

Projecte de Fi de Carrera
Enginyer Industrial

Planificación de movimientos de dos conjuntos brazo-mano robóticos imitando movimientos humanos

MEMÒRIA

Autor: Néstor García Hidalgo
Director: Raúl Suárez Feijóo
Ponent: Jan Rosell Gratacòs
Convocatòria: Octubre 2014



Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



Resumen

En este trabajo se presenta un método para resolver el problema de la planificación de movimientos de un sistema antropomórfico formado por dos conjuntos brazo-mano robóticos. El objetivo principal es minimizar el coste computacional de la resolución del problema a la vez que se garantiza la semejanza entre los movimientos planificados para el sistema robótico y los movimientos que realizaría un operador humano al ejecutar la misma tarea. Este documento presenta una descripción del enfoque propuesto así como experimentos reales que animan a seguir trabajando en esta línea.

Para alcanzar el objetivo propuesto, se simplifica el problema reduciendo la dimensión del espacio de configuraciones del sistema. Esta reducción se realiza usando el concepto de Direcciones Principales de Movimiento (PMD, del inglés *Principal Motion Directions*), que son obtenidas aplicando el Análisis de Componentes Principales (PCA, del inglés *Principal Component Analysis*) a conjuntos de muestras de movimientos del sistema robótico. Estas muestras son el resultado del mapeado de los movimientos capturados de un operador humano realizando una tarea específica a los movimientos que realizaría el sistema antropomórfico si realizase dicha tarea.

Se han capturado los movimientos de varias tareas y se han analizado los PMDs obtenidos de cada una de las tareas. Estos PMDs se han utilizado para planificar los movimientos del sistema antropomórfico para cuantificar la mejora obtenida respecto a la planificación sin usar los PMDs.

También se propone una medida para cuantificar la semejanza entre dos tareas, es decir medir la distancia existente entre dos tareas en un determinado espacio métrico. Esta medida permite identificar conjuntos de tareas semejantes entre ellas y consecuentemente clasificarlas en familias de tareas.

En este proyecto, cada uno de los conjuntos brazo-mano robóticos está formado por un brazo UR5 de Universal Robots, de 6 grados de libertad, y por una mano mecánica Allegro Hand de SimLab de 4 dedos y 16 grados de libertad. Sin embargo, la metodología propuesta es aplicable a otros sistemas con un número de grados de libertad y/o una estructura cinemática diferente.

Índice

RESUMEN	1
ÍNDICE	3
1. INTRODUCCIÓN	5
1.1. Motivación.....	5
1.2. Descripción del problema y la solución propuesta.....	7
1.3. Objetivos y alcance del proyecto	7
1.4. Contenido de la memoria.....	8
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	9
2.1. Modelado de cadenas cinemáticas.....	9
2.1.1. Matrices de transformación homogénea	9
2.1.2. Parámetros Denavit-Hartenberg	10
2.2. Análisis de componentes principales.....	10
3. HARDWARE Y SOFTWARE UTILIZADO	13
3.1. Hardware	13
3.1.1. Allegro Hand	13
3.1.2. UR5.....	14
3.1.3. Sistema antropomórfico	14
3.1.4. Cyberglove.....	15
3.1.5. Fastrak	15
3.2. Software.....	16
3.2.1. The Kautham Project	16
3.2.2. Robot Operating System.....	18
4. ENFOQUE PROPUESTO	19
4.1. Metodología	19
4.2. Captura de movimientos.....	21
4.3. Mapeado de los movimientos capturados	21
4.3.1. Calibración de los guantes	22
4.3.2. Cinemática inversa.....	25
4.3.3. Mapeado de las posiciones de las manos.....	28
4.3.4. Verificación de los datos obtenidos de los <i>trackers</i>	31
4.3.5. Verificación de los datos obtenidos de los guantes.....	32
4.4. Análisis de componentes principales.....	33
4.4.1. Calidad de las muestras.....	34
5. EXPERIMENTOS	35

6. RESULTADOS EXPERIMENTALES	37
6.1. Direcciones Principales de Movimiento	37
6.2. Semejanza entre tareas.....	42
6.3. Planificación con PMDs	44
6.4. Planificación con PMDs de otra tarea.....	47
6.5. Planificación con PMDs de combinaciones de tareas.....	48
7. PRESUPUESTO	49
8. IMPACTO AMBIENTAL	51
CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	53
AGRADECIMIENTOS	55
BIBLIOGRAFÍA	57
A. RESOLUCIÓN DE LA CINEMÁTICA INVERSA DEL UR5	59
B. POSES DE LA MANO UTILIZADAS PARA CALIBRAR EL GUANTE SENSORIZADO	63
C. POSES DE LA MANO UTILIZADAS PARA LA CALIBRACIÓN DEL MAPEADO DE LAS POSICIONES DE LAS MANOS	65
D. DEMOSTRACIÓN DE LA DISTANCIA ENTRE DOS TAREAS	67

1. Introducción

1.1. Motivación

La planificación de movimientos de robots es un campo que crece en importancia a medida que la complejidad de los dispositivos robóticos aumenta, siendo de relevancia en diferentes aplicaciones, que van desde manipuladores industriales hasta robots humanoides. En el caso de los robots humanoides, el objetivo de la planificación de movimientos tiene dos vertientes. Por un lado, se buscan los movimientos válidos para resolver una tarea dada mientras se trata con un sistema que relativamente tiene un gran número de grados de libertad (DOF, del inglés *Degree Of Freedom*) [1]. Y, por el otro lado, se intenta imitar los movimientos de los seres humanos, a veces con una estructura cinemática que no es completamente equivalente a la humana.

Persiguiendo el primer objetivo, se han desarrollado diferentes planificadores de movimientos capaces de tratar con sistemas con un gran número de DOFs, siendo los más frecuentemente usados los basados en muestreo, como el *Probabilistic Road Map* (PRM) [2] o los *Rapidly-exploring Random Trees* (RRT) [3]. Se han propuesto distintas variaciones de estos enfoques con el fin de incorporar mejoras, cómo, por ejemplo, para optimizar los movimientos obtenidos de acuerdo a una función objetivo determinada [4], para tratar con restricciones [5], para sesgar el muestreo hacia las regiones más prometedoras del espacio de configuraciones utilizando dominios dinámicos [6], o utilizando información del área de trabajo [7] o haciendo uso del Análisis de Componentes Principales [8].

En cuanto al segundo objetivo, los movimientos humanos han sido estudiados cuidadosamente, en particular con respecto a la coordinación de los movimientos. El aspecto humano de los movimientos se consigue mediante la búsqueda de la correlación adecuada entre los movimientos de las distintas articulaciones.

Un ejemplo típico del problema de planificación mencionado anteriormente se encuentra en las manos robóticas, que son dispositivos con muchos DOFs (actualmente existen muchas manos con cuatro o cinco dedos con tres o cuatro DOFs por dedo, por ejemplo, Barrett Hand de Barrett Technology, SAH y SDH de Schunk, Shadow Dextrous Hand de Shadow Robot Company, H2 Compliant Hand de Meka Robotics, Gifu Hand de Dainichi Ltd., Azurra Hand de Prensilia y Allegro Hand de SimLab). Por lo tanto, la planificación de movimientos de la mano tiene, en general, una alta complejidad.

En este contexto, varios trabajos utilizan las relaciones entre las posiciones articulares de los dedos con el fin de reducir la complejidad de la planificación, así como para buscar posturas

de la mano con apariencia humana. La idea básica es establecer una correlación entre los DOFs de los dedos de la mano robótica equivalentes a la existente en la mano humana.

Relevantes trabajos fueron pioneros ocupándose del problema de sujetar objetos. Éstos analizaron las correlaciones de las articulaciones de los dedos cuando la mano estaba agarrando un objeto, llamándolas "sinergias posturales de la mano" [9]. Otras obras utilizaron el mismo concepto para encontrar configuraciones de la mano previas a agarrar un objeto [10], llamando en este caso "eigengrasp" a cada uno de los movimientos independientes de la mano que incluían un movimiento correlado de todas las articulaciones de la mano. Estos trabajos permiten reducir el espacio de configuraciones de la mano hasta un subespacio bidimensional al agarrar un objeto. El mismo concepto se utilizó en otros trabajos para propósitos de telemanipulación [11].

Otros trabajos aplican el mismo concepto a la planificación de movimientos imitando posturas de una mano humana [12]. En este caso la correlación entre los valores articulares de los dedos se utiliza para determinar direcciones de movimiento y, por lo tanto, se les llama Direcciones Principales de Movimiento (PMD, del inglés *Principal Motion Directions*). La planificación de movimientos requiere la determinación de la correlación de los movimientos de los dedos cuando se mueven libremente sin ninguna restricción externa, tratando de cubrir todo el espacio de trabajo de la mano [13]. Otras aplicaciones trabajan en la síntesis de movimientos parecidos a los humanos para aplicaciones gráficas [14]. También se han utilizado técnicas basadas en sinergias para determinar la fuerza con la que se debe agarrar un objeto [15].

Los trabajos mencionados anteriormente, considerando la utilización de sinergias para reducir la complejidad de la planificación de movimientos y buscando movimientos que imiten los movimientos humanos, son importantes en este trabajo ya que se propone el uso de estos conceptos en la planificación de movimientos de un sistema antropomórfico formado por dos conjuntos brazo-mano.

La cantidad de sistemas antropomórficos disponibles en el mercado ha crecido significativamente en los últimos años, ya sea como un producto propio (por ejemplo, [16]) o como una composición de brazos manipuladores montados imitando la estructura humana (por ejemplo, [17]). Estos dispositivos suelen tener 12 o 14 DOFs, que es un número significativamente grande cuando se deben planificar movimientos, y se hace aún más relevante cuando el sistema antropomórfico es parte de un robot humanoide o cuando está equipado con manos como los mencionados anteriormente.

Uno de los primeros trabajos sobre técnicas de planificación con varios robots [18] planteó un método de planificación para dos robots con actuadores de torque limitado para encontrar la trayectoria de menor tiempo entre dos configuraciones determinadas. En este

caso se trabajaba con dos robots con un grado de libertad cada uno. Trabajos posteriores relacionados se pueden ver en [19] o [20]. Como se puede ver, un gran número de trabajos tratan de dar una solución al problema de la planificación de movimientos de sistemas formados por varios robots actuando sólo sobre el planificador.

1.2. Descripción del problema y la solución propuesta

El problema que se pretende resolver en este trabajo es el de la planificación de movimientos de un sistema antropomórfico formado por dos conjuntos brazo-mano robóticos.

La solución que se propone es la reducción de la complejidad de movimientos del sistema robótico sin realizar ninguna modificación a nivel estructural ni a nivel cinemático. Con ello se pretende realizar la planificación de movimientos de una tarea concreta de una forma más eficiente, utilizando los mismos robots, el mismo planificador y el mismo escenario. Esta reducción computacional se consigue aplicando la técnica del Análisis de Componentes Principales (PCA, del inglés *Principal Component Analysis*), con la que se van a obtener las Direcciones Principales de Movimiento (PMDs, del inglés *Principal Motion Directions*) para una tarea concreta.

Mediante el procesado de la información obtenida de unos seguidores de posición (*trackers*) y unos guantes sensorizados, que capturan el movimiento de una persona en un espacio de trabajo real, se consigue obtener la información de cada grado de libertad del sistema antropomórfico como si éste estuviera realizando la misma tarea. Esta información, una vez obtenida, se analiza utilizando la técnica del PCA, obteniéndose así los PMDs de dicha tarea. Si se escoge un subconjunto de los PMDs obtenidos y se utiliza en la planificación de movimientos del sistema robótico, se logra desarrollar de forma más eficiente la tarea cuyos movimientos se han capturado al inicio del proceso.

1.3. Objetivos y alcance del proyecto

El principal objetivo del presente trabajo es el diseño de un método que permita la planificación de movimientos de dos conjuntos brazo-mano robóticos haciendo uso de los PMDs obtenidos a partir de movimientos humanos reales.

Para ello es necesario:

- Diseñar y poner en funcionamiento el software y hardware necesario para capturar los movimientos de un operario humano, obtener las configuraciones del sistema robótico correspondientes a las configuraciones humanas capturadas, realizar el PCA sobre

las muestras obtenidas, obtener los PMDs, y realizar la planificación de movimientos de los dos conjuntos brazo-mano robóticos.

- Calibrar los dispositivos de captura y obtener los movimientos de un operario humano realizando diversas tareas.
- Modelar el sistema antropomórfico en el entorno *The Kautham Project* [21] y estudiar la estructura cinemática para diseñar un método para mapear las configuraciones de los brazos y manos del humano a las del sistema robótico.
- Validar los PMDs obtenidos mediante distintos experimentos.

En este proyecto se utilizará un único tipo de planificador (*RRT-Connect*) para la resolución de las tareas, puesto que se quiere comprobar si el uso de los PMDs introduce alguna mejora. El sistema antropomórfico implementado tendrá las bases de los brazos fijos, por lo tanto tan sólo es posible resolver tareas que no requieran desplazamientos o movimientos del tronco. Tampoco se considerará el hecho de que el operador humano tenga que hacer algo en la parte trasera de su cuerpo. Al realizar la planificación de los movimientos, se supondrán conocidas las configuraciones inicial y final.

1.4. Contenido de la memoria

Después de esta introducción, el capítulo 2 presenta los fundamentos teóricos necesarios para entender los capítulos posteriores. El capítulo 3 describe el hardware utilizado así como el software diseñado para realizar este proyecto. La solución propuesta es descrita en detalle en el capítulo 4. En el capítulo 5 se presentan varios ensayos y sus resultados se presentan en el capítulo 6. El presupuesto y el impacto ambiental del proyecto se encuentran en los capítulos 7 y 8, respectivamente. Finalmente se presentan las conclusiones del proyecto y el posible trabajo futuro.

2. Fundamentos teóricos

2.1. Modelado de cadenas cinemáticas

Para poder trabajar con los brazos y las manos robóticas, es necesario disponer de un modelo matemático que los describa. En este trabajo los dos conjuntos brazo-mano robóticos se han modelado como una estructura de cadenas cinemáticas.

En el modelado de un robot utilizando una estructura de cadenas cinemáticas cada elemento fijo del robot queda representado por un elemento lineal, mientras que las articulaciones se representan por enlaces entre los elementos lineales. En la Fig. 2.1 se representan una cadena cinemática simple y una cadena cinemática ramificada.

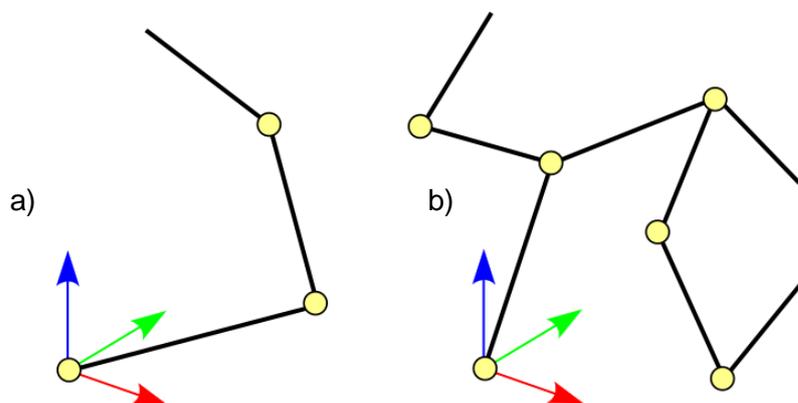


Fig. 2.1 a) Cadena cinemática simple; b) Cadena cinemática ramificada.

Para determinar el número de grados de libertad de un robot, es suficiente con contar el número de articulaciones no acopladas del mismo, es decir, los enlaces con movimiento independiente en el correspondiente modelo cinemático.

2.1.1. Matrices de transformación homogénea

Para modelar las cadenas cinemáticas de un robot se utilizan las matrices de transformación homogénea. Éstas permiten asociar una base de referencia a cada elemento lineal de la cadena. La base estará formada por un origen, fijo en relación al elemento lineal y los tres ejes de la base que determinan su orientación.

De esta manera, es posible referenciar la ubicación en el espacio (posición y orientación) de un elemento del robot respecto al elemento anterior. Procediendo de este modo, encadenando las sucesivas transformaciones homogéneas, es posible determinar la posición y orientación de cualquier elemento de la cadena cinemática.

La expresión de una matriz de transformación homogénea es:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} R & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xx} & n_{yx} & n_{zx} & p_x \\ n_{xy} & n_{yy} & n_{zy} & p_y \\ n_{xz} & n_{yz} & n_{zz} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.1})$$

Dónde la matriz ${}^{i-1}T_i$ es la matriz de transformación homogénea de la base i respecto la base $i - 1$, siendo:

$\mathbf{n}_x = (n_{xx}, n_{xy}, n_{xz})$ el eje x de la base i expresado en la base $i - 1$,

$\mathbf{n}_y = (n_{yx}, n_{yy}, n_{yz})$ el eje y de la base i expresado en la base $i - 1$,

$\mathbf{n}_z = (n_{zx}, n_{zy}, n_{zz})$ el eje z de la base i expresado en la base $i - 1$,

$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ la traslación desde el origen de la base $i - 1$ al de la base i , expresado en la base $i - 1$,

Para encadenar sucesivas bases, únicamente es necesario multiplicar convenientemente las respectivas matrices de transformación homogénea:

$${}^0T_n = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{n-1}T_n \quad (\text{Ec. 2.2})$$

2.1.2. Parámetros Denavit-Hartenberg

Los parámetros Denavit-Hartenberg son una herramienta para modelar la cinemática de un robot [22]. Consisten en cuatro parámetros ($\theta_i, \alpha_{i-1}, d_i$ y a_{i-1}) para cada par articulación-elemento lineal que son determinados a partir de la geometría del robot. Estos parámetros permiten obtener fácilmente las diferentes matrices de transformación homogénea ${}^{i-1}T_i$. Existen diferentes convenciones para definir los parámetros Denavit-Hartenberg (parámetros D-H). En este trabajo, se ha utilizado la formulación siguiente:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ \cos(\alpha_{i-1})\sin(\theta_i) & \cos(\alpha_{i-1})\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_{i-1}) & -d_i\sin(\alpha_{i-1}) \\ \sin(\alpha_{i-1})\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_{i-1})\cos(\theta_i) & \cos(\alpha_{i-1}) & d_i\cos(\alpha_{i-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.3})$$

2.2. Análisis de componentes principales

La técnica de Análisis de Componentes Principales [23] es una herramienta estadística introducida por Harold Hotelling en 1933, aunque sus orígenes se encuentran en los ajustes ortogonales por mínimos cuadrados introducidos por Karl Pearson en 1901. Esta técnica se emplea en problemas de análisis de datos multivariantes, y tiene como principal objetivo la reducción de la dimensionalidad del conjunto de datos.

Para conseguir esta reducción de la dimensión del problema, el PCA analiza la variabilidad de un conjunto de datos, y busca la proyección sobre un nuevo sistema de coordenadas donde los datos queden mejor representados en términos de mínimos cuadrados. La mayor varianza queda reflejada sobre el primer eje del nuevo sistema de coordenadas, denominado primer componente principal, la segunda varianza más grande en el segundo eje, y así sucesivamente. Estos ejes quedan ordenados por importancia permitiendo descartar los de menor interés. De esta manera se consigue reducir la dimensión del problema a costa de una pequeña pérdida de información.

Por tanto, en un ejemplo de aplicación, si se dispone de p variables con n elementos cada una, se forma una matriz de muestras $n \times p$ con este conjunto de datos, de manera que las columnas contienen las distintas variables y las filas los elementos de éstas. Se le resta a cada columna su media para conseguir que todas tengan media 0. Se calcula la matriz de covarianzas a partir de la matriz de muestras una vez sustraída a cada columna su media. Debido a la simetría de la matriz de covarianzas, existe una base completa de vectores propios de la misma. Con esto se obtiene una matriz de transformación que permite, mediante una transformación lineal, llevar el conjunto de datos referenciado sobre un eje de coordenadas a un nuevo conjunto de datos referenciado sobre esta nueva base. Esta nueva base tiene como característica que recoge, para el conjunto original de datos, aquéllos con la varianza de mayor tamaño y la captura en el primer eje (primer componente principal), la segunda varianza más grande en el segundo eje, y así sucesivamente. Los componentes principales corresponden a los vectores propios de la matriz de covarianzas, los cuales son todos ortogonales y por ello forman una base. En este trabajo, a las componentes principales se les denomina Direcciones Principales de Movimiento o PMDs, del inglés *Principal Motion Directions*. De este modo, un conjunto de n muestras en un espacio bidimensional (x_1, x_2) quedará mejor representado en una nueva base (\hat{x}_1, \hat{x}_2) con el nuevo origen de coordenadas en el baricentro de los datos \bar{x} (Fig. 2.2).

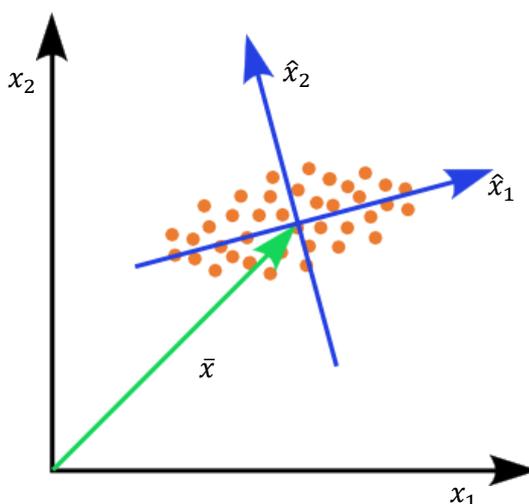


Fig. 2.2 Direcciones Principales de Movimiento.

Mediante este procedimiento los datos originales quedan representados sobre un nuevo sistema de coordenadas, donde la mayor cantidad de información queda reflejada en los primeros componentes principales y, por tanto, eliminando los componentes principales de menor importancia, se consigue reducir la dimensionalidad del conjunto de datos con la menor pérdida de información posible. Se debe, por tanto, resolver el compromiso entre reducción de dimensión y pérdida de información, que habitualmente se fija en escoger el conjunto de componentes principales que representan entre el 90% y 95% de la información.

No obstante, existe un problema a la hora de decidir cuántas componentes son consideradas significativas. Existen varios criterios para ello:

1. **Criterio de Cattell.** Consiste en observar si, en el gráfico de barras que muestra las magnitudes de varianzas de las componentes en orden descendiente, existe algún punto que separe, de alguna manera, las magnitudes grandes de las pequeñas. Es decir, si hay un punto en el que haya un salto mayor de una magnitud a la inmediatamente más pequeña.
2. **Criterio de Kayser.** Consiste en excluir las componentes con varianzas menores a la media. Este criterio excluye muchas variables, lo que reduce en gran medida el número de variables.
3. **Criterio de la varianza acumulada.** Consiste en incluir las componentes que impliquen hasta un cierto porcentaje de la varianza acumulada. Normalmente, se suele escoger un 90-95%. Este criterio, al contrario del criterio anterior, excluye muy pocas variables.

El uso de un criterio u otro dependerá de cómo estén distribuidas las muestras y el uso que se vaya a hacer de las componentes principales.

3. Hardware y software utilizado

3.1. Hardware

3.1.1. Allegro Hand

Allegro Hand (Fig. 3.1) es una mano robótica altamente adaptable. Consta de cuatro dedos y dieciséis articulaciones independientes controladas por corriente. Las especificaciones técnicas se muestran en la Tabla 3.1.



Fig. 3.1 Allegro Hand de SimLab.

Peso	1,2 kg	
Carga	5 kg	
Torque máximo	0,7 Nm	
Rango de movimiento de las articulaciones de los dedos [rad]	0	[−0,47, 0,47]
	1	[−0,196, 1,61]
	2	[−0,174, 1,709]
	3	[−0,227, 1,618]
Rango de movimiento de las articulaciones del pulgar [rad]	0	[0,263, 1,396]
	1	[−0,105, 1,163]
	2	[−0,189, 1,644]
	3	[−0,162, 1,719]
Resolución	$4 \cdot 10^{-5}$ rad	

Tabla 3.1 Especificaciones técnicas de Allegro Hand

Los sentidos positivos de giro de cada articulación se muestran en la Fig. 3.2.

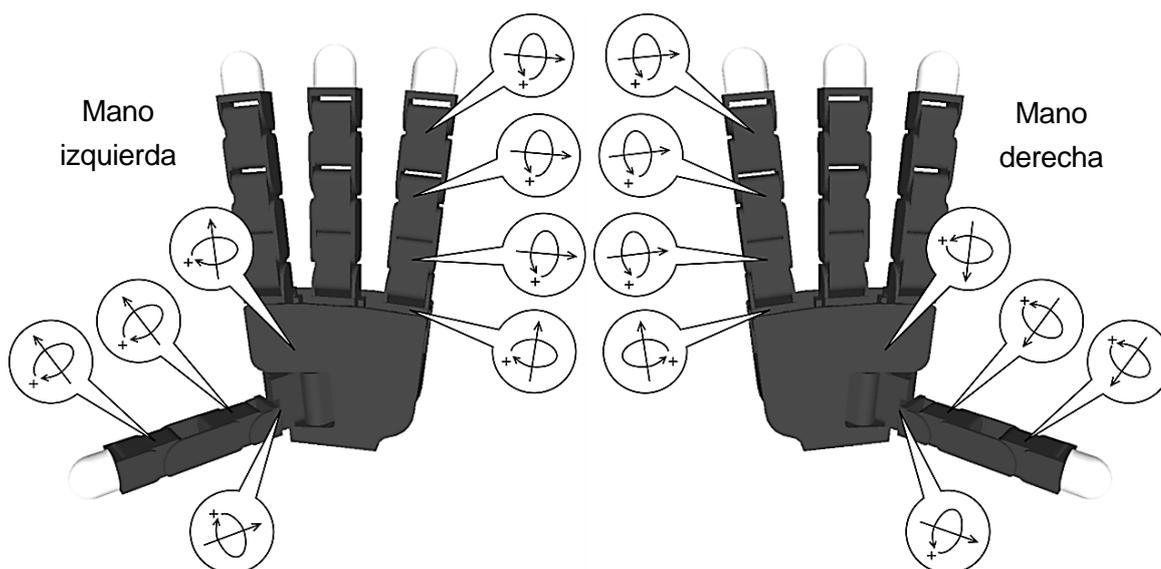
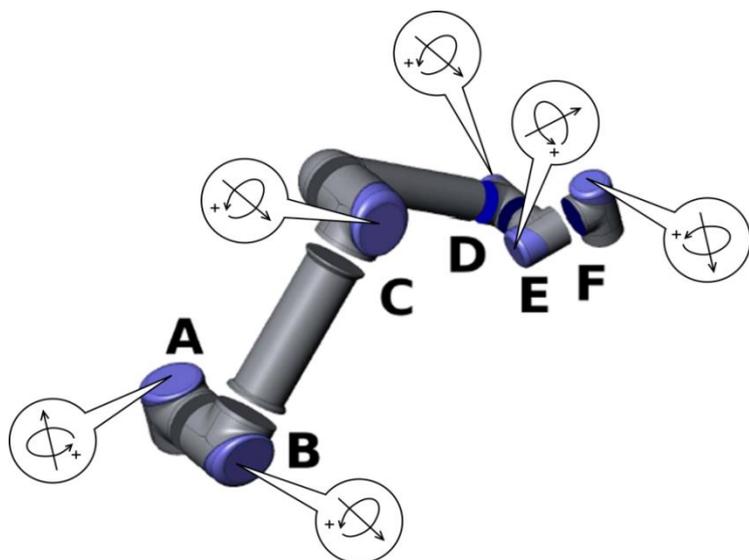


Fig. 3.2 Sentidos positivos de giro y configuración por defecto de las articulaciones de Allegro Hand si se trata de la versión mano izquierda o derecha.

3.1.2. UR5

El robot UR5 (Fig. 3.3) es un brazo manipulador que consta de las siguientes 6 articulaciones: *base* (A), *hombro* (B), *codo* (C) y *muñeca 1, 2 y 3* (D, E y F, respectivamente). La base es el punto en el que se monta el robot y la muñeca 3, donde una herramienta puede ser acoplada. Las especificaciones técnicas se muestran en la Tabla 3.2.



Articulación	Torque
Base	2,3 Nm
Hombro	2,3 Nm
Codo	2,3 Nm
Muñeca 1	1,3 Nm
Muñeca 2	1,3 Nm
Muñeca 3	1,3 Nm

Peso	18,4 kg
Carga	5 kg
Alcance	850 mm
Rango	$\pm 2\pi$ rad
Velocidad máxima	π rad/s

Fig. 3.3 Sentidos positivos de giro de las articulaciones del UR5.

Tabla 3.2 Especificaciones técnicas de UR5.

El espacio de trabajo del brazo robótico es una esfera de 850 mm de radio excluyendo una zona cilíndrica de radio 117 mm (véase Fig. 3.4).

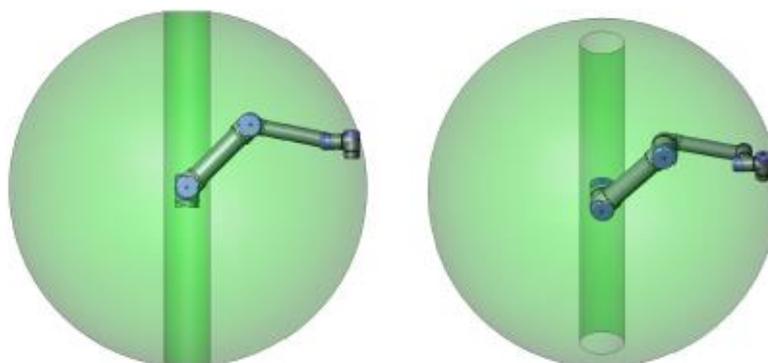


Fig. 3.4 Espacio de trabajo de UR5.

3.1.3. Sistema antropomórfico

El sistema antropomórfico (Fig. 3.5) está formado por dos robots UR5 sujetos, emulando un torso humano, a una estructura metálica que incorpora una superficie horizontal que sirve como mesa. Ambos brazos robóticos tienen acopladas como elementos terminales sendas manos Allegro Hand.

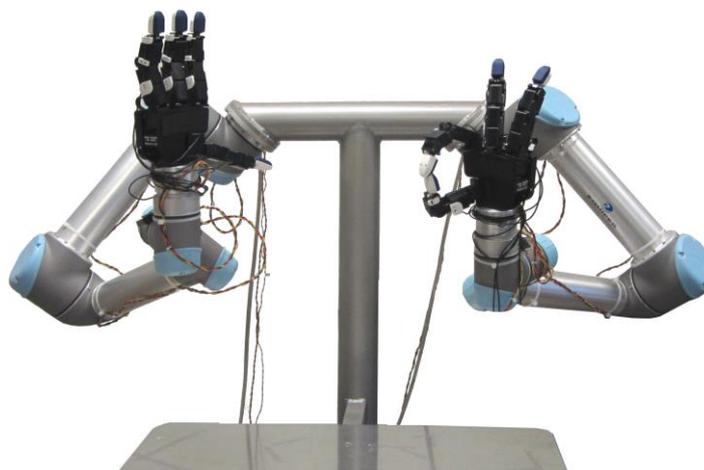


Fig. 3.5 Sistema antropomórfico utilizado.

3.1.4. Cyberglove

Para capturar la pose de las manos del operario se hará uso de los guantes sensorizados Cyberglove (Fig. 3.6). Éstos constan de 22 sensores: tres de flexión por dedo, cuatro de abducción, uno para el arco de la mano, y dos para la flexión y abducción de la muñeca.

El guante tiene un soporte para albergar un sensor de rastreo de movimiento para conocer la orientación y posición de la muñeca. El sistema de captura de movimiento Cyberglove se usa en una amplia variedad de aplicaciones, entre las que se incluyen la evaluación de prototipos digitales, la biomecánica, la realidad aumentada, la animación, entre otras.

En este trabajo se ha utilizado una versión del guante cableada con conexión RS232 para la mano derecha y una versión inalámbrica con conexión Bluetooth para la mano izquierda. Las especificaciones técnicas de ambos guantes están en la Tabla 3.3.



Fig. 3.6 Guante sensorizado Cyberglove.

Número de sensores	22
Resolución	$< 1^\circ$
Repetibilidad	3°
Linealidad	0,6%
Frecuencia de muestreo	90 muestras/s

Tabla 3.3 Especificaciones técnicas de Cyberglove

3.1.5. Fastrak

Para capturar la posición y orientación de las muñecas del operario, se emplea el *tracker* Fastrak de Polhemus (Fig. 3.7). El Fastrak consta de una base, una fuente de alimentación, un emisor y dos receptores. El emisor se coloca en el lugar donde se desea fijar el centro de referencia de los ejes de coordenadas en el mundo. A partir de esta referencia se calcula la posición relativa del receptor. En la Tabla 3.4 se detallan sus características técnicas.



Fig. 3.7 Seguidor magnético de movimiento Fastrak.

Número de sensores	Hasta 4
Latencia	4 ms
Precisión translación	8 mm
Precisión giro	0,15°
Frecuencia de muestreo	60 muestras/s (con dos sensores)
Rango	3 m
Interfaz	RS232

Tabla 3.4 Especificaciones técnicas de Fastrak.

Es importante no colocar el emisor cerca de elementos metálicos, tales como las patas de una mesa o silla o elementos estructurales como vigas o columnas, ya que estos podrían interferir en la señal. También se han de mantener los cables del emisor y de los receptores separados.

3.2. Software

Para este proyecto se han desarrollado varios programas, todos ellos en C++, y se han utilizado varias herramientas y librerías. Por ejemplo, se ha utilizado PugiXML (pugixml.org) para leer y crear documentos en formato XML, la librería Armadillo (arma.sourceforge.net) para realizar el PCA y demás operaciones algebraicas, ROS [24] para realizar la calibración de los parámetros del mapeado de las configuraciones de la mano humana a las de la mano robótica, y *The Kautham Project* para realizar las simulaciones de los robots, comprobar los datos de los sensores y resolver la planificación de movimientos.

3.2.1. The Kautham Project

The Kautham Project es un entorno de simulación usado en el Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials (IOC) para la investigación y la enseñanza en planificación de movimientos de robots (véase Fig. 3.8). La herramienta permite abordar problemas con uno o varios robots, siendo definido cada robot como un árbol cinemático con una base móvil, por ejemplo, se pueden planear y simular movimientos de robots que van desde simples robots con dos grados de libertad hasta escenarios con varios robots móviles equipados con manos antropomórficas. Diferentes estrategias de planificación pueden ser utilizadas y rápidamente parametrizadas. Permite definir de una manera sencilla el acoplamiento entre diversos grados de libertad, incluso entre DOF pertenecientes a diferentes robots. También facilita la simulación dinámica y la integración con planificadores de tareas.

Este paquete de software ha sido desarrollado en C++ pensando en las directivas de código abierto y multiplataforma. Hace uso de librerías como Qt (qt-project.org) para la interfaz de usuario, la librería Coin3D (www.coin3d.org) para el renderizado gráfico, la librería PQP

(gamma.cs.unc.edu/SSV) para la detección de colisiones y la librería ODE (www.ode.org) para la simulación dinámica de sólidos rígidos. Los ficheros de entrada que definen cada problema usan el formato XML (www.w3.org/XML) y la geometría de los robots y de la escena se describe en formato VRML (web3d.org).

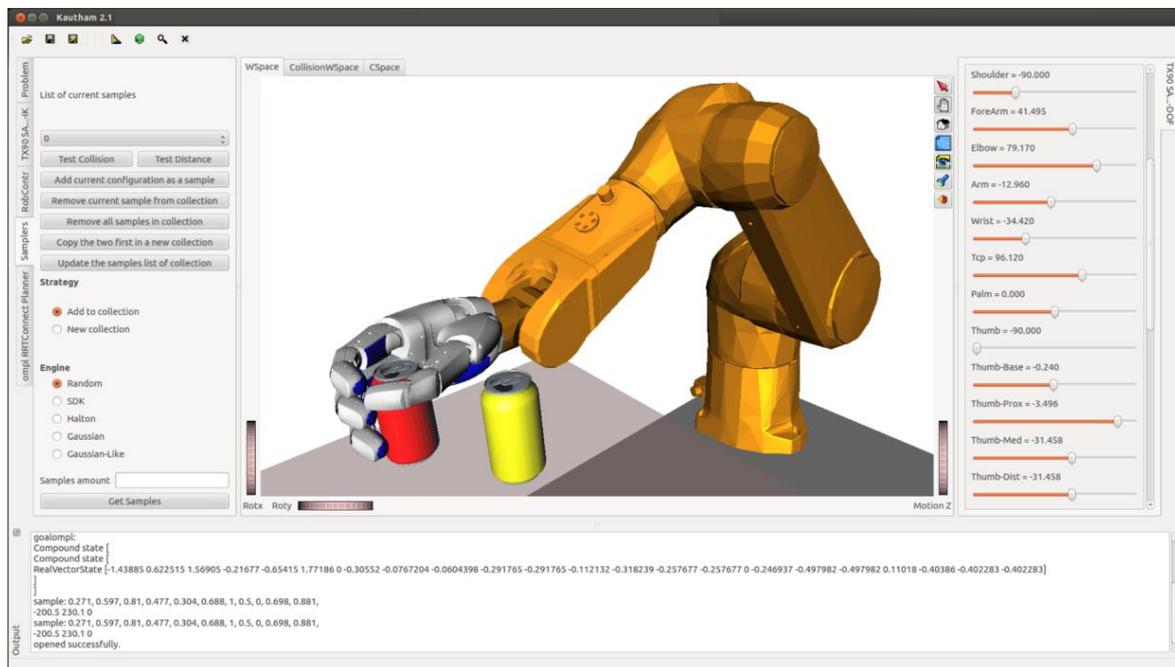


Fig. 3.8 Entorno gráfico de *The Kautham Project*.

El núcleo principal de planificadores viene dado por la librería *Open Motion Planning Library* (OMPL) [25], siendo los planificadores basados en muestreo, los más numerosos. Estos planificadores extraen muestras aleatorias dentro del espacio de configuraciones del problema, con estas muestras se va creando un conjunto de muestras interconectadas en el espacio libre de colisiones. Para cada nueva muestra, se comprueba si ésta se encuentra dentro del espacio libre de colisiones, en caso afirmativo, se utiliza un planificador local para unir esta nueva muestra a una muestra vecina perteneciente al conjunto de muestras libres de colisión. De este modo, es posible trazar caminos libres de colisión entre una muestra inicial y otra muestra objetivo (Fig. 3.9).

Los robots y los obstáculos se definen como cadenas cinemáticas a partir de los parámetros Denavit-Hartenberg o con el formato *Universal Robotic Description Language* (wiki.ros.org/urdf), siendo el primer caso el método utilizado en este trabajo.

Junto con la aplicación gráfica, también se incluye una aplicación de consola que permite ejecutar diferentes problemas como bancos de pruebas. Esto facilita la resolución de un problema con diferentes planificadores, diferentes estrategias de muestreo o incluso con diferentes configuraciones de un mismo planificador. También permite al usuario ejecutar el mismo problema con diferente número de repeticiones o sujeto a diferentes restricciones de

memoria o tiempo de planificación. Una vez resuelto el problema se crea un fichero con los resultados. Este fichero puede ser leído con las herramientas de OMPL para crear diferentes gráficos (Fig. 3.9) o ser cargados en algún gestor de bases de datos.

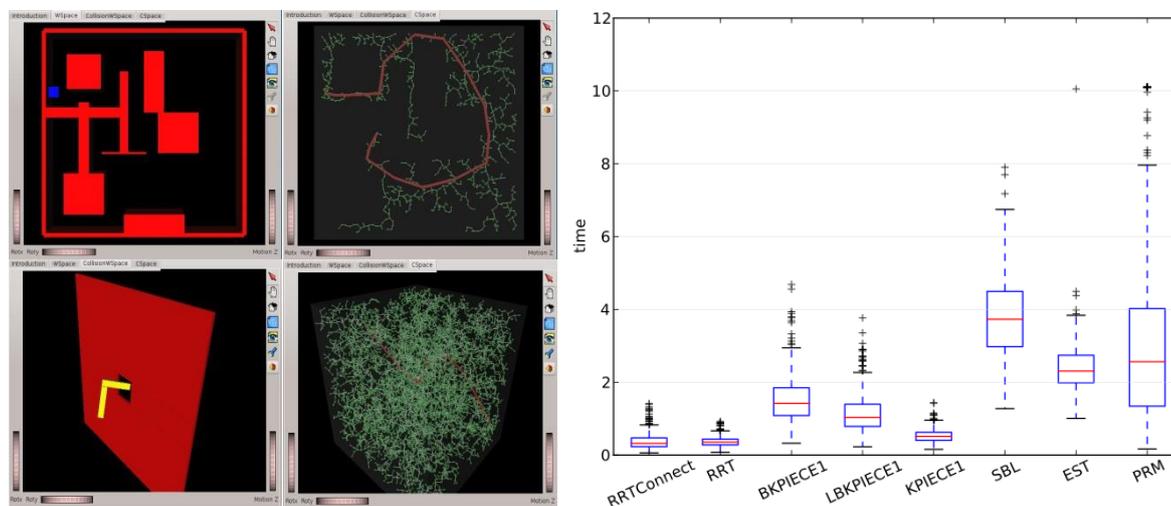


Fig. 3.9 Ejemplos de espacios de trabajo y espacios de configuraciones, a la izquierda, y tiempos de ejecución (en segundos) de varios planificadores para un mismo problema, a la derecha.

3.2.2. Robot Operating System

El *Robot Operating System* (ROS) es un sistema operativo multiplataforma para robots, desarrollado en código abierto, que ofrece distintas librerías y herramientas para el desarrollo de aplicaciones robóticas. Permite abordar de manera sencilla problemas en el desarrollo dentro del campo de la robótica, aportando soluciones en determinadas áreas, como por ejemplo abstracción del hardware, control de dispositivos de bajo nivel, implementación de funcionalidades de uso común, intercambio de mensajes entre procesos y mantenimiento de paquetes.

La estructura de ROS es una arquitectura de nodos. En cada uno de estos nodos se realiza el procesamiento de la información, y estos pueden recibir, mandar y multiplexar mensajes de sensores, realizar tareas de control, supervisión de estados, entre otros. Las comunicaciones entre nodos se pueden realizar mediante políticas de cliente/servidor o publicador/suscriptor, y permite realizar comunicaciones entre nodos situados en diferentes procesadores. El flujo de datos en estas comunicaciones entre nodos se realiza por medio de *topics* y el flujo de controles se realiza por medio de servicios. Por tanto, se puede entender un nodo como una caja negra donde se procesa una cierta información. Las entradas y salidas de datos de los nodos se envían por medio de mensajes adjuntos a los *topics*.

4. Enfoque propuesto

4.1. Metodología

Como se ha indicado en los apartados anteriores, el problema final a resolver es la planificación de movimientos coordinados de un sistema antropomórfico formado por dos conjuntos brazo-mano robóticos que debe hacer una tarea dada. Para esto, se investiga la existencia de sinergias en el sistema antropomórfico.

El enfoque que se ha seguido es conceptualmente equivalente al utilizado para la búsqueda de sinergias en la mano. Los pasos principales pueden resumirse como sigue (véase Fig. 4.1):

- 1) Un operador humano realiza distintas tareas utilizando ambas manos (Fig. 4.2), y la posición y orientación de las muñecas así como las posturas de ambas manos se muestrean durante la ejecución.
- 2) Se resuelve la cinemática inversa de los brazos robóticos para cada par de muestras de configuraciones de la muñeca tomadas en el Paso 1. Las posturas capturadas de las manos del operario humano son mapeadas a las posturas equivalentes de los brazos robóticos. Para ello se deberán tener en cuenta las diferencias en las estructuras cinemáticas entre el brazo robótico y el brazo humana. Como resultado y tras otras operaciones, se obtiene un conjunto de configuraciones del sistema antropomórfico.
- 3) Se realiza un Análisis de Componentes Principales (PCA) sobre el conjunto de configuraciones obtenido en el Paso 2. De este modo, se obtiene un nuevo sistema de referencia del espacio de configuraciones con los ejes ordenados de acuerdo a la dispersión de las muestras en cada dirección, en un orden decreciente.
- 4) Al seleccionar sólo un número reducido de componentes (aquellos con mayor dispersión), es posible obtener un subespacio que contiene un alto porcentaje del conjunto de las muestras (el porcentaje depende de la cantidad de componentes seleccionados y por lo tanto puede ser controlado). De esta manera se reduce la dimensión del espacio de configuraciones del sistema antropomórfico sin perder demasiada información.
- 5) Se realiza la planificación de los movimientos de los dos conjuntos brazo-mano robóticos en este subespacio de configuraciones, reduciendo significativamente la complejidad del problema, mientras que el aspecto humano de los movimientos obtenidos se conserva (dentro de los límites permitidos por la cinemática del sistema mecánico). Diferentes estrategias se pueden utilizar para explotar este subespacio durante la fase de planificación.

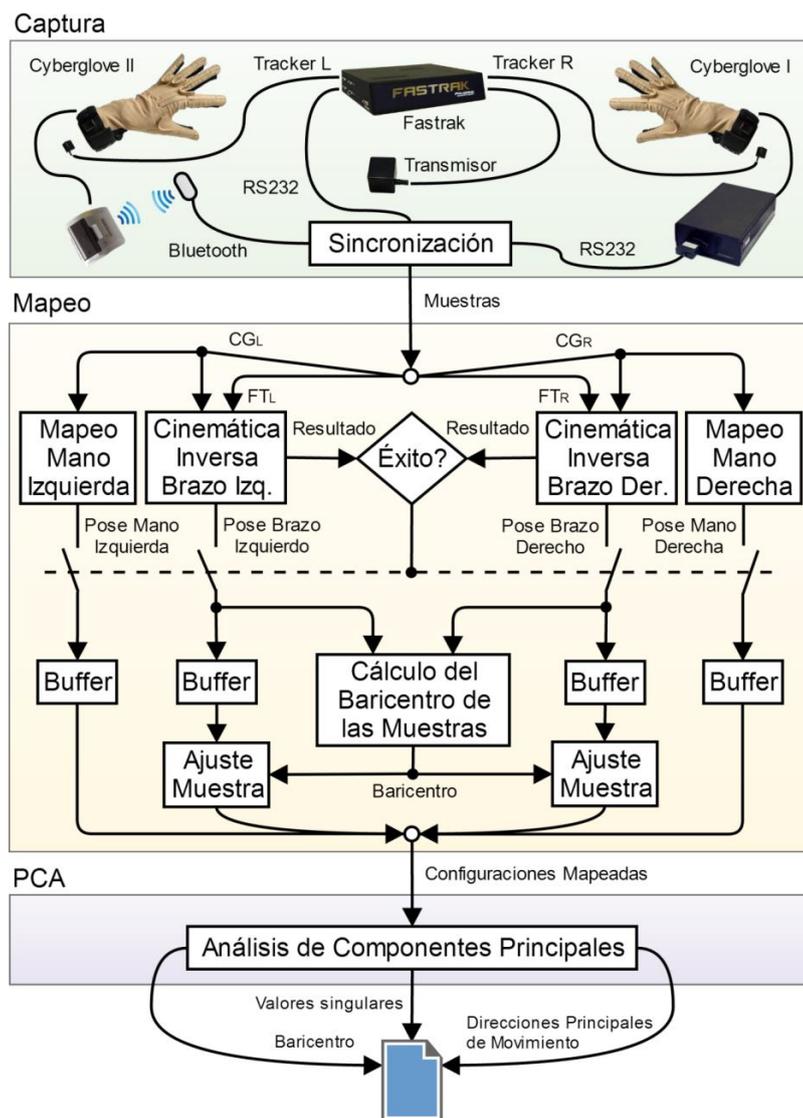


Fig. 4.1 Esquema general de enfoque propuesto.



Fig. 4.2 Operario humano realizando una tarea con las dos manos.

4.2. Captura de movimientos

Se ha elegido una mesa como espacio de trabajo porque permite realizar distintas tareas con los brazos sin necesidad de desplazar el torso. También permite una fácil representación del mundo real en el entorno virtual de *The Kautham Project* por ser una superficie sencilla. Al tratarse de una superficie sólida, permite colocar marcas de referencia que resultan de gran ayuda en la realización y comprobación del correcto funcionamiento de todo el proceso.

También se ha tenido en cuenta el material de que está formada la mesa, por ello se ha escogido una compuesta totalmente de madera. Se comprobó que si las patas o la propia mesa eran de metal, existían interferencias y se producía una gran variación entre la posición real del *tracker* y la medida que se obtenía. Además el sistema antropomórfico utilizado ya dispone de una superficie plana a modo de mesa.

Se ha colocado el transmisor del Fastrak sobre un taburete de madera para acercarlo lo máximo posible al área de trabajo ya que a más distancia entre transmisor y los *trackers* mayor resulta el error obtenido en la medida. Los *trackers* se han montado en el soporte de que disponen cada uno de los guantes sensorizados.

Con el fin de capturar información acerca de los movimientos de los brazos y las manos del operario, todos los sensores están sincronizados para tomar muestras en el mismo instante con una frecuencia de muestreo de 50Hz.

Los valores leídos de cada *tracker* Fastrak (valores FT_L y FT_R , para los *trackers* izquierdo y derecho respectivamente) incluyen un vector de traslación y un cuaternión de rotación. Estas dos medidas definen la transformación homogénea existente entre el sistema de coordenadas del transmisor al sistema de coordenadas de cada uno de los *trackers*.

Los valores leídos de cada Cyberglove (valores CG_L y CG_R para el guante izquierdo y derecho respectivamente) incluyen 22 medidas que describen las posiciones de las articulaciones de los dedos y la orientación de la mano (flexión y abducción de la muñeca).

La información $\{FT_L, FT_R, CG_L, CG_R\}$ se guarda en una muestra S que también incluye un número de identificación y la información sobre el momento en que fue capturada.

4.3. Mapeado de los movimientos capturados

Una vez que se han tomado las muestras de los movimientos humanos mientras el operario realiza una tarea concreta, éstos tienen que ser mapeados al sistema robótico a fin de obtener las configuraciones correspondientes.

4.3.1. Calibración de los guantes

Las medidas tomadas por los sensores de los guantes son adimensionales y toman valores entre 0 y 1. Para obtener los ángulos reales de giro de cada articulación de la mano humana es necesario procesar los datos capturados de los guantes. Como ya se dijo, los guantes disponen de 22 sensores (véase Tabla 4.1 y Fig. 4.3), sin embargo no todos serán usados ni todos serán calibrados de la misma manera.

Nombre	Id
1 Rotación del pulgar	S_B^T
2 Flexión media del pulgar	S_M^T
3 Flexión distal del pulgar	S_D^T
4 Abducción índice-pulgar	S_A^{TI}
5 Flexión proximal del índice	S_P^I
6 Flexión media del índice	S_M^I
7 Flexión distal del índice	S_D^I
8 Flexión proximal del corazón	S_P^M
9 Flexión media del corazón	S_M^M
10 Flexión distal del corazón	S_D^M
11 Abducción índice-corazón	S_A^{MI}
12 Flexión proximal del anular	S_P^R
13 Flexión media del anular	S_M^R
14 Flexión distal del anular	S_D^R
15 Abducción corazón-anular	S_A^{MR}
16 Flexión proximal del meñique	-
17 Flexión media del meñique	-
18 Flexión distal del meñique	-
19 Abducción anular-meñique	-
20 Arco de la palma	-
21 Flexión de la muñeca	f
22 Abducción de la muñeca	a

Tabla 4.1 Medidas obtenidas del guante sensorizado Cyberglove.

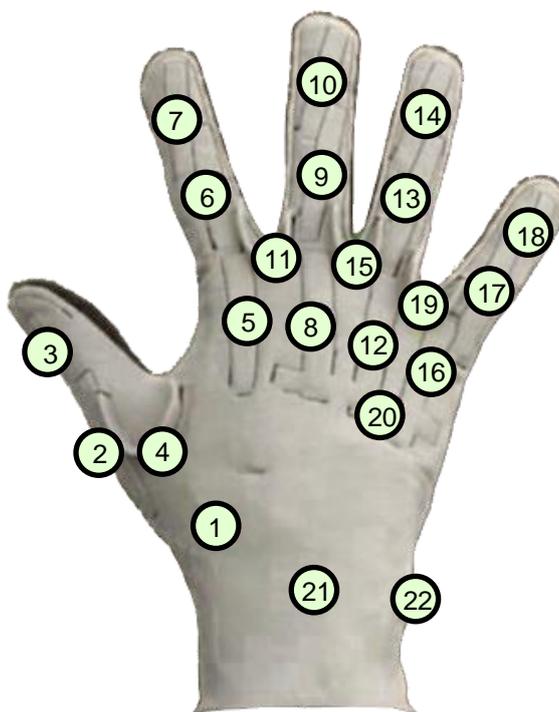


Fig. 4.3 Sensores del guante sensorizado Cyberglove.

Las medidas de los sensores 1 a 15 se calibran de la siguiente manera:

$$\hat{S}_i = o_i + \sum_{j=1}^{15} g_{ij} S_j \quad i = 1, \dots, 15 \tag{Ec. 4.1}$$

siendo \hat{S}_i y S_i los valores calibrados y en bruto del sensor i respectivamente, o_i y $g_{i,j}$ son valores a calcular experimentalmente.

Las medidas de los sensores 16 a 20 no son calibradas puesto que no serán usadas; por un lado, la mano mecánica no tiene dedo meñique y por otro no puede arquear la palma. Los

movimientos de abducción y flexión de la muñeca, medidas 21 y 22 respectivamente, se calibran con una metodología diferente.

Los valores g_{ij} para $i \neq j$ son nulos excepto para dos articulaciones del pulgar: el valor calibrado de la flexión media \hat{S}_M^T y de la abducción del pulgar \hat{S}_A^{TI} dependen ambos también del valor del sensor de rotación del pulgar S_B^T .

Los valores de o_i y $g_{i,j}$ dependen del usuario y del guante. Para garantizar el buen funcionamiento del mapeado, es importante que el proceso de calibración se haya realizado correctamente. El operario debe realizar distintas posturas con la mano (véase Sección B) en las que se miden los valores de los sensores del guante. Sobre estos datos se usa el método de mínimos cuadrados para obtener los valores de o_i y g_{ij} .

Los ángulos de flexión y abducción de la muñeca, ϕ y ψ respectivamente, se obtienen de los sensores de flexión y abducción de cada guante, f y a respectivamente. No obstante, estos dos sensores están acoplados, por lo tanto sus medidas deben ser procesadas para obtener los valores reales de flexión y abducción.

Para obtener las funciones desacopladas $\phi = \phi(f, a)$ y $\psi = \psi(f, a)$, se obtienen conjuntos emparejados de valores (ϕ, ψ) y (f, a) leyendo los sensores de flexión y abducción del guante f y a en sus rangos:

$$f \times a \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (\text{Ec. 4.2})$$

y midiendo la flexión y abducción ϕ y ψ de la pose correspondiente de la mano del operario (la configuración de referencia y las direcciones positivas de giro se muestran en la Fig. 4.4):

$$\phi \times \psi \in [-1.6, 1] \times [-0.45, 0.3] \text{ rad} \quad (\text{Ec. 4.3})$$

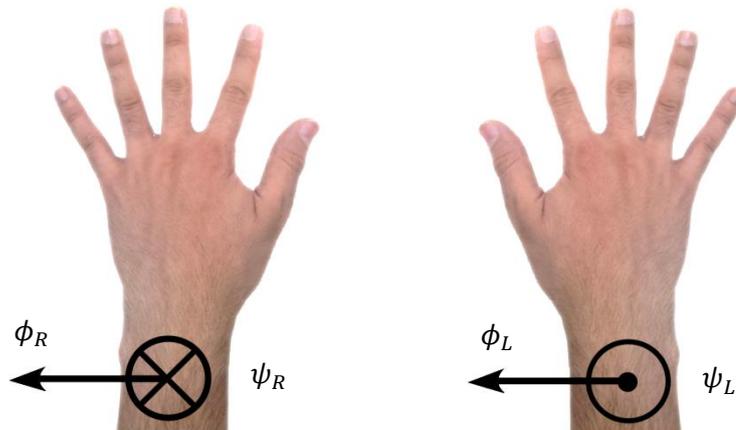


Fig. 4.4 Sentido positivos de giro y configuración de referencia de las articulaciones de flexión y abducción de la muñeca.

Usando esta información, se utilizan las siguientes funciones para obtener ϕ y ψ :

$$\phi = k_0 + k_1f + k_2f^2 + k_3f^2a^2 \tag{Ec. 4.4}$$

$$\psi = \frac{k_4 + k_5a + k_6\phi + k_7\phi^2}{k_8 + k_9\phi + k_{10}\phi^2} \tag{Ec. 4.5}$$

dónde k_0 a k_{10} dependen del operario humano y a calibración del guante, así que deben ser ajustados usando el método de mínimos cuadrados u otro método de minimización del error.

Las funciones desacopladas de los guantes izquierdo y derecho para uno de los operarios que ha realizado la experimentación en este trabajo, se muestran en las figuras Fig. 4.5 a Fig. 4.8.

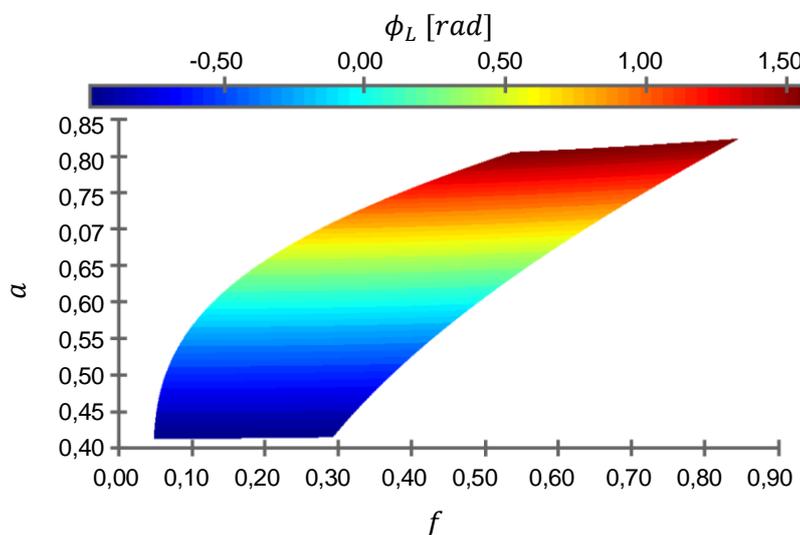


Fig. 4.5 Función desacoplada ϕ_L .

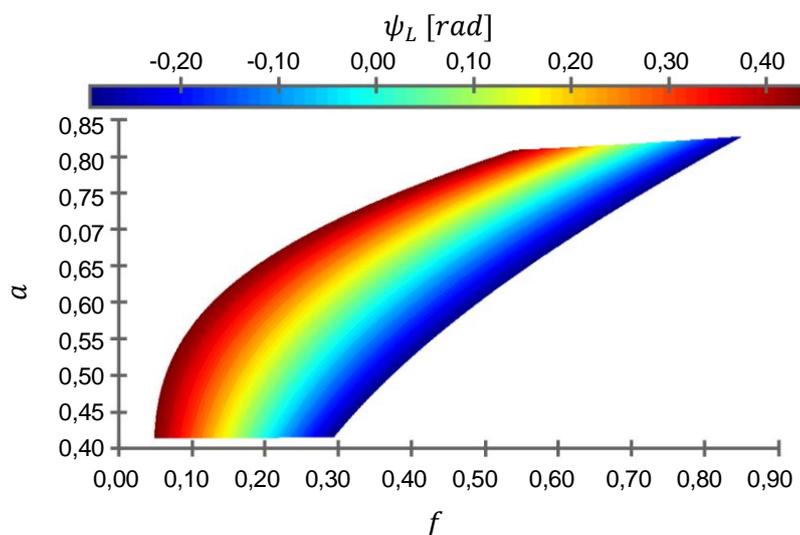
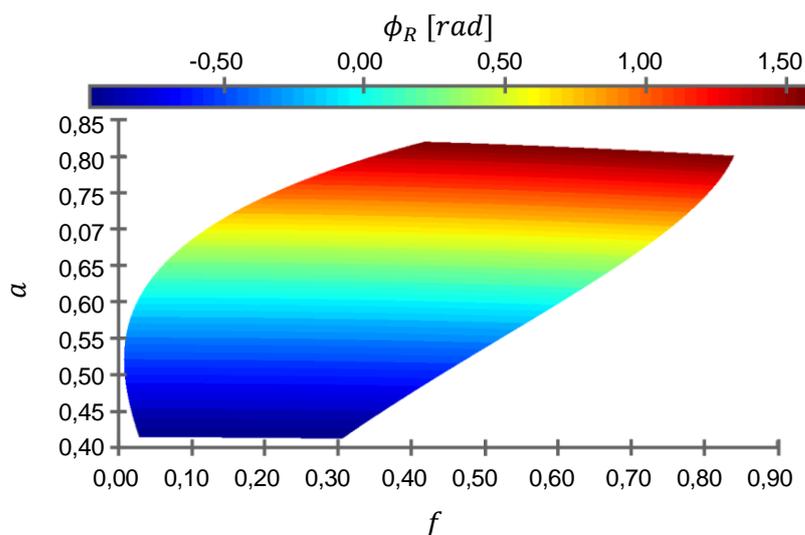
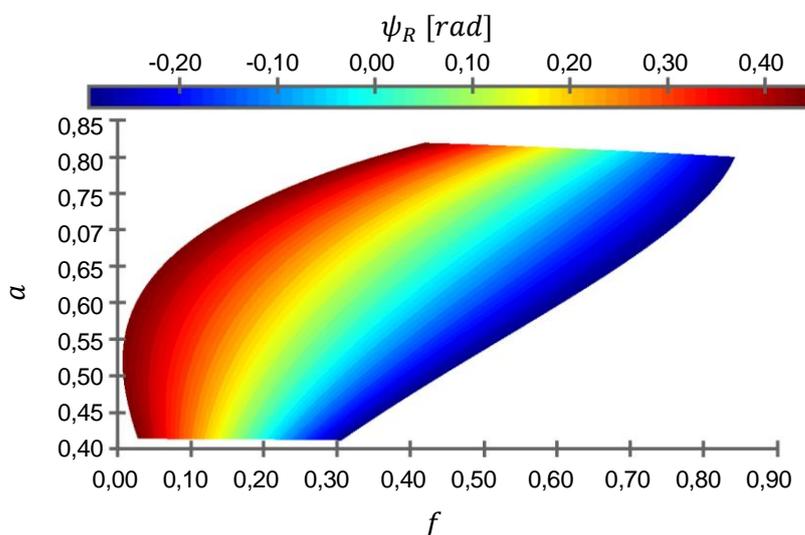


Fig. 4.6 Función desacoplada ψ_L .

Fig. 4.7 Función desacoplada ϕ_R .Fig. 4.8 Función desacoplada ψ_R .

4.3.2. Cinemática inversa

Para obtener las configuraciones de los brazos robóticos correspondientes a las configuraciones capturadas de los brazos humanos, se debe resolver la cinemática inversa de cada robot y posteriormente se deben realizar algunos ajustes. Esto se hace de forma independiente para cada brazo tal como se describe a continuación.

Para $i \in \{L, R\}$, sea (véase Fig. 4.9):

${}^{B_i}T_{TCP_i}$ la transformación desde la base del brazo i a su elemento terminal (TCP),

${}^W T_{B_i}$ la transformación desde el sistema de referencia absoluto (situada en el punto medio entre las bases de los dos brazos robóticos) a la base del brazo i ,

${}^W T_T$ la transformación desde el sistema de referencia absoluto al sistema de referencia del transmisor del *Fastrak*,

${}^T T_{S_i}$ la transformación desde el transmisor del *Fastrak* al i -ésimo *tracker*,

${}^{S_i} T_{TCP_i}$ la transformación desde el *tracker* i al TCP del brazo i .

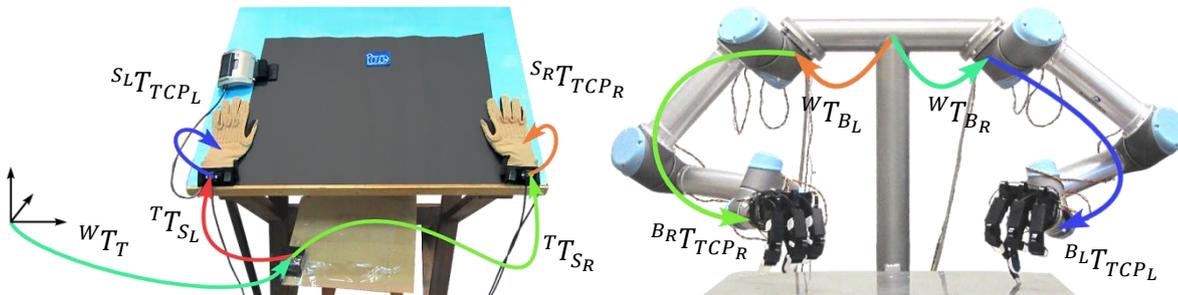


Fig. 4.9 Transformaciones de los sensores y los brazos robóticos.

Puesto que la configuración del TCP del brazo robótico debe seguir la configuración de la muñeca humana, se puede considerar que

$${}^W T_{B_i} {}^{B_i} T_{TCP_i} = {}^W T_T {}^T T_{S_i} {}^{S_i} T_{TCP_i} \quad (\text{Ec. 4.6})$$

y resolviendo para ${}^{B_i} T_{TCP_i}$

$${}^{B_i} T_{TCP_i} = ({}^W T_{B_i})^{-1} {}^W T_T {}^T T_{S_i} {}^{S_i} T_{TCP_i} \quad (\text{Ec. 4.7})$$

Nótese que ${}^W T_{B_i}$ y ${}^W T_T$ son constantes y conocidas, mientras que ${}^T T_{S_i}$ depende de la información del *tracker* y ${}^{S_i} T_{TCP_i}$ depende de la información del guante. ${}^T T_{S_i}$ se obtiene de la información ${}^T T_i$ del *tracker* cómo

$${}^T T_{S_i} = \begin{bmatrix} R(q_i) & P(p_i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 4.8})$$

dónde q_i y p_i son, respectivamente, el cuaternión y la traslación de la muestra ${}^T T_i$. ${}^{S_i} T_{TCP_i}$ se obtiene de la información ${}^{S_i} T_{F_i}$ del guante cómo

$${}^{S_i} T_{TCP_i} = {}^{S_i} T_{F_i} \begin{bmatrix} R(\phi_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(\psi_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 4.9})$$

dónde ${}^{S_i} T_{F_i}$ es una transformación constante desde el *tracker* a la muñeca del operario, y ϕ_i y ψ_i son, respectivamente, los ángulos de flexión y abducción de la muñeca obtenidos de los guantes. La manera en la que estos ángulos se obtienen a partir de la información de cada guante sensorizado se discute en detalle en la Sección B.

${}^{B_i}T_{TCP_i}$ se usa para resolver la cinemática inversa del brazo. No obstante, debido a la estructura del brazo, se pueden obtener hasta 8 soluciones diferentes, como se muestra en la Fig. 4.10. En este trabajo, se ha escogido la primera configuración en la Fig. 4.10, al considerarse la postura con aspecto más humano. Además, puesto que todas las articulaciones del brazo UR5 pueden moverse en el rango $[-2\pi, 2\pi]$ rad, dos valores diferentes de cada articulación representan la misma configuración del brazo. Al resolver la cinemática inversa, sólo se consideran las soluciones con todos los ángulos en el rango $[-\pi, \pi)$ rad, y las muestras S que no permitan una solución de la cinemática inversa son descartadas, incluso cuando las muestras permitan una solución para cualquier otra de las configuraciones mostradas en la Fig. 4.10.

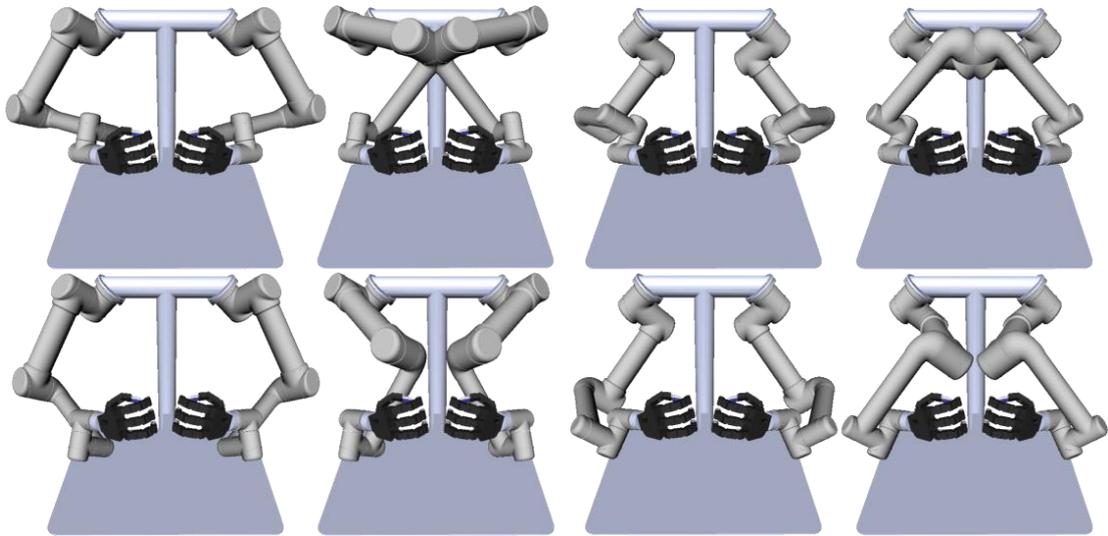


Fig. 4.10 Posibles soluciones de la cinemática inversa para una muestra dada.

Una vez que la cinemática inversa de ambos brazos ha sido resuelta para todas las muestras S , los valores articulares de los brazos se ajustan de la siguiente manera. El ángulo medio $\bar{\theta}_j$ de todos los valores resultantes para cada articulación j se calcula como:

$$\bar{\theta}_j = \text{atan2}(\bar{S}_j, \bar{C}_j) \quad (\text{Ec. 4.10})$$

$$\text{con } \bar{S}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(\theta_{j_k}) \text{ y } \bar{C}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\theta_{j_k}) \quad (\text{Ec. 4.11})$$

dónde n es el número de muestras S procesadas. La función $\text{atan2}(y, x)$ es la arcotangente con dos argumentos y su uso es necesario para obtener $\bar{\theta}_j$ en el cuadrante adecuado. El ángulo medio resultante se encontrará en el intervalo $[-\pi, \pi)$ rad. Nótese que no puede usarse la media aritmética ya que no tiene en cuenta que cualquier ángulo más $\pm\pi$ rad representa la misma posición articular.

El radio $R_j = \sqrt{\bar{S}_j^2 + \bar{C}_j^2}$ de $\bar{\theta}_j$ es una medida de la distribución de los valores, es decir, si $\forall k \theta_{jk} = \bar{\theta}_j$ entonces $R_j = 1$, y si los valores de θ_{jk} están distribuidos uniformemente entonces $R_j = 0$, y $\bar{\theta}_j$ no está no definido. Nótese que $R_j = 0$ implica $\bar{S}_j = 0$ y $\bar{C}_j = 0$ y el valor de $\text{atan2}(0, 0)$ no está definido; en este caso, se escoge $\bar{\theta}_j = 0$.

El ángulo medio $\bar{\theta}_j$ de cada articulación j es usado para ajustar el valor articular θ_{jk} obtenido de las soluciones de la cinemática inversa de la siguiente manera,

$$\hat{\theta}_{jk} = \begin{cases} \theta_{jk} & \text{si } |\theta_{jk} - \bar{\theta}_j| \leq \pi \\ \theta_{jk} - \text{sign}(\theta_{jk})2\pi & \text{si } |\theta_{jk} - \bar{\theta}_j| > \pi \end{cases} \quad (\text{Ec. 4.12})$$

Este ajuste traslada los ángulos θ_{jk} , sumando o restando $2\pi \text{ rad}$, del intervalo $[-\pi, \pi) \text{ rad}$ a otro rango de misma amplitud pero dentro del intervalo $[-2\pi, 2\pi] \text{ rad}$. Esto reduce la varianza de las muestras, ya que se cumple que $\text{máx}_k \hat{\theta}_{jk} - \text{mín}_k \hat{\theta}_{jk} \leq \text{máx}_k \theta_{jk} - \text{mín}_k \theta_{jk}$ para cada articulación j . De este modo permanece en las muestras sólo la varianza propia de los movimientos realizados por el sistema robótico.

4.3.3. Mapeado de las posiciones de las manos

El mapeado que se realiza de las posiciones capturadas de las manos humanas sobre las articulaciones de la mano está basado en un mapeado articulación a articulación. Sin embargo, se han realizado algunas modificaciones para minimizar las diferencias en las posiciones relativas de los dedos de la mano humana y de la mano mecánica debido a las diferencias en las cadenas cinemáticas.

Los principales detalles a considerar son los siguientes:

- 1) Las cadenas cinemáticas difieren considerablemente. Mientras la palma es flexible en la mano humana, ésta es rígida en la mano mecánica. Este hecho afecta a los movimientos del pulgar. Además, el movimiento de abducción de los dedos se produce sobre un eje fijo a la palma en la mano mecánica pero en la mano humana se produce sobre un eje fijo a la primera falange de cada dedo. Incluso los grados de libertad de la mano robótica que coinciden con los de la mano humana, cómo pueden ser los de flexión de los dedos exceptuando el pulgar, no tienen el mismo rango de movimiento.
- 2) No todos los sensores del guante pueden asignarse directamente a una articulación de la mano mecánica: el guante proporciona 22 medidas (véase Tabla 4.1 y Fig. 4.3) mientras que sólo se tienen 16 articulaciones (véase Tabla 4.2 y Fig. 4.11) en la mano mecánica.

Nombre	Id
1 Abducción índice	J_A^I
2 Flexión proximal del índice	J_P^I
3 Flexión media del índice	J_M^I
4 Flexión distal del índice	J_D^I
5 Abducción corazón	J_A^M
6 Flexión proximal del corazón	J_P^M
7 Flexión media del corazón	J_M^M
8 Flexión distal del corazón	J_D^M
9 Abducción anular	J_A^R
10 Flexión proximal del anular	J_P^R
11 Flexión media del anular	J_M^R
12 Flexión distal del anular	J_D^R
13 Rotación del pulgar	J_B^T
14 Abducción del pulgar	J_A^T
15 Flexión media del pulgar	J_M^T
16 Flexión distal del pulgar	J_D^T



Tabla 4.2 Articulaciones de la mano robótica Allegro Hand.

Fig. 4.11 Articulaciones de la mano robótica Allegro Hand.

El valor de las articulaciones de flexión de los dedos, exceptuando el pulgar que es tratado de forma diferente, se asigna directamente:

$$J_i^j = \hat{S}_i^j \quad i = P, M, D \quad j = I, M, R \quad (\text{Ec. 4.13})$$

El guante no proporciona una medida absoluta de la abducción, tan sólo el ángulo entre dos dedos consecutivos. También se ha de considerar que debido a la estructura cinemática de la mano, los dedos no pueden realizar movimientos de abducción cuando estos están completamente extendidos. Para resolver estos problemas se propone el siguiente método.

La abducción del dedo corazón se mantiene fija con un valor nulo:

$$J_A^M = 0 \quad (\text{Ec. 4.14})$$

Las abducciones de los otros dos dedos (el pulgar es tratado más adelante) se calculan a partir de las medidas de las abducciones respecto al dedo corazón y de las flexiones proximales de los tres dedos.

$$J_A^i = c_1 c_2 (\hat{S}_A^{Mi} - k |\hat{S}_P^M - \hat{S}_P^i|) m(\hat{S}_P^i) \quad i = I, R \quad (\text{Ec. 4.15})$$

$$m(x) = \text{sat} \left(\text{sign}(x) \left| \frac{x}{\alpha} \right|^\beta, 1, -1 \right) \quad (\text{Ec. 4.16})$$

$$\text{sat}(x, x_{\text{máx}}, x_{\text{mín}}) = \text{máx}(\text{mín}(x, x_{\text{máx}}), x_{\text{mín}}) \quad (\text{Ec. 4.17})$$

dónde $\alpha > 0$ es el parámetro de escala y $\beta \geq 0$ el parámetro de forma. Los valores de éstos parámetros han sido calculados empíricamente obteniendo el comportamiento deseado del mapeado de las posiciones de las manos con $\alpha = 0,15$ y $\beta = 4$. La función $m(x)$ (Fig. 4.12) toma valores entre -1 y 1 y es nula cuando x también lo es. De esta manera, cuando el dedo (índice o anular) está totalmente extendido, la respectiva articulación de abducción toma valores nulos, sin importar la medida del sensor de abducción. El hecho de que la función escogida tome valores pequeños en un entorno del cero, reduce la amplitud de oscilaciones de la articulación cuando los dedos están cerca de la extensión total.

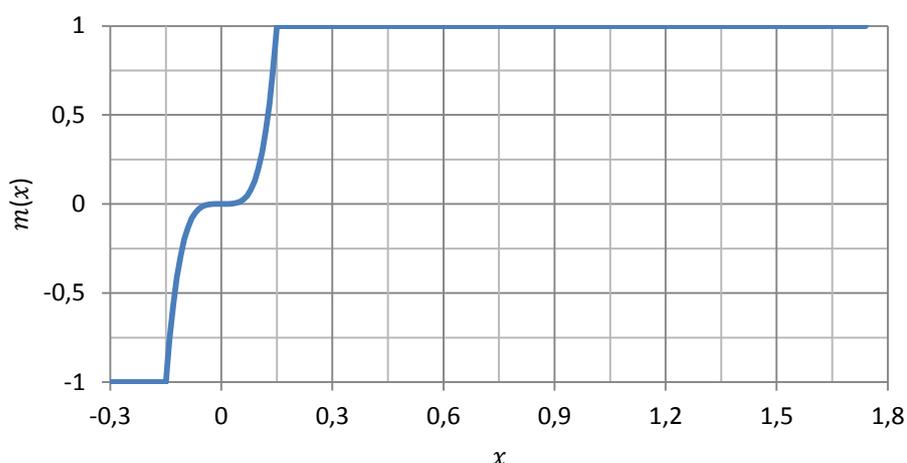


Fig. 4.12 Función $m(x)$ para x en el rango de movimiento de las articulaciones de flexión proximal de los dedos de la mano mecánica.

El resto de parámetros definen el sentido positivo de giro de las articulaciones:

$$c_1 = \begin{cases} 1 & \text{si se trata del dedo índice} \\ -1 & \text{si se trata del dedo anular} \end{cases} \quad (\text{Ec. 4.18})$$

$$c_2 = \begin{cases} 1 & \text{si se trata de la mano derecha} \\ -1 & \text{si se trata de la mano izquierda} \end{cases} \quad (\text{Ec. 4.19})$$

El movimiento del pulgar de la mano mecánica es bastante diferente del de la mano humana. Por esta razón, un mapeado articulación a articulación no es una buena opción, y por lo tanto se aplica un mapeado basado en poses.

Una serie de poses de la mano humana (véase Sección C) han sido asociadas con las correspondientes poses de la mano mecánica. Para el resto de poses, los valores de las articulaciones del pulgar se obtienen por interpolación. Los valores de las articulaciones J_B^T , J_A^T y J_M^T se calculan de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} J_B^T \\ J_A^T \\ J_M^T \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{S}_B^T \\ \hat{S}_A^T \\ \hat{S}_M^T \\ \hat{S}_B^T \hat{S}_A^T \\ \hat{S}_B^T \hat{S}_M^T \\ \hat{S}_A^T \hat{S}_M^T \\ \hat{S}_B^T \hat{S}_A^T \hat{S}_M^T \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 4.20})$$

dónde C es una matriz de dimensión 3×8 . Los valores de c_{ij} de C se obtienen por regresión estadística (véase Sección C), resultando los siguientes valores

$$C = \begin{bmatrix} -0,06088 & 0,5495 & 0,9419 & 0,1658 & -0,3726 & 0,1675 & -0,2139 & -0,02720 \\ 0,1981 & 0,1440 & -1,123 & -0,005603 & 0,5393 & 0,5203 & 1,138 & 0,2063 \\ 1,870 & 0,5680 & -2,654 & -1,053 & 1,343 & -0,3532 & 2,067 & -0,7505 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 4.21})$$

Sin embargo, el movimiento de flexión distal del pulgar es directo

$$J_D^T = \hat{S}_D^T \quad (\text{Ec. 4.22})$$

Puesto que los rangos de movimiento de las articulaciones de la mano mecánica no coinciden con los rangos de movimiento humanos, los valores de todas las articulaciones de la mano mecánica están limitados entre el valor mínimo y máximo que puede tomar cada articulación (véase Tabla 3.1) haciendo uso de la función $\text{sat}(x, x_{\max}, x_{\min})$ previamente definida (Ec. 4.17).

4.3.4. Verificación de los datos obtenidos de los *trackers*

Con el proceso descrito en las subsecciones anteriores, es posible obtener los valores mapeados de cada una de las articulaciones del sistema robótico mientras éste realiza una tarea. Como estos valores no se han obtenido directamente de un robot real, sino a partir de todo el proceso explicado anteriormente, es necesaria una herramienta que permita verificar que la información almacenada sea correcta, y que por tanto represente realmente la tarea que se ha realizado en el espacio de trabajo real. Para ello se ha implementado un escenario en el entorno *The Kautham Project* donde se cargan 4 robots. Por un lado el modelo de los dos conjuntos brazo-mano robóticos utilizados en los experimentos, y por otro lado dos robots del tipo *freeflying*, representados por unos ejes de coordenadas. Los robots *freeflying* se mueven libremente por todo el espacio de trabajo, lo que permite situarlos en la posición y orientación deseada.

Para realizar la comprobación, se escoge un instante de muestreo y se sitúa el sistema antropomórfico en la configuración mapeada correspondiente al instante escogido. Por otro

lado, se calcula la transformación ${}^wT_T {}^T T_{S_i} {}^{S_i} T_{TCP_i}$ para cada uno de los brazos i y se lleva cada uno de los robots *freeflying* a la posición y orientación indicada por dicha transformación. Si la información es correcta, el elemento terminal de cada uno de los brazos ha de coincidir en posición y orientación con el *freeflying* correspondiente (Fig. 4.13).

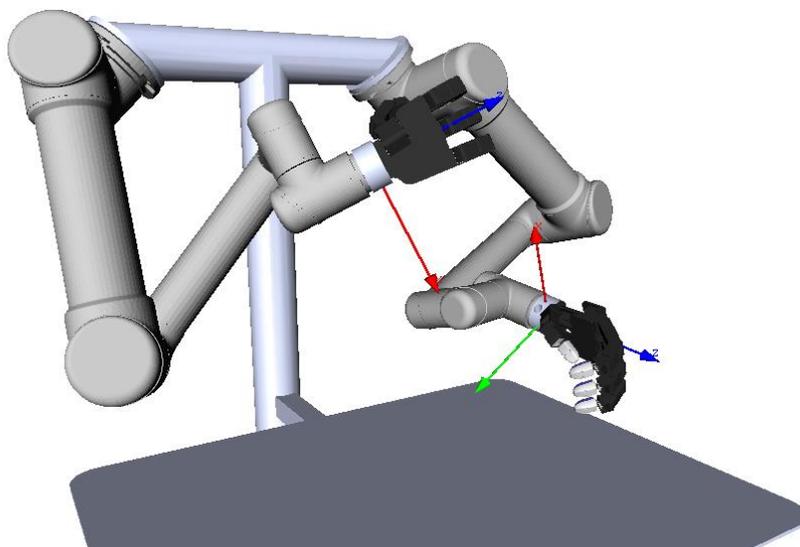


Fig. 4.13 Ejemplo de verificación de la posición y orientaciones del elemento terminal de los brazos.

4.3.5. Verificación de los datos obtenidos de los guantes

Para verificar los datos obtenidos de los guantes y para calibrar los parámetros del mapeado diseñado para las manos robóticas (véase Sección 4.3) se hace uso de ROS.

Se crea un nodo ROS, *state_publisher*, que se encarga de leer las medidas de los sensores del guante y de publicar un *topic* (*joint_states*) con los ángulos de las articulaciones de la mano robótica, una vez realizado el mapeado de las posiciones de la mano (ver Sección 4.3.3). Los valores articulares son leídos por otro nodo, llamado *robot_state_publisher*, que publica otro *topic* (*tf*) con las transformaciones entre los distintos elementos de la cadena cinemática que forma la mano. Finalmente, este último *topic* es leído por el programa *rviz*, la herramienta de visualización 3D de ROS, dónde previamente se ha cargado el modelo de la *Allegro Hand*. La estructura de nodos ROS utilizada se muestra en la Fig. 4.14.

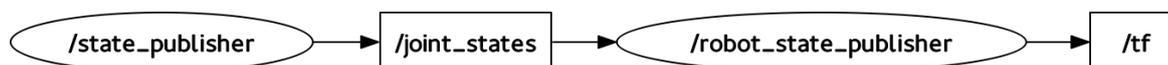


Fig. 4.14 Grafo con los nodos y *topics* usados en el proceso de calibración de los guantes y del mapeado de las manos.

De esta manera es posible ver en tiempo real el resultado del proceso de mapeado de los valores del guante y así poder corregir, si es necesario, los parámetros del proceso de calibración de los guantes o los del mismo proceso de mapeado (Fig. 4.15).

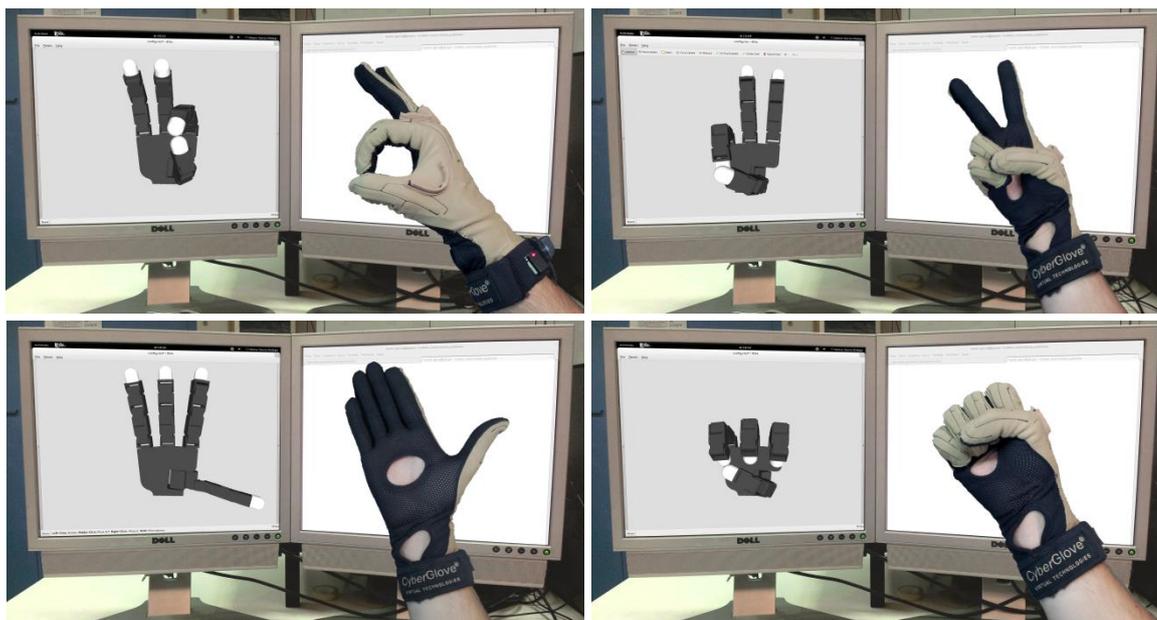


Fig. 4.15 Programa para el proceso de calibración durante su ejecución.

4.4. Análisis de componentes principales

Se realiza un Análisis de Componentes Principales (PCA) sobre las configuraciones del sistema de los dos conjuntos brazo-mano robóticos que resultan del mapeado. El PCA permite la identificación de las direcciones del espacio de configuraciones del sistema antropomórfico donde las muestras tienen mayor dispersión. Cuánto mayores sean los valores propios, mayor es la dispersión de los datos a lo largo de la dirección del vector propio correspondiente. Nótese que dado que no todas las articulaciones tienen el mismo rango de movimiento, es necesario normalizar la escala de cada componente de las muestras.

Los vectores de la nueva base del espacio de configuraciones devuelta por el PCA están ordenados en orden decreciente según la correspondiente dispersión de las muestras, es decir, el primer vector indica la dirección de máxima dispersión de las muestras. Las direcciones indicadas por estos vectores son las Direcciones Principales de Movimiento (PMDs).

La base PMDs obtenida define una hipercaja orientada según los PMDs, con centro en el baricentro de las muestras y con la longitud de los lados midiendo c veces la dispersión λ asociada al correspondiente PMD. Es en esta hipercaja dónde se realiza el muestreo para la planificación de movimientos.

Según como se escoja el factor de escala c , se abarcarán más o menos muestras dentro de la hipercaja. Estadísticamente, si se tienen dos ejes principales, al tomar $c = 3$ se consigue

abarcar el 70% – 80% de las muestras según cada dirección, pero cuando se aumenta el número de ejes, es decir la dimensión del espacio, manteniendo constante el factor c , este porcentaje se reduce hasta hacerse nulo. Debido al gran número de grados de libertad del problema tratado, en este trabajo se ha escogido empíricamente un factor de $c = 10$.

4.4.1. Calidad de las muestras

Una vez que se ha realizado el PCA y se han obtenido los PMDs, se quiere comprobar si el número de muestras tomadas es suficiente. Para ello se presenta una medida e que indica la probabilidad de que todos los valores propios λ_j de los PMDs sean significativamente diferentes.

$$e = \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^{m-1} \left(1 - F\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}, n-1, n-1\right) \right) \in [0,1] \tag{Ec. 4.23}$$

dónde n es el número de muestras S resultante del proceso de mapeado, m es la dimensión del espacio de configuraciones, λ_j es el valor propio del PMD j -ésimo (varianza de las muestras en la dirección del PMD) con $\lambda_j \geq \lambda_{j+1}$ y $F(x, n_1, n_2)$ es la función de probabilidad de la distribución F de Snedecor (Fig. 4.16).

El motivo de desear que todos los λ_j sean diferentes reside en el hecho de que si dos o más λ_j son iguales no existe una única descomposición en vectores propios de la matriz de covarianzas de las muestras y por lo tanto no existe un único conjunto de PMDs.

De este modo, cuanto mayor sea e más fiables serán los resultados que se obtengan de la aplicación de los correspondientes PMDs. Se buscará que todos los experimentos realizados tengan suficientes muestras como para obtener $e \geq 0.95$. De no ser así, se realizarán más repeticiones del experimento hasta conseguir el valor deseado. Nótese que a medida que se aumenta la dimensión m del espacio de configuraciones, se han tomar mayor número de muestras n para mantener la medida e constante.

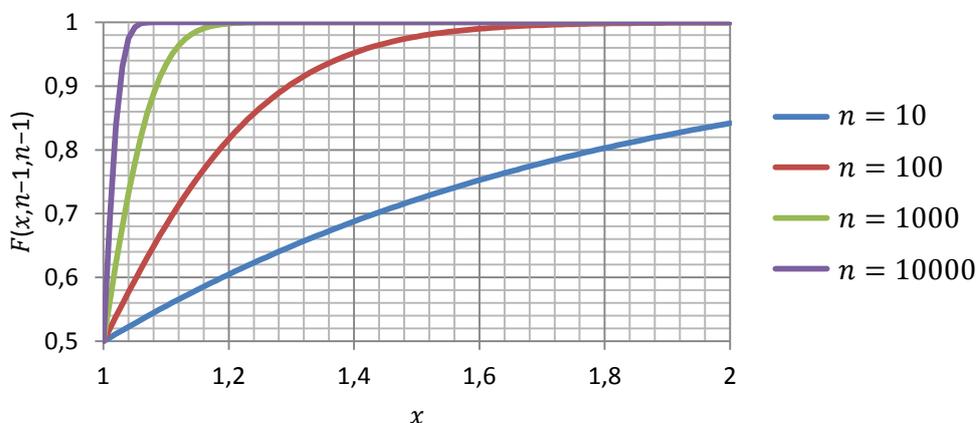


Fig. 4.16 Función $F(x, n - 1, n - 1)$ para distintos valores de n .

5. Experimentos

Con el montaje experimental descrito anteriormente, se han ejecutado varios experimentos con el fin de obtener diferentes conjuntos de PMDs. En todos los casos, se pidió a un operador humano que ejecutara las tareas manteniendo los brazos por encima de la mesa y sin mover el cuerpo. Las tareas seleccionadas son las siguientes (Fig. 5.1):

- 1) *Vertido*. El operador humano debe agarrar una lata de refresco y un vaso. Después de verter el líquido en el vaso, los objetos se devuelven a sus posiciones iniciales.
- 2) *Ensamblaje 1*. El operador humano debe coger una caja cilíndrica y una lata de refresco e introducir la lata en la caja.
- 3) *Ensamblaje 2*. El operador humano debe coger un cubo, abrir una caja, introducir el cubo en la caja y cerrarla.
- 4) *Estantería*. Dos objetos que reposan sobre la mesa deben ser colocados en dos estantes diferentes de una estantería que se encuentra enfrente del operario humano
- 5) *Movimientos aleatorios en cadena cinemática abierta*. El operador debe mover libremente los brazos y las manos sin restricciones de movimiento, es decir, sin realizar ninguna tarea específica, tratando de cubrir todo el espacio de trabajo. No hay garantía de que el operador en realidad cubra todo el espacio de trabajo, pero de esta manera se espera que realice sus movimientos más naturales y evidentes, que serán capturados durante el muestreo.
- 6) *Movimientos aleatorios en cadena cinemática cerrada*. El operador humano debe agarrar un objeto con ambas manos y moverlo libremente por todo el espacio de trabajo. El operador no puede cambiar la forma de agarrar el objeto durante los movimientos, pero la toma de muestras se ha realizado utilizando varios objetos de diferentes formas y tamaños que requieren diferentes configuraciones para agarrarlos.
- 7) *Cubos*. Se disponen varios cubos en la mesa. El operario debe formar y desmontar pilas en diversas posiciones de la mesa intentando cubrir todo el espacio de trabajo.
- 8) *Pañuelos*. El operario debe sacar pañuelos con ambas manos alternativamente de una caja de pañuelos.
- 9) *Bandera*. El operario debe izar una bandera tirando de la cuerda del mástil.
- 10) *Pases*. El operario se pasará un objeto de mano a mano. El objeto siempre ha de mantener contacto con al menos una de las manos.

Puesto que en las tareas 1 a 6 las manos van a estar sujetando un objeto la mayor parte del tiempo, sólo se tendrán en cuenta los movimientos de los brazos en estas tareas. En las otras 4 tareas, se analizarán los movimientos de todo el sistema antropomórfico, incluyendo las manos.



1) Vertido



2) Ensamblaje 1



3) Ensamblaje 2



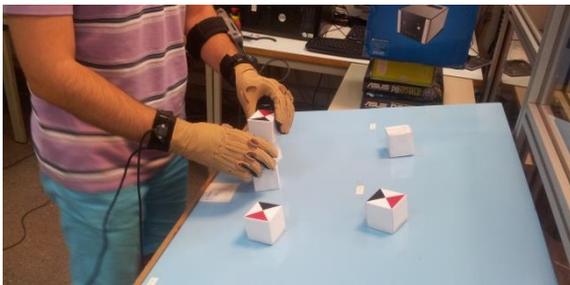
4) Estantería



5) Movimientos aleatorios en cadena cinemática abierta



6) Movimientos aleatorios en cadena cinemática cerrada



7) Cubos



8) Pañuelos



9) Bandera



10) Pases

Fig. 5.1 Operario realizando distintas tareas.

6. Resultados experimentales

6.1. Direcciones Principales de Movimiento

El proceso descrito en la Sección 4 ha sido aplicado a las tareas mencionadas en la Sección 5, obteniéndose un conjunto de PMDs en cada caso (una nueva base del espacio de configuraciones del sistema antropomórfico, con los vectores ordenados de acuerdo con la varianza a lo largo de ellos). En todas las tareas se han realizado un mínimo de 30 repeticiones (más de 10 000 muestras) y se ha obtenido un parámetro ϵ mayor que 0,95 (Ec. 4.23). Con tal de presentar un ejemplo ilustrativo, algunas capturas del movimiento del sistema a lo largo del primer PMD de cada tarea se muestran en las Fig. 6.1 a Fig. 6.10.

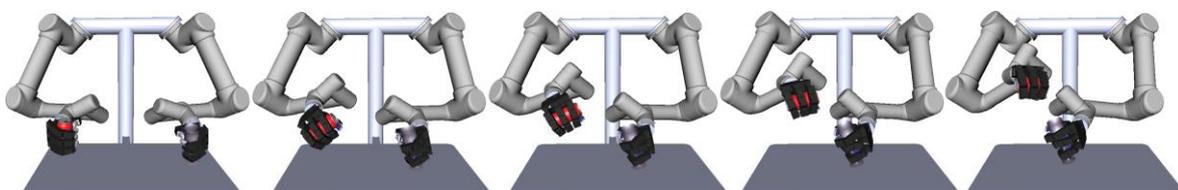


Fig. 6.1 Capturas del movimiento de los brazos siguiendo el primer PMD de la tarea *Vertido*.

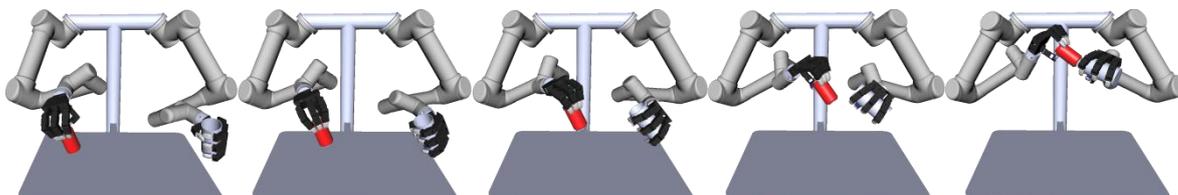


Fig. 6.2 Capturas del movimiento de los brazos siguiendo el primer PMD de la tarea *Ensamblaje 1*.

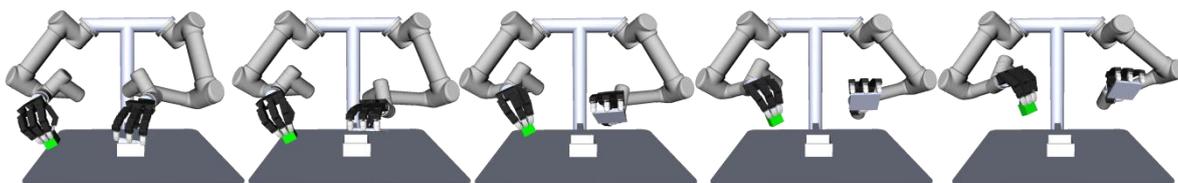


Fig. 6.3 Capturas del movimiento de los brazos siguiendo el primer PMD de la tarea *Ensamblaje 2*.

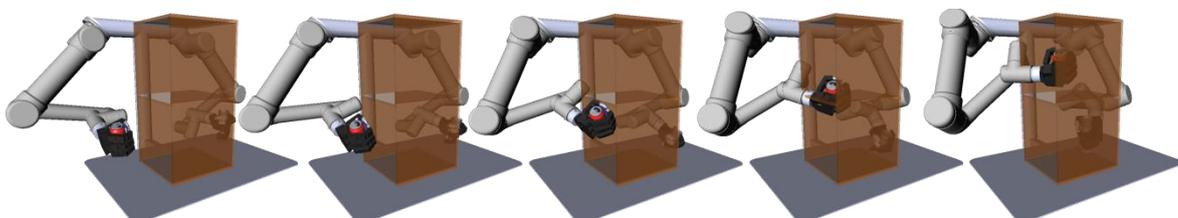


Fig. 6.4 Capturas del movimiento de los brazos siguiendo el primer PMD de la tarea *Estantería*.

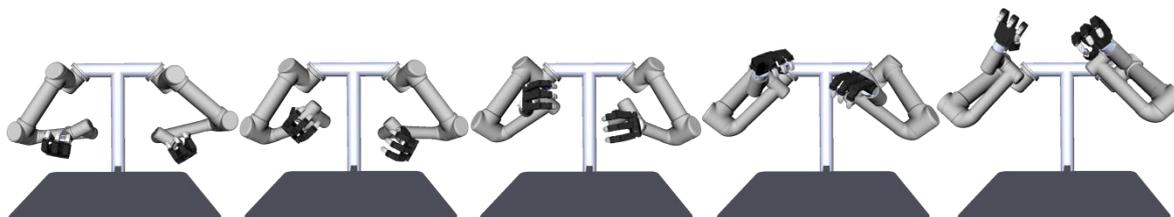


Fig. 6.5 Capturas del movimiento de los brazos siguiendo el primer PMD de la tarea *Movimientos aleatorios en cadena cinemática abierta*.

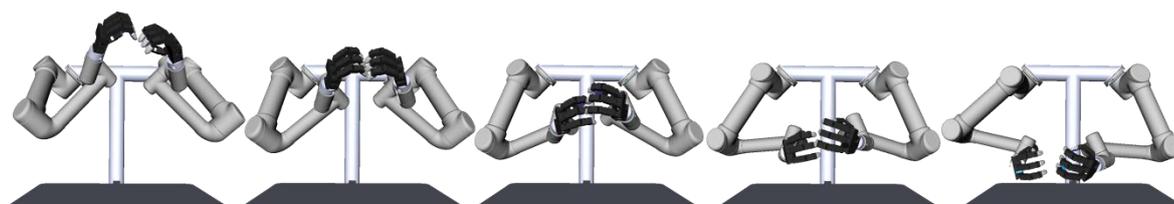


Fig. 6.6 Capturas del movimiento de los brazos siguiendo el primer PMD de la tarea *Movimientos aleatorios en cadena cinemática cerrada*.

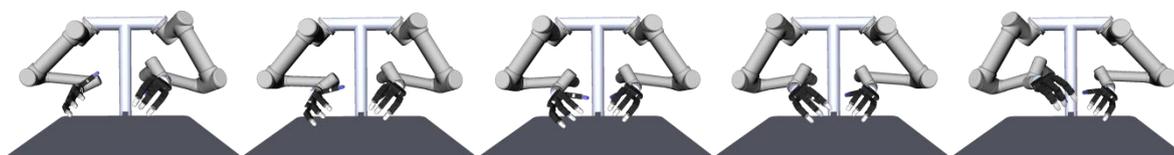


Fig. 6.7 Capturas del movimiento de los brazos siguiendo el primer PMD de la tarea *Cubos*.

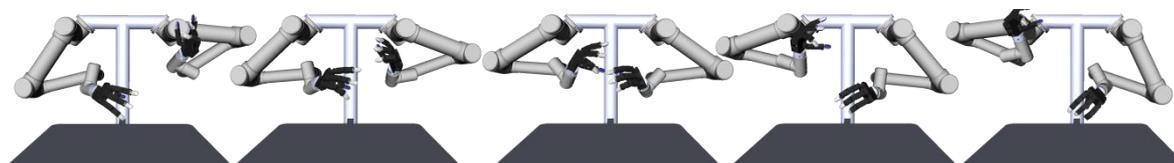


Fig. 6.8 Capturas del movimiento de los brazos siguiendo el primer PMD de la tarea *Pañuelos*.

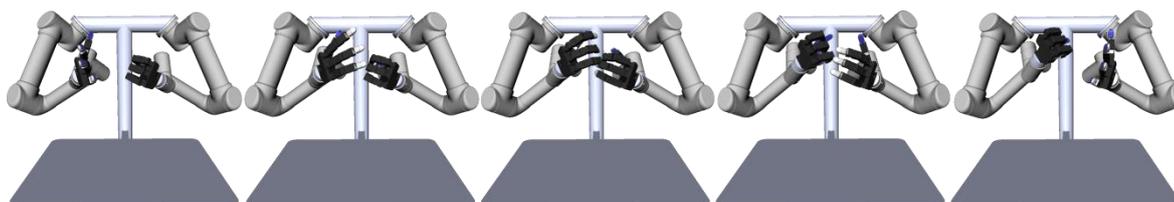


Fig. 6.9 Capturas del movimiento de los brazos siguiendo el primer PMD de la tarea *Bandera*.

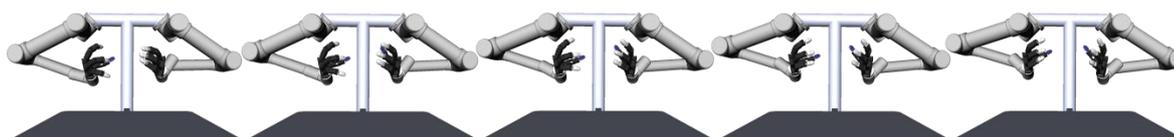


Fig. 6.10 Capturas del movimiento de los brazos siguiendo el primer PMD de la tarea *Pases*.

La Fig. 6.11 muestra, para cada tarea, la varianza acumulada de las muestras como una función del número de PMD considerados siguiendo el orden mencionado anteriormente.

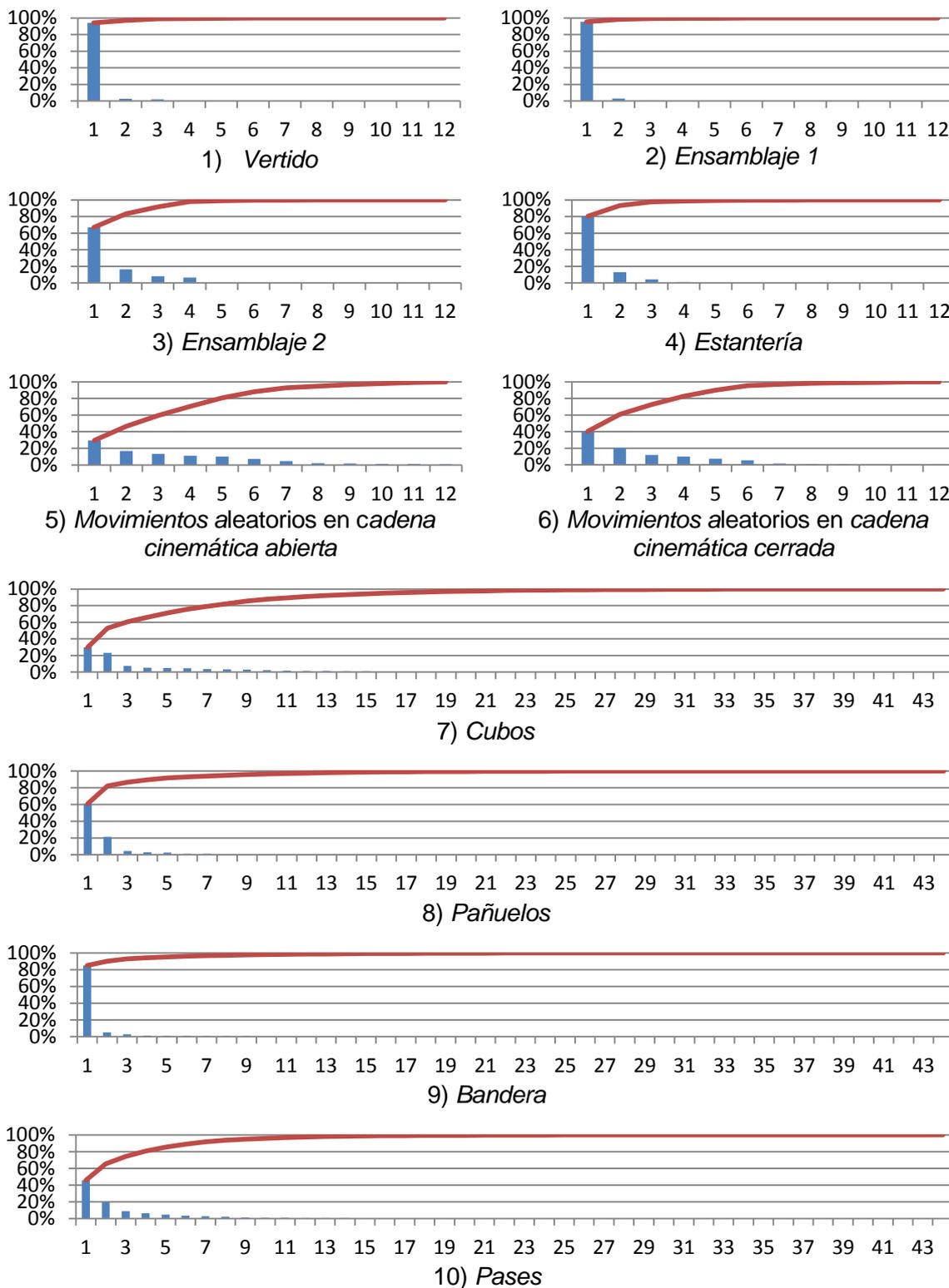


Fig. 6.11 Varianza acumulada de las muestras versus el número de PMDs obtenidos para cada tarea.

Nótese que en la tarea *Vertido* más del 90% de la varianza de las muestras está asociada con el primer PMD, mientras que el resto de los PMDs tienen una dispersión muy pequeña (ver Tabla 6.1). Esto significa que las distintas ejecuciones de la tarea fueron bastante repetitivas, y que la tarea podría (casi) ser realizada con sólo un grado de libertad. Algo similar ocurre con la tarea *Ensamblaje 1*.

Tarea	1	2	3	4	5	6
1º PMD	94,2%	95,4%	66,7%	80,4%	29,6%	40,4%
2º PMD	2,6%	2,9%	16,4%	12,9%	16,7%	20,3%
3º PMD	1,9%	0,8%	8,3%	4,3%	13,2%	11,9%
4º PMD	0,4%	0,3%	6,6%	1,0%	10,9%	10,0%
5º PMD	0,4%	0,2%	0,8%	0,7%	10,2%	7,3%
6º PMD	0,2%	0,1%	0,5%	0,3%	7,3%	5,4%
7º PMD	0,1%	0,1%	0,3%	0,2%	4,7%	1,6%
8º PMD	0,0%	0,1%	0,2%	0,1%	2,1%	1,2%
9º PMD	0,0%	0,0%	0,1%	0,1%	2,0%	0,7%
10º PMD	0,0%	0,0%	0,1%	0,1%	1,2%	0,4%
11º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,2%	0,4%
12º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,9%	0,3%
Total [rad^2]	0,162	0,357	0,297	0,323	1,08	1,03

Tarea	7	8	9	10
1º PMD	30,0%	60,7%	85,0%	45,6%
2º PMD	23,0%	21,2%	5,1%	19,7%
3º PMD	7,6%	4,5%	2,7%	8,9%
4º PMD	5,4%	2,9%	1,3%	6,3%
5º PMD	5,0%	2,4%	1,0%	4,7%
6º PMD	4,5%	1,2%	0,8%	3,5%
7º PMD	3,6%	1,1%	0,7%	2,9%
8º PMD	3,3%	0,9%	0,5%	2,0%
9º PMD	2,9%	0,9%	0,4%	1,2%
10º PMD	2,3%	0,7%	0,3%	1,0%
11º PMD	1,8%	0,6%	0,3%	0,9%
12º PMD	1,5%	0,4%	0,3%	0,7%
13º PMD	1,3%	0,4%	0,2%	0,6%
14º PMD	1,1%	0,3%	0,2%	0,4%
15º PMD	1,0%	0,3%	0,2%	0,3%
16º PMD	0,9%	0,3%	0,2%	0,2%
17º PMD	0,7%	0,2%	0,1%	0,2%
18º PMD	0,6%	0,2%	0,1%	0,1%
19º PMD	0,5%	0,1%	0,1%	0,1%
20º PMD	0,5%	0,1%	0,1%	0,1%
21º PMD	0,4%	0,1%	0,1%	0,1%
22º PMD	0,3%	0,1%	0,1%	0,1%

Tarea	7	8	9	10
23º PMD	0,3%	0,1%	0,0%	0,1%
24º PMD	0,2%	0,1%	0,0%	0,1%
25º PMD	0,2%	0,1%	0,0%	0,1%
26º PMD	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
27º PMD	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
28º PMD	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
29º PMD	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
30º PMD	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
31º PMD	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
32º PMD	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
33º PMD	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
34º PMD	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
35º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
36º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
37º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
38º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
39º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
40º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
41º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
42º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
43º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
44º PMD	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Total [rad^2]	3,027	15,96	31,59	8,287

Tabla 6.1 Varianza de las muestras a lo largo del PMD j -ésimo y varianza total de las muestras para cada tarea.



La tarea *Ensamblaje 2* y *Estantería*, que aparentemente parecen muy similares a las anteriores, tienen diferentes resultados. Incluso cuando la varianza de la muestra a lo largo del primer PMD es más de tres veces la varianza a lo largo del segundo PDM, hay al menos tres o cuatro PMDs con varianzas no despreciables.

Mirando ahora los resultados de las tareas *Movimientos aleatorios en cadena cinemática abierta* y *Movimientos aleatorios en cadena cinemática cerrada*, se puede observar que la dispersión es relevante a lo largo de los primeros seis o siete PMDs, y que las diferencias entre dos PMDs consecutivos son más pequeñas que en las otras tareas. Este efecto es aún más claro en el caso de los movimientos de cadena abierta, que obviamente permiten al operario más libertad para realizar los movimientos. Una evidencia de que las tareas con movimientos aleatorios permiten una gama más amplia de movimiento se encuentra en el hecho de que estas dos tareas tienen una varianza total de las muestras claramente mayor que las otras tareas (ver Tabla 6.1).

La tarea de *Movimientos aleatorios en cadena cinemática abierta* ha sido realizada tanto por operarios humanos diestros como por zurdos. Si bien los PMDs obtenidos no son exactamente los mismos, cada persona tiene unos movimientos naturales diferentes, la distribución de la varianza entre los PMDs así como la varianza total es similar. Sin embargo, si se mide la varianza asociada a los dos conjunto brazo-mano robótico por separado, se descubren diferencias: cuando el operario es diestro, la varianza del lado derecho es mayor, ocurriendo lo contrario si el operario es zurdo. Es decir, aunque el operario intenta recorrer todo el espacio de configuraciones durante el experimento, inconscientemente realizará movimientos más amplios con el brazo en que tenga más habilidad. Por lo tanto, a partir de este experimento, es posible deducir sin una persona es diestra o zurda, y cuantificar la diferencia de destreza entre ambos brazos.

En el resto de tareas, el PCA se ha realizado incluyendo también la información de las articulaciones de las manos, obteniéndose por lo tanto 44 PMDs. No obstante, debido al mapeado de las manos, en qué se fija el valor de la articulación de abducción de los dedos corazón, los dos últimos PMDs que se obtienen son siempre los mismos. Éstos corresponden justamente al movimiento de estas articulaciones y tienen un valor propio nulo (las muestras no tienen dispersión en esas direcciones).

Se observa que estas últimas tareas tienen varianza total de las muestras bastante mayor que las de las tareas anteriores. Esto es debido a que se está realizando el PCA sobre un espacio de configuraciones de mayor dimensión (entran en juego 44 articulaciones cuando antes tan sólo trabajaban 12).

La tarea *Cubos*, de la misma manera que pasaba con las tareas aleatorias en la categoría anterior, al no ser una tarea específica (el usuario mueve los cubos por todo el espacio de

trabajo) tiene la varianza más repartida entre los PMDs. Los dos primeros PMDs tienen casi la misma varianza asociada y, entre ellos, sólo suponen la mitad de la varianza total de las muestras.

Las otras tres tareas tienen la varianza más concentrada en el primer PMD. Sin embargo, mientras las tareas *Pañuelos* y *Pases* tienen unos 4 o 5 PMDs significativos, la tarea *Bandera* sólo tiene 2. De esta manera, pese a aumentar considerablemente la dimensión del problema en estas últimas tareas (casi cuadruplicar), el número de PMDs significativos se ha mantenido más o menos constante. Por lo tanto, será en estas tareas dónde la mejora en la planificación de movimientos será más evidente.

Estos resultados sugieren que el conjunto de PMDs obtenidos puede usarse para clasificar las tareas de acuerdo a su semejanza, lo que podría ser útil para optimizar la planificación futura de los movimientos del sistema antropomórfico para ciertas tareas. Esto se discute en la siguiente subsección.

6.2. Semejanza entre tareas

En esta subsección se presenta una medida de la semejanza de dos tareas usando los resultados del análisis descrito en la Sección 4. La semejanza se define como la distancia entre los correspondientes PMDs, como se describe a continuación.

Sea m igual a la dimensión del espacio de configuraciones del sistema antropomórfico y sean consideradas dos tareas Γ_1 y Γ_2 representadas por sus respectivos análisis, esto es $\Gamma_t = \{\bar{\theta}^t, \lambda^t, V^t\}$ con $t \in \{1,2\}$, donde:

$\bar{\theta}^t = (\bar{\theta}_1^t, \dots, \bar{\theta}_m^t)$ son las coordenadas de los baricentros, con $\bar{\theta}_j^t \in [-\pi, \pi)$, de las muestras capturadas en la tarea t ,

$\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_m^t)$ es el vector cuyas componentes son los valores propios de la tarea t ,

$V^t = (v_1^t, \dots, v_m^t)$ con $\|v_j^t\| = 1$ y $v_{j_p} > 0$ tal que $|v_{j_p}| \geq |v_{j_l}| \forall l \neq p$, son los PMDs, en orden decreciente de dispersión asociada, de la tarea t .

La semejanza de las dos tareas viene dada por la distancia d calculada como

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = c_1 d_1(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) + c_2 d_2(\lambda^1, \lambda^2) + c_3 d_3(V^1, V^2) \quad (\text{Ec. 6.1})$$

dónde

$$d_1(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_j \left(1 - \left| 1 - \frac{|\bar{\theta}_j^1 - \bar{\theta}_j^2|}{\pi} \right| \right)^2} \quad (\text{Ec. 6.2})$$

$$d_2(\lambda^1, \lambda^2) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_j^m \left(\max \left(1 - \frac{\lambda_j^1}{\lambda_j^2}, 1 - \frac{\lambda_j^2}{\lambda_j^1} \right) \right)^2} \quad (\text{Ec. 6.3})$$

$$d_3(V^1, V^2) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_j^m (1 - \langle v_j^1, v_j^2 \rangle)^2} \quad (\text{Ec. 6.4})$$

con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ y $c_1 + c_2 + c_3 = 1$.

La distancia d es una media ponderada de otras tres distancias d_1 , d_2 y d_3 , con pesos d_1 , d_2 y d_3 respectivamente. La distancia d_1 calcula la distancia angular entre los dos baricentros $\bar{\theta}^1$ y $\bar{\theta}^2$, d_2 tiene en cuenta las diferencias entre las varianzas λ^1 y λ^2 , y d_3 mide la alineación de los correspondientes PMDs de las dos tareas.

Nótese que d es una métrica (ver Sección D), esto significa que satisface las condiciones de no negatividad, identidad de los indiscernibles, simetría y la desigualdad triangular. Además $d_k \in [0, 1]$ para $k \in \{1, 2, 3\}$ y lo mismo hace d .

Cambiando los valores de los pesos, es posible modificar el comportamiento de d . En este trabajo, los pesos han sido escogidos empíricamente considerando las diferencias en la orientación de los PMDs (d_3) como lo más importante, seguido de las diferencias entre las varianzas (d_2) y, finalmente, los baricentros (d_1). Los pesos escogidos son $c_3 = 2c_2 = 8c_1$.

La Tabla 6.2 muestra las distancias entre las tareas experimentadas. Nótese que respecto a las tareas en las que sólo se han tenido en cuenta los movimientos de los brazos, las tareas con movimientos aleatorios son más cercanas entre ellas que a cualquier otra tarea. De la misma manera, las tareas específicas son más cercanas entre ellas que a las tareas con movimientos aleatorios. En cuanto a las tareas en las que también se han tenido en cuenta los movimientos de las manos, la tarea *Pañuelos* es semejante a las tareas *Cubos* y *Bandera*. Sin embargo, la distancia entre las tareas *Cubos* y *Bandera* es bastante grande. Por otro lado, la tarea *Pases* es distante a todas las demás tareas, esto significa que es la más diferente al resto. Por lo tanto, las tareas pueden agruparse en familias y la distancia d presentada puede usarse para hacer una clasificación de tareas.

Tareas	2	3	4	5	6
1	0,621	0,768	0,721	0,821	0,852
2	-	0,683	0,626	0,839	0,818
3	-	-	0,657	0,801	0,800
4	-	-	-	0,816	0,805
5	-	-	-	-	0,670

Tareas	8	9	10
7	0,665	0,712	0,693
8	-	0,650	0,684
9	-	-	0,712

Tabla 6.2 Distancias d entre las distintas tareas consideradas.

6.3. Planificación con PMDs

Al utilizar PMDs en la planificación de movimientos es importante representar bien las muestras inicial y final. Muchas veces es más fácil expresar una configuración del sistema antropomórfico en la base canónica del espacio de configuraciones (moviendo articulación por articulación independientemente) que no en la base de los PMDs (moverse a lo largo de un PMD implica modificar el valor de todas las articulaciones a la vez). Además puesto que se va a usar un planificador RRT-Connect, en el caso en que se planifique utilizando los PMDs, las muestras que formarán el árbol pertenecerán al subespacio de los PMDs y lo mismo deben hacer las muestras inicial y final. Debido a este hecho, es posible que la configuración inicial o final deseada no pertenezca al subespacio de los PMDs y deba usarse una configuración cercana. Este hecho se hace más visible cuando se quiere realizar la planificación de movimientos sobre el subespacio formado por los k primeros PMDs, con k bastante más pequeño que el número total de grados de libertad. Para obtener las configuraciones inicial y final a usar en el planificador se presenta la siguiente metodología.

Primero se calculan los valores articulares \mathbf{q} que sitúan el sistema antropomórfico en la configuración inicial/final deseada. Puesto que *The Kautham Project* trabaja con valores normalizados, los componentes de \mathbf{q} son normalizados en el rango $[0, 1]$ utilizando el rango de movimiento de cada articulación, obteniéndose $\hat{\mathbf{q}}$. Posteriormente, se proyecta esta muestra sobre el subespacio formado por los k PMDs a utilizar en la planificación.

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^k \frac{\langle \mathbf{v}_j, \hat{\mathbf{q}} \rangle}{\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle} \mathbf{v}_j \quad (\text{Ec. 6.5})$$

En *The Kautham Project*, los grados de libertad del sistema robótico son actuados con un vector de controles \mathbf{c} , una matriz de mapeado K y un vector de offset \mathbf{o} :

$$\hat{\mathbf{q}} = K \left(\mathbf{c} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ \vdots \\ 0,5 \end{bmatrix} \right) + \mathbf{o} \quad (\text{Ec. 6.6})$$

El vector \mathbf{c} puede representar una configuración inicial o final. En este caso, \mathbf{c} tendrá dimensión k y la matriz K tendrá dimensión $m \times k$. Entonces para encontrar el vector de controles \mathbf{c} que llevaría el sistema robótico a la configuración \mathbf{p} se ha de resolver el siguiente sistema lineal

$$\mathbf{p} = [\mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_k] \left(\mathbf{c} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ \vdots \\ 0,5 \end{bmatrix} \right) + \bar{\boldsymbol{\theta}}_N \quad (\text{Ec. 6.7})$$

dónde $\bar{\theta}_N$ es el vector que describe el baricentro de las muestras obtenido en el análisis de la Sección 4.4 pero normalizado en el rango $[0, 1]$ de la misma manera que se hizo con q para obtener \hat{q} .

Las componentes c_i de c obtenidas al resolver el sistema de la lineal de la (Ec. 6.7) pueden no pertenecer al rango $[0, 1]$ es por eso que deben ser posteriormente normalizados con la función $\text{sat}(x, x_{\text{máx}}, x_{\text{mín}})$ previamente definida (Ec. 4.17):

$$\hat{c}_i = \text{sat}(c_i, 1, 0) \quad \text{con } i = 1, \dots, k \quad (\text{Ec. 6.8})$$

El vector de control \hat{c} será utilizado como muestra inicial/final para resolver la planificación de movimientos usando PMDs mientras que para la planificación sin PMDs se usará la configuración inicial/final \hat{q} . Sin embargo, el vector \hat{c} no lleva el sistema robótico a la configuración \hat{q} de la que se partía sino a la configuración \hat{q}_n . Esta configuración es la configuración del subespacio de los PMDs más cercana a \hat{q} y se obtiene de la siguiente manera:

$$\hat{q}_n = [v_1 \quad \dots \quad v_k] \left(\hat{c} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ \vdots \\ 0,5 \end{bmatrix} \right) + \bar{\theta}_N \quad (\text{Ec. 6.9})$$

Para cuantificar la mejora introducida por el uso de los PMDs se resuelve la planificación de movimientos de varias tareas, primero sin PMDs y después con PMDs pero con las mismas configuraciones inicial y final. Las tareas que se planificarán serán las tareas *Vertido*, *Ensamblaje 1*, *Ensamblaje 2* y *Estantería* ver Sección 5. En todas las tareas se escoge la configuración inicial suponiendo que ya se ha producido la aproximación a los objetos a coger. Además se requiere que \hat{q} y \hat{q}_n se puedan conectar, es decir, que el camino lineal entre estas dos configuraciones no tenga colisiones. Esta comprobación se puede realizar fácilmente en el entorno de *The Kautham Project*. El planificador utilizado es un RRT-Connect asignando al parámetro “rango” un valor de 10 rad. Este parámetro del planificador representa la longitud máxima de un segmento (movimiento lineal entre dos muestras) para que sea añadido al árbol de muestras.

Se ha ejecutado cada uno de los experimentos 100 veces, con un tiempo máximo para la planificación de movimiento de 100 segundos y con un uso máximo de memoria de 1000 Mb. Si en algún momento se supera el límite temporal o el límite de memoria, se detiene la planificación y esa ejecución del experimento se marca como fallida. La Tabla 6.3 muestra la media de los resultados obtenidos tras las 100 repeticiones. Los resultados que se presentan incluyen el porcentaje de éxito al resolver la planificación de movimientos de la tarea especificada sujeta a las restricciones anteriormente mencionadas, el tiempo medio invertido en la planificación, el porcentaje medio de éxito de los intentos de conectar dos muestras (segmentos válidos), la memoria media utilizada, la longitud media de la solución

obtenida como la suma de distancia euclídea entre las muestras que forman la solución y el número medio de segmentos que forman la solución. Los valores medios se calculan sólo con los resultados de las ejecuciones con éxito. El número de PMDs a utilizar ha sido escogido de forma que la varianza acumulada de los PMDs escogidos superase el 95%.

La planificación de movimientos se ha realizado en un ordenador con procesador Genuine Intel CPU U7300 1,30Ghz x 2, con 3,8 Gb de memoria RAM y con un sistema operativo Ubuntu 12.04 de 64 bits.

Tarea	Uso de PMDs	Nº de PMDs	Éxito [%]	Tiempo [s]	Segmentos válidos [%]	Memoria [Mb]	Longitud solución [rad]	Segmentos solución
<i>Vertido</i>	No	-	84	39,125	2,15	391,816	25,083	5,07
	Sí	2	100	0,730	83,13	6,717	5,082	3,01
<i>Ensamblaje 1</i>	No	-	97	21,798	5,97	276,560	33,243	8,61
	Sí	4	100	1,862	27,77	105,834	6,982	5,38
<i>Ensamblaje 2</i>	No	-	87	34,456	4,54	345,094	26,977	6,77
	Sí	4	100	1,003	57,54	28,419	6,733	3,32
<i>Estantería</i>	No	-	17	67,238	1,53	462,645	55,627	13,00
	Sí	4	100	4,949	15,27	178,026	6,726	8,11

Tabla 6.3 Resultados de la planificación de movimientos de diversas tareas haciendo uso o no de los PMDs.

La diferencia entre planificar con PMDs o sin PMDs es significativamente notoria. En todas la tareas la planificación de movimientos de los dos conjuntos brazo-mano robóticos puede resolverse siempre con éxito si se usan los PMDs y no ocurre lo mismo cuando estos no se utilizan. Cabe decir que los casos que no consiguen resolverse son debidos a que se supera el tiempo máximo de planificación obtenido sin superar el límite de memoria. No obstante, el tiempo máximo de planificación establecido está lejos de los valores medios del tiempo de planificación.

El tiempo medio de planificación con PMDs es 10 a 60 veces más pequeño que sin ellos. Esto es debido a que la probabilidad de que dos muestras puedan conectarse y por lo tanto el árbol pueda crecer, es mayor en el caso de usar PMDs. Este hecho puede explicarse teniendo en cuenta que los PMDs se han obtenido de muestras de movimientos humanos y por lo tanto sin autocolisiones de los brazos del operario. Los PMDs obtenidos de estas muestras en general también están lejos de las zonas de autocolisión del sistema robótico, como se comprueba observando el movimiento a lo largo de cada una de las direcciones de movimiento definidas por los PMDs.

La memoria media utilizada durante las ejecuciones en que no se utilizan PMDs es un orden magnitud mayor que en los casos en que se utilizan los PMDs. Esto implica que se generan

más muestras y por lo tanto los árboles de muestras son mayores al no utilizar PMDs. Además, en este caso los árboles han de crecer en un espacio de dimensión mucho mayor.

Si no se utilizan PMDs la longitud media de la solución obtenida también es mayor, es decir, que los brazos se mueven más. Observando el sistema robótico mientras ejecuta cualquiera de las soluciones encontradas cuando no se han utilizado PMDs se ve que normalmente los movimientos se podrían dividir en tres fases: primero los brazos se mueven para alejar las manos de la mesa y del otro brazo, una vez en esta configuración se colocan las articulaciones de la muñeca en una configuración cercana a la final, y finalmente los brazos se mueven para alcanzar la configuración final. Obviamente, esto implica una longitud de la solución muy grande y, por otro lado, que los movimientos no tengan aspecto humano. Sin embargo, en los casos en que se usan PMDs los movimientos obtenidos son fluidos y tienen aspecto humano.

Dado que los resultados obtenidos son siempre mejores en los casos en los que se utilizaban PMDs, se verifica que la mejora en la planificación de movimientos introducida por el uso de los PMDs es significativa.

6.4. Planificación con PMDs de otra tarea

Para comprobar que el uso de los PMDs en planificación de movimientos mejora los resultados, respecto a no usarlos, aunque los PMDs usados no sean exactamente los de esa tarea, se ha probado a resolver cada tarea usando los PMDs de otra tarea. Se han ejecutado 100 repeticiones para cada tarea haciendo uso de los PMDs de la tarea más cercana (ver Tabla 6.2). Los resultados se presentan en la Tabla 6.4.

Tarea	Uso de PMDs de tarea	Nº de PMDs	Éxito [%]	Tiempo [s]	Segmentos válidos [%]	Memoria [Mb]	Longitud solución [rad]	Segmentos solución
<i>Vertido</i>	<i>Ensamblaje 1</i>	4	100	1,096	62,30	8,951	6,574	2,71
<i>Ensamblaje 1</i>	<i>Vertido</i>	4	100	2,756	24,78	52,520	8,583	3,59
<i>Ensamblaje 2</i>	<i>Estantería</i>	4	100	1,501	42,07	20,649	7,981	3,03
<i>Estantería</i>	<i>Ensamblaje 1</i>	6	100	7,528	10,21	4,925	8,173	2,13

Tabla 6.4 Resultados de la planificación de movimientos de diversas tareas haciendo uso de los PMDs de la tarea más cercana.

Observando los datos obtenidos, se ve que en todos los casos el uso de los PMDs propios da mejores resultados que el uso de PMDs de otra tarea, pero no obstante se consiguen resolver todas las ejecuciones dentro de los límites de tiempo y de memoria impuestos. Los tiempos de planificación son mayores (en torno al 50%) que cuando se usaban los PMDs propios. No obstante, los tiempos de planificación son mejores que en los casos en que no se usan los PMDs. Esto es debido en parte a que se realiza la planificación en un espacio

de dimensión menor y por otro lado, a que el subespacio de los PMDs tiene mayor número de zonas libre de colisiones (mayor probabilidad de obtener segmentos válidos). La longitud de las soluciones obtenidas también es mayor que cuando se usan los PMDs propios. Por lo tanto los brazos se moverán más de lo que lo hacen con los PMDs propios. Estos movimientos extras pueden empeorar el aspecto humano de los movimientos obtenidos.

6.5. Planificación con PMDs de combinaciones de tareas

En la Tabla 6.5 se presentan los resultados de la planificación de movimientos de las mismas tareas escogidas en las secciones anteriores pero esta vez se utilizan los PMDs resultantes de combinar las muestras tomadas de los movimientos de las 4 tareas. Al combinar las muestras de varias tareas se encuentran unos PMDs promedio entre los PMDs de cada una de ellas. En este caso se ha decidido utilizar los 8 primeros PMDs para realizar la planificación y se han realizado 100 repeticiones para cada tarea.

Tarea	Éxito [%]	Tiempo [s]	Segmentos válidos [%]	Memoria [Mb]	Longitud solución [rad]	Segmentos solución
<i>Vertido</i>	100	0,733	78,25	12,014	7,832	3,20
<i>Ensamblaje 1</i>	100	2,263	28,57	43,581	9,403	2,01
<i>Ensamblaje 2</i>	100	1,122	45,09	26,748	7,830	3,41
<i>Estantería</i>	100	5,970	10,65	51,879	8,430	2,37

Tabla 6.5 Resultados de la planificación de movimientos de diversas tareas haciendo uso de los PMDs promedio.

Se concluye que los resultados obtenidos son ligeramente peores que los obtenidos con los PMDs propios, sin embargo siguen siendo mejores que los obtenidos cuando no se utilizan PMDs. El porcentaje de éxito sigue siendo del 100% pero el tiempo medio de planificación ha aumentado un 20-25%. La longitud del camino solución también se ha visto incrementada en una proporción similar y por lo tanto los brazos realizarán más movimientos en la soluciones obtenidas con estos PMDs que si se hubiesen utilizado los PMDs propios.

7. Presupuesto

El presupuesto de este proyecto se muestra a continuación:

2 Guantes sensorizados Cyberglove (2 150 €/unidad).....	4 300,00 €
<i>Tracker</i> Fastrak (con dos sensores).....	715,00 €
Mesa sobre la que realizar los experimentos.....	50,00 €
Material fungible usado durante los experimentos.....	10,00 €
PRESUPUESTO DE EJECUCIÓN MATERIAL.....	5 075,00 €
GASTOS GENERALES (13%).....	659,75 €
Beneficio industrial (6%).....	304,50 €
Honorarios.....	11 000,00 €
SUBTOTAL.....	17 039,25 €
IVA (21%).....	3 578,24 €
TOTAL.....	20 617,49 €

El precio de los guantes sensorizados y el *tracker* es la amortización calculada a partir del precio de adquisición teniendo en cuenta que los dispositivos se usarán durante un año y estos tienen una vida estimada de 7 años. El beneficio industrial citado anteriormente incluye los beneficios del despacho de ingeniería como empresa. Respecto al personal, a continuación se detallan las horas y el precio por hora personal:

Ingenieros equipo (520 horas a 20 €/hora).....	10 400,00 €
Director de proyecto (20 horas a 30 €/hora).....	600,00 €

En cuanto a las especificaciones de los materiales, es necesario que la mesa empleada durante los experimentos no sea metálica y que durante la captura de movimientos no se encuentre cerca ningún objeto metálico.

No se especifica ninguna partida en el presupuesto para adquisición de licencias de software, ya que durante todo el proyecto se ha utilizado software libre o desarrollado expresamente para el proyecto. Puesto que durante todo el desarrollo del proyecto se ha trabajado con simulaciones, tampoco se incluye en el presupuesto el coste de los brazos o las manos robóticas.

8. Impacto ambiental

La aplicación del método presentado en este trabajo para la planificación de movimientos de dos conjuntos brazo-mano robóticos tendrá principalmente impacto a nivel ambiental en lo referente al factor socioeconómico.

Dado que se consigue una reducción del coste computacional asociado a la planificación de los movimientos del sistema antropomórfico se consigue un ahorro económico en tiempo y dinero. Entonces, el impacto económico que se prevé es positivo.

En cuanto al impacto social, el hecho de que los movimientos obtenidos tengan aspecto humano, permite la inserción de sistemas antropomórficos en entornos donde pueda existir interacción con humanos. Este trabajo puede abrir el camino hacia otros proyectos que permitan una mejora en la planificación de movimientos en robots humanoides y que acaben acercando este tipo de robots a los hogares a largo plazo.

El impacto medioambiental del proyecto será pequeño puesto que el consumo de energía o materias primas ha sido mínimo y los dispositivos utilizados tienen una vida útil larga. No obstante, el impacto medioambiental puede reducirse si al llegar el momento en que los dispositivos utilizados ya no funcionen, estos son llevados a un punto de reciclaje. Allí los aparatos electrónicos son clasificados, desmontados y los materiales valiosos que contienen pueden recuperarse. Esto puede ayudar a prevenir problemas de salud, la creación de empleo, y reducir las emisiones de gases de efecto invernadero.

En cualquier caso la influencia del proyecto en el ambiente será mínima.

Conclusiones y trabajo futuro

Tras la realización del presente proyecto se concluye que:

- Se ha implementado una herramienta que permite capturar los movimientos de un operario mientras realiza una tarea concreta, proyectar estos movimientos a un sistema antropomórfico formado por dos conjuntos brazo-mano robóticos y obtener los PMDs asociados a los movimientos del sistema robótico.
- Se han capturado los movimientos de 10 tareas determinadas y se ha demostrado que con los PMDs de una tarea se simplifica la planificación de movimientos de los dos conjuntos robóticos y se consigue que los movimientos obtenidos tengan aspecto humano. También se ha verificado que aunque los PMDs utilizados en la planificación de movimientos no sean los propios de la tarea, los resultados que se obtienen son mejores que si no se usasen los PMDs.
- Se ha propuesto una medida de la distancia entre los PMDs de dos tareas para determinar cómo de similares o diferentes son. Esta medida permite identificar conjuntos de tareas semejantes entre ellas y consecuentemente crear una taxonomía de tareas.
- Las autocolisiones entre elementos del sistema antropomórfico son prácticamente inexistentes en el subespacio de los PMDs. Este hecho se puede apreciar observando el movimiento a lo largo de cada una de las direcciones de movimiento definidas por los PMDs.

El trabajo futuro que se propone es el siguiente:

- Ampliar el número de tareas de las que se obtiene los PMDs. Con ello se podrá encontrar unos PMDs que permitan obtener mejores resultados globales para un conjunto de tareas determinado.
- Ampliar el número de repeticiones que se realizan al capturar los movimientos y aumentar el número de repeticiones de la planificación de cada experimento. Esto permitirá obtener una medida más precisa de la mejora que supone utilizar PMDs en la planificación de movimientos del sistema antropomórfico. Con ello también se puede estimar el número mínimo de repeticiones al capturar los movimientos de una tarea para obtener unos PMDs representativos.
- Experimentar con más tareas y operarios para posteriormente utilizar la medida de semejanza entre tareas para caracterizar conjuntos de tareas. De esta forma se podrían obtener conjuntos de PMDs genéricos que permitieran resolver la planificación de ciertos tipos de tareas. Por lo tanto, no sería necesario capturar los movimientos de un operario realizando la tarea. Para resolver la planificación de tareas, se identificaría el tipo de tarea a resolver y simplemente se usarían los PMDs que funcionan bien para

este tipo de tarea. Una posible forma de identificar el tipo de tarea a resolver puede ser utilizar los PMDs resultantes de ejecutar la tarea una sola vez.

Agradecimientos

En este punto me gustaría dar las gracias a todos a aquellos que han hecho posible este trabajo.

En primer lugar me gustaría expresar mi gratitud a mi tutor Raúl Suarez y a Jan Rosell por haberme dirigido y por el tiempo que han perdido conmigo. Querría agradecerles la confianza depositada para emprender otros proyectos junto a ellos.

También agradezco a Leo Palomo sus consejos y su paciencia para resolver todas las preguntas que me iban surgiendo durante el proyecto. Agradezco a Josep Consuegra los buenos momentos en el laboratorio y a todo el personal del IOC por su tiempo y la ayuda brindada.

Por último no me quiero olvidar de mis compañeros de universidad, familia y amigos, que gracias a ellos todo es siempre mucho más fácil.

A todos muchas gracias.

Bibliografía

- [1] Jean-Claude Latombe. *Robot motion planning*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [2] L. E. Kavraki, P. Svestka, J. Latombe y M. Overmars. Probabilistic Roadmaps for Path Planning in High-Dimensional Configuration Spaces. *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, págs. 566–580, 1996.
- [3] J. J. Kuffner y S. M. LaValle. RRT-Connect: An efficient approach to single-query path planning. *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, págs. 995–1001, 2000.
- [4] S. Karaman y E. Frazoli. Sampling-based algorithms for optimal motion planning. *International Journal of Robotics Research*. 30(7):846–894, junio 2011.
- [5] M. Stilman. Global manipulation planning in robot joint space with task constraints. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(3):576–584, 2010.
- [6] A. Yershova, L. Jaille, T. Simeon y S. LaValle. Dynamic-Domain RRTs: Efficient Exploration by Controlling the Sampling Domain. *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, págs. 3856–3861, 2005.
- [7] J. Zucker, M. Kuffner y J. Bagnell. Adaptive workspace biasing for sampling-based planners. *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, págs. 3757–3762, 2008.
- [8] J. Rosell, R. Suárez y A. Pérez. Path planning for grasping operations using an adaptive pca-based sampling method. *Autonomous Robots*, 35(1):27–36, 2013.
- [9] Marco Santello, Martha Flanders y John F. Soechting. Postural hand synergies for tool use. *Journal of Neuroscience*, 18(23):10105–10115, diciembre 1998.
- [10] Matei T. Ciocarlie y Peter K. Allen. Hand Posture Subspaces for Dexterous Robotic Grasping. *The International Journal of Robotics Research*, 28(7):851–867, julio 2009.
- [11] Aggeliki Tsoli y Odest C. Jenkins. 2D subspaces for user-driven robot grasping. *RSS Workshop on Robot Manipulation: Sensing and Adapting to the Real World*, Atlanta, GA, junio 2007.
- [12] J. Rosell, R. Suárez, C. Rosales y A. Pérez. Autonomous motion planning of a hand-arm robotic system based on captured human-like hand postures. *Autonomous Robots*, 31(1):87–102, 2011.

- [13] Shao-Chun Sun, C. Rosales y R. Suárez. Study of coordinated motions of the human hand for robotic applications. *Proc. of the 2010 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA2010)*, págs. 776–781, 2010.
- [14] Alla Safonova, Jessica K. Hodgins y Nancy S. Pollard. Synthesizing physically realistic human motion in low-dimensional, behavior specific spaces. *ACM Transactions Graph.*, 23(3):514–521, 2004.
- [15] M. Gabiccini, A. Bicchi, D. Prattichizzo y M. Malvezzi. On the role of hand synergies in the optimal choice of grasping forces. *Autonomous Robots*, 31:235–252, 2011.
- [16] Rethink Robotics. Baxter. <http://www.rethinkrobotics.com/products/baxter/>, junio 2014.
- [17] A. Albu-Schäffer, S. Haddadin, Ch. Ott, A. Stemmer, T. Wimböck y G. Hirzinger. The dlr lightweight robot: design and control concepts for robots in human environments. *Industrial Robot: An International Journal*, 34(5):376–385, 2007.
- [18] Zeungnam Bien y Jihong Lee. A Minimum-Time Trajectory Planning Method for Two Robots. *Robotics and Automation, IEEE Transactions*, 8(3):414–418, junio 1992.
- [19] Steven M. LaValle. Optimal Motion Planning for Multiple Robots Having Independent Goals. *Robotics and Automation, IEEE Transactions*, 14(6):912–925, diciembre 1998.
- [20] Srinivas Akella. Coordinating the Motions of Multiple Robots with Specified Trajectories. *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA'02. IEEE International Conference*, 1:624–631, 2002.
- [21] J. Rosell, A. Pérez, A. Aliakbar, Muhayyuddin, L. Palomo y N. García. The Kautham Project: A teaching and research tool for robot motion planning. *IEEE Int. Conf. On Emerging Technologies and Factory Automation, ETFA'14, 2014*.
- [22] John J. Craig. *Introduction to Robotics. Mechanics and Control*. Addison-Wesley Publishing Company, págs. 20–39, 1986.
- [23] I. T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer Series in Statistics, Upper Saddle River, NJ, USA, 2002.
- [24] M. Quigley, B. Gekey, K. Cnley, J. Faust, T. Foote, J. Leibs, E. Berger, R. Wheeler y A. Ng. ROS: an open-source robot operating system. *Workshop on Open Source Robotics. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, mayo 2009.
- [25] I. A. Suçan, M. Moll y L. E. Kavraki. The Open Motion Planning Library. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 9(4):72–82, diciembre 2012.

A. Resolución de la cinemática inversa del UR5

El problema analítico de la cinemática inversa consiste en encontrar el conjunto de configuraciones $Q = \{q_i\}$, dónde $q_i = (\theta_1^i, \dots, \theta_6^i)$ y $\theta_1^i \in [0, 2\pi)$ que cumplan:

$${}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = {}^0A_6^d \quad (\text{Ec. A.1})$$

$${}^0A_6^d = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. A.2})$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ \cos(\alpha_{i-1})\sin(\theta_i) & \cos(\alpha_{i-1})\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_{i-1}) & -d_i\sin(\alpha_{i-1}) \\ \sin(\alpha_{i-1})\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_{i-1})\cos(\theta_i) & \cos(\alpha_{i-1}) & d_i\cos(\alpha_{i-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. A.3})$$

dónde ${}^0A_6^d$ describe la posición deseada y la orientación del eslabón final y los parámetros D-H del brazo robótico UR5 de Universal Robots son:

i	0	1	2	3	4	5	6
α_i [rad]	0	$\pi/2$	0	0	$-\pi/2$	$-\pi/2$	–
a_i [mm]	0	0	425	392,25	0	0	–
d_i [mm]	–	89,159	0	0	109,25	94,65	82,3
$offset_i$ [rad]	–	$-3\pi/4$	π	0	0	π	0
low_i [rad]	–	-2π	-2π	-2π	-2π	-2π	-2π
$high_i$ [rad]	–	2π	2π	2π	2π	2π	2π

Tabla A.1 Parámetros Denavit-Hartenberg del brazo robótico UR5 de Universal Robots.

Se empieza encontrando θ_1 usando la posición de la quinta articulación. Analizando la transformación desde la articulación 1 a la articulación 5, usando la ecuación (Ec. A.1), se enuncia la igualdad:

$${}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 = ({}^0A_1)^{-1} {}^0A_6^d ({}^5A_6)^{-1} \quad (\text{Ec. A.4})$$

Escogiendo los elementos (2,4) de las matrices de la ecuación (Ec. A.4) se obtiene:

$$-d_4 = -(p_x - d_6 a_x) \sin(\theta_1) + (p_y - d_6 a_y) \cos(\theta_1) \quad (\text{Ec. A.5})$$

de dónde se puede obtener el valor de θ_1 :

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y - d_6 a_y, p_x - d_6 a_x) \pm \text{acos} \left(\frac{d_4}{\sqrt{(p_x - d_6 a_x)^2 + (p_y - d_6 a_y)^2}} \right) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{Ec. A.6})$$

Se obtienen dos soluciones para θ_1 , que corresponden a las configuraciones donde el hombro es “izquierdo” o “derecho”. La función $\text{atan2}(y, x)$ es la función arcotangente con dos argumentos y es necesario su uso para situar la solución en el cuadrante correcto. Para que exista solución a la cinemática inversa se ha de cumplir:

$$\sqrt{(p_x - d_6 a_x)^2 + (p_y - d_6 a_y)^2} \leq |d_4| \quad (\text{Ec. A.7})$$

Utilizando la transformación de la articulación 1 a la articulación 6 se obtiene la siguiente igualdad:

$${}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = ({}^0A_1)^{-1} {}^0A_6^d \quad (\text{Ec. A.8})$$

Con los elementos (2,4) de las matrices de la ecuación (Ec. A.8) se obtiene:

$$-d_4 + d_6 \cos(\theta_5) = -p_x \sin(\theta_1) + p_y \cos(\theta_1) \quad (\text{Ec. A.9})$$

de dónde se puede obtener el valor de θ_5 de la siguiente manera:

$$\theta_5 = \pm \arccos\left(\frac{-p_x \sin(\theta_1) + p_y \cos(\theta_1) + d_4}{d_6}\right) \quad (\text{Ec. A.10})$$

Se obtienen dos soluciones para θ_5 , que corresponden a las configuraciones donde el codo es “exterior/arriba” o “interior/abajo”. Para que exista solución a la cinemática inversa se ha de cumplir:

$$|d_6| \leq |p_x \sin(\theta_1) - p_y \cos(\theta_1) - d_4| \quad (\text{Ec. A.11})$$

Para encontrar el valor de la sexta articulación se extraen los elementos (2,1) y (2,2) de las matrices de la ecuación (Ec. A.8) y se obtienen, respectivamente:

$$\sin(\theta_5) \cos(\theta_6) = -n_x \sin(\theta_1) + n_y \cos(\theta_1) \quad (\text{Ec. A.12})$$

$$-\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) = o_y \cos(\theta_1) - o_x \sin(\theta_1) \quad (\text{Ec. A.13})$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\sin(\theta_6) = \frac{-o_y \cos(\theta_1) + o_x \sin(\theta_1)}{\sin(\theta_5)} \quad (\text{Ec. A.14})$$

$$\cos(\theta_6) = \frac{-n_x \sin(\theta_1) + n_y \cos(\theta_1)}{\sin(\theta_5)} \quad (\text{Ec. A.15})$$

Las ecuaciones (Ec. A.14) y (Ec. A.15) forman un sistema que se puede resolver fácilmente como:

$$\theta_6 = \text{atan2}\left(\frac{o_y \cos(\theta_1) - o_x \sin(\theta_1)}{\sin(\theta_5)}, \frac{n_x \sin(\theta_1) - n_y \cos(\theta_1)}{\sin(\theta_5)}\right) \quad (\text{Ec. A.16})$$

Esta solución no está definida en dos casos: cuando ambos numeradores son 0 o bien cuando ambos denominadores son 0.

$$\sin(\theta_5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} o_y \cos(\theta_1) - o_x \sin(\theta_1) = 0 \\ n_x \sin(\theta_1) - n_y \cos(\theta_1) = 0 \end{cases} \quad (\text{Ec. A.17})$$

No obstante, estas condiciones se implican la una a la otra. Cuando $\sin(\theta_5) = 0$, se sabe que $\cos(\theta_5) = \pm 1$, lo cual indica que las articulaciones 2, 3, 4 y 6 son paralelas y la solución está indeterminada. Cuando esto ocurre, se le debe asignar un valor por defecto a θ_6 para que el sistema sea determinado.

Utilizando la transformación de la articulación 1 a la articulación 4 se obtiene la siguiente igualdad:

$${}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 = ({}^0A_1)^{-1} {}^0A_6^d ({}^5A_6)^{-1} ({}^4A_5)^{-1} \quad (\text{Ec. A.18})$$

Para resolver el resto de articulaciones, se extraen los elementos (1,4), (3,4), (3,2), y (3,1) de la ecuación (Ec. A.18) y se obtienen, respectivamente:

$$a_2 \cos(\theta_2) + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) = x \quad (\text{Ec. A.19})$$

$$a_2 \sin(\theta_2) + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) = y \quad (\text{Ec. A.20})$$

$$\cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = n_z \sin(\theta_6) + o_z \cos(\theta_6) \quad (\text{Ec. A.21})$$

$$\sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = (n_z \cos(\theta_6) - o_z \sin(\theta_6)) \cos(\theta_5) - a_z \sin(\theta_5) \quad (\text{Ec. A.22})$$

dónde:

$$x = \left(d_5 (n_y \sin(\theta_6) + o_y \cos(\theta_6)) - a_y d_6 + p_y \right) \sin(\theta_1) + \left(d_5 (n_x \sin(\theta_6) + o_x \cos(\theta_6)) - a_x d_6 + p_x \right) \cos(\theta_1) \quad (\text{Ec. A.23})$$

$$y = d_5 (n_z \sin(\theta_6) + o_z \cos(\theta_6)) - a_z d_6 - d_1 + p_z \quad (\text{Ec. A.24})$$

De las ecuaciones (Ec. A.19) y (Ec. A.20), se obtiene:

$$(x - a_2 \cos(\theta_2))^2 = (a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3))^2 \quad (\text{Ec. A.25})$$

$$(y - a_2 \sin(\theta_2))^2 = (a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3))^2 \quad (\text{Ec. A.26})$$

Operando sucesivamente:

$$(x - a_2 \cos(\theta_2))^2 + (y - a_2 \sin(\theta_2))^2 = (a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3))^2 + (a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3))^2 \quad (\text{Ec. A.27})$$

$$x^2 + y^2 + a_2^2 - 2a_2 x \cos(\theta_2) - 2a_2 y \sin(\theta_2) = a_3^2 \quad (\text{Ec. A.28})$$

$$-2a_2 x \cos(\theta_2) - 2a_2 y \sin(\theta_2) = a_3^2 - x^2 - y^2 - a_2^2 \quad (\text{Ec. A.29})$$

Y, finalmente, se obtiene:

$$\theta_2 = \text{atan2}(-y, -x) \pm \text{acos}\left(\frac{a_3^2 - x^2 - y^2 - a_2^2}{2a_2\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (\text{Ec. A.30})$$

Se obtienen dos soluciones para θ_2 , que corresponden a las configuraciones donde el codo está “arriba” o “abajo”. Para que exista solución a la cinemática inversa se ha de cumplir:

$$|a_3^2 - x^2 - y^2 - a_2^2| \leq |2a_2\sqrt{x^2 + y^2}| \quad (\text{Ec. A.31})$$

De las ecuaciones (Ec. A.19) y (Ec. A.20), se obtiene:

$$\cos(\theta_2 + \theta_3) = \frac{x - a_2\cos(\theta_2)}{a_3} \quad (\text{Ec. A.32})$$

$$\sin(\theta_2 + \theta_3) = \frac{y - a_2\sin(\theta_2)}{a_3} \quad (\text{Ec. A.33})$$

De las ecuaciones (Ec. A.32) y (Ec. A.33), se obtiene finalmente:

$$\theta_3 = \text{atan2}\left(\frac{y - a_2\sin(\theta_2)}{a_3}, \frac{x - a_2\cos(\theta_2)}{a_3}\right) - \theta_2 \quad (\text{Ec. A.34})$$

De las ecuaciones (Ec. A.21) y (Ec. A.22), se obtiene:

$$\theta_4 = \text{atan2}\left(\left(n_z\cos(\theta_6) - o_z\sin(\theta_6)\right)\cos(\theta_5) - a_z\sin(\theta_5), \right. \\ \left. n_z\sin(\theta_6) + o_z\cos(\theta_6)\right) - \theta_2 - \theta_3 \quad (\text{Ec. A.35})$$

Los valores anteriormente encontrados son absolutos. Para obtener los valores relativos a la referencia real, se debe sustraer el *offset*.

$$\hat{\theta}_i = \theta_i - \text{offset}_i \quad (\text{Ec. A.36})$$

Una vez hecho esto, hará falta comprobar que la solución es físicamente alcanzable. Para ello, se deberá cumplir la siguiente condición:

$$\text{low}_i \leq \hat{\theta}_i \leq \text{high}_i \quad (\text{Ec. A.37})$$

Nótese que ya que el rango de movimiento de cada articulación comprende dos vueltas completas, se obtienen dos soluciones físicamente alcanzables para un mismo ángulo: $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ y $\theta_i - \text{sign}(\theta_i)2\pi$.

B. Poses de la mano utilizadas para calibrar el guante sensorizado

Antes de que se realice la captura de movimientos, el operario debe calibrar cada uno de los guantes. Para ello se deben leer las medidas de los guantes mientras el operario realiza ciertas posturas con las manos (ver Fig. B.1). Cada postura tiene asociada los valores que deberían marcar los sensores una vez estos estuviesen calibrados.

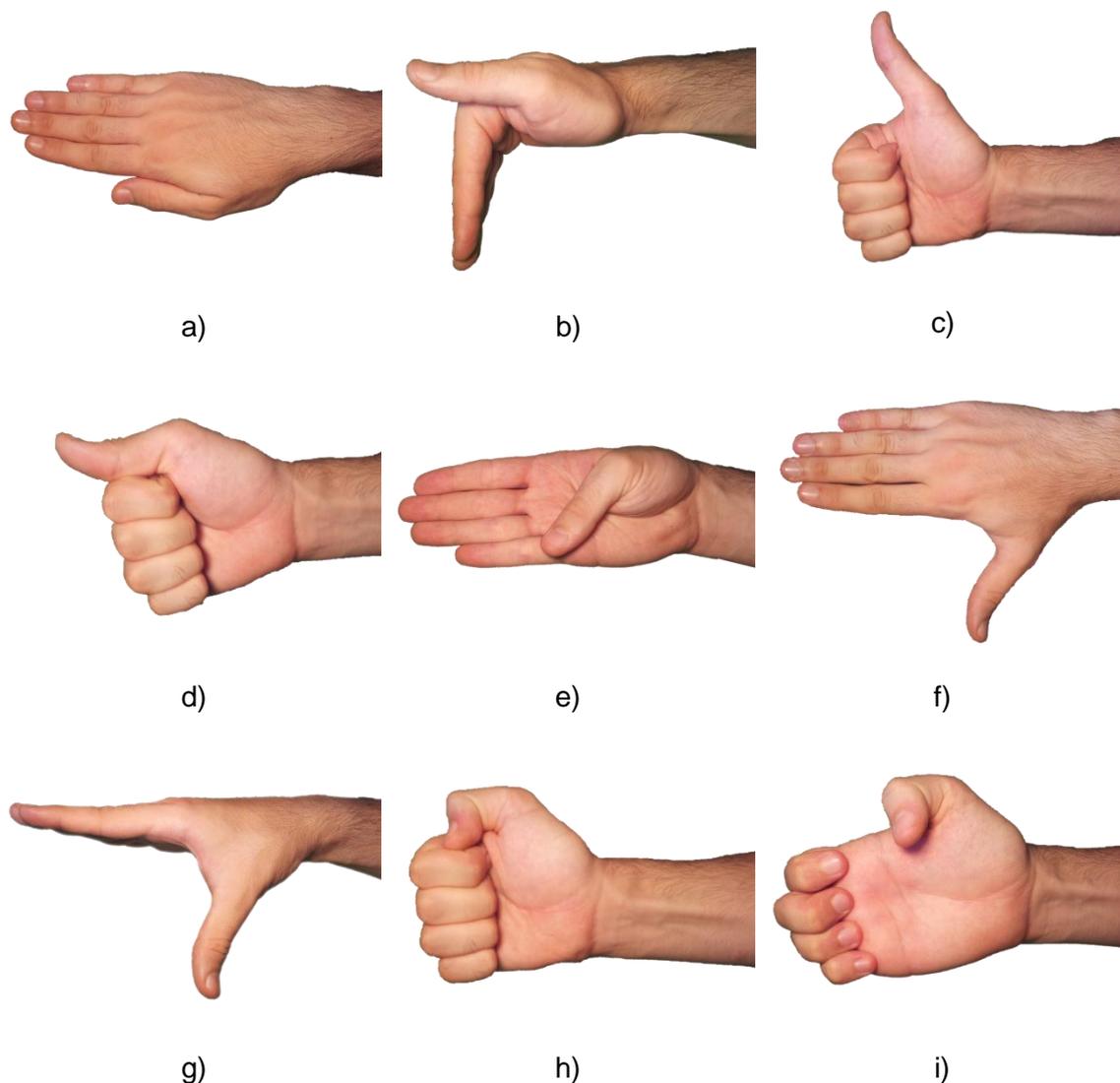


Fig. B.1 Posturas de la mano a realizar para calibrar el guante.

Como ya se ha comentado en la Sección 4.3.1, los valores calibrados se obtienen utilizando las ecuaciones (Ec. 4.1), (Ec. 4.4) y (Ec. 4.5). Para conseguir esto, se realiza una regresión lineal sobre los parámetros de estas ecuaciones utilizando los valores leídos de los guantes y los valores en la Tabla B.1.

	\hat{S}_B^T	\hat{S}_M^T	\hat{S}_D^T	\hat{S}_A^{TI}	\hat{S}_P^I	\hat{S}_M^I	\hat{S}_D^I	\hat{S}_P^M	\hat{S}_M^M	\hat{S}_D^M	\hat{S}_A^{MI}	\hat{S}_P^R	\hat{S}_M^R	\hat{S}_D^R	\hat{S}_A^{MR}	ϕ	ψ
a)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b)	0	0	0	0	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	0	0	0	$\pi/2$	0	0	0	*	*
c)	0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	*	*
d)	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	*	*
e)	$\pi/2$	$\pi/2$	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*	*
f)	0	0	0	$\pi/2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*	*
g)	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*	*
h)	0	0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	*	*
i)	0	0	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	0	*	*
j)	*	*	*	$\pi/4$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
k)	*	*	*	$\pi/8$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
l)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	$\pi/4$	*	*	*	*	*	*
m)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	$\pi/8$	*	*	*	*	*	*
n)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	$\pi/4$	*	*
ñ)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	$\pi/8$	*	*
o)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	-1,6	0
p)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	0
q)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	-1,6	-0,45
r)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	0	-0,45
s)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	-0,45
t)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	-1,6	0,3
u)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	0	0,3
v)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	0,3
w)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	-0,8	-0,23
x)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	-0,8	-0,23
y)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	0,15
z)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	0,15

Tabla B.1 Valores calibrados de los sensores (columnas) del guante Cyberglove, en radianes, para cada una de las posturas de la mano (filas) a realizar para calibrar el guante.

En las posturas j) y k) el operario debe mantener, con la palma de la mano completamente estirada, un ángulo de abducción del pulgar de $\pi/4 \text{ rad}$ y $\pi/8 \text{ rad}$, respectivamente. Debe hacer lo mismo en las posturas l) a ñ) pero esta vez con los ángulos de abducción índice-corazón y corazón-anular. En las posturas o) a z) el operario debe mantener los ángulos de flexión y abducción de la muñeca, ϕ y ψ respectivamente, indicados en la Tabla B.1. Se deben tomar varias repeticiones de cada una de las medidas para obtener una buena calibración de los guantes. En este trabajo cada postura se ha realizado 5 veces. El proceso de calibración de los guantes sensorizados debe efectuarse para cada uno de los guantes y para cada nuevo operario que vaya a utilizar los guantes.



C. Poses de la mano utilizadas para la calibración del mapeado de las posiciones de las manos

En el mapeado de las posiciones de las manos, los valores de las articulaciones J_B^T , J_A^T y J_M^T se calculan por interpolación de una serie de poses (Ec. 4.20). Se ha pedido al usuario que imite una serie de posturas con la mano (Fig. C.1). En cada una de estas posturas de la mano humana se obtienen los valores calibrados de los sensores del guante Cyberglove (ver Sección 4.3.1) y se almacena los valores de \hat{S}_B^T , \hat{S}_A^T y \hat{S}_M^T . Cada postura de la mano humana tiene asociada una postura de la mano robótica. Los valores de las articulaciones J_B^T , J_A^T y J_M^T en dichas posturas se muestran en la Tabla C.1.

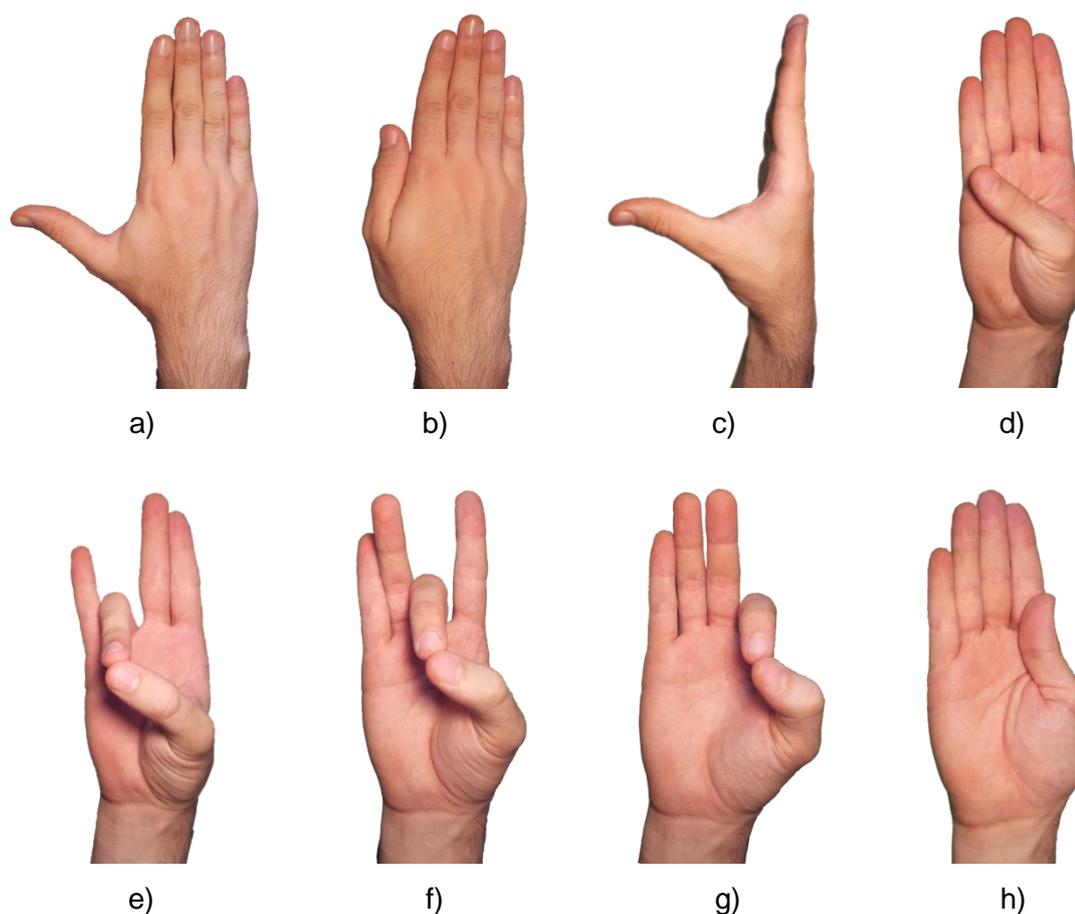


Fig. C.1 Posturas de la mano a realizar para calibrar el mapeado de las posiciones de las manos.

Para obtener los valores c_{ij} de la matriz C (Ec. 4.20) que permite calcular los valores de J_B^T , J_A^T y J_M^T , se realiza una regresión lineal sobre estos parámetros utilizando los valores de \hat{S}_B^T , \hat{S}_A^T y \hat{S}_M^T y los valores en la Tabla C.1.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
J_B^T	0,263	0,263	1,396	1,396	1,400	1,400	1,200	0,830
J_A^T	0,000	0,000	0,000	1,163	1,020	0,440	0,300	0,000
J_M^T	0,000	1,571	0,000	1,644	0,910	0,820	0,710	1,571

Tabla C.1 Valores de las articulaciones J_B^T , J_A^T y J_M^T de la mano Allegro Hand para las distintas posturas de la mano en la Fig. C.1.

Se deben tomar varias repeticiones de cada una de las medidas para obtener una buena calibración de los guantes. En este trabajo cada postura se ha realizado 5 veces. Si los guantes sensorizados están bien calibrados, no importa qué operario use guantes ni si usa el guante izquierdo o el derecho para calibrar el mapeado de las posiciones de las manos.

D. Demostración de la distancia entre dos tareas

Las condiciones para que una distancia $d(x, y)$ cualquiera sea considerada métrica son:

- 1) $d(x, y) \geq 0$ (no negatividad)
- 2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (identidad de los indiscernibles)
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría)
- 4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular)

$\forall x, y, z \in M$ espacio métrico. A continuación se demostrará que la función $d(\Gamma_1, \Gamma_2)$ (Ec. 6.1) es métrica.

Sea $d_\theta(\theta_1, \theta_2)$ una función distancia cuya condición de métrica quiere comprobarse y que está definida cómo

$$d_\theta(\theta_1, \theta_2) = 1 - \left| 1 - \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} \right| \quad \forall \theta_j \in [-\pi, \pi] \quad (\text{Ec. D.1})$$

$$1) \quad d_\theta(\theta_1, \theta_2) \geq 0$$

Se ha de demostrar que

$$1 - \left| 1 - \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} \right| \geq 0 \quad (\text{Ec. D.2})$$

Si se va operando sucesivamente, se obtiene

$$\left| 1 - \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} \right| \leq 1 \quad (\text{Ec. D.3})$$

$$-1 \leq 1 - \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} \leq 1 \quad (\text{Ec. D.4})$$

$$-2 \leq -\frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} \leq 0 \quad (\text{Ec. D.5})$$

$$0 \leq \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} \leq 2 \quad (\text{Ec. D.6})$$

$$0 \leq |\theta_1 - \theta_2| \leq 2\pi \quad (\text{Ec. D.7})$$

$$|\theta_1 - \theta_2| \leq 2\pi \quad (\text{Ec. D.8})$$

$$-2\pi \leq \theta_1 - \theta_2 \leq 2\pi \quad (\text{Ec. D.9})$$

Y puesto que $\theta_j \in [-\pi, \pi)$, se cumple $\forall \theta_j$. Además, puesto que $|\theta_1 - \theta_2| \leq 2\pi$, se tiene que $d_\theta(\theta_1, \theta_2) \leq 1$.

$$2) d_{\theta}(\theta_1, \theta_2) = 0 \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$$

La demostración de un sentido de la igualdad es directa:

$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow 1 - \left| 1 - \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} \right| = 1 - \left| 1 - \frac{|0|}{\pi} \right| = 1 - 1 = 0 \quad (\text{Ec. D.10})$$

El otro sentido se demuestra a continuación.

$$d_{\theta}(\theta_1, \theta_2) = 0 \Rightarrow \left| 1 - \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} \right| = 1 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2? \quad (\text{Ec. D.11})$$

Se obtienen 2 casos. Primeramente,

$$\frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} = 2 \quad (\text{Ec. D.12})$$

Si se resuelve, se obtiene

$$|\theta_1 - \theta_2| = 2\pi \quad (\text{Ec. D.13})$$

$$\theta_1 = \theta_2 + 2\pi \notin [-\pi, \pi) \quad (\text{Ec. D.14})$$

Con lo cual nunca se puede dar este caso. El segundo caso es el siguiente

$$\frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} = 0 \quad (\text{Ec. D.15})$$

Si se resuelve, se obtiene

$$|\theta_1 - \theta_2| = 0 \quad (\text{Ec. D.16})$$

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (\text{Ec. D.17})$$

Por lo tanto, se cumple la condición de la identidad de los indiscernibles.

$$3) d_{\theta}(\theta_1, \theta_2) = d_{\theta}(\theta_2, \theta_1)$$

Se demuestra fácilmente:

$$\begin{aligned} d_{\theta}(\theta_1, \theta_2) &= 1 - \left| 1 - \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} \right| = 1 - \left| 1 - \frac{|-(\theta_2 - \theta_1)|}{\pi} \right| \\ &= 1 - \left| 1 - \frac{|\theta_2 - \theta_1|}{\pi} \right| = d_{\theta}(\theta_2, \theta_1) \end{aligned} \quad (\text{Ec. D.18})$$

$$4) d_{\theta}(\theta_1, \theta_2) \leq d_{\theta}(\theta_1, \theta_3) + d_{\theta}(\theta_3, \theta_2)$$

Se puede suponer $\theta_1 \geq \theta_2$ sin perder generalización debido a la propiedad de simetría.

Se quiere demostrar:

$$1 - \left| 1 - \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi} \right| \leq 1 - \left| 1 - \frac{|\theta_1 - \theta_3|}{\pi} \right| + 1 - \left| 1 - \frac{|\theta_3 - \theta_2|}{\pi} \right| \quad (\text{Ec. D.19})$$

Se puede dividir en 4 casos:

- a) $\theta_1 \geq \theta_3$ y $\theta_2 \geq \theta_3 \Rightarrow \theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3$
- b) $\theta_1 \geq \theta_3$ y $\theta_2 < \theta_3 \Rightarrow \theta_1 \geq \theta_3 \geq \theta_2$
- c) $\theta_1 < \theta_3$ y $\theta_2 \geq \theta_3 \Rightarrow$ no puede ser con $\theta_1 \geq \theta_2$
- d) $\theta_1 < \theta_3$ y $\theta_2 < \theta_3 \Rightarrow \theta_3 \geq \theta_1 \geq \theta_2$

A la vez, cada uno de estos casos se divide en 8 casos cada uno. A continuación se demuestran cada uno de estos casos.

$$\text{a.1) } 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, 0 \leq \theta_1 - \theta_3 \leq \pi \text{ y } 0 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq \pi$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + \frac{\theta_2 - \theta_3}{\pi} \Rightarrow \theta_2 \geq \theta_3 \quad (\text{Ec. D.20})$$

$$\text{a.2) } 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, 0 \leq \theta_1 - \theta_3 \leq \pi \text{ y } \pi \leq \theta_2 - \theta_3 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 + \pi$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + 2 - \frac{\theta_2 - \theta_3}{\pi} \Rightarrow 0 \leq 2\pi \quad (\text{Ec. D.21})$$

$$\text{a.3) } 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, \pi \leq \theta_1 - \theta_3 \text{ y } 0 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq \pi$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq 2 - \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + \frac{\theta_2 - \theta_3}{\pi} \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 \leq \pi \quad (\text{Ec. D.22})$$

$$\text{a.4) } 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, \pi \leq \theta_1 - \theta_3 \text{ y } \pi \leq \theta_2 - \theta_3$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq 2 - \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + 2 - \frac{\theta_2 - \theta_3}{\pi} \Rightarrow \theta_1 - \theta_3 \geq 2\pi \quad (\text{Ec. D.23})$$

$$\text{a.5) } \pi \leq \theta_1 - \theta_2, 0 \leq \theta_1 - \theta_3 \leq \pi \text{ y } 0 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq \pi \Rightarrow \theta_1 - \pi = \theta_2 = \theta_3$$

$$2 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + \frac{\theta_2 - \theta_3}{\pi} \Rightarrow \pi \geq \theta_1 - \theta_3 \Rightarrow \pi \leq \pi \quad (\text{Ec. D.24})$$

$$\text{a.6) } \pi \leq \theta_1 - \theta_2, 0 \leq \theta_1 - \theta_3 \leq \pi \text{ y } \pi \leq \theta_2 - \theta_3$$

$$2 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + 2 - \frac{\theta_2 - \theta_3}{\pi} \Rightarrow \theta_1 \geq \theta_2 \quad (\text{Ec. D.25})$$

$$\text{a.7) } \pi \leq \theta_1 - \theta_2, \pi \leq \theta_1 - \theta_3 \text{ y } 0 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq \pi$$

$$2 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq 2 - \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + \frac{\theta_2 - \theta_3}{\pi} \Rightarrow 0 \leq 0 \quad (\text{Ec. D.26})$$

$$\text{a.8) } \pi \leq \theta_1 - \theta_2, \pi \leq \theta_1 - \theta_3 \text{ y } \pi \leq \theta_2 - \theta_3$$

$$2 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + 2 - \frac{\theta_2 - \theta_3}{\pi} \Rightarrow \theta_1 \geq \theta_2 \quad (\text{Ec. D.27})$$

$$\text{b.1) } 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, 0 \leq \theta_1 - \theta_3 \leq \pi \text{ y } 0 \leq \theta_3 - \theta_2 \leq \pi$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow 0 \leq 0 \quad (\text{Ec. D.28})$$

$$\text{b.2) } 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, 0 \leq \theta_1 - \theta_3 \leq \pi \text{ y } \pi \leq \theta_3 - \theta_2 \Rightarrow \theta_2 + \pi = \theta_1 = \theta_3$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + 2 - \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_3 - \theta_2 \leq \pi \Rightarrow \pi \leq \pi \quad (\text{Ec. D.29})$$

$$\text{b.3)} 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, \pi \leq \theta_1 - \theta_3 \text{ y } 0 \leq \theta_3 - \theta_2 \leq \pi \Rightarrow \theta_1 - \pi = \theta_2 = \theta_3$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq 2 - \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_1 - \theta_3 \leq \pi \Rightarrow \pi \leq \pi \quad (\text{Ec. D.30})$$

$$\text{b.4)} 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, \pi \leq \theta_1 - \theta_3 \text{ y } \pi \leq \theta_3 - \theta_2 \Rightarrow \text{No puede ser con } \theta_j \in [-\pi, \pi).$$

$$\text{b.5)} \pi \leq \theta_1 - \theta_2, 0 \leq \theta_1 - \theta_3 \leq \pi \text{ y } 0 \leq \theta_3 - \theta_2 \leq \pi$$

$$2 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 \geq \pi \quad (\text{Ec. D.31})$$

$$\text{b.6)} \pi \leq \theta_1 - \theta_2, 0 \leq \theta_1 - \theta_3 \leq \pi \text{ y } \pi \leq \theta_3 - \theta_2$$

$$2 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + 2 - \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_1 \geq \theta_3 \quad (\text{Ec. D.32})$$

$$\text{b.7)} \pi \leq \theta_1 - \theta_2, \pi \leq \theta_1 - \theta_3 \text{ y } 0 \leq \theta_3 - \theta_2 \leq \pi$$

$$2 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq 2 - \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_3 \geq \theta_2 \quad (\text{Ec. D.33})$$

$$\text{b.8)} \pi \leq \theta_1 - \theta_2, \pi \leq \theta_1 - \theta_3 \text{ y } \pi \leq \theta_3 - \theta_2$$

$$2 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq 2 - \frac{\theta_1 - \theta_3}{\pi} + 2 - \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow 0 \leq 2\pi \quad (\text{Ec. D.34})$$

$$\text{d.1)} 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, 0 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq \pi \text{ y } 0 \leq \theta_3 - \theta_2 \leq \pi$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_3 - \theta_1}{\pi} + \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 \leq \pi \quad (\text{Ec. D.35})$$

$$\text{d.2)} 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, 0 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq \pi \text{ y } \pi \leq \theta_3 - \theta_2$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_3 - \theta_1}{\pi} + 2 - \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 \leq \pi \quad (\text{Ec. D.36})$$

$$\text{d.3)} 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, \pi \leq \theta_3 - \theta_1 \text{ y } 0 \leq \theta_3 - \theta_2 \leq \pi \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 - \pi$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq 2 - \frac{\theta_3 - \theta_1}{\pi} + \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow 0 \leq 2\pi \quad (\text{Ec. D.37})$$

$$\text{d.4)} 0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi, \pi \leq \theta_3 - \theta_1 \text{ y } \pi \leq \theta_3 - \theta_2$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq 2 - \frac{\theta_3 - \theta_1}{\pi} + 2 - \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_3 - \theta_2 \leq 2\pi \quad (\text{Ec. D.38})$$

$$\text{d.5)} \pi \leq \theta_1 - \theta_2, 0 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq \pi \text{ y } 0 \leq \theta_3 - \theta_2 \leq \pi \Rightarrow \theta_1 = \theta_3 = \theta_2 + \pi$$

$$2 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_3 - \theta_1}{\pi} + \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_3 - \theta_2 \geq \pi \Rightarrow \pi \geq \pi \quad (\text{Ec. D.39})$$

$$\text{d.6)} \pi \leq \theta_1 - \theta_2, 0 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq \pi \text{ y } \pi \leq \theta_3 - \theta_2$$

$$2 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq \frac{\theta_3 - \theta_1}{\pi} + 2 - \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow 0 \leq 0 \quad (\text{Ec. D.40})$$

$$\text{d.7)} \pi \leq \theta_1 - \theta_2, \pi \leq \theta_3 - \theta_1 \text{ y } 0 \leq \theta_3 - \theta_2 \leq \pi \Rightarrow \text{No puede ser con } \theta_j \in [-\pi, \pi).$$

$$\text{d.8)} \pi \leq \theta_1 - \theta_2, \pi \leq \theta_3 - \theta_1 \text{ y } \pi \leq \theta_3 - \theta_2$$

$$2 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \leq 2 - \frac{\theta_3 - \theta_1}{\pi} + 2 - \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_3 - \theta_1 \geq \pi \quad (\text{Ec. D.41})$$

Al ser demostrados todos los casos posibles, $d_\theta(\theta_1, \theta_2)$ cumple la desigualdad triangular.

Con ello, se demuestra que $d_\theta(\theta_1, \theta_2)$ es métrica.

Sea $d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2)$ una función distancia cuya condición de métrica quiere comprobarse y que está definida cómo

$$d_\lambda = \max\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \text{ con } \lambda_j \geq 0 \quad (\text{Ec. D.42})$$

1) $d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$

Se demuestra fácilmente:

$$d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2) = \max\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) = 1 - \min\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \Rightarrow \geq 0 \quad (\text{Ec. D.43})$$

Puesto que

$$\min\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \in [0, 1] \quad (\text{Ec. D.44})$$

Nótese que, además, $d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2) \leq 1$.

2) $d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Por un lado,

$$d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2) = \max\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0 \\ 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \quad (\text{Ec. D.45})$$

Y por el otro,

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2) = \max(0, 0) = 0 \quad (\text{Ec. D.46})$$

3) $d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2) = d_\lambda(\lambda_2, \lambda_1)$

Es fácilmente demostrable:

$$d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2) = \max\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) = \max\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = d_\lambda(\lambda_2, \lambda_1) \quad (\text{Ec. D.47})$$

4) $d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2) \leq d_\lambda(\lambda_1, \lambda_3) + d_\lambda(\lambda_3, \lambda_2)$

Se quiere demostrar la siguiente desigualdad

$$\max\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \leq \max\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) + \max\left(1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) \quad (\text{Ec. D.48})$$

Se puede suponer $\lambda_1 \geq \lambda_2$ debido a la propiedad de simetría. Se observan 4 casos, que a continuación se demuestran:

a) $\lambda_1 \geq \lambda_3$ y $\lambda_3 \geq \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 \geq \lambda_3 \geq \lambda_2 \geq 0$

$$1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} + 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \Rightarrow \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1}\right) \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1} \quad (\text{Ec. D.49})$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \Rightarrow 0 \leq 0 \\ \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 \leq \lambda_3 \end{cases} \quad (\text{Ec. D.50})$$

b) $\lambda_1 \geq \lambda_3$ y $\lambda_3 < \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$

$$1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} + 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1} \right) \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1} \quad (\text{Ec. D.51})$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \Rightarrow 0 \leq 0 \\ \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_3 \leq \lambda_2 \end{cases} \quad (\text{Ec. D.52})$$

c) $\lambda_1 < \lambda_3$ y $\lambda_3 \geq \lambda_2 \Rightarrow \lambda_3 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$

$$1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} + 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3} \right) \leq \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3} \quad (\text{Ec. D.53})$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = 0 \Rightarrow 0 \leq 0 \\ \lambda_3 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 \leq \lambda_1 \end{cases} \quad (\text{Ec. D.54})$$

d) $\lambda_1 < \lambda_3$ y $\lambda_3 < \lambda_2 \Rightarrow$ No puede ser con $\lambda_1 \geq \lambda_2$

Al ser demostrados todos los casos posibles, $d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2)$ cumple la desigualdad triangular.

Con ello, se demuestra que $d_\lambda(\lambda_1, \lambda_2)$ es métrica.

Sea $d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ una función distancia cuya condición de métrica quiere comprobarse y que está definida cómo

$$d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^2 \text{ con } \|\mathbf{v}_j\| = 1 \text{ y } v_{j_p} > 0 \text{ tal que } |v_{j_p}| \geq |v_{j_l}| \forall l \neq p \quad (\text{Ec. D.55})$$

1) $d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \geq 0$

Se demuestra que

$$d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^2 = 1 - \left(\frac{\cos(\gamma)}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|} \right)^2 = 1 - \cos(\gamma)^2 = \sin(\gamma)^2 \geq 0 \quad (\text{Ec. D.56})$$

dónde γ es el ángulo que forman \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . Nótese que además $d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \leq 1$.

2) $d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$

Por un lado, se tiene que

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \Rightarrow d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^2 = 1 - 1 = 0 \quad (\text{Ec. D.57})$$

Y por el otro,

$$d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0 \Rightarrow 1 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^2 = 0 \Rightarrow 1 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^2 \quad (\text{Ec. D.58})$$

Si $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle > 0$, se obtiene

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad (\text{Ec. D.59})$$

Si $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle < 0$, se obtiene

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \Rightarrow v_{1p_1} = -v_{2p_2} \quad (\text{Ec. D.60})$$

con $v_{j_{p_j}} > 0$ y $|v_{j_{p_j}}| \geq 0|v_{j_l}| \forall l \neq p_j \Rightarrow$ No puede ser.

$$3) d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = d_v(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$$

Se demuestra fácilmente

$$d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^2 = 1 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle^2 = 1 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle^2 = d_v(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \quad (\text{Ec. D.61})$$

$$4) d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \leq d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + d_v(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2)$$

Se quiere demostrar que

$$d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^2 = 1 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle^2 = 1 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle^2 = d_v(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \quad (\text{Ec. D.62})$$

Si se opera sucesivamente, se obtiene

$$1 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^2 \leq 1 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle^2 + 1 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle^2 \quad (\text{Ec. D.63})$$

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle^2 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^2 \leq 1 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle^2 \quad (\text{Ec. D.64})$$

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle^2 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^2 \leq \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle^2 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle^2 \quad (\text{Ec. D.65})$$

$$(\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_3)^T - (\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2)^T \leq (\mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3)^T - (\mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_2)^T \quad (\text{Ec. D.66})$$

$$\mathbf{v}_1^T (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \leq \mathbf{v}_3^T (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2) \quad (\text{Ec. D.67})$$

$$0 \leq 0 \quad (\text{Ec. D.68})$$

Por lo tanto, $d_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ también es métrica.

Sea $d_E(x, y)$ la distancia euclídea entre dos puntos x e y de un espacio euclídeo \mathbb{R}^m . Ésta se define cómo

$$d_E(x, y) = \sqrt{\sum_i^m (x_i - y_i)^2} \quad (\text{Ec. D.69})$$

Puesto que $d_E(x, y)$ es métrica, también lo será la siguiente expresión

$$RMS(\mathbf{d}) = d_E(\mathbf{d}/\sqrt{m}, \mathbf{0}) = \sqrt{\sum_i^m \left(\frac{d_i}{\sqrt{m}} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_i^m d_i^2} \quad (\text{Ec. D.70})$$

siempre y cuando \mathbf{d} sea un vector de coordenadas cartesianas de un espacio euclídeo \mathbb{R}^m .

La distancia $d_1(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2)$ (Ec. 6.2) se puede expresar cómo

$$d_1(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) = RMS(\mathbf{d}_\theta(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2)) \text{ con } \mathbf{d}_\theta(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) = (d_\theta(\bar{\theta}_1^1, \bar{\theta}_1^2), \dots, d_\theta(\bar{\theta}_m^1, \bar{\theta}_m^2)) \quad (\text{Ec. D.71})$$

Por lo tanto, puesto que d_θ es métrica, queda demostrado que d_1 también lo es. Nótese que $d_1(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) \leq 1$ ya que d_θ también está acotada.

La distancia $d_2(\lambda^1, \lambda^2)$ (Ec. 6.3) se puede expresar cómo

$$d_2(\lambda^1, \lambda^2) = RMS(\mathbf{d}_\lambda(\lambda^1, \lambda^2)) \text{ con } \mathbf{d}_\lambda(\lambda^1, \lambda^2) = (d_\lambda(\lambda_1^1, \lambda_1^2), \dots, d_\lambda(\lambda_m^1, \lambda_m^2)) \quad (\text{Ec. D.72})$$

Por lo tanto, puesto que d_λ es métrica, queda demostrado que d_2 también lo es. Nótese que $d_2(\lambda^1, \lambda^2) \leq 1$ ya que d_λ también está acotada.

La distancia $d_3(V^1, V^2)$ (Ec. 6.4) se puede expresar cómo

$$d_3(V^1, V^2) = RMS(\mathbf{d}_v(V^1, V^2)) \text{ con } \mathbf{d}_v(V^1, V^2) = (d_v(v_1^1, v_1^2), \dots, d_v(v_m^1, v_m^2)) \quad (\text{Ec. D.73})$$

Por lo tanto, puesto que d_v es métrica, queda demostrado que d_3 también lo es. Nótese que $d_3(V^1, V^2) \leq 1$ ya que d_v también está acotada.

Sea $d_\Sigma(x, y)$ una función distancia cuya condición de métrica quiere comprobarse y que está definida cómo

$$d_\Sigma(x, y) = \sum_i a_i d_i(x_i, y_i) \text{ con } a_i > 0 \text{ y } d_i(x_i, y_i) \leq 1 \text{ métrica} \quad (\text{Ec. D.74})$$

1) $d_\Sigma(x, y) \geq 0$

Se demuestra directamente puesto que $a_i > 0$ y $d_i(x_i, y_i) \geq 0$, por ser d_i métrica. Además, $d_\Sigma(x, y) \leq \sum_i a_i$ por ser $d_i \leq 1$.

2) $d_\Sigma(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

d_Σ cumple la identidad de los indiscernibles:

$$d_\Sigma(x, y) = 0 \Leftrightarrow d_i(x_i, y_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \Leftrightarrow x = y \quad (\text{Ec. D.75})$$

3) $d_\Sigma(x, y) = d_\Sigma(y, x)$

También es fácil demostrar la condición de simetría:

$$d_\Sigma(x, y) = \sum_i a_i d_i(x_i, y_i) = \sum_i a_i d_i(y_i, x_i) = d_\Sigma(y, x) \quad (\text{Ec. D.76})$$

4) $d_\Sigma(x, y) \leq d_\Sigma(x, z) + d_\Sigma(z, y)$

Se demuestra a partiendo de que d_i es métrica

$$d_i(x_i, y_i) \leq d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i) \quad (\text{Ec. D.77})$$

Al ser $a_i \geq 0$

$$a_i d_i(x_i, y_i) \leq a_i d_i(x_i, z_i) + a_i d_i(z_i, y_i) \quad (\text{Ec. D.78})$$

$$\sum_i a_i d_i(x_i, y_i) \leq \sum_i a_i d_i(x_i, z_i) + \sum_i a_i d_i(z_i, y_i) \quad (\text{Ec. D.79})$$

Habiéndose demostrado todas las condiciones, se concluye que d_Σ es métrica.

La distancia $d(\Gamma_1, \Gamma_2)$ (Ec. 6.1) es la suma ponderada de otras tres distancias: $d_1(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2)$ (Ec. 6.2), $d_2(\lambda^1, \lambda^2)$ (Ec. 6.3) y $d_3(V^1, V^2)$ (Ec. 6.4). Por lo tanto se puede expresar $d(\Gamma_1, \Gamma_2)$ a partir de d_Σ con $a_i = \{c_1, c_2, c_3\}$ y $d_i = \{d_1, d_2, d_3\}$. De este modo, $d(\Gamma_1, \Gamma_2)$ es métrica. Además $d(\Gamma_1, \Gamma_2) \leq 1$ ya que $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ y $d_1, d_2, d_3 \leq 1$.