

Resum

Aquest projecte presenta els models matemàtics que generalitzen al cas de pendent no constant els models existents de dos tipus bàsics de caminadors passius en un pendent constant: la *rimless wheel* i el *compass walker*.

En la memòria s'inclouen la modelització i l'estudi teòric dels models en pendent constant i posteriorment, ambdós models es generalitzen al cas de pendent no constant. En la generalització es descriuen les equacions que governen el moviment del sistema (equació diferencial per la fase de doble pèndol i equació algebraica per la col·lisió del peu) així com la condició de detecció de col·lisió del peu generalitzada.

Finalment, en l'estudi dels models es determinen les condicions sota les quals el sistema presenta un cicle límit estable i es completa amb els resultats de les simulacions numèriques de casos representatius de diferents tipologies de camí de baixada per il·lustrar l'existència i estabilitat dels cicles límits d'aquests exemples.

Índex

Resum	1
1 Introducció	5
1.1 Objectius	5
1.2 Abast	5
2 Estudi de la <i>rimless wheel</i> en un pendent constant	7
2.1 Modelització de la <i>rimless wheel</i> en un pendent constant	7
2.1.1 Descripció del model	7
2.1.2 Dinàmica de la fase de doble pèndol	8
2.1.3 Col·lisió del peu	9
2.2 Estabilitat de la <i>rimless wheel</i> en un pendent constant	10
3 Estudi de la <i>rimless wheel</i> en un pendent no constant	13
3.1 Modelització de la <i>rimless wheel</i> en un pendent no constant	13
3.1.1 Descripció del model	13
3.2 Estabilitat de la <i>rimless wheel</i> en un pendent no constant	14
3.2.1 Funcions convexes	16
3.2.2 Funcions còncaues	16
4 Exemples numèrics de la <i>rimless wheel</i>	17
4.1 Pendent constant	17
4.2 Recta a trams	17
4.2.1 Cas convex	18
4.2.2 Cas còncau	19
4.3 Exponencial negativa	19
4.4 Exponencial còncaua	21
5 Estudi del <i>compass walker</i> en un pendent constant	23
5.1 Modelització del <i>compass walker</i> en un pendent constant	23
5.1.1 Descripció del model	23
5.1.2 Dinàmica de la fase de doble pèndol	24
5.1.3 Col·lisió del peu	25
5.2 Estabilitat del <i>compass walker</i> en un pendent constant	29
5.2.1 Estabilitat del cicle límit	29
5.2.2 Aproximació del jacobià	30
6 Estudi del <i>compass walker</i> en un pendent no constant	33
6.1 Modelització del <i>compass walker</i> en un pendent no constant	33
6.1.1 Descripció del model	33
6.1.2 Dinàmica de la fase de doble pèndol	34
6.1.3 Col·lisió del peu	34
6.2 Estabilitat del <i>compass walker</i> en un pendent no constant	36
6.2.1 Estabilitat del cicle límit	36
6.2.2 Aproximació del jacobià	37

7	Exemples numèrics del <i>compass walker</i>	39
7.1	Conca d'atracció	39
7.2	Pendent constant	40
7.3	Recta a trams	41
7.3.1	Evolució de les bifurcacions	41
7.4	Exponencial negativa	43
8	Impacte ambiental i estudi econòmic	45
8.1	Impacte ambiental	45
8.2	Estudi econòmic	45
	Conclusions	47
	Treball pel futur	48
	Agraïments	49
A	Programes per a la <i>rimless wheel</i>	51
A.1	RW_irr	51
A.2	alfa	52
A.3	slope_irr	52
A.4	model	52
A.5	gfunc	52
B	Programes per al <i>compass walker</i>	55
B.1	CW_irr	55
B.2	collision_irr	56
B.3	slope_irr	56
B.4	walking_irr	56
B.5	step_irr	57
B.6	model	57
	Bibliografia	59

Capítol 1

Introducció

En el transcurs dels últims anys, els caminadors passius han estat objecte de nombrosos estudis per tal de conèixer a fons el model i les seves propietats.

L'origen dels caminadors passius (*passive dynamic walking*) es troba en el treball de Tad McGeer [6, 7] de finals de la dècada del 1980 on s'introdueix un tipus de robot caminador bíped que és capaç de baixar de manera estable un petit pendent sense cap actuator. Segons [8] l'estudi d'aquest tipus de robots està motivat principalment per l'eficiència energètica del sistema i també pel fet que els caminadors passius tenen un pas semblant al caminar natural dels humans.

Una de les aplicacions més importants del *passive dynamic walking* és en la implementació de caminadors propulsats per actuadors més eficients i amb un pas més natural.

1.1 Objectius

La intenció d'aquest projecte és estendre els models de *rimless wheel* i de *compass walker* en un pendent constant per a casos en què el pendent no sigui constant i estudiar-ne l'estabilitat. Per assolir-ho es marquen els següents objectius:

- Entendre els models proposats pels autors de la bibliografia per la *rimless wheel* i pel *compass walker* sobre un pendent constant.
- Modelitzar matemàticament la *rimless wheel* i el *compass walker* sobre un pendent no constant.
- Determinar les condicions sota les quals els sistemes presenten un cicle límit estable.
- Programar el simulador numèric del sistema i comprovar numèricament els resultats.
- Estudiar les condicions i paràmetres inicials admissibles.

1.2 Abast

El projecte tractarà tant la vessant teòrica com la vessant numèrica del problema dels dos models de caminador passiu en pendent no constant per tal de poder assolir els objectius plantejats.

Es farà un repàs d'ambdós models en un pendent constant com a punt de partida per trobar les equacions del model en el cas de pendent no constant. Un cop trobats els models per un pendent no constant s'estudiarà l'existència i estabilitat dels cicles límit del sistema. Es completarà l'estudi amb condicions analítiques per a l'estabilitat dels casos més simples i amb exemples numèrics d'alguns dels casos més representatius.

Capítol 2

Estudi de la *rimless wheel* en un pendent constant

2.1 Modelització de la *rimless wheel* en un pendent constant

2.1.1 Descripció del model

El model de caminador passiu més bàsic és el conegut com a *rimless wheel*. Aquest model, introduït per primer cop per McGeer a [6], consisteix en una roda amb radi però sense llanda que es mou en el pla vertical sobre un pendent. Encara que sembli molt allunyat de la marxa humana, aquest model presenta algunes de les seves característiques principals: la *fase de doble pèndol* i la *col·lisió del peu*. L'estudi es considera en dues dimensions, tot i que hi ha treballs en els quals s'estén al movent en tres dimensions.

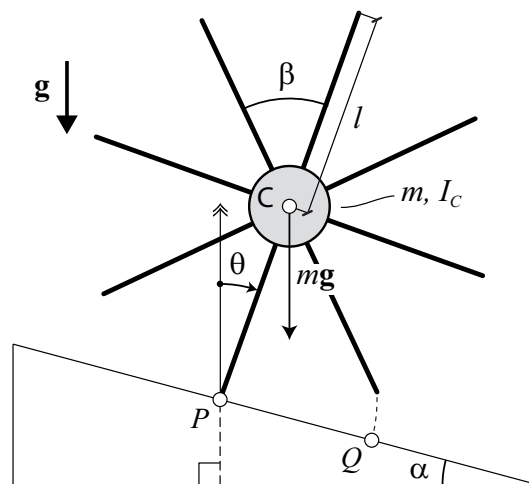


Figura 2.1: Esquema de la *rimless wheel*

El sistema estudiat és una roda de massa m , moment d'inèrcia al centre de massa I_C , sense llanda i amb n radis equiespaiats de massa uniforme i longitud l (que actuen com a cames), desplaçant-se per un pendent constant d'angle α . Es caracteritza la posició del sistema amb l'angle $\theta(t)$, i també es defineix $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt}$ ambdós considerats positius en sentit horari. Els símbols utilitzats es recullen a la taula 2.1.

Per estudiar el sistema se suposarà que es verifiquen les següents hipòtesis (assumides per la majoria d'autors):

1. Entre dues col·lisions successives el peu de suport (representat pel punt P) actua com una junta articulada i no llisca. En aquesta fase, coneguda com *fase de doble pèndol*, el moviment de la roda és el d'un pèndol invertit.

Símbol	Definició
C	Centre de massa de la roda
P	Punt de contacte actual
Q	Punt de contacte en el pas següent
l	Longitud del radi
α	Angle del pendent ($\alpha < \pi/2$ rad)
β	Angle entre radis ($\beta = 2\pi/n$)
n	Nombre de radis ($n > 3$)
$\theta(t)$	Angle d'orientació de la roda (considerant positiu el sentit horari)
m	Massa de la roda
I_C	Moment d'inèrcia al centre de massa C
g	Vector gravetat ($ g = 9.81\text{ms}^{-2}$)

Taula 2.1: Símbols emprats en la modelització de la *rimless wheel*

2. El canvi de suport (de P a Q) és *instantani*.
3. Les col·lisions amb el terra són *perfectament inelàstiques* i *impulsives*. Per tant, es conserva el moment angular respecte el punt fix de la col·lisió representat per Q (el coeficient de restitució de la col·lisió és $e = 0$).

2.1.2 Dinàmica de la fase de doble pèndol

L'equació del moviment per la *fase de doble pèndol* es pot obtenir a partir de l'*equació de Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (2.1)$$

on T és l'energia cinètica i U l'energia potencial del sistema:

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} (I_C + ml^2) \dot{\theta}^2 \quad (2.2)$$

$$U(\theta) = mgl \cos \theta \quad (2.3)$$

prenent a (2.3) l'origen de potencial a l'horitzontal pel punt P .

L'equació del moviment també es pot trobar amb l'equació $\dot{\mathbf{H}}_P = \mathbf{M}_P$ on $\dot{\mathbf{H}}_P$ és la derivada temporal del moment angular a P i \mathbf{M}_P és el moment total actuant sobre el cos a P . Amb el dos mètodes s'obté:

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl}{I_C + ml^2} \sin \theta \quad (2.4)$$

Si la condició inicial θ_0 és negativa, caldrà que la velocitat inicial $\dot{\theta}_0$ superi un cert llindar ω_{min} per a què el sistema evolucioni cap endavant i no retorni a l'estat inicial. Es considera el cas particular $\theta_0 = \alpha - \frac{\beta}{2}$ ja que excepte, potser, el primer cicle la resta parteixen d'aquest estat inicial. L'esmentada ω_{min} es troba imposant que l'energia cinètica permeti al sistema assolir l'estat d'equilibri inestable ($\theta = 0$ i $\dot{\theta} = 0$) en temps infinit. Fent el balanç energètic entre els estats de les figures 2.2a i 2.2b s'obté:

$$\Delta E = \underbrace{-\frac{1}{2} (I_C + ml^2) \omega_{min}^2}_{\Delta T} + \underbrace{mgl (1 - \cos \theta_0)}_{\Delta U} = 0 \quad (2.5)$$

on ΔE , ΔT i ΔU són les variacions d'energia mecànica, cinètica i potencial respectivament. Es té $\Delta E = 0$ ja que no hi ha forces ni parells no conservatius que facin treball (i.e. el sistema és conservatiu entre impactes). Per tant, aïllant ω_{min} de (2.5) es troba:

$$\omega_{min}(\theta_0) = \sqrt{\frac{2mgl}{I_C + ml^2} (1 - \cos \theta_0)} \quad (2.6)$$

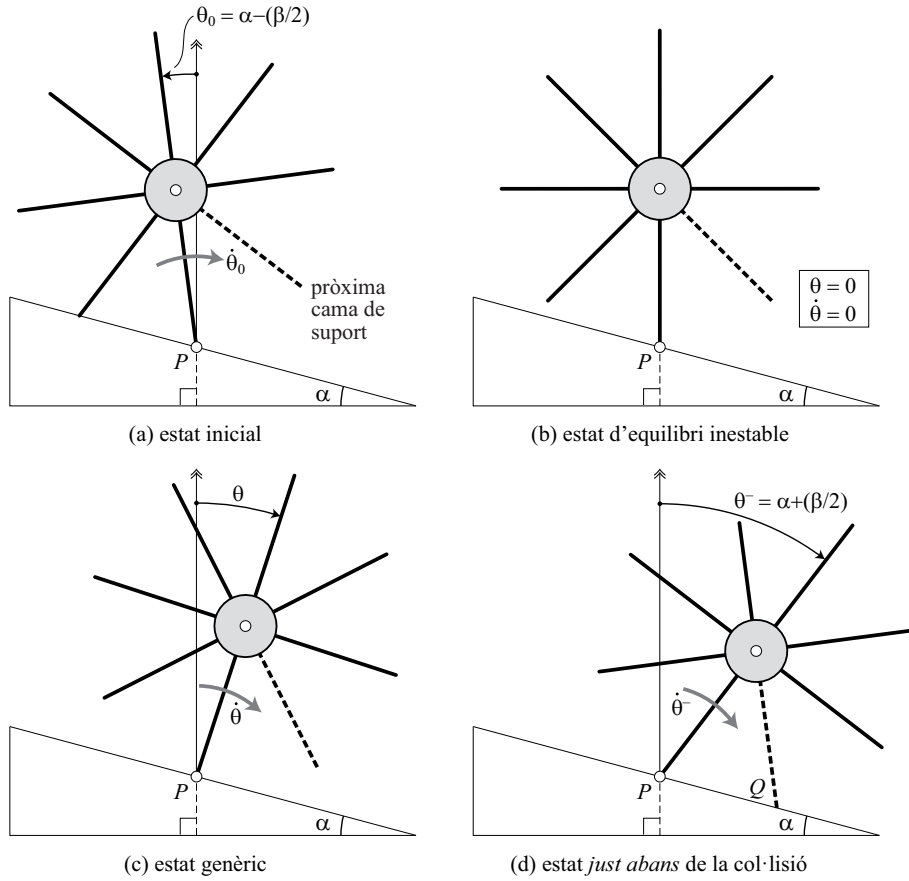


Figura 2.2: Estats considerats en els balanços d'energia

sempre que $\theta_0 \leq 0$, en cas contrari per a qualsevol $\dot{\theta}_0$ positiva el sistema evolucionarà cap endavant. Cal notar que si $\alpha > \frac{\beta}{2}$ llavors $\omega_{min} = 0$ ja que llavors sempre es té $\theta > 0$.

Si $\dot{\theta}_0 > \omega_{min}$, es pot trobar $\dot{\theta}(\theta)$ a partir del balanç d'energia mecànica entre els estats de les figures 2.2a i 2.2c:

$$\Delta E = \underbrace{\frac{1}{2} (I_C + ml^2) (\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2)}_{\Delta T} + \underbrace{mgl (\cos \theta - \cos \theta_0)}_{\Delta U} = 0 \quad (2.7)$$

d'on s'obté:

$$\dot{\theta}(\theta) = \sqrt{\dot{\theta}_0^2 + \frac{2mgl}{I_C + ml^2} (\cos \theta_0 - \cos \theta)} \quad (2.8)$$

2.1.3 Col·lisió del peu

En les hipòtesis sobre el model s'ha assumit que la col·lisió del peu és *instantània* i *perfectament inelàstica*. Aquesta última suposició significa que el peu queda adherit al terra just després de la col·lisió, esdevenint el nou punt de suport.

En el moment de la col·lisió, la geometria del sistema no varia i es negligeixen les forces no impulsives (en aquest cas només el pes). Com que l'única força impulsiva és la força de contacte a Q , el moment impulsiu a Q és nul ($\hat{M}_Q = 0$) i per tant el moment angular es preserva durant la col·lisió:

$$\Delta \mathbf{H}_Q = \mathbf{H}_Q^+ - \mathbf{H}_Q^- = \hat{M}_Q = 0 \quad (2.9)$$

on \mathbf{H}_Q^- i \mathbf{H}_Q^+ són els moments angulars just abans i just després de la col·lisió respectivament. Per a

calcular-los cal tenir en compte la cinemàtica del sistema just abans i just després de la col·lisió. A la figura 2.3 es mostren aquestes velocitats.

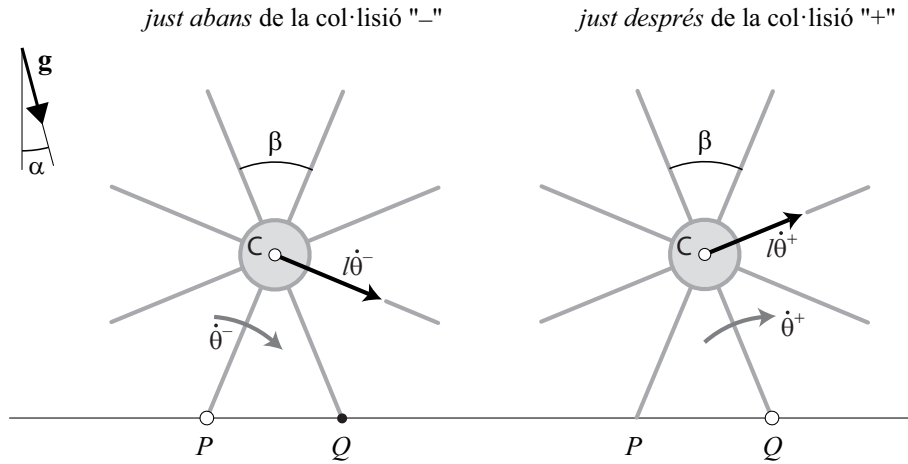


Figura 2.3: Cinemàtica del model *just abans* i *just després* de la col·lisió

$$\mathbf{H}_Q^- = \underbrace{\mathbf{I}_C \cdot \omega^-}_{\mathbf{H}_C^-} + \mathbf{r}_{Q/C} \times m \mathbf{v}_{C/Q}^- = \dot{\theta}^- (I_C + ml^2 \cos \beta) \mathbf{k} \quad (2.10)$$

on \mathbf{I}_C és la matriu d'inèrcia al punt C (essent I_C el moment d'inèrcia en el mateix punt), ω^- és la velocitat angular de la roda just abans de l'impacte, $\mathbf{r}_{Q/C}$ és el vector posició del punt Q al punt C , $\mathbf{v}_{C/Q}^-$ és la velocitat de C relativa al punt Q i \mathbf{k} és el vector perpendicular al pla del paper i orientat cap enfora. Cal remarcar que com que el punt Q no pertany a la roda cal afegir al terme de moment angular al centre de massa \mathbf{H}_C^- un terme de moment angular degut a la velocitat translacional del centre de massa respecte el punt de referència Q .

Per \mathbf{H}_Q^+ , com que Q ara sí que pertany a la roda, es calcula directament multiplicant la matriu d'inèrcia a Q (\mathbf{I}_Q) per la velocitat angular després de l'impacte:

$$\mathbf{H}_Q^+ = \mathbf{I}_Q \cdot \omega^+ = -\dot{\theta}^+ (I_C + ml^2) \mathbf{k} \quad (2.11)$$

on \mathbf{I}_Q es pot calcular directament a partir de \mathbf{I}_C i aplicant el *teorema de Steiner* ja que ambdós punts pertanyen al mateix cos. Ajuntant les equacions (2.9), (2.10) i (2.11) es relacionen les dues velocitats angulars:

$$\frac{\dot{\theta}^+}{\dot{\theta}^-} = \frac{ml^2 \cos \beta + I_C}{ml^2 + I_C} = \mu < 1 \quad (2.12)$$

on el coeficient μ representa l'energia perduda durant l'impacte i per tant sempre és menor que 1, excepte quan el nombre de radis $n \rightarrow \infty$ ($\beta = 0$) que llavors es té $\mu = 1$. Per tant, en el moment de la col·lisió la velocitat angular canvia instantàniament com $\dot{\theta}^+ = \mu \dot{\theta}^-$ i l'estat inicial pel següent cicle és ($\theta^+ = \theta_0, \dot{\theta}^+$).

2.2 Estabilitat de la *rimless wheel* en un pendent constant

A partir del que s'ha deduït en l'apartat anterior es pot escriure l'equació del flux del sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(\theta) = \sqrt{\left(\dot{\theta}^+\right)^2 + \frac{2mgl}{I_C + ml^2} (\cos \theta^+ - \cos \theta)} & \text{si } \alpha - \frac{\beta}{2} \leq \theta < \alpha + \frac{\beta}{2} \\ \left(\theta^- = \alpha + \frac{\beta}{2}, \dot{\theta}^-\right) \mapsto \left(\theta^+ = \alpha - \frac{\beta}{2}, \dot{\theta}^+ = \mu \dot{\theta}^-\right) & \text{si } \theta = \alpha + \frac{\beta}{2} \end{cases} \quad (2.13)$$

que quan $\alpha - \frac{\beta}{2} \leq \theta < \alpha + \frac{\beta}{2}$ aplica la primera equació i que quan $\theta = \theta^- = \alpha + \frac{\beta}{2}$ envia el punt $(\alpha + \frac{\beta}{2}, \dot{\theta}^-)$ al punt $(\alpha - \frac{\beta}{2}, \mu \dot{\theta}^-)$.

En el cas $\alpha < \frac{\beta}{2}$ i velocitat inicial insuficient ($\dot{\theta}_0 < \omega_{min}$) el sistema no assoleix l'angle $\theta = 0$ i retorna a la posició inicial amb velocitat $-\dot{\theta}_0$. Per tant, després de l'impacte el sistema evoluciona amb velocitat $\dot{\theta}^+ = -\mu\dot{\theta}_0$ i així successivament fins que s'atura.

En un sistema dinàmic com la *rimless wheel* l'estabilitat no es pot tractar en el sentit de Lyapunov (al voltant d'un punt d'equilibri) sinó que s'ha d'estudiar l'estabilitat orbital.

Definició (Estabilitat orbital). *Sigui un sistema $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ on $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ és contínua i $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Sigui $\varphi(t)$ una òrbita del sistema definida per $t \geq 0$ i $\psi(t)$ una solució del sistema. Llavors:*

1. *Es diu que $\varphi(t)$ és orbitalment estable si per tot $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que si $\psi(t)$ verifica $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta$ llavors $\psi(t)$ està definida per tot $t \geq 0$ i $|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \forall t \geq 0$.*
2. *Es diu que $\varphi(t)$ és orbitalment inestable si no és estable.*
3. *Es diu que $\varphi(t)$ és orbitalment asimptòticament estable si existeix un $\hat{\delta}$ tal que si $\psi(t)$ verifica $|\psi(0) - \varphi(0)| < \hat{\delta}$ llavors $\psi(t)$ està definida per tot $t \geq 0$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0$.*

Un mètode per estudiar l'estabilitat orbital d'un cicle límit és mitjançant l'estabilitat del punt fix de l'aplicació de Poincaré associada.

Definició (Aplicació de Poincaré). *Sigui $\varphi(t)$ una òrbita periòdica d'un sistema dinàmic $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ que passa pel punt q i sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una varietat $(n-1)$ -dimensional tal que $\mathbf{f}(q) \notin T_q S$. Si existeix un subconjunt $\Sigma \subseteq S$ tal que seguint l'evolució de l'òrbita cada punt de Σ retorna a S llavors Σ s'anomena secció de Poincaré. En aquest cas, es pot definir $\mathbf{p} : \Sigma \rightarrow S$ com l'aplicació que envia un punt de Σ al punt del primer retorn a S i \mathbf{p} s'anomena aplicació de Poincaré.*

En el cas de la *rimless wheel* la secció de Poincaré es pot determinar a partir dels punts de discontinuïtat a les col·lisions:

$$\Sigma = \{(\theta, \dot{\theta}) \mid \theta = \alpha - \frac{\beta}{2}, \dot{\theta} \geq 0 \text{ i } \dot{\theta} \neq \omega_{min}\} \quad (2.14)$$

on ω_{min} és la velocitat angular just després de la col·lisió que fa que el sistema assoleixi la posició vertical $\theta = 0$ en temps infinit:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{2mgl}{I_C + ml^2} \left(1 - \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\right)} \quad (2.15)$$

tenint $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$. S'exclou el valor ω_{min} de la secció de Poincaré ja que per aquest valor ja no es produeixen més col·lisions perquè la roda assoleix la posició vertical en temps infinit.

Seguint la metodologia de [2], s'aplica un canvi de variable a la velocitat angular just després de la col·lisió $\dot{\theta}^+$ per a poder simplificar l'expressió de l'aplicació de Poincaré:

$$z(\dot{\theta}) = \left(\dot{\theta}^+\right)^2 \text{sign}(\dot{\theta}^+) \quad (2.16)$$

per tant, el que es busca és l'aplicació $p \circ z : \Sigma \rightarrow \Sigma$:

$$z(\dot{\theta})_{i+1} = p\left(z(\dot{\theta})_i\right) \quad (2.17)$$

on el subíndex identifica la col·lisió. L'aplicació p es defineix de diferent manera segons el pendent. Per pendents d'angle $\alpha > \frac{\beta}{2}$ l'aplicació és contínua en tot el domini perquè just després de l'impacte el centre de gravetat es troba a la dreta de la vertical i per tant, per qualsevol velocitat inicial s'arriba la següent col·lisió. La funció $p(z)$ es troba a partir de la conservació d'energia mecànica entre l'instant posterior a la i -èsima col·lisió i l'instant anterior a la $(i+1)$ -èsima col·lisió:

$$p(z) = \mu^2 \left(z + \frac{4mgl}{I_C + ml^2} \sin \alpha \sin \frac{\beta}{2} \right) \quad (2.18)$$

Per pendents menors (i.e. $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$) $p(z)$ és contínua a trossos. Per $z < z_{min} = z(\omega_{min})$ la roda és incapaç d'assolir la posició vertical i la velocitat després de la primera col·lisió ve donada per:

$$p(z) = -\mu^2 z \quad (2.19)$$

Si $z = z_{min}$ l'aplicació no està definida i si $z > z_{min}$ el sistema té suficient energia per arribar a la següent col·lisió i se segueix l'equació (2.18). Resumint, l'expressió global per p quan $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$ és:

$$\begin{cases} p(z) = -\mu^2 z & \text{si } z < z_{min} \\ p(z) = \mu^2 \left(z + \frac{4mgl}{I_C + ml^2} \sin \alpha \sin \frac{\beta}{2} \right) & \text{si } z > z_{min} \end{cases} \quad (2.20)$$

A continuació cal trobar els punts fixos z^* (i.e. punts que satisfan $p(z^*) = z^*$). El significat d'aquests punts és que per una velocitat inicial $\dot{\theta}_0 = \sqrt{z^*}$ a la següent col·lisió la velocitat és la mateixa i es diu que la trajectòria forma un cicle límit, és a dir, la roda assoleix un moviment periòdic.

El punt fix z^* existeix sempre ja que l'expressió de $p(z)$, sigui quin sigui el pendent, té la forma $az + b$ on $0 \leq a < 1$ i $b > 0$ de manera que sempre interseca la bisectriu en $z > 0$.

En el cicle límit, l'energia cinètica perduda a la col·lisió ΔT_{col} ha de ser igual a la disminució d'energia potencial en una passa ΔU_{gait} . Per tant, a partir d'aquest balanç es pot trobar la velocitat angular associada al punt fix $\omega^* = \sqrt{z^*}$:

$$\underbrace{\frac{1}{2} (I_C + ml^2) \left(\left(\frac{\omega^*}{\mu} \right)^2 - (\omega^*)^2 \right)}_{\Delta T_{col}} = \underbrace{2mgl \sin \alpha \sin \frac{\beta}{2}}_{\Delta U_{gait}} \quad (2.21)$$

d'on s'obté:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{4mgl \sin \alpha \sin \frac{\beta}{2}}{I_C + ml^2} \left(\frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \right)} \quad (2.22)$$

Per estudiar l'estabilitat del punt fix (i per tant del cicle límit) es calcula la derivada de l'*aplicació de Poincaré* al punt z^* . Aquest serà asimptòticament estable si la derivada és menor que 1 en valor absolut (estable si és igual a 1):

$$\frac{dp(z)}{dz} = \pm \mu^2 \quad (2.23)$$

i com que $0 \leq \mu < 1$ la derivada en valor absolut sempre serà menor que 1 de manera que els cicles límits associats al sistema sempre seran estables i és per aquest motiu que el sistema sempre tendeix a aquests cicles.

Per pendents $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$ la condició d'existència del punt fix és que la velocitat angular del cicle límit ω^* sigui més gran que la velocitat angular mínima per assolir la posició vertical en temps infinit ω_{min} :

$$g(\alpha, \beta, \mu) = 1 - \cos \alpha \cos \frac{\beta}{2} - \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2} \sin \alpha \sin \frac{\beta}{2} < 0 \quad (2.24)$$

de la inequació anterior es dedueix que cal que $\alpha > \alpha_c$ on α_c és la solució de $g(\alpha; \beta, \mu) = 0$ per uns paràmetres β i μ donats. Resumint, les condicions d'existència del cicle límit són les següents:

- Per $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$ el punt fix z^* no existeix. En aquest cas independentment de la velocitat inicial la roda s'acabarà aturant.
- Per $\alpha_c < \alpha \leq \frac{\beta}{2}$ el punt fix z^* existeix. En aquest cas, si $z_0 > z_{min}$ la roda evolucionarà cap al cicle límit. En el cas límit $z_0 = z_{min}$ la roda assoleix l'estat d'equilibri inestable ($\theta = 0, \dot{\theta} = 0$) en temps infinit.
- Per $\alpha > \frac{\beta}{2}$ el punt fix z^* existeix. En aquest cas, independentment de la velocitat inicial, la roda evolucionarà cap al cicle límit.

Capítol 3

Estudi de la *rimless wheel* en un pendent no constant

3.1 Modelització de la *rimless wheel* en un pendent no constant

Després d'estudiar la *rimless wheel* en un pendent constant és normal preguntar-se quines variacions es produeixen quan el pendent deixa de ser constant. En aquest capítol es veurà com es generalitza el model quan el pendent no és constant i quins efectes té la variació de pendent sobre l'evolució del sistema.

3.1.1 Descripció del model

En el cas de la *rimless wheel* en un pendent no constant, el model és el mateix que en el cas d'un pendent constant (subsecció 2.1.1) excepte que l'angle del pendent α ja no és una constant sinó que depèn de la posició del caminador. La geometria del camí de baixada en aquest cas ve donada per una funció $s(x)$ que parametriza el camí en funció de la coordenada horitzontal x . Aquesta funció $s(x)$ és, per hipòtesi, sempre decreixent.

Per a més comoditat, es considera que la coordenada horitzontal del punt de suport P és sempre en $x = 0$ de manera que en el desenvolupament teòric no cal afegir cap variable que registri l'avançament del caminador, sinó que simplement cal traslladar la funció $s(x)$ després de cada col·lisió de manera que per a cada cicle es té una funció $s_i(x)$. En la programació per a la simulació numèrica, però, s'ha afegit una variable al vector d'estats que registra la coordenada horitzontal del peu de recolzament.

En comptes de definir l'angle del pendent $\alpha(x)$ de la manera que seria natural:

$$\alpha(x) = -\arctan\left(\left.\frac{ds(\tilde{x})}{d\tilde{x}}\right|_{\tilde{x}=x}\right) \quad (3.1)$$

serà més útil definir l'angle $\hat{\alpha}(x)$ de la següent manera:

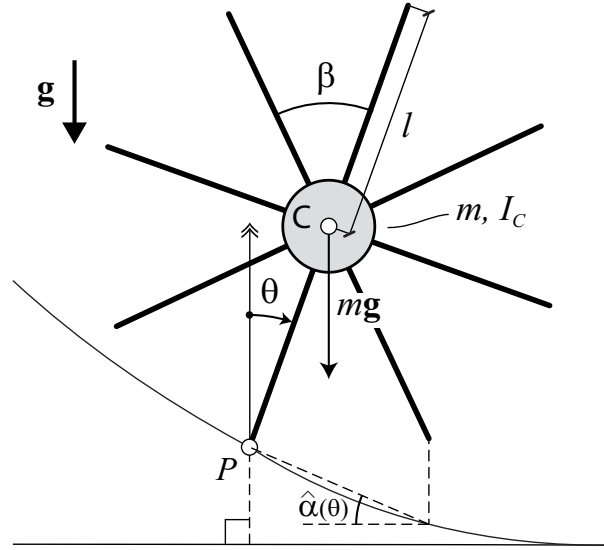
$$\hat{\alpha}(x) = -\arctan\left(\frac{s(x) - s(0)}{x}\right) \quad (3.2)$$

Nota. Per a simplificar la notació també es denotarà $\hat{\alpha}(\theta) = \hat{\alpha}(l(\sin(\beta - \theta) + \sin\theta))$ que és el valor de $\hat{\alpha}$ en l'estat θ segons es defineix a la figura 3.1.

Pel que fa a la *fase de doble pèndol*, l'equació de la trajectòria no varia i continua essent:

$$\dot{\theta}(\theta) = \sqrt{\left(\dot{\theta}^+\right)^2 + \frac{2mgl}{I_C + ml^2}(\cos\theta^+ - \cos\theta)} \quad (3.3)$$

però ara el rang d'acció és variable. En aquest cas, s'utilitza la nova variable $\hat{\alpha}(\theta)$ i per tant ara l'equació anterior és vàlida per $\hat{\alpha}(\theta) - \frac{\beta}{2} < \theta < \hat{\alpha}(\theta) + \frac{\beta}{2}$.

Figura 3.1: Esquema de la *rimless wheel* en un pendent no constant

Queda per veure què passa en la col·lisió del peu. Pel que fa la velocitat angular no canvia res perquè en la deducció de l'equació de la col·lisió per un pendent constant la variable α no intervé (μ únicament depèn de la roda). El que sí que canvia és l'angle α ja que es té $\hat{\alpha}(\theta)$. Per tant, quan es produeix la col·lisió ($\theta = \hat{\alpha}(\theta) + \frac{\beta}{2}$) es té:

$$\left(\theta^- = \hat{\alpha}(\theta^-) + \frac{\beta}{2}, \dot{\theta}^-\right) \mapsto \left(\theta^+ = \hat{\alpha}(\theta^+) - \frac{\beta}{2}, \dot{\theta}^+ = \mu \dot{\theta}^-\right) \quad (3.4)$$

Ajuntant les dues equacions es parametitzen les trajectòries:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(\theta) = \sqrt{\left(\dot{\theta}^+\right)^2 + \frac{2mgl}{I_C + ml^2} (\cos \theta^+ - \cos \theta)} & \text{si } \hat{\alpha}(\theta) - \frac{\beta}{2} \leq \theta < \hat{\alpha}(\theta) + \frac{\beta}{2} \\ \left(\theta^- = \hat{\alpha}(\theta) + \frac{\beta}{2}, \dot{\theta}^-\right) \mapsto \left(\theta^+ = \hat{\alpha}(\theta) - \frac{\beta}{2}, \dot{\theta}^+ = \mu \dot{\theta}^-\right) & \text{si } \theta = \hat{\alpha}(\theta) + \frac{\beta}{2} \end{cases} \quad (3.5)$$

De la mateixa manera, queda definida la velocitat mínima per a què el sistema evolucioni cap endavant:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{2mgl}{I_C + ml^2} (1 - \cos \theta_0)} \quad (3.6)$$

però cal tenir en compte que ara el cas pitjor és $\theta_0 = \hat{\alpha}(\theta) - \frac{\beta}{2}$ i per tant depèn de la posició de la roda sobre el pendent.

3.2 Estabilitat de la *rimless wheel* en un pendent no constant

Com s'ha vist per la *rimless wheel* en un pendent constant, l'eina principal per estudiar l'estabilitat del sistema és l'*aplicació de Poincaré*. Per tant, cal definir aquest concepte per la *rimless wheel* en un pendent no constant. La *secció de Poincaré* es defineix de manera anàloga que pel cas de pendent constant, si bé ara s'utilitza $\hat{\alpha}(\theta)$ en comptes de α :

$$\Sigma = \{(\theta, \dot{\theta}) | \theta = \hat{\alpha}(\theta) - \frac{\beta}{2}, \dot{\theta} \geq 0 \text{ i } \dot{\theta} \neq \omega_{min}\} \quad (3.7)$$

amb ω_{min} definit com:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{2mgl}{I_C + ml^2} \left(1 - \cos \left(\hat{\alpha}(\theta) - \frac{\beta}{2}\right)\right)} \quad (3.8)$$

A diferència del cas de pendent constant, però, en el cas de pendent no constant l'*aplicació de Poincaré* ja no depèn només de la variable z (i.e. θ) sinó que també depèn de θ en la mesura que $\hat{\alpha}(\theta)$ també ho fa. Per tant, per $\hat{\alpha}(\theta) > \frac{\beta}{2}$:

$$p(\theta, z) = \mu^2 \left(z + \frac{4mgl}{I_C + ml^2} \sin \hat{\alpha}(\theta) \sin \frac{\beta}{2} \right) \quad (3.9)$$

I per $\hat{\alpha}(\theta) \leq \frac{\beta}{2}$:

$$\begin{cases} p(\theta, z) = -\mu^2 z & \text{si } z < z_{min} \\ p(\theta, z) = \mu^2 \left(z + \frac{4mgl}{I_C + ml^2} \sin \hat{\alpha}(\theta) \sin \frac{\beta}{2} \right) & \text{si } z > z_{min} \end{cases} \quad (3.10)$$

Qualsevol camí de baixada és equivalent a la poligonal formada pels segments que uneixen els diferents punts de contacte de la *rimless wheel* amb el camí de baixada. Per tant, a l'hora de definir l'*aplicació de Poincaré* es pot desacoblar la variable θ calculant primer el següent punt de col·lisió sobre el camí de baixada θ^- que correspon a la menor solució positiva de l'equació:

$$\theta = \hat{\alpha}(\theta) + \frac{\beta}{2} \quad (3.11)$$

Per a cada cicle es pot determinar primer el valor de θ^- (i per tant $\hat{\alpha}(\theta^-)$) i llavors estudiar l'*aplicació de Poincaré* igual que pel cas constant. Com que $\hat{\alpha}(x)$ varia a cada cicle el cicle límit associat a cadascun dels pendents no té per què assolir-se. De totes maneres es pot definir el cicle límit del sistema com el cicle límit associat (si és que existeix) al pendent en l'infinit $\alpha_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \hat{\alpha}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\arctan(s'(x))$. Cal remarcar que si el pendent del límit no s'assoleix en temps finit el cicle límit tampoc tampoc s'assolirà en temps finit.

Si $\hat{\alpha}(\theta^-) > \frac{\beta}{2}$:

$$p(z) = \mu^2 \left(z + \frac{4mgl}{I_C + ml^2} \sin \hat{\alpha}(\theta^-) \sin \frac{\beta}{2} \right) \quad (3.12)$$

i si $\hat{\alpha}(\theta^-) \leq \frac{\beta}{2}$:

$$\begin{cases} p(z) = -\mu^2 z & \text{si } z < z_{min} \\ p(z) = \mu^2 \left(z + \frac{4mgl}{I_C + ml^2} \sin \hat{\alpha}(\theta^-) \sin \frac{\beta}{2} \right) & \text{si } z > z_{min} \end{cases} \quad (3.13)$$

amb $\hat{\alpha}(\theta^-)$ fixat Cal observar, doncs, que si bé el cas de pendent constant l'*aplicació de Poincaré* es restringia només a un dels dos casos anteriors, en el cas de pendent no constant es poden alternar ambdues aplicacions ja que $\hat{\alpha}(\theta)$ varia.

Igual que en el cas de pendent constant, per a una roda donada es busca la sol·lució de l'equació (2.24) α_c per a uns paràmetres β i μ fixats. Coneguts α_c i $\frac{\beta}{2}$, es divideix la imatge del camí de baixada $s(x)$ en tres conjunts en funció de $\alpha(x) = -\arctan(s'(x))$:

- $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_c\}$
- $\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha_c < \alpha(x) \leq \frac{\beta}{2}\}$
- $\Omega_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha(x) > \frac{\beta}{2}\}$

Mentre la roda es trobi sobre els punts de Ω_3 per qualsevol condició inicial el sistema evolucionarà cap endavant. Pels punts de Ω_2 caldrà verificar que en tots els cicles es compleix la condició $z > z_{min}$. Finalment, pels punts de Ω_1 la roda s'anirà frenant fins aturar-se, en cas que es mantingui sobre punts de Ω_1 .

Per a geometries molt simples és possible fer afirmacions analítiques sobre l'evolució del sistema, però en el moment en què es compliquen una mica és molt més pràctic simular numèricament el sistema per veure'n l'evolució.

Una de les opcions per aprofundir una mica en l'estud analític del sistema és dividir $s(x)$ en trams connexos còncaus o convexos i estudiar cada tram per separat.

3.2.1 Funcions convexes

Un cas elemental d'estudi és el cas en què $s(x)$ és una funció convexa. En aquest cas, els conjunts Ω_i són connexos i es distribueixen, d'esquerra a dreta, en l'ordre: Ω_3 , Ω_2 i Ω_1 .

- Pels punts de Ω_3 el sistema sempre evoluciona cap endavant i per tant no s'atura.
- Pels punts de Ω_2 cal estudiar amb deteniment el sistema. Cal que a cada cicle es verifiqui $z > z_{min}$ però, com que quan α decreix z_{min} augmenta, que per cada cicle es verifiqui aquesta condició depèn de la geometria del sistema en qüestió. Analíticament es podria estudiar amb un balanç energètic però és més ràpid fer una simulació numèrica per veure els resultats.
- Pels punts de Ω_1 el sistema sempre s'acaba aturant ja que aquest conjunt, en cas d'existir de no ser buit, és infinit ja que la funció $s(x)$ és convexa.

3.2.2 Funcions còncaves

El següent cas elemental d'estudi són les funcions còncaves. En aquest cas, els conjunts Ω_i també són connexos i es distribueixen, d'esquerra a dreta, en l'ordre: Ω_1 , Ω_2 i Ω_3 .

- Pels punts de Ω_1 cal estudiar el sistema amb detall per veure si el sistema és capaç de sortir de Ω_1 abans d'aturar-se.
- Pels punts del Ω_2 ara sí que n'hi ha prou veient que pel primer contacte es verifica que $z > z_{min}$ ja que com que α creix z_{min} decreix. Llavors si pel primer cicle a Ω_2 $z > z^*$ això serà vàlid per la resta de cicles i per tant $z > z^* > z_{min}$. Si per contra pel primer cicle $z_{min} < z < z^*$, llavors en el següent cicle z és més gran i per tant també verifica $z > z_{min}$ ja que z_{min} ha disminuït.
- Pels punts de Ω_3 el sistema sempre evoluciona cap endavant i per tant no s'atura.

Observació. A l'hora de definir els conjunts Ω_i s'ha pres $\alpha(x)$ en comptes de $\hat{\alpha}(x)$ per a més comoditat a l'hora de definir els conjunts Ω_i . Això és possible ja que dins una mateixa component connexa de qualsevol conjunt Ω_i es verifica que $\hat{\alpha}(x)$ està acotat pels valors màxim i mínim de $\alpha(x)$ a la component connexa.

Cal tenir en compte, però, que en el moment en què es canvia de conjunt això pot no ser cert ja que pot donar-se el cas que pel primer punt del nou conjunt es tingui un angle $\hat{\alpha}(x)$ que estigui fora dels límits que delimiten el conjunt en qüestió. Aquest fenomen també es pot donar en el cas que una component connexa sigui tan petita que la rimless wheel no es recolzi en cap punt d'ella. Encara que això passi, l'angle $\hat{\alpha}(x)$ pot estar fora dels límits definits per la component connexa en la qual s'està recolzant. De totes maneres, aquests casos només es tenen per un cicle i, per tant, es poden estudiar per separat.

Capítol 4

Exemples numèrics de la *rimless wheel*

Per calcular els exemples numèrics de la *rimless wheel* s'han pres els següents paràmetres: $m = 1$ kg, $l = 1$ m, $I_C = 0.1$ kgm² i $\beta = \frac{\pi}{4}$ rad (i.e. $n = 8$).

4.1 Pendent constant

El cas de partida és el cas de pendent constant α , és a dir, amb una geometria del camí de baixada parametritzada per:

$$s(x) = -kx \quad (4.1)$$

on k és una certa constant positiva. La relació entre k i α és:

$$k = \tan(\alpha) \quad (4.2)$$

Pels paràmetres del caminador mencionats a l'inici de la secció s'obtenen uns paràmetres $\beta = \frac{\pi}{4}$ i $\mu = 0.7337$. Per tant, es té un valor mínim de l'angle $\alpha_c = 0.0611$ rad i pels dos pendents considerats als exemples de la figura 4.1 es verifica que $\alpha > \alpha_c$ així doncs existeix el cicle límit pels dos casos.

A les figures 4.1a i 4.1b es té $\alpha = \frac{\pi}{20}$ rad $< \frac{\beta}{2}$ i, per tant, cal que la velocitat inicial sigui superior a un cert llindar que per aquest sistema i pendent concrets és de $\omega_{min} = 0.7020$ rads⁻¹. D'altra banda, per les figures 4.1c i 4.1d com que $\alpha = \frac{\pi}{7}$ rad $> \frac{\beta}{2}$ per qualsevol condició inicial positiva (i fins tot podria ser negativa) el sistema evoluciona cap al cicle límit. A la figura 4.1c es mostra la trajectòria per el cas $\dot{\theta}_0 = 0$ rads⁻¹ i s'observa que el sistema evoluciona cap al cicle límit. Pel cas de la figura 4.1d com que la velocitat inicial és més propera a la ω^* , ja que ara $\dot{\theta}_0 = 2$ rads⁻¹, el sistema arriba més ràpid al cicle límit. En tots aquests casos s'ha considerat que $\theta_0 = \alpha - \frac{\beta}{2}$ i s'ha treballat amb un error de 10^{-6} .

És important remarcar dues observacions sobre el cicle límit. La primera és que independentment de la condició inicial el cicle límit, si existeix, és únic per un pendent donat. I la segona és que com més gran és el pendent α el cicle límit cada cop té lloc a més velocitat, tal com es dedueix de la definició de ω^* .

4.2 Recta a trams

Un cop s'ha estudiat el cas de pendent constant i es vol generalitzar el model per pendents no constants, el cas més bàsic que es presenta és el pendent format per trossos de recta de diferents pendents. El cas més genèric presenta un conjunt numerable de trams de manera que es pot escriure com:



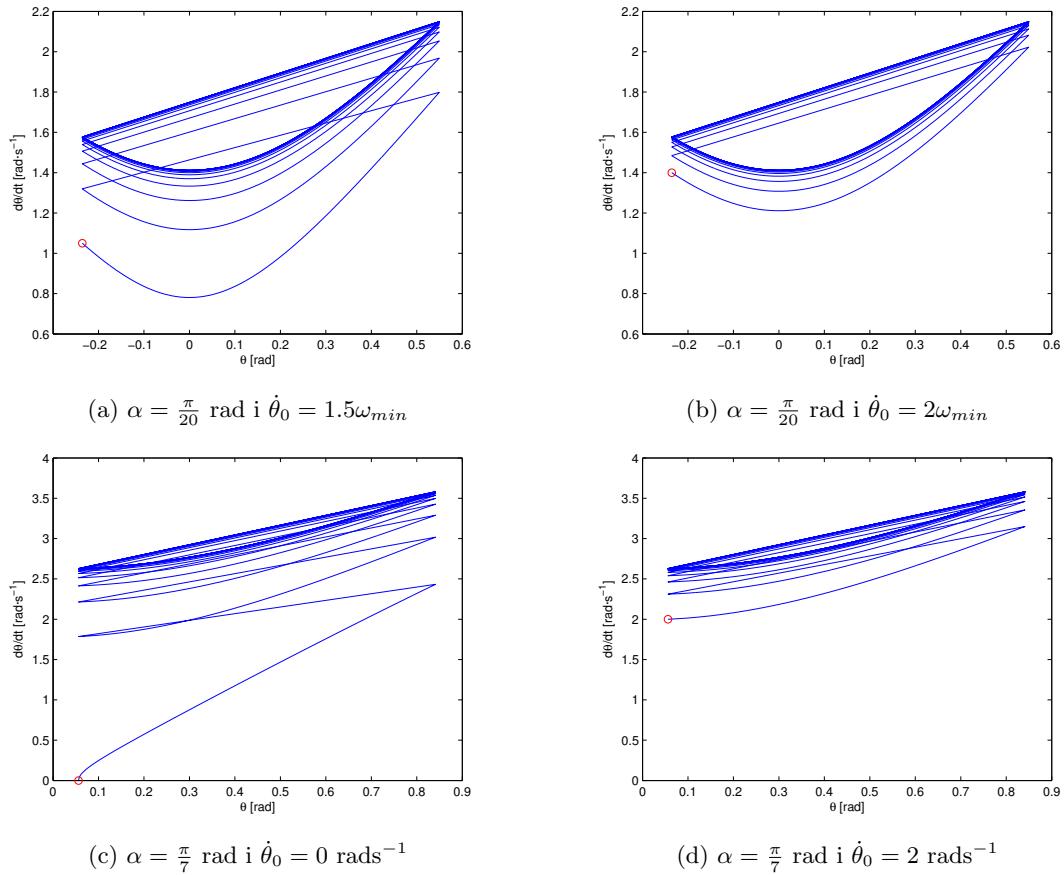


Figura 4.1: Trajectòries per a diferents casos de pendent constant

$$s(x) = \begin{cases} -k_1x + c_1 & \text{si } a_0 < x \leq a_1 \\ -k_2x + c_2 & \text{si } a_1 < x \leq a_2 \\ \vdots & \vdots \\ -k_ix + c_i & \text{si } a_{i-1} < x \leq a_i \end{cases} \quad (4.3)$$

amb els c_i tals que $s(x)$ sigui contínua.

Com a exemple s'ha pres la recta composta per dos trams, però tot el que s'explica és extensible al cas de n trams.

4.2.1 Cas convex

En el cas convex la successió de k_i és decreixent. Per facilitar la comparativa amb el cas de pendent constant, es prendran dos trams de pendent $\alpha_1 = \frac{\pi}{7}$ rad per $x < 0$ i de pendent $\alpha_2 = \frac{\pi}{20}$ rad per $x \geq 0$, és a dir, parametritzada per:

$$s(x) = \begin{cases} -\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)x & \text{si } x < 0 \\ -\tan\left(\frac{\pi}{20}\right)x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

A la figura 4.2 es mostra la trajectòria durant 50 cicles de la *rimless wheel* sobre la recta a trams convexa a partir de la condició inicial $\theta_0 = \alpha_1 - \frac{\beta}{2}$ (amb α del primer tram), $\dot{\theta}_0 = 0$ rads⁻¹ i $x = -10$ m. S'observa que el sistema convergeix primer al cicle límit associat a $\alpha_1 = \frac{\pi}{7}$ rad igual que en la figura 4.1c i quan es produeix el canvi de pendent, a partir de la condició del cicle límit esmentat tendeix cap al cicle límit associat a $\alpha_2 = \frac{\pi}{20}$ rad. Per tant, es verifica que el cicle límit únicament depèn del pendent ja que el sistema no té memòria.

En aquest cas la condició inicial no és cap problema pel canvi de pendent ja que la velocitat del cycle límit decreix quan el pendent decreix i com que $\alpha_i > \alpha_c$ en tots dos trams la velocitat del cycle límit serà una condició inicial suficient.

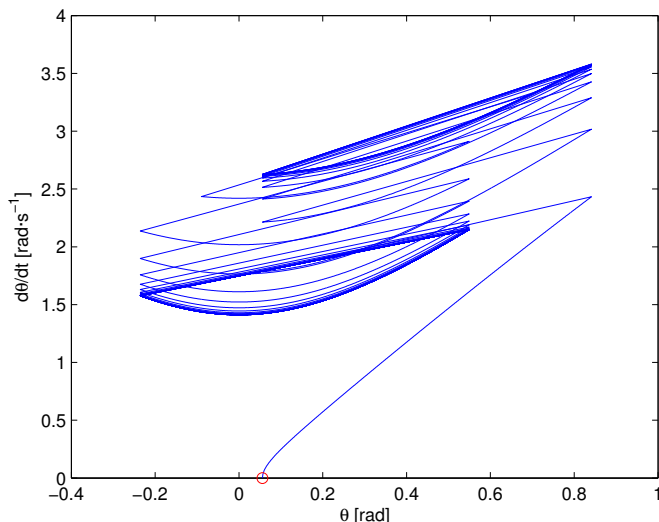


Figura 4.2: Trajectòria sobre la recta a trams convexa

4.2.2 Cas còncau

En el cas còncau la successió de k_i és creixent. Anàlogament al cas convex, s'han pres els mateixos pendents però ara invertint l'ordre dels trams de manera que el camí de baixada està parametritzat per:

$$s(x) = \begin{cases} -\tan\left(\frac{\pi}{20}\right)x & \text{si } x < 0 \\ -\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

A la figura 4.3 es mostra la trajectòria durant 50 cycles de la *rimless wheel* sobre la recta a trams còncau a partir de la condició inicial $\theta_0 = \alpha_1 - \frac{\beta}{2}$, $\dot{\theta}_0 = 2\omega_{min}$ (del primer tram) i $x = -10$ m. Igual que passa pel cas convex, s'observa que el sistema convergeix primer al cycle límit associat a $\alpha_1 = \frac{\pi}{20}$ rad igual que en la figura 4.1b, i quan es produeix el canvi de pendent tendeix cap al cycle límit associat a $\alpha_2 = \frac{\pi}{7}$ rad.

En aquest cas la condició inicial no és cap problema pel canvi de pendent ja que pel segon tram es té $\alpha > \frac{\beta}{2}$ i per tant per qualsevol condició inicial el sistema evoluciona cap endavant. En el cas, però, que el pendent dels dos trams fos $\alpha_c < \alpha \leq \frac{\beta}{2}$ caldria que es verificqués que la velocitat amb què s'arriba al canvi de pendent fos major que ω_{min} del nou pendent. Per comparar aquestes velocitats, no sempre es podran fer els càlculs amb ω^* ja que si un tram concret és massa curt aquesta velocitat pot no haver-se assolit en el moment del canvi de pendent.

4.3 Exponencial negativa

Ja en el cas de funcions analítiques, un dels primers casos a estudiar és l'exponencial negativa pel fet de ser còncau. Per aquesta funció, es poden comprovar els criteris explicats anteriorment per funcions còncaues. El camí de baixada ve parametritzat per la funció:

$$s(x) = e^{-x} \quad (4.6)$$

Els conjunts Ω_i per aquest cas són els següents:

- $\Omega_1 = [2.7943, \infty)$

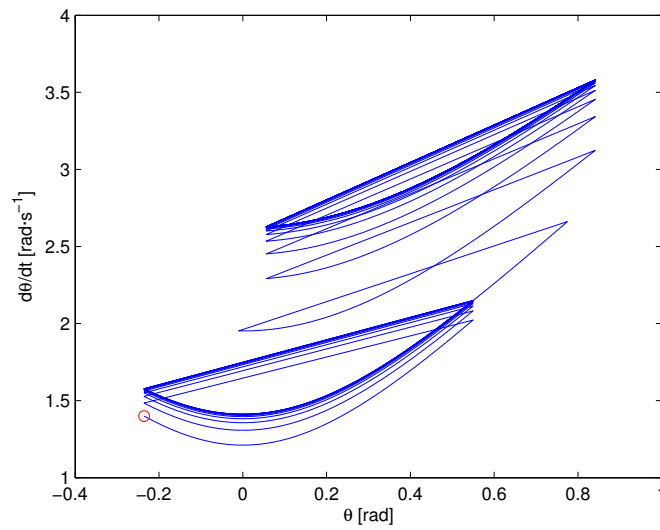


Figura 4.3: Trajectòria sobre la recta a trams còncava

- $\Omega_2 = [0.8814, 2.7943)$
- $\Omega_3 = (-\infty, 0.8814)$

En aquest cas particular, encara que es comenci en un punt de Ω_2 i amb la velocitat mínima, el sistema no s'atura en punts de Ω_2 ja que aquest és molt petit. Per tant, sempre s'acaba arribant a punts de Ω_1 i el sistema s'atura.

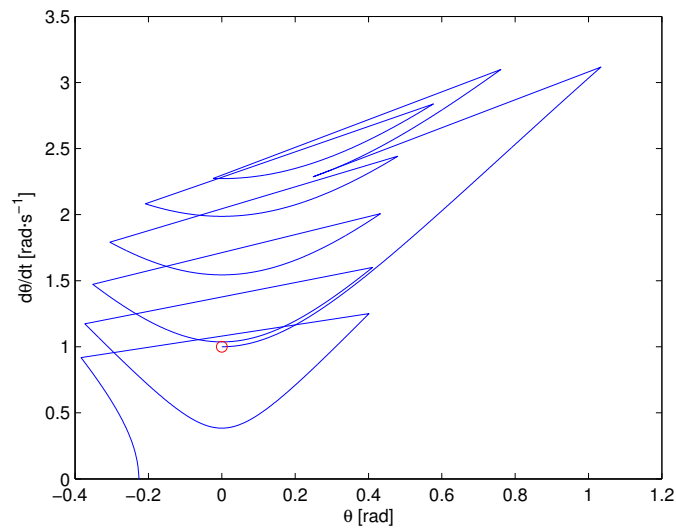


Figura 4.4: Trajectòria sobre una exponencial negativa

A la figura 4.4 es mostra la trajectòria de la *rimless wheel* a partir de la posició vertical en el punt $x = 0$ m i amb $\dot{\theta}_0 = 1$ rads^{-1} (encara que físicament no sigui possible aquesta disposició, no invalida els resultats de la simulació) i s'observa que la velocitat va disminuint fins que arriba al punt d'aturar-se. S'adiu, per tant, amb la teoria ja que hauria de tendir al cicle límit associat a $\alpha_\infty = 0$ rad però com que $0 < \alpha_c$ el cicle límit no existeix i el sistema s'atura.

4.4 Exponencial còncava

Anàlogament, un dels casos més bàsics de funció còncava analítica és la funció exponencial canviada de signe que ve parametritzada per:

$$s(x) = -e^x \quad (4.7)$$

Els conjunts Ω_i per aquest cas són els següents:

- $\Omega_1 = (-\infty, -2.7943]$
- $\Omega_2 = (-2.7943, -0.8814)$
- $\Omega_3 = (-0.8814, \infty)$

Si es comença en una coordenada x massa petita, el sistema no aconsegueix sortir de Ω_1 abans d'aturar-se. Si, per contra, el sistema assoleix un punt Ω_2 amb velocitat suficient, llavors el sistema evolucionarà fins l'infinit tal i com s'observa en la figura 4.5 (s'ha pres $\theta_0 = 0$ rad, $\dot{\theta}_0 = 1$ rads⁻¹ i $x = -3$ m). En aquest cas no es tendeix a cap cicle límit ja que el límit del pendent a l'infinit és infinit. La figura 4.5 només mostra 100 cicles que, encara que a partir d'un cert instant són molt propers entre ells, no convergeixen.

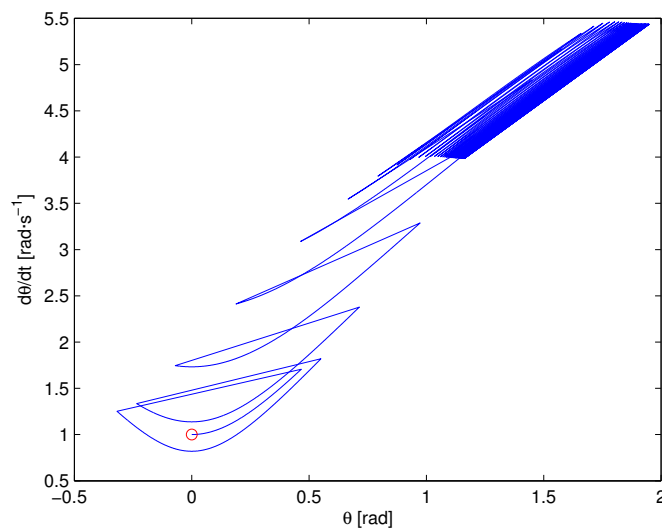


Figura 4.5: Trajectòria sobre una exponencial còncava

Capítol 5

Estudi del *compass walker* en un pendent constant

En aquest capítol es presenta el model de *compass walker* en un pendent constant. Sobre la dinàmica d'aquest caminador en un pendent constant hi ha molta literatura com per exemple els treballs de Goswami [4] i [5]. Per a la redacció d'aquest capítol s'ha seguit l'article de Font i Kövecses [3] (la nomenclatura de les variables es correspon amb aquesta referència i se segueix de l'anglès).

5.1 Modelització del *compass walker* en un pendent constant

5.1.1 Descripció del model

El model, com s'observa a la figura 5.1, està format per dues cames idèntiques de massa m i moment d'inèrcia I_C per cada centre de massa articulades al maluc (*hip*) que té massa m_H . Els angles $\theta_{st}(t)$ i $\theta_{sw}(t)$ (definitos des de la verticals i considerant positiu el sentit antihorari) caracteritzen l'orientació de la cama de suport (*stance*) i de la cama de balanceig (*swing*) respectivament i representen els dos graus de llibertat que caracteritzen el sistema. En la formulació i les simulacions numèriques s'ha assumit que ambdós angles estan continguts en l'interval: $\theta_{st}, \theta_{sw} \in [-\pi, \pi]$ rad.

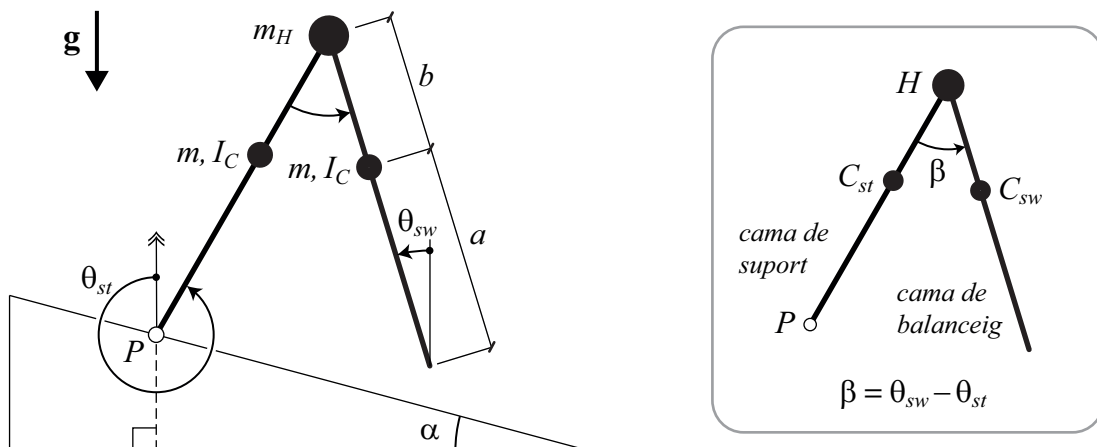


Figura 5.1: Esquema del *compass walker*

En l'estudi del caminador se suposarà que es verifiquen les següents hipòtesis (assumides per la majoria d'autors):

1. Les col·lisions amb el terra són perfectament *inelàstiques* i *impulsives*. El coeficient de restitució de la col·lisió és $e = 0$.

2. Durant la *fase de doble pèndol* el peu en contacte amb el terra actua com una junta articulada i no llisca.
3. El canvi de cama de suport en el moment de la col·lisió és *instantani* (i.e. no hi ha una fase de doble suport).
4. La cama de balanceig es retreu per evitar l'ensopegada abans del creuament de cames (el creuament de cames es defineix com el moment en què es verifica $\theta_{st} = \theta_{sw}$).

L'última hipòtesi és important ja que si el caminador tingués les cames de llargada constant seria inevitable que al voltant del creuament el peu estigués per sota del nivell del terra.

Símbol	Definició
C_{st}	Centre de massa de la cama de suport
C_{sw}	Centre de massa de la cama de balanceig
H	Centre de massa del maluc
P	Punt de contacte de la cama de suport amb el terra
l	Longitud de la cama ($l = a + b$ on a és la distància del peu al centre de massa)
α	Angle del pendent ($\alpha < \pi/2$ rad)
$\theta_{st}(t)$	Angle d'orientació de la cama de suport (considerant positiu el sentit antihorari)
$\theta_{sw}(t)$	Angle d'orientació de la cama de balanceig (considerant positiu el sentit antihorari)
β	Angle entre cames ($\beta = \theta_{sw} - \theta_{st}$)
m	Massa de cada cama
m_H	Massa del maluc
I_C	Moment d'inèrcia de cada cama respecte el seu centre de massa (C_{st} o C_{sw})
g	Vector gravetat ($ g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$)

Taula 5.1: Símbols emprats en la modelització del *compass walker*

5.1.2 Dinàmica de la fase de doble pèndol

L'equació del moviment de la fase de doble pèndol es pot obtenir a partir de l'*equació de Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f} \quad (5.1)$$

on T és l'energia cinètica i U l'energia potencial del sistema i \mathbf{f} és el vector de forces no conservatives generalitzades (en aquest cas $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ja que no hi ha actuadors) i $\mathbf{q} = \{\theta_{st}, \theta_{sw}\}^T$ és el vector de coordenades generalitzades.

L'expressió per l'energia cinètica és la següent (com es pot deduir de la figura 5.2a):

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \underbrace{\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}_{st}^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}_{st}^2}_{T_{st}} + \underbrace{\frac{1}{2}m_H l^2 \dot{\theta}_{st}^2}_{T_h} + \underbrace{\frac{1}{2}m \left[\left(b\dot{\theta}_{sw} - l\dot{\theta}_{st} \cos(\theta_{sw} - \theta_{st}) \right)^2 + \left(l\dot{\theta}_{st} \sin(\theta_{sw} - \theta_{st}) \right)^2 \right]}_{T_{sw}} + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}_{sw}^2 \quad (5.2)$$

on els termes T_{st} , T_h i T_{sw} representen, respectivament, les energies cinètiques de la cama de suport, del maluc i de la cama de balanceig. Simplificant l'expressió s'obté:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \left[(m(a^2 + l^2) + m_H l^2 + I_C) \dot{\theta}_{st}^2 + (mb^2 + I_C) \dot{\theta}_{sw}^2 - 2mbl \cos(\theta_{sw} - \theta_{st}) \right] \dot{\theta}_{st}^2 \dot{\theta}_{sw}^2 \quad (5.3)$$

Per l'energia potencial del sistema $U(\mathbf{q})$ considerarem el potencial zero a l'horitzontal que passa pel punt P tal i com s'observa en la figura 5.2b. D'aquí s'obté:



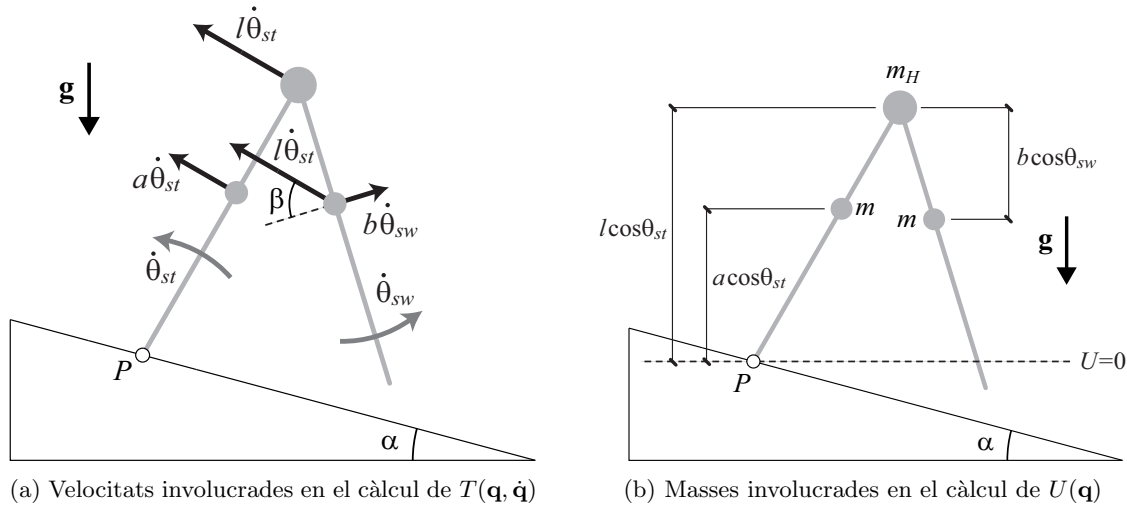


Figura 5.2: Elements involucrats en el càlcul de l'energia

$$U(\mathbf{q}) = \underbrace{mga \cos \theta_{st}}_{U_{st}} + \underbrace{m_H gl \cos \theta_{st}}_{U_h} + \underbrace{mg(l \cos \theta_{st} - b \cos \theta_{sw})}_{U_{sw}} \quad (5.4)$$

on els termes U_{st} , U_h i U_{sw} representen, respectivament, les energies potencials de la cama de suport, del maluc i de la cama de balanceig. Igual que amb l'energia cinètica, simplificant l'expressió s'obté:

$$U(\mathbf{q}) = g[(m(a+l) + m_H l) \cos \theta_{st} - mb \cos \theta_{sw}] \quad (5.5)$$

Substituint les expressions trobades per $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ i $U(\mathbf{q})$ a l'equació de Lagrange s'arriba a dues equacions del moviment que es poden escriure de la següent forma matricial:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (5.6)$$

on $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ és la matriu d'inèrcia, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ és la matriu de termes centrífugs i de Coriolis i $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ és el vector associat a la gravetat:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m(a^2 + l^2) + m_H l^2 + I_C & -mbl \cos(\theta_{sw} - \theta_{st}) \\ -mbl \cos(\theta_{sw} - \theta_{st}) & mb^2 + I_C \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & mbl \sin(\theta_{sw} - \theta_{st}) \dot{\theta}_{sw} \\ -mbl \sin(\theta_{sw} - \theta_{st}) \dot{\theta}_{st} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = g \begin{bmatrix} -(m(a+l) + m_H l) \sin \theta_{st} \\ -mb \sin \theta_{sw} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

5.1.3 Col·lisió del peu

En aquest model la col·lisió es considera (tal com s'ha vist en les hipòtesis) *perfectament inelàstica*, *impulsiva* i *instantània* (la cama de balanceig impacta en el mateix instant que la cama de suport deixa de contactar-hi). Aquesta col·lisió provoca un canvi instantani de les velocitats angulars $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{\theta}_{st}, \dot{\theta}_{sw}\}^T$ mentre que la geometria del sistema no varia.

Mitjançant la conservació del moment angular es poden relacionar les velocitats angulars *pre-col·lisió* $\dot{\mathbf{q}}^- = \{\dot{\theta}_{st}^-, \dot{\theta}_{sw}^-\}^T$ amb les velocitats angulars *post-col·lisió* $\dot{\mathbf{q}}^+ = \{\dot{\theta}_{st}^+, \dot{\theta}_{sw}^+\}^T$ de la següent forma matricial:

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{A}(\hat{\beta}) \dot{\mathbf{q}}^- \quad (5.10)$$

La matriu \mathbf{A} és funció de la geometria del caminador i està unívocament definida per l'angle entre les cames a l'instant de la col·lisió $\hat{\beta} = \theta_{sw}^- - \theta_{st}^-$ (que és constant en totes les col·lisions).

La condició geomètrica que verifica el caminador en el moment de la col·lisió i que servirà per controlar el moment en què es produeix aquesta és

$$\theta_{st} + \theta_{sw} + 2\alpha = 0 \quad (5.11)$$

cal observar que aquesta condició també es verifica quan la cama de balanceig avança a la cama de suport per tant, només caldrà considerar els zeros de la funció quan aquesta decreix.

Teorema 1 (Caracterització de la condició de col·lisió). *L' instant de col·lisió de la cama de balanceig està caracteritzat unívocament pels zeros de la funció*

$$r(\mathbf{q}) = \theta_{st} + \theta_{sw} + 2\alpha \quad (5.12)$$

quan aquesta decreix.

Demostració. Veiem primer que en el moment de la col·lisió es té un zero de la funció $r(\mathbf{q})$.

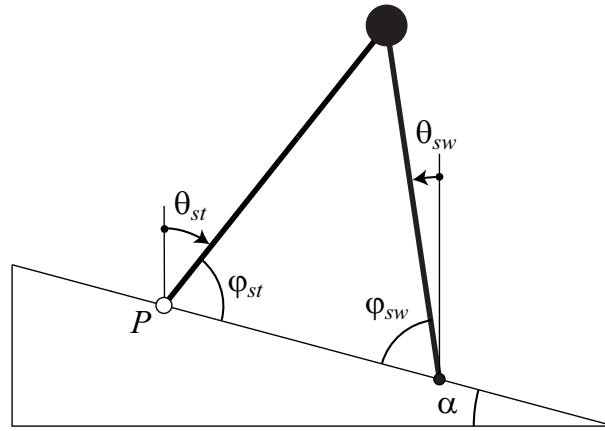


Figura 5.3: Geometria del *compass walker* en el moment de la col·lisió

Geomètricament, el caminador i el pendent defineixen un triangle isòsceles (ja que la longitud d'ambdues cames és la mateixa) i, per tant, els angles entre el terra i cada cama φ_{st} i φ_{sw} seran iguals. Aquests angles es poden expressar en funció de termes coneguts:

$$\varphi_{st} = \frac{\pi}{2} + \theta_{st} + \alpha \quad (5.13)$$

$$\varphi_{sw} = \frac{\pi}{2} - \theta_{sw} - \alpha \quad (5.14)$$

Per la condició de triangle isòsceles es té $\varphi_{st} = \varphi_{sw}$ i per tant:

$$\frac{\pi}{2} + \theta_{st} + \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta_{sw} - \alpha \quad (5.15)$$

$$\theta_{st} + \theta_{sw} + 2\alpha = 0 \quad (5.16)$$

Per veure que defineix la col·lisió unívocament n'hi ha prou en suposar que en una disposició \mathbf{q}_0 diferent de la de col·lisió es verifica la condició $r(\mathbf{q}_0) = 0$. Per aquesta nova disposició geomètrica els angles φ_{st} i φ_{sw} també estan definits segons les equacions (5.13) i (5.14). Si s'imposa la condició de col·lisió (5.11) s'obté que $\varphi_{st} = \varphi_{sw}$ i per tant s'arriba a una contradicció.

Tot el que s'ha demostrat fins ara també era vàlid pel cas $\theta_{st} = \theta_{sw}$ (i.e. quan ambdues cames estan alineades). Resta veure que la col·lisió es produeix en els zeros de la funció quan aquesta decreix.

Per a més comoditat, es treballarà sobre l'horitzontal canviant la semirrecta de referència dels angles θ_{st} i θ_{sw} per la semirrecta perpendicular al pendent. D'aquesta manera es defineixen uns nous angles $\hat{\theta}_{st}$ i $\hat{\theta}_{sw}$:

$$\hat{\theta}_{st} = \theta_{st} + \alpha \quad (5.17)$$

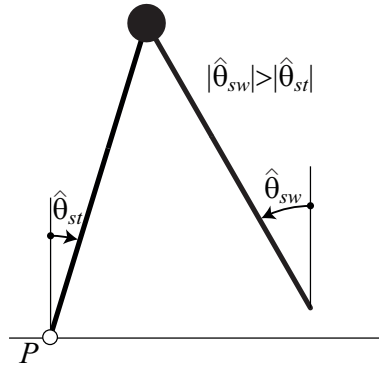


Figura 5.4: Disposició geomètrica just abans de la col·lisió

$$\hat{\theta}_{sw} = \theta_{sw} + \alpha \quad (5.18)$$

Com que perquè la col·lisió sigui vàlida cal que el peu impacti per sobre el terra, en l' instant immediatament anterior a la col·lisió (tal com s'observa a la figura 5.4) s'ha de verificar:

$$\left| \hat{\theta}_{sw} \right| > \left| \hat{\theta}_{st} \right| \quad (5.19)$$

Sabent que en l' instant immediatament anterior a la col·lisió $\hat{\theta}_{sw} > 0$ i $\hat{\theta}_{st} < 0$ es reescriu (5.19) com:

$$\hat{\theta}_{sw} > -\hat{\theta}_{st} \quad (5.20)$$

$$\hat{\theta}_{sw} + \hat{\theta}_{st} > 0 \quad (5.21)$$

Retornant a les coordenades originals θ_{st} i θ_{sw} la condició (5.21) resulta:

$$\theta_{st} + \theta_{sw} + 2\alpha > 0 \quad (5.22)$$

i per tant, cal que els zeros de la funció $r(\mathbf{q})$ tinguin lloc quan aquesta decreix. \square

Nota. Seguint la quarta hipòtesi assumida per la modelització, no s'ha tingut en compte el que li pugui passar a la cama de balanceig abans del creuament (se suposa que es retreu suficientment com per evitar col·lisions indesitjades).

Ara cal trobar una expressió que relacioni l' estat just abans de la col·lisió \mathbf{x}_i^- i l' estat just després de la col·lisió \mathbf{x}_i^+ . Com s'ha vist anteriorment l' objectiu és aconseguir una equació semblant a l' equació (5.10).

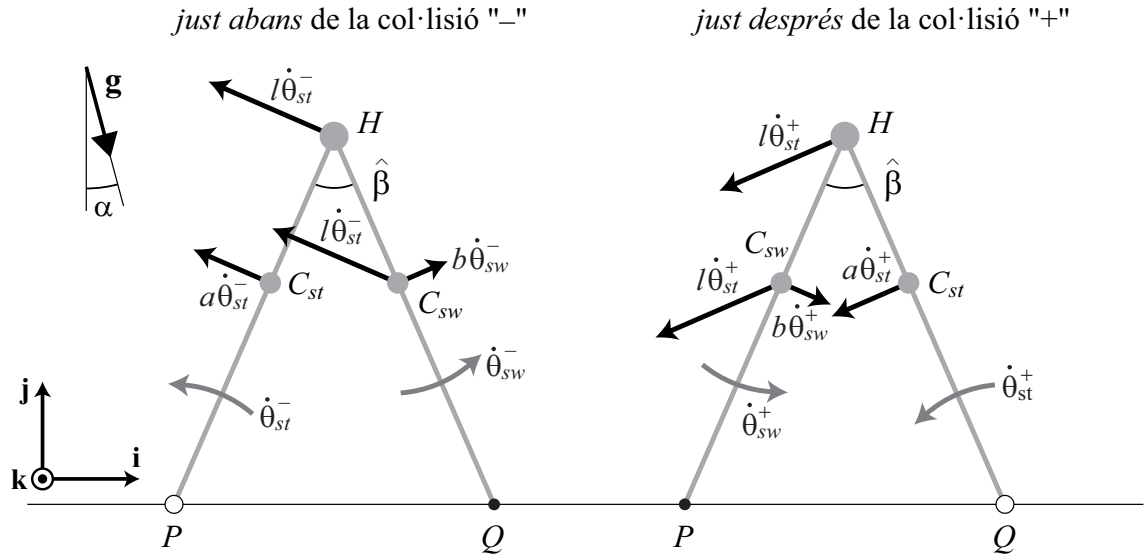
Com ja s'ha dit, s'aplicarà la conservació del moment angular per determinar la relació. El primer punt utilitzat per aplicar la conservació del moment angular és el punt de col·lisió Q considerant tot el caminador com a sistema. En aquest cas el moment impulsiu a Q , $\hat{\mathbf{M}}_Q$, és nul ja que l' única força externa impulsiva al sistema és la força de contacte que passa per Q . Per tant el moment angular de tot el caminador al punt Q es conserva durant la col·lisió:

$$\Delta \mathbf{H}_Q = \mathbf{H}_Q^+ - \mathbf{H}_Q^- = 0 \quad (5.23)$$

L'altra equació es pot trobar considerant la cama de l' anterior suport com a sistema i aplicant la conservació del moment angular al punt H . Com que l' única força impulsiva en aquesta cama és la força de contacte a la junta del maluc (punt H), el moment impulsiu total a aquest punt, $\hat{\mathbf{M}}_H$, és nul i per tant el moment angular de l' anterior cama de suport al punt H es conserva durant la col·lisió:

$$\Delta \mathbf{H}_H = \mathbf{H}_H^+ - \mathbf{H}_H^- = 0 \quad (5.24)$$

És important observar que aquestes equacions estan aplicades en Q i H que són punts fixos (és a dir, amb velocitat i acceleració nul·les). A continuació es calculen les expressions dels moments angulars a cada punt abans i després de la col·lisió.

Figura 5.5: Velocitats del *compass walker* just abans i just després de la col·lisió

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_Q^- &= \underbrace{\mathbf{I}_C \cdot \omega_{st}^- + \mathbf{r}_{Q/C_{st}} \times m\mathbf{v}_{C_{st}}^-}_{\mathbf{H}_Q^-|_{st}} + \underbrace{\mathbf{r}_{Q/H} \times m_H\mathbf{v}_H^-}_{\mathbf{H}_Q^-|_h} + \underbrace{\mathbf{I}_C \cdot \omega_{sw}^- + \mathbf{r}_{Q/C_{sw}} \times m\mathbf{v}_{C_{sw}}^-}_{\mathbf{H}_Q^-|_{sw}} = \\ &= \left[\left(I_C + ma(l \cos \hat{\beta} - b) \right) \dot{\theta}_{st}^- \right] \mathbf{k} + \left[m_H l^2 \cos \hat{\beta} \dot{\theta}_{st}^- \right] \mathbf{k} + \left[mal \cos \hat{\beta} \dot{\theta}_{st}^- + (I_C - mab) \dot{\theta}_{sw}^- \right] \mathbf{k} \quad (5.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_Q^+ &= \underbrace{\mathbf{I}_C \cdot \omega_{sw}^+ + \mathbf{r}_{Q/C_{sw}} \times m\mathbf{v}_{C_{sw}}^+}_{\mathbf{H}_Q^+|_{sw}} + \underbrace{\mathbf{r}_{Q/H} \times m_H\mathbf{v}_H^+}_{\mathbf{H}_Q^+|_h} + \underbrace{\mathbf{I}_C \cdot \omega_{st}^+}_{\mathbf{H}_Q^+|_{st}} = \\ &= \left[ml(l - b \cos \hat{\beta}) \dot{\theta}_{st}^+ + (I_C + mb(b - l \cos \hat{\beta})) \dot{\theta}_{sw}^+ \right] \mathbf{k} + \left[m_H l^2 \dot{\theta}_{st}^+ \right] \mathbf{k} + \left[(I_C + ma^2) \dot{\theta}_{st}^+ \right] \mathbf{k} \quad (5.26) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_H^- = \mathbf{I}_C \cdot \omega_{st}^- + \mathbf{r}_{H/C_{st}} \times m\mathbf{v}_{C_{st}}^- = \left[(I_C - mab) \dot{\theta}_{st}^- \right] \mathbf{k} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{H}_H^+ = \mathbf{I}_C \cdot \omega_{sw}^+ + \mathbf{r}_{H/C_{sw}} \times m\mathbf{v}_{C_{sw}}^+ = \left[-mbl \cos \hat{\beta} \dot{\theta}_{st}^+ + (I_C + mb^2) \dot{\theta}_{sw}^+ \right] \mathbf{k} \quad (5.28)$$

on \mathbf{k} és el vector perpendicular al pla del paper i orientat cap enfora. Reescriuint els termes de les equacions anteriors i aplicant la conservació del moment angular s'obté la següent expressió:

$$\mathbf{Q}^-(\hat{\beta}) \dot{\mathbf{q}}^- = \mathbf{Q}^+(\hat{\beta}) \dot{\mathbf{q}}^+ \quad (5.29)$$

amb:

$$\mathbf{Q}^-(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} I_C + (m_H l^2 + 2mal) \cos \hat{\beta} - mab & I_C - mab \\ I_C - mab & 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{Q}^+(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} I_C + ml(l - b \cos \hat{\beta}) + m_H l^2 + ma^2 & I_C + mb(b - l \cos \hat{\beta}) \\ -mbl \cos \hat{\beta} & I_C + mb^2 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

cal observar que les matrius \mathbf{Q}^- i \mathbf{Q}^+ depenen de l'angle $\hat{\beta}$ que es manté constant. Per tant, a partir d'aquestes dues matrius es pot determinar el valor de la matriu $\mathbf{A}(\hat{\beta})$ utilitzada a l'equació (5.10):

$$\mathbf{A}(\hat{\beta}) = \left[\mathbf{Q}^+(\hat{\beta}) \right]^{-1} \mathbf{Q}^-(\hat{\beta}) \quad (5.32)$$

Es pot utilitzar la següent matriu per modelitzar el canvi de rol de les dues cames quan es produeix la col·lisió:

$$\mathbf{q}^+ = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{q}^- \quad (5.33)$$

Per tant, el canvi de l'estat 4-dimensional del sistema $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}^T = \{\theta_{st}, \theta_{sw}, \dot{\theta}_{st}, \dot{\theta}_{sw}\}^T$ al moment de la col·lisió es poden obtenir amb la següent equació algebraica:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}^+ \\ \dot{\mathbf{q}}^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(\hat{\beta}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^- \\ \dot{\mathbf{q}}^- \end{Bmatrix} \quad (5.34)$$

5.2 Estabilitat del *compass walker* en un pendent constant

Per a més comoditat, es designarà d'ara endavant el vector d'estat del caminador amb la variable $\mathbf{x} = \{\theta_{st}, \theta_{sw}, \dot{\theta}_{st}, \dot{\theta}_{sw}\}^T$.

A partir del sistema d'equacions diferencials ordinàries de segon ordre (5.6) que es pot definir el sistema d'*equacions del moviment entre col·lisions* (conjunt d'equacions de primer ordre en termes de \mathbf{x}):

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{st} \\ \dot{\theta}_{sw} \\ -\mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{st} \\ \dot{\theta}_{sw} \end{Bmatrix} + \mathbf{G} \right] \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} \quad (5.35)$$

D'acord amb l'equació (5.34) es defineix la *funció de transició d'estat h* quan es produeix la col·lisió:

$$\mathbf{x}^+ = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(\hat{\beta}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}(\mathbf{x}^-)} \mathbf{x}^- \quad (5.36)$$

que determina l'estat immediatament després de la col·lisió \mathbf{x}^+ a partir de l'estat immediatament anterior \mathbf{x}^- . Finalment, utilitzant l'equació (5.11), es defineix la *funció detecció de col·lisió r* com:

$$r(\mathbf{x}) = \theta_{st} + \theta_{sw} + 2\alpha \quad (5.37)$$

que tal com s'ha vist abans s'anul·la quan es produeix la col·lisió (i.e. $r(\mathbf{x}^-) = 0$).

5.2.1 Estabilitat del cycle límit

Per estudiar l'estabilitat del cycle límit del *compass walker* s'utilitzarà l'*aplicació de Poincaré* ja definida, si bé en aquest cas serà una aplicació $\mathbf{p} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

La majoria d'autors defineixen la *secció de Poincaré* mitjançant els punts de discontinuïtat a les col·lisions just després de la col·lisió. En aquest projecte es fa de la mateixa manera.

En aquest cas particular, l'*aplicació de Poincaré* es defineix com la funció \mathbf{p} que envia l'estat del sistema just després de la i -èssima col·lisió, \mathbf{x}_i^+ a l'estat del sistema just després de la següent col·lisió, $\mathbf{x}_{i+1}^+ = \mathbf{p}(\mathbf{x}_i^+)$. Aquesta aplicació es pot veure com la composició de dues aplicacions $= \mathbf{h} \circ \mathbf{d}$ on \mathbf{d} regeix el moviment entre col·lisions $\mathbf{d}(\mathbf{x}_i^+) = \mathbf{x}_{i+1}^-$ i \mathbf{h} determina el canvi d'estat que es produeix en la col·lisió $\mathbf{h}(\mathbf{x}_{i+1}^-) = \mathbf{x}_{i+1}^+$ (tal com s'ha vist a l'equació (5.36)).

Com es demostra a [4] per a cada pendent α es té un únic cycle límit (en aquesta secció se suposa que α és menor que el pendent de bifurcació) i, per tant, l'*aplicació de Poincaré* té un únic punt fix

\mathbf{x}^* . Un cop trobat el punt fix, la seva estabilitat es pot determinar mitjançant la sèrie de Taylor de \mathbf{p} per una petita perturbació $\delta\mathbf{x}$ propera al punt fix:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{p}(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x} \quad (5.38)$$

on la derivada parcial de l'aplicació respecte el vector d'estats és el jacobià \mathbf{J} . Com que \mathbf{x}^* és un punt fix de \mathbf{p} es pot escriure l'equació (5.38) com:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{x}^* + \mathbf{J}\delta\mathbf{x} \quad (5.39)$$

Per tant, es tindrà estabilitat orbital sempre que es pugui controlar $\mathbf{J}\delta\mathbf{x}$ amb $\delta\mathbf{x}$ prou petit. Aquesta condició es dona sempre que els valors propis de \mathbf{J} tinguin mòdul menor o igual que 1 (i.e. que estiguin continguts en el cercle unitat).

5.2.2 Aproximació del jacobià

L'aplicació \mathbf{p} no es pot calcular analíticament ja que no es té una solució analítica de l'equació (5.35) i per tant, \mathbf{J} no es pot calcular directament com la derivada parcial de \mathbf{p} . Per trobar \mathbf{J} es poden utilitzar dos enfocaments: *aproximació numèrica* o bé *aproximació analítica*.

Aproximació numèrica

L'*aproximació numèrica* es dedueix directament de l'equació (5.39). Aquesta es pot reescriure com $\mathbf{J}\delta\mathbf{x} \approx \mathbf{p}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{x}^*$ i, coneixent \mathbf{x}^* , per quatre perturbacions independents $\delta\mathbf{x}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) s'arriba a l'equació:

$$\mathbf{J}\tau = \Psi \quad (5.40)$$

on la matriu $\tau = [\delta\mathbf{x}_1, \delta\mathbf{x}_2, \delta\mathbf{x}_3, \delta\mathbf{x}_4]$ és la matriu formada pels vectors de perturbació i la matriu $\Psi = [\mathbf{p}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}^*, \mathbf{p}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}^*, \mathbf{p}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_3) - \mathbf{x}^*, \mathbf{p}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_4) - \mathbf{x}^*]$ està formada per les perturbacions després d'aplicar l'*aplicació de Poincaré* al punt pertorbat.

Aproximació analítica

El mètode utilitzat per trobar l'*aproximació analítica* va ser presentat per Coleman ([2]). El mètode es defineix a continuació a partir de les funcions definides a les equacions (5.35)-(5.37).

Coleman estableix que l'aproximació del jacobià es pot obtenir com el producte de tres matrius: $\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{BDE}$. Aquest producte matricial aproxima linealment l'aplicació \mathbf{p} que envia la perturbació en una col·lisió a la següent.

$$\delta\mathbf{x}_{i+1}^+ = \underbrace{\mathbf{BDE}}_{\hat{\mathbf{J}}} \delta\mathbf{x}_i^+ \quad (5.41)$$

Per utilitzar el mètode de Coleman primer cal conèixer la trajectòria del cycle límit $\mathbf{x}^*(t)$ ($\mathbf{x}^*(0)$ és l'estat del cycle límit sobre la secció de Poincaré, i.e. just després de la col·lisió) i el període de pas entre col·lisions pel cycle límit T^* .

Es pot expressar la solució de l'equació diferencial del moviment (entre col·lisions) com la solució pel cycle límit més un terme de perturbació:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t) \quad (5.42)$$

Com a resultat de perturbar la solució del cycle límit el temps entre col·lisions també es veu afectat:

$$T = T^* + \delta T \quad (5.43)$$

Combinant les equacions (5.42) i (5.35) i linealitzant $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t))$, s'obté la següent equació que regeix l'evolució de la perturbació en el temps:

$$\dot{\delta\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t))}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x}(t) \quad (5.44)$$

Integrant aquesta equació amb una condició inicial arbitrària $\delta \mathbf{x}_i^+$ fins a temps T^* s'obté $\delta \mathbf{x}(T^*)$ a partir del qual es pot determinar \mathbf{E} :

$$\delta \mathbf{x}(T^*) \approx \mathbf{E} \delta \mathbf{x}_i^+ \quad (5.45)$$

L'expressió anterior permet conèixer l'evolució entre col·lisions pel cycle límit. Però el temps entre col·lisions varia segons l'equació (5.43). La funció $r(\mathbf{x})$ definida a (5.37) depèn de l'estat \mathbf{x} que al seu torn depèn del temps. Per tant, es tracta de trobar la solució de $r(\mathbf{x}^*(T^* + \delta T) + \delta \mathbf{x}(T^* + \delta T)) = 0$. Mitjançant el desenvolupament de Taylor s'arriba a l'expressió:

$$\delta T \approx - \frac{\frac{\partial r(\mathbf{x}^*(T^*))}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x}(T^*)}{\frac{\partial r(\mathbf{x}^*(T^*))}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}(T^*)} \quad (5.46)$$

Finalment, utilitzant l'equació (5.36) i fent el desenvolupament de Taylor de la funció \mathbf{h} s'obté:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1}^+ + \delta \mathbf{x}_{i+1}^+ &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_{i+1}^-(T^* + \delta T) + \delta \mathbf{x}_{i+1}^-(T^* + \delta T)) \approx \\ &\approx \mathbf{h}(\mathbf{x}_{i+1}^-(T^*)) + \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(T^*))}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x}(T^*) + \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(T^*))}{\partial t} \delta T \end{aligned} \quad (5.47)$$

que combinada amb (5.46) i recordant que per definició $\mathbf{x}_{i+1}^+ = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{i+1}^-)$ permet determinar la perturbació després de la col·lisió $\delta \mathbf{x}_{i+1}^+$ a partir de la perturbació a temps T^* $\delta \mathbf{x}(T^*)$:

$$\delta \mathbf{x}_{i+1}^+ \approx \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(T^*))}{\partial \mathbf{x}}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\left[\mathbf{I} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^*(T^*) \frac{\partial r(\mathbf{x}^*(T^*))}{\partial \mathbf{x}}}{\frac{\partial r(\mathbf{x}^*(T^*))}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}^*(T^*)} \right]}_{\mathbf{D}} \delta \mathbf{x}(T^*) \quad (5.48)$$

Els paràmetres dels quals depenen les matrius definides són els següents:

- La matriu \mathbf{B} depèn únicament de la *funció de transició d'estat* (5.36).
- La matriu \mathbf{D} depèn únicament de la *funció de detecció de col·lisió* (5.37) i del vector de derivades del vector d'estat $\dot{\mathbf{x}}^*(T^*)$ en el cycle límit.
- La matriu \mathbf{E} ve determinada per les *equacions del moviment entre col·lisions* (5.35) i només depèn d'aquesta, de la condició inicial $\delta \mathbf{x}_i^+$ i del temps T^* .

Capítol 6

Estudi del *compass walker* en un pendent no constant

Un cop estudiat el *compass walker* en un pendent constant vol veure quines variacions es produeixen quan el pendent deixa de ser constant. En aquest capítol es tracta la generalització del model quan el pendent no és constant i quins efectes té la variació de pendent sobre l'evolució del sistema.

6.1 Modelització del *compass walker* en un pendent no constant

6.1.1 Descripció del model

En el cas del caminador en un pendent no constant, el model és el mateix que en el cas del caminador en un pendent constant (subsecció 5.1.1) excepte que l'angle del pendent α ja no és una constant sinó que depèn de la posició del caminador. La geometria del camí de baixada en aquest cas ve donada per una funció $s(y)$ que parametriza el camí en funció de la coordenada horitzontal y .

Nota. *Atenció amb la notació, ja que tot i que es tracti de la coordenada horitzontal s'anomena y perquè ja s'ha definit \mathbf{x} com el vector d'estats. Tot i això, aquesta notació no ha de comportar confusions perquè la coordenada vertical sempre serà funció de y i per tant es denotarà com $s(y)$.*

Per a més comoditat, es considerarà que la coordenada horitzontal del punt de suport P és sempre en $y = 0$ de manera que en el desenvolupament teòric no cal afegir una variable que registri l'avançament del caminador, sinó que simplement cal traslladar la funció $s(y)$ després de cada col·lisió de manera que per a cada cicle es té una funció $s_i(y)$. En la programació per a la simulació numèrica, però, s'ha afegit una variable al vector d'estats que registra la coordenada horitzontal del peu de recolzament.

En el cas de pendent no constant, però, en comptes de definir l'angle del pendent $\alpha(y)$ de la manera que seria natural:

$$\alpha(y) = -\arctan\left(\left.\frac{ds(\tilde{y})}{d\tilde{y}}\right|_{\tilde{y}=y}\right) \quad (6.1)$$

serà més útil, sobretot per estendre la *funció detecció de col·lisió*, definir l'angle $\hat{\alpha}(y)$ de la següent manera:

$$\hat{\alpha}(y) = -\arctan\left(\frac{s(y) - s(0)}{y}\right) \quad (6.2)$$

Nota. *Per a simplificar la notació també es denotarà $\hat{\alpha}(\mathbf{x}) = \hat{\alpha}(l(\sin\theta_{sw} - \sin\theta_{st}))$ que és el valor de $\hat{\alpha}$ en l'estat \mathbf{x} segons es defineix a la figura 6.1.*

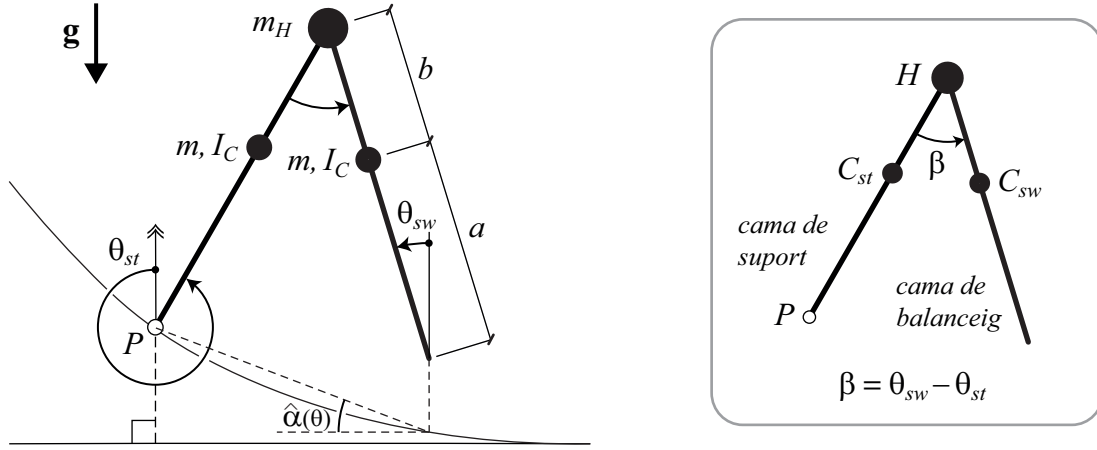


Figura 6.1: Esquema del compass walker en un pendent no constant

6.1.2 Dinàmica de la fase de doble pèndol

En la generalització per pendents no constants, la dinàmica de la fase de doble pèndol no es veu afectada. Això és degut a que l'equació del moviment (5.35) només depèn de la massa i la geometria del caminador i, en cap cas, de la geometria del camí de baixada (i.e. de l'angle α). Per tant, el sistema d'equacions del moviment entre col·lisions pel caminador en un pendent no constant continua essent:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{st} \\ \dot{\theta}_{sw} \\ -\mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{st} \\ \dot{\theta}_{sw} \end{Bmatrix} + \mathbf{G} \right] \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} \quad (6.3)$$

6.1.3 Col·lisió del peu

Si en la secció anterior s'ha vist que la dinàmica de la fase de doble pèndol no es veu afectada pel fet que el pendent sigui no constant, no es pot dir el mateix de la fase de col·lisió del peu ja que la funció detecció de col·lisió sí que es veu afectada per aquesta generalització.

Teorema 2 (Extensió de la condició de col·lisió a pendents no constants). *L'instant de col·lisió de la cama de balanceig està caracteritzat unívocament pels zeros de la funció*

$$r(\mathbf{x}) = \theta_{st} + \theta_{sw} + 2\hat{\alpha}(l(\sin \theta_{sw} - \sin \theta_{st})) \quad (6.4)$$

quan aquesta decreix amb $\hat{\alpha}(y)$ definida segons (6.2).

La interpretació gràfica d'aquesta nova funció detecció de col·lisió es pot veure a la figura

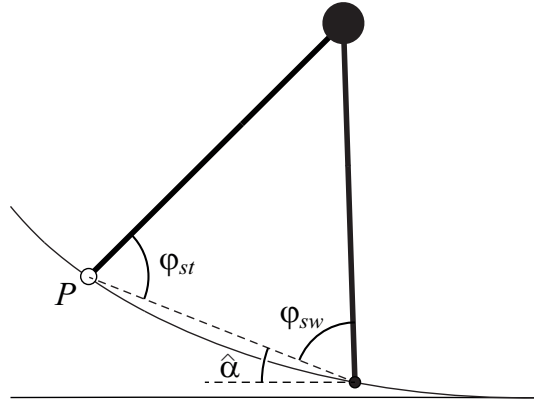
Proposició 1. *Sigui $y = 0$ la coordenada horitzontal de P i $y = Y^*$ la coordenada horitzontal del punt de col·lisió. Llavors, si $s(y)$ és una funció convexa, $\forall y \in (0, Y^*]$ es verifica:*

$$\hat{\alpha}(y) \geq \hat{\alpha}(Y^*) \quad (6.5)$$

i.e. $\hat{\alpha}(y)$ és una funció decreixent.

Demostració. Se segueix directament de derivar l'equació (6.2). □

Demostració del teorema 2. La demostració que en el moment de la col·lisió es verifica la condició $r(\mathbf{x}) = 0$ es demostra igual que en la prova del teorema 1.


 Figura 6.2: Geometria del *compass walker* en el moment de la col·lisió

Ara cal veure que defineix la col·lisió unívocament. Se suposa que es verifica la condició $r(\mathbf{x}_0) = 0$ per un \mathbf{x}_0 que no és el de col·lisió. Es defineixen els angles φ_{st} i φ_{sw} com a la prova del teorema 1 prenent l'angle $\bar{\alpha}$ com el que forma el segment que uneix els dos peus respecte l'horitzontal:

$$\varphi_{st} = \frac{\pi}{2} + \theta_{st} + \bar{\alpha} \quad (6.6)$$

$$\varphi_{sw} = \frac{\pi}{2} - \theta_{sw} - \bar{\alpha} \quad (6.7)$$

Restant (6.6) i (6.7):

$$\varphi_{st} - \varphi_{sw} = \theta_{st} + \theta_{sw} + 2\bar{\alpha} \quad (6.8)$$

Per aquesta disposició geomètrica $\varphi_{st} = \varphi_{sw}$:

$$\theta_{st} + \theta_{sw} + 2\bar{\alpha} = 0 \quad (6.9)$$

Però com que s'ha suposat que es verifica $r(\mathbf{x}) = 0$ es té:

$$\theta_{st} + \theta_{sw} + 2\hat{\alpha} = \theta_{st} + \theta_{sw} + 2\bar{\alpha} \quad (6.10)$$

d'on es dedueix que $\bar{\alpha} = \hat{\alpha}$.

Resta veure que cal que el zero s'assoleixi quan la funció decreix. Es repeteix la demostració del teorema 1 prenent $\alpha = \hat{\alpha}(\mathbf{x}(T^*))$ on T^* és l'instant en què es produeix la col·lisió. D'aquí s'obté:

$$\theta_{st}(T^* - \varepsilon) + \theta_{sw}(T^* - \varepsilon) + 2\hat{\alpha}(\mathbf{x}(T^*)) > 0 \quad (6.11)$$

però com que $\hat{\alpha}(y)$ és monòtona decreixent:

$$\theta_{st}(T^* - \varepsilon) + \theta_{sw}(T^* - \varepsilon) + 2\hat{\alpha}(\mathbf{x}(T^* - \varepsilon)) > \theta_{st}(T^* - \varepsilon) + \theta_{sw}(T^* - \varepsilon) + 2\hat{\alpha}(\mathbf{x}(T^*)) \quad (6.12)$$

i per tant cal que el zero s'assoleixi quan la funció decreix. \square

Nota. Igual que en el cas de pendent constant, no s'ha tingut en compte el que pugui passar abans del creuament de les cames.

Finalment, pel que fa a la *funció de transició d'estat* es té que com que $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ es calcula només tenint en compte les velocitats (a partir de la conservació del moment angular) aquesta no es veu afectada per la variació de la geometria del camí de baixada. Per tant, continua definint-se com:

$$\mathbf{x}^+ = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(\hat{\beta}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}(\mathbf{x}^-)} \mathbf{x}^- \quad (6.13)$$

si bé ara $\hat{\beta}$ no és constant en totes les col·lisions sinò que varia en funció de la geometria del camí de baixada.

6.2 Estabilitat del *compass walker* en un pendent no constant

6.2.1 Estabilitat del cicle límit

Com s'ha vist pel cas de pendent constant, l'estabilitat del cicle límit es determina a partir de l'*aplicació de Poincaré* corresponent. Com ja s'ha comentat, a [4] es demostra que per cada pendent α es té un únic cicle límit (suposant que no es té un pendent de bifurcació) i, per tant, l'*aplicació de Poincaré* té un únic punt fix.

Per abordar el cas de pendent no constant s'usa la simplificació que qualsevol camí de baixada, com que el sistema no té memòria, es pot considerar com una recta a trams on el pendent de cada tram α_i és igual al pendent linealitzat $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}(\mathbf{x}_i^-)$ en el moment de cada col·lisió.

Per tant, l'*aplicació de Poincaré* per un pendent no constant \mathbf{p} ve donada, a cada cicle i , per l'*aplicació de Poincaré* \mathbf{p}_i per un pendent constant $\alpha = \hat{\alpha}_i$. Igual que abans, es pot utilitzar la sèrie de Taylor de \mathbf{p}_i pel cas per una petita perturbació $\delta\mathbf{x}_i$ propera al punt fix d'aquell cicle \mathbf{x}_i^* , igual que s'ha vist en l'equació (5.38):

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{x}_i^* + \delta\mathbf{x}_i) \approx \mathbf{x}_i^* + \mathbf{J}_i \delta\mathbf{x}_i \quad (6.14)$$

on \mathbf{J}_i és la matriu jacobiana associada a \mathbf{p}_i .

Teorema 3. *La linealització de la i -èsima aplicació de Poincaré per un punt inicial \mathbf{x}_0 té la següent expressió:*

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{x}_i^* + \delta\mathbf{x}_i) \approx \mathbf{x}_i^* + \sum_{j=0}^i \left(\prod_{k=0}^j \mathbf{J}_{i-k} \right) \delta\mathbf{x}_{i-j} \quad (6.15)$$

amb $\delta\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}^* - \mathbf{x}_i^* \forall i > 0$ i $\delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*$.

Demostració. Es procedeix per inducció.

Cas base

$$\mathbf{p}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{x}_0^* + \underbrace{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*}_{\delta\mathbf{x}_0}) = \mathbf{p}_0(\mathbf{x}_0^* + \delta\mathbf{x}_0) \approx \mathbf{x}_0^* + \mathbf{J}_0 \delta\mathbf{x}_0 \quad (6.16)$$

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{x}_0^* + \mathbf{J}_0 \delta\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_1^* + \underbrace{\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_1^*}_{\delta\mathbf{x}_1} + \mathbf{J}_0 \delta\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_1^* + \delta\mathbf{x}_1 + \mathbf{J}_0 \delta\mathbf{x}_0) \approx \mathbf{x}_1^* + \mathbf{J}_1 \delta\mathbf{x}_1 + \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_0 \delta\mathbf{x}_0 \quad (6.17)$$

Pas d'inducció

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i \left(\mathbf{x}_{i-1}^* + \sum_{j=0}^{i-1} \left(\prod_{k=0}^j \mathbf{J}_{i-1-k} \right) \delta\mathbf{x}_{i-1-j} \right) &= \mathbf{p}_i \left(\mathbf{x}_i^* + \underbrace{\mathbf{x}_{i-1}^* - \mathbf{x}_i^*}_{\delta\mathbf{x}_i} + \sum_{j=0}^{i-1} \left(\prod_{k=0}^j \mathbf{J}_{i-1-k} \right) \delta\mathbf{x}_{i-1-j} \right) = \\ &= \mathbf{p}_i \left(\mathbf{x}_i^* + \delta\mathbf{x}_i + \sum_{j=0}^{i-1} \left(\prod_{k=0}^j \mathbf{J}_{i-k} \right) \delta\mathbf{x}_{i-j} \right) \approx \mathbf{x}_i^* + \mathbf{J}_i \delta\mathbf{x}_i + \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{J}_i \left(\prod_{k=0}^j \mathbf{J}_{i-1-k} \right) \delta\mathbf{x}_{i-1-j} = \\ &= \mathbf{x}_i^* + \sum_{j=0}^i \left(\prod_{k=0}^j \mathbf{J}_{i-k} \right) \delta\mathbf{x}_{i-j} \quad (6.18) \end{aligned}$$

□

Proposició 2. *Si la funció $s(y)$ és decreixent i convexa i el sistema no presenta bifurcacions, llavors la successió \mathbf{x}_i^* de punts fixos de les aplicacions de Poincaré convergeix.*

Demostració. Si $s(y)$ és decreixent i convexa llavors $s'(y) \leq 0$ i és creixent. Per tant, com que és monòtona i acotada existeix el seu límit i és finit. Això vol dir que $s(y)$ tendeix a la recta de pendent $\alpha_\infty = \lim_{y \rightarrow \infty} -\arctan(s'(y))$ i, com que no es tenen bifurcacions, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}^*$ on \mathbf{x}^* és el punt fix de l'*aplicació de Poincaré* per un pendent α_∞ . □

Teorema 4. *Se suposa que per un cert camí de baixada $s(y)$ existeix un cicle límit. Si existeix un N tal que $\forall i \geq i_0$ es verifica que \mathbf{J}_i té els valors propis de mòdul menor que 1 llavors el cicle límit és estable.*

Demostració. Per veure que és estable, com que per la proposició 2 se sap que \mathbf{x}_i convergeix, només cal veure que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^i \left(\prod_{k=0}^j \mathbf{J}_{i-k} \right) \delta \mathbf{x}_{i-j} = \mathbf{0} \quad (6.19)$$

Es pot separar el sumatori en dues parts:

$$\sum_{j=0}^i \left(\prod_{k=0}^j \mathbf{J}_{i-k} \right) \delta \mathbf{x}_{i-j} = \underbrace{\sum_{j=0}^n \left(\prod_{k=0}^j \mathbf{J}_{i-k} \right) \delta \mathbf{x}_{i-j}}_{S_0} + \underbrace{\sum_{j=n+1}^i \left(\prod_{k=0}^j \mathbf{J}_{i-k} \right) \delta \mathbf{x}_{i-j}}_{S_n} \quad (6.20)$$

Primer es veu que $\forall \varepsilon_1 > 0$ existeix un i_1 tal que si $i \geq i_1$ llavors $|S_0| < \varepsilon_1$. Com que existeix un cicle límit llavors la successió \mathbf{x}_i^* convergeix i, per tant, $\forall \varepsilon > 0$ existeix un \hat{i}_1 tal que si $i > \hat{i}_1$ $|\delta \mathbf{x}_i| = |\mathbf{x}_{i-1}^* - \mathbf{x}_i^*| < \varepsilon$. Per tant, com que el producte de matrius que multiplica $\delta \mathbf{x}_i$ és finit, es verifica que $\forall \varepsilon_1 > 0$ existeix un i_1 tal que si $i \geq i_1$ llavors $|S_0| < \varepsilon_1$. En termes de n , vol dir que existeix un N tal que si $n \leq N$ es té $|S_0| < \varepsilon_1$.

Ara cal veure que $\forall \varepsilon_2 > 0$ existeix un i_2 tal que si $i \geq i_2$ llavors $S_n < \varepsilon_2$. Com que a partir d'una certa i_0 els valors propis de \mathbf{J}_i tenen mòdul menor que 1 llavors els termes de S_n es poden fer tan petits com es vulgui i, per tant, es té $|S_n| < \varepsilon_2$.

Prenent $n = N$, $i^* = \max \{i_1, i_2\}$ i $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ es té que $\forall \varepsilon > 0$ existeix un i^* tal que per $i > i^*$ es té

$$\left| \sum_{j=0}^i \left(\prod_{k=0}^j \mathbf{J}_{i-k} \right) \delta \mathbf{x}_{i-j} \right| < \varepsilon \quad (6.21)$$

□

L'estudi de l'estabilitat del cicle límit, però, no és suficient i cal introduir un dels elements més importants d'un sistema dinàmic: la conca d'atracció. Es defineix com el domini $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de punts tals que per una condició inicial $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ el sistema convergeix al cicle límit. És molt important conèixer la conca d'atracció per saber com afecten a l'estabilitat del sistema petites variacions de la condició inicial.

En el model de *rimless wheel* la conca d'atracció és 2-dimensional, però no ha calgut entrar en la seva definició ja que amb les simplificacions fetes ve donada només per la ω_{min} . Pel *compass walker*, però, la conca d'atracció és 4-dimensional i a sobre no se'n pot obtenir una expressió explícita. Per tant s'ha de calcular numèricament una aproximació.

Ja s'ha comentat que a [4] s'explica que per a tot cert pendent α prou petit (i.e. sense bifurcació) només existeix un cicle límit. Per tant, d'aquí es dedueix que la conca d'atracció de cada cicle límit serà un domini connex ja que si no ho fos voldria dir que una certa òrbita estable travessa el domini d'instabilitat i es tindria una contradicció.

Cal comprovar, doncs, que per cada cicle la condició inicial es troba dins la conca d'atracció corresponent (en el model de pendent constant equivalent). Donat que la conca d'atracció es determina numèricament, la prova final de l'estabilitat del sistema serà calcular la trajectòria numèricament i veure que tendeix cap al cicle límit.

6.2.2 Aproximació del jacobià

Per calcular l'aproximació del jacobià de cada *aplicació de Poincaré* es pot procedir tant pel mètode numèric com per l'analític que es detallen a la subsecció 5.2.2. En aquest cas, però, es té un conjunt numerable de jacobians i a la pràctica aquest mètode només serà viable si es pot reduir a un conjunt finit mitjançant arguments analítics. El que sí que es pot fer és estudiar el jacobià pel pendent límit quan $t \rightarrow \infty$ i estudiar l'existència i estabilitat del cicle límit per aquest pendent.

Capítol 7

Exemples numèrics del *compass walker*

Per calcular els exemples numèrics s'han pres els següents paràmetres del caminador: $m = 5$ kg, $m_H = 10$ kg, $a = 0,5$ m, $b = 0,5$ m (i per tant $l = 1$ m) i $I_C = 0$ kgm².

És important recordar que com que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ les figures mostren els valors de θ i $\dot{\theta}$ per una sola cama (i com que la passa és simètrica, per a l'altra cama es tindrà la mateixa òrbita).

7.1 Conca d'atracció

Per calcular les aproximacions de la conca d'atracció s'han calculat les trajectòries per perturbacions del punt fix de l'*aplicació de Poincaré* \mathbf{x}^* cada cop més grans, fins que el sistema divergeix (amb un error de 10^{-3}). Les perturbacions s'han considerat independents per a cada coordenada i només en un entorn del punt fix \mathbf{x}^* , per això la conca d'atracció trobada és només una aproximació.

A continuació es mostren dos casos concrets a únicament títol d'exemple per veure la forma de les conques d'atracció del *compass walker*.

A la taula 7.1 es mostren els valors màxim i mínim de cada coordenada (considerant les altres les del punt fix) per un pendent $\alpha = 1^\circ$ al voltant del punt fix $\mathbf{x}^* = \{0.1695, -0.2044, -0.8617, -0.6059\}^T$.

	màxim	mínim
θ_{st}	0.205	0.162
θ_{sw}	-0.188	-0.319
$\dot{\theta}_{st}$	-0.895	-1.061
$\dot{\theta}_{sw}$	0.816	-1.600

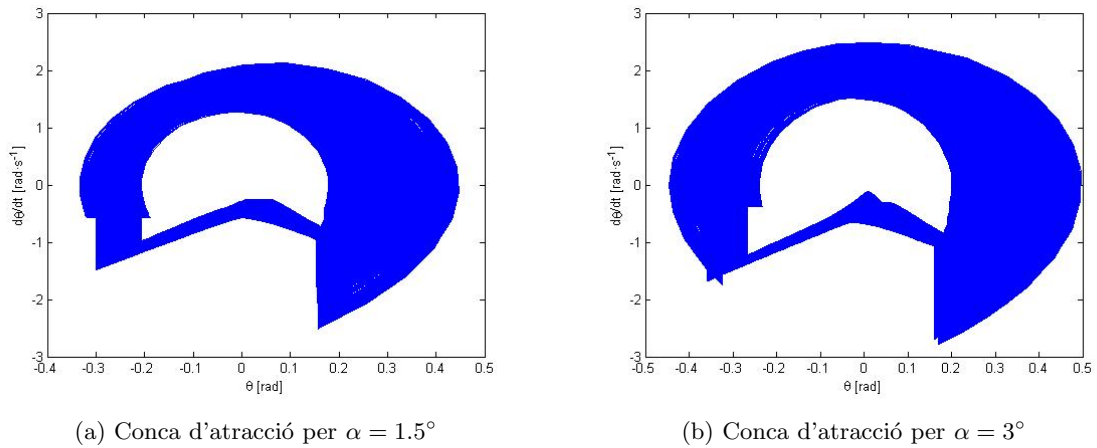
Taula 7.1: Valors límit per $\alpha = 1.5^\circ$

A la taula 7.2 es mostren els valors màxim i mínim de cada coordenada (considerant les altres les del punt fix) per un pendent $\alpha = 3^\circ$ al voltant del punt fix $\mathbf{x}^* = \{0.2186, -0.3231, -1.0923, -0.3784\}^T$.

	màxim	mínim
θ_{st}	0.238	0.168
θ_{sw}	-0.233	-0.390
$\dot{\theta}_{st}$	-1.031	-1.231
$\dot{\theta}_{sw}$	0.529	-1.748

Taula 7.2: Valors límit de la conca d'atracció per $\alpha = 3^\circ$

A la figura 7.1 es pot veure la projecció 2-dimensional de les conques d'atracció per $\alpha = 1.5^\circ$ i $\alpha = 3^\circ$.

Figura 7.1: Conques d'atracció del *compass walker*

7.2 Pendent constant

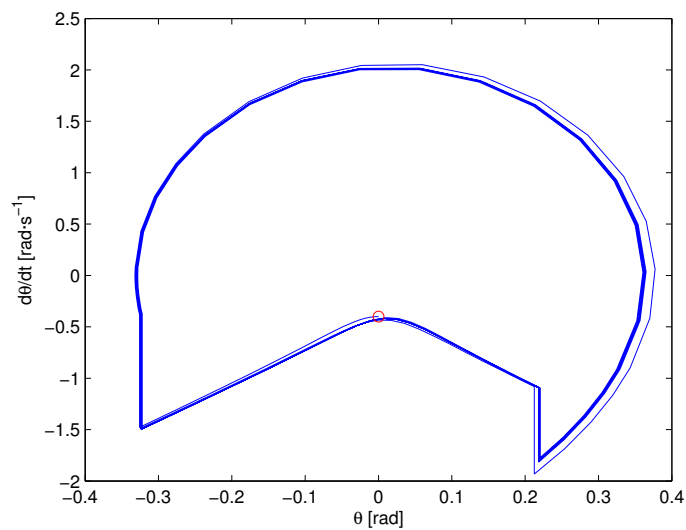
El primer exemple numèric presentat és el cas de pendent constant α , és a dir, amb un camí de baixada de la forma:

$$s(y) = -ky \quad (7.1)$$

on k és una constant positiva. La relació entre k i α és:

$$k = \tan(\alpha) \quad (7.2)$$

A partir de la condició inicial $\mathbf{x}_0 = \{0, 0, -0.4, 2\}^T$ (marcat amb un cercle a la figura 7.2) i amb un error de 10^{-6} amb MATLAB es troben el punt fix $\mathbf{x}^* = \{0.2187, -0.3234, -1.0926, -0.3775\}^T$ i la trajectòria (figura 7.2).

Figura 7.2: Trajectòria per un pendent constant $\alpha = 3^\circ$

7.3 Recta a trams

Un cop s'ha estudiat el cas de pendent constant i es vol generalitzar el model per pendents no constants, el cas més bàsic que es presenta és el pendent format per trossos de recta de diferents pendents. El cas més genèric presenta un conjunt numerable de trams de manera que es pot escriure com:

$$s(y) = \begin{cases} -k_1 y + c_1 & \text{si } a_0 < y \leq a_1 \\ -k_2 y + c_2 & \text{si } a_1 < y \leq a_2 \\ \vdots & \vdots \\ -k_i y + c_i & \text{si } a_{i-1} < y \leq a_i \end{cases} \quad (7.3)$$

amb els c_i tals que la $s(y)$ sigui contínua i amb la successió de k_i decreixents perquè $s(y)$ sigui convexa.

Com a exemple s'ha pres la recta composta per dos trams de pendents i tot el que s'explica és extensible pel cas de n trams. S'han considerat uns pendents de $\alpha_1 = 3^\circ$ i $\alpha_2 = 1.5^\circ$ i que el canvi de pendent es produeix en $y = 0$ per tant:

$$s(y) = \begin{cases} -\tan(3^\circ) y & \text{si } y \leq 0 \\ -\tan(1.5^\circ) y & \text{si } y > 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

A partir de la condició inicial $\mathbf{x}_0 = \{0, 0, -0.4, 2\}^T$ i $y = -5$ i amb un error de 10^{-6} es troba el punt fix $\mathbf{x}^* = \{0.1882, -0.2406, -0.9511, -0.5742\}^T$ (que és el punt fix per un pendent $\alpha = 1.5^\circ$) i la trajectòria (figura 7.3). S'observa que el caminador primer tendeix cap al cicle límit per $\alpha_1 = 3^\circ$ (cicle límit exterior) i, en produir-se el canvi de pendent, evoluciona cap al cicle límit per $\alpha_2 = 1.5^\circ$ (cicle límit interior). Per tant, es comprova que el sistema no té memòria i que evoluciona cap al cicle límit del pendent límit.

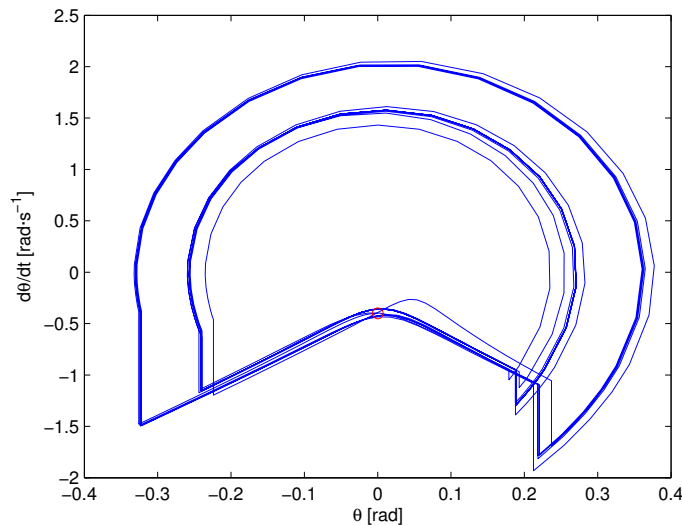


Figura 7.3: Trajectòria per un camí format per dues rectes de pendent $\alpha_1 = 3^\circ$ i $\alpha_2 = 1.5^\circ$

Entre els cicles naturals per cada pendent α_i pot aparèixer un cicle de transició. Aquest es té si el peu no impacta en el punt de canvi de pendent i per tant P queda en un tram i Q en el següent. Llavors, apareix un cicle amb una $\hat{\alpha} \in [\alpha_2, \alpha_1]$.

7.3.1 Evolució de les bifurcacions

Si bé en aquest projecte s'hi ha fet poca incidència, les bifurcacions són un aspecte important a considerar en el *compass walker*. La teoria diu que si α és prou gran es produeix una bifurcació dels cicles límit i el sistema pot evolucionar a diferents cicles límit depenent de la seva condició inicial.

Segons la teoria de bifurcacions, en disminuir el pendent per sota del pendent de bifurcació, el sistema hauria d'evolucionar cap al mateix cicle límit ja que si no hi ha bifurcació aquest és únic. Es comprova amb la recta a trams de pendents $\alpha_1 = 4^\circ$ i $\alpha_2 = 3^\circ$:

$$s(y) = \begin{cases} -\tan(4^\circ)y & \text{si } y \leq 0 \\ -\tan(3^\circ)y & \text{si } y > 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

Pel cas $\alpha = 4^\circ$ existeixen dos cicles límit i primer de tot cal localitzar-los i trobar les condicions inicials per les quals s'hi arriba. Per la condició inicial $\mathbf{x}_0 = \{0.244, -0.368, -1.14, -0.219\}^T$ s'arriba al cicle límit marcat en blau a la figura 7.4 i per la condició inicial $\mathbf{x}_0 = \{0.235, -0.368, -1.14, -0.219\}^T$ s'arriba al cicle límit marcat en verd a la figura 7.4.

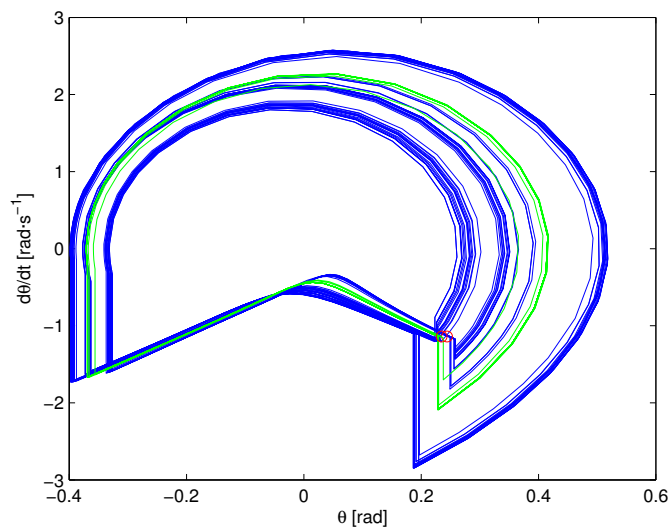
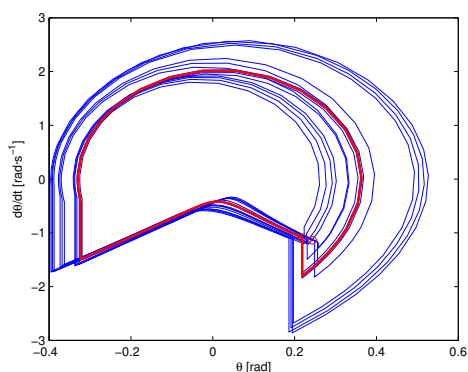
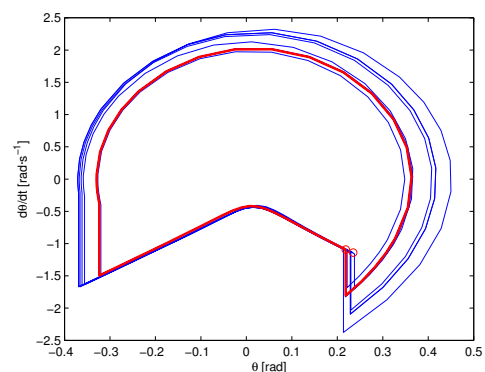


Figura 7.4: Trajectòries per un pendent constant $\alpha = 4^\circ$

A la figura 7.5 es comprova que independentment del cicle límit al que es tendeixi al pendent $\alpha_1 = 4^\circ$, en canviar el pendent a $\alpha_2 = 3^\circ$ el sistema evoluciona al cicle límit únic per aquest pendent marcat en vermell.



(a) $\mathbf{x}_0 = \{0.244, -0.368, -1.14, -0.219\}^T$



(b) $\mathbf{x}_0 = \{0.235, -0.368, -1.14, -0.219\}^T$

Figura 7.5: Trajectòries per un camí format per dues rectes de pendent $\alpha_1 = 4^\circ$ i $\alpha_2 = 3^\circ$

7.4 Exponencial negativa

Generalitzant encara més, un dels exemples clàssics de funció analítica, decreixent i convexa és l'exponencial negativa. Per tant, en aquest cas es té:

$$s(y) = e^{-y} \tag{7.6}$$

A partir de la condició inicial $\mathbf{x}_0 = \{0, 0, -0.4, 2\}^T$ i $y = 2.9496$ i amb un error de 10^{-6} i amb 100 cicles com a màxim es troba la trajectòria (figura 7.6). En aquest cas no existeix punt fix perquè en el límit el pendent és nul i, per tant, el caminador acaba caient.

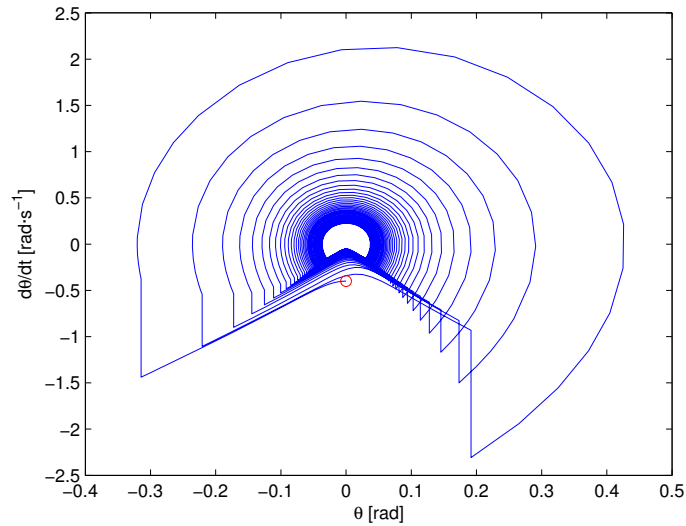


Figura 7.6: Trajectòria per un camí format per una exponencial negativa

Capítol 8

Impacte ambiental i estudi econòmic

8.1 Impacte ambiental

L'impacte ambiental d'aquest projecte és mínim ja que es tracta d'un projecte teòric en què tots els resultats numèrics s'han obtingut per simulació en un ordinador personal. Com que l'ordinador és comercial compleix amb la normativa de la Unió Europea sobre aparells electrònics.

8.2 Estudi econòmic

La durada del projecte és de 15 setmanes (aproximadament quatre mesos) i en l'estudi econòmic es computen els costos de tots els factors que intervenen en la seva realització.

El cost econòmic del projecte inclou tant costos fixos com variables. Pels costos fixos de factors que continuaran disponibles després de la finalització del projecte (que són l'ordinador, la llicència de MATLAB i el mobiliari d'oficina) s'atribueix al projecte un cost proporcional a la durada del projecte respecte la seva vida útil i, per tant, es poden tractar com a costos variables. Pel material consumible, que només intervé en la realització d'aquest projecte, es considera tot el cost directament. Per a la resta (que són l'energia, les hores dels tutors, les hores de l'estudiant i el cost administratiu) com que són costos variables es computen en funció de la quantitat dedicada al projecte.

- **Material consumible:** es considera que només intervé en la realització d'aquest projecte i per tant el seu cost repercuteix directament en el cost final.
- **Ordinador:** té una vida esperada de 4 anys. Treballa 8 hores al dia durant 300 dies a l'any.
- **MATLAB:** la llicència és vàlida per 1 any. Donat que la llicència caduca tant si s'utilitza com si no, es considera que s'utilitza 24 hores al dia durant 365 dies a l'any.
- **Mobiliari d'oficina:** té una vida esperada de 20 anys. Es considera, igual que l'ordinador, que s'utilitza 8 hores al dia durant 300 dies a l'any.
- **Energia:** es considera un cost mig de $0,2 \left[\frac{\text{€}}{\text{kWh}} \right]$ i un consum mig (considerant ordinador i il·luminació) de 80W.
- **Tutors:** es considera una dedicació de 4 hores setmanals durant les 15 setmanes que dura el projecte.
- **Estudiant:** es refereix al temps dedicat a realitzar el projecte. Es considera una dedicació de 40 hores setmanals durant les 15 setmanes que dura el projecte.
- **Cost administratiu:** es refereix al temps dedicat a realitzar tràmits administratius. Es considera una dedicació de 4 hores en total.

Factors de cost	Despesa de cost fix [€]	Vida esperada [anys]	Despesa de cost variable [€/h]	Temps de dedicació [h]	Cost del projecte [€]
Material consumible	10	-	-	-	10,00
Ordinador	620	4	0,0646	600	38,75
MATLAB	69	1	0,0079	2880	22,68
Mobiliari d'oficina	250	20	0,0052	600	3,13
Energia	-	-	0,0160	600	9,60
Tutors	-	-	50,00	60	3000,00
Estudiant	-	-	10,00	600	6000,00
Cost administratiu	-	-	25,00	4	100,00
					9184,16

Taula 8.1: Càlcul del cost final del projecte

Com s'observa a la taula 8.1 el cost total del projecte és de 9184,16€, però aquest cost no inclou el cost d'infraestructura del lloc de treball de l'estudiant ja que aquest és desconegut.

Conclusions

Després d'estudiar els models de la *rimless wheel* i el *compass walker* en un pendent constant, estendre ambdós models pel cas de pendent no constant i estudiar-ne els cicles límit i l'estabilitat s'extreuen diverses conclusions sobre el comportament dels caminadors passius en pendents no constants.

Primer de tot, si bé a simple vista poden semblar dos models bastant allunyats un cop es comença la modelització es veuen les similituds que presenten: el moviment d'ambdós ve descrit per una equació diferencial que governa la *fase de doble pèndol*, una *funció detecció de col·lisió* que depèn de l'estat del sistema i que val zero en el moment de la col·lisió i una equació algebraica que governa el canvi instantani de velocitats que es produeix en la *col·lisió del peu*.

Tot i aquests paral·lelismes existeix una diferència que és determinant a l'hora d'estudiar cadascun dels models. La *rimless wheel* pel fet de ser un model més senzill i amb un sol grau de llibertat presenta en la fase de doble pèndol una equació diferencial senzilla que permet trobar l'equació de la trajectòria de forma explícita i, conseqüentment, també una expressió explícita de l'*aplicació de Poincaré* l'estudi de la qual és més simple ja que és una funció d'una variable. Pel *compass walker* el model es complica i ja no és possible tenir una solució explícita de l'equació diferencial i, per tant, tampoc es té l'*aplicació de Poincaré* de forma explícita. A més, com que el sistema té dos graus de llibertat l'*aplicació de Poincaré* és una aplicació $\mathbf{p} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ de manera que l'estabilitat del cicle límit s'ha de calcular a partir dels valors propis de la matriu jacobiana que només es podrà trobar de forma aproximada (ja sigui numèricament o analíticament).

En estendre cadascun dels models pel cas de pendent no constant, s'observa que les equacions que governen la *fase de doble pèndol* i la *col·lisió del peu* no canvien. El que sí que canvia és la *funció detecció de col·lisió* ja que ara, a més del vector d'estats del sistema, també depèn de la funció $\hat{\alpha}(x)$ que calcula el pendent del segment que uneix el peu de recolzament amb la projecció vertical sobre el camí de baixada del següent peu de recolzament.

A nivell d'estabilitat, el canvi a pendent no constant té uns efectes considerables no per l'estabilitat en si mateixa sinó per l'estudi d'aquesta. A efectes pràctics, el caminador només "veu" el camí de baixada en els punts de contacte i, per tant, qualsevol corba pot simplificar-se per la poligonal formada pels segments que uneixen aquests punts. Feta aquesta simplificació es pot tractar l'estabilitat com si per cada cicle del sistema es tingués el caminador en qüestió sobre un pendent constant del mateix pendent que el segment format pel punt de suport actual i pel punt de suport següent. D'aquesta manera es pot veure que si el pendent de $s(x)$ tendeix a un cert pendent quan $x \rightarrow \infty$ llavors el sistema tendeix al cicle límit associat al pendent mencionat. Per la *rimless wheel* no hi ha cap problema ja que pel cas de pendent constant ja s'ha vist que tots els cicles límits són estables, però pel *compass walker* caldrà estudiar els valors propis de les matrius jacobianes de cada cicle. Aquest problema s'ha d'abordar estudiant analíticament la relació entre aquests valors propis i els paràmetres del sistema, cosa que requereix un estudi en profunditat i que no s'ha tractat en aquest projecte.

No només és suficient conèixer l'estabilitat del cicle límit, sinó que pel cas de pendent no constant també cal tenir en compte els efectes de la variació de la conca d'atracció. Pel cas de pendent constant n'hi ha prou amb que la condició inicial es trobi dins la conca d'atracció del sistema per a què aquest evolucioni cap al cicle límit. Pel cas de pendent no constant, però, en variar el pendent a cada cicle també varia la conca d'atracció i es podria donar el cas que la condició inicial d'un cert cicle estigués fora de la conca d'atracció del model equivalent de pendent constant per aquest cicle encara que durant tots els cicles anteriors la condició inicial sempre hagi pertangut a la conca d'atracció. Si bé per la *rimless wheel* es pot donar alguna condició, encara que feble, que garanteixi la convergència al cicle límit a partir de la condició inicial, pel *compass walker* no s'ha pogut trobar cap condició. Això fa que en ambdós casos la millor eina per a la comprovació de l'estabilitat sigui la simulació numèrica.

Treball pel futur

Degut a les limitacions de temps que presenta un projecte de final de carrera, hi ha una sèrie d'aspectes interessants que no s'han pogut estudiar i que es plantegen com a feina pel futur. Les possibles línies de continuació són:

- Refinar les condicions d'estabilitat per a la *rimless wheel*
- Estudiar pels dos models el cas en què el camí de baixada presenti petits trams de pujada.
- Estudiar el cas de pendent no constant pel *compass walker* amb un camí de baixada no convex.
- Buscar relacions entre els valors propis de la matriu jacobiana de l'*aplicació de Poincaré* i els paràmetres del *compass walker*.
- Buscar cotes dels paràmetres del sistema que garanteixin estabilitat.
- Estudiar la conca d'atracció i intentar-ne trobar una expressió analítica pel *compass walker*.
- Intentar generalitzar el concepte de conca d'atracció pel cas de pendent no constant.

Agraïments

Voldria donar les gràcies a tota la gent que m'ha donat suport en la realització d'aquest projecte i també en els cinc anys d'estudis universitaris a la Universitat Politècnica de Catalunya.

Primer de tot, el meu sincer agraïment als meus tutors, la Neus i en Josep Maria, que malgrat les obligacions dels seus càrrecs a la direcció de l'escola han sabut trobar estones per atendre'm, resoldre els meus dubtes i orientar-me en la realització d'aquest projecte.

Vull donar també les gràcies als meus companys d'universitat i professors amb els quals he compartit experiències i dels quals he après tant durant aquests cinc anys, especialment als amics de la Facultat de Matemàtiques i Estadística. M'agradaria mencionar especialment en Pablo i en Sergi, als quals admiro profundament, i amb qui he tingut la sort de poder comptar en tots els reptes acadèmics als que m'he enfrontat. També vull agrair a la Carla la seva amabilitat per deixar-me els seus apunts, que tan útils han resultat a l'hora de donar un altre punt de vista a les assignatures de la carrera.

No em voldria oblidar tampoc de tot el personal del CFIS, especialment en Miguel Ángel Barja, per creure en mi fins i tot abans que jo mateix i facilitar-me tots els aspectes no acadèmics de la carrera de manera que la meva única preocupació fos estudiar.

I finalment, però no per això menys important, vull agrair a la meva família tot el suport rebut en tots els projectes que he emprès al llarg de la meva vida.

A tots ells, moltíssimes gràcies!

Apèndix A

Programes per a la *rimless wheel*

En aquest capítol es detallen els programes de MATLAB que s'han utilitzat per calcular les trajectòries de la *rimless wheel*.

A.1 RW_irr

El programa *RW_irr* calcula a partir d'una condició inicial introduïda per l'usuari la trajectòria de la *rimless wheel* i en fa la representació gràfica.

```
% DEFINICIO DE PARAMETRES
model
theta_0 = input('Introdueix angle inicial: ');
thetapunt_0 = input('Introdueix la velocitat inicial: ');
x = input('Introdueix el punt inicial: ');
pas = 1E-3;

% VARIABLES AUXILIARS
error = 1E-6;
theta_ant = 1E2;
thetapunt_ant = 1E2;
err = 1;
verr = 0;
compt = 0;
stop = 0;

% CALCUL TRAJECTORIA
X = theta_0;
Y = thetapunt_0;
theta = theta_0;

while err > error %pot substituir-se per una condicio del tipus compt < it_max
    while theta < (alfa(x,theta) + angle_beta/2)
        thetapunt = sqrt(thetapunt_0^2 + ((2*m*g*l)/(Ic+m*l^2)) * (cos(theta_0) - cos(theta)));
        X = [X theta];
        Y = [Y thetapunt];
        theta = theta + pas;
        if thetapunt^2 < 0
            disp(sprintf('La rimless wheel es para'));
            stop = 1;
            break
        end
    end
    if stop == 1
        break
    end
    theta_0 = alfa(x,theta) - angle_beta/2;
    x = x + l*(sin(theta) + sin(angle_beta - theta));
    mu = ((m*l^2*cos(angle_beta) + Ic) / (m*l^2 + Ic));
    thetapunt_0 = mu*thetapunt;
    theta = theta_0;
end
```

```

err = sqrt((theta-theta_ant)^2+(thetapunt_0-thetapunt_ant)^2)
verr = [verr err];
theta_ant = theta;
thetapunt_ant = thetapunt_0;
compt = compt + 1;
if compt == 100
    disp(sprintf('No convergeix'));
    divergencia = 1;
    break
end
end

% PLOT TRAJECTORIA
plot(X, Y, 'b');
hold on
plot(X(1),Y(1), 'ro');
hold off
xlabel('\theta [rad]')
ylabel('d\theta/dt [rads^{-1}]')

```

A.2 alfa

La funció *alfa* retorna el valor de $\hat{\alpha}$ donats el punt x del camí de baixada on es recolza la cama de recolzament i l'angle de posició θ de la *rimless wheel*.

```

function [a] = alfa(x,theta)
    model
    y = x + l*(sin(theta) + sin(angle_beta-theta));
    a = - atan((slope_irr(y)-slope_irr(x))/(y-x));

```

A.3 slope_irr

La funció *slope_irr* retorna el la coordenada vertical del camí de baixada $f(x)$ donada una coordenada x de manera que el punt en qüestió ve donat per $(x, f(x))$.

```

function [y] = slope_irr(x)
    y = f(x);

```

A.4 model

El programa *model* defineix els paràmetres de geometria i massa de la *rimless wheel*. Definir els paràmetres en un fitxer a part permet tenir-los centralitzats per si s'han d'introduir variacions.

```

% RIMLESS WHEEL
n = 8;
angle_beta = 2*pi()/n;
l = 1;
m = 1;
Ic = 0.1;
g = 9.81;

```

A.5 gfunc

La funció *gfunc* retorna el valor de la funció $g(\alpha; \beta, \mu)$ per un α donat i amb els paràmetres β i μ del sistema fixats a partir dels paràmetres definits al programa *model*.



```
function [y] = gfunc(alpha)
    model
    mu = ((m*l^2*cos(angle_beta)+Ic)/(m*l^2+Ic));
    y = 1 - cos(alpha)*cos(angle_beta/2) - (1+mu^2)/(1-mu^2)*sin(alpha)*sin(angle_beta/2);
```


Apèndix B

Programes per al *compass walker*

En aquest capítol es detallen els programes de MATLAB que s'han utilitzat per calcular les trajectòries del *compass walker*.

B.1 CW_irr

El programa *CW_irr* calcula a partir d'una condició inicial introduïda per l'usuari la trajectòria del *compass walker* i en fa la representació gràfica. Cal recordar que la representació és la projecció 2-dimensional del vector d'estats 4-dimensional.

```
% DEFINICIO DE PARAMETRES
model
phi = input('Introdueix la condicio inicial: ');

% VARIABLES AUXILIARS I TOLERANCIES
error = 1E-6;
phi_ant = [1 1 1 1] + phi;
phi_ant2 = [1 1 1 1] + phi(1:4);
B = [0 1; 1 0];
ind = 0;
compt = 0;
err = 1;
verr = 0;
divergencia = 0;

% EXECUCIO EDO
X1 = phi(1);
Y1 = phi(3);
X2 = phi(2);
Y2 = phi(4);
options = odeset('Events', @collision_irr);

while err > error
    % PART DIFERENCIAL
    disp(sprintf('Part diferencial'));
    [T, Z, TE, ZE, IE] = ode45(@walking_irr, [0 1E3], phi, options);
    phi = ZE;
    X1 = [X1 transp(Z(:,1+ind))];
    Y1 = [Y1 transp(Z(:,3+ind))];
    X2 = [X2 transp(Z(:,1+(1-ind)))];
    Y2 = [Y2 transp(Z(:,3+(1-ind)))];

    % PART ALGEBRAICA
    disp(sprintf('Part algebraica'));
    beta = phi(2)-phi(1);
    A = step_irr(beta);
    phimenys = phi;
    phi = transp(blkdiag(B, A, 1)*transp(phi));
    phi(5) = phi(5) + 1*(sin(phi(1))-sin(phi(2)));
end
```

```

ind = 1 - ind;
X1 = [X1 phi(1+ind)];
Y1 = [Y1 phi(3+ind)];
X2 = [X2 phi(1+(1-ind))];
Y2 = [Y2 phi(3+(1-ind))];
err = norm(phi_ant(1:4) - phi(1:4), 2)
phi_ant = phi;
verr = [verr err];
compt = compt + 1;
if compt == 100
    disp(sprintf('No convergeix'));
    divergencia = 1;
    break
end
end
end

%PLOT TRAJECTORIA
plot(X1, Y1, 'b');
hold on
plot(X1(1), Y1(1), 'ro');
hold off
xlabel('\theta [rad]')
ylabel('d\theta/dt [rads^{-1}]')

```

B.2 collision_irr

La funció *collision_irr* retorna el valor de $r(\mathbf{x})$ donat un estat *phi* i un temps t (si bé aquest últim no intervé en la funció).

```

function [value, isterminal, direction] = collision_irr(t, phi)
model
if sin(phi(2))-sin(phi(1)) < 0
    value = 1;
else
    alphasilla = atan((slope_irr(phi(5))-slope_irr(phi(5)+1*(sin(phi(2))
        -sin(phi(1)))))/(1*(sin(phi(2))-sin(phi(1)))));
    value = phi(1) + phi(2) + 2*alphatilla;
end
isterminal = 1;
direction = -1;
end

```

B.3 slope_irr

La funció *slope_irr* retorna el la coordenada vertical del camí de baixada $f(x)$ donada una coordenada x de manera que el punt en qüestió ve donat per $(x, f(x))$.

```

function [y] = slope_irr(x)
y = f(x)

```

B.4 walking_irr

La funció *walking_irr* retorna el valor de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (equació del moviment entre col·lisions) donat un estat \mathbf{x} i serveix per a resoldre l'equació diferencial.

```

function [phi_out] = walking_irr(t, phi_in)
model
M = [m*(a^2+1^2)+mh*1^2+Ic -m*b*1*cos(phi_in(2)-phi_in(1));
    -m*b*1*cos(phi_in(2)-phi_in(1)) m*b^2+Ic];
C = [0 m*b*1*sin(phi_in(2)-phi_in(1))*phi_in(4);

```




```

    -m*b*l*sin(phi_in(2)-phi_in(1))*phi_in(3) 0];
G = g*[-(m*(a+l)+mh*l)*sin(phi_in(1)); m*b*sin(phi_in(2))];
vec = [phi_in(3); phi_in(4)];
vec2 = -inv(M)*(C*vec+G);
phi_out = [vec ; vec2; 0];

```

B.5 step_irr

La funció *step_irr* retorna la matriu **A** que defineix el canvi de velocitats en la col·lisió donat l'angle $\hat{\beta}$ entre ambdues cames.

```

function [A] = step_irr(beta)
    model
    Qmes = [Ic+m*l*(1-b*cos(beta))+mh*l^2+m*a^2 Ic+m*b*(b-l*cos(beta));
           -m*b*l*cos(beta) Ic+m*b^2];
    Qmenys = [Ic+(mh*l^2+2*m*a*l)*cos(beta)-m*a*b Ic-m*a*b; Ic-m*a*b 0];
    A = inv(Qmes)*Qmenys;

```

B.6 model

El programa *model* defineix els paràmetres de geometria i massa del *compass walker*. Definir els paràmetres en un fitxer a part permet tenir-los centralitzats per si s'han d'introduir variacions.

```

% COMPASS WALKER
a = 0.5;
b = 0.5;
m = 5;
mh = 10;
Ic = 0;
g = 9.81;
l = a+b;

```


Bibliografia

- [1] C. Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, 1999.
- [2] M.J. Coleman. *A stability-study of a three-dimensional passive dynamic model of a human gait*. PhD thesis, Cornell University, 1998.
- [3] J.M. Font and J. Kövecses. Passive dynamic walking: State-of-the-art. Technical report, McGill University, Montreal, 2007.
- [4] A. Goswami, B. Espiau, and A. Keramane. Limit cycles in a passive compass gait biped and passivity-mimicking control laws. *Journal of Autonomous Robots*, 1997.
- [5] A. Goswami, B. Thilot, and B. Espiau. Compass-like biped robot part i: Stability and bifurcation of passive gaits. Technical report, INRIA Rhône-Alpes, 1996.
- [6] T. McGeer. Passive dynamic walking. *Int. Journal of Robotics Research*, 1990.
- [7] T. McGeer. Passive walking with knees. *Proc. of the IEEE Int. Conference on Robotics and Automation*, 1990.
- [8] W. Schiehlen. Energy-optimal design of walking machines. *Multibody Systems Dynamics*, 2005.
- [9] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.