PROJECTE TECNOLÒGIC

Llicenciatura en matemàtiques

Títol: Control de sistemes no holònoms mitjançant la forma normal de Goursat

Autors: Ana Manzanera Garrido
Gemma Valero Martínez

Director: Jaume Franch Bullich

Departament: Departament de Matemàtica Aplicada IV

Convocatòria: 2012/2013

UPC

Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Als nostres pares, la Mónica, la Rosana, en David i l'Andreu per recolzar-nos tot aquest temps; a la meva Cauchy, per ser única i estar sempre al meu costat i sobretot a en Jaume, per haver confiat en nosaltres sempre. ♡

Índex

Introducció

La linealització per realimentació de sistemes mecànics ens permet aplicar la teoria de sistemes lineals a sistemes no lineals i dissenyar uns controladors estables.

La linealització de sistemes dinàmics, en general, és un problema obert. Una classe particular de linealització per realimentació dinàmica és linealitzar utilitzant la forma normal de Goursat i les sortides planes.

Aquest problema ha estat estudiat durant les dues últimes dècades. Tot i així, aquestes solucions comporten arrossegar un gran nombre de càlculs per decidir si un sistema és linealitzable per realimentació.

Per a un sistema no holònom, aquest problema és més senzill i aquest és el focus del nostre treball.

La idea és que donat un sistema en variables d'estat, l'adaptem a sistema de Pfaff, transformem aquest sistema de Pfaff en forma normal de Goursat i retornem al sistema inicial de variables d'estat. Fem tot aquest procediment per finalment trobar les sortides planes del sistema inicial. El gran avantatge de treballar amb la forma normal de Goursat és que les sortides planes que obtenim tenen una forma molt més simple.

La principal contribució d'aquest treball és donar les eines i les pautes necessàries per a la linealització per realimentació dels sistemes no holònoms de dues entrades a través del disseny de la forma normal de Goursat. Dissenyarem controladors, de manera que les trajectòries solució passin per unes certes condicions inicials i finals imposades.

Per a que tot el que anem a explicar quedi demostrat empíricament, treballarem amb 5 exemples. En el primer exemple trobarem un robot pla a l'espai format per una base i un braç robòtic amb dos articulacions, que es pot trobar a [7], i en el segon treballarem amb un robot amb dos braços robòtics units a una base central, que es pot trobar a [5]. En el tercer exemple, extret de [7], observarem el comportament d'un disc que gira sobre si mateix i que té un angle de gir amb el qual orienta el seu moviment. N'estudiarem la trajectòria de les variables d'estat mijtançant les simulacions numèriques i un vídeo.

Seguidament, estudiarem la trajectòria d'un vehicle amb rodes expansibles extret de [1], la motivació del qual és una navegació autònoma en terrenys difícils. Finalment, repetirem els procediments explicats anteriorment al sistema que modela el moviment d'un avió, estudiat en [6], però introduïnt la teoria de la forma normal de Goursat.

En alguns casos il·lustrarem els resultats amb simulacions. A més, en un dels exemples s'ha dissenyat un controlador que elimina les pertorbacions en les condicions inicials i en un altre dels exemples s'ha creat un vídeo il·lustratiu.

Hem analitzat i extret la teoria necessària per dur a terme la linealització per realimentació de [7] i [2], i ens hem guiat a l'hora d'explicar el procediment a seguir per trobar les sortides planes per [4] i [3].

El treball està organitzat de la manera següent:

- Capítol 1: Introduirem nocions i conceptes bàsics d'àlgebra necessaris pel seguiment del treball.
- Capítol 2: Definirem els sistemes de Pfaff així com un seguit de proposicions i teoremes respecte distribucions, que ens seran útils per al següent capítol.
- Capítol 3: Definirem el concepte de forma normal de Goursat i forma normal estesa de Goursat. Enunciarem i demostrarem els teoremes fonamentals pel nostre treball: el teorema de Pfaff, el teorema d'Engel, i el teorema de la forma normal de Goursat.
- Capítol 4: Explicarem de manera guiada un procediment per linealitzar sistemes de control i dissenyar controladors per resoldre el problema de generació de trajectòries que vagin d'un punt inicial a un punt final.
- Capítols posteriors: Descriurem detalladament els 5 exemples abans mencionats, el procediment seguit per trobar els controladors i les il·lustracions amb els resultats obtinguts.

1
Nocions d'àlgebra

1.1 Àlgebres i ideals

1.1.1 Definició Una *àlgebra*$(V, \odot)$, és un espai vectorial V sobre un cos (normalment utilitzarem el cos dels reals), amb una operació multiplicativa $\odot : V \times V \longrightarrow V$ que satisfà:

- Donat un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(a \odot b) = (\alpha a) \odot b = a \odot (\alpha b)$.
- Si existeix un element $e \in V$ tal que $x \odot e = e \odot x = x$, $\forall x \in V$, llavors és únic i l'anomenem *element neutre*.

1.1.2 Definició Sigui $(V, \odot)$ una àlgebra, direm que un subespai $W \subset V$ és un *ideal algebraic* si:

$$x \in W, \quad y \in V \Longrightarrow x \odot y, y \odot x \in W$$

Recordem que la intersecció d'ideals és també un ideal.

1.1.3 Definició Sigui $(V, \odot)$ una àlgebra i sigui $A := \{a_i \in V, \quad 1 \leq i \leq K\}$ una col·lecció finita d'elements linealment independents en V. Sigui S el conjunt de tots els ideals que contenen a A, és a dir:

$$S := \{I \subset V, I \text{ ideal}, A \subset I\}$$

L'ideal I_A generat per A està definit per:

$$I_A = \bigcap_{I \in S} I$$

i és el mínim ideal de S que conté a A, l'anomenem *ideal minimal*.

1.1.4 Teorema *Sigui* $(V, \odot)$ *una àlgebra que conté l'element neutre. Sigui* $A := \{a_i \in V, \quad 1 \leq i \leq K\}$ *una col·lecció finita d'elements de* V *i* I_A *l'ideal generat per* A*. Aleshores per cada* $x \in I_A$ *existeixen* $v_1, \ldots, v_K \in V$ *vectors tals que*

$$x = v_1 \odot a_1 + v_2 \odot a_2 + \ldots + v_K \odot a_K$$

1.1.5 Definició Sigui $(V, \odot)$ una àlgebra, i $I \subset V$ un ideal. Direm que dos vectors $x, y \in V$ són *equivalents mòdul* I si i només si $x - y \in I$. Aquesta equivalència es denota per

$$x \equiv y \mod I$$

Si l'espai $(V, \odot)$ conté l'element neutre, el teorema anterior ens diu que hi ha *equivalència entre els vectors* si i només si

$$x - y = \sum_{i=1}^{K} \theta_i \odot \alpha_i$$

per algun $\theta_K \in V$. Això es denotarà com

$$x \equiv y \mod \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K$$

ja que l'operació mòdul es realitza sobre l'ideal generat per $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K$.

1.2 Àlgebra exterior

Considerarem V un espai vectorial, V^* el seu dual i $\Lambda^k(V^*)$ l'espai vectorial dels k-tensors alternats amb una operació multiplicativa.
L'operació més habitual és el producte exterior però, en aquest espai, el producte exterior de dos elements de $\Lambda^k(V^*)$, no pertany a aquest mateix espai. Aleshores, $\Lambda^k(V^*)$ no és una àlgebra amb aquesta operació.
Definim doncs l'operació de la suma directa en l'espai de tots els tensors alternats com:

$$\Lambda(V^*) = \Lambda^0(V^*) \oplus \Lambda^1(V^*) \oplus \cdots \oplus \Lambda^n(V^*)$$

Així, donat $\xi \in \Lambda(V^*)$, aquest tensor pot ser escrit com $\xi = \xi_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$ on $\xi_p \in \Lambda^p(V^*)$.

Notem que $\Lambda(V^*)$ és tancat per l'operació de suma directa, per tant, és una àlgebra.

1.2.1 Definició L'espai de tots els tensors alternats amb el producte exterior, $(\Lambda(V^*), \wedge)$, és una àlgebra que anomenarem *àlgebra exterior* sobre V^*.

Observem que l'àlgebra $(\Lambda(V^*), \wedge)$ conté l'element neutre ja que $1 \in \Lambda^0(V^*)$. Pel teorema (1.1.4) afirmem que l'ideal generat pel conjunt finit

$$\Sigma := \{\alpha_i \in \Lambda(V^*), \quad 1 \leq i \leq K\}$$

pot ser escrit de la forma:

$$I_\Sigma = \left\{ \pi \in \Lambda(V^*) \,|\, \pi = \sum_{i=1}^{K} \theta_i \wedge \alpha_i, \quad \theta_i \in \Lambda(V^*) \right\}$$

Donat un conjunt Σ, pot ser possible generar I_Σ amb un conjunt més petit de generadors Σ'.

1.3 Sistemes d'equacions exteriors

L'objectiu d'aquesta secció és resoldre el següent sistema d'equacions:

$$\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_K = 0$$

on $\alpha_i \in \Lambda(V^*)$.

1.3.1 Definició Un *sistema d'equacions exteriors* sobre V és un conjunt finit d'equacions linealment independents de la forma

$$\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_K = 0$$

on $\alpha_i \in \Lambda^k(V^*)$ per algun $1 \leq k \leq n$. Una solució del sistema d'equacions exterior és qualsevol subespai $W \subset V$ tal que

$$\alpha_1|_W \equiv 0, \ldots, \alpha_K|_W \equiv 0$$

on $\alpha|_W$ representa $\alpha(v_1, \ldots, v_k)$ per tot $v_1, \ldots, v_k \in W$.

Hem de tenir present que la solució d'aquest sistema no és única ja que qualsevol subespai $W_1 \subset W$ satisfà $\alpha|_{W_1} \equiv 0$ si $\alpha|_W \equiv 0$.

1.3.2 Teorema *Donat un sistema d'equacions exteriors $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_K = 0$, i el corresponent ideal I_Σ generat per $\Sigma := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_K\}$ on $\alpha_i \in \Lambda(V^*)$. Direm que un subespai W resol el sistema si i només si satisfà $\pi\,|_W \equiv 0$ per tot $\pi \in I_\Sigma$.*

Demostració:
Si $\pi|W \equiv 0$ per tota $\pi \in I_\Sigma$, aleshores, donat que l'ideal està generat per $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots \alpha_K\}$, cada α_i pertany a I_Σ i, conseqüentment, $\alpha_i|W \equiv 0$, $\forall \alpha_i \in I_\Sigma$.

Recíprocament, si $\pi \in I_\Sigma$, aleshores és de la forma

$$\pi = \sum_{i=1}^{K} \theta_i \wedge \alpha_i, \quad \theta_i \in \Lambda(V^*)$$

Per tant, si $\alpha_i\,|_W \equiv 0$ per $1 \leq i \leq K$ implica que $\pi|_W \equiv 0$.

□

Aquest resultat ens permet tractar el sistema d'equacions exterior, el conjunt de generadors de l'ideal i l'ideal algebraic com objectes essencialment equivalents. A partir d'ara farem abús de notació i denotarem de la mateixa manera el sistema d'equacions amb el seu corresponent generador i el conjunt generador amb el seu corresponent ideal.

1.3.3 Definició Siguin Σ_1 i Σ_2 dos conjunts de generadors. Si $I_{\Sigma_1} = I_{\Sigma_2}$, és a dir, generen el mateix ideal, direm que els *generadors* són *algebraicament equivalents* .

Utilitzarem aquesta definició per representar el sistema d'equacions exterior en una forma més simplificada.

1.3.4 Definició Sigui Σ un sistema d'equacions exterior i I_Σ l'ideal que el genera. Definirem l'*espai associat* a l'ideal I_Σ com

$$A\,(I_\Sigma) := \{v \in V \,|\, v \lrcorner \alpha \in I_\Sigma, \forall \alpha \in I_\Sigma\}$$

1.3.5 Definició L'espai dual de l'espai associat o l'*espai de retracció* de l'ideal ve definit per $C(I_\Sigma) = A\,(I_\Sigma)^\perp \subset V^*$.

Un cop hem determinat l'espai de retracció podem trobar un sistema algebraicament equivalent Σ' que és un subconjunt de $\Lambda(C(I_\Sigma))$, l'àlgebra exterior sobre l'espai de retracció.

1.3.6 Teorema *Sigui $a_i, \ldots, a_n$ una base de V. Aleshores el valor d'un k-tensor alternat $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ és independent de la base d'elements a_i si i només si $a_i \lrcorner \omega \equiv 0$.*

Demostració:
Sigui $\phi_1, \ldots, \phi_n$ la base dual a $a_1, \ldots, a_n$. Llavors ω pot ser escrita respecte la base dual com

$$\omega = \sum_J d_J \phi_{j_1} \wedge \phi_{j_2} \wedge \ldots \wedge \phi_{j_k} = \sum_J d_J \psi_J$$

on la suma es fa sobre totes les k-tuples ascendents de J. Si un element de la base ψ_J no conté ϕ_i, clarament $a_i \lrcorner \psi_J \equiv 0$.

Si, contrariament conté ϕ_i, llavors $a_i \lrcorner \wedge \phi_{j_1} \wedge \phi_{j_2} \wedge \ldots \wedge \phi_{j_k} \not\equiv 0$ ja que a_i pot estar sempre relacionada amb ϕ_i a través d'una permutació que només afecta al signe. Conseqüentment, $(a_i \lrcorner \omega) \equiv 0$ si i només si els coeficients d_J de tots els termes que contenen ϕ_j són zero.

□

1.3.7 Teorema *Sigui Σ un sistema d'equacions exterior i I_Σ el seu corresponent ideal algebraic. Aleshores existeix un sistema algebraicament equivalent Σ' tal que $\Sigma' \subset \Lambda(C(I_\Sigma))$.*

Demostració:
Sigui $v_1, \ldots, v_n$ una base de V i $\phi_1, \ldots, \phi_n$ una base dual triada de manera que $v_{r+1}, \ldots, v_n$ generen $A(I_\Sigma)$. Conseqüentment $\phi_1, \ldots, \phi_r$ han de generar $C(I_\Sigma)$. Fem inducció:
Considerem α un 1-tensor en I_Σ, per tant en la base triada, α pot ser escrita com:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i$$

.

Tenint en compte que $v \lrcorner \alpha \equiv 0 \mod I_\Sigma$ per tot $v \in A(I_\Sigma)$, aleshores $a_i = 0$ per $i = r+1, \ldots, n$. Per tant,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} a_i \phi_i$$

Així, tots els 1-tensors en Σ estan continguts en $\Lambda^1(C(I_\Sigma))$.

Ara suposem que tots els tensors d'ordre menor o igual que k que pertanyen a I_Σ estàn continguts en $\Lambda(C(I_\Sigma))$. Sigui α un $(k+1)$-tensor en I_Σ. Considerem el tensor

$$\alpha' = \alpha - \phi_{r+1} \wedge (v_{r+1} \lrcorner \alpha)$$

El terme $v_{r+1} \lrcorner \alpha$ és un k-tensor en I_Σ per la definició d'espai associat i per hipòtesis d'inducció ha de pertànyer a $C(I_\Sigma)$. El producte exterior d'aquest terme amb ϕ_{r+1} pertany a $\Lambda(C(I_\Sigma))$. És més:

$$v_{r+1} \lrcorner \alpha' = v_{r+1} \lrcorner \alpha - (v_{r+1} \lrcorner \phi_{r+1}) \wedge (v_{r+1} \lrcorner \alpha) + \phi_{r+1} \wedge (v_{r+1} \lrcorner (v_{r+1} \lrcorner \alpha)) \equiv 0$$

Pel teorema (1.3.6), α' no té termes que depenen de ϕ_{r+1}.

Si reemplacem α per α', l'ideal generat serà invariant ja que:

$$\theta \wedge \alpha = \theta \wedge \alpha' + \theta \wedge \phi_{r+1} \wedge (v_{r+1} \lrcorner \alpha)$$

i $v_{r+1} \lrcorner \alpha \in I_\Sigma$.
Podem continuar el procés per $v_{r+2}, \ldots, v_n$ per definir $\hat{\alpha}$ que és un generador de I_Σ i és un element de $\Lambda(C(I_\Sigma))$.

□

1.3.8 Exemple Sistemes algebraicament equivalents
Sigui $v_1, \ldots, v_6$ una base de $\mathbb{R}^6$ i $\theta_1, \ldots, \theta_6$ la base dual. Considerem el següent sistema d'equacions exterior:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \theta_1 \wedge \theta_3 = 0 \\
\alpha_2 &= \theta_1 \wedge \theta_4 = 0 \\
\alpha_3 &= \theta_1 \wedge \theta_2 - \theta_3 \wedge \theta_4 = 0 \\
\alpha_4 &= \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_5 - \theta_3 \wedge \theta_4 \wedge \theta_6 = 0
\end{aligned}$$

L'objectiu d'aquest exemple és trobar un sistema equivalent al donat però expressat de manera més simple.

Sigui I_Σ l'ideal generat per $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ i $A(I_\Sigma)$ l'espai associat de I_Σ.

Notem que $\theta_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^6)$, per tant, Σ ésta format per 2-tensors i 3-tensors. Donat que

$$I_\Sigma = \left\{ \pi \in \Lambda(\mathbb{R}^6) \,|\, \pi = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\theta_i} \wedge \alpha_i, \quad \widetilde{\theta_i} \in \Lambda(\mathbb{R}^6) \right\}$$

el cas en que tindrem un tensor de grau menor serà quan $\widetilde{\theta_i} \in \Lambda^0(\mathbb{R}^{6*})$ que ens proporcionarà un tensor d'ordre 2, per tant, I_Σ no conté cap 1-tensor.

Per la definició de l'espai associat, deduïm que

$$v \lrcorner \alpha_1 = 0, \quad v \lrcorner \alpha_2 = 0, \quad v \lrcorner \alpha_3 = 0$$

Vegem quines condicions s'han de complir per a que les restriccions anteriors siguin certes:

$$\begin{aligned}
v \lrcorner \alpha_1 &= v \lrcorner (\theta_1 \wedge \theta_3) \\
&= (v \lrcorner \theta_1) \wedge \theta_3 + (-1)^1 \theta_1 \wedge (v \lrcorner \theta_3) \\
&= \theta_1(v)\theta_3 - \theta_3(v)\theta_1 = 0
\end{aligned}$$

Cosa que implica que $\theta_1(v) = \theta_3(v) = 0$. Similarment:

$$\begin{aligned} v \lrcorner \alpha_2 &= v \lrcorner (\theta_1 \wedge \theta_4) \\ &= (v \lrcorner \theta_1) \wedge \theta_4 + (-1)^1 \theta_1 \wedge (v \lrcorner \theta_4) \\ &= \theta_1(v)\theta_4 - \theta_4(v)\theta_1 = 0 \end{aligned}$$

D'on es dedueix que $\theta_3(v) = 0$. Finalment:

$$\begin{aligned} v \lrcorner \alpha_3 &= v \lrcorner (\theta_1 \wedge \theta_2 - \theta_3 \wedge \theta_4) \\ &= v \lrcorner (\theta_1 \wedge \theta_2) - v \lrcorner (\theta_3 \wedge \theta_4) \\ &= (v \lrcorner \theta_1) \wedge \theta_2 - \theta_1 \wedge (v \lrcorner \theta_2) - (v \lrcorner \theta_3) \wedge \theta_4 + \theta_3 \wedge (v \lrcorner \theta_4) \\ &= \theta_1(v)\theta_2 - \theta_2(v)\theta_1 - \theta_3(v)\theta_4 + \theta_4(v)\theta_3 \end{aligned}$$

Així, $\theta_4(v) = 0$. Podem concloure que l'espai associat és combinació lineal de v_5 i v_6.

D'altra banda, expandim l'última restricció que tenim:

$$\begin{aligned} v \lrcorner \alpha_4 &= (v \lrcorner (\theta_1 \wedge \theta_2)) \wedge \theta_5 + (\theta_1 \wedge \theta_2) \wedge (v \lrcorner \theta_5) - (v \lrcorner (\theta_3 \wedge \theta_4)) \wedge \theta_6 - (\theta_3 \wedge \theta_4) \wedge (v \lrcorner \theta_6) \\ &= \theta_5(v)\theta_1 \wedge \theta_2 - \theta_6(v)\theta_3 \wedge \theta_4 \end{aligned}$$

Com $v \lrcorner \alpha_4 \subset I_\Sigma$, la contracció serà de la forma:

$$v \lrcorner \alpha_4 = a(\theta_1 \wedge \theta_2) + b(\theta_1 \wedge \theta_3) + c(\theta_1 \wedge \theta_2 - \theta_3 \wedge \theta_4)$$

Igualant les dues expressions obtenim que:

$$\theta_5(v) = \theta_6(v) = c, \quad \forall v \in A(I_\Sigma)$$

Però $v = xv_5 + yv_6$, per tant:

$$\theta_5(xv_5 + yv_6) = x = c$$
$$\theta_6(xv_5 + yv_6) = y = c$$

Així $v = c(v_5 + v_6)$ i $A(I_\Sigma) = \langle v_5 + v_6 \rangle$. Si seleccionem com a nova base de $\mathbb{R}^6$ els vectors:

$$w_i = v_i, \quad i = 1, \dots 4, \quad w_5 = v_5 - v_6, \quad w_6 = v_5 + v_6$$

La nova base dual serà:

$$\gamma_i = \theta_i, \quad i = 1, \dots 4, \quad \gamma_5 = \frac{\theta_5 - \theta_6}{2}, \quad \gamma_6 = \frac{\theta_5 + \theta_6}{2}$$

Els quatre primers elements de la base dual són clars, estudiem la resta. Per γ_5 s'ha de complir que $\gamma_5(w_5) = 1$ i $\gamma_5(w_6) = 0$. Sigui $\gamma_5 = a\theta_5 + b\theta_6$:

$$(a\theta_5 + b\theta_6)(v_5 - v_6) = a\theta_5(v_5) - a\theta_5(v_6) + b\theta_6(v_5) - b\theta_6(v_6) = a - b = 1$$
$$(a\theta_5 + b\theta_6)(v_5 + v_6) = a\theta_5(v_5) + a\theta_5(v_6) + b\theta_6(v_5) + b\theta_6(v_6) = a + b = 0$$

Conseqüentment $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. Aleshores, $\gamma_5 = \frac{\theta_5 - \theta_6}{2}$. De la mateixa manera es troba el darrer element de la base dual.

Respecte a aquesta nova base, l'espai de retracció $C(I_\Sigma)$ ve donat per:

$$C(I_\Sigma) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_6 \rangle$$

En aquestes coordenades, el generador serà:

$$\Sigma' = \{\gamma_1 \wedge \gamma_3, \gamma_1 \wedge \gamma_4, \gamma_1 \wedge \gamma_2 - \gamma_3 \wedge \gamma_4, \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_5\} \subset \Lambda(C(I_\Sigma))$$

1.3.9 Definició Donada α una p-forma, definim l'*espai dels divisors lineals* de α com:

$$L_\alpha = \{\omega \in V^* \,|\, \omega \wedge \alpha = 0\}$$

1.3.10 Teorema *Sigui I_Σ un ideal generat pel conjunt:*

$$\Sigma = \{\omega_1, \dots, \omega_s, \Omega\}$$

on $\omega_i \in V^*$ i $\Omega \in \Lambda^2(V^*)$. Sigui r el menor enter tal que

$$(\Omega)^{r+1} \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_s = 0$$

Aleshores l'espai de retracció $C(I_\Sigma)$ té dimensió $2r + s$.

Demostració:
Considerem primer el cas $s = 0$. Aleshores, $\Sigma = \{\Omega\}$ i $(\Omega)^{r+1} = 0$. Com l'ideal generat per Σ ve definit per

$$I_\Sigma = \left\{ \pi \in \Lambda(V^*) \,|\, \pi = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \wedge \Omega, \quad \theta_i \in \Lambda(V^*) \right\}$$

un element de I_Σ serà combinació lineal de $\Omega, \Omega^2, \ldots, \Omega^r$.

Com $\Omega \in \Lambda(C(I_\Sigma))$ i $\Omega^r \in \Lambda^{2r}(C(I_\Sigma))$ aleshores:

$$\dim(C(I_\Sigma)) \geq 2r$$

Sigui ara $f : V \longrightarrow V^*$ una aplicació lineal definida per

$$f(x) = x \lrcorner \Omega, \quad x \in V$$

Notem que l'ideal generat per Σ no conté cap 1-forma, per tant,

$$x \lrcorner \Omega = 0 \Longleftrightarrow x \in A(I_\Sigma)$$

Això demostra que

$$\ker\, f = A(I_\Sigma)$$

Per tant, dim(ker f) $= \dim(A(I_\Sigma))$. Donat que $A(I_\Sigma) = C(I_\Sigma)^\perp$, aleshores:

$$\dim(\ker\, f) \leq n - 2r$$

D'altra banda per $s = 0$:

$$x \lrcorner \Omega^{r+1} = (r+1)(x \lrcorner \Omega) \wedge \Omega^r = 0$$

la darrera igualtat prové del fet de que $\Omega^{r+1} = 0$.

Un element de la imatge de f pertany a L_{Ω^r} ja que:

$$\mathrm{Im}\, f = \{\omega \in V^* \,|\, \omega = x \lrcorner \Omega, \quad x \in V\}$$

Aquesta condició implica que $\omega \wedge \Omega^p = (x \lrcorner \Omega) \wedge \Omega^r = 0$, així, $\omega \in L_{\Omega^r}$. Per tant, Im f $\subset L_{\Omega^r}$.

Com Ω^r té grau $2r$ i té com a màxim $2r$ divisors lineals,

$$\dim(\text{im } f) \leq 2r$$

Un resultat elemental d'algebra lineal ens diu que:

$$\dim(\ker f) + \dim(\text{im } f) = n$$

Per tant, $\dim(\text{im} f) = 2r$, $\dim(\ker f) = n - 2r$ i, conseqüentment, $\dim(C(I_\Sigma)) = 2r$.

En el cas general, considerem $W^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$, que té dimensió s.
Aleshores $W = (W^*)^\perp \subset V$ i l'espai quocient V^*/W^* tenen una relació induïda per la de V amb V^* i són espais vectorials duals. Per hipòtesi:

$$\Omega^r \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_s \neq 0$$

i $\Omega^r \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_s \in \Lambda^{2r+s}(C(I_\Sigma))$, de manera que

$$\dim(C(I_\Sigma)) \geq 2r + s$$

Considerem l'aplicació lineal següent:

$$f' : W \xrightarrow{\ f\ } V^* \xrightarrow{\ \pi\ } V^*/W^*$$

on π és la projecció a l'espai quocient i f és l'aplicació definida anteriorment.

Com en el cas trivial, volem trobar fites superiors per a les dimensions del nucli i de la imatge de f'.

Emprant el resultat d'àlgebra sabem que:

$$\dim(\ker f') + \dim(\text{im } f') = \dim(W) = n - s$$

Raonant de manera similar al cas anterior, trobem:

$$\begin{aligned} \dim(\ker f) &\leq n - 2r - s \\ \dim(\text{im } f) &\leq 2r \end{aligned}$$

En conseqüència, $\dim(C(I_\Sigma)) = 2r + s$.

$\square$

1.4 Codistribucions

1.4.1 Definició Una *distribució* diferenciable associa un subespai de l'espai tangent a cada punt $p \in M$. És representat com la combinació lineal de d camps vectorials diferenciables com segueix:

$$\Delta = \langle f_1, \ldots, f_d \rangle$$

La dimensió de la distribució en un punt ve definida com la dimensió del subespai $\Delta(p)$. Una distribució és regular si la seva dimensió no depèn de p.

1.4.2 Definició Definim la *codistribució* com la funció que assigna a cada punt de la varietat un conjunt de 1-formes. Aquesta combinació lineal d'1-formes serà un subespai de l'espai cotangent T_p^*M. Denotem l'aplicació per

$$\Omega(p) = \langle \omega_1(p), \ldots, \omega_d(p) \rangle$$

Hi ha una relació de dualitat entre les distribucions i codistribucions que ens permet construir codistribucions a partir de distribucions i viceversa.

Donada una distribució Δ, per cada p en un entorn de U, considerem totes les 1-formes que punt a punt anul·len tots els vectors de $\Delta(p)$,

$$\Delta^{\perp}(p) = \langle \omega(p) \in T_p^*M : \omega(p)(f) = 0, \quad \forall f \in \Delta(p) \rangle$$

Clarament, $\Delta^{\perp}(p)$ és un subespai de T_p^*M i, en conseqüència és una codistribució. Anomenarem a $\Delta^{\perp}$ l'anul·lador o dual de Δ. Recíprocament, donada una codistribució Θ, podem construir la distribució anul·ladora o dual punt a punt com:

$$\Omega^{\perp}(p) = \langle v \in T_pM : \omega(p)(v) = 0, \quad \forall \omega(p) \in \Omega(p) \rangle$$

1.4.3 Exemple Codistribució d'un unicicle
Considerem el sistema que descriu la cinemàtica d'un monocicle:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \cos\theta \\ \dot{y} &= u_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} &= u_2 \end{aligned}$$

Que el podem reescriure com:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2 = f_1 u_1 + f_2 u_2$$

La distribució és:

$$\Delta = \langle f_1, f_2 \rangle$$

Per trobar la codistribució, per definició, hem de buscar una 1-forma $\omega = a\,dx + b\,dy + c\,d\theta$ tal que $\omega \lrcorner f = 0$ per tot $f \in \Delta$, és a dir:

$$\begin{aligned} \omega \lrcorner f_1 &= a\cos\theta + b\sin\theta = 0 \\ \omega \lrcorner f_2 &= c = 0 \end{aligned}$$

Triem per exemple $a = \sin\theta$ i $b = -\cos\theta$, així la codistribució és:

$$\Delta^{\perp} = \langle \omega \rangle$$

on $\omega = \sin\theta\,dx - \cos\theta\,dy + 0\,d\theta$ és la restricció de rodar sense lliscar.

2
Sistemes diferencials exteriors

L'espai de totes les formes en una varietat M,

$$\Omega(M) = \Omega^0(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^n(M),$$

juntament amb el producte exterior s'anomena *àlgebra exterior en M*. Un ideal algebraic d'aquesta àlgebra es defineix com un subespai I tal que si $\alpha \in I$ llavors $\alpha \wedge \beta \in I$ per qualsevol $\beta \in \Omega(M)$.

2.0.4 Definició Un ideal $I \subset \Omega(M)$ es diu que és *tancat* respecte una derivada exterior si i només si

$$\alpha \in I \Rightarrow d\alpha \in I,$$

o anàlogament, si $dI \subset I$. Un ideal algebraic que és tancat respecte derivació exterior s'anomena *ideal diferencial*.

Un conjunt finit de formes, $\Sigma = \{\alpha_1, \dots \alpha_K\}$ generen un ideal algebraic

$$I_\Sigma = \left\{ \omega \in \Omega(M) \,|\, \omega = \sum_{i=1}^{K} \theta_i \wedge \alpha_i \text{ per a certes } \theta_i \in \Omega(M) \right\}.$$

També podem parlar de l'ideal diferencial generat per Σ. Així doncs, si S_d denota el conjunt de tots els diferencials que contenen Σ, llavors l'ideal diferencial generat per Σ es defineix com el més petit diferencial ideal que conté Σ:

$$\mathcal{I}_\Sigma = \bigcap_{I \in S_d} I.$$

2.0.5 Teorema *Sigui Σ un conjunt finit de formes, i $\mathcal{I}_\Sigma$ l'ideal diferencial generat per Σ. Definim el conjunt*

$$\Sigma' = \Sigma \cup d\Sigma$$

que denota l'ideal algebraic generat per $I_{\Sigma'}$.

Demostració: Per definició, $\mathcal{I}_\Sigma$ és tancat respecte la derivada exterior, per tant $\Sigma' \subset \mathcal{I}_\Sigma$. Conseqüentment, $I_{\Sigma'} \subset \mathcal{I}_\Sigma$. L'ideal $I_{\Sigma'}$ és tancat respecte la derivada exterior i conté Σ per construcció. Llavors, per la definició de $\mathcal{I}_\Sigma$ tenim que $\mathcal{I}_\Sigma \subset I_{\Sigma'}$. $\square$

L'espai associat a $\mathcal{I}_\Sigma$ s'anomena *distribució característica de Cauchy* i es denota per $\mathcal{A}(\mathcal{I}_\Sigma)$.

2.1 Sistemes diferencials exteriors

En la secció anterior hem introduit sistemes exteriors d'equacions en un espai vectorial V i hem caracteritzat les seves solucions com a subespais de V. Ara estem preparats per definir una notació similar per un conjunt de formes diferencials definides en una varietat M. El problema bàsic serà estudiar les subvarietats integrals de M que satisfacin les restriccions representades pels sistemes diferencials exteriors.

2.1.1 Definició Un *sistema diferencial exterior* és un conjunt finit d'equacions

$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_r = 0,$$

on cada $\alpha_i \in \Omega^k(M)$ és una $k-$forma suau. Una *solució a un sistema diferencial exterior* és qualsevol subvarietat N de M que satisfà $\alpha_i(x)|_{T_xN} \equiv 0$ per tot $x \in N$ i per tot $i \in \{1, \dots, r\}$.

Un sistema diferencial exterior es pot veure des d'un altre punt de vista com un sistema d'equacions exteriors en T_pM. Vist així, hom pot esperar que la solució estigui definida com una distribució en una varietat. El problema amb aquest punt de vista és que moltes de les distribucions són no integrables, i nosaltres volem que el conjunt de solucions sigui una col·lecció de subvarietats integrals. Per tant, limitarem el conjunt de solucions a distribucions integrables.

2.1.2 Teorema *Donat un sistema exterior diferencial*

$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_K = 0$$

i el seu ideal diferencial corresponent $\mathcal{I}_\Sigma$ generat pel conjunt de formes

$$\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_K\},$$

una subvarietat integral N de M resol el sistema d'equacions exteriors si i només si també resol l'equació $\pi = 0$ per cada $\pi \in \mathcal{I}_\Sigma$.

Demostració: Si una subvarietat integral N de M és solució de Σ, llavors per tot $x \in N$ i per tot $i \in \{1, \dots, K\}$,

$$\alpha_i(x)|_{T_xN} \equiv 0.$$

Prenent la derivada exterior obtenim

$$d\alpha_i(x)|_{T_xN} \equiv 0.$$

Per tant, la subvarietat també satisfà el sistema diferencial exterior

$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_K = 0, \quad d\alpha_1 = 0, \dots, d\alpha_K = 0.$$

Pel teorema 2.0.5 sabem que l'ideal diferencial generat per Σ és igual a l'ideal algebraic generat pel sistema anterior. Per tant, el teorema 1.3.2 ens diu que cada solució N de Σ és també una solució per cada element de $\mathcal{I}_\Sigma$. De manera inversa, si N resol l'equació $\pi = 0$ per cada $\pi \in \mathcal{I}_\Sigma$ llavors en particular ha de resoldre Σ. $\square$

Aquest teorema ens permet treballar ja sigui amb els generadors d'un ideal o amb l'ideal en si. De fet, alguns autors defineixen els sistemes de diferencials exteriors com a ideals diferencials de $\Omega(M)$. Degut a que un conjunt de generados Σ genera un ideal diferencial $\mathcal{I}_\Sigma$ i un ideal algebraic I_Σ, podem definir dos nocions diferents d'equivalència pels sistemes diferencials exteriors. Dos sistemes diferencials exteriors Σ_1 i Σ_2 es diu que són *equivalents* si generen el mateix ideal diferencial, és a dir, $\mathcal{I}_{\Sigma_1} = \mathcal{I}_{\Sigma_2}$. Intuïtivament, volem pensar que dos sistemes diferencials exteriors són equivalents si tenen el mateix conjunt de solucions. Per tant, anem a parlar sobre l'equivalència general en aquest últim aspecte.

2.2 Sistemes de Pfaff

Els sistemes de Pfaff són de particular interès pel fet que es poden utilitzar per representar un conjunt d'equacions diferencials ordinàries de primer ordre.

2.2.1 Definició Un sistema diferencial exterior de la forma

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0,$$

on les α_i són 1-formes independents en una varietat de dimensió n, s'anomena *sistema de Pfaff* de codimensió $n-s$. Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ és una base de $\Omega^1(M)$, llavors el conjunt $\{\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n\}$ s'anomena *complementari* del sistema de Pfaff.

Una *condició independent* és una 1-forma τ que es requereix que sigui no negativa al llarg de la corba integral del sistema de Pfaff. És a dir, si $\alpha_i(c(t))(c'(t)) = 0$, llavors $\tau(c(t))(c'(t)) \neq 0$. Les 1-formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ generen l'ideal algebraic

$$I = \{\sigma \in \Omega(M) : \sigma \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_s = 0\}.$$

L'ideal algebraic generat per les 1-formes α_i és també un ideal diferencial si es satisfan les següents condicions.

2.2.2 Definició Un conjunt d'1-formes linealment independents $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ en l'entorn d'un punt es diu que satisfan la *condició de Frobenius* si s'acompleix una de les següents equivalències:

1) $d\alpha_i$ és combinació lineal de $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.
2) $d\alpha_i \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_s = 0$ per a $1 \leq i \leq s$.
3) $d\alpha_i = \sum_{j=1}^{s} \theta_j \wedge \alpha_j$.

Quan $d\alpha_i$ és combinació lineal de $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, s'utilitza freqüentment la següent expressió

$$d\alpha_i \equiv 0 \mod \alpha_1, \ldots, \alpha_s \qquad 1 \leq i \leq s$$

on l'operació mod es realitza implícitament sobre l'ideal algebraic generat pels α_i.

2.2.3 Exemple **Continuació de l'unicicle.** Anem a il·lustrar els conceptes anteriors a partir de l'unicicle. Noti's que l'unicicle pot ser descrit per la codistribució

$$\omega = \sin\theta dx - \cos\theta dy + 0d\theta.$$

La derivada exterior de ω és

$$d\omega = \cos\theta\, d\theta \wedge dx + \sin\theta\, d\theta \wedge dy,$$

i per tant

$$d\omega \wedge \omega = -\cos^2 d\theta \wedge dx \wedge dy + \sin^2 d\theta \wedge dy \wedge dx = -dx \wedge dy \wedge d\theta \neq 0.$$

Com la segona condició de la definició (2.2.2) no es satisfà, I no és un ideal diferencial.

2.2.4 Teorema ***Teorema de Frobenius per codistribucions***
Sigui I un ideal algebraic generat per les 1-formes linealment independents $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ que satisfan la condició de Frobenius. Llavors en un entorn de x existeix un sistema de coordenades $y_1, \ldots, y_n$ de manera que

$$I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}\} = \{dy_{r+1}, \ldots, dy_n\}.$$

Demostració: Anem a demostrar el teorema per inducció sobre r. Sigui $r = 1$. Llavors el subespai $W_x^{\perp} \subset T_x, x \in M$, té dimensió 1. Relatiu a un sistema de coordenades locals $x_i, 1 \leq i \leq n$, les equacions del sistema diferencial estan escrites en la forma clàssica

$$\frac{dx_1}{X_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x)},$$

on les funcions $X_i(x_1, \ldots, x_n)$, no totes són 0, són els coeficients d'un camp vectorial $X = \sum_i X_i(x)\partial/\partial x_i$ format per $W_x^{\perp}$. Pel *flow box coordinate theorem*, podem triar coordenades $y_1, \ldots, y_n$, tals que $W_x^{\perp}$ està format pel vector $\partial/\partial y_1$, llavors W_x està formada per $dy_2, \ldots, dy_n$. Aquesta última forma clarament un conjunt de generadors de I. Noti's que en aquest cas la condició de Frobenius és nul·la.

Suposem $r \geq 2$ i que el teorema és cert per $r - 1$. Siguin $x_i, 1 \leq i \leq n$, coordenades locals tals que

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}, dx_r$$

són linealment independents. El sistema diferencial definit per aquestes $n - r + 1$ formes també satisfa la condició de Frobenius. Per l'hipòtesi d'inducció existeixen coordenades y_i de manera que

$$dy_r, dy_{r+1}, \ldots, dy_n$$

formen un conjunt de generadors del corresponent ideal diferencial. D'aquí obtenim que o bé dx_r és una combinació lineal d'aquestes formes o bé x_r és una funció que depen de $y_r, \ldots, y_n$. Sense pèrdua de generalitat podem suposar

$$\partial x_r / \partial y_r \neq 0.$$

Com

$$dx_r = \frac{\partial x_r}{\partial y_r} + \sum_i \frac{\partial x_r}{\partial y_{r+1}} dy_{r+1}, \quad 1 \leq i \leq n - r$$

podem resoldre dy_r en termes de dx_r i $dy_{r+1}, \ldots, dy_n$. Com $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ són combinacions lineals de $dy_r, \ldots, dy_n$, les α_i poden ser expressades en la forma

$$\alpha_i = \sum_j a_{ij} dy_{r+j} + b_i dx_r, \quad 1 \leq i, j \leq n - r.$$

Com α_i i dx_r són linealment independents, la matriu (a_{ij}) ha de ser no singular. Per tant, podem trobar un nou conjunt de generadors de I en la forma

$$\alpha'_i = dy_{r+i} + p_i dx_r, \quad 1 \leq i \leq n - r,$$

i la condició de Frobenius es compleix. La diferencial exterior ens dóna

$$d\alpha'_i = dp_i \wedge dx_r \equiv \sum_{1 \leq \lambda \leq r-1} \frac{\partial p_i}{\partial y_\lambda} du_\lambda \wedge dx_r \equiv 0, \qquad \mathrm{mod}\ \alpha'_1, \ldots \alpha'_{n-r}.$$

D'aquí obtenim que

$$\partial p_i / \partial y_\lambda = 0, \quad 1 \leq i \leq n - r, \quad 1 \leq \lambda \leq r - 1,$$

el que significa que els p_i són funcions de $y_r, \ldots, y_n$. Per tant, en les y-coordenades que estem estudiant, un sistema de $n-r$ 1-formes només utilitza les $n-r+1$ coordenades $y_r, \ldots, y_n$. Això redueix el problema a la situació descrita al principi de la demostració. Per tant, la inducció queda completa. $\square$

Pels sistemes diferencials exteriors més generals tenim els següents resultats d'integrabilitat.

2.2.5 Proposició *Si la distribució característica de Cauchy $\mathcal{A}(\mathcal{I}_\Sigma)$ de $\mathcal{I}_\Sigma$ té dimensió constant r en un entorn de x, llavors la distribució $\mathcal{A}(\mathcal{I}_\Sigma)$ és integrable.*

Demostració: Sigui ξ un camp vectorial de l'ideal diferencial $\mathcal{I}_\Sigma$. Sigui L_ξ la derivada de Lie definida per ξ. Sabem que

$$L_\xi = d(\xi \lrcorner) + (\xi \lrcorner) d.$$

Com $\mathcal{I}_\Sigma$ és tancat, tenim que $d\mathcal{I}_\Sigma \subset \mathcal{I}_\Sigma$. Si ξ és un camp vectorial característic, tenim que $\xi \lrcorner \mathcal{I}_\Sigma \subset \mathcal{I}_\Sigma$. D'aquí obtenim que $L_\xi \mathcal{I}_\Sigma \subset \mathcal{I}_\Sigma$. Per a continuar necessitem demostrar

$$[L_\xi, \eta \lrcorner] = L_\xi \eta \lrcorner - \eta \lrcorner L_\xi = [\xi, \eta] \lrcorner, \tag{2.1}$$

que és vàlida per qualssevol camps vectorials ξ, η.

Per demostrar (2.1) observem que L_ξ és una derivada de grau 0 i $\eta \lrcorner$ és una derivada de grau -1, per tant $[L_\xi, \eta \lrcorner]$ és també una derivada de grau -1. Així doncs, n'hi ha prou per verificar (2.1) en veure que passa quan les dues parts actuen sobre funcions f i diferencials df. És evident que, a l'actuar sobre f, ambdues parts donen 0. A l'actuar sobre df, tenim que

$$\begin{aligned} [L_\xi, \eta \lrcorner] df &= L_\xi(\eta f) - \eta \lrcorner d(\eta f) \\ &= [\xi, \eta] f = [\xi, \eta] \lrcorner df. \end{aligned}$$

Això demostra (2.1) i per tant la proposició. $\square$

2.2.6 Teorema *Sigui $\mathcal{I}$ un ideal diferencial amb espai retractil $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ amb dimensió constant $s = n - r$. Llavors existeix un entorn en el que hi ha coordenades $(x_1, \ldots, x_r; y_1, \ldots, y_n$ de manera que $\mathcal{I}$ té un conjunt de generadors que són formes en $y_1, \ldots, y_s$ i els seus diferencials.*

Demostració: Per la proposició 2.2.5 el sistema diferencial definit per $\mathcal{C}(\mathcal{I})$, o el que és el mateix, la distribució definida per $\mathcal{A}(\mathcal{I})$, és completament integrable. Hem de triar coordenades $(x_1, \ldots, x_r; y_1, \ldots, y_s)$ de manera que les coordenades escollides vinguin definides per

$$y_\sigma = \text{const}, \quad 1 \leq \sigma \leq s.$$

Pel teorema de retracció, $\mathcal{I}$ té un conjunt de generados que són formes en $dy_\sigma, 1 \leq \sigma \leq s$. Però els seus coeficients poden incloure $x_\rho, 1 \leq \rho \leq r$. Anem a veure que podem triar un nou conjunt de generadors de $\mathcal{I}$ que siguin formes en les y_σ coordenades i que x_ρ no hi aparegui. Per excloure el cas trivial suposem que $\mathcal{I}$ és un ideal propi, i per tant no conté funcions diferents de zero.

Sigui $\mathcal{I}_q$ el conjunt de q-formes en $\mathcal{I}$, $q = 1, 2, \ldots$ Siguin $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ 1-formes linealment independents en $\mathcal{I}_1$ tals que qualsevol forma en $\mathcal{I}_1$ sigui combinació lineal d'elles. Com $\mathcal{I}$ és tancat, $d\varphi_i \in \mathcal{I}$, $1 \leq i \leq p$. Per a un ρ fixat tenim que $\frac{\partial}{\partial x_\rho} \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$, que implica

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} \lrcorner\, d\varphi_i = L_{\partial/\partial x_\rho} \varphi_i \in \mathcal{I}_1,$$

ja que la banda esquerra té grau 1. D'aquí obtenim que

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\rho} = L_{\partial/\partial x_\rho} \varphi_i = \sum_j a_{ij} \varphi_j, \quad 1 \leq i, j \leq p \tag{2.2}$$

on la banda esquerra representa la forma obtinguda de φ_i mitjançant les derivades parcials dels coeficients respecte a x_ρ.

Per aquest ρ fixat considerem x_ρ com a variable i $x_1, \ldots, x_{\rho-1}, x_{\rho+1}, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ com a paràmetres. Considerem el sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$\frac{dz_i}{dx_\rho} = \sum_j a_{ij} z_j, \quad 1 \leq i, j \leq p. \tag{2.3}$$

Sigui $z_i^{(k)}, 1 \leq k \leq p$, un sistema de solucions fonamentals, de manera que

$$\det \left(z_i^{(k)} \right) \neq 0.$$

Anem a substituir φ_i per $\widetilde{\varphi}_k$ definida per

$$\varphi_i = \sum z_i^{(k)} \widetilde{\varphi}_k. \tag{2.4}$$

Diferenciant (2.4) respecte x_ρ i utilitzant (2.2) i (2.3) tenim que

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}_k}{\partial x_\rho} = 0,$$

i llavors $\widetilde{\varphi}_k$ no depen de x_ρ. Aplicant el mateix procediment a les altres x, arribem a un conjunt de generadors de $\mathcal{I}_1$ que són formes en y_σ.

Suposem el mateix procediment dut a terme per $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_{q-1}$, llavors estan formats per formes en y_σ. Sigui $\mathcal{J}_{q-1}$ l'ideal generat per $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_{q-1}$. Siguin $\psi_\alpha \in \mathcal{I}_q$, $1 \leq \alpha \leq r$, linealment independents $\mod \mathcal{J}_{q-1}$, tals que qualsevol q-forma de $\mathcal{I}_q$ és congruent $\mod \mathcal{J}_{q-1}$ a una combinació lineal d'elles. Per l'argument anterior aquestes formes inclouen

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} \lrcorner\, d\psi_\alpha = L_{\partial/\partial x_\rho}\psi_\alpha.$$

Per tant tenim

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\rho} \equiv \sum b_\alpha^\beta \psi_\beta, \quad \mod \mathcal{J}_{q-1}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq r.$$

Per l'argument anterior, podem substituir ψ_α per $\widetilde{\psi}_\beta$ de manera que

$$\frac{\partial \widetilde{\psi}_\alpha}{\partial x_\rho} \in \mathcal{J}_{q-1}.$$

Això significa que podem escriure

$$\frac{\partial \widetilde{\psi}_\alpha}{\partial x_\rho} = \sum_h \eta_\alpha^h \wedge \omega_\alpha^h,$$

on $\eta_\alpha^h \in \mathcal{I}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{I}_{q-1}$ i són també formes en y_σ. Sigui θ_α^h definida per

$$\frac{\partial \theta_\alpha^h}{\partial x_\rho} = \omega_\alpha^h.$$

Llavors les formes

$$\widetilde{\widetilde{\psi}}_\alpha = \widetilde{\psi}_\alpha - \sum_h \eta_\alpha^h \wedge \theta_\alpha^h$$

no depenen de x_ρ, i es poden utilitzar per substituir ψ_α. Aplicant aquest procediment a totes les $x_\rho, 1 \leq \rho \leq r$, definim un conjunt de generadors de $\mathcal{I}_q$, que només té formes en y_σ. $\square$

2.3 Derived flags

Si l'ideal algebraic generat per un sistema de Pfaff no satisfà la condició de Frobenius, llavors no és un ideal diferencial. No obstant, pot existir un ideal diferencial que sigui un subconjunt de l'ideal algebraic. Podem trobar aquest subideal prenent la *derived flag* del sistema de Pfaff. Sigui $I^{(0)} = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ l'ideal algebraic generat per 1-formes independents $\omega_1, \ldots \omega_s$. Definim $I^{(1)}$ com

$$I^{(1)} = \{\lambda \in I^{(0)} : d\lambda \equiv 0 \mod I^{(0)}\} \subset I^{(0)}.$$

L'ideal $I^{(1)}$ s'anomena *sistema de primeres derivades*. L'anàleg al sistema de primeres derivades des del punt de vista de la distribució ve donat pel següent teorema.

2.3.1 Teorema *Si $I^{(0)} = \Delta^\perp$, llavors $I^{(1)} = (\Delta + [\Delta, \Delta])^\perp$.*

Demostració: Sigui $I^{(0)}$ generat per combinacó lineal de les 1-formes $\omega_1, \ldots, \omega_s$ i sigui Δ la seva distribució anul·ladora. Per definició tenim que

$$I^{(1)} = \{\omega \in I^{(0)} : d\omega \equiv 0 \mod I^{(0)}\}.$$

Sigui $\eta \in I^{(1)}$. Llavors, $d\eta \equiv 0 \mod I^{(0)}$ i això significa que

$$d\eta = \sum_{j=1}^{s} \theta_j \wedge \omega_j$$

per a certes formes θ_j. Siguin ara X i Y camps vectorials en Δ. Com Δ és la distribució anul·ladora de $I^{(0)}$, llavors $\omega_j(X) = \omega_j(Y) = 0$. També tenim que $\eta \in I^{(1)} \subset I^{(0)}$, i llavors $\eta(X) = \eta(Y) = 0$. Ara, utilitzant l'expressió de $d\eta$,

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \sum_{j=1}^{s} \theta_j \wedge \omega_j(X,Y) \\ &= \sum_{j=1}^{s} \theta_j(X) \wedge \omega_j(Y) - \theta_j(Y) \wedge \omega_j(X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fórmula de Cartan ens dóna

$$d\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) = 0,$$

i llavors

$$\eta([X,Y]) = 0.$$

Això significa que η anul·la qualsevol camp vectorial pertanyent a $[\Delta, \Delta]$, a més d'anul·lar qualsevol camp vectorial de Δ. Llavors, $\eta \in (\Delta + [\Delta, \Delta])^{\perp}$ i per tant

$$I^{(1)} \subset (\Delta + [\Delta, \Delta])^{\perp}.$$

Per veure l'altre inclusió, siguin $\eta \in (\Delta + [\Delta, \Delta])^{\perp}$ i X i Y camps vectorials en Δ. La fórmula de Cartan ens dóna

$$d\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) = 0$$

i llavors $d\eta = 0 \mod I^{(0)}$, el que significa que $\eta \in I^{(1)}$.

Així doncs, $(\Delta + [\Delta, \Delta])^{\perp} \subset I^{(1)}$, i per tant $(\Delta + [\Delta, \Delta])^{\perp} = I^{(1)}$. □

Hom pot continuar de manera inductiva amb aquest procediment d'obtenció de sistemes derivats i definir

$$I^{(2)} = \{\lambda \in I^{(1)} : d\lambda \equiv 0 \mod I^{(1)}\} \subset I^{(1)}$$

o, en general,

$$I^{(k+1)} = \{\lambda \in I^{(k)} : d\lambda \equiv 0 \mod I^{(k)}\} \subset I^{(k)}.$$

Aquest procediment dóna lloc a una seqüència de codistribucions

$$I^{(k)} \subset I^{(k-1)} \subset \cdots \subset I^{(1)} \subset I^{(0)}. \tag{2.5}$$

També podem generalitzar el teorema 2.3.1. Si definim $\Delta_0 = (I^{(0)})^{\perp}, \Delta_1 = (I^{(1)})^{\perp}$ i en general $\Delta_k = (I^{(k)})^{\perp}$, llavors no és difícil demostrar que si $I^{(k)} = \Delta_k^{\perp}$ aleshores $I^{(k+1)} = (\Delta_k + [\Delta_k, \Delta_k])^{\perp}$. La demostració d'aquest fet és similar a la demostració del teorema 2.3.1 però utilitza una forma més general de la fórmula de Cartan. La seqüència descendent de codistribucions (2.5), anomenada *derived flag* de $I^{(0)}$, s'associa amb una seqüencia ascendent de distribucions, anomenada la *filtració* de Δ_0,

$$\Delta_k \supset \Delta_{k-1} \supset \cdots \supset \Delta_1 \supset \Delta_0.$$

Si la dimensió de cada codistribució és constant, llavors existeix un enter N tal que $I^{(N)} = I^{(N+1)}$. Aquest enter N s'anomena la *longitud de la derivada* de I. Es diu que una base de 1-formes α_j per I és *adaptada a la derived flag* si podem triar una base de cada sistema derivat $I^{(j)}$ que sigui subconjunt dels α_j. La codistribució $I^{(N)}$ sempre és integrable per definició ja que

$$dI^{(N)} \equiv 0 \mod I^{(N)}.$$

La codistribució $I^{(N)}$ és el *subsistema integrable més llarg* en I. Per tant, si $I^{(N)} \neq \{0\}$ llavors existeixen funcions $h_1, \ldots, h_r$ tals que $\{dh_1, \ldots, dh_r\} \subset I$. Com a conseqüència, si un sistema de Pfaff conté un subsistema integrable $I^{(N)} \neq \{0\}$, que està format per les combinacions lineals de les 1-formes $dh_1, \ldots, dh_r$, llavors les corbes integrals del sistema estan limitades per satisfer les següents equacions per algunes constants k_i,

$$dh_i = 0 \Longrightarrow h_i = k_i, \quad \text{per a} \quad 1 \leq i \leq r,$$

o equivalentment, les trajectòries del sistema han de romandre dins de la varietat,

$$M = \{x : h_i(x) = k_i \quad \text{per a} \quad 1 \leq i \leq r\}.$$

En particular, això implica que si $I^{(N)} \neq 0$, no és possible trobar una corba integral del sistema de Pfaff que connecti un paràmetre $x(0) = x_0$ amb un altre paràmetre $x(1) = x_1$ tret que els paràmetres inicial i final satisfacin

$$h_i(x_0) = h_i(x_1) \quad \text{per a} \quad 1 \leq i \leq r.$$

3
La forma normal de Goursat

Ara que hem definit un sistema diferencial exterior i hem introduit algunes eines per a l'anàlisi dels mateixos, estem preparats per estudiar algunes formes normals importants dels sistemes diferencials exteriors. Ens limitarem als sistemes de Pfaff. La primera forma normal que introduirem, la forma de Pfaff, està restringida a sistemes d'una sola equació. La forma d'Engel s'aplica a dues equacions en un espai de dimensió 4, i la forma de Goursat és per $n-2$ equacions en un espai de dimensió n. La forma normal de Goursat estesa es defineix per sistemes amb codimensió més gran que 2. Les formes normals de Goursat poden ser pensades com la generalització dels sistemes lineals. El seu estudi ens portarà a l'estudi de la linealització dels sistemes de control.

3.1 Sistemes d'una equació

En primer lloc estudiarem els sistemes de Pfaff de codimensió $n-1$, o sistemes formats per una sola equació

$$\alpha = 0$$

on α és una 1-forma en una varietat M. En alguna carta (U, x) d'un punt $p \in M$ podem expressar l'equació com

$$a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + \cdots + a_n(x)dx_n = 0.$$

Per tal de comprendre les varietats integrals d'aquesta equació mirarem d'expressar α com una forma normal realitzant un canvi de coordenades.

3.1.1 Definició Sigui $\alpha \in \Omega^1(M)$. L'enter r definit per

$$(d\alpha)^r \wedge \alpha \neq 0$$

$$(d\alpha)^{r+1} \wedge \alpha = 0$$

s'anomena *rang* de α.

El següent teorema ens permetrà, sota una condició de rang, escriure α com una forma normal.

3.1.2 Teorema ***Teorema de Pfaff***
Sigui $\alpha \in \Omega^1(M)$ amb rang r constant en un entorn de p. Llavors existeix una carta (U, z) tal que en aquestes coordenades, $\alpha = dz_1 + z_2 dz_3 + \cdots + z_{2r} dz_{2r+1}$.

Demostració: Sigui $\mathcal{I}$ l'ideal diferencial generat per α. Pel teorema 1.3.10 l'espai de retracció de $\mathcal{I}$ té dimensió $2r+1$. Pel teorema 2.2.6 existeixen coordenades locals $y_1, \ldots, y_n$ tals que $\mathcal{I}$ té un conjunt de generadors en $y_1, \ldots, y_{2r+1}$. Llavors, pel nombre de dimensió, qualsevol funció f_1 d'aquestes $2r+1$ coordenades compleix que

$$(d\alpha)^r \wedge \alpha \wedge df_1 = 0.$$

Ara, sigui $\mathcal{I}_1$ l'ideal generat per $\{df_1, \alpha, d\alpha\}$. Si $r = 0$, llavors el resultat ve donat pel teorema de Frobenius (teorema 2.2.4). Si $r > 0$, llavors les formes df_1 i α han de ser linealment independents, ja que α és no integrable. Aplicant el teorema 1.3.10 a $\mathcal{I}_1$, sigui r_1 l'enter més petit tal que

$$(d\alpha)^{r_1+1} \wedge \alpha \wedge df_1 = 0.$$

Clarament, $r_1 + 1 \leq r$. D'altra banda, el signe d'igualtat s'ha de mantenir per què $(d\alpha)^r \wedge \alpha \neq 0$. Aplicant el teorema 2.2.6 a $\mathcal{I}_1$ existeix una funció f_2 tal que

$$(d\alpha)^{r-1} \wedge \alpha \wedge df_1 \wedge df_2 = 0.$$

Repetint aquest procés, trobem r funcions $f_1, f_2, \ldots, f_r$ que satisfan

$$\begin{aligned} d\alpha \wedge \alpha \wedge df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_r &= 0, \\ \alpha \wedge df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_r &\neq 0. \end{aligned}$$

Modificant α per un factor, podem escriure

$$\alpha = df_{r+1} + g_1 df_1 + \cdots + g_r df_r.$$

Com $(d\alpha)^r \wedge \alpha \neq 0$, llavors les funcions $f_1, \ldots, f_{r+1}, g_1, \ldots, g_r$ són independents. El resultat s'obté doncs prenent

$$z_1 = f_{r+1} \qquad z_{2i} = g_i \qquad z_{2i+1} = kf_i$$

per $1 \leq i \leq r$. □

3.1.3 Exemple **Unicicle en forma de Pfaff**
Considerem com a exemple l'unicicle descrit anteriorment per la codistribució $I = \{\alpha\}$, on $\alpha = \sin\theta\, dx - \cos\theta\, dy$. Podem veure clarament que

$$d\alpha = \cos\theta\, d\theta \wedge dx + \sin\theta\, d\theta \wedge dy$$

i per tant

$$\begin{aligned} d\alpha \wedge \alpha &= d\theta \wedge dy \wedge dx \neq 0, \\ (d\alpha)^2 \wedge \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Llavors, α té rang 1 i pel teorema de Pfaff (teorema 3.1.2) existeixen coordenades z_1, z_2, z_3 tals que

$$\alpha = dz_1 + z_2 dz_3.$$

En aquest exemple obtenim fàcilment

$$\alpha = dy + (-\tan\theta)dx.$$

El següent teorema és similar al teorema de Pfaff i simplement ens permet expressar el resultat d'una forma més simètrica.

3.1.4 Teorema ***Versió simètrica del Teorema de Pfaff***
Donat qualsevol $\alpha \in \Omega^1(M)$ amb rang constant r en un entorn U de p, llavors existeixen coordenades $z, y_1, \ldots, y_r, x_1, \ldots, x_r$ tals que

$$\alpha = dz + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}(y_i dx_i - x_i dy_i).$$

Demostració: El canvi de coordenades

$$\begin{aligned} z_1 &= z - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} x_i y_i, \\ z_{2i} &= y_i \quad 1 \leq i \leq r, \\ z_{2i+1} &= x_i \quad 1 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

redueix el teorema anterior al teorema de Pfaff. □

Es diu que el sistema de Pfaff $\alpha = 0$ en una varietat M té la *propietat d'accessibilitat local* si cada punt $x \in M$ té un entorn U tal que cada punt en U es pot unir amb x per mitjà d'una corba integral. El següent teorema ens respon la pregunta de quan el sistema de Pfaff té la propietat d'accessibilitat local.

3.1.5 Teorema ***Teorema de Caratheodory***
El sistema de Pfaff

$$\alpha = 0,$$

on α té rang constant, té la propietat d'accessibilitat local si i només si

$$\alpha \wedge d\alpha \neq 0.$$

Demostració: La condició anterior simplement ens diu que el rang de α ha de ser més gran o igual a 1. Si α té rang 0 llavors $d\alpha \wedge \alpha = 0$, aleshores pel teorema de Frobenius (teorema 2.2.4), podem escriure

$$\alpha = dh = 0$$

per una certa funció h. Les corbes integrals són de la forma $h = c$ per a qualsevol constant c. Ja que només podem unir punts $p, q \in M$ pel qual $h(p) = h(q)$, no tenim la propietat d'accessibilitat local.
Sigui doncs α amb rang $r \geq 1$. Pel teorema 3.1.4, podem definir coordenades $z, x_1, \ldots, x_r,\ y_1, \ldots, y_r, u_1, \ldots, u_s$ en algun entorn U, on $2r + s + 1$ és la dimensió de M, tals que

$$\alpha = dz + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}(y_i dx_i - x_i dy_i) = 0,$$

i llavors

$$dz = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}(y_i dx_i - x_i dy_i).$$

Donats dos punts $p, q \in U$ qualssevol podem trobar corbes integrals $c : [0,1] \longrightarrow U$ amb $c(0) = p$ i $c(1) = q$. Com estem treballant de manera local, podem assumir que el punt inicial p és l'origen: $z(p) = x_i(p) = y_i(p) = u_i(p) = 0$. Definim el punt final q com $z(q) = z_1, x_i(q) = x_{1i}, y_i(q) = y_{1i}, u_i(q) = u_{1i}$. Degut a que l'expressió de la 1-forma α no depèn de les u_i coordenades, podem triar la corba tu_{1i} per connectar les u_i coordenades de p i q.

En el pla (x_i, y_i) hi ha moltes corbes $(x_i(t), y_i(t))$ que uneixen l'origen amb el punt desitjat (x_{1i}, y_{1i}). Necessitem trobar una que enviï la coordenada z a la coordenada z_1. Per tal de satisfer l'equació $\alpha = 0$, hem de tenir que

$$dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} (x_i dy_i - y_i dx_i) .$$

Integrant aquesta equació obtenim

$$z(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^{r} \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} A_i,$$

on A_i és l'àrea tancada per la corba $(x_i(t), y_i(t))$ i la corda que uneix l'origen amb (x_{1i}, y_{1i}). Per arribar al punt q, la corba $(x_i(t), y_i(t))$ ha de satisfer $z(1) = z_1$. Geomètricament, és evident que una corba $(x_i(t), y_i(t))$ que uneix els punts p i q mentre que tanca l'àrea prescrita per z_1 sempre existeix. Per tant, la corba integral $c(t)$ donada per

$$(z(t), x_1(t), \ldots, x_r(t), y_1(t), \ldots, y_r(t), tu_1(t), \ldots, tu_s(t))$$

té $c(0) = p$ i $c(1) = q$ i satisfà l'equació $\alpha = 0$, i llavors el sistema té la propietat d'accessibilitat local. □

3.2 Sistemes de codimensió dos

Anem ara a considerar els sistemes de Pfaff de codimensió dos. Tornem a estar interessats en la realització de canvis de coordenades de manera que els generadors d'aquests sistemes de Pfaff estiguin en forma normal.

3.2.1 Teorema ***Teorema d'Engel***
Sigui I una codistribució de dimensió dos, formada per

$$I = < \alpha_1, \alpha_2 >$$

de quatre variables. Si les derived flag satisfan

$$\dim I^{(1)} = 1,$$

$$\dim I^{(2)} = 0,$$

llavors existeixen coordenades z_1, z_2, z_3, z_4 tals que

$$I = \{dz_4 - z_3 dz_1, dz_3 - z_2 dz_1\}.$$

Demostració: Triem una base de I adaptada a les *derived flag*, de manera que $I^{(0)} = I = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $I^{(1)} = \{\alpha_1\}$ i $I^{(2)} = \{0\}$. Triem α_3 i α_4 qualssevol per completar la base. Com $I^{(2)} = \{0\}$ tenim que

$$d\alpha_1 \wedge \alpha_1 \neq 0,$$

mentre que

$$(d\alpha_1)^2 \wedge \alpha_1 = 0,$$

ja que es tracta d'una 5-forma en un espai de dimensió 4. Per tant, α_1 té rang 1. Pel Teorema de Pfaff (teorema 3.1.2) sabem que existeix un canvi de coordenades tal que

$$\alpha_1 = dz_4 - z_3 dz_1.$$

Prenent la derivada exterior, tenim que

$$d\alpha_1 = -dz_3 \wedge dz_1 = dz_1 \wedge dz_3.$$

Ara, donat que $\alpha_1 \in I^{(1)}$, la definició del primer sistema derivat implica que

$$d\alpha_1 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0,$$

i llavors

$$dz_1 \wedge dz_3 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0.$$

Per tant, α_2 ha de ser una combinació lineal de dz_1, dz_3 i α_1:

$$\alpha_2 \equiv a(x) dz_3 + b(x) dz_1 \mod \alpha_1.$$

Per definició, això significa que

$$\alpha_2 + \lambda(x)\alpha_1 = a(x) dz_3 + b(x) dz_1.$$

Si $a(x) = 0$ o $b(x) = 0$ significaria que $d\alpha_2 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$ i això contradiu la condició de *derived flag* ja que $I^{(0)} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ i $I^{(1)} = \{\alpha_1\}$ implica $d\alpha_2 \not\equiv 0 \mod \alpha_1, \alpha_2$. Sigui doncs $a(x) \neq 0$, llavors

$$\frac{1}{a(x)}\alpha_2 + \frac{\lambda(x)}{a(x)}\alpha_1 = dz_3 + \frac{b(x)}{a(x)} dz_1,$$

i si diem que $z_2 = -\frac{b(x)}{a(x)}$ aleshores

$$\frac{1}{a(x)}\alpha_2 + \frac{\lambda(x)}{a(x)}\alpha_1 = dz_3 - z_2 dz_1,$$

i per tant

$$I = \{\alpha_1, \alpha_2\} = \left\{\alpha_1, \frac{1}{a(x)}\alpha_2 + \frac{\lambda(x)}{a(x)}\alpha_1\right\} = \{dz_4 - z_3 dz_1, dz_3 - z_2 dz_1\}.$$

□

Cal assenyalar que l'únic lloc de la demostració on s'utilitza la hipòtesi de dimensió és per garantir que $(d\alpha_1)^2 \wedge \alpha_1 = 0$. Si α_1 té rang 1, aquesta igualtat es compleix per definició.

3.2.2 Corol·lari *Sigui $I = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ una codistribució de dimensió 2. Si la derived flag satisfà $\dim I^{(1)} = 1$ i $\dim I^{(2)} = 0$ i $\alpha_1 \in I^{(1)}$ té rang 1, llavors existeixen coordenades z_1, z_2, z_3, z_4 tals que*

$$I = \{dz_4 - z_3 dz_1, dz_3 - z_2 dz_1\}.$$

Demostració: El corol·lari segueix la demostració del teorema d'Engel.

El teorema d'Engel pot ser generalitzat a un sistema amb n variables de configuració i $n-2$ restriccions.

3.2.3 Teorema ***Teorema forma normal de Goursat***
Sigui I un sistema de Pfaff format per la combinació lineal de s 1-formes

$$I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\},$$

en un espai de dimensió $n = s + 2$. Suposem que existeix una forma integrable π tal que $\pi \neq 0 \mod I$ i que satisfà les congruències de Goursat

$$\begin{aligned} d\alpha_i &\equiv -\alpha_{i+1} \wedge \pi \mod \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq s-1, && (3.1)\\ d\alpha_s &\not\equiv 0 \mod I. && (3.2) \end{aligned}$$

Llavors existeix un sistema coordenat $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en el qual el sistema de Pfaff es pot escriure en forma normal de Goursat com

$$I = \{dz_3 - z_2 dz_1, dz_4 - z_3 dz_1, \ldots, dz_n - z_{n-1} dz_1\}.$$

Demostració: Les congruències de Goursat es poden expressar com

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &\equiv -\alpha_2 \wedge \pi \mod \alpha_1, \\ d\alpha_2 &\equiv -\alpha_3 \wedge \pi \mod \alpha_1, \alpha_2, \\ &\vdots \\ d\alpha_{s-1} &\equiv -\alpha_s \wedge \pi \mod \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, \\ d\alpha_s &\equiv -\alpha_{s+1} \wedge \pi \mod \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \end{aligned}$$

on $\alpha_{s+1} \notin I$. Es pot demostrar que $\{\alpha_{s+1}, \pi\}$ ha de formar un complement a I. Aquesta base satisfà les congruències de Goursat i s'adapta a la *derived flag* de I:

$$\begin{aligned} I^{(0)} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}, \\ I^{(1)} &= \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}\}, \\ &\vdots \\ I^{(s-1)} &= \{\alpha_1\}, \\ I^{(s)} &= \{0\}. \end{aligned}$$

Per les congruències de Goursat,

$$d\alpha_1 \equiv -\alpha_2 \wedge \pi \mod \alpha_1,$$

el que significa que

$$d\alpha_1 = -\alpha_2 \wedge \pi + \alpha_1 \wedge \eta$$

per una certa 1-forma η. Però llavors tenim que

$$\begin{aligned} d\alpha_1 \wedge \alpha_1 &= -\alpha^2 \wedge \pi \wedge \alpha_1 \neq 0, \\ (d\alpha_1)^2 \wedge \alpha_1 &= 0, \end{aligned}$$

el que significa que α_1 té rang 1. Pel teorema de Pfaff (teorema 3.1.2), podem suposar que, multiplicant α_1 per un cert factor si és necessari, α_1 es pot expressar com

$$\alpha_1 = dz_n - z_{n-1}dz_1$$

per a uns certs z_1, z_{n-1}, z_n. A més, pel corol·lari 3.2.2 podem expressar α_2 com

$$\alpha_2 = dz_{n-1} - z_{n-2}dz_1. \tag{3.3}$$

En aquestes noves coordenades tenim

$$d\alpha_1 \wedge \alpha_1 = -dz_{n-1} \wedge dz_1 \wedge dz_n.$$

Ara tenim que

$$d\alpha_1 \wedge \alpha_1 \wedge \pi = \pi \wedge (-dz_{n-1} \wedge dz_1 \wedge dz_n) = \pi \wedge (-\alpha_2 \wedge \pi \wedge \alpha_1) = 0,$$

i llavors π és una combinació lineal de dz_1, dz_{n-1}, dz_n. Noti's que $dz_{n-1} \equiv z_{n-2}dz_1 \mod \alpha_1, \alpha_2$,

$$\begin{aligned} \pi &= adz_1 + bdz_{n-1} + cdz_n, \\ &= adz_1 + bz_{n-2}dz_1 + cz_{n-1}dz_1 \mod \alpha_1, \alpha_2 \end{aligned}$$

on $\psi = a + bz_{n-2} + cz_{n-1}$ és diferent de 0, ja que hem assumit que $\pi \neq 0 \mod I$. Per les congruències de Goursat tenim que

$$d\alpha_2 = -\alpha_3 \wedge \pi \mod \alpha_1, \alpha_2,$$

mentre que per l'equació (3.3) tenim

$$d\alpha_2 = -dz_{n-2} \wedge dz_1,$$

i així

$$-dz_{n-2} \wedge dz_1 = -\alpha_3 \wedge \pi \mod \alpha_1, \alpha_2,$$

el que significa que

$$\alpha_3 = \lambda(x)dz_{n-2} \mod dz_1, \alpha_1, \alpha_2,$$

i si prenem $z_{n-3} = 1/\lambda(x)$ tenim que

$$\alpha_3 = dz_{n-2} - z_{n-3}dz_1 \mod \alpha_1, \alpha_2,$$

i llavors podem tenir

$$\alpha_3 = dz_{n-2} - z_{n-3}dz_1.$$

Si inductivament seguim aquest procediment fent servir les congruències de Goursat obtenim

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= dz_{n-3} - z_{n-4}dz_1, \\ &\vdots \\ \alpha_s &= dz_3 - z_2dz_1. \end{aligned}$$

Ara, per les congruències de Goursat tenim que

$$d\alpha_s \neq 0 \mod I,$$

i llavors

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_s \wedge d\alpha_s \neq 0.$$

Si substituïm les α_i en l'anterior expressió obtenim

$$dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n \neq 0,$$

i llavors les funcions $z_1, \ldots, z_n$ pot servir com un sistema de coordenades locals. □

El següent exemple il·lustra el valor del teorema de Goursat aplicant-lo per a linealitzar un sistema no lineal. Noti's que les corbes integrals d'un sistema en forma normal de Goursat estan completament determinades per dos funcions arbitràries en una variable i les seves derivades. Per exemple, quan $z_1(\tau)$ i $z_s(\tau)$ són conegudes, totes les altres coordenades estan determinades per

$$z_i = \frac{\dot{z}_{i+1}(\tau)}{\dot{z}_i(\tau)},$$

on el punt ens indica la derivada estàndar respecte la variable independent τ. Degut a aquesta propietat, aquestes dues coordenades s'acostumen a denominar *sortides planes* del sistema de Pfaff.

3.2.4 Exemple Realimentació lineal per la forma normal de Goursat
Considerem el següent sistema no lineal amb s variables d'estat i una variable d'entrada

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_s, u), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_s, u), \\ &\vdots \\ \dot{x}_s &= f_s(x_1, \ldots, x_s, u). \end{aligned}$$

Equivalentment, podem veure el següent sistema de Pfaff

$$I = \{dx_i - f_i(x_1, \ldots, x_s, u)dt\}, \quad 1 \leq i \leq s.$$

El sistema és de codimensió 2 ja que tenim s restriccions i $s+2$ variables, anomenades $x_1, \ldots, x_s, u, t$. Assumim que la forma $\pi = dt$ satisfà les congruències de Goursat.

Llavors, pel teorema de Goursat (teorema 3.2.3) existeix un canvi de coordenades $z = \Phi(x, u, t)$ tal que I està generat per

$$I = \{dz_3 - z_2dz_1,\, dz_4 - z_3dz_1,\, \ldots,\, dz_{s+2} - z_{s+1}dz_1\}.$$

La distribució anul·ladora de la codistribució anterior és

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= v_1, \\
\dot{z}_2 &= v_2, \\
\dot{z}_3 &= z_2v_1, \\
&\vdots \\
\dot{z}_{s+2} &= z_{s+1}v_1,
\end{aligned}$$

que, si posem $v_1 = 1$, és clarament un sistema lineal. Si resulta que la coordenada z_1 correspon al temps en la coordenada original, és a dir, $z_1 = t$, llavors la connexió és encara més clara. El teorema de Goursat, per tant, es pot utilitzar per linealitzar sistemes no lineals d'una única entrada que satisfacin les congruències de Goursat.

3.3 La forma normal estesa de Goursat

Tot i que la forma normal de Goursat és poderosa, es limita als sistemes de Pfaff de codimensió dos. Per a l'estudi dels sistemes de Pfaff de més codimensió, anem a presentar la forma normal de Goursat estesa. Mentre que la forma normal de Goursat pot considerar-se com una única cadena d'integradors, la forma normal estesa de Goursat consisteix en moltes cadenes d'integradors. Considereu la definició:

3.3.1 Definició Un sistema de Pfaff I en $\mathbb{R}^{n+m+1}$ de codimensió $m+1$ és una *forma normal estesa de Goursat* si està generada per n restriccions de la forma

$$I = \{dz_i^j - z_{i+1}^j dz_0 : i = 1, \ldots, s_j;\ j = 1, \ldots, m\}. \tag{3.4}$$

Aquesta és una extensió directa de la forma normal de Goursat, i totes les corbes integrals de (3.4) estan determinades per les $m+1$ funcions $z_0(t), z_1^1(t), \ldots, z_1^m(t)$ i les seves derivades respecte el paràmetre t. La notació s'ha canviat lleugerament; les restriccions canòniques són ara $dz_i^j - z_{i+1}^j dz_0$, mentre que abans eren $dz_i - z_{i-1}dz_1$. Per la forma de Goursat, la restricció en l'últim sistema derivat no trivial era $dz_n - z_{n-1}dz_1$; en la forma normal estesa de Goursat, serà $dz_1^j - z_2^j dz_0$. Ens referim al conjunt de restriccions amb el superíndex j com la j-èssim *torre* (la raó d'aquest nom es veurà més clara després de calcular la *derived flag*).

Les condicions per a la conversió d'un sistema de Pfaff a forma normal estesa de Goursat venen donades pel següent teorema:

3.3.2 Teorema *Sigui I un sistema de Pfaff de codimensió $m+1$. Si (i només si) existeix un conjunt de generadors $\{\alpha_i^j : i = 1, \ldots, s_j;\ j = 1, \ldots, m\}$ per I i una 1-forma integrable π tal que per tot j,*

$$\begin{aligned}
d\alpha_i^j &\equiv -\alpha_{i+1}^j \wedge \pi, \qquad \mod I^{(s_j - i)} \quad i = 1, \ldots, s_j - 1, \\
d\alpha_i^j &\not\equiv 0 \qquad \mod I,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

llavors existeix un conjunt de coordenades z tals que I és una forma normal estesa de Goursat,

$$I = \{dz_i^j - z_{i+1}^j dz_0 : i = 1, \ldots, s_j;\ j = 1, \ldots, m\}.$$

Si la 1-forma π que satisfà les congruències (3.5) no és integrable, aleshores el teorema de Frobenius no es pot utilitzar per trobar les coordenades. En el cas especial on $s_1 > s_2$, és a dir, hi ha una torre que és escrictament més llarga que les altres, es pot demostrar que existeix π qualsevol tal que satisfaci les congruències (amb un reescalament de les formes de la base). Tot i així, si $s_1 = s_2$, o hi ha almenys dues torres que són les més llargues, això ja no és cert. Per tant, la suposició de que π sigui integrable és necessària per al cas general.

Si I es pot convertir en una forma normal estesa de Goursat, llavors la *derived flag* de I té l'estructura

$$\begin{array}{rclllllllll}
I & = & \{\alpha_1^1, & \ldots & \ldots & \alpha_{s_1-1}^1, & \alpha_{s_1}^1, & \ldots & \alpha_1^m, & \ldots & \alpha_{s_m}^m\}, \\
I^{(1)} & = & \{\alpha_1^1, & \ldots & \ldots & \alpha_{s_1-1}^1, & & \ldots & \alpha_1^m, & \ldots & \}, \\
 & & \vdots & & & \iddots & & \vdots & \iddots & & \\
I^{(s_m-1)} & = & \{\alpha_1^1, & \ldots & \alpha_{s_1-s_m+1}^1, & & & \ldots & \alpha_1^m\}, & & \\
 & & \vdots & & \iddots & & & & & & \\
I^{(s_1-2)} & = & \{\alpha_1^1, & \alpha_2^1\}, & & & & & & & \\
I^{(s_1-1)} & = & \{\alpha_1^1\}, & & & & & & & & \\
I^{(s_1)} & = & \{0\}, & & & & & & & &
\end{array}$$

on les formes a cada nivell s'han organitzat de manera que es puguin veure les diferents torres. Els superíndexos j indiquen la torre a la que pertany cada forma, i el subíndex i indica la posició de la forma a la j-èsima torre. Hi ha s_j formes en la j-èsima torre.

4
Procediments

En aquesta secció donarem un seguit de passos i explicacions que cal seguir per trobar el comportament de les variables d'estat d'un sistema donat. En aquest treball es consideren sistemes de control sense *drift*, és a dir, sistemes de la forma:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{\overline{m}} g_i u_i, \quad x \in \mathbb{R}^{\overline{n}}$$

que s'anomenen *sistemes no holònoms* o *sistemes driftless*, on $\overline{m}$ és el nombre de controls de què disposem i $\overline{n}$ la dimensió de l'espai on treballem.

La distribució associada a aquest tipus de sistemes està generada pels camps vectorials, és a dir:

$$\Delta = \langle g_1, g_2, \ldots, g_{\overline{m}} \rangle$$

El dual d'aquesta distribució és un subespai de l'espai cotangent definit, en aquest cas, com segueix:

$$\Delta^{\perp} = \langle \omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^{\overline{n}}) \,|\, \omega \lrcorner g = 0, \forall g \in \Delta \rangle$$

on les 1-formes han de ser linealment independents. Fem notar que com $\dim\Delta = \overline{m}$, aleshores $\dim\Delta^{\perp} = \overline{n} - \overline{m}$.

Per la definició (2.2.1), el sistema de Pfaff associat al nostre sistema de control és:

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{\overline{n}-\overline{m}} = 0$$

que serà un sistema de codimensió $\overline{m}$.

Al capítol anterior hem vist com expressar els elements de la base de la codistribució en la forma normal de Goursat o en la forma normal estesa de Goursat, en cas que el sistema de Pfaff sigui de codimensió dos o codimensió superior respectivament.

Aíxí ja sigui seguint la demostració constructiva dels teoremes de Pfaff i d'Engel o bé seguint la teoria desenvolupada sobre la forma normal estesa de Goursat, d'un sistema de Pfaff en $\mathbb{R}^{n+m+1}$ on $\overline{n} = n + m + 1$, som capaços de trobar cadenes d'integradors de manera que, si la codimensió del sistema de Pfaff és $\overline{m} = m + 1$, l'ideal generat per les 1-formes de la codistribució queda expressat com:

$$I = \{\omega_i^j = dz_i^j - z_{i+1}^j dz_0 : i = 1, \ldots, s_j,\ j = 1, \ldots, m\}$$

on s_j compleix que $\overline{n} = m + 1 + \sum_{j=1}^{m} s_j$.

Un cop trobat el canvi de les 1-formes a la forma normal de Goursat estesa, volem trobar $m + 1$ camps que en forma genèrica els expressem com:

$$\overline{g}_k = \left(a_0, a_1^1, \ldots, a_{s_1}^1, a_{s_1+1}^1, \ldots, a_1^m, \ldots, a_{s_m}^m, a_{s_m+1}^m\right), \quad k = 0, \ldots, m$$

tals que la contracció amb totes les 1-formes sigui nul·la, és a dir, que per tot k:

$$\overline{g}_k \lrcorner \left\{ \begin{array}{c} dz_1^j - z_2^j \, dz_0 \\ dz_2^j - z_3^j \, dz_0 \\ \vdots \\ dz_{s_j}^j - z_{s_j+1}^j \, dz_0 \end{array} \right\} = 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

Una possible solució és g_0 tal que:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1^j &= z_2^j \\ &\vdots \\ a_{s_j} &= z_{s_j+1}^j \end{aligned}$$

i

$$g_j = \frac{\partial}{\partial z_{s_j+1}^j}, \quad j = 1, \ldots, m$$

De manera que el sistema en les noves variables d'estat és:

$$
\left\{
\begin{array}{ccc}
\dot{z}_0 & = & u_0 \\
\dot{z}_1^1 & = & z_2^1 u_0 \\
 & \vdots & \\
\dot{z}_{s_1}^1 & = & z_{s_1+1}^1 u_0 \\
\dot{z}_{s_1+1}^1 & = & u_1 \\
\dot{z}_1^2 & = & z_2^2 u_0 \\
 & \vdots & \\
\dot{z}_{s_2}^2 & = & z_{s_2+1}^2 u_0 \\
\dot{z}_{s_2+1}^2 & = & u_2 \\
 & \vdots & \\
\dot{z}_1^m & = & z_2^m u_0 \\
 & \vdots & \\
\dot{z}_{s_m}^m & = & z_{s_m+1}^m u_0 \\
\dot{z}_{s_m+1}^m & = & u_m
\end{array}
\right. \tag{4.1}
$$

que anomenarem sistema en *forma canònica associada a la forma de Goursat.*

Sovint, el sistema trobat fent la contracció dels camps amb les 1-formes i el sistema obtingut derivant les variables $\{z\}$ no és el mateix. Per aconseguir que aquest últim estigui en la forma canònica de Goursat, caldrà fer una realimentació. Finalment establirem el difeomorfisme que relaciona les variables d'estat $\{x\}$ i $\{z\}$. Notem que quan sigui convenient, caldrà afegir noves variables d'estat per aconseguir les mateixes dimensions.

Sigui la funció $y = (y_1, \ldots, y_m)$ amb m el nombre de controladors del sistema. Si es pot escriure les variables d'estat i els controladors en funció de y i llurs derivades, aleshores direm que $y_1, \ldots, y_m$ són les *sortides planes* o *flat outputs* [3] del sistema.

Donada la definició anterior, és clar que:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= z_0 \\
y_1 &= z_1^1 \\
&\vdots \\
y_m &= z_1^m
\end{aligned}
$$

és una familia finita de sortides planes per al sistema (4.1), ja que podem expressar les variables $\{z\}$ en funció de les flat outputs i llurs derivades, veiem-ho:

$$
\left\{
\begin{array}{c}
z_2^j = \frac{\dot{z}_1^j}{u_0} = \frac{\dot{y}_j}{\dot{y}_0} \\
z_3^j = \frac{\dot{z}_2^j}{u_0} = \frac{\ddot{y}_j}{\dot{y}_0} \\
\vdots \\
z_{s_j+1}^j = \frac{\dot{z}_{s_j}^j}{u_0} = \frac{y_j^{(s_j)}}{\dot{y}_0}
\end{array}
\right.
$$

Notem que, per a establir el difeomorfisme entre les variables $\{z\}$ i

$$\{y_0, \dot{y_0}, y_1, \ldots, y_1^{(s_1)}, \ldots, y_m, \ldots, y_m^{(s_m)}\}$$

cal afegir u_0 com a variable d'estat. Per tant, cal cosiderar la prolongació $z_{m+1} = u_0$ i $\dot{z}_{m+1} = v$.

L'objectiu que es vol assolir en un sistema és que donades unes condicions inicials i finals per a les variables d'estat s'aconsegueixi trobar uns controls dels motors a cada instant de temps tal que les trajectòries solució del sistema original passin per c_i i c_f.

Imposarem, doncs, les condicions c_i i c_f per a les variables d'estat originals. Mitjançant el difeomorfisme $\{x\} \leftrightarrow \{z\}$ trobem les corresponents condicions inicials i finals per a les $\{z\}$ que denotarem per $\overline{c_i}$ i $\overline{c_f}$. Amb aquestes dades i afegint condicions per a z_{m+1}, trobem finalment les condicions que han de complir les flat outputs i les seves derivades gràcies al difeomorfisme $\{z\} \leftrightarrow \{y\}$ i que denotarem per $\hat{c_i}$ i $\hat{c_f}$.

Notem que per a cada flat output $y_j, \quad j = 1, \ldots, m$ tenim $s_j + 1$ condicions inicials i finals i per y_0 dues condicions incials i finals.

Donades $s_j + 1$ condicions inicials i finals (en total $2(s_j + 1)$ condicions), per tot j, existirà un únic polinomi de grau $2s_j + 1$ que denotarem per $P_{s_j}(t)$ tal que:

$$y_j(t) = P_{s_j}(t), \quad j = 1, \ldots, m$$

Imposant les condicions anteriors, es determinen els polinomis interpoladors i, conseqüentment, es troba una expressió en funció del temps per a les flat outputs

$$y_0(t), y_1(t), \ldots, y_m(t)$$

Evidentment les seves derivades seran també polinomis.

Prèviament hem comentat que les variables $\{z\}$ es poden expressar en funció de les flat outputs i les seves derivades que a la vegada es poden expressar en funció del temps.

El sistema de les sortides planes és:

$$\left\{ \begin{array}{r} \ddot{y}_0 = \alpha_0 \\ y_1^{(s_1+1)} = \alpha_1 \\ \vdots \\ y_m^{(s_m+1)} = \alpha_m \end{array} \right.$$

que, a la vegada és:

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{y}_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{z}_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z_{m+1} = v \\ y_1^{(s_1+1)} = (z^1_{s_1+1}z_{m+1})' = \dot{z}^1_{s_1+1}z_{m+1} + \dot{z}_{m+1}z^1_{s_1+1} = u_1 z_{m+1} + v z^1_{s_1+1} \\ \vdots \\ y_m^{(s_m+1)} = (z^m_{s_m+1}z_{m+1})' = \dot{z}^m_{s_m+1}z_{m+1} + \dot{z}_{m+1}z^m_{s_m+1} = u_m z_{m+1} + v z^m_{s_m+1} \end{cases}$$

Per tant,

$$\alpha_0 = v$$
$$\alpha_j = u_j z_{m+1} + v z^j_{s_j+1}, \quad j = 1, \dots, m$$

4.1 Control de l'estabilitat de solucions

El que volem és veure que el controlador que acabem de trobar és robust respecte a canvis en les condicions inicials. És a dir, donades unes condicions inicials amb un cert error respecte les condicions amb les que hem dissenyat el controlador, les dades finals que obtindrem es troben en una bola de radi ϵ icentre les condicions finals donades en el disseny del controlador.

Per a comprovar-ho, definim la dinàmica de l'error com

$$\bar{y}_i^{(k_i+1)} = \bar{w}_i \tag{4.2}$$

on k_i és la s_i de la secció anterior , i

$$\bar{y}_i = y_i^d(t) - y_i(t) \tag{4.3}$$

és l'error entre la trajectòria desitjada $y_i^d(t)$, és a dir, la que hem calculat en el disseny del controlador, i $y_i(t)$, que és la trajectòria en funció de les variables d'estat. De manera semblant

$$\bar{w}_i = w_i^d(t) - w_i(t) \tag{4.4}$$

on $w_i^d(t)$ és el control desitjat, és a dir, el que hem calculat en el disseny del controlador, i $w_i(t)$ és el nou control.

Per tant, per trobar $y_i(t)$ i $w_i(t)$ només hem d'aïllar-les en les equacions (4.3) i (4.4). Ara bé, per cadascuna d'aquestes cadenes d'integradors, podem construir una llei de control de la forma:

$$\bar{w}_i = m_0\bar{y}_i + m_1\dot{\bar{y}}_i + \ldots + m_{k_i}\bar{y}_i^{(k_i)}. \tag{4.5}$$

Ara hem de triar els guanys $m_0, m_1, \ldots, m_{k_i}$ de tal manera que el sistema

$$\bar{y}_i^{(k_i+1)} - m_{k_i}\bar{y}_i^{(k_i)} - \ldots - m_1\dot{\bar{y}}_i - m_0\bar{y}_i = 0 \tag{4.6}$$

sigui assimptòticament estable. Això equival a que el polinomi

$$P_i(\lambda) = \lambda^{k_i+1} - m_{k_i}\lambda^{k_i} - \ldots - m_1\lambda - m_0 \tag{4.7}$$

sigui Hurwitz.

Un cop trobats $m_0, \ldots, m_{k_i}$, es té

$$\bar{w}_i = \bar{y}_i^{(k_i+1)} = \sum_{l=0}^{k_i} m_l \bar{y}_i^{(l)} \tag{4.8}$$

i el control buscat és

$$w_i(t) = w_i^d(t) - \bar{w}_i = w_i^d(t) - \sum_{l=0}^{k_i} m_l \left[(y_i^d)^{(l)}(t) - y_i^{(l)} \right] \tag{4.9}$$

5
Robot pla a l'espai

Considerem el model d'un robot pla que es mou lliurement a l'espai amb gravetat 0. El model consisteix en una base en la qual s'ha montat un braç robòtic, i aquest braç robòtic està format per 2 braços encadenats. El model de tot el sistema consisteix en 3 enllaços rígids connectats per juntes de revolució en sèrie, i numerats del 0 a 2 com es pot observar a la figura (5).

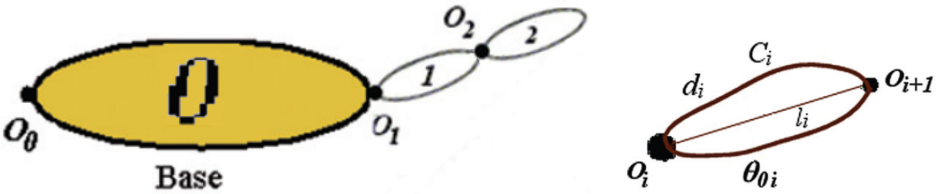


Figura 5.1: Model d'un robot pla a l'espai i model de l'enllaç i

La posició on es troba l'enllaç i és O_i (expressat en termes de θ_0, θ_1 i θ_2), el centre de massa de l'enllaç i és C_i, la longitud de l'enllaç i és $l_i = O_iO_{i+1}$, el diàmetre de l'enllaç és $d_i = I_iC_i$, el moment d'inercia de l'enllaç i respecte el centre de massa és I_i, la massa de l'enllaç i és m_i, i la suma de les masses dels enllaços és M.

Considerem el cas en que el centre de massa de l'últim enllaç està en l'última articulació, és a dir, el paràmetre d_2 s'esvaeix. Cal tenir en compte que això no és una condició que es satisfaci trivialment per un enllaç. S'ha d'aconseguir a través del disseny, afegint un contrapès en l'última junta de forma que el centre de massa del darrer enllaç caigui a l'enllaç que precedeix a l'articulació.

Assumim doncs $d_2 = 0$ i que totes les forces externes i els moments del sistema són 0. Per tant, per la conservació del moment angular, l'equació del moment angular per a un robot amb tres enllaços és

$$(a_o + a_1 \cos\theta_1)\dot{\theta}_0 - (b_o + b_1 \cos\theta_1)\dot{\theta}_1 - c_0\dot{\theta}_2 = 0 \tag{5.1}$$

on els a_i, b_i i c_i valen

$$\begin{aligned}
a_0 &= m_1m_2(l_1-d_1)^2+m_0(l_0-d_0)^2(m_1+m_2)+(I_0+I_1+I_2)M+m_0(m_2l_1^2+m_1d_1^2),\\
a_1 &= 2m_0(l_0-d_0)(m_2l_1+m_1d_1),\\
b_0 &= -(m_1m_2(l_1-d_1)^2+(I_1+I_2)M+m_0(m_2l_1^2+m_1d_1^2)),\\
b_1 &= -m_0(l_0-d_0)(m_2l_1+m_1d_1),\\
c_0 &= -I_2M.
\end{aligned}$$

Aquesta equació pot ser reescrita com un sistema de control si es considera que θ_1 i θ_2 poden ser controlats per motors

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\dot\theta_0 &=& \dfrac{b_0+b_1\cos\theta_1}{a_0+a_1\cos\theta_1}u_1-\dfrac{c_0}{a_0+a_1\cos\theta_1}u_2\\
\dot\theta_1 &=& u_1\\
\dot\theta_2 &=& u_2
\end{array}\right. \tag{5.2}$$

Per tal d'evitar singularitats, ens hem d'assegurar que $a_0+a_1\cos\theta_1\neq 0$. Com a_0 i a_1 són positives i $|\cos\theta_1|\leq 1$, és suficient amb demostrar $a_0>a_1$ o, equivalentment, $a_0-a_1>0$. Calculant

$$\begin{aligned}
a_0-a_1 &= m_1m_2(l_1-d_1)^2+m_0(l_0-d_0)^2(m_1+m_2)+(I_0+I_1+I_2)M\\
&+ m_0(m_2l_1^2+m_1d_1^2)-2m_0(l_0-d_0)(m_2l_1+m_1d_1)\\
&= m_1m_2(l_1-d_1)^2+m_0m_2(l_0-d_0-l_1)^2+m_0m_1(l_0-d_0-d_1)^2\\
&+ (I_0+I_1+I_2)M
\end{aligned}$$

veïem que a_0-a_1 és sempre positiu.

El sistema de Pfaff associat al sistema de control és

$$\omega=(a_o+a_1\cos\theta_1)\dot\theta_0-(b_o+b_1\cos\theta_1)\dot\theta_1-c_0\dot\theta_2=a(\theta_1)\dot\theta_0+b(\theta_1)\dot\theta_1+c\theta_2=0.$$

Anem a expressar ara ω de forma normal mitjançant un canvi de coordenades. Per poder aplicar el teorema de Pfaff primer hem de calcular el rang de ω.

Donat que

$$d\omega=\left(-\frac{\partial a}{\partial\theta_1}+\frac{\partial b}{\partial\theta_0}\right)d\theta_0\wedge d\theta_1+\left(-\frac{\partial a}{\partial\theta_2}+\frac{\partial c}{\partial\theta_0}\right)d\theta_0\wedge d\theta_2+\left(-\frac{\partial b}{\partial\theta_2}+\frac{\partial c}{\partial\theta_1}\right)d\theta_1\wedge d\theta_2$$

la derivada exterior de ω és

$$d\omega=a_1\sin\theta_1\,d\theta_0\wedge d\theta_1.$$

És fàcil veure que el rang de ω és 1.

$$d\omega\wedge\omega \;=\; -a_1c_0\sin\theta_1\,d\theta_0\wedge d\theta_1\wedge d\theta_2.$$

Excepte per a $\theta_1=k\pi$, amb $k\in\mathbb{Z}$, $d\omega\wedge\omega\neq 0$. Com $d\omega\wedge\omega$ és una 3-forma en un espai de dimensió 3, llavors $(d\omega)^2\wedge\omega=0$ i per tant el rang és 1. Així doncs, pel teorema de Pfaff, podem escriure ω com $\bar{\omega} = dz_3 - z_2 dz_1$. Anem doncs, seguint la demostració del teorema de Pfaff, a trobar una funció $f_1 = f_1(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ tal que

$$d\omega \wedge \omega \wedge df_1 = 0$$

és a dir,

$$-a_1 c_0 \sin\theta_1 \, d\theta_0 \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge df_1 = 0$$

És veu fàcilment que una possibilitat és que $f_1 = -\theta_0$. Ara volem trobar una funció $f_2 = f_2(\theta, \theta_1, \theta_2)$ de manera que

$$\begin{aligned} \omega \wedge df_1 \wedge df_2 &= 0 \\ df_1 \wedge df_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Reescrivint $\omega = df_2 \wedge g_1 df_1$ hem de triar g_1 i f_2 de manera que s'acompleixi la igualtat. Donat que $\omega = (a_o + a_1\cos\theta_1)\dot{\theta}_0 - (b_o + b_1\cos\theta_1)\dot{\theta}_1 - c_0\dot{\theta}_2$ i que $f_1 = -\theta_0$, prendrem $g_1 = a_0 + a_1\cos\theta_1$ i $df_2 = -(b_0 + b_1\cos\theta_1)d\theta_1 - c_0 d\theta_2$, de manera que $f_2 = -b_0\theta_1 - b_1\sin\theta_1 - c_0\theta_2$.

Prenent ara $z_1 = f_1$, $z_2 = g_1$ i $z_3 = f_2$, les noves coordenades són

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1 &=& -\theta_0 \\ z_2 &=& a_0 + a_1\cos\theta_1 \\ z_3 &=& -b_0\theta_1 - b_1\sin\theta_1 - c_0\theta_2 \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Ara bé, per expressar el sistema inicial en les noves coordenades hem de trobar $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$ tals que $\dot{z} = \bar{g}_1\bar{u}_1 + \bar{g}_2\bar{u}_2$. Hem de trobar aquestes $\bar{g}$ fent servir que $\bar{g}_1 \lrcorner \bar{\omega} = 0$ i $\bar{g}_2 \lrcorner \bar{\omega} = 0$. Sigui $\bar{g} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^\perp$ i com $\bar{\omega} = dz_3 - z_2 dz_1 = (-z_2, 0, 1)$, aleshores

$$\bar{g} \lrcorner \bar{\omega} = -\alpha_1 z_2 + \alpha_3 = 0$$

Aíxí doncs, la igualtat es compleix agafant $\bar{g} = (0, \alpha_2, 0)^\perp$ per a qualsevol valor de α_2 o bé per a $\bar{g} = (\alpha_1, 0, z_2\alpha_1)^\perp$ per a qualsevol valor de α_1. Prenent $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = 1$ obtenim $\bar{g}_1 = (0, 1, 0)^\perp$ i $\bar{g}_2 = (1, 0, z_2)^\perp$.

Per tant

$$\dot{z} = \bar{g}_1\bar{u}_1 + \bar{g}_2\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{u}_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \bar{u}_2.$$

Ara bé, per la definició dels canvis de coordenades que hem donat, sabem que

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} \dot{z}_1 &=& -\dot{\theta}_0 &=& -\dfrac{b_0 + b_1\cos\theta_1}{a_0 + a_1\cos\theta_1}u_1 - \dfrac{c_0}{a_0 + a_1\cos\theta_1}u_2 &=& \bar{u}_2, \\ \\ \dot{z}_2 &=& -a_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1 &=& -a_1\sin\theta_1 u_1 &=& \bar{u}_1, \\ \\ \dot{z}_3 &=& -b_0\dot{\theta}_1 - b_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1 - c_0\dot{\theta}_2 &=& -(b_0 + b_1\cos\theta_1)u_1 - c_0 u_2 &=& z_2\bar{u}_2. \end{array} \right. \tag{5.4}$$

Per tant, els nous controls $\bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$ són

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= -a_1\sin\theta_1 u_1, \\ \\ \bar{u}_2 &= -\frac{b_0 + b_1\cos\theta_1}{a_0 + a_1\cos\theta_1}u_1 - \frac{c_0}{a_0 + a_1\cos\theta_1}u_2. \end{aligned}$$

Tot seguit trobarem les sortides planes del sistema: $y_1(z, \bar{u})$ i $y_2(z, \bar{u})$. Donat que $\dot{z}_1, \dot{z}_2$ i $\dot{z}_3$ depenen de $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ i z_2, prendrem com a sortides planes $y_1 = z_1$ i $y_2 = z_3$.

Anem a veure si realment aquestes són les sortides planes. Calculem doncs el canvi de variables i la realimentació necessària per linealitzar el sistema.

Primerament, trobem el control $\bar{u}_2$ en funció de $\dot{y}_1$

$$\dot{y}_1 = \dot{z}_1 = \bar{u}_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_2 = \dot{y}_1,$$

i en segon lloc, trobem z_2 en funció de $\dot{y}_1$ i de $\dot{y}_2$

$$\dot{y}_2 = \dot{z}_3 = z_2\bar{u}_2 = z_2\dot{y}_1 \quad \Rightarrow \quad z_2 = \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}.$$

D'aquesta manera podem expressar z_1, z_2 i z_3 en funció de $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$. Però encara no podem establir un difeomorfisme. Hem de prolongar el sistema definint una nova variable d'estat z_4. Prendrem

$$z_4 = \bar{u}_2$$

com a nova variable d'estat, i dos nous controls

$$v_1 = \bar{u}_1, \qquad v_2 = \dot{\bar{u}}_2$$

de manera que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{z}_1 & = & z_4 \\ \dot{z}_2 & = & v_1 \\ \dot{z}_3 & = & z_2 z_4 \\ \dot{z}_4 & = & v_2 \end{array} \right.$$

Per tant, el canvi de variables en el sistema prolongat ve donat per

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1 & = & y_1 \\ z_2 & = & \dot{y}_2/\dot{y}_1 \\ z_3 & = & y_2 \\ z_4 & = & \dot{y}_1 \end{array} \right.$$

Ara si que podem expressar les variables $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$ en termes de z_1, z_2, z_3 i z_4.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & z_1 \\ \dot{y}_1 & = & z_4 \\ y_2 & = & z_3 \\ \dot{y}_2 & = & z_2 z_4 \end{array} \right.$$

i la realimentació ens queda

$$\begin{array}{lclclcl} w_1 & = & \ddot{y}_1 & = & \dot{z}_4 & = & v_2, \\ w_2 & = & \ddot{y}_2 & = & \dot{z}_2 z_4 + z_2 \dot{z}_4 & = & z_4 v_1 + z_2 v_2. \end{array}$$

De manera inversa, podem calcular els controls v_1 i v_2 en funció de $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, w_1$ i w_2 com

$$\begin{array}{lcl} v_1 & = & \dfrac{w_2 - \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1} w_1}{\dot{y}_1}, \\ v_2 & = & w_1. \end{array}$$

I un cop obtinguts v_1 i v_2 podem expressar els controls $\bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$ en funció de z_1, z_2, z_3, z_4, v_1 i v_2 com

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= v_1, \\ \dot{\bar{u}}_2 &= v_2. \end{aligned}$$

Finalment, els controls inicials u_1 i u_2 es troben resolent el sistema

$$\begin{pmatrix} -a_1 \sin\theta_1 & 0 \\ -b_0 - b_1\cos\theta_1 & -c_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ z_2\bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

Anem a aplicar tots aquests càlculs a unes dades concretes. Donades ara unes condicions inicials i finals, $c_i = (\theta_0(t_0), \theta_1(t_0), \theta_2(t_0), \bar{u}_2(t_0))$ i $c_f = (\theta_0(t_f), \theta_1(t_f), \theta_2(t_f), \bar{u}_2(t_f))$, volem trobar els controls $u_1(t)$ i $u_2(t)$ per a poder resoldre el sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0 = \dfrac{b_0 + b_1\cos\theta_1}{a_0 + a_1\cos\theta_1} u_1 - \dfrac{c_0}{a_0 + a_1\cos\theta_1} u_2 \\ \dot{\theta}_1 = u_1(t) \\ \dot{\theta}_2 = u_2(t) \end{cases}$$

i finalment poder simular la trajectòria de les variables θ_0, θ_1 i θ_2 des de t_0 fins a t_f.

Per a poder treballar amb el sistema linealitzat, necessitem passar les condicions inicials i finals expressades en variables θ_0, θ_1, θ_2 i u_2 a variables $y_1, \dot{y}_1, y_2$ i $\dot{y}_2$.

Prenem $m_0 = m_1 = m_2 = 1$, $l_0 = l_1 = 2$, $d_0 = l_0/2$, $d_1 = l_l/2$, $I_0 = I_1 = I_2 = 1$, $t_0 = 0$ i $t_f = 1$. D'aquesta manera els a_i, b_i i c_0 valen

$$\begin{aligned} a_0 &= 17, \\ a_1 &= 6, \\ b_0 &= -12, \\ b_1 &= -3, \\ c_0 &= -3. \end{aligned}$$

Sabem pel teorema de la inversa que existeix el difeomorfisme de $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \bar{u}_2)$ a (z_1, z_2, z_3, z_4) si la Jacobiana del canvi no s'anul·la enlloc. És a dir, si

$$|Jz| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_0 - b_1\cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a_1 c_0 \sin\theta_1 \neq 0.$$

El mateix passa pel cas del difeomorfisme que envia (z_1, z_2, z_3, z_4) a $(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)$. És a dir,

$$|Jz| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z_4 & 0 & z_2 \end{vmatrix} = z_4 = \bar{u}_2 \neq 0.$$

Per tant, les úniques restriccions que tenim a l'hora de triar $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ i $\bar{u}_2$ és que $\bar{u}_2 \neq 0$ i que per a qualsevol $k \in \mathbb{N}$, $\theta_1 \neq k\pi$.

Prenem doncs com a dades inicials i finals els següents valors

$$\begin{aligned} c_i &= (\theta_0(0), \theta_1(0), \theta_2(0)) = \left(0, \frac{\pi}{6}, 0\right), \\ c_f &= (\theta_0(1), \theta_1(1), \theta_2(1)) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Primerament, passem les condicions inicials i finals, c_i i c_f, en termes de variable z_1, z_2, z_3 i z_4. Com $z_4 = \bar{u}_2$ li podem donar qualsevol valor.

$$\begin{aligned} z_i &= (0,\ 22.19615242,\ 7.783185309,\ -1) \\ z_f &= (-1.570796327,\ 20,\ 19.87683581,\ -2) \end{aligned}$$

i finalment les passem a $y_1, \dot{y}_1, y_2$ i $\dot{y}_2$

$$\begin{aligned} y_i &= (0,\ -1,\ 7.783185309,\ -22.19615242) \\ y_f &= (-1.570796327,\ -2,\ 19.87683581,\ -40) \end{aligned}$$

El que anem a buscar ara són dos polinomis de la forma $\gamma_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$ i $\gamma_2(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$ de manera que $y_1(t) = \gamma_1(t)$, $\dot{y}_1(t) = \dot{\gamma}_1(t)$, $y_2(t) = \gamma_2(t)$ i $\dot{y}_2(t) = \dot{\gamma}_2(t)$. Com tenim 8 incògnites i 8 condicions inicials i finals, els valors α_i i β_i estan completament determinats. Per trobar-los imposarem les 4 condicions inicials

$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= \alpha_0 = 0 \\ \dot{\gamma}_1(0) &= \alpha_1 = -1 \\ \gamma_2(0) &= \beta_0 = 7.783185309 \\ \dot{\gamma}_2(0) &= \beta_1 = -22.19615242 \end{aligned}$$

i les 4 condicions finals

$$\begin{aligned} \gamma_1(1) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.570796327 \\ \dot{\gamma}_1(1) &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -2 \\ \gamma_2(1) &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 19.87683581 \\ \dot{\gamma}_2(1) &= \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = -40 \end{aligned}$$

de manera que obtenim

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -0.7123889810, \quad \alpha_3 = 0.1415926540$$

i

$$\beta_0 = 7.783185309, \quad \beta_1 = -22.19615242, \quad \beta_2 = 120.6732563, \quad \beta_3 = -86.38345342.$$

Els polinomis que buscàvem són

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= -t - 0.7123889810t^2 + 0.1415926540t^3 \\ \gamma_2(t) &= 7.783185309 - 22.19615242t + 120.6732563t^2 - 86.38345342t^3. \end{aligned}$$

Per tant, podem expressar

$$\begin{cases} y_1(t) &=& \gamma_1(t) &=& -t - 0.7123889810t^2 + 0.1415926540t^3 \\ \dot{y}_1(t) &=& \dot{\gamma}_1(t) &=& -1 - 1.424777962t + 0.4247779620t^2 \\ y_2(t) &=& \gamma_2(t) &=& 7.783185309 - 22.19615242t + 120.6732563t^2 - 86.38345342t^3 \\ \dot{y}_2(t) &=& \dot{\gamma}_2(t) &=& -22.19615242 + 241.3465126t - 259.1503603t^2 \end{cases}$$

i la realimentació ens queda

$$\begin{array}{rcccl} w_1(t) &=& \ddot{y}_1(t) &=& -1.424777962 + 0.8495559240t, \\ w_2(t) &=& \ddot{y}_2(t) &=& 241.3465126 - 518.3007206t. \end{array}$$

Ara que podem expressar $y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, w_1$ i w_2 en funció de t, anem a trobar u_1 i u_2 en funció de t. Primerament, trobem v_1 i v_2 en funció de t:

$$\begin{array}{rcl} v_1(t) &=& \dfrac{w_2(t) - \frac{\dot{y}_2(t)}{\dot{y}_1(t)} w_1(t)}{\dot{y}_1(t)} \\ &=& -\dfrac{1000(-6.824277535 + 13.42893983t + 6.667826061t^2)}{(-5 - 7.12388981t + 2.12388981t^2)^2} \\ v_2(t) &=& w_1(t) \;=\; -1.424777962 + 0.8495559240t. \end{array}$$

I un cop trobats $v_1(t)$ i $v_2(t)$, trobem $\bar{u}_1(t)$ i $\bar{u}_2(t)$. Trobar $\bar{u}_1(t)$ és fàcil ja que $\bar{u}_1(t) = v_1(t)$, en canvi per trobar $\bar{u}_2(t)$ hem de calcular la integral de $v_2(t)$, tenint en compte que $\bar{u}_2(0) = z_4(0)$ i $\bar{u}_2(1) = z_4(1)$.

$$\bar{u}_2(t) = \int v_2(t)dt = -1.424777962t + 0.4247779620t^2 + K$$

Inicialment vam dir que $\bar{u}_2(0) = -1$ i, per tant, K és única i val $K = -1$. Es comprova fàcilment que $\bar{u}_2(1) = -2$, tal i com voliem.

I per últim, per trobar $u_1(t)$ i $u_2(t)$ ens cal resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} -6\sin\theta_1 & 0 \\ 12 + 3\cos\theta_1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1(t) \\ z_2(t)\bar{u}_2(t) \end{pmatrix}$$

De manera que ens queda que

$$\begin{array}{rcl} u_1(t) &=& -\dfrac{\bar{u}_1(t)}{6\sin\theta_1} \\ u_2(t) &=& \dfrac{z_2\bar{u}_2(t) - (12 + 3\cos\theta_1)u_1(t)}{3}. \end{array}$$

Ara només ens queda substituir $u_1(t)$ i $u_2(t)$ al sistema (5.2). Fent això amb Matlab els resultats obtinguts són

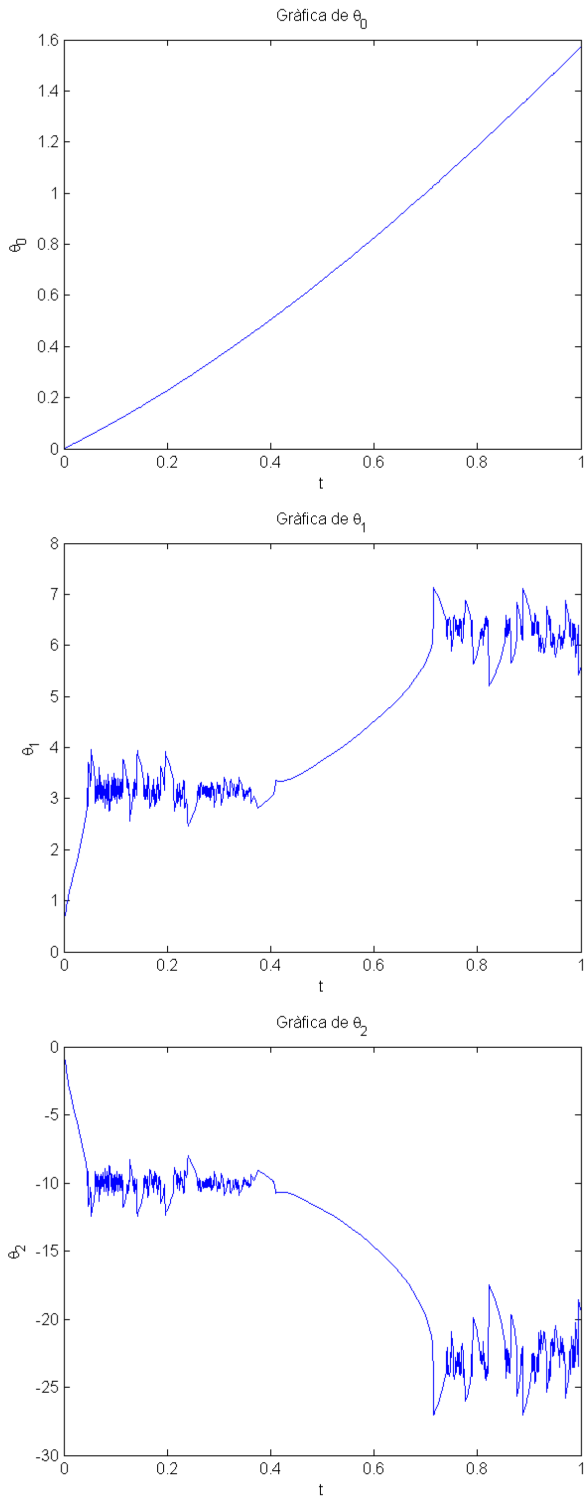


Figura 5.2: Comportament de les variables d'estat del sistema

Únicament la variable θ_0 és correcta i arriba al punt final imposat, ja que $\dot{\theta}_0 = -\bar{u}_2(t)$ i no depèn de $u_1(t)$. En canvi, les variables θ_1 i θ_2 són errònies, segurament degut a que en algun moment donat creuen una singularitat. Ambdues depenen de $u_1(t)$ i com $u_1(t)$ té $\sin\theta_1$ al denominador, per a valors $\theta_1 = k\pi$ tenim singularitat.

De totes maneres, anem a simular el sistema (6.4) definit per les $z's$ i així comprovarem que es compleixen les condicions inicials i finals tal i com hem imposat.

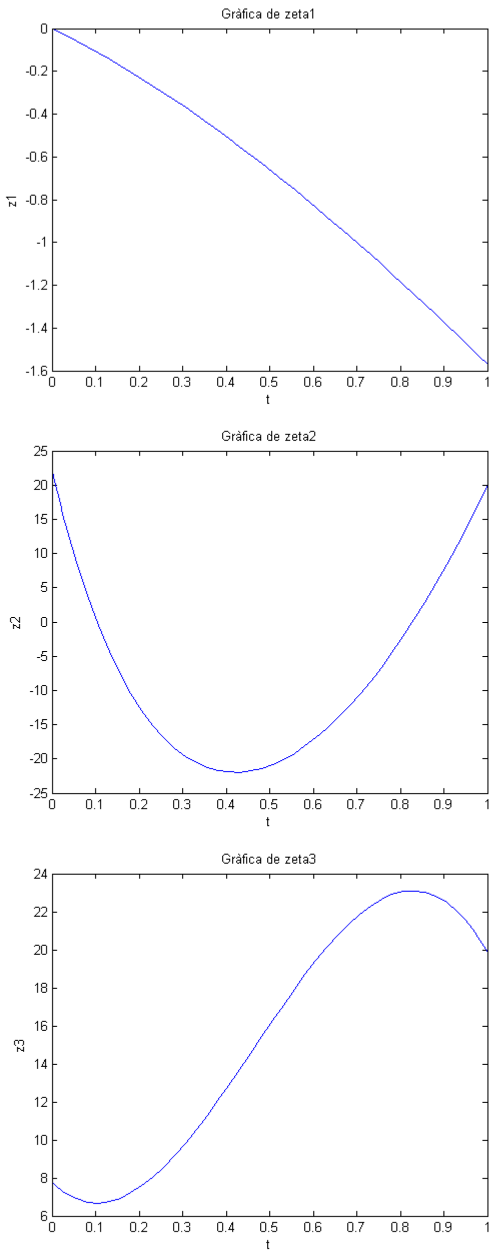


Figura 5.3: Comportament de les variables z del sistema

6
Robot pla de dos braços a l'espai

Ara el model a estudiar és un model simplificat d'un robot pla que consta de dos braços connectats a un cos central a través de juntes de revolució. El gran avantatge respecte el model anterior és que no cal posar el centre de masses de l'última articulació en cap lloc fixat. Siguin M i I la massa i la inèrcia del cos central i m la massa dels braços, concentrades en les puntes. Les articulacions de gir es troben a una distància r des del centre del cos central i els enllaços connectats a aquestes articulacions tenen longitud l. Siguin (x_1, y_1) i (x_2, y_2) la posició dels extrems de cada un dels braços (en termes de θ, ψ_1 i ψ_2). Si el robot és de lliure flotació, la llei de conservació del moment angular implica que moure els braços fa que el cos central giri. Suposant que el cos és de lliure flotació en l'espai i que la fricció és insignificant, podem trobar les restriccions derivades de la conservació del moment angular. En el cas en que el moment angular inicial és zero, llavors la conservació del moment angular assegura que el moment angular és nul, donant lloc a l'equació de restricció

$$a_{13}(\psi)\dot{\psi}_1 + a_{23}(\psi)\dot{\psi}_2 + a_{33}(\psi)\dot{\theta} = 0 \tag{6.1}$$

on els a_{i3} valen

$$\begin{aligned}
a_{13} &= ml^2 + mr\cos\psi_1 \\
a_{23} &= ml^2 + mr\cos\psi_2 \\
a_{33} &= 1 + 2ml^2 + 2mr^2 + 2mrl\cos\psi_1 + 2mrl\cos\psi_2
\end{aligned}$$

Si definim els controls u_1 i u_2 tals que $\dot{\psi}_1 = u_1$ i $\dot{\psi}_2 = u_2$, aleshores el sistema a simular és

$$\left\{\begin{aligned}
\dot{\psi}_1 &= u_1 \\
\dot{\psi}_2 &= u_2 \\
\dot{\theta} &= -\frac{a_{13}(\psi)}{a_{33}(\psi)}u_1 - \frac{a_{23}(\psi)}{a_{33}(\psi)}u_2
\end{aligned}\right. \tag{6.2}$$

El sistema de Pfaff associat al sistema de control és

$$\omega = a_{13}(\psi)\dot{\psi}_1 + a_{23}(\psi)\dot{\psi}_2 + a_{33}(\psi)\dot{\theta} = 0.$$

Anem a expressar ara ω de forma normal mitjançant un canvi de coordenades. Per poder aplicar el teorema de Pfaff primer hem de calcular el rang de ω.

Donat que

$$d\omega = \left(-\frac{\partial a_{13}}{\partial \psi_2} + \frac{\partial a_{23}}{\partial \psi_1}\right) d\psi_1 \wedge d\psi_2 + \left(-\frac{\partial a_{13}}{\partial \theta} + \frac{\partial a_{33}}{\partial \psi_1}\right) d\psi_1 \wedge d\theta + \left(-\frac{\partial a_{23}}{\partial \theta} + \frac{\partial a_{33}}{\partial \psi_2}\right) d\psi_2 \wedge d\theta$$

la derivada exterior de ω és

$$d\omega = -2mrl \sin\psi_1 \, d\psi_1 \wedge d\theta - 2mrl \sin\psi_2 \, d\psi_2 \wedge d\theta.$$

És fàcil veure que el rang de ω és 1.

$$\begin{aligned} d\omega \wedge \omega &= 2mrl \sin\psi_1 a_{23} \, d\psi_1 \wedge d\psi_2 \wedge d\theta - 2mrl sin\psi_2 a_{13} d\psi_1 \wedge d\psi_2 \wedge d\theta \\ &= 2mrl(\sin\psi_1 a_{23} - \sin\psi_2 a_{13}) d\psi_1 \wedge d\psi_2 \wedge d\theta \\ &= 2m^2 rl[l^2(\sin\psi_1 - \sin\psi_2) + r(\sin\psi_1 \cos\psi_2 - \sin\psi_2 \cos\psi_1)] d\psi_1 \wedge d\psi_2 \wedge d\theta \end{aligned}$$

Excepte per a certs valors de ψ_1 i ψ_2, $d\omega \wedge \omega \neq 0$. Com $d\omega \wedge \omega$ és una 3-forma en un espai de dimensió 3, llavors $(d\omega)^2 \wedge \omega = 0$ i per tant el rang és 1. Així doncs, pel teorema de Pfaff, podem escriure ω com $\bar{\omega} = dz_3 - z_2 dz_1$. Anem doncs, seguint la demostració del teorema de Pfaff, a trobar una funció $f_1 = f_1(\psi_1, \psi_2, \theta)$ tal que

$$d\omega \wedge \omega \wedge df_1 = 0$$

és a dir,

$$2mrl(\sin\psi_1 a_{23} - \sin\psi_2 a_{13}) d\psi_1 \wedge d\psi_2 \wedge d\theta \wedge df_1 = 0$$

És veu fàcilment que una possibilitat és que $f_1 = \theta$. Ara volem trobar una funció $f_2 = f_2(\psi_1, \psi_2, \theta)$ de manera que

$$\begin{aligned} \omega \wedge df_1 \wedge df_2 &= 0 \\ df_1 \wedge df_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Reescrivint $\omega = df_2 \wedge g_1 df_1$ hem de triar g_1 i f_2 de manera que s'acompleixi la igualtat. Donat que $\omega = a_{13} d\psi_1 + a_{23} d\psi_2 + a_{33} d\theta$ i que $f_1 = \theta$, prendrem $g_1 = a_{33}$ i $df_2 = a_{13} d\psi_1 + a_{23} d\psi_2$. Per tant, $f_2 = ml^2\psi_1 + mr\sin\psi_1 + ml^2\psi_2 + mr\sin\psi_2$.

Prenent ara $z_1 = f_1$, $z_2 = g_1$ i $z_3 = f_2$, les noves coordenades són

$$\left\{ \begin{array}{lllll} z_1 & = & \theta & & \\ z_2 & = & -a_{33} & = & -(1 + 2ml^2 + 2mr^2 + 2mrl\cos\psi_1 + 2mrl\cos\psi_2) \\ z_3 & = & ml^2\psi_1 + mr\sin\psi_1 + ml^2\psi_2 + mr\sin\psi_2 & & \end{array} \right. \tag{6.3}$$

Ara bé, per expressar el sistema inicial en les noves coordenades hem de trobar $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$ tals que $\dot{z} = \bar{g}_1\bar{u}_1 + \bar{g}_2\bar{u}_2$. Hem de trobar aquestes $\bar{g}$ fent servir que $\bar{g}_1 \lrcorner \bar{\omega} = 0$ i $\bar{g}_2 \lrcorner \bar{\omega} = 0$. Sigui $\bar{g} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^\perp$ i com $\bar{\omega} = dz_3 - z_2 dz_1 = (-z_2, 0, 1)$, aleshores

$$\bar{g} \lrcorner \bar{\omega} = -\alpha_1 z_2 + \alpha_3 = 0$$

Aíxí doncs, la igualtat es compleix agafant $\bar{g} = (0, \alpha_2, 0)^\perp$ per a qualsevol valor de α_2 o bé per a $\bar{g} = (\alpha_1, 0, z_2\alpha_1)^\perp$ per a qualsevol valor de α_1. Prenent $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = 1$ obtenim $\bar{g}_1 = (0, 1, 0)^\perp$ i $\bar{g}_2 = (1, 0, z_2)^\perp$.

Per tant

$$\dot{z} = \bar{g}_1\bar{u}_1 + \bar{g}_2\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{u}_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \bar{u}_2.$$

Ara bé, per la definició dels canvis de coordenades que hem donat, sabem que

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \dot{z}_1 & = & \dot{\theta} & = -\dfrac{a_{13}}{a_{33}}u_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{33}}u_2 & = \bar{u}_2, \\[2ex] \dot{z}_2 & = & -\dfrac{\partial a_{33}}{\partial \psi_1}u_1 - \dfrac{\partial a_{33}}{\partial \psi_2}u_2 & = \bar{u}_1, & \\[2ex] \dot{z}_3 & = & a_{13}u_1 + a_{23}u_2 & = z_2\bar{u}_2. & \end{array} \right. \tag{6.4}$$

Per tant, els nous controls $\bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$ són

$$\begin{array}{lll} \bar{u}_1 & = & -\dfrac{\partial a_{33}}{\partial \psi_1}u_1 - \dfrac{\partial a_{33}}{\partial \psi_2}u_2, \\[2ex] \bar{u}_2 & = & -\dfrac{a_{13}}{a_{33}}u_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{33}}u_2. \end{array}$$

Tot seguit trobarem les sortides planes del sistema: $y_1(z,\bar{u})$ i $y_2(z,\bar{u})$. Donat que $\dot{z}_1, \dot{z}_2$ i $\dot{z}_3$ depenen de $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ i z_2, prendrem com a sortides planes $y_1 = z_1$ i $y_2 = z_3$.

Anem a veure si realment aquestes són les sortides planes. Calculem doncs el canvi de variables i la realimentació necessària per linealitzar el sistema.

Primerament, trobem el control $\bar{u}_2$ en funció de $\dot{y}_1$

$$\dot{y}_1 = \dot{z}_1 = \bar{u}_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_2 = \dot{y}_1,$$

i en segon lloc, trobem z_2 en funció de $\dot{y}_1$ i de $\dot{y}_2$

$$\dot{y}_2 = \dot{z}_3 = z_2\bar{u}_2 = z_2\dot{y}_1 \quad \Rightarrow \quad z_2 = \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}.$$

D'aquesta manera podem expressar z_1, z_2 i z_3 en funció de $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$. Però encara no podem establir un difeomorfisme. Hem de prolongar el sistema definint una nova variable d'estat z_4. Prendrem

$$z_4 = \bar{u}_2$$

com a nova variable d'estat, i dos nous controls

$$v_1 = \bar{u}_1, \qquad v_2 = \dot{\bar{u}}_2$$

de manera que

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{z}_1 & = & z_4 \\ \dot{z}_2 & = & v_1 \\ \dot{z}_3 & = & z_2 z_4 \\ \dot{z}_4 & = & v_2 \end{array} \right.$$

Per tant, el canvi de variables en el sistema prolongat ve donat per

$$\begin{cases} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= \dot{y}_2/\dot{y}_1 \\ z_3 &= y_2 \\ z_4 &= \dot{y}_1 \end{cases}$$

Ara si que podem expressar les variables $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$ en termes de z_1, z_2, z_3 i z_4.

$$\begin{cases} y_1 &= z_1 \\ \dot{y}_1 &= z_4 \\ y_2 &= z_3 \\ \dot{y}_2 &= z_2 z_4 \end{cases}$$

i la realimentació ens queda

$$\begin{aligned} w_1 &= \ddot{y}_1 = \dot{z}_4 = v_2, \\ w_2 &= \ddot{y}_2 = \dot{z}_2 z_4 + z_2 \dot{z}_4 = z_4 v_1 + z_2 v_2. \end{aligned}$$

De manera inversa, podem calcular els controls v_1 i v_2 en funció de $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, w_1$ i w_2 com

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{w_2 - \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1} w_1}{\dot{y}_1}, \\ v_2 &= w_1. \end{aligned}$$

I un cop obtinguts v_1 i v_2 podem expressar els controls $\bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$ en funció de z_1, z_2, z_3, z_4, v_1 i v_2 com

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= v_1, \\ \dot{\bar{u}}_2 &= v_2. \end{aligned}$$

Finalment, els controls inicials u_1 i u_2 es troben resolent el sistema

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial a_{33}}{\partial \psi_1} & -\frac{\partial a_{33}}{\partial \psi_2} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ z_2 \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

Anem a aplicar tots aquests càlculs a unes dades concretes. Donades ara unes condicions inicials i finals, $c_i = (\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \theta(t_0), \bar{u}_2(t_0))$ i $c_f = (\psi_1(t_f), \psi_2(t_f), \theta(t_f), \bar{u}_2(t_f))$, volem trobar els controls $u_1(t)$ i $u_2(t)$ per a poder resoldre el sistema

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 &= u_1(t) \\ \dot{\psi}_2 &= u_2(t) \\ \dot{\theta} &= -\frac{a_{13}(\psi)}{a_{33}(\psi)} u_1(t) - \frac{a_{23}(\psi)}{a_{33}(\psi)} u_2(t) \end{cases}$$

i finalment poder simular la trajectòria de les variables ψ_1, ψ_2 i θ des de t_0 fins a t_f.

Per a poder treballar amb el sistema linealitzat, necessitem passar les condicions inicials i finals expressades en variables ψ_1, ψ_2, θ i u_2 a variables $y_1, \dot{y}_1, y_2$ i $\dot{y}_2$.

Prenem $m = 1$, $l = 2$, $r = (3/4)l$, $t_0 = 0$ i $t_f = 1$. D'aquesta manera els a_{i3} valen

$$\begin{aligned} a_{13} &= 4 + \frac{3}{2}\cos\psi_1 \\ a_{23} &= 4 + \frac{3}{2}\cos\psi_2 \\ a_{33} &= \frac{27}{2} + 6\cos\psi_1 + 6\cos\psi_2 \end{aligned}$$

Sabem pel teorema de la inversa que existeix el difeomorfisme de $(\psi_1, \psi_2, \theta, \bar{u}_2)$ a (z_1, z_2, z_3, z_4) si la Jacobiana del canvi no s'anul·la enlloc. És a dir, si

$$\begin{aligned} |Jz| &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2mrl\sin(\psi_1) & 2mrl\sin(\psi_1) & 0 & 0 \\ ml^2 + mr\cos(\psi_1) & ml^2 + mr\cos(\psi_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2mrl\sin(\psi_1)(ml^2 + mr\cos(\psi_2)) - 2mrl\sin(\psi_2)(ml^2 + mr\cos(\psi_1)) \\ &= 2m^2rl^2(\sin(\psi_1) - \sin(\psi_2)) + 2m^2r^2l(\sin(\psi_1)\cos(\psi_2) - \sin(\psi_2)\cos(\psi_1)) \\ &= 2m^2rl^2(\sin(\psi_1) - \sin(\psi_2)) + 2m^2r^2l\sin(\psi_1 - \psi_2) \neq 0. \end{aligned}$$

El mateix passa pel cas del difeomorfisme que envia (z_1, z_2, z_3, z_4) a $(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)$. És a dir,

$$|Jz| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z_4 & 0 & z_2 \end{vmatrix} = z_4 = \bar{u}_2 \neq 0.$$

Per tant, les úniques restriccions que tenim a l'hora de triar ψ_1, ψ_2, θ i $\bar{u}_2$ és que $\bar{u}_2 \neq 0$ i que per a qualsevol $k \in \mathbb{N}$, $\psi_1 \neq k\pi$ i $\psi_2 \neq k\pi$.

Prenem doncs com a dades inicials i finals els següents valors

$$\begin{aligned} c_i &= (\psi_1(0), \psi_2(0), \theta(0)) &= \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right), \\ c_f &= (\psi_1(1), \psi_2(1), \theta(1)) &= \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Primerament, passem les condicions inicials i finals, c_i i c_f, en termes de variable z_1, z_2, z_3 i z_4. Com $z_4 = \bar{u}_2$ li podem donar qualsevol valor.

$$\begin{aligned} z_i &= (1.570796327,\ -13.5,\ 20.94395104,\ 1) \\ z_f &= (2.356194490,\ 15.35410196,\ 23.80268894,\ 2) \end{aligned}$$

i finalment les passem a $y_1, \dot{y}_1, y_2$ i $\dot{y}_2$

$$\begin{aligned} y_i &= (1.570796327,\ 1,\ 20.94395104,\ -13.5) \\ y_f &= (2.356194490,\ 2,\ 23.80268894,\ -30.70820392) \end{aligned}$$

El que anem a buscar ara són dos polinomis de la forma $\gamma_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$ i $\gamma_2(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$ de manera que $y_1(t) = \gamma_1(t)$, $\dot{y}_1(t) = \dot{\gamma}_1(t)$, $y_2(t) = \gamma_2(t)$ i $\dot{y}_2(t) = \dot{\gamma}_2(t)$. Com tenim 8 incògnites i 8 condicions inicials i finals, els valors α_i i β_i estan completament determinats. Per trobar-los imposarem les 4 condicions inicials

$$\begin{aligned}
\gamma_1(0) &= \alpha_0 = 1.570796327 \\
\dot{\gamma}_1(0) &= \alpha_1 = 1 \\
\gamma_2(0) &= \beta_0 = 20.94395104 \\
\dot{\gamma}_2(0) &= \beta_1 = -13.5
\end{aligned}$$

i les 4 condicions finals

$$\begin{aligned}
\gamma_1(1) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2.356194490 \\
\dot{\gamma}_1(1) &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2 \\
\gamma_2(1) &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 23.80268894 \\
\dot{\gamma}_2(1) &= \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = -30.70820392
\end{aligned}$$

de manera que obtenim

$$\alpha_0 = 1.570796327, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1.643805511, \quad \alpha_3 = 1.429203674$$

i

$$\beta_0 = 20.94395104, \quad \beta_1 = -13.5, \quad \beta_2 = 66.28441762, \quad \beta_3 = -49.92567972.$$

Els polinomis que buscàvem són

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= 1.570796327 + t - 1.643805511t^2 + 1.429203674t^3 \\
\gamma_2(t) &= 20.94395104 - 13.5t + 66.28441762t^2 - 49.92567972t^3.
\end{aligned}$$

Per tant, podem expressar

$$\left\{\begin{aligned}
y_1(t) &= \gamma_1(t) = 1.570796327 + t - 1.643805511t^2 + 1.429203674t^3 \\
\dot{y}_1(t) &= \dot{\gamma}_1(t) = 1 - 3.287611022t + 4.287611022t^2 \\
y_2(t) &= \gamma_2(t) = 20.94395104 - 13.5t + 66.28441762t^2 - 49.92567972t^3 \\
\dot{y}_2(t) &= \dot{\gamma}_2(t) = -13.5 + 132.5688352t - 149.7770392t^2
\end{aligned}\right.$$

i la realimentació ens queda

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= \ddot{y}_1(t) = -3.287611022 + 8.575222044t, \\
w_2(t) &= \ddot{y}_2(t) = 132.5688352 - 299.5540784t.
\end{aligned}$$

Ara que podem expressar $y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, w_1$ i w_2 en funció de t, anem a trobar u_1 i u_2 en funció de t. Primerament, trobem v_1 i v_2 en funció de t:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{w_2(t) - \frac{\dot{y}_2(t)}{\dot{y}_1(t)} w_1(t)}{\dot{y}_1(t)} \\ &= -\frac{2000(-1.102326080 + 2.297357260t + 0.9499369258t^2)}{(5 - 1.643805511t + 21.43805511t^2)^2} \\ v_2(t) &= w_1(t) = -3.287611022 + 8.575222044t. \end{aligned}$$

I un cop trobats $v_1(t)$ i $v_2(t)$, trobem $\bar{u}_1(t)$ i $\bar{u}_2(t)$. Trobar $\bar{u}_1(t)$ és fàcil ja que $\bar{u}_1(t) = v_1(t)$, en canvi per trobar $\bar{u}_2(t)$ hem de calcular la integral de $v_2(t)$, tenint en compte que $\bar{u}_2(0) = z_4(0)$ i $\bar{u}_2(1) = z_4(1)$.

$$\bar{u}_2(t) = \int v_2(t)dt = -11.65486678t + 11.65486678t^2 + K$$

Inicialment vam dir que $\bar{u}_2(0) = 1$ i, per tant, K és única i val $K = 1$. Es comprova fàcilment que $\bar{u}_2(1) = 2$, tal i com voliem.

I per últim, per trobar $u_1(t)$ i $u_2(t)$ ens cal resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial a_{33}}{\partial \psi_1} & -\frac{\partial a_{33}}{\partial \psi_2} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1(t) \\ z_2(t)\bar{u}_2(t) \end{pmatrix}$$

Per a trobar u_1 i u_2 en funció de t hem de calcular la inversa de la matriu

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial a_{33}}{\partial \psi_1} & -\frac{\partial a_{33}}{\partial \psi_2} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sin\psi_1 & 6\sin\psi_2 \\ 4 + \frac{3}{2}\cos\psi_1 & 4 + \frac{3}{2}\cos\psi_2 \end{pmatrix}.$$

Però per a que la inversa existeixi el seu determinant no pot ser 0. Resulta que

$$\begin{vmatrix} 6\sin\psi_1 & 6\sin\psi_2 \\ 4 + \frac{3}{2}\cos\psi_1 & 4 + \frac{3}{2}\cos\psi_2 \end{vmatrix} = 24(\sin\psi_1 - \sin\psi_2) + 9\sin(\psi_1 - \psi_2).$$

Per tant ens passa com en l'exemple d'abans, que per a valors $\psi_1 = k\pi$ i $\psi_2 = k\pi$ tenim singularitats. Per això les gràfiques que obtenim són errònies. Només fa bé la variable θ, ja que $\dot{\theta} = \bar{u}_2(t)$. En canvi les variables d'estat ψ_1 i ψ_2 depenen de $u_1(t)$ i $u_2(t)$ i segurament en algún moment es passi per alguna singularitat i per això els resultats no són correctes.

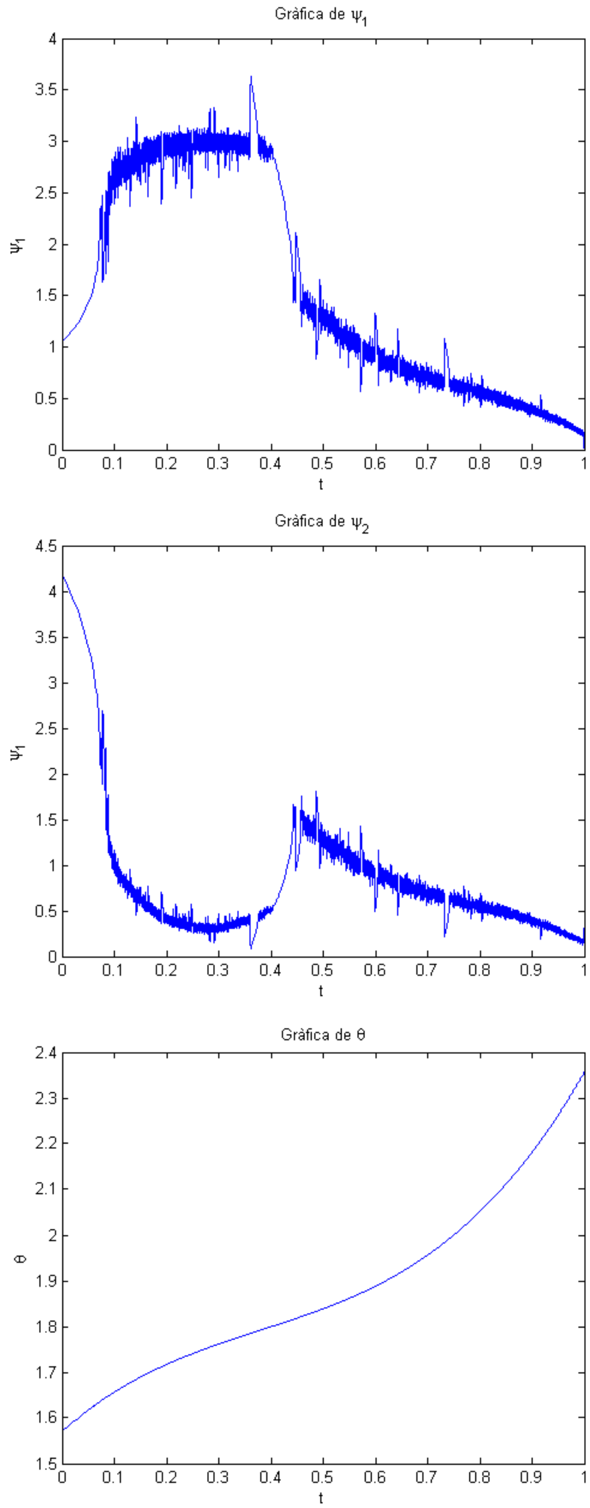


Figura 6.1: Comportament de les variables d'estat del sistema

Anem doncs a simular el sistema (6.4) definit per les $z's$ i així comprovarem que es compleixen les condicions inicials i finals tal i com esperem.

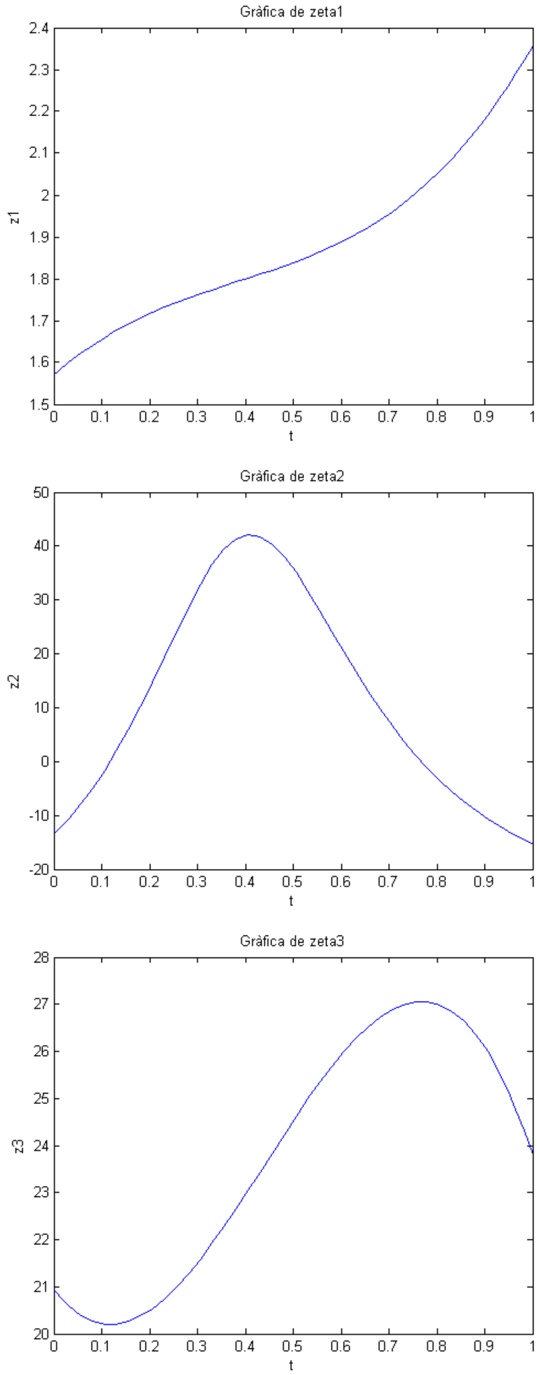


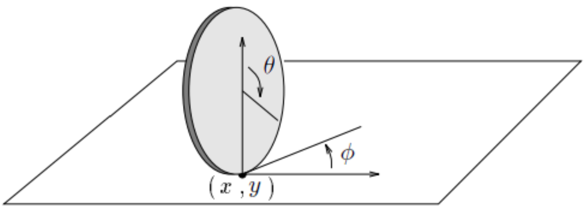
Figura 6.2: Comportament de les variables del sistema

7
Rolling disc

Considerem el problema d'un disc girant com un monocicle al qual li afegim un angle de gir ϕ que descriu l'orientació del disc. El model ve descrit pel següent sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dot{x} & = & u_1\cos\theta \\ \dot{y} & = & u_1\sin\theta \\ \dot{\theta} & = & u_2 \\ \dot{\phi} & = & -u_1 \end{array}\right. \tag{7.1}$$

i tot seguit veiem una modelització del disc amb les variables d'estat corresponents:



Volem trobar les sortides planes del sistema. Per això passarem el sistema a un sistema de Pfaff i posteriorment passarem les formes a formes normals de Goursat. Finalment tornarem a esciure el sistema en les noves variables per poder, així, trobar les sortides planes. Per tant, sigui $\dot{x} := \left(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi}\right)$, reescrivim el nostre sistema com:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_2 = g_1u_1 + g_2u_2 \tag{7.2}$$

La distribució és $\Delta = \langle g_1, g_2\rangle$. Volem trobar:

$$I^{(0)} = \Delta^{\perp} = \{\omega \in \Lambda^1 \mid g_i \lrcorner \omega = 0,\ \forall g_i \in \triangle\}$$

Siguin $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1$ tals que $\omega_1 = a\,dx + b\,dy + c\,d\theta + e\,d\phi$, i $\omega_2 = \hat{a}\,dx + \hat{b}\,dy + \hat{c}\,d\theta + \hat{e}\,d\phi$ s'han de satisfer les següents condicions:

$$\begin{cases} g_1 \lrcorner \omega_1 = a\cos\theta + b\sin\theta - e = 0 \\ g_2 \lrcorner \omega_1 = c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1 \lrcorner \omega_2 = \hat{a}\cos\theta + \hat{b}\sin\theta - \hat{e} = 0 \\ g_2 \lrcorner \omega_2 = \hat{c} = 0 \end{cases}$$

Com ω_1 i ω_2 han de ser linealment independents, prenem per exemple:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy + 0\, d\theta + 1\, d\phi \\ \omega_2 &= -\sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy + 0\, d\theta + 0\, d\phi \end{aligned}$$

Per tant, $I = I^{(0)} = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$. És fàcil veure que $I^{(1)} = \langle \omega_1 \rangle$ i que $I^{(2)} = \{0\}$. Aleshores, el sistema de Pfaff és:

$$\begin{cases} \omega_1 &= 0 \\ \omega_2 &= 0 \end{cases}$$

Un cop trobat aquest sistema, ens disposem a passar-lo a la forma normal de Goursat. En aquest exemple, tenim un sistema de dos $1-$ formes amb quatre variables, així que aplicarem el teorema d'Engel per trobar les coordenades z_1, z_2, z_3, z_4 tals que

$$I = \{dz_4 - z_3\, dz_1, dz_3 - z_2\, dz_1\}$$

Seguirem les demostracions constructives dels teoremes d'Engel i de Pfaff per trobar el canvi de coordenades.

Com $I^{(2)} = \{0\}$ aleshores $d\omega_1 \wedge \omega_1 \neq 0$. D'altra banda, $(d\omega_1)^2 = 0$, conseqüentment, $(d\omega_1)^2 \wedge \omega_1 = 0$. Per tant, ω_1 és una 1-forma de rang constant $r = 1$. Estem sota les hipòtesis del teorema de Pfaff de manera que hem de trobar una funció f_1 tal que:

$$d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge df_1 = 0$$

és a dir,

$$(d\theta \wedge dy \wedge dx + \cos\theta\, d\theta \wedge dy \wedge d\phi - \sin\theta\, d\theta \wedge dx \wedge d\phi) \wedge df_1 = 0$$

A simple vista, una de les possibles funcions és $f_1 = \theta$.

Sigui I_r amb $r = 1$ l'ideal format per $\{df_1, \omega, d\omega\}$. El seu espai de retracció $C(I_1)$ té dimensió 2, per tant, hem de trobar una funció f_2 tal que:

$$\omega_1 \wedge df_1 \wedge df_2 = 0 \tag{7.3}$$

$$df_1 \wedge df_2 \neq 0 \tag{7.4}$$

Sigui $f_2 = f_2(x, y, \theta, \phi)$, aleshores $df_2 = f_x\,dx + f_y\,dy + f_\theta\,d\theta + f_\phi\,d\phi$. De (7.3) n'extraiem que:

$$\begin{aligned} f_\phi \cos\theta &= f_x \\ f_\phi \sin\theta &= f_y \\ f_y \cos\theta &= f_x \sin\theta \end{aligned}$$

Suposem $f_\phi = 1$. Conseqüentment,

$$f_2(x, y, \theta, \phi) = x\cos\theta + y\sin\theta + \phi$$

Comprovem (7.4):

$$\begin{aligned} df_1 \wedge df_2 &= d\theta \wedge (\cos\theta\,dx - x\sin\theta\,d\theta + \sin\theta\,dy + y\cos\theta\,d\theta + d\phi) \\ &= \cos\theta\,d\theta \wedge dx + \sin\theta\,d\theta \wedge dy + d\theta \wedge d\phi \neq 0 \end{aligned}$$

Per tant, ω_1 és de la forma:

$$\omega_1 = df_2 + g_1\,df_1$$

on f_1,f_2 i g_1 són independents.
Fent un canvi de coordenades a z_1,z_2,z_3 i z_4 de manera que $z_4 = f_2$, $z_1 = \theta$, trobem $z_3 = -g_1$:

$$\omega_1 = df_2 + g_1\,df_1 = dz_4 - z_3\,dz_1$$

$$\cos\theta\,dx + \sin\theta\,dy + 0\,d\theta + 1\,d\phi = \cos\theta\,dx - x\sin\theta\,d\theta + \sin\theta\,dy + y\cos\theta\,d\theta + d\phi - z_3\,d\theta$$

Per tant, $z_3 = y\cos\theta - x\sin\theta$.

Un cop trobada ω_1 en el nou sistema de coordenades, trobem ω_2 de la forma:

$$\omega_2 = dz_3 - z_2\,dz_1 \text{ (mod I)}$$

Així, trobarem z_2 tal que:

$$\omega_2 = dz_3 - z_2\,dz_1$$

$$-\sin\theta\,dx + \cos\theta\,dy + 0\,d\theta + 0\,d\phi = (-y\sin\theta\,d\theta + \cos\theta\,dy - x\cos\theta\,d\theta - \sin\theta\,dx) - z_2\,d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_2 = -\left(y\sin\theta + x\cos\theta\right)$$

Tenim doncs, les noves variables expressades en funció de les variables velles com segueix:

$$\begin{aligned} z_1 &= \theta \\ z_2 &= -(y\sin\theta + x\cos\theta) \\ z_3 &= y\cos\theta - x\sin\theta \\ z_4 &= x\cos\theta + y\sin\theta + \phi \end{aligned}$$

El sistema inicial expressat en les noves variables és:

$$\begin{pmatrix} \dot{z_1} \\ \dot{z_2} \\ \dot{z_3} \\ \dot{z_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -z_3 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} u_2 \tag{7.5}$$

Però per seguir amb el nostre estudi necessitem que el sistema estigui expressat la forma canònica de Goursat associada a la forma de Goursat. Per a això cal fer una realimentació de manera que:

$$\begin{aligned} \overline{u}_1 &:= u_2 \\ \overline{u}_2 &:= -u_1 - z_3 u_2 \end{aligned}$$

Així, el sistema (7.5) queda reescrit com segueix:

$$\begin{pmatrix} \dot{z_1} \\ \dot{z_2} \\ \dot{z_3} \\ \dot{z_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \overline{u}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{u}_2$$

Tot seguit trobarem les sortides planes del sistema en les coordenades z, és a dir, en el nostre cas són dues funcions $y_1(z, \overline{u})$ i $y_2(z, \overline{u})$ tals que les variables del sistema es puguin escriure en funció d'aquestes. La teoria general de la forma normal de Goursat ens proposa:

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 \\ y_2 &= z_4 \end{aligned}$$

De manera que:

$$\dot{y_1} = \dot{z_1} = \overline{u}_1 \tag{7.6}$$
$$\dot{y_2} = \dot{z_4} = z_3\overline{u}_1 \tag{7.7}$$
$$\ddot{y_2} = \ddot{z_4} = \dot{z_3}\overline{u}_1 + \dot{\overline{u}}_1 z_3 = z_2\dot{y_1}^2 + \ddot{y_1}\frac{\dot{y_2}}{\dot{y_1}} \tag{7.8}$$

De (7.7) n'extreiem:

$$z_3 = \frac{\dot{y_2}}{\dot{y_1}}$$

I de (7.8) n'extreiem:

$$z_2 = \frac{\ddot{y_2} - \frac{\ddot{y_1}\dot{y_2}}{\dot{y_1}}}{\dot{y_1}^2} = \frac{\ddot{y_2}}{\dot{y_1}^2} - \frac{\ddot{y_1}\dot{y_2}}{\dot{y_1}^3}$$

Les variables z depenen de les realimentacions i les seves derivades de la forma $z = z(y_1, \dot{y_1}, \ddot{y_1}, y_2, \dot{y_2}, \ddot{y_2})$, però encara no podem establir un difeomorfisme. Hem de prolongar el sistema. Per fer-ho, definim dues noves variables d'estat:

$$z_5 = \overline{u}_1, \quad z_6 = \dot{\overline{u}}_1$$

i dos nous controls:

$$v_1 = \ddot{\overline{u}}_1, \quad v_2 = \overline{u}_2$$

així, el nostre sistema ara és de la forma:

$$\begin{cases} \dot{z_1} & = & z_5 \\ \dot{z_2} & = & v_2 \\ \dot{z_3} & = & z_2 z_5 \\ \dot{z_4} & = & z_3 z_5 \\ \dot{z_5} & = & z_6 \\ \dot{z_6} & = & v_1 \end{cases}$$

Ara tenim un difeomorfisme entre $\{y_1, \dot{y_1}, \ddot{y_1}, y_2, \dot{y_2}, \ddot{y_2}\}$ i $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$. Només cal comprovar per quins valors de les variables aquest difeomorfisme existeix i evitar que passin per aquest punt quan impossem condicions inicials.
Els determinants dels canvis són els següents:

$$|Jz| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & -y\cos(\theta) + x\sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & -y\sin(\theta) - x\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & y\cos(\theta) - x\sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = -\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = -1$$

$$|Jy| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_5 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & z_5^2 & z_6 & 0 & 2z_2z_5 & z_3 \end{vmatrix} = -z_5^3$$

Per tant, per tot punt amb $z_5 \neq 0$ existirà la inversa.

Les realimentacions són de la forma:

$$w_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ddot{y}_1 = v_1$$

$$w_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ddot{y}_2 = \alpha + \beta v_1 + \gamma v_2$$

Trobem α, β, i γ:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ddot{y}_2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{z}_3 u_1 + \dot{u}_1 z_3) = \ddot{z}_3 u_1 + \dot{u}_1 \dot{z}_3 + \ddot{u}_1 z_3 + \dot{z}_3 \dot{u}_1 = \\ &= (\dot{z}_2 z_5 + \dot{z}_5 z_2)u_1 + 2\dot{u}_1 \dot{z}_3 + \ddot{u}_1 z_3 = v_2 z_5^2 + 3z_2z_5z_6 + v_1 z_3 \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \alpha &= 3z_2z_5z_6 \\ \beta &= z_3 \\ \gamma &= z_5^2 \end{aligned}$$

Conseqüentment,

$$v_2 = \frac{w_2 - \alpha - \beta w_1}{\gamma}$$

Notem que podem dividir per z_5 ja que hem vist que aquesta variable mai serà nul·la. Volem trobar els controls $\overline{u}_1$ i $\overline{u}_2$ en funció del temps. Per fer-ho seguirem el següent procediments:

- Imposarem condicions inicials i finals a $x = (x, y, \theta, \phi)$.
- Mitjançant el difeomorfisme $\{x\} \leftrightarrow \{z\}$ trobem condicions inicials i finals per $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$
- Imposem, també, condicions inicials i finals per $\overline{u}_1 = z_5$ i $\dot{\overline{u}}_1 = z_6$. Així, mitjançant el difeomorfisme $\{z\} \leftrightarrow \{y\}$ trobem les condicions per $y = (y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)$.

- Tenim 6 condicions tant per y_1 com per y_2 per tant, existirà dos únics polinomis de grau 5 tals que:

$$P_5(t) = y_1(t)$$
$$Q_5(t) = y_2(t)$$

- Un cop trobats els polinomis, trobem les realimentacions definides abans:

$$w_1 = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} y_1 = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} P_5(t)$$
$$w_1 = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} y_2 = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} Q_5(t)$$

- Desfent els canvis, trobem els controls $v_1(t)$ i $v_2(t)$.
- Finalment, $\overline{u}_2(t) = v_2(t)$ i $\ddot{\overline{u}}_1(t) = v_1(t)$. Així, només caldrà integrar dos cops $v_1(t)$ i imposar les condicions inicials per determinar les constants d'integració.

1) Decidim imposar les següents condicions inicials en $t = 0$ i finals en $t = 1$:

$$x(0) = (x(0), y(0), \theta(0), \phi(0)) = \left(1, 1, \frac{\pi}{2}, 2\right)$$
$$x(1) = (x(1), y(1), \theta(1), \phi(1)) = (1, 0, \pi, 1)$$

Per tant, les corresponents condicions per les variables z seran:

$$z(0) = (z_1(0), z_2(0), z_3(0), z_4(0)) = \left(\frac{\pi}{2}, -1, -1, 3\right)$$
$$z(1) = (z_1(1), z_2(1), z_3(1), z_4(1)) = (\pi, 1, 0, 0)$$

Imposem les següents condicions sobre el control $\overline{u}_1$:

$$\overline{u}_1(0) = 1 \qquad \overline{u}_1(1) = 1$$
$$\dot{\overline{u}}_1(0) = 0 \qquad \dot{\overline{u}}_1(1) = 1$$

De manera que

$$z_5(0) = 1 \qquad z_5(1) = 1$$
$$z_6(0) = 0 \qquad z_6(1) = 1$$

Així doncs, les corresponents condicions per a les variables y són:

$$y(0) = (y_1(0), \dot{y}_1(0), \ddot{y}_1(0), y_2(0), \dot{y}_2(0), \ddot{y}_2(0)) = \left(\frac{\pi}{2}, 1, 0, 3, -1, -1\right)$$
$$y(1) = (y_1(1), \dot{y}_1(1), \ddot{y}_1(1), y_2(1), \dot{y}_2(1), \ddot{y}_2(1)) = (\pi, 1, 1, 0, 0, 1)$$

2) Sigui $P_5(t) = a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ tal que $P_5(t) = y_1(t)$. Ens disposem a trobar els coeficients.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \\ \dot{y_1}(t) &= 5a_5t^4 + 4a_4t^3 + 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \\ \ddot{y_1}(t) &= 20a_5t^3 + 12a_4t^2 + 6a_3t + 2a_2 \end{aligned}$$

Per $t = 0$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\pi}{2} \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Per $t = 1$:

$$\begin{aligned} \pi &= a_5 + a_4 + a_3 + 1 + \frac{\pi}{2} \\ 1 &= 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 1 \\ 1 &= 20a_5 + 12a_4 + 6a_3 \end{aligned}$$

Resolent el sistema lineal trobem:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{-19}{2} + 5\pi \\ a_4 &= 14 - \frac{15}{2}\pi \\ a_5 &= 3\pi - \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Per tant,

$$P_5(t) = \left(3\pi - \frac{11}{2}\right)t^5 + \left(14 - \frac{15}{2}\pi\right)t^4 + \left(\frac{-19}{2} + 5\pi\right)t^3 + t + \frac{\pi}{2} \tag{7.9}$$

Procedim de manera anàloga amb $y_2(t) = Q_5(t) = b_5t^5 + b_4t^4 + b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0$.

$$\begin{aligned} y_2(t) &= b_5t^5 + b_4t^4 + b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0 \\ \dot{y_2}(t) &= 5b_5t^4 + 4b_4t^3 + 3b_3t^2 + 2b_2t + b_1 \\ \ddot{y_2}(t) &= 20b_5t^3 + 12b_4t^2 + 6b_3t + 2b_2 \end{aligned}$$

Per $t = 0$:

$$\begin{aligned} b_0 &= 3 \\ b_1 &= -1 \\ b_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Per $t = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= b_5 + b_4 + b_3 + \frac{1}{2} - 1 + 3 \\ 0 &= 5b_5 + 4b_4 + 3b_3 + 1 - 1 \\ -1 &= 20b_5 + 12b_4 + 6b_3 + 1 \end{aligned}$$

Resolent el sistema lineal trobem:

$$\begin{aligned} b_3 &= -22 \\ b_4 &= \frac{69}{2} \\ b_5 &= -14 \end{aligned}$$

Per tant,

$$Q_5(t) = -14t^5 + \frac{69}{2}t^4 - 22t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + 3 \tag{7.10}$$

3) Trobem les realimentacions en funció del temps:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}y_1(t) = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}P_5(t) = -57 + 30\pi + 24\left(14 - \left(\frac{15}{2}\right)\pi\right)t + 60\left(3\pi - \frac{11}{2}\right)t^2 \\ w_2 &= \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}y_2(t) = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}Q_5(t) = -132 + 828t - 840t^2 \end{aligned}$$

4) Conseqüentment, els controls v_1 i v_2 tindran les expressions següents (tenint en compte que ara no depenen de les variable z sinó de les variables y):

$$v_1 = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}y_1(t) = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}P_5(t) = -57+30\pi+24\left(14 - \left(\frac{15}{2}\right)\pi\right)t+60\left(3\pi - \frac{11}{2}\right)t^2$$

$$\begin{aligned} v_2 = &-\frac{1}{(2 - 57t^2 + 30t^2\pi + 112t^3 - 60t^3\pi + 30t^4\pi - 55t^4)^4}24(126 - 20\pi - 624t \\ &+197409t^4-151106t^5+18175t^2-97442t^3-12120t^2\pi+66560t^3\pi-131870t^4\pi-20610t^6 \\ &+100620t^7-60200t^8+13750t^9+40t\pi+90820t^5\pi+38010t^6\pi-92080t^7\pi+13800t^4\pi^2-4800t^5\pi^2 \\ &-14700t^6\pi^2+20400t^7\pi^2-10200t^8\pi^2+51460t^8\pi+1800t^9\pi^2-10800t^9\pi+1500t^2\pi^2-7800t^3\pi^2) \end{aligned}$$

5) L'expressió de $\overline{u}_2(t)$ coincideix amb la de $v_2(t)$ i la de $\overline{u}_1(t)$ l'aconseguim integrant dos cops $v_1(t)$ respecte del temps i imposant les condicions inicials.

6) Desfent el canvi de les realimentacions en els controls trobem l'expressió dels controls inicials:

$$u_2(t) = \overline{u}_1(t)$$
$$u_1(t) = -(\overline{u}_2(t) + z_3(t)u_2(t))$$

on $z_3(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}(t)}{\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}(t)}$.

Un cop trobada l'expressió dels controls en funció del temps resolem el sistema (7.1) amb MATLAB. Els resultats es mostren a continuació:

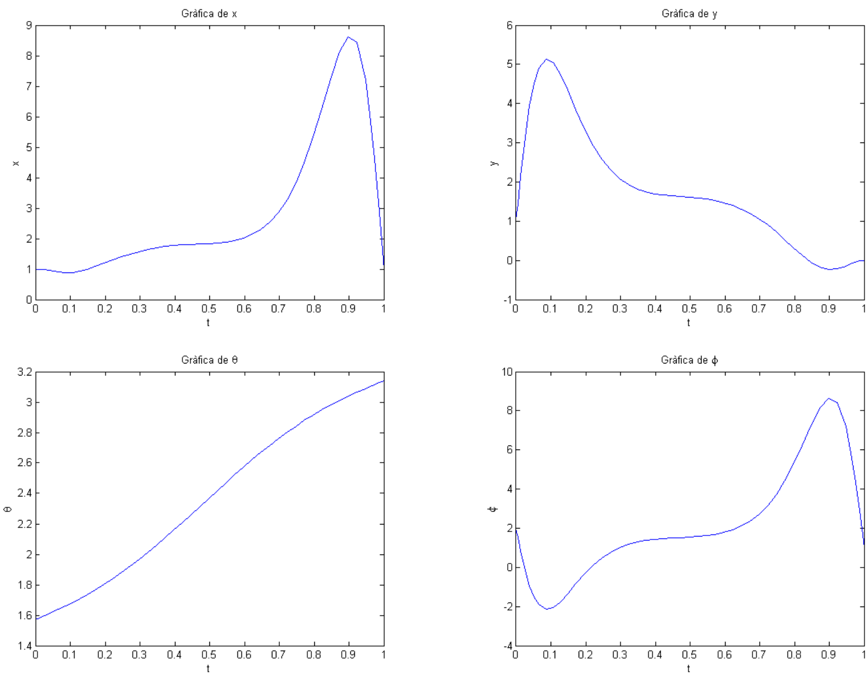


Figura 7.1: Comportament de les variables del sistema

Un cop obtingudes les dades de la simulació, mitjançant el programa *Blender* fem la realització del video que trobem en el següent link:

`https://dl.dropboxusercontent.com/u/42779469/rolling_disc.avi`

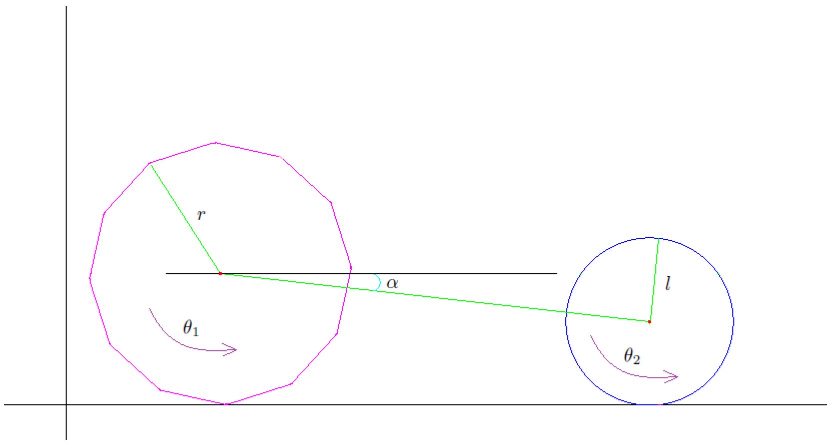
Amb aquest programa hem aconseguit fer un model del *rolling disc* i del terra, superfície sobre la que es mou el sistema. El moviment l'aconseguim afegint a cada *frame* la posició obtinguda amb MATLAB. Així, amb una velocitat de 3fps, aconseguim l'anterior resultat.

8
Vehicle amb rodes extensibles

Considerem el sistema que correspon a un vehicle amb les rodes posteriors iguals i extensibles i amb les rodes davanteres iguals i amb un radi fix l. La motivació d'estudiar aquest tipus de sistemes és tenir una capacitat de navegació en terrenys difícils que es soluciona amb l'expansió de les rodes. La dinàmica del vehicle ve descrita per:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\tan\alpha}{l} \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{r}{l} \end{pmatrix} u_2 = f_1 u_1 + f_2 u_2 \tag{8.1}$$

On θ_1 i θ_2 són, respectivament, els angles de les rodes posteriors i davanteres, α és una constant del sistema que correspon a l'angle que forma la recta que uneix els centres de les rodes amb l'horitzontal i r és el radi de les rodes posteriors que varia amb el temps. Podem observar un esquema del sistema en la següent figura:



L'objectiu d'aquesta aplicació és simular la trajectòria de les variables que descriuen el sistema anterior. Per a que això sigui possible hem de trobar el sistema de Pfaff.

La distribució és $\Delta = \langle f_1, f_2 \rangle$. Volem trobar:

$$I^{(0)} = \Delta^{\perp} = \{\omega \in \Lambda^1 \mid f_i \lrcorner \omega = 0, \ \forall f_i \in \triangle\}$$

Sigui $\omega_1 \in \Lambda^1$ tal que $\omega_1 = a\,dx + b\,dy + c\,d\theta + e\,d\phi$, s'han de satisfer les següents condicions:

$$\begin{cases} f_1 \lrcorner \omega_1 = a + c\left(-\frac{\tan\alpha}{l}\right) \\ f_2 \lrcorner \omega_1 = b + c\left(\frac{r}{l}\right) = 0 \end{cases}$$

D'on extreiem que

$$a = c\frac{\tan\alpha}{l}$$
$$b = -\frac{cr}{l}$$

Triem $c = l$ per simplificar els càlculs. Així, $a = -\tan\alpha$ i $b = -r$.

La 1-forma incient amb la distribució Δ és:

$$\omega = \tan\alpha\, dr - r\, d\theta_1 + l\, d\theta_2$$

Per tant, $I^{(0)} = \langle\omega_1\rangle$ i $I^{(1)} = \{0\}$ ja que donat $\omega \in I^{(0)}$ no es compleix que $\mathrm{d}\omega = 0 \mod I^{(0)}$. Aleshores, el sistema de Pfaff és:

$$\omega = 0$$

Ens disposem a trobar l'expressió de la 1-forma en la forma normal de Goursat és a dir,

$$\omega = \, dz_1 - z_2\, dz_3$$

Seguirem la demostració constructiva del teorema de Pfaff per trobar el canvi de coordenades. La derivada exterior de ω és:

$$d\omega = -\, dr \wedge\, d\theta_1$$

de manera que, $(\mathrm{d}\omega)^2 \wedge \omega_1 = 0$ i la 1-forma ω té rang constant $r = 1$.

Hem de trobar una funció f_1 tal que:

$$d\omega \wedge \omega \wedge df_1 = 0$$

és a dir,

$$(-l\, dr \wedge\, d\theta_1\, d\theta_2) \wedge\, df_1 = 0$$

Triem, per exemple, $f_1 = r$.

Així mateix, hem de trobar una funció f_2 tal que:

$$\omega \wedge df_1 \wedge df_2 = 0 \tag{8.2}$$
$$df_1 \wedge df_2 \neq 0 \tag{8.3}$$

Sigui $f_2 = f_2(r, \theta_1, \theta_2)$, aleshores $df_2 = f_r\, dr + f_{\theta_1}\, d\theta_1 + f_{\theta_2}\, d\theta_2$. De (8.2) n'extraiem que:

$$-l f_{\theta_1} = r f_{\theta_2}$$

Triem una f_2 que compleixi aquesta restricció, per exemple: $f_2(r, \theta_1, \theta_2) = \theta_2 l - \theta_1 r$.

Comprovem (8.3):

$$df_1 \wedge df_2 = -r\, dr \wedge\, d\theta_1 + l\, dr \wedge\, d\theta_2 \neq 0$$

ja que r i l són els radis i no poden ser zero. Per tant, ω és de la forma:

$$\omega_1 = df_2 + h_1\, df_1$$

on f_1,f_2 i h_1 són independents.
Fent un canvi de coordenades a z_1,z_2 i z_3 de manera que $z_1 = f_1 = r$ i $z_3 = f_2$, trobem $z_2 = -h_1$:

$$\omega_1 = df_2 + g_1\, df_1 = dz_4 - z_3\, dz_1$$

$$\tan\alpha\, dr - r\, d\theta_1 + l\, d\theta_2 = l\, d\theta_2 - (\theta_1\, dr + r\, d\theta_1 - z_2\, dr)$$

Així, $z_2 = -\theta_1 - \tan\alpha$.

Tenim doncs, les noves variables expressades en funció de les variables antigues:

$$\begin{aligned} z_1 &= r \\ z_2 &= -\theta_1 - \tan\alpha \\ z_3 &= \theta_2 l - \theta_1 r \end{aligned}$$

El sistema inicial expressat en les noves variables és:

$$\begin{pmatrix} \dot{z_1} \\ \dot{z_2} \\ \dot{z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u_2 \tag{8.4}$$

Necessitem que el sistema estigui expressat en la forma canònica associada a la forma de Goursat. Per a això cal fer la realimentació següent:

$$\overline{u}_1 := u_1$$
$$\overline{u}_2 := -u_2$$

De manera que el sistema original queda reescrit com segueix:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \overline{u}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{u}_2 \tag{8.5}$$

Tot seguit trobarem les sortides planes del sistema en les coordenades z, és a dir, en el nostre cas cal trobar dues funcions $y_1(z, \overline{u})$ i $y_2(z, \overline{u})$ tals que les variables del sistema es puguin escriure en funció de y_1, y_2 i les seves derivades. La teoria general de la forma normal de Goursat ens proposa:

$$y_1 = z_3$$
$$y_2 = z_1$$

De manera que:

$$\dot{y}_1 = \dot{z}_3 = z_2 \overline{u}_1 \tag{8.6}$$
$$\dot{y}_2 = \dot{z}_1 = \overline{u}_1 \tag{8.7}$$

De (8.6) n'extreiem:

$$z_2 = \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2}$$

Les variables z depenen de les realimentacions i llurs derivades de la forma $z = z(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)$, però encara no podem establir un difeomorfisme. Hem de prolongar el sistema. Per fer-ho, definim una nova variable d'estat:

$$z_4 = \overline{u}_1$$

i dos nous controls:

$$v_1 = \ddot{\overline{u}}_1, \quad v_2 = \overline{u}_2$$

així, el nostre sistema ara és de la forma:

$$\begin{cases} \dot{z_1} & = & z_4 \\ \dot{z_2} & = & v_2 \\ \dot{z_3} & = & z_2 z_4 \\ \dot{z_4} & = & v1 \end{cases}$$

I aconseguim un difeomorfisme entre $\{y_1, \dot{y_1}, y_2, \dot{y_2}\}$ i $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Només cal comprovar per quins valors de les variables aquest difeomorfisme existeix i evitar que passin per aquest punt quan impossem condicions inicials.
Els determinants dels canvis són els següents:

$$|Jz| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta_1 & -r & l \end{vmatrix} = l$$

$$|Jy| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z_4 & 0 & z_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -z_4$$

Per tant, per tot punt amb $z_4 \neq 0$ existirà la inversa.

Les realimentacions són de la forma:

$$w_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{y_2} = v_1$$

$$w_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{y_1} = \alpha + \beta v_1 + \gamma v_2$$

Trobem α, β, i γ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{y_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{z_2}\overline{u}_1\right) = \dot{z_2}\overline{u}_1 + \dot{\overline{u}}_1 z_2 = v_2 z_4 + v_1 z_2$$

Per tant,

$$\alpha = 0$$
$$\beta = z_2$$
$$\gamma = z_4$$

Conseqüentment,

$$v_2 = \frac{w_2 - \beta w_1}{\gamma} = \frac{w_2 - z_2 w_1}{z_4}$$

Volem trobar els controls $\overline{u}_1$ i $\overline{u}_2$ en funció del temps. Per fer-ho seguirem el següent procediments:

- Imposarem condicions inicials i finals a $x = (r, \theta_1, \theta_2)$.

- Mitjançant el difeomorfisme $\{x\} \leftrightarrow \{z\}$ trobem condicions inicials i finals per $z = (z_1, z_2, z_3)$
- Imposem, també, condicions inicials i finals per $\overline{u}_1 = z_4$. Així, mitjançant el difeomorfisme $\{z\} \leftrightarrow \{y\}$ trobem les condicions per $y = (y_1, \dot{y_1}, y_2, \dot{y_2})$.
- Tenim 4 condicions tant per y_1 com per y_2 per tant, existiràn dos únics polinomis de grau 3 tals que:

$$P_3(t) = y_1(t)$$
$$Q_3(t) = y_2(t)$$

- Un cop trobats els polinomis, trobem les realimentacions definides abans:

$$w_2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y_1 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} P_3(t)$$
$$w_1 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y_2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} Q_3(t)$$

- Desfent els canvis, trobem els controls $v_1(t)$ i $v_2(t)$.
- Finalment, $\overline{u}_2(t) = v_2(t)$ i $\dot{\overline{u}}_1(t) = v_1(t)$. Així, només caldrà integrar un cop $v_1(t)$ i imposar les condicions inicials per determinar les constants d'integració.

1) Decidim imposar les següents condicions inicials en $t = 0$ i finals en $t = 1$:

$$x(0) = (r(0), \theta_1(0), \theta_2(0)) = \left(1, \pi, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$x(1) = (r(1), \theta_1(1), \theta_2(1)) = (2, 0, 0)$$

Per tant, les corresponents condicions per les variables z seran:

$$z(0) = (z_1(0), z_2(0), z_3(0)) = \left(1, -\pi - 1, -\frac{\pi}{2}\right)$$
$$z(1) = (z_1(1), z_2(1), z_3(1)) = (2, -1, 0)$$

A més, imposem condicions sobre el control $\overline{u}_1$:

$$\overline{u}_1(0) = 1 \qquad\qquad \overline{u}_1(1) = 3$$

De manera que

$$z_4(0) = 1 \qquad\qquad z_4(1) = 3$$

Així doncs, les corresponents condicions per a les variables y són:

$$\begin{aligned} y(0) &= (y_1(0), \dot{y_1}(0), y_2(0), \dot{y_2}(0)) = \left(-\frac{\pi}{2}, -\pi - 1, 1, 1\right) \\ y(1) &= (y_1(1), \dot{y_1}(1), y_2(1), \dot{y_2}(1)) = (0, -3, 2, 3) \end{aligned}$$

2) Sigui $P_3(t)a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ tal que $P_3(t) = y_1(t)$. Ens disposem a trobar els coeficients.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \\ \dot{y_1}(t) &= 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \end{aligned}$$

Per $t = 0$:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{\pi}{2} \\ a_1 &= -\pi - 1 \end{aligned}$$

Per $t = 1$ es resol un sistema lineal que ens proporciona els següents valors:

$$\begin{aligned} a_2 &= 5 + \frac{7\pi}{2} \\ a_3 &= -2\pi - 4 \end{aligned}$$

Per tant,

$$P_3(t) = (-2\pi - 4)t^3 + \left(5 + \frac{7\pi}{2}\right)t^2(-\pi - 1)t - \frac{\pi}{2} \tag{8.8}$$

Procedim de manera anàloga amb $y_2(t) = Q_3(t) = b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0$.

$$\begin{aligned} y_2(t) &= b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0 \\ \dot{y_2}(t) &= 4b_4t^3 + 3b_3t^2 + 2b_2t + b_1 \end{aligned}$$

Per $t = 0$:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= 1 \end{aligned}$$

Per $t = 1$ es resol un sistema lineal que proporciona:

$$\begin{aligned} b_2 &= -2 \\ b_3 &= 2 \end{aligned}$$

Per tant,

$$Q_3(t) = 2t^3 - 2t^2 t + 1 \tag{8.9}$$

3) Trobem les realimentacions en funció del temps:

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y_1(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} P_3(t) = 10 + 7\pi + (6(-2\pi - 4))t \\ w_1 &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y_2(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} Q_3(t) = -4 + 12t \end{aligned}$$

4) Conseqüentment, els controls v_1 i v_2 tindran les expressions següents (tenint en compte que ara no depenen de les variables z sinó de les variables y):

$$v_1 = -4 + 12t$$

$$v_2 = -\frac{3(-2 + 4t + 4t^2 - \pi + 6t^2\pi)}{(1 - 4t + 6t^2)^2}$$

5) L'expressió de $\overline{u}_2(t)$ coincideix amb la de $v_2(t)$ i la de $\overline{u}_1(t)$ l'aconseguim integrant un cop $v_1(t)$ respecte del temps i imposant les condicions inicials.

6) Desfent el canvi de les realimentacions en els controls trobem l'expressió dels controls inicials:

$$u_1(t) = 1 - 4t + 6t^2$$

$$u_2(t) = \frac{3(-2 + 4t + 4t^2 - \pi + 6t^2\pi)}{(1 - 4t + 6t^2)^2}$$

Un cop trobada l'expressió dels controls en funció del temps resolem el sistema (8.1) amb MATLAB. Els resultats es mostren a continuació:

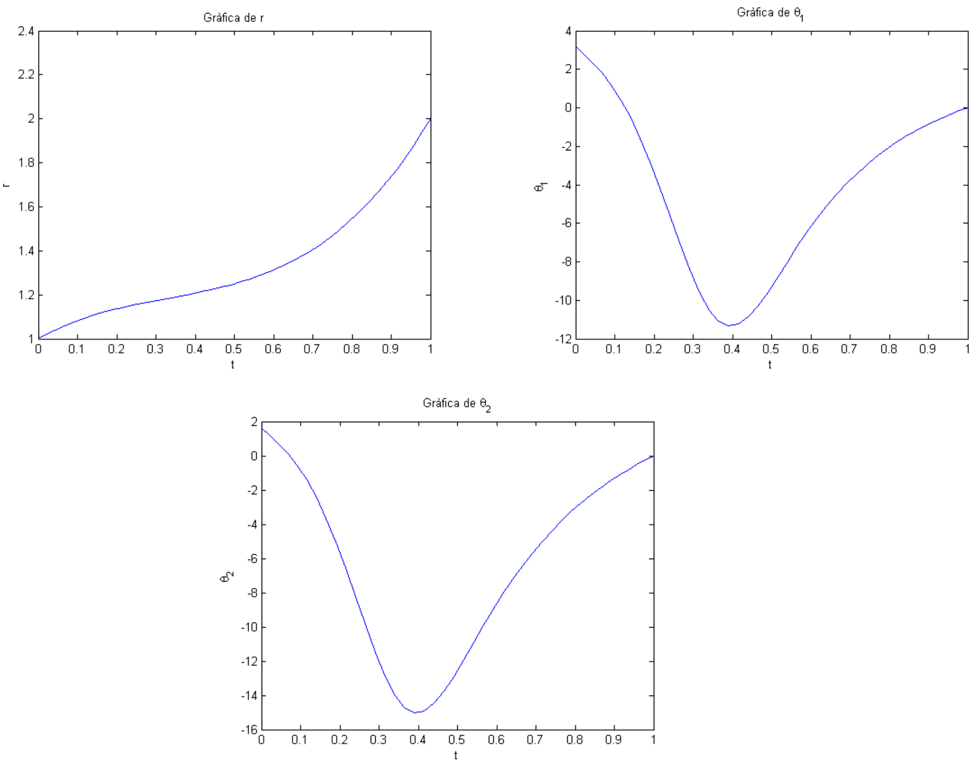


Figura 8.1: Comportament de les variables del sistema

Estudiem la correcció de l'error variant les condicions inicials de les variables d'estat $\{z\}$ i observant que convergeixen a la condició final imposada.

Segons la teoria del capítol 4, definim

$$\overline{y}_1 = y_1^d(t) - y_1(t)$$
$$\overline{y}_2 = y_2^d(t) - y_2(t)$$

com l'error entre les trajectòries. De manera anàloga definim

$$\overline{w}_1 = w_1^d(t) - w_1(t)$$
$$\overline{w}_2 = w_2^d(t) - w_2(t)$$

l'error entre els controls. Notem que les expressions de $y_1^d(t)$, $y_2^d(t)$, $w_1^d(t)$ i $w_2^d(t)$ són conegudes. Volem trobar les expressions de $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, $\overline{w}_1$ i $\overline{w}_2$. La idea és fer les següents definicions:

$$\ddot{\overline{y}}_1 = m_1\dot{\overline{y}}_1 + m_0\overline{y}_1$$
$$\ddot{\overline{y}}_2 = \hat{m}_1\dot{\overline{y}}_2 + \hat{m}_0\overline{y}_2$$

Així, hem de trobar m_0, m_1, $\hat{m}_0$ i $\hat{m}_1$ de manera que els polinomis

$$\lambda^2 + m_1\lambda + m_0 = 0$$
$$\lambda^2 + \hat{m}_1\lambda + \hat{m}_0 = 0$$

siguin poinomis Hurwitz.Per tant, hem triat $m_0 = -10001$, $m_1 = -200$, $\hat{m}_0 = -40001$ i $\hat{m}_1 = -400$.

Un cop obtingudes les constants anteriors, trobem

$$\overline{w}_2 = w_2 - \left(-10001\left(P_3(t) - z_3\right) - 200\left(\dot{P}_3(t) - z_2 z_4\right)\right) = -190 - \frac{10387}{2}\pi + \left(6\left(-2\pi - 4\right)\right)t +$$
$$+\left(10001\left(-\pi - 1\right)\right)t + \left(10001\left(5 + \frac{7}{2}\right)\pi\right)t^2 + \left(10001\left(-2\pi - 4\right)\right)t^3 - 10001z_3 +$$
$$+\left(400\left(5 + \frac{7}{2}\pi\right)\right)t + \left(600\left(-2\pi - 4\right)\right)t^2 - 200z_4z_2$$

$$\overline{w}_1 = w_1 - \left(-40001\left(Q_3(t) - z_1\right) - 400\left(\dot{Q}_3(t) - z_4\right)\right) = 40397 + 38413t -$$
$$-77602t^2 + 80002t^3 - 40001z_1 - 400z_4$$

i ara, mijtançant les relacions ja trobades anteriorment,

$$w_1 = v_1$$
$$w_2 = \alpha + \beta v_1 + \gamma v_2$$

trobem les expressions dels controls v_1 i v_2 en funció del temps i de les variables d'estat $\{z\}$. Obtenim:

$$v_1 = 40397 + 38413t - 77602t^2 + 80002t^3 - 40001z_1 - 400z_4$$

$$v_2 = 80414 - 20002z_3 - 800z_4 - 400z_4z_2 - 80002z_1 + 203194t^2 + 2076808t^3 + 1600z_4z_2t -$$
$$-2400z_4z_2t^2 + 70407\pi - 745644t - 2571196t^4 + 1440000t^5 + 560014t\pi z_1 + 5600t\pi z_4 -$$
$$-480012t^2\pi z_1 - 4800t^2\pi z_4 - 464410t\pi - 134033t^2\pi + 1293600t^3\pi - 1485594t^4\pi +$$
$$+720000t^5\pi - 80002\pi z_1 - 800\pi z_4 + 80008z_3t - 120012z_3t^2 + 800020tz_1 +$$
$$+8000tz_4 - 960024t^2z_1 - 9600t^2z_4$$

Amb el programa MATLAB fem les simulacions de les variables d'estat $\{z\}$ amb les condicions inicials originals i amb les pertorbades (on fem servir els controls que acabem de trobar), els resultats s'exposen en les figures següents:

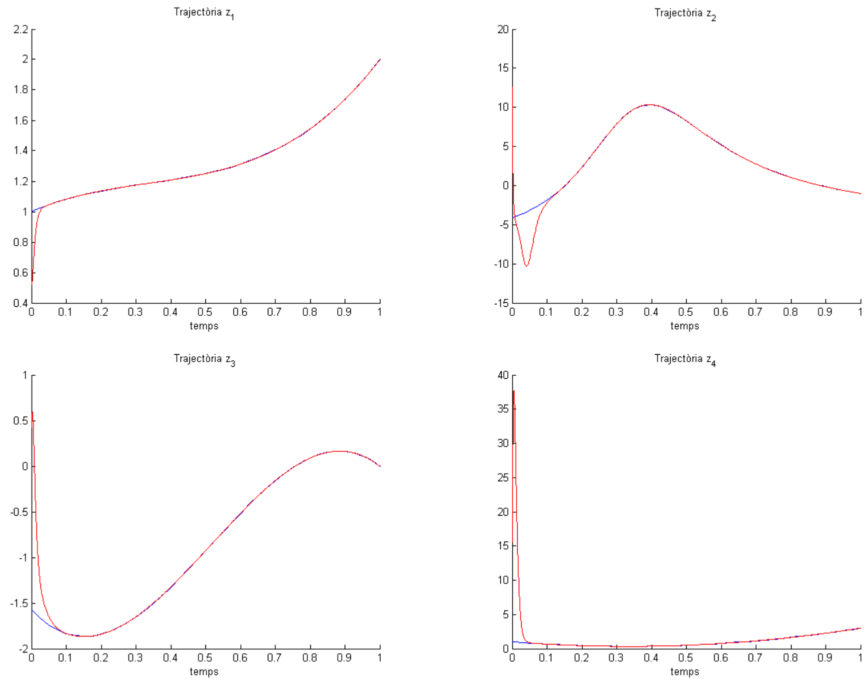
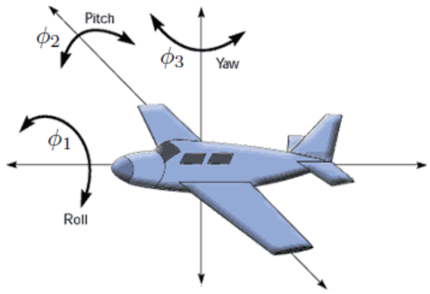


Figura 8.2: Comportament de les trajectòries variant les condicions inicials

Les trajectòries en blau són les trajectòries amb les condicions inicials originals i les vermelles les obtingudes variant les condicions inicials. Notem que totes convergeixen ràpidament cap a la trajectòria desitjada.

9
Avió

El següent sistema és el model d'un avió amb el qual és possible girar entorn de l'eix, elevar-se i orientar-se, (roll, pitch i yaw respectivament en anglès). Els angles per a cadascún dels moviments anteriors són, respectivament, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 i els veiem representats a la següent imatge:



La trajectòria de l'avió ve descrita pels angles d'aquests tres moviments i per la posició (x, y, z) a l'espai donant pas al sistema que següeix:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_3\cos\phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\phi_3\cos\phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sin\phi_1\tan\phi_2 & \cos\phi_1\tan\phi_2 \\ 0 & 0 & \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 \\ 0 & 0 & \frac{\sin\phi_1}{\cos\phi_2} & \frac{\cos\phi_1}{\cos\phi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

On u, w_1, w_2 i w_3 són les variables de control. Seguint el mateix procediment que les aplicacions anteriors trobem les dues 1-formes ω_1 i ω_2 que anul·len els camps vectorials són:

$$\omega_1 = dx - \frac{\cos\phi_3}{\sin\phi_3}\, dy \tag{9.2}$$

$$\omega_2 = dx + \frac{\cos\phi_2}{\sin\phi_2}\cos\phi_3\, dz \tag{9.3}$$

El sistema de Pfaff associat té codimensió $6-4=2$ i aplicarem la teoria de la forma normal estesa de Goursat. Volem trobar les variables z_0, z_1^1, z_2^1, z_1^2 i z_2^2 de manera que:

$$\omega_1 = dz_1^1 - z_2^1\, dz_0 \tag{9.4}$$
$$\omega_2 = dz_1^2 - z_2^2\, dz_0 \tag{9.5}$$

És fàcil veure que:

$$\begin{aligned} z_0 &= x \\ z_1^1 &= y \\ z_2^1 &= \tan\phi_3 \\ z_1^2 &= z \\ z_2^2 &= \frac{\tan\phi_2}{\cos\phi_3} \end{aligned}$$

Per establir un difeomorfisme entre les variables d'estat del sistema original que les anomenarem $\{x\}$ i les noves variables $\{z\}$ cal afegir una nova variable tal que es pugui establir un difeomorfisme:

$$z_3 = \phi_1$$

Així, les variables inicials expressades en funció de les $\{z\}$ són:

$$\begin{aligned} x &= z_0 \\ y &= z_1^1 \\ z &= z_1^2 \\ \phi_1 &= z_3 \\ \phi_2 &= \arctan(z_2^2\cos(\arctan z_2^1)) \\ \phi_3 &= \arctan z_2^1 \end{aligned}$$

Per la teoria explicada al capítol 3 sabem que el sistema de control en les noves variables ha de ser de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z_0} &= u_0 \\ \dot{z_1^1} &= z_2^1 u_0 \\ \dot{z_2^1} &= u_1 \\ \dot{z_1^2} &= z_2^2 u_0 \\ \dot{z_2^2} &= u_2 \\ \dot{z_3} &= u_3 \end{aligned}$$

Si derivem les nostres variables obtenim:

$$
\begin{aligned}
\dot{z_0} &= \dot{x} = \cos\phi_3 \cos\phi_2 u \\
\dot{z_1^1} &= \dot{y} = \sin\phi_3 \cos\phi_2 u \\
\dot{z_2^1} &= \frac{1}{\cos^2\phi_3} \sin\phi_2 \left(\frac{\sin\phi_1}{\cos\phi_2} w_2 + \frac{\cos\phi_1}{\cos\phi_2} w_3 \right) \\
\dot{z_1^2} &= \dot{z} = -\sin\phi_2 u \\
\dot{z_2^2} &= -\frac{1}{\cos^2\phi_2} \left(\cos\phi_1 w_2 - \sin\phi_1 w_3 \right) \\
\dot{z_3} &= \dot{\phi_1}
\end{aligned}
$$

Fent les realimentacions següents aconseguim expressar el sistema anterior com el sistema en la forma canònica (4.1):

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{u_0}{\cos\phi_2 \cos\phi_3} \\
u_1 &= \frac{1}{\cos^2\phi_3} \sin\phi_2 \left(\frac{\sin\phi_1}{\cos\phi_2} w_2 + \frac{\cos\phi_1}{\cos\phi_2} w_3 \right) \\
u_2 &= -\frac{1}{\cos^2\phi_2} \left(\cos\phi_1 w_2 - \sin\phi_1 w_3 \right) \\
u_3 &= \dot{\phi_1}
\end{aligned}
$$

Les flat outpus són:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= z_0 \\
y_1 &= z_1^1 \\
y_2 &= z_1^2 \\
y_3 &= z_3
\end{aligned}
$$

De manera que:

$$
\begin{aligned}
\dot{y_0} &= u_0 \\
\dot{y_1} &= z_2^1 u_0 \\
\dot{y_2} &= z_2^2 u_0
\end{aligned}
$$

Considerem la següent prolongació per tenir un difeomorfisme entre les variables:

$$
z_4 = u_0
$$

i un nou control:

$$v = \dot{u_0}$$

Ara, podem expressar les variables $\{z\}$ en funció de les flat outputs i les seves derivades com segueix:

$$\begin{aligned}
z_0 &= y_0 \\
z_1^1 &= y_1 \\
z_1^2 &= y_2 \\
z_2^1 &= \frac{\dot{y_1}}{\dot{y_0}} \\
z_2^2 &= \frac{\dot{y_2}}{\dot{y_0}} \\
z_3 &= y_3 \\
z_4 &= \dot{y_0}
\end{aligned}$$

El sistema en les sortides planes és:

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_0 &= \alpha_0 \\
\ddot{y}_1 &= \alpha_1 \\
\ddot{y}_2 &= \alpha_2 \\
\dot{y}_3 &= \alpha_3
\end{aligned}$$

Alhora, emprant els sistemes anteriors sabem que:

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_0 &= \ddot{z}_0 = \dot{z}_4 = v \\
\ddot{y}_1 &= \ddot{z}_1^1 = \dot{z}_2^1 z_4 + z_2^1 v \\
\ddot{y}_2 &= \dot{z}_2^2 z_4 + z_2^2 v \\
\dot{y}_3 &= \dot{z}_3 = u_3
\end{aligned}$$

De manera que:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= v \\
\alpha_1 &= z_4 u_1 + z_2^1 v \\
\alpha_2 &= z_4 u_2 + z_2^2 v \\
\alpha_3 &= u_3
\end{aligned}$$

és la realimentació entre els controls α_i, $i = 0, \ldots, 3$ i els controls $\{v, u_1, u_2, u_3\}$; i la realimentació inversa queda expressada de la següent manera:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_0 \\ u_1 &= \frac{\alpha_1 - z_2^1 \alpha_0}{z_4} \\ u_2 &= \frac{\alpha_2 - z_2^2 \alpha_0}{z_4} \\ u_3 &= \alpha_3 \end{aligned}$$

Bibliografia

[1] Agrawal, Sunil K. and Jin Yan, “A Three-Wheel Vehicle with Expanding Wheels: Differential Flatness, Trajectory Planning, and Control”, *Proceedings of the 2003 IEEWRSJ, Intl. Conference on Intelligent Robots and Systems*, Las Vegas, October 2003.

[2] Bryant, Robert L., Chern, S.S., Gardner, Robert B., Goldschmidt, Hubert L. and Griffiths, P.A., *Exterior Differential Systems.* Springer-Verlag, 1990.

[3] Fliess, M., Levine, J., Martin, P. and Rouchon, P.,“Flatness and Defect of Nonlinear Systems: Introductory Theory and Examples”, *International Journal of Control*, Vol. 61, No. 6, 1995, pp. 1327-1361.

[4] Fossas, Enric, Franch, Jaume, and Agrawal, Sunil K. “Linearization by Simple prolongations of Two-input Driftless Systems”. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sidney 2000. 4, 3381-3385.

[5] Franch, Jaume, and Agrawal, Sunil K., “Design of differentially flat planar space robots and their planning and control”,*International Journal of Control*, $81 : 3, 407 - 416$, 2008.

[6] Roussos, Giannis P., Dimarogonas, Dimos V., and Kyriakopoulos Kostas J. “3D Navigation and Collision Avoidance for a Non-Holonomic Vehicle”. *American Control Conference*, Seattle, June 2008.

[7] Sastry, Shankar. *Nonlinear Systems. Analysis, Stability, and Control.* Springer-Verlag, 1999.

Índex alfabètic