}{2}d$ tr h que m'he tret de la màniga, utilitzant un difeomorfisme adequat. Em queda, doncs,

$$-\frac{1}{2}\nabla^k\nabla_k h_{ij} = \chi S_{ij}$$

que equival a

$$\frac{1}{2}\Box h_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) h_{ij} = \chi S_{ij}$$