PROYECTO TECNOLÓGICO

Licenciatura en matemáticas

Título: Integración en términos de funciones elementales

Autor: Samuel Mañá Ricón

Director: Josep M. Brunat Blay

Departamento: Matemática Aplicada II

Convocatoria: Junio 2014

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Proyecto tecnológico

Integración en términos de funciones elementales

Samuel Mañá Ricón

Director: Josep M. Brunat Blay

Matemática Aplicada II

Al profesor Josep M. Brunat, sin cuyo apoyo y consejo no habría podido realizar este trabajo.

Resumen

El objetivo de este trabajo es demostrar que hay funciones elementales que no admiten primitiva elemental. Para ello, en la primera parte presentamos una introducción al álgebra diferencial, en la que definimos qué son los cuerpos y los anillos diferenciales y qué son las extensiones elementales de cuerpos diferenciales. Esta teoría nos permitirá precisar que entendemos exactamente por funciones elementales. El resultado más importante del trabajo es el teorema de Liouville, que nos da una condición necesaria y suficiente para que una función admita una primitiva elemental.

En la segunda parte del trabajo, utilizando las herramientas básicas del análisis funcional, adaptaremos esta teoría algebraica a los cuerpos de funciones meromorfas definidos sobre dominios $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Para acabar, utilizaremos el teorema de Liouville para encontrar ejemplos de funciones de variable real que no admiten primitiva elemental.

Palabras clave: álgebra diferencial, anillos diferenciales, cuerpos diferenciales, funciones elementales, teorema de Liouville

MSC2000: 12H05, 13N15, 26A09

Abstract

The aim of this project is to show that there are elementary functions that do not support elementary antiderivatives. To do this, the first part is an introduction to differential algebra, in which we define the concepts of differential rings and fields, and elementary field extensions. This theory allows us to specify exactly what we mean by elementary functions. The most important result of this work is the Liouville's theorem, which gives us a necessary and sufficient condition to allow a function to support an elementary antiderivative.

In the second part, using the basic tools of functional analysis, we will adapt this algebraic theory to the fields of meromorphic functions defined on domains $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Finally, we will use Liouville's theorem to find examples of real variable functions that do not support elementary antiderivatives.

Keywords: differential algebra, differential rings, differential fields, elementary functions, Liouville theorem

MSC2000: 200012H05, 13N15, 26A09

Índice general

Introducción

Habitualmente, en un primer curso de cálculo diferencial se definen los conceptos de derivadas y de integrales, se demuestra que toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es integrable, y se demuestra el teorema fundamental del cálculo, que afirma que si $f(x)$ es una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ es derivable en (a, b), y para cualquier $c \in (a, b)$ se cumple que $F'(c) = f(c)$. Si una función $f(x)$ es la derivada de una función $F(x)$, se dice que la función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. A partir del teorema fundamental del cálculo, también se demuestra la regla de Barrow, que afirma que si una función $F(x)$ es la primitiva de una función $f(x)$ en un intervalo (a, b), entonces $\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$. Como es lógico, debido a la importancia de este resultado, después de demostrarlo se explican formas de encontrar primitivas, como pueden ser la fórmula de integración por partes o el método de integración por cambio de variable.

Algo que llama la atención a la mayoría de alumnos es que, así como hay un proceso mecánico para obtener la derivada de cualquier función, no hay ninguno para obtener primitivas. Lo que normalmente no se explica es que esto es así porque existen funciones elementales, como e^{x^2} o $\sin(x)/x$, para las que a pesar de existir primitivas (puesto que son continuas), éstas no se pueden encontrar, ya que no tienen expresión cerrada en términos de funciones elementales. Es decir, que no se pueden expresar como composiciones y operaciones algebraicas de funciones conocidas, como pueden ser las funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas...

En este trabajo queremos demostrar que esto es así, y dar ejemplos concretos de funciones sin primitiva elemental. Aunque el planteamiento del trabajo sea puramente analítico, para su resolución es necesario utilizar herramientas algebraicas de extensiones de cuerpos, así que supondremos que el lector tiene conocimientos de álgebra abstracta. Además, aunque el problema se refiera a funciones de variable real, su resolución utiliza sobre todo funciones de variable compleja, por lo que también será necesaria una base de análisis complejo. Todos los resultados de álgebra abstracta necesarios para seguir la exposición se pueden encontrar en [**6**], mientras que los referentes a análisis complejo se pueden encontrar en [**7**].

El hecho de que haya funciones elementales con primitivas que no se pueden expresar en términos de funciones elementales es similar a lo que ocurre con la resolución de una ecuación $p(x) = 0$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado 5. El teorema de Bolzano implica que estas ecuaciones siempre tienen como mínimo una solución real, pero no existe ninguna fórmula para obtenerla. Como se suele explicar en un curso de álgebra abstracta, esto es así porque estas soluciones, a pesar de existir, no se pueden expresar en términos de operaciones algebraicas y extracción de raíces.

Esta similitud puede parecer casual, pero lo verdaderamente notable de la situación es que para obtener ambos resultados se emplean prácticamente las mismas herramientas. Para el caso de las ecuaciones polinómicas, partimos del cuerpo de los números racionales, estudiamos las extensiones de cuerpos que se obtienen adjuntando raíces, y concluimos que la solución de estas ecuaciones no pertenece a ninguno de estos cuerpos.

Para el caso de la búsqueda de primitivas de una función $f(x)$, partimos del cuerpo diferencial $\mathbb{C}(z)$ de fracciones algebraicas sobre los numeros complejos, estudiamos las extensiones de cuerpos diferenciales que se obtienen adjuntando funciones elementales, y concluimos que las primitivas de la función $f(x)$ no pertenecen a ninguno de estos cuerpos.

El objetivo de este trabajo es desarrollar toda esta teoría. En el primer capítulo definiremos exactamente qué son las funciones elementales en un marco de trabajo puramente abstracto, demostraremos sus propiedades principales, y demostraremos un teorema de Liouville, que nos da una condición para saber si una función determinada tiene primitivas elementales o no.

En el segundo capítulo aplicaremos toda esta teoría para definir qué entendemos por funciones elementales de variable compleja y de variable real, veremos que todas las funciones usuales son elementales, y utilizando el teorema de Liouville encontraremos ejemplos de funciones reales que no tienen primitiva elemental.

Todas las funciones sin primitiva elemental que encontremos serán exponenciales, logarítmos y funciones trigonométricas. También hay funciones extremadamente sencillas, definidas mediante radicales, sin primitiva elemental, como por ejemplo $\sqrt{x^3-1}$, pero para demostrar que estas funciones no tienen primitiva elemental es necesario utilizar resultados más avanzados, y eso escapa al propósito de este trabajo.

Capítulo 1
Álgebra diferencial

1. Anillos y cuerpos diferenciales

Empezamos definiendo desde un punto de vista algebraico qué son las derivaciones y qué son los anillos y cuerpos diferenciales. Aunque algunos de los resultados que encontraremos a lo largo de este trabajo son válidos para anillos y cuerpos arbitrarios, muchos otros necesitarán las hipótesis adicionales de que sean dominios íntegros de característica 0. Para simplificar la exposición hemos decidido restringirnos a ellos, ya que al final queremos aplicar la teoría que vamos a desarrollar a cuerpos de funciones de variable compleja, que tienen característica 0. Por lo tanto, siempre que hablemos de anillos o de cuerpos entenderemos que son dominios íntegros y de característica 0.

Definición. Si A es un anillo, una *derivación* en A es una aplicación $\delta\colon A \to A$ tal que para cualquier par de elementos a y b de A se cumplen las dos propiedades siguientes:

- $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$. (Regla de la suma)
- $\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b)$. (Regla de Leibniz)

Un *anillo diferencial* es un par (A, δ) donde A es un anillo y δ es una derivación en A.

Si a y b son elementos de A, diremos que a es una *primitiva* de b si $\delta(a) = b$.

Un *cuerpo diferencial* es un anillo diferencial (A, δ) en el que A es un cuerpo.

Si no hay posibilidad de confusión, habitualmente denotaremos a $\delta(a)$ como a' y, por abuso de lenguaje, si (A, δ) es un anillo diferencial diremos que A es un anillo diferencial. También diremos que A es un anillo δ-diferencial si necesitamos hacer referencia a la aplicación δ.

Veamos que, como consecuencia de la definición de derivación, en este contexto algebraico se cumplen las propiedades habituales de las derivadas.

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea A un anillo diferencial y sean a y b elementos de A, con b invertible en A. Entonces se cumplen las siguientes reglas de derivación:*

1. $0' = 1' = 0$.
2. $(a^n)' = n \cdot a^{n-1} \cdot a'$ *para todo entero $n \geqslant 1$ (Regla de la potencia natural).*

3. $\left(\frac{1}{b}\right)' = -\frac{b'}{b^2}$ *(Regla del inverso).*
4. $(b^m)' = m \cdot b^{m-1} \cdot b'$ *para todo entero n (Regla de la potencia entera).*
5. $\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$ *(Regla del cociente).*

Demostración.

1. Para demostrar que $0' = 1' = 0$, son suficientes los siguientes cálculos:

   $0' = (0 \cdot 0)' = 0' \cdot 0 + 0 \cdot 0' = 0 + 0 = 0.$

   $1' = (1 \cdot 1)' = 1' \cdot 1 + 1 \cdot 1' = 1' + 1'$. Por lo tanto $1' = 0$.
2. Vamos a demostrar la regla de la potencia natural por inducción sobre n. El caso base es inmediato, ya que $(a^1)' = a'$ y $1 \cdot a^0 \cdot a' = a'$. Comprobemos ahora que funciona el paso de inducción. Suponiendo que $(a^n)' = n \cdot a^{n-1} \cdot a'$, es fácil ver que

$$\begin{aligned}
\left(a^{n+1}\right)' &= (a^n \cdot a)' \\
&= (a^n)' \cdot a + a^n \cdot a' \\
&= \left(n \cdot a^{n-1} \cdot a'\right) \cdot a + a^n \cdot a' \\
&= n \cdot a^n \cdot a' + a^n \cdot a' \\
&= (n+1) \cdot a^n \cdot a'.
\end{aligned}$$

3. Para demostrar la regla del inverso, un cálculo simple muestra que

$$0 = 1' = \left(b \cdot \frac{1}{b}\right)' = b' \cdot \frac{1}{b} + b \cdot \left(\frac{1}{b}\right)'.$$

   Aislando $(1/b)'$ obtenemos

$$\left(\frac{1}{b}\right)' = -\frac{b'}{b^2}.$$

4. Para demostrar la regla de la potencia entera, consideramos tres casos diferentes, según si $m > 0$, $m = 0$ o $m < 0$. Si $m > 0$, estamos en el caso de la regla de la potencia natural, que ya está demostrada.
   Si $m = 0$, tenemos que $(b^0)' = 1' = 0$ y $0 \cdot b^{-1} \cdot b' = 0$.
   Para acabar, si $m < 0$, entonces $n = -m > 0$. Por lo tanto, utilizando la regla del inverso y la regla de la potencia natural, tenemos que

$$\begin{aligned}
(b^m)' &= \left(\frac{1}{b^n}\right)' \\
&= -\frac{(b^n)'}{(b^n)^2} \\
&= -\frac{n \cdot b^{n-1} \cdot b'}{b^{2n}} \\
&= -n \cdot b^{-n-1} \cdot b' \\
&= m \cdot b^{m-1} \cdot b'.
\end{aligned}$$

5. Para demostrar la regla del cociente, basta considerar la regla de Leibniz y la regla del inverso.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)' &= \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)' \\
&= a' \cdot \frac{1}{b} + a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)' \\
&= \frac{a'}{b} + a \cdot \left(-\frac{b'}{b^2}\right) \\
&= \frac{a'}{b} - \frac{a \cdot b'}{b^2} \\
&= \frac{a' \cdot b - a \cdot b'}{b^2}.
\end{aligned}$$

□

Para acabar esta sección, veamos que si A es un anillo, entonces el conjunto de todas las derivaciones en A tiene estructura de A-módulo. Este resultado se utilizará más adelante para definir derivaciones a partir de otras mediante combinaciones lineales.

TEOREMA 1.2. *El conjunto de las derivaciones en A es un A-módulo con las siguientes operaciones:*

- $(\delta_1 + \delta_2)(a) = \delta_1(a) + \delta_2(a)$.
- $(\lambda \cdot \delta)(a) = \lambda \cdot \delta(a)$.

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que el conjunto de todas las aplicaciones de un anillo A en sí mismo tiene estructura de A-módulo con las operaciones $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ y $(\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot f(a)$.

Tenemos que comprobar que el conjunto de derivaciones es un A-submódulo de este módulo, es decir, que es cerrado por sumas y productos por elementos de A. Si δ_1 y δ_2 son derivaciones, comprobemos que $(\delta_1 + \delta_2)$ también es una derivación, viendo que se cumplen las reglas de la suma y de Leibniz.

$$\begin{aligned}(\delta_1+\delta_2)(a+b) &= \delta_1(a+b)+\delta_2(a+b)\\ &= \delta_1(a)+\delta_1(b)+\delta_2(a)+\delta_2(b)\\ &= \delta_1(a)+\delta_2(a)+\delta_1(b)+\delta_2(b)\\ &= (\delta_1+\delta_2)(a)+(\delta_1+\delta_2)(b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\delta_1+\delta_2)(ab) &= \delta_1(ab)+\delta_2(ab)\\ &= \delta_1(a)\cdot b+a\cdot\delta_1(b)+\delta_2(a)\cdot b+a\cdot\delta_2(b)\\ &= \delta_1(a)\cdot b+\delta_2(a)\cdot b+a\cdot\delta_1(b)+a\cdot\delta_2(b)\\ &= (\delta_1(a)+\delta_2(a))\cdot b+a\cdot(\delta_1(b)+\delta_2(b))\\ &= ((\delta_1+\delta_2)(a))\cdot b+a\cdot((\delta_1+\delta_2)(b)).\end{aligned}$$

Sea ahora λ un elemento de A y sea δ una derivación. Comprobemos también que $(\lambda\cdot\delta)$ es una derivación, viendo que cumple las reglas de la suma y de Leibniz.

$$\begin{aligned}(\lambda\cdot\delta)(a+b) &= \lambda\cdot\delta(a+b)\\ &= \lambda\cdot(\delta(a)+\delta(b))\\ &= \lambda\cdot\delta(a)+\lambda\cdot\delta(b)\\ &= (\lambda\cdot\delta)(a)+(\lambda\cdot\delta)(b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda\cdot\delta)(ab) &= \lambda\cdot\delta(ab)\\ &= \lambda\cdot(\delta(a)\cdot b+a\cdot\delta(b))\\ &= \lambda\cdot\delta(a)\cdot b+a\cdot\lambda\cdot\delta(b)\\ &= (\lambda\cdot\delta)(a)\cdot b+a\cdot(\lambda\cdot\delta)(b).\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que el conjunto de todas las derivaciones en A es un A-módulo con estas operaciones. □

Observación: Si K es un cuerpo, entonces el conjunto de las derivaciones en K es un K-espacio vectorial.

2. Subanillos y subcuerpos diferenciales

En la sección anterior hemos definido los conceptos de derivación y de anillo diferencial. De entre todos los subanillos de un anillo diferencial, nos interesa destacar aquellos que sean también anillos diferenciales, con la misma derivación restringida. Llamaremos subanillos diferenciales a estos subanillos. En esta sección daremos criterios simples para decidir si un subanillo de un anillo diferencial es un subanillo diferencial.

Definición. Sea (B,δ) un anillo diferencial, y sea A un subanillo de B. Diremos que $\left(A,\bar{\delta}\right)$ es un *subanillo diferencial* de (B,δ) si $\bar{\delta}(a)=\delta(a)$ para todo $a\in A$. En estas condiciones, diremos también que la derivación δ es una *extensión* de la derivación $\bar{\delta}$, y habitualmente, haciendo un abuso de notación, diremos que $A \subseteq B$ es una *extensión de anillos δ-diferenciales*, refiriéndonos a que $(A, \delta|_A)$ es un subanillo diferencial de (B, δ).

Además, si A es un cuerpo, diremos que $\left(A, \bar{\delta}\right)$ es un *subcuerpo diferencial* de $\left(B, \bar{\delta}\right)$.

Por definición, si $A \subseteq B$ es una extensión de anillos δ-diferenciales, entonces $\delta(A) = \bar{\delta}(A) \subseteq A$. Es fácil ver que el recíproco también es cierto. Si B es un anillo δ-diferencial y A es un subanillo de B tal que $\delta(A) \subseteq A$, entonces A es un subanillo diferencial de B, ya que $\delta|_A$ hereda de δ las propiedades de derivación.

Para el caso en el que $A \subseteq B$ es una extensión de anillos δ-diferenciales y S es un subconjunto cualquiera de B, tenemos un criterio sencillo para determinar si $A[S]$ es un subanillo diferencial de B sin necesidad de comprobar que $\delta(A[S]) \subseteq A[S]$.

Teorema 1.3. *Sea $A \subset B$ una extensión de anillos δ-diferenciales y sea S un subconjunto arbitrario de B. Para que el subanillo intermedio $A[S]$ sea un subanillo diferencial de B, es condición necesaria y suficiente que $\delta(s)$ pertenezca a $A[S]$ para cualquier elemento s de S.*

Demostración. La condición es necesaria como consecuencia directa de la definición de anillo diferencial. Claramente $S \subset A[S]$, y por lo tanto $\delta(S) \subseteq \delta(A[S]) \subseteq A[S]$. Probemos que la condición es también suficiente.

Los elementos de $A[S]$ son polinomios con coeficientes en A evaluados en elementos de S, es decir, combinaciones de sumas y productos de elementos de $A \cup S$. Por hipótesis, las derivadas de los elementos de $A \cup S$ pertenecen a $A[S]$. Como consecuencia de las reglas de la suma y de Leibniz, la derivada de cualquier combinacion de sumas y productos de elementos de $A \cup S$ también pertenece a $A[S]$, porque es cerrado por sumas y productos. En consecuencia, $\delta(A[S]) \subseteq A[S]$ y por lo tanto $A[S]$ es un subanillo diferencial de B. $\square$

En el caso en que A y B sean cuerpos, el mismo criterio nos permite afirmar no solo que $A[S]$ es un subanillo diferencial de B, sino también que $A(S)$ es un subcuerpo diferencial de B.

Teorema 1.4. *Sea $A \subset B$ una extensión de cuerpos δ-diferenciales, y sea S un subconjunto arbitrario de B. Si $\delta(s)$ pertenece a $A(S)$ para cualquier elemento s de S, entonces $A(S)$ es un subcuerpo diferencial de B.*

Demostración. Cualquier elemento de $A(S)$ es el cociente de dos polinomios con coeficientes en A evaluados en elementos de S, es decir, combinaciones de sumas, productos y cocientes de elementos de $A \cup S$. La demostración del teorema anterior se adapta para demostrar éste, considerando ahora la regla de derivación de cocientes, además de las reglas de la suma y de Leibniz, y utilizando que $A(S)$ es cerrado por sumas, productos y cocientes. $\square$

Para acabar esta sección, definimos para cada anillo diferencial A su subanillo diferencial de constantes.

Definición. Sea A un anillo diferencial y sea a un elemento de A. Diremos que a es un *elemento constante* si $a' = 0$.

TEOREMA 1.5. *Sea A un anillo diferencial. Sea $C = \{a \in A \mid a' = 0\}$. Entonces C es un subanillo diferencial de A, que llamaremos subanillo de las constantes. Además, si A es un cuerpo, entonces C es un subcuerpo diferencial.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que C es un subanillo de A, tenemos que comprobar que es cerrado por sumas y productos, y que para cada elemento no nulo de C, su opuesto también es un elemento de C. Sean a y b elementos de C. Por definición de C, tenemos que $a' = b' = 0$ y, en consecuencia, se cumplen las siguientes igualdades:

- $(a+b)' = a' + b' = 0 + 0 = 0$.
- $(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b' = 0 \cdot b + a \cdot 0 = 0 + 0 = 0$.
- $(-a)' = 0 + (-a)' = a' + (-a)' = (a-a)' = 0' = 0$.

Con esto, hemos visto que la suma y el producto de dos elementos de C son elementos de C, y que para cualquier elemento $a \in C$, también $-a \in C$. Por lo tanto, C es un subanillo de A. Ver que C un subanillo diferencial es inmediato, ya que la derivada de cualquier elemento de C es 0.

Para acabar, si A es un cuerpo y a es un elemento no nulo de C, sabemos que

$$\left(a^{-1}\right)' = (-1) \cdot a^{-2} \cdot a' = (-1) \cdot a^{-2} \cdot 0 = 0,$$

y, por lo tanto, también $a^{-1} \in C$, y C es un subcuerpo diferencial de A. □

3. Extensiones diferenciales

Supongamos que $A \subseteq B$ es una extensión de anillos. Hasta ahora hemos tratado el caso en el que B es un anillo δ-diferencial, y hemos obtenido criterios para determinar si A es un anillo diferencial con la derivación $\delta|_A$. Cambiemos ahora el punto de vista y supongamos que A es un anillo δ-diferencial. Nuestro objetivo es analizar cómo podemos definir una derivación Δ en B que extienda a δ, es decir, tal que $\delta = \Delta|_A$.

Es importante notar que si S es un subconjunto cualquiera de B tal que $B = A[S]$, entonces Δ queda determinada por sus valores sobre los elementos de S, como consecuencia de las reglas de la suma y de Leibniz.

Empezamos viendo un ejemplo general de extensiones diferenciales, que será útil más adelante para extender derivaciones en casos particulares.

TEOREMA 1.6. *Sea A un anillo δ-diferencial, y sea K su cuerpo de fracciones. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} \Delta\colon K &\to K \\ \frac{a}{b} &\to \frac{\delta(a) \cdot b - a \cdot \delta(b)}{b^2} \end{aligned}$$

es la única derivación definida en K que extiende a δ.

Demostración. Lo primero que hay que comprobar es que la aplicación está bien definida, es decir, que no depende del representante elegido. Si $a/b = c/d$, entonces se tiene que cumplir que $\Delta\left(a/b\right) = \Delta\left(c/d\right)$. Vamos a comprobarlo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = c \cdot b \Rightarrow \delta(a \cdot d) = \delta(c \cdot b).$$

Aplicando la regla de Leibniz a ambos lados de la igualdad obtenemos que

$$\delta(a) \cdot d + a \cdot \delta(d) = \delta(c) \cdot b + c \cdot \delta(b).$$

Multiplicando por $b \cdot d$ a cada lado de la igualdad, llegamos a que

$$\delta(a) \cdot d^2 \cdot b + a \cdot \delta(d) \cdot b \cdot d = \delta(c) \cdot b^2 \cdot d + c \cdot \delta(b) \cdot b \cdot d,$$

y usando la igualdad $a \cdot d = c \cdot b$ obtenemos que

$$\delta(a) \cdot d^2 \cdot b + \delta(d) \cdot c \cdot b^2 = \delta(c) \cdot b^2 \cdot d + \delta(b) \cdot a \cdot d^2.$$

Esta igualdad es equivalente a las siguientes:

$$\begin{aligned}
& \delta(a) \cdot d^2 \cdot b - \delta(b) \cdot a \cdot d^2 = \delta(c) \cdot b^2 \cdot d - \delta(d) \cdot c \cdot b^2 \\
\Leftrightarrow\ & [(\delta(a) \cdot b - \delta(b) \cdot a] \cdot d^2 = [\delta(c) \cdot d - \delta(d) \cdot c] \cdot b^2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\delta(a) \cdot b - a \cdot \delta(b)}{b^2} = \frac{\delta(c) \cdot d - c \cdot \delta(d)}{d^2} \\
\Leftrightarrow\ & \Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \Delta\left(\frac{c}{d}\right).
\end{aligned}$$

La aplicación Δ está bien definida. Ahora queremos ver que es una derivación. Para simplificar los cálculos hacemos notar que dados dos elementos de $K(x)$ siempre podemos expresarlos con el mismo denominador. Sean a/b y c/b dos elementos de $K(x)$ cualesquiera. Comprobemos que Δ cumple la regla de la suma.

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) &= \Delta\left(\frac{a+c}{b}\right) \\
&= \frac{\delta(a+c) \cdot b - (a+c) \cdot \delta(b)}{b^2} \\
&= \frac{\delta(a) \cdot b - a \cdot \delta(b)}{b^2} + \frac{\delta(c) \cdot b - c \cdot \delta(b)}{b^2} \\
&= \Delta\left(\frac{a}{b}\right) + \Delta\left(\frac{c}{b}\right).
\end{aligned}$$

Comprobemos también que Δ cumple la regla de Leibniz.

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{b}\right) &= \Delta\left(\frac{a\cdot c}{b^2}\right)\\
&= \frac{\delta(a\cdot c)\cdot b^2 - a\cdot c\cdot\delta(b^2)}{b^4}\\
&= \frac{[\delta(a)\cdot c + a\cdot\delta(c)]\cdot b^2 - a\cdot c\cdot 2\cdot b\cdot\delta(b)}{b^4}\\
&= \frac{[\delta(a)\cdot c + a\cdot\delta(c)]\cdot b - a\cdot c\cdot 2\cdot\delta(b)}{b^3}\\
&= \frac{\delta(a)\cdot b - a\cdot\delta(b)}{b^2}\cdot\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\cdot\frac{\delta(c)\cdot b - c\cdot\delta(b)}{b^2}\\
&= \Delta\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\cdot\Delta\left(\frac{c}{b}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aplicación Δ es una derivación. Para ver que Δ es una extensión de δ, basta notar que si a es un elemento de A, se cumple que

$$\Delta(a) = \Delta\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{\delta(a)\cdot 1 - a\cdot\delta(1)}{1^2} = \delta(a).$$

Por último, para ver que Δ es la única derivación en K que extiende a δ, observamos que si dos derivaciones en K coinciden sobre los elementos de A, por la regla del cociente coincidirán sobre todos los elementos de K. $\square$

Veamos ahora otro teorema que nos ayudará a definir extensiones de derivaciones a través de isomorfismos de cuerpos.

TEOREMA 1.7. *Sea K un cuerpo δ-diferencial, y sean L y H cuerpos que contienen a K como subcuerpo, tales que existe un K-isomorfismo $\varphi\colon L\to H$. Sea Δ_L una derivación en L que extiende a δ. Entonces la aplicación $\Delta_H=\varphi\circ\Delta_L\circ\varphi^{-1}$ es una derivación en H que extiende a δ.*

DEMOSTRACIÓN. Empezamos comprobando que la aplicación Δ_H es una derivación en H. Para todo $a, b\in H$ se cumple la regla de la suma.

$$\begin{aligned}
\Delta_H(a+b) &= \varphi\circ\Delta_L\circ\varphi^{-1}(a+b)\\
&= \varphi\circ\Delta_L\left(\varphi^{-1}(a)+\varphi^{-1}(b)\right)\\
&= \varphi\left(\Delta_L\circ\varphi^{-1}(a)+\Delta_L\circ\varphi^{-1}(b)\right)\\
&= \varphi\circ\Delta_L\circ\varphi^{-1}(a)+\varphi\circ\Delta_L\circ\varphi^{-1}(b)\\
&= \Delta_H(a)+\Delta_H(b).
\end{aligned}$$

Se cumple también la regla de Leibniz.

$$\begin{aligned}
\Delta_H(a\cdot b) &= \varphi\circ\Delta_L\circ\varphi^{-1}(a\cdot b)\\
&= \varphi\circ\Delta_L\left(\varphi^{-1}(a)\cdot\varphi^{-1}(b)\right)\\
&= \varphi\left(\Delta_L\circ\varphi^{-1}(a)\cdot\varphi^{-1}(b)+\varphi^{-1}(a)\cdot\Delta_L\circ\varphi^{-1}(b)\right)\\
&= \varphi\circ\Delta_L\circ\varphi^{-1}(a)\cdot b+a\cdot\varphi\circ\Delta_L\circ\varphi^{-1}(b)\\
&= \Delta_H(a)\cdot b+a\cdot\Delta_H(b).
\end{aligned}$$

Para acabar, si a es un elemento de K, como Δ_L extiende a δ, y φ es un K-isomorfismo, se cumple que $\Delta_H(a)=\varphi\circ\Delta_L\circ\varphi^{-1}(a)=\varphi\circ\Delta_L(a)=\varphi\circ\delta(a)=\delta(a)$ y vemos que Δ_H extiende a δ.

□

3.1. Extensiones de derivaciones en anillos de polinomios.

Si A es un anillo δ-diferencial, queremos definir en el anillo de polinomios $A[x]$ dos derivaciones, D_0 y D_1, que cumplan las siguientes condiciones:

- La derivación D_0 extiende a δ y se anula en x. Además, es la única derivación en $A[x]$ que cumple estas condiciones.
- La derivación D_1 se anula sobre todos los elementos de A y $D_1(x)=1$. Además, es la única derivación en $A[x]$ que cumple estas condiciones. Podemos ver esta derivación como una extensión de la derivación en A constantemente 0.

En las dos proposiciones siguientes se demuestra la existencia y la unicidad de estas derivaciones.

Proposición 1.8. *Sea A un anillo δ-diferencial. Sea $A[x]$ su anillo de polinomios en una indeterminada. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned}
D_0\colon A[x] &\to A[x]\\
\sum_{i=0}^{n} c_i\cdot x^i &\to \sum_{i=0}^{n}\delta(c_i)\cdot x^i
\end{aligned}$$

es la única derivación en $A[x]$ que extiende a δ y se anula en x.

Demostración. A lo largo de la demostración, si a es un elemento de A, utilizaremos la notación a' en lugar de $\delta(a)$. Empezamos comprobando que D_0 es una derivación. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios de $A[x]$ cualesquiera. Añadiendo coeficientes iguales a 0 si es necesario, podemos escribir

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot x^i,\quad q(x)=\sum_{j=0}^{n}b_j\cdot x^j.$$

Tras esta observación, comprobemos que D_0 cumple la regla de la suma.

$$
\begin{aligned}
D_0\left(p(x)+q(x)\right) &= D_0\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i\cdot x^i\right)\\
&= D_0\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)\cdot x^i\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)'\cdot x^i\\
&= \sum_{i=0}^{n}(a_i'+b_i')\cdot x^i\\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i'\cdot x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i'\cdot x^i\\
&= D_0\left(p(x)\right) + D_0\left(q(x)\right).
\end{aligned}
$$

Ahora, comprobemos que D_0 cumple también la regla de Leibniz.

$$
\begin{aligned}
D_0\left(p(x)\cdot q(x)\right) &= D_0\left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot x^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\cdot x^j\right)\right)\\
&= D_0\left(\sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} a_i\cdot b_j\right)\cdot x^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} a_i\cdot b_j\right)'\cdot x^k\\
&= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} (a_i\cdot b_j)'\right)\cdot x^k\\
&= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} (a_i'\cdot b_j + a_i\cdot b_j')\right)\cdot x^k\\
&= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} a_i'\cdot b_j\right)\cdot x^k + \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} a_i\cdot b_j'\right)\cdot x^k\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i'\cdot x^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\cdot x^j\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot x^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} b_j'\cdot x^j\right)\\
&= D_0\left(p(x)\right)\cdot q(x) + p(x)\cdot D_0\left(q(x)\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, D_0 es una derivación. Como los elementos de A son los polinomios de grado 0, está claro que D_0 extiende a δ. Además, un simple cálculo muestra que $D_0(x) = 1'\cdot x = 0$. Para acabar, si dos derivaciones en $A[x]$ coincidiesen sobre A y sobre x, entonces serían iguales, así que la derivación D_0 es la única que cumple las hipótesis. $\square$

PROPOSICIÓN 1.9. *Sea A un anillo, y sea $A[x]$ su anillo de polinomios en una indeterminada. Entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} D_1\colon A[x] & \to & A[x] \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i & \to & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot c_i \cdot x^{i-1} \end{array}$$

es la única derivación en $A[x]$ que se anula en los elementos de A y cumple $D_1(x) = 1$. Con esta derivación, el anillo de constantes de $A[x]$ es A.

DEMOSTRACIÓN. Empezamos demostrando que D_1 es una derivación. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios de $A[x]$ cualesquiera. Como en la proposición anterior, añadiendo coeficientes iguales a 0 si es necesario, podemos escribir

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i.$$

Comprobemos que se cumple la regla de la suma.

$$\begin{aligned} D_1(p(x) + q(x)) &= D_1\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i\right) \\ &= D_1\left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) \cdot x^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \cdot (a_i + b_i) \cdot x^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i \cdot x^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} i \cdot b_i \cdot x^{i-1} \\ &= D_1(p(x)) + D_1(q(x)). \end{aligned}$$

Comprobemos ahora que también se cumple la regla de Leibniz. Por un lado tenemos la igualdad

$$\begin{aligned} D_1\left[\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot x^j\right)\right] &= D_1\left(\sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j\right) \cdot x^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} k \cdot \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j\right) \cdot x^{k-1}. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
D_1\left(p(x)\right)\cdot q(x) &= D_1\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot x^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\cdot x^j\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} i\cdot a_i\cdot x^{i-1}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\cdot x^j\right)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\cdot a_{i+1}\cdot x^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\cdot x^j\right)\\
&= \sum_{k=0}^{2n-1}\left(\sum_{i+j=k}(i+1)\cdot a_{i+1}\cdot b_j\right)x^k\\
&= \sum_{k=1}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} i\cdot a_i\cdot b_j\right)x^{k-1}
\end{aligned}$$

y, análogamente,

$$p(x)\cdot D_1\left(q(x)\right) = \sum_{k=1}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} a_i\cdot j\cdot b_j\right)\cdot x^{k-1}.$$

Por lo tanto obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned}
&D_1\left(p(x)\right)\cdot q(x) + p(x)\cdot D_1\left(q(x)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} i\cdot a_i\cdot b_j\right)\cdot x^{k-1} + \sum_{k=1}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} a_i\cdot j\cdot b_j\right)\cdot x^{k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{2n}\left[\sum_{i+j=k} i\cdot a_i\cdot b_j + \sum_{i+j=k} a_i\cdot j\cdot b_j\right]\cdot x^{k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{2n}\left(\sum_{i+j=k}(i\cdot a_i\cdot b_j)+(a_i\cdot j\cdot b_j)\right)\cdot x^{k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{2n}\left(\sum_{i+j=k}(i+j)\cdot a_i\cdot b_j\right)\cdot x^{k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} k\cdot a_i\cdot b_j\right)\cdot x^{k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{2n} k\cdot\left(\sum_{i+j=k} a_i\cdot b_j\right)\cdot x^{k-1},
\end{aligned}$$

y llegamos a la conclusión de que

$$D_1\left(p(x)\cdot q(x)\right) = D_1\left(p(x)\right)\cdot q(x) + p(x)\cdot D_1\left(q(x)\right).$$

Hemos demostrado que D_1 es una derivación. Los elementos de A son los polinomios de grado 0, y por definición su derivada es nula. Además, $D_1(x) = 1$. Si dos derivaciones en $A\left[x\right]$ coincidiesen sobre A y sobre x, entonces serían iguales, así que la derivación D_1 es la única que cumple las hipótesis.

Para acabar, ya hemos visto que cualquier elemento a de A tiene derivada nula. Además, si $p(x)$ es un polinomio de $A[x]$ de grado mayor que 0, como A tiene característica 0 se cumple que $D_1(p(x)) \neq 0$. En conclusión, el anillo de constantes de $A[x]$ con esta derivación es A. $\square$

Si K es un anillo δ-diferencial, en las dos proposiciones anteriores hemos definido las derivaciones D_0 y D_1 en $K[x]$ y hemos encontrado sus propiedades básicas. En el caso en el que K sea un cuerpo diferencial, nos interesa extender las derivaciones D_0 y D_1 a derivaciones en $K(x)$. Como $K(x)$ es el cuerpo de fracciones del anillo $K[x]$, según el teorema 1.6, en $K(x)$ existe una única derivación $\bar{D}_0$ que extiende a D_0 y una única derivación $\bar{D}_1$ que extiende a D_1. Utilizando estas dos derivaciones, podemos encontrar todas las derivaciones en $K(x)$ que extienden a δ.

TEOREMA 1.10. *Sea K un cuerpo δ-diferencial. Para cada elemento $\alpha \in K(x)$, la derivación $\Delta_\alpha = \bar{D}_0 + \alpha \cdot \bar{D}_1$ es la única derivación en $K(x)$ que extiende a δ y toma el valor α sobre x.*

DEMOSTRACIÓN. Como hemos visto en el teorema 1.2, las derivaciones de $K(x)$ forman un espacio vectorial sobre $K(x)$, y como las aplicaciones $\bar{D}_0$ y $\bar{D}_1$ son derivaciones, podemos asegurar que la aplicación Δ_α también es una derivación. Veamos que es una extensión de δ. Si a es un elemento de K, entonces

$$\Delta_\alpha(a) = \bar{D}_0(a) + \alpha \cdot \bar{D}_1(a) = \delta(a) + \alpha \cdot 0 = \delta(a).$$

Además, el siguiente cálculo muestra que Δ_α toma el valor α sobre x:

$$\Delta_\alpha(x) = \bar{D}_0(x) + \alpha \cdot \bar{D}_1(x) = 0 + \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

$\square$

COROLARIO 1.11. *Sea K un cuerpo δ-diferencial, y sea Δ una derivación en $K(x)$ que extiende a δ. Entonces Δ es de la forma $\bar{D}_0 + \Delta(x) \cdot \bar{D}_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Si llamamos α al elemento $\Delta(x)$, por el teorema anterior, la única derivación que extiende a δ y toma el valor α sobre x es $\bar{D}_0 + \alpha \cdot \bar{D}_1$. Por lo tanto,

$$\Delta = \bar{D}_0 + \alpha \cdot \bar{D}_1 = \bar{D}_0 + \Delta(x) \cdot \bar{D}_1.$$

$\square$

Observación. Si A es un anillo δ-diferencial, también es cierto que para todo α de $A[x]$ la derivación $\Delta_\alpha = D_0 + \alpha \cdot D_1$ es la única derivación en $A[x]$ que extiende a δ y toma el valor α sobre x. En consecuencia, cualquier derivación Δ en $A[x]$ que extienda a δ es de la forma $D_0 + \Delta(x) \cdot D_1$. Las demostraciones que hemos dado para el teorema y el corolario anteriores se adaptan perfectamente a este caso.

3.2. Extensiones diferenciales transcendentes.

Sea K un cuerpo δ-diferencial y sea $L = K(t)$ una extensión de K simple transcendente. En este caso, podemos determinar todas las derivaciones Δ en L que extienden a δ, de forma similar a como hemos hecho con $K(x)$. Es importante observar que, en este caso, una derivación Δ queda determinada por el valor que toma en t.

TEOREMA 1.12. *Sea K un cuerpo δ-diferencial, y sea t un elemento transcendente sobre K. Entonces, para cada $\alpha \in K(t)$, existe una única derivación en $K(t)$ que extiende a δ y toma el valor α sobre t.*

DEMOSTRACIÓN. Como t es transcendente sobre K, sabemos que $K(t)$ es isomorfo a $K(x)$, y que existe un K-isomorfismo $\varphi\colon K(x) \to K(t)$ que cumple que $\varphi(x) = t$. Sea β el elemento de $K(x)$ que cumple que $\varphi(\beta) = \alpha$. Como hemos visto en el teorema 1.10, en $K(x)$ existe una derivación Δ_β que extiende a δ y toma el valor β sobre x. Según el teorema 1.7, la aplicación $\Delta_\alpha = \varphi \circ \Delta_\beta \circ \varphi^{-1}$ es una derivación en $K(t)$ que extiende a δ. Calculando, vemos que

$$\Delta_\alpha(t) = \varphi \circ \Delta_\beta \circ \varphi^{-1}(t) = \varphi \circ \Delta_\beta(x) = \varphi(\beta) = \alpha.$$

Para acabar, está claro que Δ_α es la única derivación en $K(t)$ que extiende a δ y toma el valor α sobre t.

□

Si K es un cuerpo δ-diferencial, y $K(S)$ es una extensión arbitraria de K que cumple que s es transcendente sobre $K(S \setminus \{s\})$ para todo $s \in S$, utilizando el teorema anterior podemos encontrar todas las derivaciones en $K(S)$ que extienden a δ. Este resultado no se utilizará más adelante en ningún momento, pero a pesar de eso, nos ha parecido lo suficientemente interesante como para incluirlo aquí.

TEOREMA 1.13. *Sea K un cuerpo δ-diferencial, y sea L un cuerpo que contiene a K como subcuerpo. Sea S un subconjunto de L que cumple que todo $s \in S$ es transcendente sobre $K(S \setminus \{s\})$. Entonces, para cada aplicación $\sigma\colon S \to K(S)$, existe una única derivación Δ_σ en $K(S)$ que extiende a δ y cumple que $\Delta_\sigma(s) = \sigma(s)$ para todo $s \in S$.*

DEMOSTRACIÓN. La idea principal de esta demostración es utilizar el principio de buena ordenación para definir un buen orden en S y, de forma inductiva, extender la derivación δ a los cuerpos $L_\alpha = K(\{s \in S \mid s \leqslant \alpha\})$ para cada $\alpha \in S$. La dificultad principal viene dada por el hecho de que $\sigma(s)$ no es, en general, un elemento de $K(s)$, y por lo tanto no podemos definir la derivación Δ_σ directamente, sino que previamente tendremos que definir derivaciones auxiliares.

Separaremos la demostración en tres partes. Empezaremos demostrando que existe una derivación Δ_0 en $K(S)$ que extiende a δ se anula en S. En la segunda parte demostraremos que para cada elemento $s \in S$ existe una derivación Δ_s en $K(S)$ que se anula sobre $K \cup S \setminus \{s\}$ y que toma el valor $\sigma(s)$ sobre s. También demostraremos que dado cualquier elemento $\alpha \in K(S)$, el conjunto

$A_\alpha = \{s \in S \mid \Delta_s(\alpha) \neq 0\}$ es finito. Para acabar, en la tercera parte veremos que la aplicación

$$\begin{array}{rcl}\Delta_\sigma\colon K(S) & \to & K(S) \\ \alpha & \to & \Delta_0(\alpha) + \sum_{s \in A_\alpha} \Delta_s(\alpha)\end{array}$$

es una derivación en $K(S)$ que extiende a δ, y que $\Delta_\sigma(s) = \sigma(s)$ para todo s de S. Con esto, demostraremos la existencia de una derivación Δ_σ que cumple las hipótesis. La unicidad está clara, ya que Δ_σ extiende a δ, y las hipótesis determinan el valor que toma sobre todos los elementos de S.

Empezamos demostrando que existe una derivación en $K(S)$ que extiende a δ y cumple que $\Delta_0(s) = 0$ para todo $s \in S$.

Por el principio de buena ordenación, podemos definir un buen orden sobre S, de manera que tenga un elemento mínimo m y un elemento máximo M. En efecto, el principio de buena ordenación afirma que cualquier conjunto S tiene un buen orden, lo que implica que tiene mínimo. Para ver que podemos encontrar un buen orden con máximo, elegimos un elemento M de S, utilizamos el principio de buena ordenación para definir un buen orden sobre $S \setminus \{M\}$ y lo extendemos a un buen orden en S, imponiendo que M sea mayor que cualquier otro elemento.

Para cada α de S, definimos los cuerpos $K_\alpha = K(\{\beta \in S \mid \beta < \alpha\})$ y $L_\alpha = K(\{\beta \in S \mid \beta \leqslant \alpha\})$. Observemos que $K_m = K$, que $L_M = K(S)$, que para cada elemento α de S se cumple que

$$K_\alpha = \bigcup_{\beta \in S, \beta < \alpha} L_\beta$$

y que $L_\alpha = K_\alpha(\alpha)$.

Veamos ahora que se puede definir, recursivamente, una derivación δ_α en K_α y una derivación Δ_α en L_α para cada $\alpha \in S$, de manera que $\delta_m = \delta$, y que si α y β son elementos de S, con $\alpha < \beta$, entonces δ_β extienda a Δ_α y Δ_α extienda a δ_α y se anule en α. Si definimos $\Delta_0 = \Delta_M$, se cumple que Δ_0 es una derivación en $L_M = K(S)$ que extiende a δ_M, a Δ_m y a $\delta_m = \delta$. Además, para todo $\alpha \in S$ se cumple que Δ_0 extiende a Δ_α, y por lo tanto $\Delta_0(\alpha) = \Delta_\alpha(\alpha) = 0$.

Para $\alpha = m$, ya tenemos definida la derivación $\delta_m = \delta$ en $K_m = K$. Por el teorema 1.12 podemos definir una derivación Δ_m en $L_m = K(m)$ que extienda a δ_m y se anule en m.

Para $\alpha \neq m$, supongamos que tenemos definidas, para cualquier elemento β de S menor que α, las derivaciones δ_β en K_β y Δ_β en L_β, y que cumplen las hipótesis. Ahora, para todo elemento a de K_α existe algún elemento β de S menor que α tal que $a \in L_\beta$, así que podemos definir $\delta_\alpha(a) = \Delta_\beta(a)$.

La aplicación δ_α está bien definida, ya que si tenemos dos elementos β y γ en S menores que α, tales que $a \in L_\beta \cap L_\gamma$, entonces $\Delta_\beta(a) = \Delta_\gamma(a)$ por hipótesis. Veamos ahora que la aplicación δ_α es una derivación. Sean a y b elementos de K_α, y sean β y γ elementos de S menores que α, tales que $a \in L_\beta$ y $b \in L_\gamma$. Si definimos π como el máximo entre β y γ, entonces a y b pertenecen ambos a L_π, y podemos comprobar que δ_α cumple las reglas de la suma y de Leibniz:

- $a+b \in L_\pi$ y $\delta_\alpha(a+b) = \Delta_\pi(a+b) = \Delta_\pi(a) + \Delta_\pi(b) = \delta_\alpha(a) + \delta_\alpha(b)$.
- $ab \in L_\pi$ y $\delta_\alpha(ab) = \Delta_\pi(ab) = \Delta_\pi(a) \cdot b + a \cdot \Delta_\pi(b) = \delta_\alpha(a) \cdot b + a \cdot \delta_\alpha(b)$.

Por lo tanto, la aplicación δ_α es una derivación y, por construcción, si β es un elemento de S menor que α, entonces δ_α extiende a Δ_β.

Para acabar, por el teorema 1.12 podemos definir una derivación Δ_α en $L_\alpha = K_\alpha(\alpha)$ que extienda a δ_α y se anule en α.

Con esto la primera parte queda demostrada, existe una derivación Δ_0 en $K(S)$ que extiende a δ y se anula sobre todos los elementos de S.

Para demostrar la segunda parte, sea s un elemento cualquiera de S. En el cuerpo $K(S \setminus \{s\})$ la aplicación δ constante igual a 0 es una derivación, y por el teorema 1.12 podemos definir una derivación Δ_s en $K(S) = K(S \setminus \{s\})(s)$ que extienda a δ y tome el valor $\sigma(s)$ sobre s. Esta derivación se anula sobre todos los elementos de K y sobre todos los elementos de S diferentes de s. Ahora, si α es un elemento cualquiera de $K(S)$, por definición α es un cociente de polinomios de $K[S]$, y cada uno de estos polinomios es una combinación de sumas y productos de elementos de K y una cantidad finita de elementos de S. Es decir, existe un subconjunto finito $T_\alpha \subseteq S$ tal que $\alpha \in K(T)$. Para cualquier elemento s del conjunto $S \setminus T$ se cumple que $\Delta_s(\alpha) = 0$, y por lo tanto el conjunto $A_\alpha = \{s \in S \mid \Delta_s(\alpha) \neq 0\}$ es finito.

Teniendo en cuenta que para cualquier elemento $\alpha \in K(S)$ el conjunto $A_\alpha = \{s \in S \mid \Delta_s(\alpha) \neq 0\}$ es finito, está claro que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \Delta\colon K(S) & \longrightarrow & K(S) \\ \alpha & \to & \displaystyle\sum_{s \in A_\alpha} \Delta_s(\alpha) \end{array}$$

está bien definida. Veamos que es una derivación. Si α y β son elementos de $K(S)$, para simplificar la demostración definimos el conjunto $I_{\alpha,\beta} = A_\alpha \cup A_\beta \cup A_{\alpha+\beta} \cup A_{\alpha\cdot\beta}$. Por ser una unión finita de conjuntos finitos, $I_{\alpha,\beta}$ es un conjunto finito. Veamos que la aplicación Δ cumple la regla de la suma.

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha+\beta) &= \sum_{s \in A_{\alpha+\beta}} \Delta_s(\alpha+\beta) \\ &= \sum_{s \in I_{\alpha,\beta}} \Delta_s(\alpha+\beta) \\ &= \sum_{s \in I_{\alpha,\beta}} \Delta_s(\alpha) + \sum_{s \in I_{\alpha,\beta}} \Delta_s(\beta) \\ &= \sum_{s \in A_\alpha} \Delta_s(\alpha) + \sum_{s \in A_\beta} \Delta_s(\beta) \\ &= \Delta(\alpha) + \Delta(\beta). \end{aligned}$$

Veamos también que Δ cumple la regla de Leibniz.

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha\cdot\beta) &= \sum_{s\in A_{\alpha\cdot\beta}} \Delta_s(\alpha\cdot\beta) \\
&= \sum_{s\in I_{\alpha,\beta}} \Delta_s(\alpha\cdot\beta) \\
&= \left(\sum_{s\in I_{\alpha,\beta}} \Delta_s(\alpha)\right)\cdot\beta + \alpha\cdot\left(\sum_{s\in I_{\alpha,\beta}} \Delta_s(\beta)\right) \\
&= \left(\sum_{s\in A_{\alpha}} \Delta_s(\alpha)\right)\cdot\beta + \alpha\cdot\left(\sum_{s\in A_{\beta}} \Delta_s(\beta)\right) \\
&= \Delta(\alpha)\cdot\beta + \alpha\cdot\Delta(\beta).
\end{aligned}$$

Para acabar, observemos que si s es un elemento de S se cumple que $A_s = \{s\}$, y entonces $\Delta(s) = \Delta_s(s) = \sigma(s)$. Además, para cada elemento α de K se cumple que $A_\alpha = \emptyset$, y entonces $\Delta(\alpha) = 0$. Como la derivación Δ_0 extiende a δ y se anula en los elementos de S, obtenemos que la aplicación $\Delta_\sigma = \Delta_0 + \Delta$ es una derivación, por ser suma de derivaciones, que extiende a δ y toma el valor $\sigma(s)$ sobre s para todo s de S. □

3.3. Extensiones diferenciales algebraicas.

Veamos ahora el caso de las extensiones simples algebraicas. Si K es un cuerpo δ-diferencial y $L = K(t)$ es una extensión simple algebraica de K, vamos a demostrar que existe una única derivación Δ en L que extiende a δ.

A lo largo de esta sección, si $f(x)$ es una función obtenida a partir de otras funciones mediante operaciones algebraicas o derivaciones, en varios momentos nos hemos visto obligados a utilizar la notación $f(x)(t)$ para referirnos a la evaluación de $f(x)$ en t, en lugar de la notación $f(t)$ habitual.

Empezamos demostrando un lema acerca de extensiones algebraicas en general.

LEMA 1.14. *Sea K un cuerpo δ-diferencial, sea L una extensión Δ-diferencial de K, y sea t un elemento de L algebraico sobre K con polinomio mínimo $p(x)$. Entonces se cumple que*

$$\Delta(t) = \frac{-\bar{D}_0(p(x))}{\bar{D}_1(p(x))}(t).$$

DEMOSTRACIÓN. Si aplicamos las reglas de derivación a la expresión del polinomio

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i\cdot t^i,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
\delta\left(p\left(t\right)\right) &= \delta\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot t^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\delta\left(c_i\right)\cdot t^i + c_i \cdot \delta\left(t^i\right)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\delta\left(c_i\right)\cdot t^i + \sum_{i=1}^{n}\left(c_i \cdot i \cdot t^{i-1}\cdot \delta\left(t\right)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\delta\left(c_i\right)\cdot t^i + \delta\left(t\right)\cdot \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot i \cdot t^{i-1} \\
&= \bar{D_0}\left(p\left(x\right)\right)\left(t\right) + \delta\left(t\right)\cdot \bar{D_1}\left(p\left(x\right)\right)\left(t\right).
\end{aligned}$$

Como t es raíz de $p(x)$, se cumple que $p(t) = 0$, y por lo tanto $\delta(p(t)) = 0$. Con esto, obtenemos la igualdad $\bar{D_0}(p(x))(t) + \delta(t)\cdot\bar{D_1}(p(x))(t) = 0$.

Por otro lado, como t no es un elemento de K, el polinomio $p(x)$ tiene grado mayor que 0, y por lo tanto $\bar{D_1}(p(x))$ es diferente de 0. Además, $p(x)$ es el polinomio mínimo de t sobre K y $\bar{D_1}(p(x))$ es un polinomio de $K[x]$ de grado menor que el de $p(x)$. Esto demuestra que $\bar{D_1}(p(x))(t)$ no es nulo, así que podemos aislar $\delta(t)$ en la igualdad anterior, con lo que obtenemos que

$$\delta\left(t\right) = \frac{-\bar{D_0}\left(p\left(x\right)\right)\left(t\right)}{\bar{D_1}\left(p\left(x\right)\right)\left(t\right)} = \frac{-\bar{D_0}\left(p\left(x\right)\right)}{\bar{D_1}\left(p\left(x\right)\right)}\left(t\right).$$

□

Utilizando este lema, podemos demostrar que cualquier derivación definida en un cuerpo K se extiende de forma única a cualquier extensión simple algebraica de K.

TEOREMA 1.15. *Sea K un cuerpo δ-diferencial y sea t un elemento algebraico sobre K, con polinomio mínimo $p(x)$. Entonces existe una única derivación Δ de $K(t)$ que extiende a δ. Esta derivación toma sobre t el valor*

$$-\frac{\bar{D_0}\left(p\left(x\right)\right)}{\bar{D_1}\left(p\left(x\right)\right)}\left(t\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Empezamos definiendo en $K(x)$ una derivación que extiende a δ y se anula sobre $p(x)$. Como el grado de $p(x)$ es mayor que 0, y K tiene característica 0, el polinomio $\bar{D_1}(p(x))$ no es nulo, y $-\bar{D_0}(p(x))/\bar{D_1}(p(x))$ es un elemento de $K(x)$. Según el teorema 1.10, la aplicación

$$\Delta_p = \bar{D_0} + \frac{-\bar{D_0}\left(p\left(x\right)\right)}{\bar{D_1}\left(p\left(x\right)\right)}\cdot \bar{D_1}$$

es una derivación en $K(x)$ que extiende a δ, y una comprobación directa muestra que

$$\Delta_p\left(p\left(x\right)\right) = \bar{D_0}\left(p\left(x\right)\right) + \frac{-\bar{D_0}\left(p\left(x\right)\right)}{\bar{D_1}\left(p\left(x\right)\right)}\cdot \bar{D_1}\left(p\left(x\right)\right) = 0.$$

Utilizaremos la derivación Δ_p para definir una derivación en $K(t)$. Los detalles delicados de la demostración vienen dados por el hecho de que, por un lado, $K[x]$ no es un subanillo diferencial de $K(x)$ con esta derivación, y por otro lado no podemos evaluar en t todos los elementos de $K(x)$. A causa de esto, debemos interpretar los elementos de $K(t)$, simultáneamente, como polinomios de $K[x]$ evaluados en t, y como cocientes de polinomios de $K(x)$ evaluados en t.

Teniendo esto en cuenta, a partir de la derivación Δ_p podemos definir en $K(t)$ la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Delta\colon K(t) & \to & K(t) \\ r(t) & \to & \Delta_p(r(x))(t)\,, \end{array}$$

donde $r(x)$ es un polinomio de $K[x]$ cualquiera, y $\Delta_p(r(x))$ es un cociente de polinomios de $K(x)$.

Tenemos que comprobar que esta aplicación está bien definida. Por un lado $\bar{D}_0(p(x))$, $\bar{D}_1(p(x))$, $\bar{D}_0(r(x))$ y $\bar{D}_1(r(x))$ son polinomios de $K[x]$, y por lo tanto podemos evaluarlos en t. Por otro lado, como $\bar{D}_1(p(x))$ tiene grado menor que el de $p(x)$, $\bar{D}_1(p(x))(t)$ es un elemento de $K(t)$ no nulo. Por lo tanto, podemos evaluar $\Delta_p(r(x))$ en t, y obtenemos

$$\Delta_p(r(x))(t) = \bar{D}_0(r(x))(t) + \frac{-\bar{D}_0(p(x))}{\bar{D}_1(p(x))}(t)\cdot\bar{D}_1(r(x))(t)\,.$$

Además, hay que ver que el valor de Δ sobre cualquier elemento no depende del polinomio escogido para representarlo. Es decir, que si $r(t) = s(t)$, entonces $\Delta_p(r(x))(t) = \Delta_p(s(x))(t)$. Para ver esto, observemos primero que $\Delta_p(p(x)) = 0$ y que $p(t) = 0$. Además, tenemos que recordar que si $r(t) = s(t)$, entonces existe un polinomio $z(x)$ en $K[x]$ tal que $r(x) = s(x) + z(x)\cdot p(x)$. Teniendo esto en cuenta, obtenemos las implicaciones

$$\begin{array}{rcl} r(t) = s(t) & \Rightarrow & r(x) = s(x) + z(x)\cdot p(x) \\ & \Rightarrow & \Delta_p(r(x)) = \Delta_p(s(x) + z(x)\cdot p(x)) \\ & \Rightarrow & \Delta_p(r(x)) = \Delta_p(s(x)) + \Delta_p(z(x))\cdot p(x) + z(x)\cdot\Delta_p(p(x)) \\ & \Rightarrow & \Delta_p(r(x)) = \Delta_p(s(x)) + \Delta_p(z(x))\cdot p(x) \\ & \Rightarrow & \Delta_p(r(x))(t) = \Delta_p(s(x))(t) + \Delta_p(z(x))(t)\cdot p(t) \\ & \Rightarrow & \Delta_p(r(x))(t) = \Delta_p(s(x))(t)\,. \end{array}$$

Por lo tanto, la aplicación Δ está bien definida. Para comprobar que es una derivación, veamos que se cumple la regla de la suma.

$$\begin{array}{rcl} \Delta(r(t) + s(t)) & = & \Delta((r(x) + s(x))(t)) \\ & = & \Delta_p(r(x) + s(x))(t) \\ & = & (\Delta_p(r(x)) + \Delta_p(s(x)))(t) \\ & = & \Delta_p(r(x))(t) + \Delta_p(s(x))(t) \\ & = & \Delta(r(t)) + \Delta(s(t))\,, \end{array}$$

Veamos que se cumple también la regla de Leibniz.

$$\begin{aligned}
\Delta\left(r\left(t\right)\cdot s\left(t\right)\right) &= \Delta\left(\left(r\left(x\right)\cdot s\left(x\right)\right)\left(t\right)\right)\\
&= \Delta_p\left(r\left(x\right)\cdot s\left(x\right)\right)\left(t\right)\\
&= \left(\Delta_p\left(r\left(x\right)\right)\cdot s\left(x\right)+r\left(x\right)\cdot\Delta_p\left(s\left(x\right)\right)\right)\left(t\right)\\
&= \left(\Delta_p\left(r\left(x\right)\right)\cdot s\left(x\right)\right)\left(t\right)+\left(r\left(x\right)\cdot\Delta_p\left(s\left(x\right)\right)\right)\left(t\right)\\
&= \Delta_p\left(r\left(x\right)\right)\left(t\right)\cdot s\left(t\right)+r\left(t\right)\cdot\Delta_p\left(s\left(x\right)\right)\left(t\right)\\
&= \Delta\left(r\left(t\right)\right)\cdot s\left(t\right)+r\left(t\right)\cdot\Delta\left(s\left(t\right)\right).
\end{aligned}$$

Una vez que hemos visto que la aplicación Δ es una derivación, veamos que extiende a δ. Identificando los elementos de K con polinomios de grado 0, si α es un elemento de K se cumple que $\Delta\left(\alpha\right)=\Delta_p\left(\alpha\right)\left(t\right)=\delta\left(\alpha\right)\left(t\right)=\delta(\alpha)$.

Por el lema 1.14, como $p\left(x\right)$ es el polinomio mínimo de t sobre K, Δ toma sobre t el valor

$$\Delta\left(t\right)=\frac{-\bar{D}_0\left(p\left(x\right)\right)}{\bar{D}_1\left(p\left(x\right)\right)}\left(t\right).$$

Como este valor está determinado de forma única por δ, la derivación Δ es la única derivación en $K\left(t\right)$ que extiende a δ.

□

Utilizando el teorema 1.15, podemos demostrar que si K es un cuerpo δ-diferencial y L es una extensión algebraica arbitraria de K, entonces L admite una única derivación Δ que extiende a δ. Este resultado, además de describir por completo las extensiones algebraicas de cuerpos diferenciales, nos aporta dos corolarios, y hemos considerado interesante mostrarlos en su forma más general. En el resto del trabajo únicamente se utilizará la versión del teorema en la que L es una extensión algebraica finitamente generada. Esta versión más débil se puede demostrar por inducción sin necesidad de utilizar el principio de buena ordenación, y es suficiente para demostrar los dos corolarios, siempre que pongamos la condición de que las extensiones sean finitamente generadas.

Teorema 1.16. *Sea K un cuerpo δ-diferencial, y sea L un cuerpo que contiene a K como subcuerpo. Sea S un subconjunto de L de elementos algebraicos sobre K. Entonces existe una única derivación Δ en $K\left(S\right)$ que extiende a δ.*

Demostración. A diferencia del teorema 1.13, en este caso únicamente queremos ver que existe una derivación Δ en $K\left(S\right)$, sin preocuparnos *a priori* del valor que tome sobre los elementos de S. Estos valores vendrán determinados por el lema 1.14, y esto simplifica considerablemente la demostración, ya que podemos construir la derivación Δ directamente. En consecuencia, para demostrar este teorema es suficiente adaptar la primera parte de la demostración del teorema 1.13.

Como hemos visto en la demostración del teorema 1.13, podemos definir un buen orden sobre S, de manera que tenga un elemento mínimo m y un elemento máximo M.

Para cada α de S, definimos los cuerpos $K_\alpha = K(\{\beta \in S \mid \beta < \alpha\})$ y $L_\alpha = K(\{\beta \in S \mid \beta \leqslant \alpha\})$. Observemos que $K_m = K$, que $L_M = K(S)$, que para cada elemento α de S se cumple que

$$K_\alpha = \bigcup_{\beta \in S, \beta < \alpha} L_\beta$$

y que $L_\alpha = K_\alpha(\alpha)$.

Veamos ahora que se puede definir, recursivamente, una derivación δ_α en K_α y una derivación Δ_α en L_α para cada elemento α de S, de manera que $\delta_m = \delta$, y que si α y β son elementos de S, con $\alpha < \beta$, entonces δ_β extienda a Δ_α y Δ_α extienda a δ_α. En estas condiciones, se cumple que Δ_M es una derivación en $L_M = K(S)$ que extiende a δ_M, a Δ_m y a $\delta_m = \delta$.

Para $\alpha = m$, ya tenemos definida la derivación $\delta_m = \delta$ en $K_m = K$. Por el teorema 1.15 podemos definir una derivación Δ_m en $L_m = K(m)$ que extienda a δ_m.

Para $\alpha \neq m$, supongamos que tenemos definidas, para cualquier elemento β de S menor que α, las derivaciones δ_β en K_β y Δ_β en L_β, y que cumplen las hipótesis. Ahora, para todo elemento a de K_α existe algún elemento β de S menor que α tal que $a \in L_\beta$, así que podemos definir $\delta_\alpha(a) = \Delta_\beta(a)$.

La aplicación δ_α está bien definida, ya que si tenemos dos elementos β y γ en S menores que α, tales que $a \in L_\beta \cap L_\gamma$, entonces $\Delta_\beta(a) = \Delta_\gamma(a)$ por hipótesis. Veamos ahora que la aplicación δ_α es una derivación. Sean a y b elementos de K_α, y sean β y γ elementos de S menores que α, tales que $a \in L_\beta$ y $b \in L_\gamma$. Si definimos π como el máximo entre β y γ, entonces a y b pertenecen ambos a L_π, y podemos comprobar que δ_α cumple las reglas de la suma y de Leibniz:

- $a + b \in L_\pi$ y $\delta_\alpha(a+b) = \Delta_\pi(a+b) = \Delta_\pi(a) + \Delta_\pi(b) = \delta_\alpha(a) + \delta_\alpha(b)$.
- $ab \in L_\pi$ y $\delta_\alpha(ab) = \Delta_\pi(ab) = \Delta_\pi(a) \cdot b + a \cdot \Delta_\pi(b) = \delta_\alpha(a) \cdot b + a \cdot \delta_\alpha(b)$.

Por lo tanto, la aplicación δ_α es una derivación y, por construcción, si β es un elemento de S menor que α, entonces δ_α extiende a Δ_β.

Para acabar, por el teorema 1.15 podemos definir una derivación Δ_α en $L_\alpha = K_\alpha(\alpha)$ que extienda a δ_α.

Hasta ahora, hemos visto que si K es un cuerpo δ-diferencial, L un cuerpo que contiene a K como subcuerpo y S es un subconjunto de L de elementos algebraicos sobre K, existe una derivación Δ en $K(S)$ que extiende a δ.

Para ver que esta derivación es única, veamos que los valores que toma sobre los elementos de S están determinados por el hecho de que Δ extiende a δ. Sea s un elemento de S, y sea $p(x)$ su polinomio mínimo sobre K. Entonces, según el lema 1.14, se cumple que

$$\Delta(s) = \frac{-\bar{D}_0(p(x))}{\bar{D}_1(p(x))}(s),$$

y este valor está determinado por δ. □

COROLARIO 1.17. *Sea $K \subseteq L$ una extensión algebraica de cuerpos δ-diferenciales, y sea H un subcuerpo de L tal que $K \subseteq H$. Entonces H es un subcuerpo diferencial de L.*

Demostración. Las extensiones de cuerpos $K \subseteq H$ y $H \subseteq L$ son algebraicas. Por el teorema anterior, $\delta|_K$ se extiende a una derivación δ_H en H, y δ_H se extiende a una derivación δ_L en L. Como δ_L extiende a $\delta|_K$, por la unicidad demostrada en el teorema anterior, las derivaciones δ y δ_L son iguales. Por construcción, H es un subcuerpo diferencial de L con la derivación δ_L, y por lo tanto, también es un subcuerpo diferencial de L con la derivación δ. □

Corolario 1.18. *Sea $K \subseteq L$ una extensión algebraica de cuerpos Δ-diferenciales, y sea φ un K-automorfismo de L. Entonces $\Delta \circ \varphi = \varphi \circ \Delta$.*

Demostración. Sea δ la derivación en K dada por la restricción de Δ a K. Podemos aplicar el teorema 1.7 considerando a φ como un K-isomorfismo de L en L. Como la derivación Δ extiende a δ, la aplicación $\Delta_L = \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1}$ es una derivación en L que también extiende a δ. Como la extensión $K \subseteq L$ es una extensión de cuerpos algebraica, el teorema anterior nos asegura que $\Delta_L = \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1} = \Delta$, y por lo tanto, obtenemos la igualdad $\varphi \circ \delta = \delta \circ \varphi$. □

4. Funciones elementales abstractas

Una vez definido el concepto de las derivaciones y los cuerpos diferenciales, estamos en condiciones de definir de forma algebraica exponenciales y logaritmos, y a partir de ahí definir qué entendemos por funciones elementales.

Debemos tener en cuenta que, a pesar de que estamos desarrollando toda la teoría a nivel abstracto, el objetivo final del trabajo es tratar con funciones de variable compleja y de variable real. Así pues, es de esperar que la terminología se dirija hacia ese caso. A pesar de eso, hasta el final de este capítulo seguiremos trabajando en un marco abstracto, así que cuando hablemos de funciones elementales debemos entender que nos estamos refiriendo a los elementos de cualquier cuerpo diferencial, y no a funciones en el sentido usual de la palabra.

Definición. Sea K un cuerpo diferencial, y sea H un subcuerpo arbitrario de K. Sean a y b elementos de K, con $b \neq 0$.

Diremos que b es una *exponencial* de a, y que a es un *logaritmo* de b, si se cumple que $a' = b'/b$.

Diremos que un elemento a de K es *exponencial* (o *logarítmico*) sobre H si existe otro elemento b de H tal que a es una exponencial (o un logaritmo) de b.

Definición. Sea K un cuerpo diferencial, y sean F y H dos subcuerpos de K, de manera que $F \subseteq H \subseteq K$.

Diremos que $F \subseteq H$ es una *extensión exponencial* (o *logarítmica*) si existe algún elemento a de H exponencial (o logarítmico) sobre F tal que $H = F(a)$.

Diremos que $F \subseteq H$ es una *extensión elemental* si existe una cadena de extensiones simples

$$F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = H$$

de manera que cada extensión es algebraica, exponencial o logarítmica. A una cadena de estas características la llamaremos cadena elemental.

Definición. Sea $K \subseteq L$ una extension de cuerpos diferenciales. Diremos que un elemento a de L es una *función elemental* sobre K si pertenece a alguna extensión elemental de K contenida en L. Denotaremos por $El\,(L, K)$ al subconjunto de L de las funciones elementales sobre K.

Una vez definido el concepto algebraico de función elemental, queremos ver que dada una extensión $K \subseteq L$ de cuerpos diferenciales, el conjunto $El\,(L, K)$ es un subcuerpo diferencial de L que contiene a todos los elementos de L algebraicos, exponenciales o logarítmicos sobre $El\,(L, K)$. Para eso, empezamos viendo que las extensiones elementales de un cuerpo diferencial son extensiones diferenciales.

TEOREMA 1.19. *Sea $K \subseteq L$ una extensión de cuerpos diferenciales, y sea a un elemento de L algebraico, exponencial o logarítmico sobre K. Entonces $K\,(a)$ es un subcuerpo diferencial de L.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 1.4, basta ver que $a' \in K\,(a)$. Analizamos los tres casos por separado:

1. Si a es un elemento algebraico sobre K y $p\,(x)$ es su polinomio mínimo, por el lema 1.14 se cumple que
$$a' = \frac{-\bar{D}_0\,(p\,(x))}{\bar{D}_1\,(p\,(x))}\,(a)\,.$$
Por lo tanto $a' \in K\,(a)$ porque $-\bar{D}_0\,(p\,(x))$ y $\bar{D}_1\,(p\,(x))$ son polinomios de $K\,[x]$.
2. Si a es una exponencial de un elemento b de K, se cumple que $b' = a'/a$, y aislando tenemos que $a' = a \cdot b'$. Como K es un subcuerpo diferencial de L, b' pertenece a K, y también a $K\,(a)$. Entonces, como a pertenece también a $K\,(a)$, se cumple que $a' \in K\,(a)$.
3. Si a es un logaritmo de un elemento b de K se cumple que $a' = b'/b$. Como K es un subcuerpo diferencial de L, b' pertenece a K, y por lo tanto a' pertenece a K y también a $K\,(a)$.

□

COROLARIO 1.20. *Sea $K \subseteq L$ una extensión de cuerpos diferenciales, y sea H un subcuerpo contenido en L de manera que $K \subseteq H$ sea una extensión elemental. Entonces H es un subcuerpo diferencial de L y $K \subseteq H$ es una extensión de cuerpos diferenciales.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición de extensión elemental, existe una cadena de extensiones simples
$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n = H$$
tales que cada extensión es algebraica, exponencial o logarítmica. Por hipótesis, $K = K_0$ es un subcuerpo diferencial de L, y por el teorema anterior, para cada $i = 1, \ldots, n$, el cuerpo K_i es un subcuerpo diferencial de L porque K_{i-1} también lo es. Por lo tanto, $H = K_n$ es un subcuerpo diferencial de L y $K \subseteq H$ es una extensión de cuerpos diferenciales. □

El siguiente lema que demostraremos nos permitirá, dado un conjunto finito de funciones elementales sobre un cuerpo K, asegurar la existencia de una extensión elemental $H \supseteq K$ que las contenga a todas.

LEMA 1.21. *Sea $K \subseteq L$ una extensión de cuerpos diferenciales, y sean $a_1, a_2, \ldots, a_j \in L$ funciones elementales sobre K. Entonces existe una extensión $K \subseteq H$ elemental, con $a_1, a_2, \ldots, a_j \in H \subseteq L$.*

Demostración. Empezamos observando un hecho sencillo. Si $K_1 \subseteq K_2 \subseteq L$ es una extensión de cuerpos diferenciales, y t es un elemento de L algebraico, exponencial o logarítmico sobre K_1, entonces también lo es sobre K_2.

Si $a_1, a_2, \ldots, a_j$ son funciones elementales sobre K, queremos demostrar que existe una cadena de extensiones algebraicas, exponenciales o logarítmicas

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n = H, \text{ con } a_1, a_2, \ldots, a_j \in H \subseteq L.$$

Esto lo demostramos por inducción sobre j. El caso base para $j = 1$ es exactamente la definición de función elemental, y por lo tanto solo hay que demostrar el paso de inducción.

Supongamos que $K \subseteq L$ es una extensión de cuerpos diferenciales, y que $a_1, \ldots, a_j, a_{j+1} \in L$ son funciones elementales sobre K.

Por la hipótesis de inducción, tenemos una cadena de extensiones algebraicas, exponenciales o logarítmicas

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n, \text{ con } a_1, a_2, \ldots, a_j \in K_n \subseteq L.$$

Por otro lado, tenemos una cadena de extensiones algebraicas, exponenciales o logarítmicas

$$K = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_m, \text{ con } a_{j+1} \in L_m \subseteq L,$$

de manera que $L_i = L_{i-1}(t_i)$, con t_i algebraico, exponencial o logarítmico sobre L_{i-1}, para todo $i = 1, \ldots, m$.

A partir de estas dos cadenas de extensiones, definimos $\bar{L}_0 = K_n$, y construimos una tercera cadena

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n = \bar{L}_0 \subseteq \bar{L}_1 \subseteq \bar{L}_2 \subseteq \cdots \subseteq \bar{L}_m = H,$$

donde $\bar{L}_i = \bar{L}_{i-1}(t_i)$ para $i = 1, \ldots, m$.

Está claro que $L_i \subseteq \bar{L}_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, m$. Por lo tanto, como t_i es algebraico, exponencial o logarítmico sobre L_{i-1}, también lo es sobre $\bar{L}_{i-1}$, y las extensiones de la cadena son todas algebraicas, exponenciales o logarítmicas.

Para acabar, $a_1, a_2, \ldots, a_j \in K_n \subseteq H$ y $a_{j+1} \in L_m \subseteq H$. Por lo tanto, la extensión $K \subseteq H$ es una extensión elemental y $a_1, a_2, \ldots, a_j, a_{j+1} \in H \subseteq L$. □

Utilizando este lema, podemos demostrar los teoremas importantes de esta sección.

Teorema 1.22. *Si $K \subseteq L$ es una extensión de cuerpos diferenciales, entonces el subconjunto $El\,(L, K)$ es un subcuerpo diferencial de L.*

Observación. Notemos que la extensión $K \subseteq El\,(L, K)$ no es elemental en general. Esto es así porque a pesar de estar formada por las funciones de L elementales sobre K, no tiene porque ser una extensión finitamente generada, y las extensiones elementales lo son por definición.

Demostración. Para demostrar que $El\,(L, K)$ es un subcuerpo de L, tenemos que comprobar que la suma y el producto de dos funciones elementales es otra función elemental, y que para cada función elemental no nula, su opuesta y su inversa son funciones elementales. Sean a y b funciones elementales. Por el lema 1.21 existe una extensión elemental $K \subseteq H$ con $a, b \in H \subseteq L$, y por la definición de función elemental, H es un subcuerpo de $El\,(L,K)$. Como H es un cuerpo, $a+b$, $a\cdot b$, y $-a$ pertenecen a H, y por lo tanto son funciones elementales. Además, si a no es un elemento nulo, $1/a$ también pertenece a H. Por lo tanto, $El\,(L,K)$ es un subcuerpo de L.

Para acabar, como H es un cuerpo diferencial, a' también pertenece a H, y por lo tanto $El\,(L,K)$ es cerrado por derivación. □

Este cuerpo se conoce como el cuerpo de funciones elementales de L sobre K. Para acabar esta sección, veamos dos teoremas que nos dan información sobre la estructura de $El\,(L,K)$.

TEOREMA 1.23. *Sea $K \subseteq L$ una extensión de cuerpos diferenciales. Si a es un elemento de L algebraico sobre $El\,(L,K)$, entonces a pertenece a $El\,(L,K)$.*

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración es análoga a la de la demostración anterior. Si a es un elemento de L algebraico sobre $El\,(L,K)$, y $p(x)$ es su polinomio mínimo, se cumple que los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_m$ de $p(x)$ son funciones elementales sobre K. Entonces, por el lema 1.21, existe una extensión elemental $K \subseteq H$ con $c_0, c_1, \ldots, c_m \in H \subseteq L$.

Como a es algebraico sobre H, la extensión $H \subseteq H(a)$ es algebraica, y la extensión $K \subseteq H(a)$ es elemental. Por lo tanto, como a pertenece a $\in H(a)$, es una función elemental sobre K. □

TEOREMA 1.24. *Sea $K \subseteq L$ una extensión de cuerpos diferenciales. Si a es un elemento de L exponencial (o logarítmico) sobre $El\,(L,K)$, entonces a pertenece a $El\,(L,K)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea a una exponencial (o un logaritmo) de un elemento b de $El\,(L,K)$. Por definición de función elemental, existe una extensión elemental $K \subseteq H$ con $b \in H \subseteq L$.

Ahora, como a es una exponencial (o un logaritmo) de un elemento b de H, la extensión $H \subseteq H(a)$ es exponencial (o logarítmica), y la extensión $K \subseteq H(a)$ es elemental. Por lo tanto, como a pertenece a $H(a)$, es una función elemental sobre K. □

5. El teorema de Liouville

Con las definiciones y herramientas que hemos obtenido hasta ahora, podemos enunciar el resultado principal de este capítulo, que nos proporciona una condición para saber cuándo un elemento de un cuerpo diferencial K tiene primitiva en alguna extensión elemental de K.

TEOREMA (Liouville). *Sea $K \subset L$ una extensión elemental de cuerpos diferenciales, de manera que todos los elementos constantes de L pertenezcan a K, y sea α un elemento de K para el que existe un y de L tal que $y' = \alpha$. Entonces existen $m+1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_m \in K$ y m constantes $c_1, \ldots, c_m \in K$ tales que*

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i}.$$

Este resultado es la herramienta principal que utilizaremos para demostrar que ciertas funciones elementales no admiten primitiva elemental. Como una extensión elemental es una cadena de extensiones simples algebraicas, exponenciales o transcendentes, para simplificar la demostración del teorema demostraremos primero el lema siguiente:

Lema. *Sea $K \subset K(t)$ una extensión de cuerpos diferenciales que cumple que t es un elemento algebraico, logarítmico o exponencial sobre K, y que todos los elementos constantes pertenecen a K. Sea α un elemento de K para el que existen $n+1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_n \in K(t)$ y n constantes $c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que*

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i}.$$

Entonces también existen $m+1$ elementos $a_0, a_1, \ldots, a_m \in K$ y m constantes $k_1, \ldots, k_m \in K$ tales que

$$\alpha = a_0' + \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}.$$

Demostraremos este lema separándolo en tres resultados, según si t es algebraico, logarítmico o exponencial sobre K. Antes de empezar a demostrar estos tres resultados, necesitamos demostrar una propiedad de las derivaciones.

Proposición 1.25. *Sea K un cuerpo diferencial, sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos de K y sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ exponentes enteros. Entonces se cumple que*

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i}\right)'}{\prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i}} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}.$$

Demostración. Comprobaremos que se cumple la igualdad por inducción sobre n. Si $n = 1$ tenemos que

$$\frac{(a_1^{\varepsilon_1})'}{a_1^{\varepsilon_1}} = \frac{\varepsilon_1 \cdot a_1^{\varepsilon_1 - 1} \cdot a_1'}{a_1^{\varepsilon_1}} = \varepsilon_1 \cdot \frac{a_1'}{a_1}.$$

Supongamos ahora que para un n natural se cumple la igualdad

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i}\right)'}{\prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i}} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}$$

y veamos que para $n+1$ también se cumple.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i^{\varepsilon_i}\right)'}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i^{\varepsilon_i}} &= \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i}\right)' \cdot a_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}} + \prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i} \cdot \left(a_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}}\right)'}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i^{\varepsilon_i}} \\
&= \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i}\right)'}{\prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i}} + \frac{\left(a_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}}\right)'}{a_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \frac{a_i'}{a_i} + \varepsilon_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}'}{a_{n+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}
\end{aligned}$$

. □

5.1. Demostración del resultado algebraico.

Empezamos con un recordatorio de la teoría de Galois. Sea $K \subseteq L$ una extensión de cuerpos algebraica, y sea $p(x)$ un polinomio de $K[x]$. Si $p(x)$ factoriza completamente en L, y sus raíces son $t_1, \ldots, t_n$, el cuerpo de escisión de $p(x)$ sobre K es el cuerpo $K(t_1, \ldots, t_n)$. Una extensión $K \subseteq L$ es *normal* si todo polinomio irreducible sobre K con una raíz en L factoriza completamente en L. Es un hecho conocido que una extensión algebraica de cuerpos $K \subseteq L$ es normal y de grado finito si, y solo si, L es el cuerpo de escisión sobre K de algún polinomio $p(x)$ de $K[x]$.

Un polinomio $p(x)$ de $K[x]$ es *separable* si se descompone en su cuerpo de escisión sobre K en factores lineales distintos dos a dos. Si $K \subseteq L$ es una extensión algebraica de cuerpos, un elemento $\alpha \in L$ es *separable sobre* K si su polinomio mínimo sobre K es separable, y $K \subseteq L$ es una *extensión separable* si todos los elementos de L son separables sobre K.

Una *extensión de Galois* es una extensión de cuerpos $K \subseteq L$ algebraica, normal y separable. Para cuerpos de característica 0, todas las extensiones son separables, y toda la teoría se simplifica notablemente.

Si $K \subseteq L$ es una extensión de Galois de grado n, se cumplen las siguientes propiedades:

- Existen exactamente n K-automorfismos diferentes de L. Llamaremos A al conjunto de estos K-automorfismos.
- Para cualquier elemento v de L, se cumple que $\mathrm{N}(v) = \prod_{\sigma \in A} \sigma(v)$ pertenece a K. Llamaremos a este elemento la *norma* de v.
- Para cualquier elemento v de L, se cumple que $\mathrm{Tr}(v) = \sum_{\sigma \in A} \sigma(v)$ pertenece a K. Llamaremos a este elemento la *traza* de v.

Teniendo esto en cuenta, podemos demostrar el resultado algebraico.

Lema 1.26 (Resultado algebraico). *Sea $K \subset K(t)$ una extensión algebraica de cuerpos diferenciales, y sea α un elemento de K para el que existen $n+1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_n \in K(t)$ y n constantes $c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que*

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i}.$$

Entonces también existen $n+1$ elementos $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ y n constantes $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que

$$\alpha = a_0' + \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}.$$

Demostración. Sea $p(x)$ el polinomio mínimo de t sobre K, y sea L el cuerpo de escisión de $p(x)$ sobre K. Según el corolario 1.18, como las derivaciones conmutan con los K-automorfismos, para cualquier K-automorfismo σ se cumple que

$$\alpha = \sigma(v)' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{\sigma(u_i)'}{\sigma(u_i)}.$$

Sea A el conjunto de todos los K-automorfismos de L. Si aplicamos a la igualdad

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i}$$

todos los automorfismos y sumamos las igualdades obtenidas, llegamos a que

$$[L\colon K] \cdot \alpha = \sum_{\sigma \in A} \sigma(v)' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \sum_{\sigma \in A} \frac{\sigma(u_i)'}{\sigma(u_i)}.$$

Utilizando la proposición 1.25, obtenemos que

$$[L : K] \cdot \alpha = \left(\sum_{\sigma \in A} \sigma(v) \right)' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{\left(\prod_{\sigma \in A} \sigma(u_i)\right)'}{\prod_{\sigma \in A} \sigma(u_i)},$$

y por lo tanto que

$$[L : K] \cdot \alpha = \mathrm{Tr}(v)' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{\mathrm{N}(u_i)'}{\mathrm{N}(u_i)}.$$

Ahora, sabemos que la traza de v y las normas de los elementos u_i pertenecen a K. Por otro lado, como $[L : K]$ es un número natural, es constante, y por lo tanto, aislando α obtenemos la expresión

$$\alpha = \left(\frac{\mathrm{Tr}(v)}{[L : K]} \right)' + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{[L : K]} \cdot \frac{\mathrm{N}(u_i)'}{\mathrm{N}(u_i)}.$$

En conclusión, si definimos $a_0 = \mathrm{Tr}(v) / [L : K]$, y para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos $a_i = \mathrm{N}(u_i)$ y $k_i = c_i / [L : K]$ obtenemos que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son elementos de K, que $k_1, \ldots, k_n$ son constantes de K y que

$$\alpha = a_0' + \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}.$$

□

5.2. Valoraciones.

Para demostrar el resultado logarítmico y el resultado exponencial, necesitamos empezar con un recordatorio de la teoria de la divisibilidad en cuerpos de fracciones definidos sobre dominios de factorización única.

Si A es un dominio de factorización única y $p \in A$ es un elemento primo, entonces para todo elemento $a \in A$ no nulo existe un único número natural (puede ser 0) tal que p^n divide a a pero p^{n+1} no divide a a. Este hecho nos permite definir una función para cada elemento primo p de A, conocida como la valoración asociada a p.

Definición. Sea A un dominio de factorización única, y sea p un elemento primo de A. La *valoración asociada a p* es la aplicación

$$\begin{aligned} v_p\colon A &\longrightarrow \mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{+\infty\} \\ a &\rightarrow \begin{cases} \max\{n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \mid p^n \text{ divide a } a\} & \text{si } a\neq 0 \\ +\infty & \text{si } a=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si K es el cuerpo de fracciones de A, todo elemento de K se puede expresar como un cociente entre dos elementos de A, y esto nos permite extender las valoraciones v_p a K.

Definición. Sea A un dominio de factorización única, y sea p un elemento primo de A. Sea K el cuerpo de fracciones de A. La *valoración asociada a p en K* es la aplicación

$$\begin{aligned} v_p\colon K &\longrightarrow \mathbb{Z}\cup\{+\infty\} \\ a/b &\rightarrow v_p(a)-v_p(b). \end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente que estas valoraciones están bien definidas, es decir, que la definición no depende de la fracción representante del elemento de K. Además, también es fácil ver que se cumplen las siguientes propiedades:

- $v_p(a)=+\infty \Longleftrightarrow a=0$.
- $v_p(a\cdot b)=v_p(a)+v_p(b)$.
- $v_p(a+b)\geqslant \min\{v_p(a),v_p(b)\}$.
- Si $v_p(a)\neq v_p(b)$, entonces $v_p(a+b)=\min\{v_p(a),v_p(b)\}$.

Si K es un cuerpo, es un hecho conocido que $K[x]$ es un dominio de factorización única, y que $K(x)$ es su cuerpo de fracciones. Teniendo esto en cuenta, podemos utilizar las propiedades anteriores para demostrar el siguiente lema, que relaciona las valoraciones con las derivaciones en $K(x)$.

LEMA 1.27. *Sea $K\subset K(x)$ una extensión de cuerpos diferenciales, de manera que $K[x]$ sea un subanillo diferencial de $K(x)$, y sea $p(x)\in K[x]$ un polinomio irreducible que no divide a $p'(x)$ en $K[x]$. Si $z(x)$ es un elemento de $K(x)$, se cumplen las siguientes propiedades:*

- *Si $v_p(z(x))=n>0$, entonces $v_p(z'(x))=n-1$.*
- *Si $v_p(z(x))=0$, se cumple que $v_p(z'(x))\geqslant 0$.*
- *Si $v_p(z(x))=n<0$, entonces $v_p(z'(x))=n-1$.*

Esto implica que, en cualquier caso, $v_p(z'(x))\neq -1$.

DEMOSTRACIÓN. Empezamos considerando el caso en el que $v_p(z(x))=n>0$. Si tenemos que $v_p(z(x))=+\infty$, entonces $z(x)=0$, $z'(x)=0$ y $v_p(z(x))=+\infty=+\infty-1$ por convenio.

Supongamos que $z(x)$ es un polinomio de $K[x]$. Podemos expresar $z(x)=p^n(x)\cdot q(x)$, de manera que $v_p(q(x))=0$. Derivando obtenemos $z'(x)=n\cdot p^{n-1}(x)\cdot p'(x)\cdot q(x)+p^n(x)\cdot q'(x)$. Como $p(x)$

no divide a $p'(x)$, tenemos que $v_p\left(n \cdot p^{n-1}(x) \cdot p'(x) \cdot q(x)\right) = n-1$ y que $v_p\left(p^n(x) \cdot q'(x)\right) \geqslant n$. Por lo tanto $v_p\left(z'(x)\right) = n-1$.

Consideremos ahora el caso en el que $z(x)$ no sea un polinomio. Como $v_p(z(x)) = n$, podemos expresar $z(x)$ como un cociente $a(x)/b(x)$, de manera que $v_p(a(x)) = n$ y $v_p(b(x)) = 0$. Como $a(x)$ y $b(x)$ son polinomios, se cumple que $v_p(a'(x)) = n-1$ y que $v_p(b'(x)) \geqslant 0$. Utilizando la regla del cociente tenemos la igualdad

$$z'(x) = \frac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b^2(x)},$$

y obtenemos que $v_p(a'(x) \cdot b(x)) = n-1$, que $v_p(a(x) \cdot b'(x)) \geqslant n$ y que $v_p(z'(x)) = n-1$.

En el caso en el que $v_p(z(x)) = 0$, podemos expresar $z(x)$ como un cociente $a(x)/b(x)$, de manera que $v_p(a(x)) = v_p(b(x)) = 0$. Como antes, en la igualdad

$$z'(x) = \frac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b^2(x)}$$

vemos que el numerador de esta fracción es un polinomio, y por lo tanto tiene valoración no negativa. Como $v_p(b(x)) = 0$, sabemos que $v_p(b^2(x)) = 0$ y que $v_p(z'(x)) \geqslant 0$.

Veamos ahora el caso en el que $v_p(z(x)) = n < 0$. En este caso podemos expresar $z(x)$ como un cociente $a(x)/b(x)$ de manera que $v_p(a(x)) = 0$ y $v_p(b(x)) = m = -n$. De forma análoga a como hemos hecho en el primer paso, derivando obtenemos

$$z'(x) = \frac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b^2(x)},$$

y $v_p(a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)) = m-1$. Ahora $v_p(b^2(x)) = 2m$, y por definición obtenemos que $v_p(z'(x)) = m-1-2m = -m-1 = n-1$.

Para acabar, está claro que hemos comprobado todos los casos, y no existe la posibilidad de que $v_p(z'(x))$ sea -1. □

Utilizando este lema, vamos a demostrar un resultado general para extensiones simples transcendentes, que después adaptaremos en particular para las extensiones simples transcendentes logarítmicas y exponenciales.

LEMA 1.28. *Sea $K \subset K(x)$ una extensión de cuerpos diferenciales que cumple que $K[x]$ es un subanillo diferencial de $K(x)$. Sea α un elemento de $K(x)$ para el que existen $n+1$ elementos $v(x), u_1(x), \ldots, u_n(x) \in K(x)$ y n constantes $c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que*

$$\alpha = v'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'(x)}{u_i(x)}.$$

Entonces existen m polinomios diferentes $p_1(x), \ldots, p_m(x) \in K[x]$, m constantes $k_1, \ldots, k_m \in K$ y n elementos $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que

$$\alpha = v'(x) + \sum_{j=1}^{m} k_j \cdot \frac{p_j'(x)}{p_j(x)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i},$$

y cada polinomio $p_j \in \{p_1(x), \ldots, p_m(x)\}$ es mónico e irreducible. Además, si α pertenece a K, cada polinomio p_j divide a $p_j'(x)$.

Observación. Como veremos, en las extensiones que nos interesarán, la mayoría de los polinomios $p_j(x)$ mónicos e irreducibles no dividirán a $p_j'(x)$, y el segundo sumatorio se simplificará o incluso se anulará.

Demostración. Cada elemento $u_i(x)$ se puede expresar como un producto

$$u_i(x) = a_i \cdot \prod_{s_i=1}^{r_i} p_{i,s_i}^{\varepsilon_{i,s_i}}(x),$$

donde a_i es un elemento de K, cada $p_{i,s_i}(x)$ es un polinomio de $K[x]$ mónico e irreducible, y cada ε_{i,s_i} es un entero no nulo. Utilizando la proposición 1.25 obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\alpha &= v'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'(x)}{u_i(x)} \\
&= v'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{\left(a_i \cdot \prod_{s_i=1}^{r_i} p_{i,s_i}^{\varepsilon_{i,s_i}}(x)\right)'}{a_i \cdot \prod_{s_i=1}^{r_i} p_{i,s_i}^{\varepsilon_{i,s_i}}(x)} \\
&= v'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \left(\frac{a_i'}{a_i} + \sum_{s_i=1}^{r_i} \varepsilon_{i,s_i} \cdot \frac{p_{i,s_i}'(x)}{p_{i,s_i}(x)}\right) \\
&= v'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{s_i=1}^{r_i} c_i \cdot \varepsilon_{i,s_i} \cdot \frac{p_{i,s_i}'(x)}{p_{i,s_i}(x)}.
\end{aligned}$$

Si alguno de los polinomios $p_{i,s_i}(x)$ está repetido, teniendo en cuenta que cada ε_{i,s_i} es una constante de K y que el conjunto de las constantes de K es cerrado por sumas y productos, podemos sacar factor común, y podemos suponer que todos los polinomios p_j del segundo sumatorio son diferentes. Así, obtenemos la expresión

$$\alpha = v'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i} + \sum_{j=1}^{m} k_j \cdot \frac{p_j'(x)}{p_j(x)},$$

donde todos los polinomios $p_j(x)$ son mónicos, irreducibles y diferentes entre sí, y además todas las constantes k_j pertenecen a K y no son nulas.

Para acabar, queremos ver que si α pertenece a K, cada uno de los polinomios $p_j(x)$ divide a $p_j'(x)$. En efecto, si alguno de los polinomios $p_j(x)$ no dividiese a $p_j'(x)$, aislando $v'(x)$ en la igualdad obtenida tendriamos que

$$v'(x) = \alpha - \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i} - \sum_{j=1}^{m} k_j \cdot \frac{p_j'(x)}{p_j(x)},$$

y la valoración $v_{p_j}(v'(x))$ sería -1. Esto nos lleva a una contradicción con el lema 1.27. □

5.3. Demostración del resultado logarítmico.

A partir del resultado general que acabamos de probar, vamos a demostrar ahora el resultado logarítmico. La clave de la demostración está en el detalle de que los polinomios $p_j(x)$ de la expresión de α dividen a $p_j'(x)$. Por eso, empezamos con un lema que nos dará condiciones sobre qué polinomios $p(x) \in K[x]$ pueden dividir a $p'(x)$ si la extensión es logarítmica.

LEMA 1.29. *Sea $K \subset K(x)$ una extensión de cuerpos diferenciales tal que todas las constantes de $K(x)$ pertenecen a K, y tal que x es logarítmico sobre K. Entonces $K[x]$ es un subanillo diferencial de $K(x)$. Además, dado cualquier polinomio $p(x) \in K[x]$ de grado $n > 0$, si el coeficiente director de $p(x)$ es constante entonces el grado de $p'(x)$ es $n-1$, y si el coeficiente director de $p(x)$ no es constante entonces el grado de $p'(x)$ es n. Por último, si $p(x)$ es un polinomio mónico irreducible, entonces no divide a $p'(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si x es logarítmico sobre K, existe un elemento $a \in K$ tal que $x' = a'/a$, y por lo tanto $x' \in K$, y por el teorema 1.3 $K[x]$ es un subanillo diferencial de $K(x)$. Sea ahora $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i$ un polinomio cualquiera de $K[x]$. Según el corolario 1.11, tenemos que

$$p'(x) = \bar{D}_0(p(x)) + \frac{a'}{a} \cdot \bar{D}_1(p(x)).$$

Por lo tanto, si c_n no es constante, c_n' es diferente de 0 y $p'(x)$ tiene grado n. Si c_n es constante, entonces $p'(x)$ tiene grado menor o igual que $n-1$, y el coeficiente del término de grado $n-1$ es $c_{n-1}' + \frac{a'}{a} \cdot n \cdot a_n$. Teniendo en cuenta las igualdades

$$c_{n-1}' + \frac{a'}{a} \cdot n \cdot a_n = c_{n-1}' + x' \cdot n \cdot a_n = (c_{n-1} + n \cdot a_n \cdot x)',$$

vemos que este coeficiente es diferente de 0, porque es la derivada del elemento $c_{n-1} + n \cdot a_n \cdot x$, que no pertenece a K y por hipótesis no es constante.

Para acabar, si un polinomio $p(x)$ es irreducible, tiene grado n mayor 0, y si es mónico su coeficiente director es constante. Por lo tanto el polinomio $p'(x)$ tiene grado $n-1$, y está claro que $p(x)$ no divide a $p'(x)$. □

Teniendo en cuenta que ningún polinomio $p(x)$ mónico irreducible puede dividir a $p'(x)$, podemos ahora demostrar el resultado logarítmico.

LEMA 1.30 (Resultado logarítmico). *Sea $K \subset K(t)$ una extensión transcendente de cuerpos diferenciales que cumple que t es un elemento logarítmico sobre K, y que todos los elementos constantes de $K(t)$ pertenecen a K. Sea α un elemento de K para el que existen $n+1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_n \in K(t)$ y n constantes $c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que*

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i}.$$

Entonces también existen $n+2$ elementos $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1} \in K$ y otra constante $c_{n+1} \in K$ tales que

$$\alpha = a_0' + \sum_{i=1}^{n+1} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Δ_t la derivación definida en $K(t)$. Como t es transcendente sobre K, existe un K-isomorfismo $\varphi\colon K(t) \to K(x)$ que cumple que $\varphi(t) = x$, y utilizando el teorema 1.7 podemos definir una derivación Δ_x en $K(x)$ como $\Delta_x = \varphi \circ \Delta_t \circ \varphi^{-1}$. Es fácil ver que con esta derivación $K \subset K(x)$ es una extensión de cuerpos diferenciales, que x es un elemento logarítmico sobre K, que todos los elementos constantes de $K(x)$ pertenecen a K, y que si definimos los elementos $v(x) = \varphi(v)$ y $u_i(x) = \varphi(u_i)$ para cada u_i, entonces $v(x), u_1(x), \ldots, u_n(x) \in K(x)$ y se cumple que

$$\alpha = v'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'(x)}{u_i(x)}.$$

Como se cumplen todas las hipótesis, según el lema 1.28 existen m polinomios mónicos irreducibles diferentes $p_1(x), \ldots, p_m(x) \in K[x]$, m constantes $k_1, \ldots, k_m \in K$ y n elementos $a_1, \ldots, a_n \in K$ de manera que

$$\alpha = v'(x) + \sum_{j=1}^{m} k_j \cdot \frac{p_j'(x)}{p_j(x)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}.$$

Además, sabemos que cada polinomio p_j divide a $p_j'(x)$.

Por otro lado, según el lema 1.29, ningún polinomio mónico irreducible $p(x) \in K[x]$ divide a $p'(x)$, y esto demuestra que el segundo sumatorio no tiene ningún término. Por lo tanto

$$\alpha = v'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}.$$

Aislando $v'(x)$ en la expresión anterior obtenemos la igualdad

$$v'(x) = \alpha - \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i},$$

que implica que $v'(x)$ pertenece a K. En términos de valoraciones, para cualquier polinomio irreducible $p(x)$ de $K[x]$ se cumple que $v_p(v'(x)) = 0$, y según el lema 1.27, $v_p(v(x)) = 0$ o $v_p(v(x)) = 1$. Esto demuestra que $v(x)$ es un polinomio de $K[x]$. Ahora, según el lema 1.29, $v(x)$ tiene grado 0 o 1, y en cualquiera de los dos casos es de la forma $v(x) = k \cdot x + a_0$, donde c_{n+1} es un elemento constante de K, posiblemente 0, y $v'(x) = c_{n+1} \cdot x' + a_0'$. Para acabar, como x es un elemento logarítmico sobre K, existe un elemento $a_{n+1} \in K$ tal que $x' = \dfrac{a_{n+1}'}{a_{n+1}}$, y sustituyendo en la expresión de α obtenemos

$$\alpha = c_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}'}{a_{n+1}} + a_0' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i},$$

como queriamos demostrar. □

5.4. Demostración del resultado exponencial.

Como en el resultado logarítmico, vamos a empezar demostrando un lema que nos da condiciones sobre qué polinomios $p(x)$ de $K[x]$ pueden dividir a $p'(x)$ si la extensión es exponencial.

LEMA 1.31. *Sea $K \subset K(x)$ una extensión de cuerpos diferenciales tal que todas las constantes de $K(x)$ pertenecen a K, y tal que x es exponencial sobre K. Entonces $K[x]$ es un subanillo diferencial de $K(x)$. Además, dado cualquier polinomio $p(x)$ de $K[x]$ de grado n, el grado de $p'(x)$ es también n, y $p(x)$ divide a $p'(x)$ si, y solo si, $p(x)$ es un monomio.*

DEMOSTRACIÓN. Si x es exponencial sobre K, entonces existe un elemento a de K para el que $x'/x = a'$. Aislando x' obtenemos que $x' = a \cdot x$ pertenece a $K[x]$, y según el teorema 1.3, $K[x]$ es un subanillo diferencial de $K(x)$. Sea ahora $p(x) = c_n \cdot x^n$ un monomio cualquiera de $K[x]$. Derivando, obtenemos que

$$(c_n \cdot x^n)' = c_n' \cdot x^n + c_n \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot x' = c_n' \cdot x^n + c_n \cdot n \cdot a \cdot x^n = (c_n' + c_n \cdot n \cdot a) \cdot x^n = k_n \cdot x^n.$$

El coeficiente k_n no puede ser 0, porque si no $c_n \cdot x^n$ sería constante, pero no pertenece a K. Por lo tanto, $(c_n \cdot x^n)'$ es un monomio de grado n, y esto demuestra que la derivada de cualquier polinomio $p(x)$ de grado n es un polinomio $p'(x)$ de grado n, y que si $p(x)$ es un monomio, entonces divide a $p'(x)$.

Ahora queremos comprobar que si $p(x)$ no es un monomio, entonces no divide a $p'(x)$. Si $p(x)$ no es un monomio, entonces tiene, como mínimo, dos monomios de grados diferentes, con coeficientes no nulos. Si n y m son los dos mayores naturales tales que los coeficientes c_n y c_m de $p(x)$ son no nulos, tenemos la igualdad

$$p(x) = c_n \cdot x^n + c_m \cdot x^m + \sum_{i=0}^{m-1} c_i \cdot x^i.$$

Derivando, obtenemos que

$$p'(x) = k_n \cdot x^n + k_m \cdot x^m + \sum_{i=0}^{m-1} k_i \cdot x^i,$$

con $k_i = c_i' + c_i \cdot i \cdot a$ y con $k_n, k_m \neq 0$. Para que $p(x)$ dividiese a $p'(x)$ sería necesario que

$$\frac{k_n \cdot x^n}{c_n \cdot x^n} = \frac{k_m \cdot x^m}{c_m \cdot x^m}.$$

Utilizando la proposición 1.25, vamos a ver que esto nos lleva a una contradicción.

$$\begin{aligned}
\frac{k_n \cdot x^n}{c_n \cdot x^n} = \frac{k_m \cdot x^m}{c.x^m} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{(c_n \cdot x^n)'}{c_n \cdot x^n} = \frac{(c_m \cdot x^m)'}{c_m \cdot x^m} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{(c_n \cdot x^n)'}{c_n \cdot x^n} - \frac{(c_m \cdot x^m)'}{c_m \cdot x^m} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{\left(c_n \cdot x^n \cdot c_m^{-1} \cdot x^{-m}\right)'}{c_n \cdot x^n \cdot c_m^{-1} \cdot x^{-m}} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \left(c_n \cdot x^n \cdot c_m^{-1} \cdot x^{-m}\right)' = 0,
\end{aligned}$$

pero como $m < n$, el elemento $c_n \cdot x^n \cdot c_m^{-1} \cdot x^{-m}$ no pertenece a K, y no puede ser constante. Esta contradicción demuestra que un polinomio $p(x)$ divide a $p'(x)$ si, y solo si, es un monomio. $\square$

Además del criterio de que $p(x)$ divide a $p'(x)$ si, y solo si, $p(x)$ es un monomio, para demostrar el resultado exponencial necesitamos hacer un par de observaciones sobre el anillo $K[x, 1/x]$.

LEMA 1.32. *Si K es un cuerpo, el anillo $K[x, 1/x]$ es un espacio vectorial sobre K que tiene por base el conjunto $B = \{x^\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{Z}\}$, y está formado por los elementos $v(x)$ de $K(x)$ que cumplen que $v_p(v(x)) \geq 0$ para todo polinomio mónico irreducible $p(x) \neq x$.*

DEMOSTRACIÓN. Como K es un cuerpo que está contenido en $K[x, 1/x]$, está claro que $K[x, 1/x]$ es un K-espacio vectorial. Veamos que $B = \{x^\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{Z}\}$ es una base.

Si $v(x)$ es un elemento de $K[x, 1/x]$, entonces es un polinomio en las variables x y $1/x$, y como $(1/x) \cdot x = 1$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \cdot v(x)$ es un polinomio. Por lo tanto

$$x^n \cdot v(x) = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell \cdot x^\ell,$$

y de aquí se deduce que $v(x) = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell \cdot x^{\ell-n}$. En conclusión, B es un conjunto generador de $K[x, 1/x]$. Que B es un conjunto linealmente independiente está claro, ya que si

$$\sum_{\ell=s_1}^{s_2} b_\ell \cdot x^\ell = 0,$$

con $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ y $s_1 \leq s_2$, entonces claramente todos los coeficientes b_ℓ son iguales a 0. Con esto, hemos demostrado que B es base de $K[x, 1/x]$.

Para acabar, como cualquier elemento $v(x)$ de $K[x, 1/x]$ se puede expresar como el producto de un polinomio cualquiera y un elemento x^ε, con $\varepsilon \in \mathbb{Z}$, esto demuestra que para cualquier polinomio $p(x) \neq x$ mónico e irreducible se cumple que $v_p(v(x)) \geq 0$. Recíprocamente, si para cualquier polinomio $p(x) \neq x$ mónico e irreducible se cumple que $v_p(v(x)) \geq 0$, entonces $v(x)$ se puede expresar como el producto de un polinomio por un elemento x^ε, con $\varepsilon \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto se puede expresar en la base B y pertenece a $K[x, 1/x]$. $\square$

Utilizando los dos lemas que acabamos de demostrar, estamos en condiciones de demostrar el resultado exponencial.

LEMA 1.33 (Resultado exponencial). *Sea $K \subset K(t)$ una extensión transcendente de cuerpos diferenciales que cumple que t es un elemento exponencial sobre K, y que todos los elementos constantes de $K(t)$ pertenecen a K. Sea α un elemento de K para el que existen $n+1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_n \in K(t)$ y n constantes $c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que*

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i}.$$

Entonces también existen $n+1$ elementos $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que

$$\alpha = a_0' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}.$$

Demostración. La demostración de este lema es similar a la del lema 1.30. Sea Δ_t la derivación definida en $K(t)$. Como t es transcendente sobre K, existe un K-isomorfismo $\varphi\colon K(t) \to K(x)$ que cumple que $\varphi(t) = x$, y utilizando el teorema 1.7 podemos definir una derivación Δ_x en $K(x)$ como $\Delta_x = \varphi \circ \Delta_t \circ \varphi^{-1}$. Es fácil ver que, con esta derivación, $K \subset K(x)$ es una extensión de cuerpos diferenciales, que x es un elemento exponencial sobre K, que todos los elementos constantes de $K(x)$ pertenecen a K, y que si definimos $v(x) = \varphi(v)$ y $u_i(x) = \varphi(u_i)$ para cada u_i, entonces $v(x), u_1(x), \ldots, u_n(x) \in K(x)$ y

$$\alpha = v'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'(x)}{u_i(x)}.$$

Como se cumplen todas las hipótesis, según el lema 1.28 existen m polinomios mónicos irreducibles diferentes $p_1(x), \ldots, p_m(x) \in K[x]$, m constantes $k_1, \ldots, k_m \in K$ y n elementos $a_1, \ldots, a_n \in K$ de manera que

$$\alpha = v'(x) + \sum_{j=1}^{m} k_j \cdot \frac{p_j'(x)}{p_j(x)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}.$$

Además, sabemos que cada polinomio p_j divide a $p_j'(x)$.

Ahora, según el lema 1.31, el único polinomio mónico irreducible $p(x)$ de $K[x]$ que divide a $p'(x)$ es $p(x) = x$. Esto demuestra que el segundo sumatorio o bien no tiene ningún término, o bien se reduce a $k_1 \cdot x'/x$. Además, como x es transcendente sobre K, existe un elemento $a \in K$ tal que $x'/x = a'$. Por lo tanto,

$$\alpha = v'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i} + k_1 \cdot a',$$

donde k_1 es una constante de K, que puede ser 0.

Aislando $v'(x)$ en la expresión anterior obtenemos

$$v'(x) = \alpha - \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i} - k_1 \cdot a',$$

y esto implica que $v'(x)$ pertenece a K. En términos de valoraciones, para cualquier polinomio irreducible $p(x)$ de $K[x]$ se cumple que $v_p(v'(x)) = 0$ y, por el lema 1.27, si $p(x)$ es diferente de x, entonces $v_p(v(x)) = 0$ o $v_p(v(x)) = 1$.

Esto demuestra que $v(x) \in K[x, 1/x]$ y, según el lema 1.32, podemos expresar

$$v(x) = \sum_{\ell=s_1}^{s_2} b_\ell \cdot x^\ell,$$

con $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$, y los coeficientes $b_\ell \in K$. Derivando a ambos lados de la igualdad, obtenemos que

$$v'(x) = \sum_{\ell=s_1}^{s_2} b'_\ell \cdot x^\ell + b_\ell \cdot \ell \cdot x^{\ell-1} \cdot x' = \sum_{\ell=s_1}^{s_2} (b'_\ell + \ell \cdot b_\ell \cdot a) \cdot x^\ell.$$

Como $v'(x)$ pertenece a K, se cumple todos los coeficiendes de los términos del sumatorio son 0, excepto tal vez el correspondiente a $\ell = 0$, y por lo tanto $v'(x) = b'_0$. Esto demuestra que $(v(x) - b_0)' = 0$, y por lo tanto $v(x) - b_0$ es un elemento constante de $K(x)$. Como los elementos constantes de $K(x)$ pertenecen a K, llegamos a la conclusión de que $v(x)$ pertenece a K.

Si definimos $a_0 = b_0 + k_1 \cdot a$, obtenemos que $a'_0 = b' + k_1 \cdot a' = v'(x) + k_1 \cdot a'$ y por lo tanto, deducimos que

$$\alpha = a'_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{a'_i}{a_i},$$

como queríamos demostrar. □

5.5. Demostración del teorema de Liouville.

Como ya hemos dicho, los lemas 1.26, 1.30 y 1.33 se resumen en el lema siguiente, que podemos dar por demostrado.

LEMA 1.34. *Sea $K \subset K(t)$ una extensión de cuerpos diferenciales que cumple que t es un elemento algebraico, logarítmico o exponencial sobre K, y que todos los elementos constantes pertenecen a K. Sea α un elemento de K para el que existen $n+1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_n \in K(t)$ y n constantes $c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que*

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u'_i}{u_i}.$$

Entonces también existen $m+1$ elementos $a_0, a_1, \ldots, a_m \in K$ y m constantes $k_1, \ldots, k_m \in K$ tales que

$$\alpha = a'_0 + \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \frac{a'_i}{a_i}.$$

Con este lema, podemos ahora demostrar el teorema de Liouville.

TEOREMA 1.35 (Liouville). *Sea $K \subset L$ una extensión elemental de cuerpos diferenciales, de manera que todos los elementos constantes de L pertenezcan a K, y sea α un elemento de K para el que existe un y de L tal que $y' = \alpha$. Entonces existen $m+1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_m \in K$ y m constantes $c_1, \ldots, c_m \in K$ tales que*

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \frac{u'_i}{u_i}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $K \subset L$ es una extensión elemental de cuerpos diferenciales, por definición existe una cadena elemental $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_\ell = L$.

Demostraremos el teorema de Liouville por inducción sobre la longitud ℓ de la cadena. Si $\ell = 1$, tenemos que $K \subset K_1$ es una extensión de cuerpos diferenciales que cumple que todos los elementos constantes pertenecen a K, y que $K_1 = K(t_1)$, con t_1 algebraico, exponencial o logarítmico sobre K. Como $\alpha = y'$ para algún elemento $y \in K(t_1)$, se cumplen las hipótesis del lema 1.34, y por lo tanto existen $m_1 + 1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_{m_1} \in K$ y m_1 constantes $c_1, \ldots, c_{m_1} \in K$ tales que

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{m_1} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i}.$$

Comprobemos ahora el paso de inducción. Supongamos que para cualquier cadena elemental de longitud ℓ, $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_\ell = L$, que cumple que todas las constantes de L pertenecen a K, si α es un elemento de K, e y es un elemento de L tal que $y' = \alpha$, entonces existen $m_\ell + 1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_{m\ell} \in K$ y m_ℓ constantes $c_1, \ldots, c_{m_\ell} \in K$ tales que

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{m_\ell} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i}.$$

Queremos ver que para las cadenas de longitud $\ell + 1$ esto también pasa.

Sea $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_\ell \subseteq K_{\ell+1} = L$ una cadena elemental de longitud $\ell + 1$ que cumple que todas las constantes de L pertenecen a K. Sea α un elemento de K para el que existe un y de L tal que $y' = \alpha$. Entonces tanto α como todas las constantes pertenecen también a K_1, y la cadena $K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_\ell \subseteq K_{\ell+1} = L$ es una cadena elemental de longitud ℓ. Por hipótesis de inducción, existen $m_\ell + 1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_{m_\ell} \in K_1$ y m_ℓ constantes $c_1, \ldots, c_{m_\ell} \in K_1$ tales que

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{m_\ell} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i}.$$

Como $K_1 = K(t_1)$, con t_1 algebraico, exponencial o logarítmico sobre K, podemos aplicar el lema 1.34, y por lo tanto existen $m_{\ell+1} + 1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_{\ell+1} \in K$ y $m_{\ell+1}$ constantes $c_1, \ldots, c_{\ell+1} \in K$ tales que

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{m_{\ell+1}} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i}.$$

Con esto, hemos visto que se cumple el paso de inducción, y por lo tanto el teorema de Liouville queda demostrado.

$\square$

Capítulo 2
Funciones sin primitiva elemental

1. Funciones elementales complejas

En el capítulo anterior, hemos desarrollado una teoría algebraica que nos ha permitido definir qué son las funciones elementales y encontrar las primeras propiedades básicas. Nuestro objetivo principal es trabajar con funciones de variable real, pero llegaremos a ellas a través de funciones de variable compleja, así que empezamos haciendo un recordatorio de los resultados básicos de análisis complejo.

Diremos que Ω es un *dominio* de $\mathbb{C}$ si es un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$. Una función $f(z)$ *holomorfa* en un dominio Ω es una función definida en Ω, derivable en sentido complejo. Denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de funciones holomorfas sobre Ω.

El resultado principal que utilizaremos acerca de funciones holomorfas es el principio de prolongación analítica, que afirma que si tenemos dos funciones $f(z)$ y $g(z)$ holomorfas sobre un dominio Ω, y que toman los mismos valores sobre un subconjunto $S \subseteq \Omega$ con un punto de acumulación en Ω, entonces son iguales.

La suma y el producto de funciones holomorfas sobre un dominio Ω da como resultado funciones holomorfas sobre Ω, y esto implica que el conjunto $\mathcal{H}(\Omega)$ tiene estructura de anillo con la suma y el producto habituales. Además, como consecuencia del principio de prolongación analítica, el producto de dos funciones holomorfas no nulas es una función holomorfa no nula, y por lo tanto $\mathcal{H}(\Omega)$ es un dominio íntegro.

El cuerpo de fracciones de $\mathcal{H}(\Omega)$, al que denotaremos como $\mathcal{M}(\Omega)$, está formado por cocientes $f(z)/g(z)$ de funciones holomorfas tales que $g(z)$ no es la función nula. Estos cocientes son las funciones *meromorfas*. A pesar de que $g(z)$ no sea la función nula, puede anularse en un conjunto discreto de puntos, y por lo tanto las funciones meromorfas están definidas en los dominios Ω, salvo posiblemente en un conjunto discreto de puntos, llamados *polos*. A pesar de eso, si tenemos una función meromorfa $f(z)/g(z)$ definida sobre un dominio Ω, siempre podemos restringirnos a un dominio $\Omega_2 = \{z \in \Omega \mid g(z) \neq 0\} \subseteq \Omega$ en el que la función sea holomorfa.

Sobre cada dominio Ω de $\mathbb{C}$, las funciones meromorfas $\mathcal{M}(\Omega)$ forman un cuerpo diferencial de característica 0 con la derivación habitual de funciones de variable compleja. Por abuso de notación, cuando pensemos en una función $f(z)$ como un elemento del cuerpo diferencial $\mathcal{M}(\Omega)$ la denotaremos simplemente como f.

Como Ω es conexo, el subcuerpo de funciones constantes de $\mathcal{M}(\Omega)$ es el conjunto formado por las funciones constantes en el sentido habitual, y se puede identificar con $\mathbb{C}$. El cuerpo $\mathbb{C}(z)$ formado por las funciones racionales es un subcuerpo de $\mathcal{M}(\Omega)$ para cualquier dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, y dado que $z' = 1 \in \mathbb{C}(z)$, es un subcuerpo diferencial. Tomamos este subcuerpo diferencial como cuerpo base para definir las funciones elementales sobre Ω.

Definición. Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$. Una función *elemental sobre* Ω es una función meromorfa sobre Ω que pertenece a $El(\mathcal{M}(\Omega), \mathbb{C}(z))$.

Como ya hemos visto, las funciones elementales forman un cuerpo, lo que significa que la suma, la resta, la multiplicación y la división de funciones elementales da como resultado nuevas funciones elementales. La composición de funciones elementales no es, en general, elemental, ya que la composición de funciones meromorfas no es necesariamente una función meromorfa. Pese a esto, la composición de una función meromorfa con una función holomorfa no constante sí que es una función meromorfa, y si ambas son elementales la composición será elemental, como veremos a continuación. Teniendo esto en cuenta, si partimos de funciones elementales, podremos construir nuevas funciones elementales mediante operaciones algebraicas y composiciones.

LEMA 2.1. *Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios de $\mathbb{C}$, sea $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ una función holomorfa no constante, y sea $g\colon \Omega_2 \to \mathbb{C}$ una función meromorfa. Entonces $g \circ f\colon \Omega_1 \to \mathbb{C}$ es una función meromorfa.*

DEMOSTRACIÓN. Como g es una función meromorfa, es un cociente a/b de funciones holomorfas, y $g \circ f = (a \circ f)/(b \circ f)$. Si b fuese una función constante, g sería una función holomorfa, y $g \circ f$ también, porque la composición de funciones holomorfas siempre es una función holomorfa. Si b no es una función constante, como la composición de funciones holomorfas no constantes es una función holomorfa no constante, $b \circ f$ tampoco será constante, y en concreto $b \circ f$ no será la función nula. Por lo tanto, $g \circ f$ está bien definida, es un cociente de funciones holomorfas, y en conclusión es meromorfa. $\square$

Como consecuencia del lema anterior, una aplicación holomorfa no constante $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ induce una aplicación $\hat{f}\colon \mathcal{M}(\Omega_2) \to \mathcal{M}(\Omega_1)$ definida por $\hat{f}(g) = g \circ f$. La aplicación $\hat{f}$ es un monomorfismo de cuerpos, ya que si g y h son funciones de $\mathcal{M}(\Omega_2)$, entonces

- $\hat{f}(g + h) = (g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f = \hat{f}(g) + \hat{f}(h)$,
- $\hat{f}(g \cdot h) = (g \cdot h) \circ f = (g \circ f) \cdot (h \circ f) = \hat{f}(g) \cdot \hat{f}(h)$,

y todos los morfismos de cuerpos son inyectivos. Podemos demostrar ahora que la composición de una función elemental con una función elemental holomorfa no constante es una función elemental.

TEOREMA 2.2. *Sean Ω_1 y Ω_2 dominios de $\mathbb{C}$, sea $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ una función elemental holomorfa no constante, y sea $g\colon \Omega_2 \to \mathbb{C}$ una función elemental. Entonces $g \circ f$ es elemental.*

DEMOSTRACIÓN. Como g es elemental, existe una cadena elemental

$$\mathbb{C}(z) = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n, \text{ con } g \in K_n \subseteq \mathcal{M}(\Omega_2).$$

Si para todo $i = 0, \ldots, n$ definimos $L_i = \hat{f}(K_i)$, entonces cada L_i es un cuerpo isomorfo a K_i, y obtenemos la cadena

$$\hat{f}(\mathbb{C}(z)) = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \ldots \subseteq L_n, \text{ con } \hat{f}(g) = g \circ f \in L_n \subseteq \mathcal{M}(\Omega_1).$$

Veamos que esta cadena es elemental.

Para todo $i = 0, \ldots, n-1$ se cumple que $K_{i+1} = K_i(t_{i+1})$, con t_{i+1} algebraica, exponencial o logarítmica sobre K_i. Como $\hat{f}$ es un isomorfismo entre los cuerpos K_i y los cuerpos L_i, sabemos también que $L_{i+1} = L_i\left(\hat{f}(t_{i+1})\right)$. Además, si t_{i+1} es algebraica sobre K_i, entonces $\hat{f}(t_{i+1})$ es algebraica sobre L_i.

Si t_{i+1} es una función exponencial sobre K_i, existe una función s de K_i tal que $t'_{i+1}/t_{i+1} = s'$. Aplicando $\hat{f}$ a ambos lados de la igualdad y multiplicando por f', obtenemos que

$$\frac{\hat{f}\left(t'_{i+1}\right) \cdot f'}{\hat{f}(t_{i+1})} = \hat{f}(s') \cdot f',$$

o equivalentemente,

$$\frac{\left(t'_{i+1} \circ f\right) \cdot f'}{t_{i+1} \circ f} = (s' \circ f) \cdot f'.$$

Utilizando la regla de la cadena, llegamos a la igualdad

$$\frac{(t_{i+1} \circ f)'}{t_{i+1} \circ f} = (s \circ f)',$$

o equivalentemente

$$\frac{\left(\hat{f}(t_{i+1})\right)'}{\hat{f}(t_{i+1})} = \left(\hat{f}(s)\right)'.$$

Como $\hat{f}(s)$ es un elemento de L_i, esto demuestra que $\hat{f}(t_{i+1})$ es una función exponencial sobre L_i.

Análogamente, si t_{i+1} es una función logarítmica sobre K_i, entonces existe una función $s \in K_i$ tal que $t'_{i+1} = s'/s$. Aplicando $\hat{f}$ y multiplicando por f', obtenemos

$$\hat{f}\left(t'_{i+1}\right) \cdot f' = \frac{\hat{f}(s') \cdot f'}{\hat{f}(s)},$$

y como antes, utilizando la regla de la cadena llegamos a que

$$\left(\hat{f}(t_{i+1})\right)' = \frac{\left(\hat{f}(s)\right)'}{\hat{f}(s)}.$$

Como $\hat{f}(s)$ es un elemento de L_i, hemos demostrado que $\hat{f}(t_{i+1})$ es una función logarítmica sobre L_i.

Con esto, hemos demostrado que la cadena

$$\hat{f}(\mathbb{C}(z)) = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \ldots \subseteq L_n$$

es elemental, y como $g \circ f \in L_n \subseteq \mathcal{M}(\Omega_1)$, queda demostrado que $g \circ f \in El\left(\mathcal{M}(\Omega_1), \hat{f}(\mathbb{C}(z))\right)$.

Si g es una función constante, entonces $g \circ f = g|_{\Omega_1}$, y por lo tanto ambas se identifican con el mismo elemento constante de $\mathbb{C}$. Esto significa que $\hat{f}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. De esta igualdad, deducimos que $\hat{f}(\mathbb{C}(z)) = \mathbb{C}\left(\hat{f}(z)\right) = \mathbb{C}(f)$. Por lo tanto, $g \circ f$ pertenece a $El(\mathcal{M}(\Omega_1), \mathbb{C}(f))$, y como f pertenece a $El(\mathcal{M}(\Omega_1), \mathbb{C}(z))$, obtenemos que $g \circ f$ pertenece a $El(\mathcal{M}(\Omega_1), \mathbb{C}(z))$, y en conclusión, es elemental. □

Destacamos un caso particular del teorema anterior. Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ son dos dominios de $\mathbb{C}$, la aplicación identidad $Id\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ definida por $Id(z) = z$ es una función elemental holomorfa y, por lo tanto, para cada función g elemental sobre Ω_2, la aplicación $g|_{\Omega_1} = g \circ Id$ es una función elemental sobre Ω_1.

2. Funciones elementales reales

A partir de la definición de las funciones elementales complejas, podemos ahora dar una definición de funciones elementales reales, y a continuación demostrar que todas las funciones habituales son elementales. Por funciones habituales entendemos las funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas, trigonométricas... y todas las que podamos obtener mediante éstas utilizando operaciones algebraicas y composiciones.

A lo largo de esta sección, para simplificar la exposición seguiremos con el abuso de notación de denotar a las funciones $f(x)$ simplemente como f, siempre que no necesitemos referirnos a funciones en concreto.

Definición. Una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es *elemental* si es continua y existe un dominio Ω de $\mathbb{C}$ tal que $[a,b] \subset \Omega$ y f se extiende a una función elemental en Ω.

Por el principio de extensión analítica, la extensión de f a Ω es única, y podemos referirnos a esta extensión como f cuando esto no cause ningún malentendido.

Por definición, toda función f elemental sobre un intervalo $[a,b]$ se extiende a una función definida sobre un dominio Ω, donde es elemental en el sentido complejo, y por lo tanto, meromorfa. Como f es continua sobre $[a,b]$, no tiene polos en $[a,b]$, y como las funciones meromorfas tienen los polos aislados, podemos encontrar un dominio Ω_2, posiblemente más pequeño que Ω, donde f es holomorfa. En el siguiente lema demostraremos que si tenemos una cantidad finita de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ elementales sobre $[a,b]$, podemos encontrar un dominio común Ω donde todas ellas se extienden a funciones elementales holomorfas.

LEMA 2.3. *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones reales elementales en un intervalo $[a,b]$. Entonces, existe un dominio Ω de $\mathbb{C}$ que contiene el intervalo $[a,b]$, donde todas las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se extienden a funciones elementales holomorfas.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada una de las funciones f_i existe un dominio Ω_i que contiene a $[a,b]$ y donde f_i se extiende a una función elemental holomorfa. Para cada punto $x \in [a,b]$y cada dominio Ω_i existe un disco abierto $D_{x,i}$ centrado en x y contenido en Ω_i. Si definimos

$$D_x = \bigcap_{i=1}^{n} D_{i,x},$$

cada D_x es un disco abierto centrado en x e incluido en todos los discos $D_{i,x}$. Si definimos ahora

$$\Omega = \bigcup_{x\in[a,b]} D_x$$

obtenemos que Ω es un dominio de $\mathbb{C}$ y que, para cada $i = 1, \ldots, n$, está contenido en Ω_i. Esto demuestra que todas las funciones f_i son elementales y holomorfas sobre Ω. □

Con la ayuda de este lema, en los siguientes teoremas demostraremos que todas las funciones con las que trabajamos habitualmente son elementales. Empezamos demostrando que el conjunto de funciones elementales sobre un intervalo $[a, b]$ es cerrado por sumas y productos, y que si f es una función elemental que no se anula en ningún punto de $[a, b]$, entonces $1/f$ es una función elemental en $[a, b]$.

Teorema 2.4. *El conjunto de funciones reales elementales sobre un intervalo $[a, b]$ tiene estructura de anillo, y los elementos invertibles son las funciones que no se anulan en ningún punto. Es decir, que si f y g son dos funciones elementales sobre $[a, b]$, entonces $f + g$ y $f \cdot g$ son elementales sobre $[a, b]$, y si f no se anula en ningún punto, también $1/f$ es una función elemental sobre $[a, b]$.*

Demostración. Si f y g son funciones elementales sobre $[a, b]$, por el lema 2.3 existe un dominio Ω complejo que contiene a $[a, b]$ donde f y g se extienden a funciones elementales. Como las funciones elementales complejas tienen estructura de cuerpo, $f + g$ y $f \cdot g$ son elementales en Ω, y como son continuas en $[a, b]$, son también elementales en $[a, b]$. Además, si f no es la función nula, $1/f$ también es elemental en Ω, y para que sea elemental sobre $[a, b]$ es condición necesaria y suficiente que sea continua, es decir, que f no se anule en ningún punto de $[a, b]$. □

A diferencia de las funciones meromorfas, las funciones reales continuas se pueden componer siempre, y la composición es una aplicación continua. Veamos que la composición de funciones elementales reales es una función elemental real.

Teorema 2.5. *Si $f\colon [a, b] \to [c, d]$ y $g\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ son funciones elementales, entonces $g \circ f$ es una función elemental.*

Demostración. La idea para demostrar este teorema es muy similar a la utilizada para demostrar el lema 2.3. Para empezar, si f es una función constante, entonces $g \circ f$ es una función constante, y por lo tanto elemental. Supongamos ahora que f no es constante.

Como f y g son elementales sobre $[a, b]$ y $[c, d]$, existe un dominio Ω_1 que contiene a $[a, b]$ y un dominio Ω_2 que contiene a $[c, d]$ donde f y g se extienden a funciones elementales holomorfas. Como f es continua sobre Ω_1, para cada punto $x \in [a, b]$ existe un disco abierto $D_x \subseteq \Omega_1$ tal que $f(D_x) \subseteq \Omega_2$. Si definimos

$$\Omega = \bigcup_{x\in[a,b]} D_x,$$

entonces Ω es un dominio complejo, f es una función elemental holomorfa no constante sobre Ω y $f(\Omega) \subseteq \Omega_2$. Con esto, hemos visto que se cumplen las hipótesis del teorema 2.2, y por lo tanto $g \circ f$ es una función elemental sobre Ω. Como además $g \circ f$ es una función continua en $[a, b]$, es una función elemental sobre $[a, b]$. □

Aprovechando todo lo que hemos visto hasta ahora, podemos empezar a dar ejemplos de funciones elementales reales.

TEOREMA 2.6. *Las funciones polinómicas con coeficientes reales son funciones elementales sobre cualquier intervalo* $[a, b]$*, y los cocientes de funciones polinómicas también, siempre que el denominador no se anule en ningún punto del intervalo.*

DEMOSTRACIÓN. Toda función f de variable real polinómica en un intervalo $[a, b]$ es continua, y se extiende a una función de $\mathbb{C}(z)$ que tiene por dominio todo $\mathbb{C}$. Como las funciones de $\mathbb{C}(z)$ son elementales en el sentido complejo, f es una función elemental real. Como consecuencia del teorema 2.4, los cocientes de funciones polinómicas son también funciones elementales si no se anula el denominador en ningún punto. $\square$

TEOREMA 2.7. *La función* $f(x) = e^x$ *es una función elemental sobre cualquier intervalo* $[a, b]$*, y la función* $g(x) = \ln(x)$ *es elemental sobre cualquier intervalo* $[a, b]$ *con* $a > 0$*.*

DEMOSTRACIÓN. La función exponencial real $f(x) = e^x$, definida en cualquier intervalo $[a, b]$, se extiende a la función exponencial compleja $f(z) = e^z$, meromorfa sobre todo el plano complejo, y es fácil comprobar que es una exponencial de la función z en el sentido algebraico, ya que $(e^z)' / e^z = 1 = z'$. Por lo tanto, $f(z) = e^z$ es una función elemental compleja, y $f(x) = e^x$ es una función elemental real sobre cualquier intervalo $[a, b]$.

La función $g(x) = \ln(x)$, definida en cualquier intervalo $[a, b]$ con $a > 0$, se extiende a la determinación principal del logaritmo $g(z) = \log(z)$, holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$. Podemos comprobar que es un logarítmo de z en el sentido algebraico, ya que $(\log(z))' = 1/z = z'/z$. Por lo tanto, $g(z) = \log(z)$ es una función elemental compleja en Ω y $\ln(x)$ es una función elemental en $[a, b]$. $\square$

Ahora es inmediato que para cualquier valor $a > 0$ la función $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$ es elemental sobre cualquier intervalo, y las funciones $\log_a(x) = \ln(x) / \ln(a)$ y $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(x)}$ son elementales sobre cualquier intervalo $[u, v]$ con $u > 0$, porque son composición de funciones elementales. Si n es un número natural, la función $\sqrt[n]{x}$ es elemental sobre cualquier intervalo $[u, v]$ con $u > 0$, ya que $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, y si además n es impar, la función $\sqrt[n]{x}$ también es elemental sobre intervalos $[u, v]$ con $v < 0$, ya que $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$. A pesar de esto, no es elemental sobre intervalos que contengan al 0, porque no es derivable en 0.

El siguiente paso es demostrar que las funciones trigonométricas también son elementales, y aquí es donde se ve realmente la importancia de haber desarrollado la teoría de funciones elementales desde el punto de vista de las funciones de variable compleja.

TEOREMA 2.8. *Las funciones* $\sin(x)$ *y* $\cos(x)$ *son elementales sobre cualquier intervalo* $[a, b]$*, y la función* $\tan(x)$ *es elemental sobre cualquier intervalo donde no se anule* $\cos(x)$*.*

DEMOSTRACIÓN. Las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ definidas sobre cualquier intervalo se extienden en todo el plano complejo a las funciones $\sin(z) = \left(e^{iz} - e^{-iz}\right) / (2i)$ y $\cos(z) = \left(e^{iz} + e^{-iz}\right) / 2$. Estas funciones son elementales sobre $\mathbb{C}$ porque se obtienen mediante operaciones algebraicas y la composición de la función elemental e^z con polinomios no constantes, y por lo tanto las funciones

$\sin(x)$ y $\cos(x)$ son elementales sobre cualquier intervalo. La función $\tan(x)$ es elemental sobre cualquier intervalo donde $\cos(x)$ no se anule porque $\tan(x) = \sin x / \cos x$. $\square$

A pesar de todos los resultados que hemos obtenido para crear funciones elementales a partir de operaciones algebraicas y composiciones de otras funciones elementales, no tenemos ningún teorema que nos asegure que la inversa de una función elemental sea una función elemental. De hecho, tenemos un contraejemplo que muestra que no es así. La función $f(x) = x^3$ es elemental sobre cualquier intervalo, pero su inversa, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ no es elemental sobre ningún intervalo que contenga al 0.

Nuestro propósito ahora es demostrar que las funciones $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ y $\arctan(x)$ son también elementales.

TEOREMA 2.9. *La función* $\arctan(x)$ *es elemental en cualquier intervalo* $[a,b]$*, y las funciones* $\arcsin(x)$ *y* $\arccos(x)$ *son elementales sobre cualquier intervalo* $[a,b] \subset (-1,1)$*.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que la función $\arctan(x)$ es elemental en cualquier intervalo $[a,b]$, la idea es que si $z = \operatorname{tg}(w)$, podemos expresar

$$z = \frac{\sin(w)}{\cos(w)} = \frac{\left(e^{iw} - e^{-iw}\right)/2i}{\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)/2} = -i \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$$

e intentar aislar w en función de z.

$$\begin{aligned} z = -i \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} \quad &\Rightarrow \quad z \cdot \left(e^{iw} + e^{-iw}\right) = -i \cdot \left(e^{iw} - e^{-iw}\right) \\ &\Rightarrow \quad ze^{iw} + ze^{-iw} = -ie^{iw} + ie^{-iw} \\ &\Rightarrow \quad ze^{iw} + ie^{iw} = ie^{-iw} - ze^{-iw} \\ &\Rightarrow \quad (z+i)\, e^{iw} = (i-z)\, e^{-iw} \\ &\Rightarrow \quad e^{2iw} = \frac{i-z}{i+z}. \end{aligned}$$

Como la función $\tan(w)$ no es inyectiva, está claro que no podemos recuperar el valor de w a partir del valor de z. A pesar de esto, si nos restringimos a un dominio del plano complejo donde esté bien definida la determinación principal del logaritmo de $(i-z)/(i+z)$, tenemos que una determinación de la función arcotangente compleja es

$$w(z) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right).$$

La determinación principal del logaritmo está definida sobre cualquier dominio que no contenga números reales negativos, y por lo tanto tenemos que restringirnos a dominios donde

$(i-z)/(i+z)$ no sea un número real negativo. Si $(i-z)/(i+z)$ fuese un real negativo r, entonces aislando z en función de r obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{i-z}{i+z}=r \quad &\Rightarrow \quad i-z=r\cdot(i+z)\\ &\Rightarrow \quad i-z=ri+rz\\ &\Rightarrow \quad i-ri=z+rz\\ &\Rightarrow \quad i\cdot(1-r)=z\,(1+r)\\ &\Rightarrow \quad i\cdot\frac{1-r}{1+r}=z.\end{aligned}$$

De aquí deducimos que z tiene parte real igual a 0 y norma mayor o igual que 1, ya que la función de variable real $f(r)=(1-r)/(1+r)$ tiene dominio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ y cumple que

$$f\left((-\infty,-1)\cup(-1,0]\right)=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)\,.$$

Hasta ahora, hemos visto que la función $w(z)=(1/2i)\log((i-z)/(i+z))$ está bien definida sobre el dominio $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Re}(z)=0,\ \|z\|\geqslant 1\}$, y es elemental porque es la composición de la función elemental holomorfa y no constante $g(z)=(i-z)/(i+z)$ con la función elemental $h(z)=(1/2i)\log(z)$.

El dominio Ω contiene a cualquier intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$, y queremos ver que la restricción de la función $w(z)$ a este intervalo es la función $\arctan(x)$. Como ya sabemos que $\tan(w(z))=z$ para todo z de Ω, lo único que nos falta comprobar es que si z es real, entonces $w(z)$ pertenece al intervalo $(-\pi/2,\pi/2)$.

Si z es un número real, los módulos $\|i-z\|$ y $\|i+z\|$ son los dos iguales a z^2+1, y por lo tanto se cumple que $\|(i-z)/(i+z)\|=1$. Esto implica que $\log((i-z)/(i+z))$ es un número con parte real igual a 0, y su parte imaginaria pertenece al intervalo $(-\pi,\pi)$. En conclusión, dividiendo entre $2i$, obtenemos que $w(z)$ pertenece al intervalo $(-\pi/2,\pi/2)$. En conclusión, la restricción de la función $w(z)$ a $\mathbb{R}$ es la función $\arctan(x)$, y como $w(z)$ es elemental sobre Ω, esto demuestra que la función $\arctan(x)$ es elemental sobre cualquier intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

Las funciones $\arcsin(x)$ y $\arccos(x)$ están definidas sobre el intervalo $[-1,1]$ pero no son elementales sobre ningún intervalo de la forma $[-1,b]$ ni de la forma $[a,1]$. Esto es así porque las funciones $\arcsin'(x)$ y $\arccos'(x)$ definidas en el intervalo $(-1,1)$ tienen los límites laterales en -1 y en 1 infinitos, y por lo tanto las funciones $\arcsin(x)$ y $\arccos(x)$ no se pueden extender como funciones holomorfas a ningún dominio que contenga ni el punto -1 ni el 1.

A pesar de esto, teniendo en cuenta las identidades

$$\arcsin(x)=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad \text{y} \quad \arccos(x)=\frac{\pi}{2}\arcsin(x)\,,$$

válidas sobre el intervalo $(-1,1)$, está claro que las funciones $\arcsin(x)$ y $\arccos(x)$ son elementales sobre cualquier intervalo $[a,b]\subset(-1,1)$.

$\square$

3. Ejemplos de funciones reales sin primitiva elemental

En la sección anterior hemos definido qué son las funciones elementales reales a partir de las funciones elementales complejas, y hemos visto que todas las funciones con expresión conocida son elementales, excepto tal vez en algún punto concreto. Nuestro objetivo en esta sección es mostrar que hay funciones elementales que no tienen primitiva elemental, pero no únicamente en algún punto, si no en ningún intervalo real. Esto es equivalente a decir que estas primitivas existen, pero no tienen expresión cerrada en términos de operaciones conocidas, y por lo tanto no se pueden calcular mediante las herramientas de cálculo de integrales (integración por partes, cambio de variable...) Después de toda la teoría expuesta y de los resultados encontrados, ha llegado el momento de identificar algunas de estas funciones.

Para empezar, tenemos que aclarar que si f y g son funciones elementales en un intervalo $[a, b]$, cuando decimos que g es una *primitiva* de f queremos decir que se cumple la igualdad $g'(x) = f(x)$ para cualquier x del intervalo (a, b). El punto de partida de esta sección es la idea de que podemos deducir si existen primitivas elementales para una función f elemental real analizando si existen primitivas elementales para algúna extensión de f a algún dominio complejo.

LEMA 2.10. *Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función elemental, y sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio que contiene el intervalo $[a, b]$, donde f se extiende a una función meromorfa elemental. Si existe una función elemental $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $g' = f$ en (a, b), entonces existe algún dominio $\Omega_2 \subseteq \Omega$ que contiene a $[a, b]$, tal que g se extiende a una función meromorfa elemental en Ω_2, y además $g' = f$ en Ω_2.*

DEMOSTRACIÓN. Según el lema 2.3, existe un dominio $\Omega_2 \subseteq \Omega$ que contiene el intervalo $[a, b]$, y en el que tanto f como g se extienden a funciones elementales holomorfas. La función g' está definida en Ω_2 y es holomorfa. Además, coincide con f sobre (a, b), y por lo tanto, por el principio de prolongación analítica, $g' = f$ en Ω_2. □

Teniendo en cuenta este lema, podemos demostrar que una función elemental real f no tiene primitiva elemental viendo que su extensión elemental a un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ no tiene primitiva elemental sobre ningún dominio $\Omega_2 \subseteq \Omega$. Esto simplifica considerablemente el problema, ya que las funciones elementales reales sobre un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ no tienen estructura de cuerpo, pero las funciones elementales sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sí. Esto nos permite utilizar los resultados sobre cuerpos diferenciales expuestos en el primer capítulo para demostrar que ciertas funciones reales no tienen primitiva elemental.

El teorema de Liouville nos da una condición necesaria y suficiente para que un elemento α de un cuerpo diferencial K tenga una primitiva en una extensión elemental L, y esta condición es independiente del cuerpo L en cuestión, y únicamente hace referencia a elementos de K. A pesar de eso, es una condición abstracta, y resulta difícil utilizarla para obtener ejemplos particulares de funciones sin primitiva elemental. En el siguiente teorema, que demostraremos a partir del teorema de Liouville, daremos una condición más simple, aunque menos general, que sí que nos servirá para encontrar ejemplos directamente. Antes necesitamos demostrar un lema técnico, que nos asegura que las funciones exponenciales de polinomios o fracciones polinómicas son transcendentes sobre $\mathbb{C}(z)$.

LEMA 2.11. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, y sea $g \in \mathbb{C}(z)$ una función no constante holomorfa en Ω. Entonces la función $h = e^g$ es transcendente sobre $\mathbb{C}(z)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función $h = e^g$ es algebraica sobre $\mathbb{C}(z)$, y sea

$$p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

su polinomio mínimo. Esto significa que

$$e^{ng} + a_{n-1} \cdot e^{(n-1)g} + \cdots + a_0 = 0.$$

Derivando, obtenemos la igualdad

$$ng'e^{ng} + \left(a'_{n-1} + (n-1)\, g'a_{n-1}\right) e^{(n-1)g} + \cdots + a'_0 = 0,$$

que significa que $h = e^g$ es también raíz del polinomio

$$q(X) = ng'X^n + \left(a'_{n-1} + (n-1)\, g'a_{n-1}\right) X^{n-1} + \cdots + a'_0 \in \mathbb{C}(z)[X].$$

Por lo tanto, $p(X)$ divide a $q(X)$. Veamos que esto nos lleva a una contradicción.

Como g' no es constante, $q(X)$ tiene el mismo grado que $p(x)$, y la única forma de que $p(X)$ divida a $q(X)$ es que $q(X) = ng'p(X)$. Esto implica que $a'_0 = ng'a_0$. Como el polinomio $p(X)$ es irreducible, se cumple que $a_0 \neq 0$, y por lo tanto $a'_0/a_0 = ng' = (ng)'$. Esto es una igualdad en el cuerpo diferencial $\mathbb{C}(z)$, y se cumple que $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(z)$ es una extensión de cuerpos diferenciales tal que $\mathbb{C}[z]$ es un subanillo diferencial en el que ningún elemento irreducible $a(z)$ divide a $a'(z)$. Por lo tanto, teniendo en cuenta el lema 1.27, si $r(z)$ es un elemento irreducible se cumple que $v_r\left((ng)'\right) \neq -1$, y por lo tanto $v_r(a'_0) - v_r(a_0) \neq -1$. Esto solo es posible si $v_r(a_0) = 0$, y como ésto es cierto para cualquier elemento irreducible $r(z)$, llegamos a la conclusión de que $a_0 \in \mathbb{C}$, que $a'_0 = 0$, y por lo tanto que $q(X)$ no es irreducible.

Esto nos lleva a una contradicción, porque si $q(X)$ no es irreducible, tampoco lo es $p(X)$, ya que difieren en un elemento del cuerpo $\mathbb{C}(z)$, y hemos empezado afirmando que $p(X)$ es el polinomio mínimo de h sobre $\mathbb{C}(z)$. □

TEOREMA 2.12. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, sean $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $t_1 \leq t_2$ y sean $f_{t_1}, f_{t_1+1} \ldots, f_{t_2}$ y g funciones racionales de $\mathbb{C}(z)$, de manera que g es holomorfa y no constante en Ω. Si la función*

$$\alpha = \sum_{\ell=t_1}^{t_2} f_\ell \cdot e^{\ell \cdot g}$$

tiene una primitiva elemental y en $\mathcal{M}(\Omega)$, entonces para cada $\ell \neq 0$ existe alguna función h_ℓ en $\mathbb{C}(z)$ tal que $f_\ell = h'_\ell + h_\ell g'$.

DEMOSTRACIÓN. La función α pertenece al cuerpo diferencial $\mathbb{C}(z, e^g)$. Si existe una función elemental y en $\mathcal{M}(\Omega)$ tal que $y' = \alpha$, por definición y pertenece a una extensión elemental del cuerpo diferencial $\mathbb{C}(z)$ contenida en $\mathcal{M}(\Omega)$, y por lo tanto también pertenece a una extensión elemental L del cuerpo diferencial $\mathbb{C}(z, e^g)$ contenida en $\mathcal{M}(\Omega)$. Además, como todas las constantes de $\mathcal{M}(\Omega)$ pertenecen a $\mathbb{C}$, los cuerpos $\mathbb{C}(z, e^g)$ y L tienen las mismas constantes. Por el teorema de Liouville (1.35), podemos asegurar que existen $m+1$ elementos $v, u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{C}(z, e^g)$ y m constantes $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{u_i'}{u_i}.$$

De aquí en adelante, para mayor claridad llamaremos K al cuerpo $\mathbb{C}(z)$. Según el lema 2.11 la función e^g es transcendente sobre K, y por lo tanto existe un K-isomorfismo $\varphi\colon K(e^g) \to K(x)$ que cumple que $\varphi(e^g) = x$. Consideramos el cuerpo $K(x)$ como un cuerpo diferencial con la derivación inducida por el isomorfismo φ según el teorema 1.7. Con esta derivación, K es un subcuerpo diferencial de $K(x)$, y $x' = \varphi\left((e^g)'\right) = \varphi(g'e^g) = g'x$. Entonces, se cumple que $x' \in K[x]$, y por lo tanto $K[x]$ es un subanillo diferencial de $K(x)$. Además, todas las constantes de $K(x)$ pertenecen a $\mathbb{C}$, y por lo tanto también a K.

Si definimos $v(x) = \varphi(v)$, y para cada función u_i definimos $u_i(x) = \varphi(u_i)$, entonces tenemos que los elementos $v(x), u_1(x), \ldots, u_m(x)$ pertenecen a $K(x)$, y se cumple la igualdad

$$\varphi(\alpha) = \sum_{\ell=t_1}^{t_2} f_\ell \cdot x^\ell = v'(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{u_i'(x)}{u_i(x)},$$

obtenida al aplicar φ a la igualdad

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{u_i'}{u_i}.$$

A partir de esta igualdad, utilizando el lema 1.28 obtenemos que también existen r polinomios diferentes $p_1(x), \ldots, p_r(x) \in K[x]$, r constantes $k_1, \ldots, k_r \in K$, que estarán en $\mathbb{C}$, y m elementos $a_1, \ldots, a_m \in K$ tales que

$$\sum_{\ell=t_1}^{t_2} f_\ell \cdot x^\ell = v'(x) + \sum_{j=1}^{r} k_j \cdot \frac{p_j'(x)}{p_j(x)} + \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}.$$

Veamos ahora que el sumatorio

$$\sum_{j=1}^{r} k_j \cdot \frac{p_j'(x)}{p_j(x)}$$

o bien es vacio o bien consta únicamente de un término $k \cdot p(x)' / p(x)$, donde $p(x) = x$, suponiendo que existe otro término con un polinomio $p_j(x) \neq x$ mónico e irreducible y llegando a una contradicción.

La extensión $K \subset K(x)$ es exponencial, porque $x'/x = g'$ con $g \in K$. Según el lema 1.31, el polinomio $p_j(x)$ no divide a $p_j'(x)$. Por lo tanto, si aislamos $v'(x)$ en la fórmula anterior obtenemos

$$v'(x) = \sum_{\ell=t_1}^{t_2} f_\ell \cdot x^\ell - \sum_{j=1}^{r} k_j \cdot \frac{p_j'(x)}{p_j(x)} - \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}.$$

Como $p_j(x)$ no divide a $p_j'(x)$, se cumple que

$$v_{p_j}\left(\sum_{\ell=t_1}^{t_2} f_\ell \cdot x^\ell - \sum_{j=1}^{r} k_j \cdot \frac{p_j'(x)}{p_j(x)} - \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i}\right) = -1,$$

y por lo tanto $v_{p_j}(v'(x)) = -1$, en contradicción con el lema 1.27.

Con esto, hemos llegado a la igualdad

$$v'(x) = \sum_{\ell=t_1}^{t_2} f_\ell \cdot x^\ell - k \cdot \frac{x'}{x} - \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i} = \sum_{\ell=t_1}^{t_2} f_\ell \cdot x^\ell - k \cdot g' - \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \frac{a_i'}{a_i},$$

donde k es un elemento de K que puede ser 0. Por lo tanto, para cualquier polinomio mónico irreducible $p_j(x) \neq x$ se cumple que $v_{p_j}(v'(x)) \geq 0$ y, en conclusión, $v_{p_j}(v(x)) \geq 0$.

Según el lema 1.32, esto implica que podemos expresar

$$v(x) = \sum_{\ell=s_1}^{s_2} b_\ell \cdot x^\ell,$$

con $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ y con los coeficientes $b_\ell \in K$. Además, añadiendo coeficientes iguales a 0 si es necesario, podemos suponer que $s_1 \leq t_1$ y que $s_2 \geq t_2$.

Derivando a ambos lados de la ecuación, obtenemos la expresión

$$v'(x) = \sum_{\ell=s_1}^{s_2} b_\ell' \cdot x^\ell + b_\ell \cdot \ell \cdot x^{\ell-1} \cdot x' = \sum_{\ell=s_1}^{s_2} (b_\ell' + b_\ell \cdot \ell \cdot g') \cdot x^\ell.$$

Para acabar, observemos que

$$v'(x) - \sum_{\ell=t_1}^{t_2} f_\ell \cdot x^\ell$$

es un elemento de K, y por lo tanto el elemento

$$\sum_{\ell=s_1}^{s_2} (b_\ell' + b_\ell \cdot \ell \cdot g') \cdot x^\ell - \sum_{\ell=t_1}^{t_2} f_\ell \cdot x^\ell$$

pertenece a K. Esto significa que para cualquier $\ell \neq 0$ se cumple que $b_\ell' + b_\ell \cdot \ell \cdot g' - f_\ell = 0$. Tomando $h_\ell = b_\ell$ tenemos que $f_\ell = h_\ell' + h_\ell g'$, como queríamos demostrar. □

Utilizando este criterio, podemos demostrar que determinadas funciones no tienen primitiva elemental simplemente resolviendo ecuaciones en $\mathbb{C}(z)$. Estamos por fin en condiciones de mostrar ejemplos concretos.

TEOREMA 2.13. *Si $g(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual que 2, entonces la función $e^{g(x)}$ no admite primitiva elemental en ningún intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función $e^{g(x)}$ admita una primitiva elemental. Por el lema 2.10, la función compleja $e^{g(z)}$ también admitiría una primitiva elemental en algún dominio Ω, y según el teorema 2.12, aplicado con $t_1 = t_2 = 1$ y con $f_1(z) = 1$, la ecuación $h' + hg' = 1$ tendría solución en $\mathbb{C}(z)$. Veamos que esto no es así.

En primer lugar, recordemos que ningún polinomio mónico irreducible $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ divide a $p'(z)$ en $\mathbb{C}[z]$. Sea a un elemento de $\mathbb{C}(z)$ que cumple que $h' + hg' = 1$. Veamos que h es un polinomio. Si existiese algún polinomio mónico irreducible $p(x)$ con $v_p(h) < 0$, entonces según el lema 1.27,

$v_p(hg') \geq v_p(h) > v_p(h')$. Esto significa que $v_p(h' + hg') = v_p(h') < 0$, cosa que contradice la igualdad $h' + hg' = 1$, porque $v_p(1) = 0$.

Ahora bien, si h es un polinomio el grado de hg' es estrictamente mayor que el grado de h', y por lo tanto el grado de hg' coincide con el grado de $h' + hg'$, y es mayor o igual que 1. Esto lleva a una contradicción con la igualdad $h' + hg' = 1$, con lo que queda demostrado que esta ecuación no tiene soluciones en $\mathbb{C}(z)$ y, en consecuencia, que la función $e^{g(x)}$ no admite primitiva elemental en ningún intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. □

En concreto, la función $f(x) = e^{-x^2/2}$, utilizada en estadística para definir la función de densidad de una distribución normal no admite primitiva elemental.

TEOREMA 2.14. *La función $f(x) = e^x/x$ no admite primitiva elemental en ningún intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como en el teorema anterior, es suficiente ver que la función $h(z) = e^z/z$ no admite primitiva elemental en ningún dominio Ω, y aplicando el teorema 2.12 con $t_1 = t_2 = 1$, $f_1 = 1/z$ y $g(z) = z$, basta ver que la ecuación $\dfrac{1}{z} = h' + h$ no tiene solución en $\mathbb{C}(z)$. Podemos ver que esta ecuación no tiene solución considerando dos casos, aplicando la valoración v_z. Si $v_z(h) \geq 0$, entonces $v_z(h') \geq 0$ y $v_z(h' + h) \geq 0$, y por lo tanto $h' + h \neq 1/z$, mientras que si $v_z(h) < 0$, entonces $v_z(h') = v_z(h) - 1 < -1$, y $v_z(h' + h) < -1$, con lo que tambien se cumple que $h' + h \neq 1/z$. □

Después de ver estos dos ejemplos sobre funciones exponenciales y logarítmicas, veamos ejemplos de funciones trigonométricas.

TEOREMA 2.15. *Las funciones $s(x) = \sin(x)/x$ y $c(x) = \cos(x)/x$ no admiten primitiva elemental en ningún intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como ya hemos hecho en los ejemplos anteriores, para demostrar que las funciones $s(x)$ y $c(x)$ no admiten ninguna primitiva elemental en ningún intervalo real, demostraremos que las funciones $s(z) = \sin(z)/z$ y $c(z) = \cos(z)/z$ no admiten primitiva elemental en ningún dominio complejo Ω. Para ello, utilizaremos las expresiones en términos de funciones exponenciales

$$s(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz} \quad \text{y} \quad c(z) = \frac{\cos(z)}{z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2z}.$$

Si la función $s(z)$ tuviese una primitiva elemental en algún dominio Ω, aplicando el teorema 2.12 con $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, $f_{-1}(z) = -1/(2iz)$, $f_0(z) = 0$, $f_1(z) = 1/(2iz)$ y $g(z) = iz$ obtendríamos que existe una función $h_1 \in \mathbb{C}(z)$ que cumple la igualdad $f_1 = h_1' + h_1 g'$, o equivalentemente $1/(2iz) = h_1' + h_1 i$. Análogamente, si la función $c(z)$ tuviese una primitiva elemental en algún dominio Ω, existiría una función $h_1 \in \mathbb{C}(z)$ que cumple la igualdad $1/(2z) = h_1' + h_1 i$.

Podemos comprobar que estas ecuaciones no tienen solución en $\mathbb{C}(z)$ mediante el mismo argumento que hemos utilizado en el teorema 2.14 para comprobar que la ecuación $1 = h' + hg'$ no tiene solución en $\mathbb{C}(z)$. Esto es así porque las tres ecuaciones son iguales salvo constantes complejas, que no afectan para nada a las valoraciones. □

Teorema 2.16. *Si $g(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual que 2, entonces las funciones* $\sin(g(x))$ *y* $\cos(g(x))$ *no admiten primitiva elemental en ningún intervalo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Es suficiente demostrar que las funciones

$$\sin(g(z)) = \frac{e^{ig(z)} - e^{-ig(z)}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos(g(z)) = \frac{e^{ig(z)} + e^{-ig(z)}}{2}$$

no admiten primitiva elemental en ningún dominio complejo Ω, y análogamente a los ejemplos anteriores, utilizando el teorema 2.12 es suficiente demostrar que las ecuaciones $1/(2i) = h' + h \cdot (ig')$ y $1/2 = h' + h \cdot (ig')$ no tienen solución en $\mathbb{C}(z)$.

El argumento para demostrar que estas ecuaciones no tienen solución en $\mathbb{C}(z)$ es el mismo que hemos utilizado en el teorema 2.13 para comprobar que la ecuación $1/z = h' + h$ no tiene solución en $\mathbb{C}(z)$. Esto es así porque en ambos casos $g(z)$ es un polinomio de grado mayor o igual que 2, y por lo tanto estas dos ecuaciones son iguales salvo constantes complejas, que no afectan para nada a las valoraciones ni a los grados de los polinomios. □

A partir de los ejemplos encontrados de funciones sin primitiva elemental, vamos a mostrar dos ejemplos más utilizando integración por cambio de variable y otros dos utilizando integración por partes.

Teorema 2.17. *La función* $f(x) = 1/\ln(x)$ *no tiene ninguna primitiva elemental en ningún intervalo* $[a,b]$.

Demostración. La idea de la demostración es que si aplicamos a la integral $\int 1/\ln(x)\ dx$ el cambio de variable $x = e^t$ obtenemos la integral $\int e^t/t\ dt$, y ya hemos visto que la función $g(t) = e^t/t$ no admite primitiva elemental en ningún intervalo. Vamos a formalizar esta idea.

Si tuviesemos una función $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ elemental tal que $F'(x) = 1/\ln(x)$, entonces la función $F \circ e^x$ definida en el intervalo $[\ln(a), \ln(b)]$ sería elemental, por ser composición de funciones elementales, y se cumpliría que $(F \circ e^x)' = F'(e^x) \cdot e^x = e^x/x$. Esto contradice el teorema 2.14, y en conclusión la función $f(x) = 1/\ln(x)$ no admite primitiva elemental en ningún intervalo. □

Teorema 2.18. *La función* $f(x) = e^{e^x}$ *no tiene ninguna primitiva elemental en ningún intervalo* $[a,b]$.

Demostración. Como en el ejemplo anterior, la idea es utilizar el cambio de variable $x = \ln(t)$ para pasar de la integral $\displaystyle\int e^{e^x}\ dx$ a la integral $\displaystyle\int \frac{e^t}{t}\ dt$.

Supongamos que tuviesemos una función $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ elemental tal que $F'(x) = e^{e^x}$. Entonces la función $F \circ \ln(x)$ definida en el intervalo $\left[e^a, e^b\right]$ sería elemental, por ser composición de funciones elementales, y se cumpliría que $(F \circ \ln(x))' = F'(\ln(x)) \cdot 1/x = e^x/x$. Esto contradice el teorema 2.14, y en conclusión la función $f(x) = e^{e^x}$ no admite primitiva elemental en ningún intervalo. □

Teorema 2.19. *La función* $f(x) = e^x \cdot \ln(x)$ *no tiene ninguna primitiva elemental en ningún intervalo* $[a,b]$.

Demostración. La idea de la demostración proviene de la igualdad

$$\int e^x \cdot \ln(x)\, dx = e^x \cdot \ln(x) - \int \frac{e^x}{x} dx$$

obtenida a partir de la fórmula de integración por partes.

Si existiese una función elemental $F(x)$ en el intervalo $[a,b]$ tal que $F'(x) = e^x \cdot \ln(x)$, entonces la función $e^x \cdot \ln(x)$ también sería elemental en $[a,b]$, por ser la derivada de una función elemental. En este caso, la función $G(x) = e^x \cdot \ln(x) - F(x)$ también sería elemental, y cumpliría que $G'(x) = e^x \cdot \ln(x) + e^x/x - e^x \cdot \ln(x) = e^x/x$. Como esto contradice el teorema 2.14, la función $f(x) = e^x \cdot \ln(x)$ no admite ninguna primitiva elemental en ningún intervalo. $\square$

Teorema 2.20. *La función* $f(x) = \ln(\ln(x))$ *no tiene ninguna primitiva elemental en ningún intervalo* $[a,b]$.

Demostración. Como en el ejemplo anterior, utilizando la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\int \ln(\ln(x))\, dx = x \cdot \ln(\ln(x)) - \int \frac{1}{\ln(x)} dx$$

obtenida a partir de la fórmula de integración por partes.

Si existiese una función $F(x)$ elemental en el intervalo $[a,b]$ tal que $F'(x) = \ln(\ln(x))$, entonces también serían elementales en $[a,b]$ las funciones $\ln(\ln(x))$ y $G(x) = x \cdot \ln(\ln(x)) - F(x)$. Además, se cumple que $G'(x) = 1/\ln(x)$. Como esto contradice el teorema 2.17, la función $f(x) = \ln(\ln(x))$ no admite ninguna primitiva elemental en ningún intervalo. $\square$

Bibliografía

[1] Ivorra, C. *Funciones sin primitiva elemental*, [en línea].
Disponible en: http://www.uv.es/ivorra/Libros/Primitivas.pdf

[2] Ritt, J.F. *Integration in Finite Terms. Liouville's Theory of Elementary Methods*, Columbia University Press, (1948).

[3] Rosenlicht, M. *Integration in Finite Terms*, The American Mathematical Monthly, Vol. 79, No 9, (Nov., 1972) pp. 963–972.

[4] Rosenlicht, M. *On Liouville's theory of elementary functions*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 65, No 2, (1976) pp. 485–492.

[5] Mead, D.G. *Integration*, The American Mathematical Monthly, Vol. 68, No. 2 (Feb., 1961), pp. 152-156

[6] Garrett, P. *Abstract algebra*, [en línea]. (2007).
`Disponible a: http://www.math.umn.edu/~garrett/m/algebra/Whole_with_TOC.pdf`

[7] Bruna, J. ; Cufí, J. *Anàlisi Complexa*. Publicacions UAB, (2008).