Riemann i les funcions de variable complexa

Jaume Amorós
UPC
Barcelona

20 de febrer del 2008

El problema de les integrals abelianes

Problema: integrals amb $\sqrt{p(x)}$, on $p(x)$ polinomi.

- grau $p(x) = 2$: resolució clàssica, funcions trigonomètriques. Per exemple

$$u = \int_0^v \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \Longrightarrow u = \arcsin(v) \Longrightarrow v = \sin(u)$$

- grau $p(x) = 3, 4$: integrals el.líptiques (...Legendre, Abel, Jacobi ...). Per exemple

$$u = \int_0^v \frac{1}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}} dx \Longrightarrow v = \operatorname{sn}(u)$$

- grau $p(x) = 5$: integrals hiperel.líptiques. No hi ha funció inversa (Abel), però es poden invertir per parells $(v_1, v_2) = \Phi(u_1, u_2)$ (Jacobi).

El problema de les integrals abelianes

A més, aquestes integrals i funcions inverses satisfan relacions de sofisticació creixent:

- grau $p(x) = 2$: identitats trigonomètriques.
- grau $p(x) = 3, 4$: sumes d'Abel

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} + \int_{p_0}^{p_2} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} + \int_{p_0}^{p_3} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$$

amb $\{p_1, p_2, p_3\} = l \cap \{y^2 = p(x)\}$ no varia al moure la recta l

El problema general de les integrals abelianes:
Per $y = f(x)$ funció meromorfa, finitament multivaluada, calcular $u = \int_0^v R(x, y)dx$, amb R fracció racional en x, y
Hi han inverses $(v_1, \dots, v_n) = \Phi(u_1, \dots, u_n)$?

El problema de les integrals abelianes

Solucions aportades per Riemann:

- Les superfícies de Riemann.
- El teorema de Riemann-Roch.
- La jacobiana i la funció θ de Riemann.

Funcions holomorfes

Riemann continua la teoria geomètrica de les funcions holomorfes de Cauchy (dissertació inaugural, Göttingen 1851):

$z = x + iy \in \mathbb{C}$

$w = w(z), \qquad w = u(x, y) + iv(x, y)$

$w(z)$ holomorfa $\Leftrightarrow$ CR $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{cases}$

Principi de Dirichlet: (Riemann l'usa però no el té demostrat!) $u_{\partial D}$ determina u, i també v, w mòdul constant, en domini 1-connex D.

Fluxes estacionaris

Interpretació com a flux (elèctric . . .):

$\nabla u = (u_x, u_y)$ flux estacionari en el pla
$u(x, y)$ el potencial
$u = ct$ línies equipotencials, $v = ct$ línies de flux

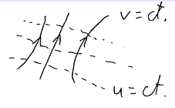
$\nabla \cdot \nabla u = \Delta u = 0 \Rightarrow$ el flux no té fonts

Dualitat: iw dóna flux amb u, v intercanviades.

Diré simplement fluxes estacionaris als donats per u harmònica (incompressibles, amb algunes singularitats admeses).

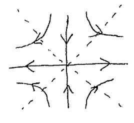
Flux estacionari: models locals

$\frac{\partial w}{\partial z}(p) \neq 0$ caixa de flux

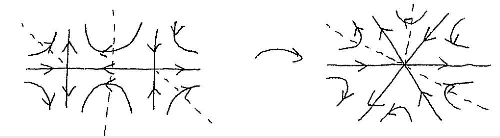


$\frac{\partial w}{\partial z}(p) = 0, \ldots, \frac{\partial^\alpha w}{\partial z^\alpha}(p) = 0$ ramificació d'ordre α.

Simple ($\alpha = 1$):



$\alpha > 1$: límit d'α punts de ramificació simple



($2\alpha + 2$ sectors circulars)

Singularitats admeses

Les decidides pels treballs previs en integrals abelianes:

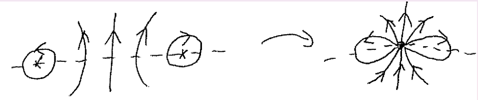
- pols:
  $w : U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (l'esfera de Riemann)
  w meromorfa $\Leftrightarrow w : U \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ holomorfa
  pols: $w^{-1}(\infty)$
- logaritmes: apareixen al integrar pols simples
  $\int \frac{dz}{z} = \log z + C$

Singularitats: models del flux

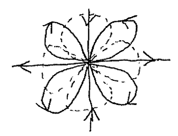
- Logaritme:
  (i) $w = A\log(z)$, $A \in \mathbb{R}$ (ii) $w = iB\log(z)$, $B \in \mathbb{R}$

  font de flux, intensitat $2\pi A$ vòrtex, vorticitat $2\pi B$

- Pol simple: $w = \frac{A_{-1}}{z}$, límit de dos logaritmes



- Pol múltiple: límit de pols simples



Les superfícies de Riemann

Programa de Riemann: estudiar totes les funcions meromorfes, finitament multivaluades, en l'esfera de Riemann i les seves integrals.
Si $w(z)$ és una funció multivaluada, la seva superfície és

$$S = \{(z, w) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \mid w = w(z)\}$$

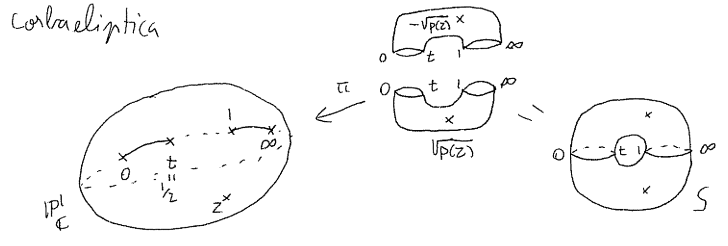
Ve equipada amb un aixecament univaluat f de la funció meromorfa,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & \xleftarrow{\pi} & S & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\ z & \longleftarrow & (z, w) & \longmapsto & w \end{array}$$

i una projecció π sobre l'esfera de Riemann, que posa S com un recobriment de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (sobre cada z tenim tants punts com valors tingui $w(z)$). Aquest recobriment és ramificat perquè el nombre de valors de $w(z)$ varia amb la seva multiplicitat.

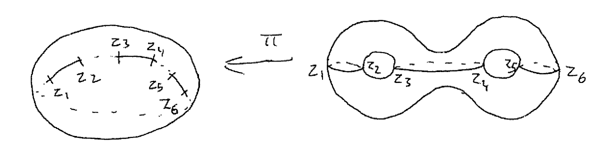
Exemple: la corba el.líptica

$w(z) = \sqrt{z(z-1)(z-t)} \qquad t \neq 0, 1 \quad$ paràmetre



$$\pi^{-1}(z) = \begin{cases} \pm\sqrt{z(z-1)(z-t)} & z \neq 0, t, 1, \infty \\ 0 & z = 0, t, 1, \infty \end{cases}$$

Exercici: $w(z) = \sqrt{p(z)}$ amb $p(z)$ de grau 6 i arrels simples $z_1, \ldots, z_6$ dóna la corba hiperel.líptica



Superfícies vs corbes algebraiques

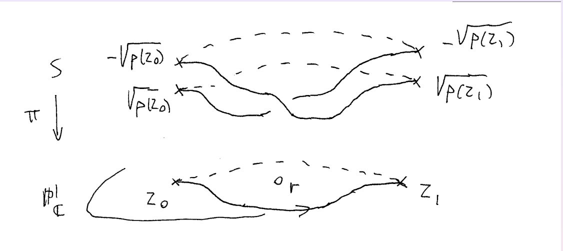
Aplicant el teorema de Riemann-Roch, Riemann va demostrar

Teorema: Si $w(z)$ és una funció meromorfa finitament multivaluada en l'esfera de Riemann, existeix un polinomi $F(x, y)$ tal que $F(z, w(z)) = 0$.

Així, la superfície de Riemann S de $w(z)$ és birracional a la corba algebraica $C = \{(z, w) \mid F(z, w) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ (birracional: $S \setminus \{punts\} \cong C \setminus \{punts\}$).

Però C té singularitats!
El recobriment ramificat $\pi : S \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ defineix S com una superfície llisa, compacta, orientable. Molt més convenient per treballar!

L'estudi de les superfícies de Riemann compactes com a recobriments ramificats de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ va ser completat per Klein, Clebsch, Hurwitz ...



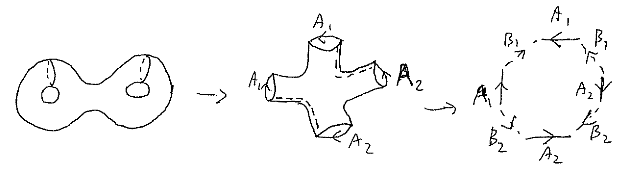
Riemann distingeix dos nivells de classificació:

- equivalència conforme (biholomorfisme, classificació holomorfa)
- deformació (homeo/difeomorfisme, classificació topològica)

La classificació topològica

Riemann l'enuncia per les superfícies orientables, la demostra estudiant-les com a recobriments ramificats de l'esfera... mòdul el teorema de la corba de Jordan! (enunciat per Bolzano cap al 1840, demostrat per Veblen el 1905)
Com ho fa? demostra que per S compacta, connexa, orientable existeix un únic $g \in \mathbb{N}$ (el gènere de S) tal que

- S admet g cercles disjunts $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ amb $S \setminus (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_g)$ connexa, però no n'admet $g+1$.



- S admet $2g$ cercles tals que tallant per ells es converteix en un polígon convex del pla amb $4g$ costats identificats 2 a 2 (un domini fonamental per S).

Fluxes estacionaris en superfícies

Per S superfície compacta, connexa, recobriment ramificat de l'esfera, de gènere $g \geq 0$, Riemann busca totes les funcions holomorfes (multivaluades) en $S \setminus \{pts\}$, i en $\{pts\}$ s'admeten

- pols,
- logaritmes.

Al passar de $\mathbb{C}$ a la varietat S, cal distingir entre funcions $f(z)$ i diferencials $\omega = g(z)dz$. Riemann obfusca aquest punt! El recobriment ramificat de l'esfera gairebé proporciona una coordenada canònica...
Però els logaritmes només s'admeten en funcions, no en diferencials.
Com S és tancada, el teorema de Stokes dóna

$$\sum_{p \text{ pol de } \omega} \{\text{residu de } \omega \text{ en } p\} = 0$$

Singularitats del flux en superfícies

Tot pol d'una diferencial és límit de pols simples,
tot pol d'una funció meromorfa és límit de logaritmes,
així que buscant les singularitats més simples les tindrem totes.

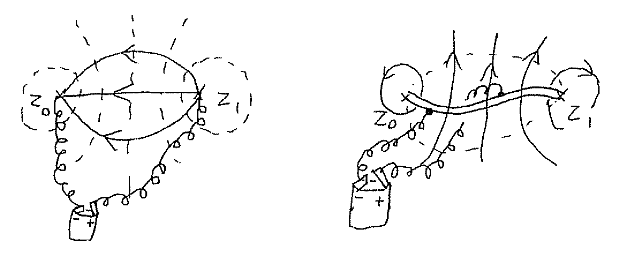
Per tant podem trobar tots els fluxes estacionaris com a límit de fluxes que únicament tenen parells de singularitats

$$\log \frac{z - z_0}{z - z_1}$$

El model local del flux estacionari en aquestes singularitats és pot construir amb corrents elèctrics connectant convenientment una força electromotriu (f.e.m.).

Realització elèctrica del flux

(i) $w(z) = A \log \frac{z-z_0}{z-z_1}$, $\quad A \in \mathbb{R}$ $\qquad$ (ii) $w(z) = iB \log \frac{z-z_0}{z-z_1}$, $\quad B \in \mathbb{R}$

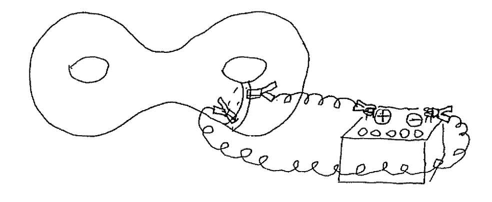


(f.e.m. connectada en z_0, z_1) $\qquad$ (f.e.m. en camí de z_0 a z_1)

Cas (ii): el potencial $u = \mathrm{Re}\, w$ és multivaluat: atravesar la línia de f.e.m. dóna salt de $2\pi B$ en el potencial.

Fluxes sense singularitats

Si S és una superfície de gènere $g > 0$ apareix un nou fenòmen: el flux d'una f.e.m. en una corba tancada que no desconnecta S.



Això dóna, a diferència de l'esfera de Riemann:
Fluxes estacionaris en S sense singularitats logarítmiques ni pols
= funcions holomorfes multivaluades en S
= diferencials holomorfes en S

Diferencials holomorfes

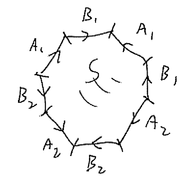
N'acabem d'obtenir demostració experimental! (comunicada per Riemann a Klein): si tenim un fluid amb càrrega elèctrica recobrint la superfície S, i posem la nostra f.e.m. en una corba tancada que no la desconnecti, el flux estacionari que es genera és harmònic, part real d'una funció holomorfa multivaluada $w(z)$, i $\omega = dw(z)$ és una diferencial holomorfa en S.

Per a comptar-les, combinem l'electricitat amb la topologia:

- Els fluxes de corrent de posar f.e.m. en corbes diferents es superposen.
- Deformar la corba tancada on apliquem la f.e.m. no varia el flux (tma. de Stokes).
- La f.e.m. en una corba tancada $\gamma = \partial\Gamma$ que desconnecta S no genera flux (circuit obert!).

Diferencials holomorfes

- Els cicles superposició de corbes tancades en S mòdul vores de regions Γ són el que anomenem des de Poincaré el primer grup d'homologia de S. Riemann comprova que es $\mathbb{Z}^{2g}$, generat pels camins $A_1, \ldots, B_g$ que formen la vora del polígon fonamental de S.



- Podem superposar f.e.m. amb qualsevol voltatge $V \in \mathbb{R}$ en cadascun d'aquests $2g$ camins,
- i dues f.e.m. que produeixin la mateixa diferència de potencial en cada camí de la llista $A_1, \ldots, B_g$ dónen el mateix flux de corrent (la diferència de f.e.m.s genera una funció holomorfa univaluada en S, que ha de ser constant).

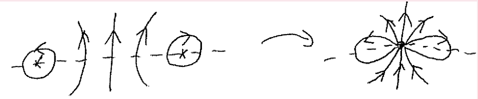
Diferencials holomorfes

Hem obtingut:

Teorema: (Riemann)
Les diferencials holomorfes en S formen un espai vectorial complex de dimensió el gènere de S.

A partir d'aquest teorema:

Problema de Riemann: comptar la dimensió de $\mathcal{L}(P_1 + \cdots + P_m) = \{$ funcions meromorfes f amb m pols simples en punts prefixats $P_1, \ldots, P_m \in S\}$.
Obtenim funció meromorfa h_j amb un únic pol simple en cada P_j, com a límit de fluxes de les f.e.m.s de dues singularitats logarítmiques en $P_j, P_t \to P_j$. Però h_j és multivaluada, no es té control dels salts de potencial al creuar camins A_i, B_j.



La desigualtat de Riemann

Com els zeros i pols determinen la funció, f ha de ser de la forma

$$f = a_1 h_1 + \dots a_m h_m + \int (c_1\omega_1 + \cdots + c_g\omega_g) + C$$

Que f sigui univaluada és imposar que el salt de potencial del flux estacionari al atravessar cadascun dels camins $A_1, \dots, B_g$ sigui 0. Això són $2g$ equacions lineals, d'on deduïm la

Desigualtat de Riemann: $\dim \mathcal{L}(P_1 + \cdots + P_m) \geq m - g + 1$

Riemann comprova la igualtat estricta quan $m > 2g - 2$. D'aquí surt l'algebraicitat de les superfícies de Riemann compactes. El seu col.laborador Gustav Roch va aclarir els casos especials en que el rang del sistema no és màxim, culminant el que es coneix com teorema de Riemann-Roch.

La classificació holomorfa de les superfícies

Partint del cas estricte de la seva desigualtat, i deixant moure els pols, Riemann demostra que per $m > 2g - 2$

$$\dim_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{array}{c} \text{funcions meromorfes en } S \\ \text{amb pols simples en } m \text{ punts} \end{array} \right\} = 2m - g + 1$$

Si els automorfismes biholomorfs (conformes) de S tenen dimensió $\dim \operatorname{Aut} S = \rho$, hom obté

$$\dim_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{array}{c} \text{recobriments de grau } m \\ \text{de } S \text{ en } \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \end{array} \right\} = 2m - g + 1 - \rho$$

(identifiquem recobriments que donen mateix grau i punts de ramificació a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$).
Els recobriments d'entre aquests amb tots els punts de ramificació simples formen un obert dens. Una aplicació de la topologia de superfícies (un compte de cares, arestes i vèrtexs per Riemann i contemporanis) dóna la

La classificació holomorfa de les superfícies

Fòrmula de Riemann-Hurwitz: El nombre de punts de ramificació d'un recobriment de S a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grau m simplement ramificat és $r = 2m - \chi(S) = 2m - 2g + 2$.

Així Riemann veu que per m prou gran:

- tota superfície de gènere g és un recobriment de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grau m, ramificat en $r = 2m - 2g + 2$ punts (desigualtat de Riemann).
- la tria del grau i punts de ramificació en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ permet només un nombre finit de possibles superfícies recubridores.
- Els recobriments que corresponen a cada S fixada tenen dimensió $2m - g + 1 - \rho$.

Riemann fa la resta i enuncia:
L'espai de móduli $\mathcal{M}_g = \{$ superfícies de Riemann tancades de gènere g $\}$ /equivalència conforme té dimensió $3g - 3 + \rho$.

Gràcies al teorema de Riemann-Roch i a treballs d'Abel, Cauchy, ... ja es sabia que $\rho = 3$ quan $g = 0$ (perquè $S \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ i Aut $S = PGL(2, \mathbb{C})$), i $\rho = 1$ quan $g = 1$ (S=corba el.líptica). Riemann conjectura, i Schwarz demostra poc després, que $\rho = 0$ per $g > 1$.

Per tant l'espai $\mathcal{M}_g$ d'estructures holomorfes/conformes en la superfície tancada de gènere $g > 1$ és de dimensió $3g - 3$ (i gairebé una varietat complexa, Riemann ja li endevina l'espai tangent...).

L'espai de mòduls de corbes

Riemann introdueix l'espai de mòduls $\mathcal{M}_g$, calcula la seva dimensió i descriu l'espai tangent en els punts llisos.
Durant uns 70 anys és una varietat presentada de la manera més abstracta e inaccessible. Però les corbes algebraiques/ superfícies de Riemann són omnipresents a la Geometria Algebraica ...

- Teichmüller (1939), Ahlfors, Bers (anys 50-60): estructura analítica de $\mathcal{M}_g$ (és un orbifold)
- Mumford (anys 60): $\mathcal{M}_g$ és una varietat algebraica
- Mumford, Morita, Witten, Kontsevitch, Madsen-Weiss (2004): estudien la topologia dels espais $\mathcal{M}_g$

De les superfícies de Riemann als invariants de Gromov-Witten

Gromov (1985): les superfícies de Riemann també són omnipresents en les varietats simplèctiques ($\Rightarrow$ en la Mecànica Hamiltoniana).

Donaldson (1996): Tota 4-varietat simplèctica tancada està foliada per superfícies de Riemann compactes (amb $\# < \infty$ singularitats)

Witten, Taubes (1996): la cohomologia quàntica/ invariants de Gromov-Witten de les varietats algebraiques i simplèctiques.

. . . i la cohomologia quàntica

Homologia singular de M: la intersecció de cicles $A_1, \dots, A_k$ és $A_1 \cap \cdots \cap A_k$.

Homologia quàntica de M: la intersecció de $A_1, \dots, A_k$ és
el conjunt de superfícies de Riemann compactes en M que
tallen a tots els cicles $A_1, \dots, A_k \subset M$
i aquest conjunt per cada gènere g és un cicle, ben definit a
$H_*(\bar{\mathcal{M}}_g)$