



Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i  
Aeroespacial de Castelldefels

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

# TRABAJO FIN DE CARRERA

**TÍTULO DEL TFC: Contaje de triángulos en conjuntos de puntos coloreados – un problema de la geometría combinatoria**

**TITULACIÓN: Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones, especialidad Sistemas de Telecomunicaciones**

**AUTORES: Javier Alcalde Trías  
Luis Font Ciprés**

**DIRECTOR: Clemens Huemer**

**FECHA: 14 de mayo de 2013**

**Título:** Contaje de triángulos en conjuntos de puntos coloreados – un problema de la geometría combinatoria

**Autores:** Javier Alcalde Trías  
Luis Font Ciprés

**Director:** Clemens Huemer

**Fecha:** 14 de mayo de 2013

## Resumen

Un objeto clásico de estudio en la Geometría combinatoria son conjuntos  $S$  de  $n$  puntos en el plano. Se dice que un triángulo con vértices en  $S$  está vacío si no contiene puntos de  $S$  en su interior. El número de triángulos vacíos depende de cómo se dibujó el conjunto  $S$  y una pregunta ardiente es: ¿Cuántos triángulos vacíos hay como mínimo en cada conjunto  $S$  de  $n$  puntos? Para descartar configuraciones de puntos degeneradas solo se consideran nubes de puntos sin tres puntos colineales.

En este proyecto se ha desarrollado un software que realiza el contaje de triángulos vacíos en un conjunto de  $n$  puntos colocados en el plano. El software permite generar, visualizar gráficamente, buscar y mostrar las distribuciones de triángulos óptimas. Se considera la distribución óptima la que contiene menos triángulos vacíos.

El objetivo es acotar resultados teóricos mediante pruebas experimentales realizadas gracias al software creado.

El programa también permite contar triángulos vacíos monocromáticos en conjuntos de puntos bi-coloreados. Un triángulo monocromático es aquel cuyos tres vértices tienen el mismo color. Mientras que el primer problema ha sido muy bien estudiado durante las últimas décadas, la versión bi-coloreada queda para ser explorada en profundidad. En esta memoria también se exponen los resultados obtenidos sobre el mínimo número de triángulos vacíos en nubes (pequeñas) de puntos bi-coloreadas.

También se pone en contexto este problema con otros resultados relacionados, como el teorema de Erdős-Szekeres, y se da un pequeño resumen de otros problemas que han hecho grande la Geometría combinatoria.

**Title:** Counting triangles in colored point sets - a problem of combinatorial geometry

**Authors:** Javier Alcalde Trías  
Luis Font Ciprés

**Director:** Clemens Huemer

**Date:** May, 14th 2013

## Overview

A classical object of study in combinatorial geometry are sets  $S$  of points in the plane. A triangle with vertices from  $S$  is called empty if it contains no points of  $S$  in its interior. The number of empty triangles depends on the positions of points from  $S$  and a burning question is: How many empty triangles are there at least, among all sets  $S$  of  $n$  points? In order to discard degenerate point configurations, we only consider sets  $S$  without three collinear points.

In this project, a software has been developed which allows to count the number of empty triangles in a set of  $n$  points in the plane. The software permits generation of point sets and their graphical visualization, as well as searching and displaying of optimal point configurations encountered. A point set of a given cardinality is said to be optimal if it contains the minimum number of empty triangles.

The objective is to derive bounds on the minimum number of empty triangles by means of experiments realized with our software.

The created program also allows to count empty monochromatic triangles in two-colored point sets. A triangle is called monochromatic if its three vertices have the same color. While the first problem has been studied extensively during the last decades, the two-colored version remains to be explored in depth. In this work we also expose our results on the minimum number of empty triangles in (small) two-colored point sets.

Also, the treated problem is put in context with related results, such as the Erdős-Szekeres theorem, and a short outline of famous problems which contributed to the rise of combinatorial geometry is presented.



# ÍNDICE

<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA COMBINATORIA.....</b>	<b>7</b>
<b>1.1. Introducción.....</b>	<b>7</b>
<b>1.2. Geometría combinatoria.....</b>	<b>7</b>
<b>1.2.1. Definición e introducción.....</b>	<b>7</b>
<b>1.2.2. Teoremas y problemas de la geometría combinatoria.....</b>	<b>8</b>
<i>1.2.2.1. Teorema de Radon.....</i>	<i>8</i>
<i>1.2.2.2. Teorema de Helly.....</i>	<i>8</i>
<i>1.2.2.3. Teorema de Caratheodory.....</i>	<i>8</i>
<i>1.2.2.4. Problema empaquetamiento de esferas.....</i>	<i>8</i>
<b>1.3. Problema triángulos vacíos monocromáticos.....</b>	<b>9</b>
<b>1.3.1. Definición e introducción.....</b>	<b>9</b>
<b>1.3.2. Antecedentes.....</b>	<b>15</b>
<b>1.3.3. Objetivos.....</b>	<b>18</b>
<b>CAPÍTULO 2. MANEJO Y FUNCIONAMIENTO DEL SOFTWARE CREADO.....</b>	<b>20</b>
<b>2.1. Enfoque.....</b>	<b>20</b>
<b>2.2. Manejo de la aplicación.....</b>	<b>20</b>
<b>2.3. Funcionamiento interno.....</b>	<b>30</b>
<b>2.3.1. Generación de puntos.....</b>	<b>30</b>
<b>2.3.2. Creación de triángulos.....</b>	<b>31</b>
<i>2.3.2.1. Triángulos con puntos monocromáticos.....</i>	<i>31</i>

2.3.2.2. Triángulos con puntos bicromáticos.....	33
<b>2.3.3. Contaje de triángulos vacíos.....</b>	<b>35</b>
2.3.3.1. Triángulos con puntos monocromáticos.....	35
2.3.3.2. Triángulos con puntos bicromáticos.....	37
<b>2.3.4. Mínimo número de triángulos vacíos.....</b>	<b>40</b>
<b>2.3.4. Puntos colineales.....</b>	<b>40</b>
<b>CAPÍTULO 3. RESULTADOS TEÓRICOS.....</b>	<b>42</b>
<b>3.1. Resultados teóricos.....</b>	<b>42</b>
3.1.1. Lema de la discrepancia.....	42
3.1.2. Resultados teóricos de Oswin Aichholzer.....	45
3.1.3. Resultados teóricos para planos bicromáticos...	45
<b>CAPÍTULO 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES.....</b>	<b>47</b>
<b>4.1. Resultados experimentales para planos monocromáticos.....</b>	<b>47</b>
4.1.1. Representación gráfica de los resultados obtenidos.....	48
<b>4.2. Resultados experimentales para planos bicromáticos.....</b>	<b>51</b>
4.2.1. Representación gráfica resultados obtenidos.....	54
<b>Conclusiones.....</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>70</b>

# CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA COMBINATORIA

## 1.1. Introducción

Un objeto clásico en el estudio de la Geometría combinatoria son conjuntos  $S$  de  $n$  puntos en el plano en posición general, es decir, sin tres puntos colineales.

En particular, una rama de investigación de la geometría combinatoria es el estudio de propiedades de los triángulos (o polígonos en general) definidos sobre conjuntos de puntos.

Se dice que un triángulo con vértices en  $S$  está vacío si no contiene puntos de  $S$  en su interior. El número de triángulos vacíos depende de cómo se dibuja el conjunto de puntos. La pregunta que se formula es: ¿Cuántos triángulos vacíos hay como mínimo en cada conjunto de  $n$  puntos? En este proyecto se estudia el mínimo número de triángulos vacíos monocromáticos que hay en un conjunto de  $n$  puntos de dos colores diferentes. Un triángulo monocromático es aquel que está formado por tres puntos de un mismo color.

A continuación, en la Sección 1.2, se presentarán algunos problemas clásicos de la geometría combinatoria para introducir el tema y mostrar su amplitud. En la Sección 1.3 se hablará sobre el problema de triángulos sobre el que trata este proyecto.

## 1.2. Geometría combinatoria

### 1.2.1. Definición e introducción

La geometría combinatoria es relativamente nueva. Para algunos es uno de los campos más atractivos de las matemáticas. Está repleta de problemas de apariencia sencilla para los que no se conoce solución.

A principios del siglo XIX aparecieron algunos teoremas los cuales se pueden considerar como el inicio de ésta. Sin embargo, los principales teoremas de esta rama de la geometría fueron obtenidos en el siglo XX por Helly, Borsuk, Hadwiger, Grünbaum, Klee y Boltyanski, entre otros matemáticos. Entre tales resultados figuran el Teorema de Helly y el Teorema de Carathéodory [7]. Cabe decir que en esta rama de las matemáticas se han obtenido progresos notables en los problemas más importantes, pero sin embargo, los desafíos más destacados no han sido completamente esclarecidos, como el problema de Borsuk [6], el problema de iluminación, formulado por Boltyanski [4], o el problema de Szökefalvi-Nagy [5].

A continuación se explican algunos de estos teoremas y problemas.

## 1.2.2. Teoremas y problemas de la geometría combinatoria

### 1.2.2.1. Teorema de Radon

*Si se toman  $d+2$  puntos de  $\mathbf{R}^d$ , se pueden repartir en dos conjuntos disjuntos  $A$  y  $B$  tales que las envolventes convexas de  $A$  y  $B$  se intersecan.*

Si trabajamos con  $d = 2$ , o sea en  $\mathbf{R}^2$ , el conjunto, al que se llamará  $X$ , constará de cuatro puntos. Así, podría ser posible partir  $X$ , en un subconjunto con tres puntos y otro subconjunto con un único punto aislado, donde la envoltura convexa del subconjunto de tres puntos (un triángulo) contiene al subconjunto del punto único, o sería posible partir  $X$ , en dos subconjuntos con dos puntos cada uno, tales que los segmentos de línea que unen los puntos de cada subconjunto se intersequen. La última situación sería el caso cuando los cuatro puntos forman los vértices de un cuadrilátero convexo.

### 1.2.2.2. Teorema de Helly

A partir del teorema de Radon se puede probar el teorema de Helly que dice lo siguiente:

*Si se tiene una familia finita de conjuntos convexos de  $\mathbf{R}^d$  tales que cada  $d+1$  tienen un punto de intersección entonces todos tienen un punto de intersección.*

Por ejemplo en el plano sólo hay que comprobar que cada 3 conjuntos convexos se intersectan para ver si todos se intersectan. La prueba se puede hacer por inducción sobre el número de elementos de la familia.

### 1.2.2.3. Teorema de Caratheodory

*Si  $A$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbf{R}^d$ , entonces todo  $x \in \text{conv } A$  puede expresarse como una combinación convexa de, a lo sumo,  $d + 1$  puntos de  $A$ .*

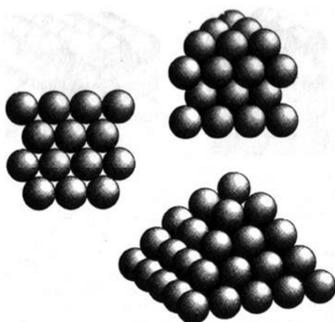
Es decir, en el plano, para ver si un punto está en la envolvente convexa de un conjunto basta ver que está en algún triángulo formado por ese conjunto.

### 1.2.2.4. Problema empaquetamiento de esferas

El "empaquetamiento de esferas" [12] es un tipo de problema matemático que se refiere a cosas tan simples como construir una pirámide con bolas de hierro, amontonar naranjas, embalar pelotas de ping-pong en una caja o, si se quiere algo más sofisticado, tratar de comprender las unidades estructurales de los filosilicatos. En cualquier caso, el asunto estriba en encontrar la forma de empaquetar esferas del mismo radio de manera que dejen los mínimos espacios vacíos posibles.

La pregunta original fue expuesta en el siglo XVI por un aventurero inglés llamado Sir Walter Raleigh (1552-1618), el cual había participado en la construcción de barcos de guerra y quiso saber si existía alguna manera de calcular las balas de cañón depositadas en la cubierta del barco. La respuesta a esta cuestión se la dio un matemático inglés, Thomas Harriot (1560-1621), que a su vez planteo otra pregunta, ¿Cuál es la mejor manera de apilar esferas para que el espacio que queda entre ellas sea mínimo?

Harriot consulto el problema con un astrónomo alemán, Johannes Kepler (1571-1630). Después de estudiar el problema se dedujo que la mejor manera de colocar las balas de cañón es la misma que la que se utiliza en los mercados de manera espontánea para colocar naranjas dentro de sus cajas.



**Fig.1.1** Empaquetamiento de esferas

Thomas Hales en 1998 dio una demostración con ordenador de la conjetura de Kepler [9].

Este es un ejemplo claro de geometría combinatoria, problemas aparentemente sencillos a los que es muy difícil encontrar solución.

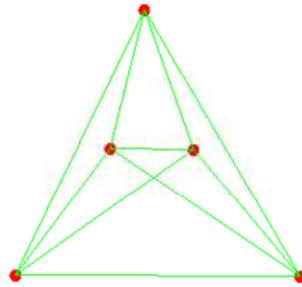
### **1.3. Problema triángulos vacíos monocromáticos**

#### **1.3.1. Definición e introducción**

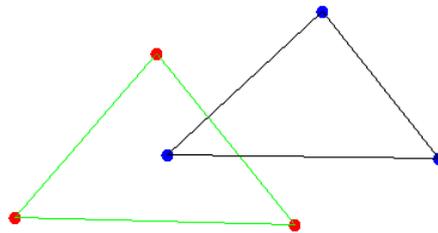
Un problema de la geometría combinatoria es el que se trata en este proyecto. Dado un conjunto de  $n$  puntos en un plano, ¿cuántos triángulos vacíos pueden formarse con segmentos definidos por pares de puntos del conjunto?

El problema puede tener diferentes variantes. Una sería que todos los puntos sean de un mismo color y, por lo tanto, todos estén unidos entre sí (**Fig. 1.2**). Otra alternativa es generar puntos de dos colores diferentes, donde sólo van

unidos los puntos del mismo color (**Fig. 1.3**). No se consideran triángulos con vértices de dos colores, todos los triángulos serán monocromáticos.

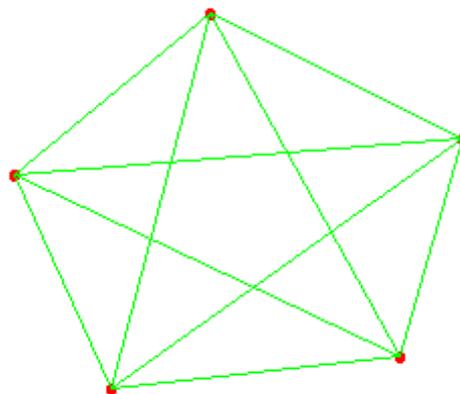


**Fig. 1.2** Distribución monocromática

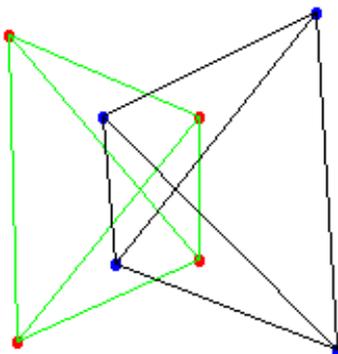


**Fig. 1.3** Distribución bicromática

Un triángulo está vacío siempre que no haya ningún punto en su interior, indistintamente de su color. En la **Fig. 1.4** podemos observar un conjunto en el que todos los triángulos están vacíos. Por el contrario, en la **Fig. 1.5**, observamos un conjunto de 8 puntos (4 de cada color) en el que no hay ningún triángulo vacío.



**Fig. 1.4** Distribución de 5 puntos con todos los triángulos vacíos



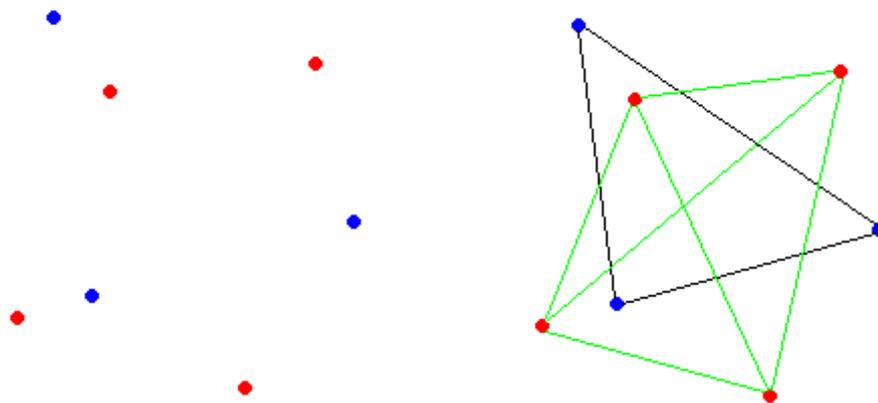
**Fig. 1.5** Distribución de 4 puntos azules y 4 rojos sin ningún triángulo vacío

El objetivo de este proyecto es encontrar el mínimo número de triángulos vacíos a diferentes configuraciones de  $n$  puntos. De este problema de geometría combinatoria planteado no se conoce solución exacta. Al no poder encontrar soluciones exactas se darán acotaciones para diferentes conjuntos de  $n$  puntos, tanto monocromáticos como de dos colores. Los puntos se colocan aleatoriamente en el plano, pero siempre en posición general (sin que haya tres puntos colineales).

Hay configuraciones, sobre todo aquellas en las que hay pocos puntos, en las que a simple vista se puede observar cuántos de los triángulos formados están vacíos y cuántos no. Sin embargo, cuando se tiene una cantidad elevada de puntos en el plano es imposible descifrar a simple vista cuántos de los triángulos formados están vacíos.

Por ejemplo, en la **Fig. 1.6**, parte izquierda, se puede observar una distribución con 4 puntos rojos y 3 puntos azules.

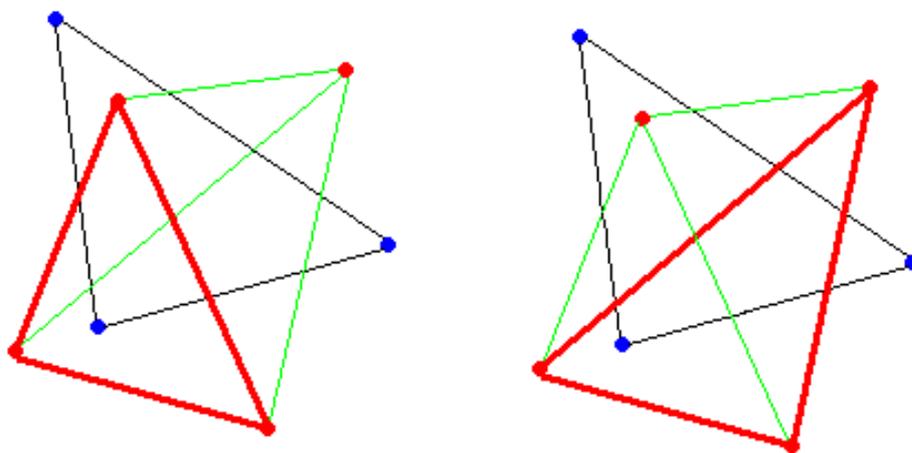
Al unir los puntos y formar todos los triángulos monocromáticos posibles (**Fig. 1.6** parte derecha) se puede observar sin mucha dificultad qué triángulos están vacíos y qué triángulos, por el contrario, contienen un punto en su interior.



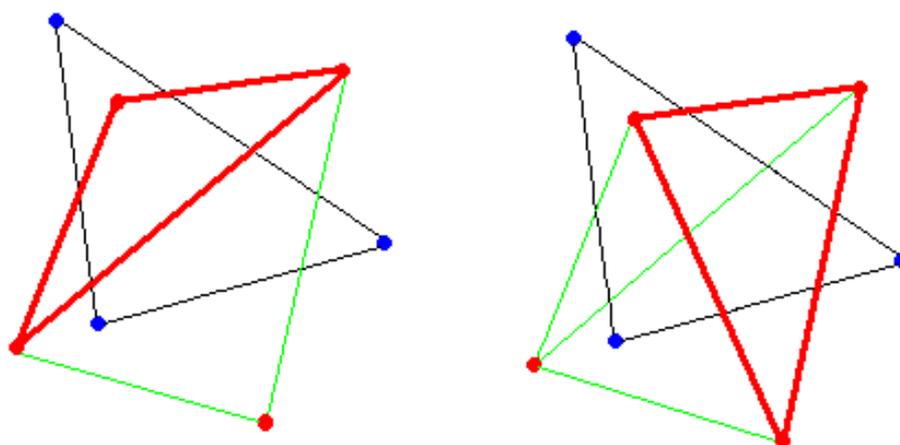
**Fig. 1.6** Distribución y triángulos formados con 4 puntos rojos y 3 azules

En la configuración estudiada han aparecido 5 triángulos. Uno de ellos formado por puntos azules y los 4 restantes formados por puntos rojos.

De los 4 triángulos formados por puntos rojos tenemos 2 llenos, ya que uno de los puntos restantes, en este caso uno azul, recae en su interior (**Fig. 1.7**). Los dos restantes están vacíos (**Fig. 1.8**).

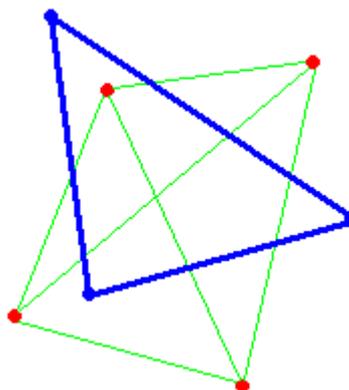


**Fig. 1.7** Triángulos formados por puntos rojos con un punto en su interior



**Fig. 1.8** Triángulos vacíos formados por puntos rojos

El único triángulo formado por puntos azules se puede observar claramente que contiene un punto, en este caso rojo, en su interior (**Fig. 1.9**).

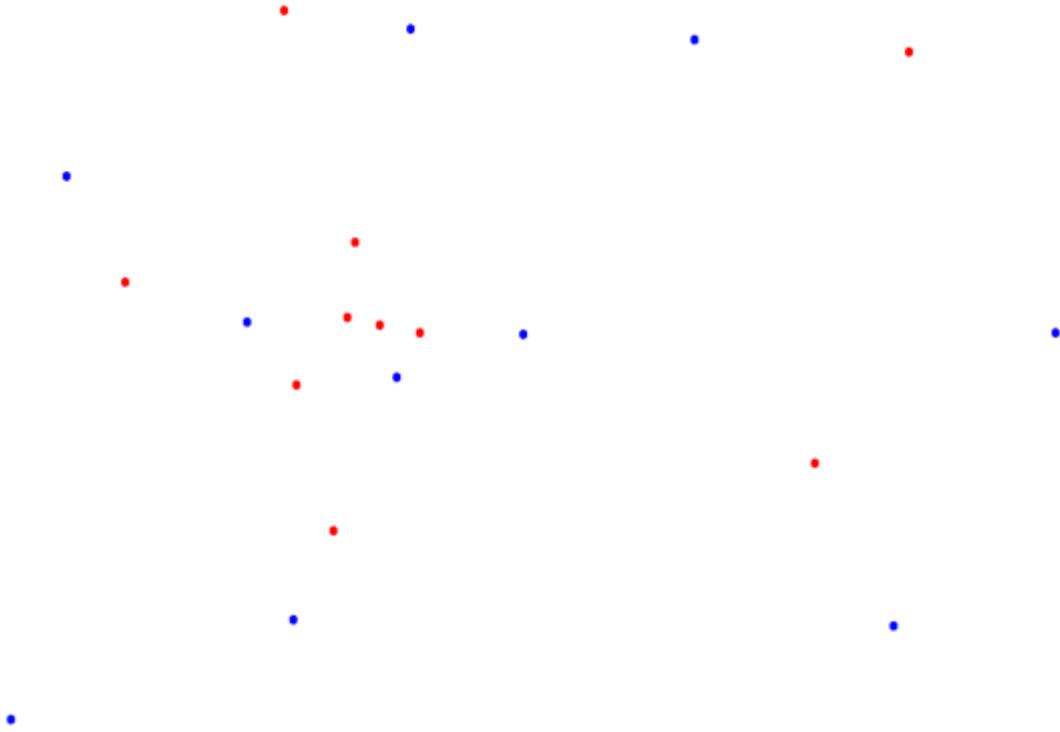


**Fig. 1.9** Triángulo formado por puntos azules con un punto en su interior

Por lo tanto, de los 5 triángulos que forman la configuración, sólo 2 de ellos están vacíos.

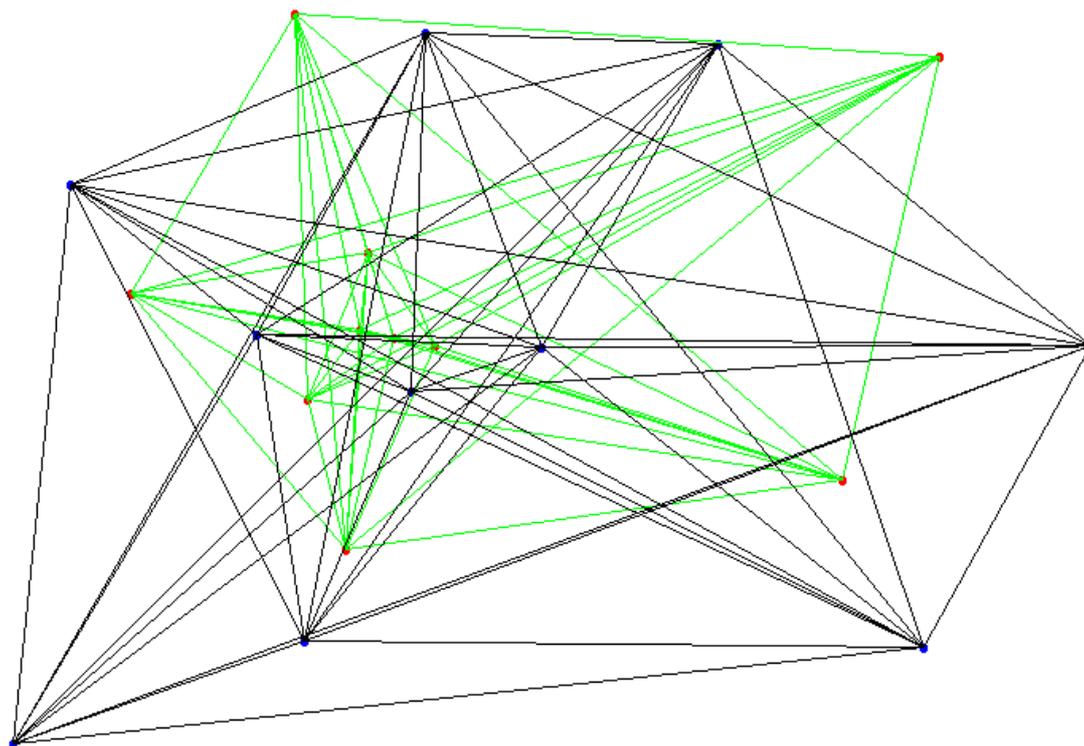
El ejemplo anterior podía solucionarse a simple vista ya que se disponía de pocos puntos, y por lo tanto, pocos triángulos.

Existe la posibilidad de encontrar configuraciones de puntos en las que visualmente no se puede, o es muy difícil, realizar el conteo de triángulos vacíos (**Fig. 1.10**).



**Fig. 1.10** Distribución de 10 puntos rojos y 10 azules

Una vez creados todos los triángulos (**Fig. 1.11**) se puede observar que a simple vista es imposible realizar un contaje exhausto de todos los triángulos y de saber cuáles de ellos están vacíos.



**Fig. 1.11** Triángulos creados con 10 puntos azules y 10 puntos rojos

Para poder contar el número de triángulos vacíos también en estos casos, se ha programado una aplicación que realiza operaciones de contaje de triángulos y permite al usuario varias opciones.

Dicha aplicación puede ayudar a encontrar las cotas más próximas a las reales y trabajar tanto en conjuntos de puntos monocromáticos como en conjuntos de dos colores.

También se estudia el caso cuando el número de puntos de cada color no es el mismo. Se observa que cuando el número de puntos rojos, por ejemplo, es mucho mayor que el número de puntos azules, entonces el número de triángulos monocromáticos vacíos será alto. Esto se estudia más profundamente en el lema de la discrepancia en el Capítulo 3.

### 1.3.2. Antecedentes

Existen algunos trabajos previos que intentan solucionar el problema presentado, sin embargo no se ha encontrado una solución concreta, únicamente una serie de cotas que reduce el rango para las soluciones.

El inicio de este tipo de problemas se atribuye a Erdős. Se empieza con el siguiente teorema de Erdős y Szekeres [8]:

*Para todo entero positivo  $n$ , existe un entero positivo  $N(n)$ , tal que todo conjunto de  $N(n)$  puntos en el plano en posición general contiene un subconjunto de  $n$  puntos en posición convexa.*

A raíz de este teorema, clásico en la geometría combinatoria, se han realizado muchos trabajos a posteriori.

Una vez probada la existencia de  $N(n)$ , el problema restante es el de estimar  $N(n)$ . En [8], Erdős y Szekeres dan dos pruebas del teorema. De ambas pruebas, la segunda da una mejor cota superior para  $N(n)$ . La cota superior para  $N(n)$  dada por la segunda prueba es:

$$N(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$$

También se da la siguiente cota inferior:

$$N(n) \geq 2^{n-2} + 1$$

En ese mismo artículo conjeturaron que esta desigualdad es de hecho una igualdad, es decir:  $N(n) = 2^{n-2} + 1$  para todo  $n \geq 3$ .

A pesar de numerosos intentos por diversos autores esta conjetura dista mucho de estar resuelta.

Una familia de problemas relacionados surge cuando además se pide que el polígono esté vacío, esto es: Dado un entero positivo  $n \geq 3$ , determinar (si es que existe) el mínimo entero positivo  $H(n)$ , tal que todo conjunto de al menos  $H(n)$  puntos en el plano contiene un subconjunto vacío en posición convexa de  $n$  elementos.

Este problema fue planteado por Erdős en 1978. Los valores  $H(3) = 3$ ,  $H(4) = 5$  se pueden demostrar fácilmente. El mismo año, Harborth mostró que  $H(5) = 10$ .

El problema de determinar si  $H(6)$  existe quedó desde entonces abierto hasta hace relativamente poco, cuando en 2007 Gerken y Nicolás demostraron de manera independiente la existencia de  $H(6)$ .

Sin embargo en 1983, Horton exhibió que para todo entero positivo  $k$ , existe un conjunto de  $2^k$  puntos en el plano sin heptágonos convexos vacíos. Mostrando así que  $H(7)$  no existe, dicho conjunto se conoce ahora como el conjunto de Horton.

Una vez mostrada la existencia de un subconjunto de  $S$  con ciertas propiedades, uno puede preguntarse por el número de estos subconjuntos.

De esta manera nace una familia de problemas de conteo, como es el de estimar el mínimo número  $f_k(n)$  de subconjuntos de  $k$  elementos en posición convexa y vacíos de todo conjunto de  $n$  puntos en el plano.

Dado que para  $k = 7$ , existen conjuntos de puntos sin  $k$ -gonos convexos vacíos se tiene que  $f_k(n)$  no existe para todo  $k \geq 7$ .

Para valores pequeños de  $k$  las mejores cotas son:

$$\begin{aligned} n^2 - O(n) &\leq f_3(n) \\ 1/2n^2 - O(n) &\leq f_4(n) \\ 3n/4 - O(n) &\leq f_5(n) \end{aligned}$$

La mejor cota inferior para  $f_5(n)$  viene en [3].

La mejor cota inferior para  $f_3(n)$  es  $n^2 - O(n)$  y para  $f_4(n)$  es  $\frac{1}{2} n^2 - O(n)$ .

Todas las cotas superiores anteriores fueron dadas por Bárány y Valtr. La cota inferior para  $f_3(n)$  fue probada por Bárány en correspondencia personal con Valtr y por Dumitrescu. La cota inferior lineal para  $f_6(n)$  se sigue del resultado mencionado anteriormente de que todo conjunto de puntos suficientemente grande contiene un hexágono vacío. De estos problemas el más relacionado con el estudiado en este proyecto es el de estimar el número de triángulos vacíos en  $S$ . Es el mismo problema, pero únicamente trabaja con puntos de un color.

El problema estudiado en este proyecto es el de buscar el valor  $f_3(n)$  (y su versión bicolorada). Dicho de otra manera, dado un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general, cual es el mínimo número de triángulos vacíos con vértices en  $S$ .

Este problema fue considerado por primera vez en [10]. En ese artículo se dio

una cota inferior de  $\binom{n-1}{2}$  y como cota superior, se mostró que existe una constante  $c > 0$  y un conjunto de  $n$  puntos con a lo más  $cn^2$  triángulos vacíos.

Aproximadamente al mismo tiempo probaron que todo conjunto de  $n$  puntos tiene al menos  $n^2 - O(n \log n)$  triángulos vacíos, dieron también una cota superior de  $2n^2$  (si  $n$  es una potencia de 2). La cota superior fue mejorada a  $1,8n^2$ , después a  $\approx 1,68n^2$  y finalmente a  $\approx 1,62n^2$  que es la mejor cota superior actualmente.

Una línea de investigación muy fructífera ha sido el considerar problemas clásicos de Geometría combinatoria para puntos sin colores y estudiarlos ahora en conjuntos coloreados de puntos.

Devillers, Hurtado, Károlyi y Seara hicieron esto con el Teorema de Erdős-Szekeres [8]. Ellos hicieron distinciones entre varios subconjuntos de  $S$ , a un subconjunto de  $S$  lo llaman: monocromático si todos sus elementos son del mismo color; policromático si todos sus elementos son de distinto color y heterocromático si no es monocromático ni policromático.

Definen los números  $nM(m,k)$ ,  $nP(m,k)$ ,  $nH(m,k)$  como los menores enteros tal que cualquier conjunto  $k$ -coloreado de puntos en el plano con al menos esa cantidad de elementos contiene los vértices de un  $m$ -gono convexo monocromático, policromático y heterocromático respectivamente. Este problema es precisamente la versión con colores del problema de Erdős-Szekeres.

Siguiendo la misma línea de pensamiento, se preguntaron por la existencia de

polígonos vacíos (monocromáticos, policromáticos y heterocromáticos), añadiendo además el requisito de que dichos polígonos fueran compatibles, esto es que tuvieran interiores disjuntos.

Definen así los números  $MC(n,m,k)$ ,  $HC(n,m,k)$  y  $PC(n,m,k)$  como el mínimo número de  $m$ -gonos monocromáticos, heterocromáticos y policromáticos respectivamente, compatibles en todo conjunto  $k$ -coloreado de  $n$  puntos en el plano.

Entre sus resultados, exhiben una 3-coloración del conjunto de Horton sin triángulos monocromáticos vacíos.

Conjeturaron también que todo conjunto 2-coloreado suficientemente grande contiene un cuadrilátero monocromático convexo vacío. Este problema permanece abierto a la fecha.

En particular se probó que todo conjunto de  $n$  puntos bi-coloreado en el plano tiene al menos  $(n/4)-2$  triángulos monocromáticos con interiores disjuntos. Como generalización a  $\mathbb{R}^3$  se mostró que todo conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^3$ , 4-coloreado tiene un número lineal de tetraedros monocromáticos vacíos con interiores disjuntos.

Aquí se considera el problema de estimar el número mínimo de triángulos monocromáticos vacíos en todo conjunto 2-coloreado de  $n$  puntos en el plano. Este problema es la variante cromática del problema de encontrar el mínimo número de triángulos vacíos en todo conjunto de puntos en el plano.

Se mostró que existen conjunto de puntos 3-coloreados arbitrariamente grandes sin triángulos monocromáticos vacíos. Este proyecto considera el problema sólo para conjuntos dos coloreados. Más adelante se estudia también el parámetro de la discrepancia, es decir, cuando el número de puntos de un color es mayor que el número de puntos del otro color.

### 1.3.3. Objetivos

En este proyecto se pretende dar cotas al número de triángulos monocromáticos vacíos. Dada que hay una cantidad enorme de posibles configuraciones de puntos, se ha realizado un software que hace posible llegar a estas cotas.

Dicha aplicación puede trabajar tanto con distribuciones de puntos monocromáticos como con puntos de dos colores. Se puede realizar el contaje de una distribución concreta, donde el usuario coloca los puntos manualmente, o también se le puede dar aleatoriedad, únicamente indicando el número de puntos que se quieren mostrar en pantalla.

La aplicación tiene varias funcionalidades, pero la más interesante de ellas permite generar todas las configuraciones aleatorias que el usuario decide, con un número concreto de puntos y muestra en pantalla la que contiene el menor número de triángulos vacíos, diciendo también cuántos son. De esta manera se puede, realizando muchas repeticiones, aproximar el número mínimo de triángulos vacíos entre todos conjuntos de un número de puntos en concreto.

Gracias a la funcionalidad anteriormente descrita se pueden generar varias tablas, que a continuación serán mostradas, con los resultados obtenidos, y de esta manera poder acotar la solución a cada configuración.

Con estas tablas se harán comparaciones con las cotas y las tablas ya estudiadas por otros anteriormente (Aichholzer en [1])

## CAPÍTULO 2. MANEJO Y FUNCIONAMIENTO DEL SOFTWARE CREADO

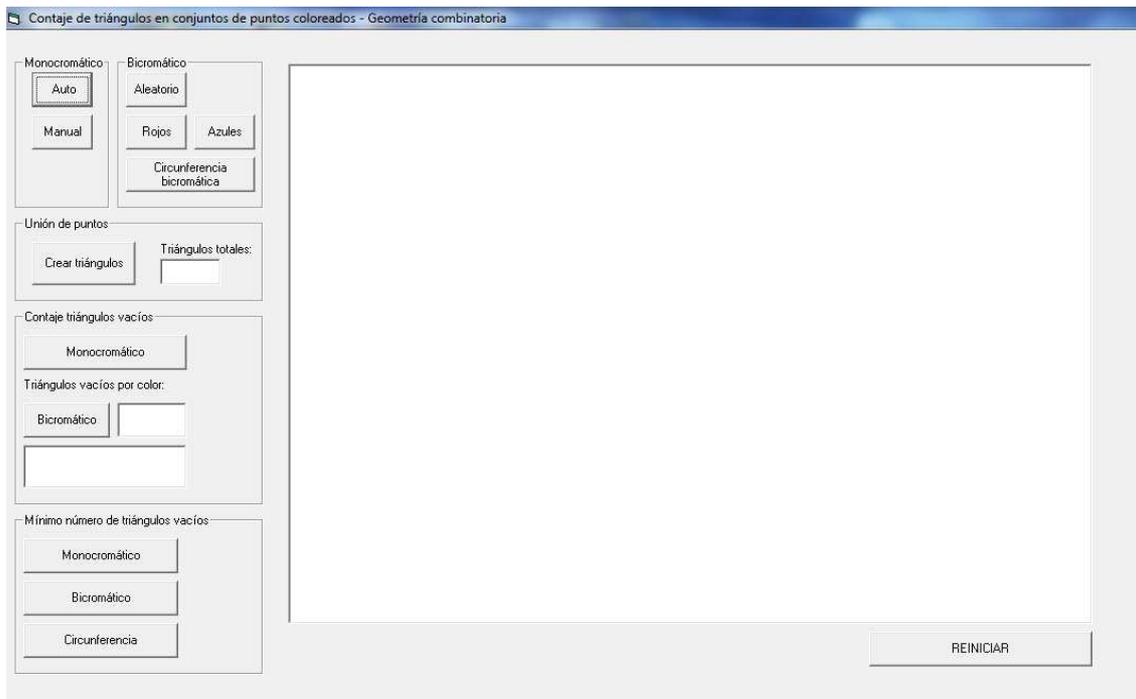
### 2.1. Enfoque

Para intentar acotar soluciones al problema anteriormente planteado, que es el objetivo de este proyecto, se realiza una aplicación gráfica que permite crear diferentes distribuciones de puntos y a la vez realizar contajes de triángulos. Este programa está realizado en Visual Basic 6.0. y consta de varias partes. Permite desde generar planos de puntos siendo introducidos manualmente por el usuario hasta realizar el contaje de triángulos vacíos encontrando la mejor distribución de puntos para que el número de triángulos vacíos sea el mínimo. Se puede trabajar con hasta 30 puntos en planos monocromáticos y hasta 60 en planos de dos colores, lo que supone un máximo de 8120 triángulos.

### 2.2. Manejo de la aplicación

A continuación se explicará detalladamente cada una de las partes que forman esta aplicación.

En la **Fig. 2.1** se puede observar la vista general de la aplicación. A la izquierda encontramos todos los comandos con los que puede interactuar el usuario. A la derecha encontramos el área activa de dibujo, que será el plano donde se visualizarán gráficamente puntos y triángulos.



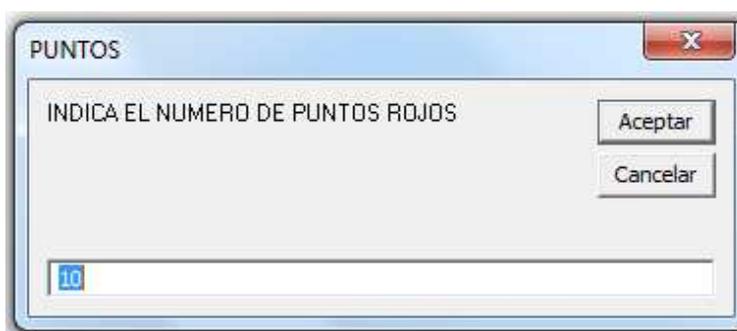
**Fig. 2.1** Vista general aplicación

Esta parte de la aplicación (**Fig. 2.2**), situada en la parte superior izquierda, permite dibujar puntos monocromáticos en el plano de dos maneras diferentes.



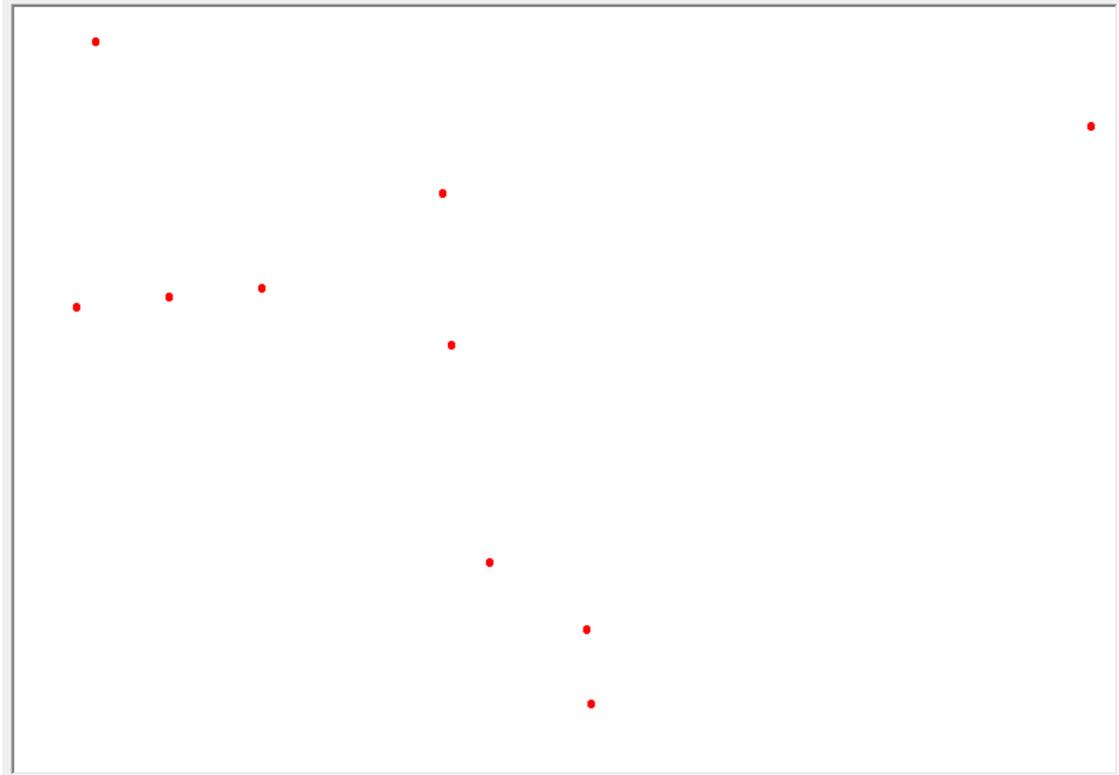
**Fig. 2.2** Panel Monocromático

La primera opción "Aleatorio", realiza una representación automática de tantos puntos como quiere el usuario (hasta un máximo de 30) en el plano. Al pulsar el botón aparece una nueva ventana donde se introduce el número de puntos (**Fig. 2.3**).



**Fig. 2.3** Introducción de número de puntos

Una vez introducidos en número de puntos, aparece en el plano la distribución aleatoria de éstos (**Fig. 2.4**).



**Fig. 2.4** Distribución de 10 puntos monocromáticos aleatoriamente

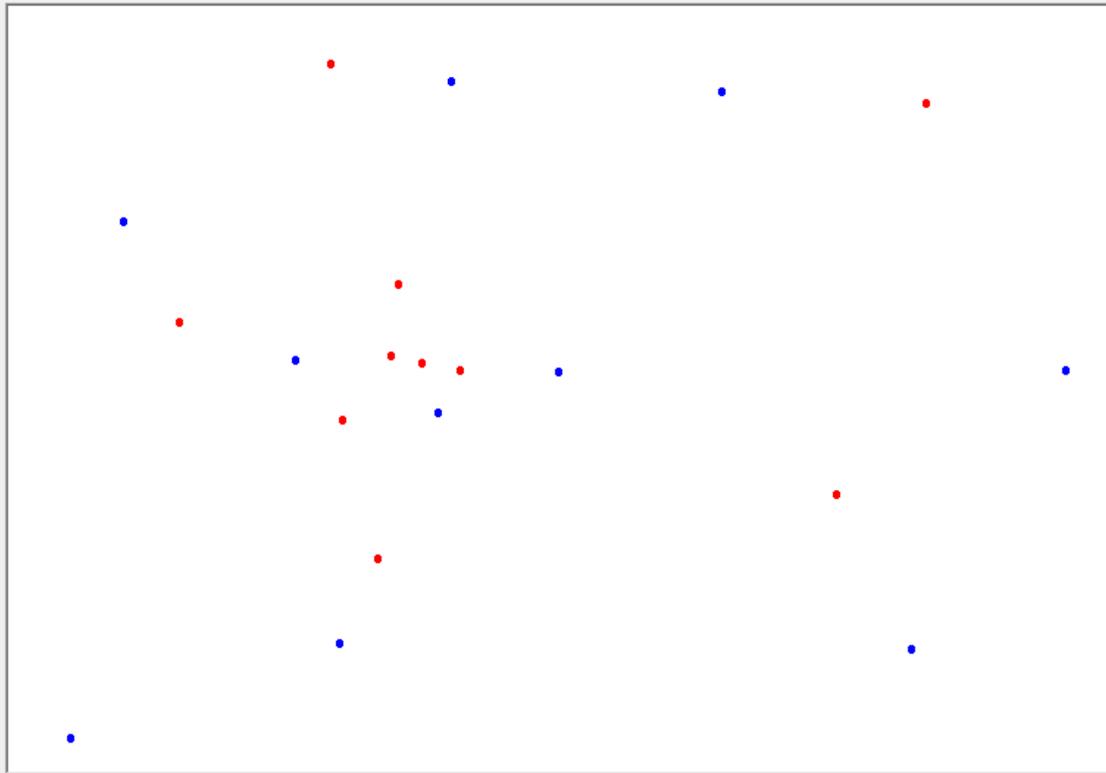
La segunda opción “Manual”, permite una colocación manual de puntos en el plano mediante el cursor del ratón. Se pueden dibujar tantos puntos como desee el usuario.

En la parte bicromática (**Fig. 2.5**) se encuentran 4 opciones diferentes de representación de puntos.



**Fig. 2.5** Panel Bicromático

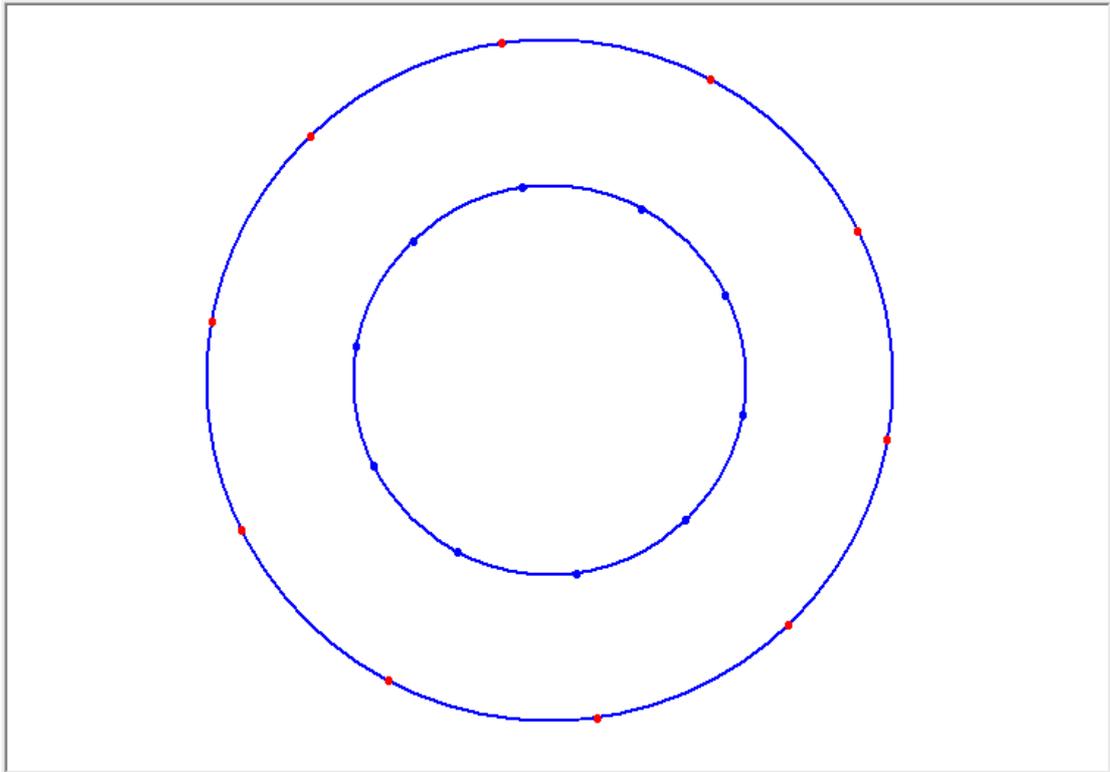
El primer comando es “Aleatorio”. Similar a la parte monocromática, ésta permite dibujar de manera aleatoria puntos de dos colores en el plano. Al pulsarlo aparece una primera ventana donde se introduce el número de puntos rojos. A continuación aparece una segunda ventana donde se introduce el número de puntos azules. Una vez realizado estos aparecen distribuidos aleatoriamente en el plano (**Fig. 2.6**).



**Fig. 2.6** Distribución aleatoria de 10 puntos azules y 10 rojos sobre el plano

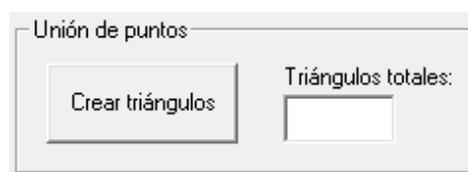
Los botones “Rojos” y “Azules” se utilizan para dibujar manualmente tantos puntos de cada color como quiera el usuario.

La opción “Circunferencia bicromática” muestra dos circunferencias de radio fijo en las cuales se distribuirán los puntos, equidistantes entre ellos, por el perímetro de éstas, un color en cada circunferencia. De esta manera se limita la posición de los puntos. Al pulsarlo, aparecen varias ventanas donde el usuario decide el número de puntos que quiere en las dos circunferencias y el desfase angular entre ellos. El resultado se mostrará en el área de dibujo (**Fig. 2.7**).



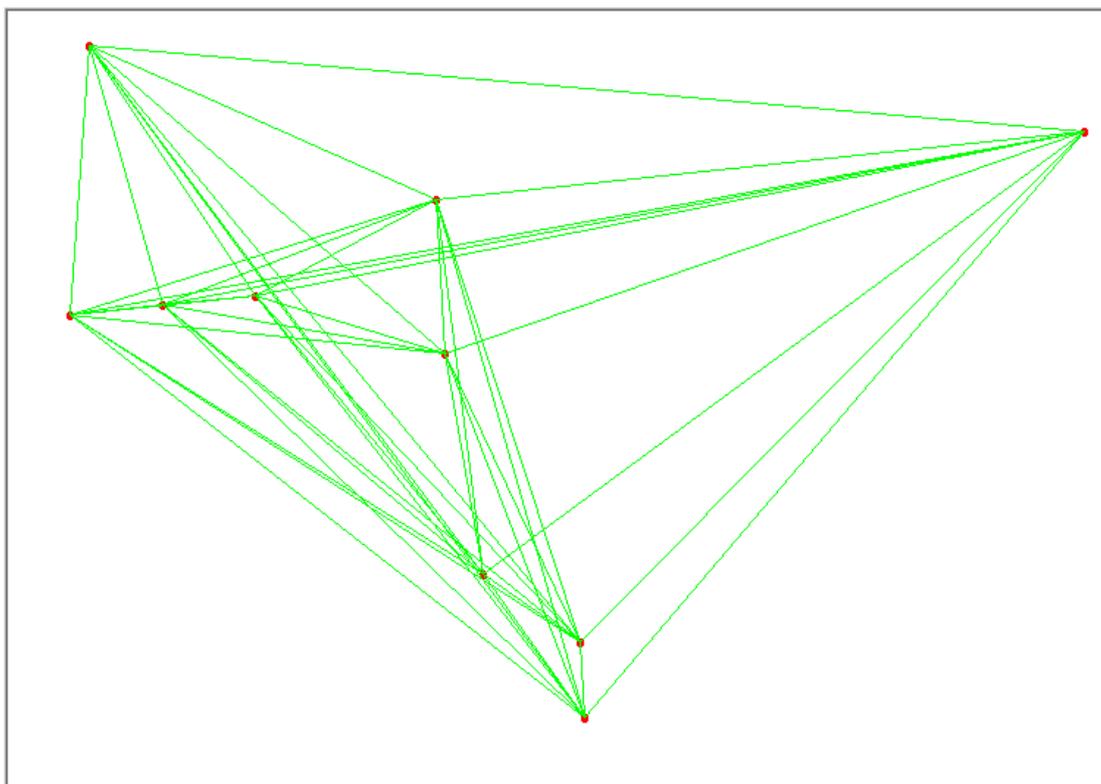
**Fig. 2.7.** Distribución 10 puntos rojos y 10 azules sobre el perímetro de dos circunferencias

Una vez creada la distribución de los puntos, ya sea aleatoria o manual, existe la opción de realizar todos los triángulos monocromáticos posibles uniendo los puntos de un mismo color entre sí. Para ello se ha de pulsar el botón “Crear triángulos” (**Fig. 2.8**).

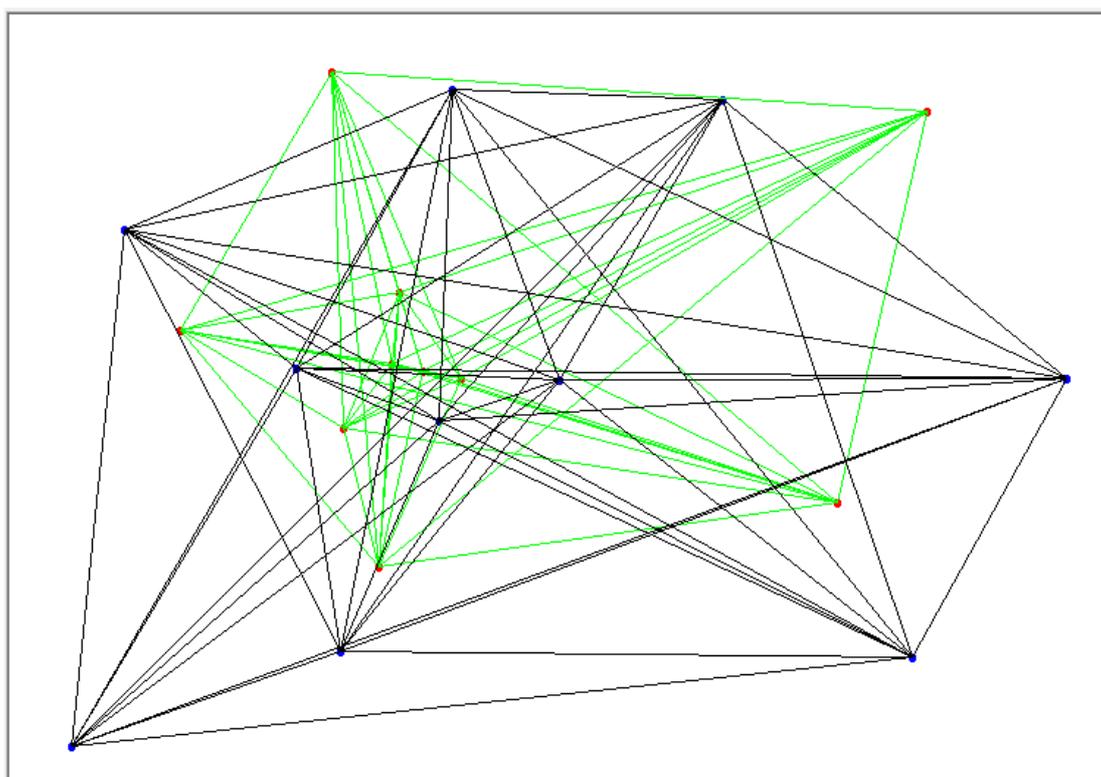


**Fig. 2.8.** Unión de puntos

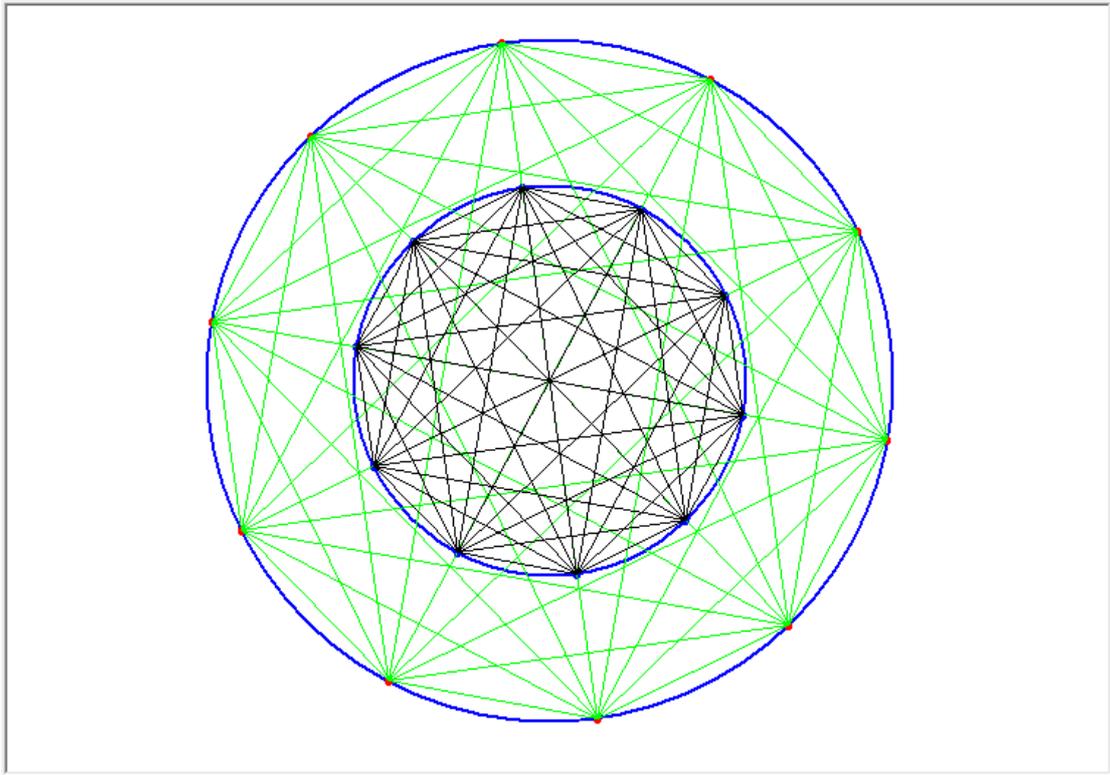
Además, al hacerlo, aparece el número total de triángulos realizados en un texto junto al botón. El resultado de esta operación queda reflejado en **Fig. 2.9**, **Fig. 2.10** y **Fig. 2.11**



**Fig. 2.9** Unión y formación de triángulos sobre 10 puntos monocromáticos



**Fig. 2.10** Unión y formación de triángulos sobre 10 puntos azules y 10 rojos



**Fig. 2.11** Unión de 10 puntos rojos y 10 azules distribuidos de forma homogénea sobre el perímetro de dos circunferencias

Los comandos del “Contaje de triángulos vacíos” (**Fig. 2.12**) se utilizan para contar el número de triángulos vacíos que existen en el plano. Cuando se tiene un plano monocromático el botón “Monocromático” muestra el número de triángulos vacíos de un sólo color que tiene el plano. Si el plano está formado por puntos de dos colores, el botón “Bicromático” muestra el número de triángulos vacíos de cada color.

Contaje triángulos vacíos

Monocromático

Triángulos vacíos por color:

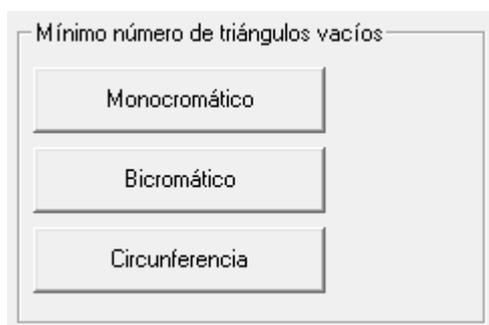
Bicromático

[Campo de entrada]

[Campo de entrada]

**Fig. 2.12** Contaje triángulos vacíos

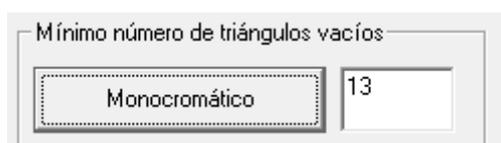
Por último, en el punto “Mínimo número de triángulos vacíos” (**Fig. 2.13**) se puede experimentar con diferentes distribuciones de puntos.



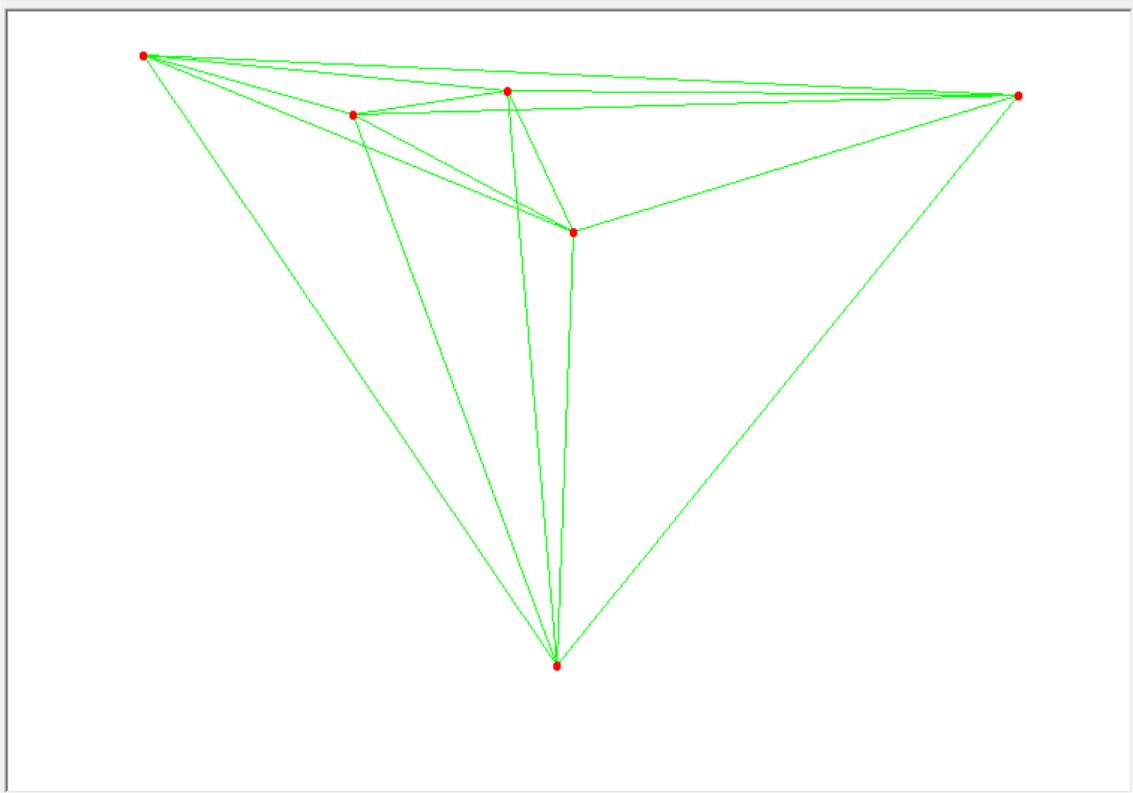
**Fig. 2.13** Mínimo número de triángulos vacíos

Al pulsar el botón “Monocromático” aparece una primera ventana donde se puede introducir el número de puntos para los cuales se quiere encontrar la distribución con el menor número de triángulos vacíos. A continuación, aparece otra ventana donde se deben introducir el número de distribuciones aleatorias que se quiere que realice el programa. A mayor número de repeticiones, más ajustada será la solución. Esto es debido a que si la aplicación realiza pocas repeticiones, la probabilidad de encontrar la solución óptima es pequeña.

Como resultado se obtiene la distribución con menor número de triángulos vacíos que ha encontrado la aplicación después de realizar tantas repeticiones como haya solicitado el usuario. Además del número de triángulos vacíos (**Fig. 2.14**), también se obtiene el dibujo de la mejor distribución encontrada en el plano (**Fig. 2.15**).

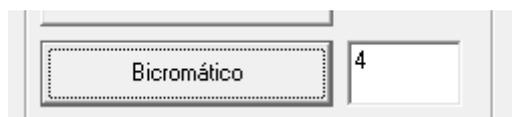


**Fig. 2.14** Solución mínimo número triángulos vacíos para 6 puntos monocromáticos

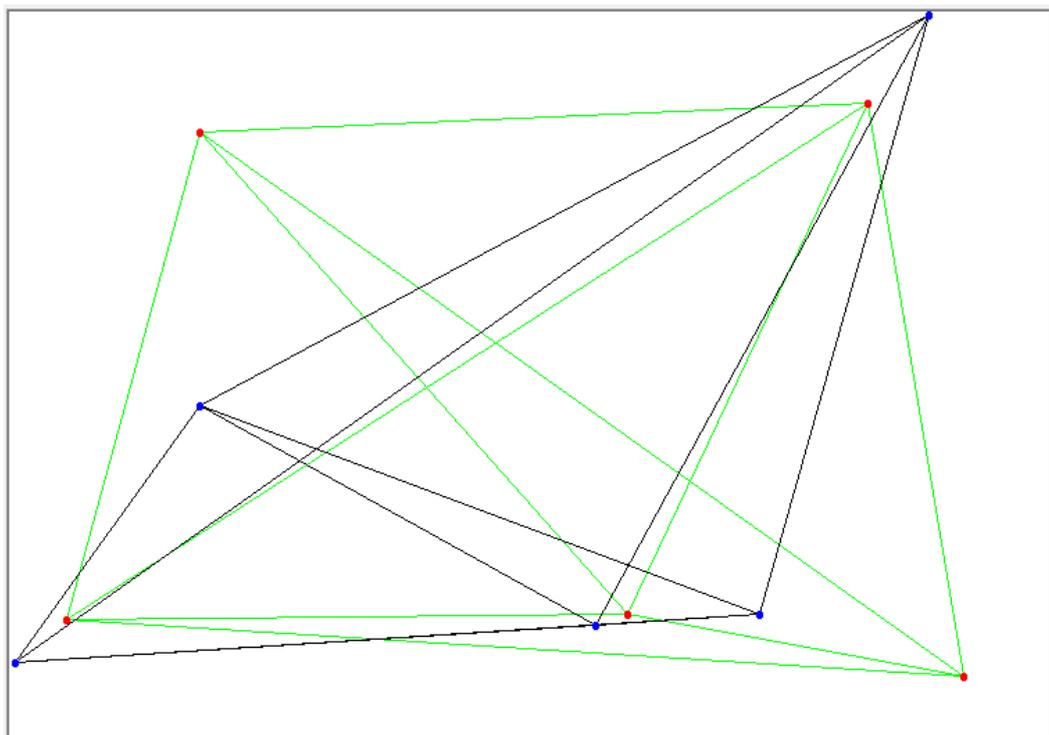


**Fig. 2.15** Mejor distribución encontrada para  $n=6$  puntos

Al pulsar bicromático el resultado es el mismo que en el caso anterior, con la diferencia de que aparecen dos ventanas para introducir número de puntos, una para puntos rojos y otra para puntos azules. De igual modo, el resultado es el mínimo número de triángulos vacíos (**Fig 2.16**) y el dibujo de la distribución en el plano. (**Fig. 2.17**).



**Fig. 2.16** Mínimo número de triángulos para 5 puntos azules y 5 rojos



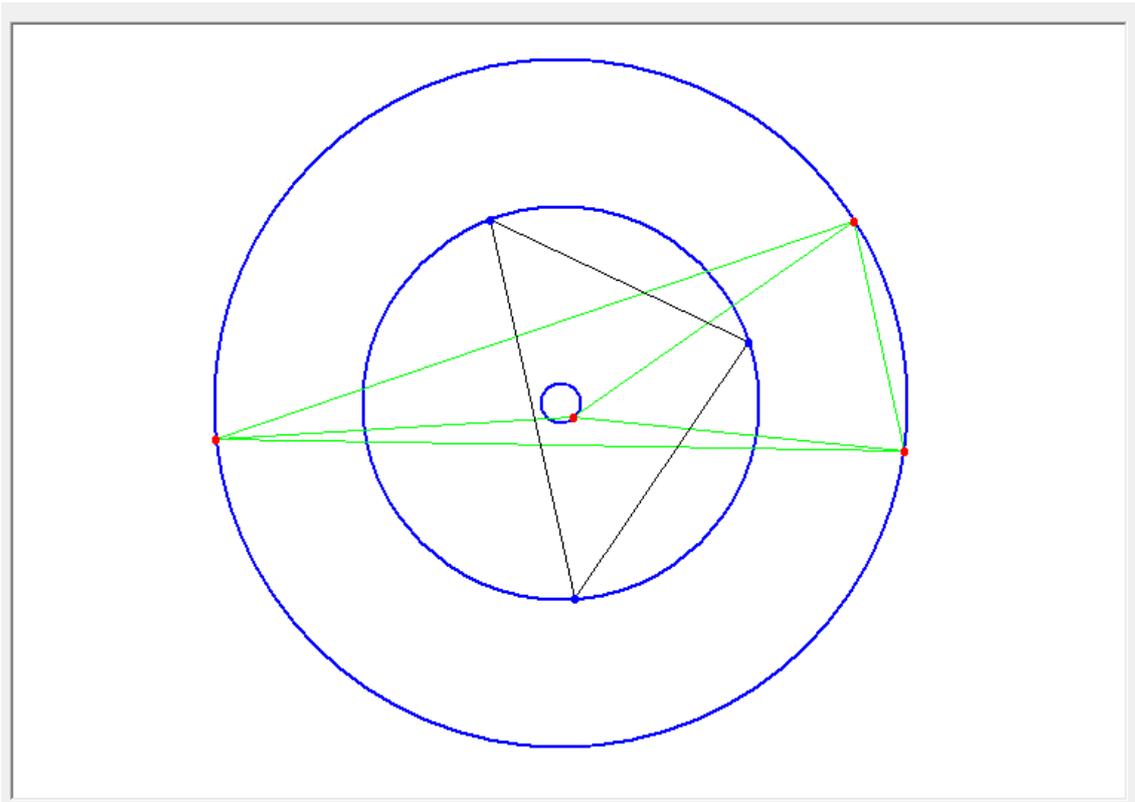
**Fig. 2.17** Mejor distribución encontrada para 5 puntos azules y 5 rojos

Al pulsar el botón “Circunferencia “ aparece una ventana donde se ha de introducir el número de puntos que se quieren en la circunferencia de más radio. En este caso, a diferencia del anterior, se trabaja con tres circunferencias. En dos de ellas irán colocados los puntos rojos (la de mayor y la de menor radio) y en la restante (la circunferencia intermedia) irán colocados los puntos azules. A continuación aparece otra ventana donde se introduce la cantidad de puntos que se quieren en la circunferencia central. Una vez introducido aparece otra ventana para introducir el número de puntos de la circunferencia de menor radio. Por último, como en los casos anteriores, aparece una última ventana donde introducir el número de repeticiones que se desean.

Igual en los casos anteriores, se obtiene el menor número de triángulos vacíos para las repeticiones realizadas (**Fig. 2.18**), y la mejor distribución se dibuja en el plano (**Fig. 2.19**).

Circunferencia	2
----------------	---

**Fig. 2.18** Mínimo número de triángulos para 3 puntos azules y 4 rojos distribuidos sobre el perímetro de tres circunferencias



**Fig. 2.18** Distribución en el plano

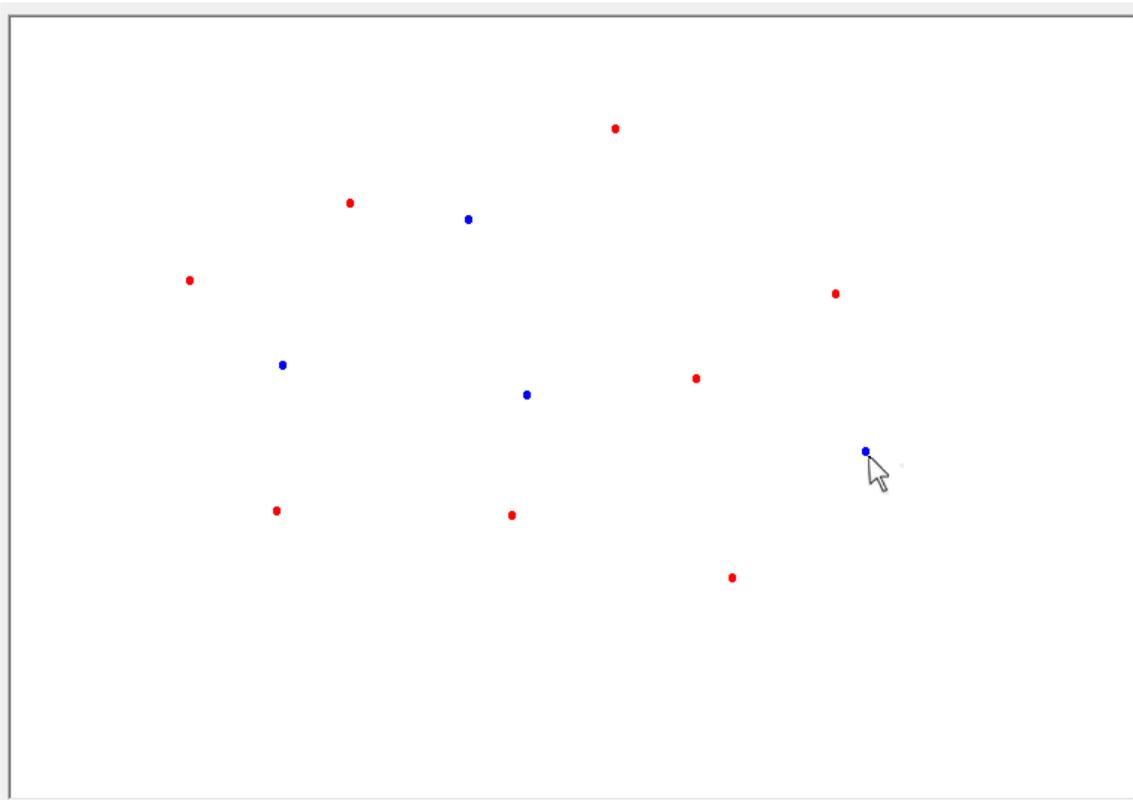
## 2.3. Funcionamiento interno

En este apartado se explicará el funcionamiento interno de la aplicación, es decir, qué hace cada vez que pulsamos un botón.

### 2.3.1. Generación de puntos

Los puntos, como se ha visto anteriormente, se pueden generar tanto de manera manual como aleatoria. En ambas maneras, las coordenadas de estos puntos se guardan en dos vectores (uno para las coordenadas X y otro para las coordenadas Y) si son monocromáticos o en cuatro en caso de ser bicromáticos.

Cuando se decide hacerlo manualmente, cuando con el ratón se pulsa en el plano, se guardan las coordenadas en los vectores correspondientes y a continuación se dibuja el punto (**Fig. 2.19**).



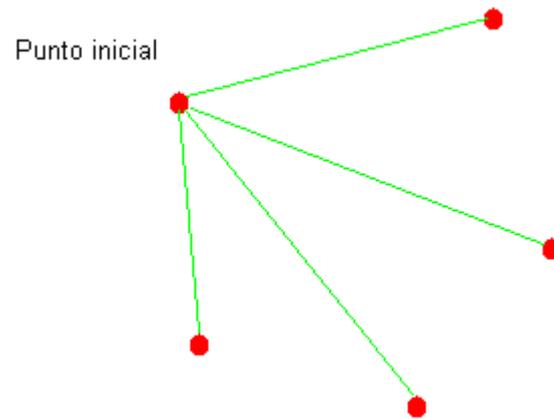
**Fig. 2.19** Generación de puntos manualmente

Cuando se hace de forma aleatoria, se generan todas las coordenadas con un Random y se guardan en los vectores correspondientes. El plano utilizado mide 7935x3960 twips. Un twip es el sistema de medida que utiliza Visual Basic 6.0 y equivale a 1/1440 pulgadas. Este es el rango utilizado para las coordenadas. A continuación se recorren estos vectores y se dibujan en el plano.

### **2.3.2. Creación de triángulos**

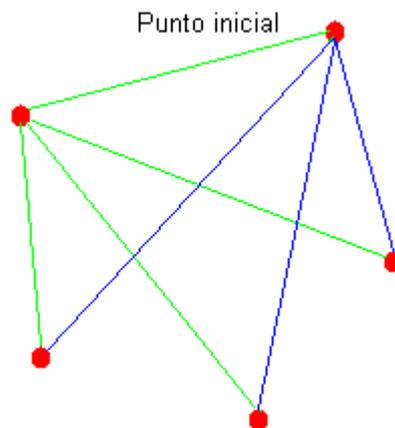
#### *2.3.2.1. Triángulos con puntos monocromáticos*

Una vez dibujados los puntos y guardadas sus coordenadas, para dibujar los triángulos hay que trazar líneas que unan todos los puntos entre sí. Se ha de coger punto por punto y trazar líneas con coordenadas inicio en el punto actual y coordenadas finales en cada uno de los demás puntos del conjunto (**Fig. 2.20**).



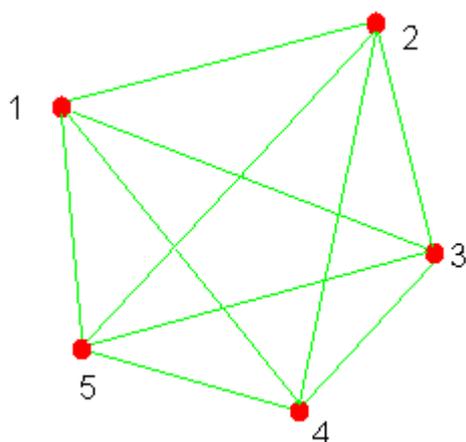
**Fig. 2.20** Trazado de líneas

A continuación, se pasa al siguiente punto y se realiza lo mismo con los puntos restantes (**Fig. 2.21**).

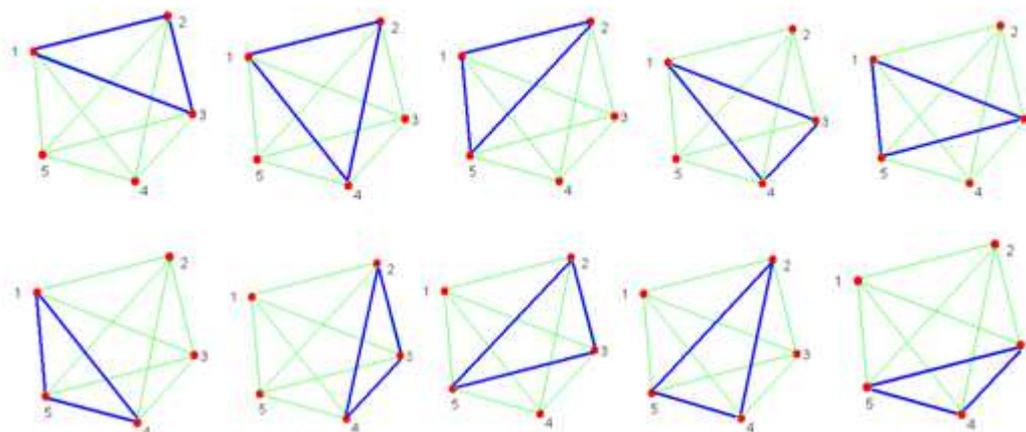


**Fig. 2.21** Trazado de líneas segundo punto

Una vez unidos todos los puntos entre sí, quedan todos los triángulos formados como podemos observar en la **Fig. 2.22**. En este caso, en una distribución con 5 puntos monocromáticos se obtienen 10 triángulos: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, y 345 (**Fig. 2.23**).



**Fig. 2.22** Triángulos creados

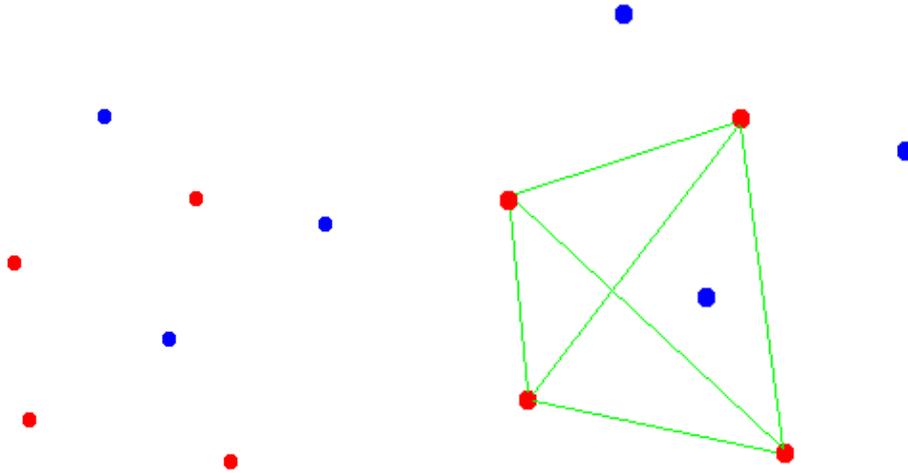


**Fig. 2.23** Todos los triángulos formados para una distribución de 5 puntos monocromáticos

### 2.3.2.2. Triángulos con puntos bicromáticos

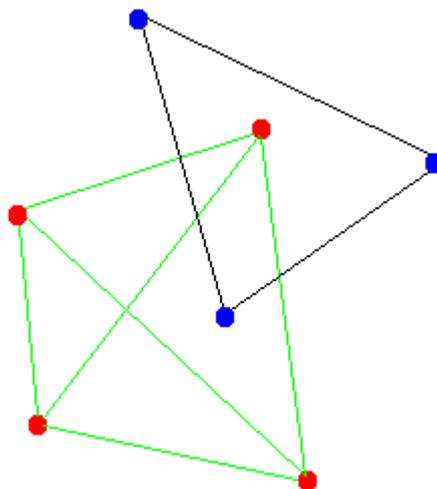
En el caso de trabajar con puntos de dos colores el procedimiento es el mismo. Una vez generados los puntos y distribuidos sobre el plano (**Fig. 2.24**, parte izquierda) se pasa a generar las líneas que los unen.

Primero se generan las líneas que unen los puntos rojos recorriendo las dos matrices donde están guardadas las coordenadas de éstos, igual que se ha explicado en el punto 2.3.2.1. (**Fig. 2.24** parte derecha)



**Fig. 2.24** Distribución en el plano 4 puntos rojos 3 azules y unión puntos rojos

A continuación se procede a hacer lo mismo con los puntos azules hasta que se generen y dibujen todos los triángulos de la distribución (**Fig. 2.25**).



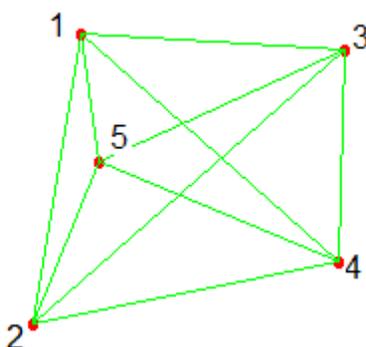
**Fig. 2.25** Unión puntos azules

### 2.3.3. Contaje de triángulos vacíos

#### 2.3.3.1. Triángulos con puntos monocromáticos

En este punto, se encuentran las coordenadas de todos los triángulos guardadas en los dos vectores. Para determinar si un triángulo está vacío, o por el contrario tiene algún punto en su interior, se hace mediante la comparación de áreas.

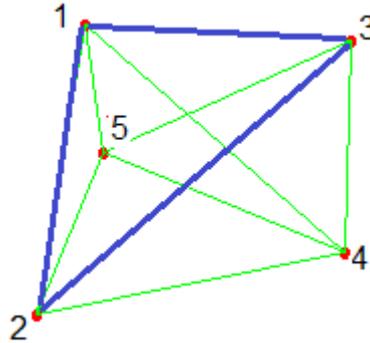
Para que la explicación sea más gráfica se detallará paso a paso a partir de un ejemplo. La configuración elegida (**Fig. 2.26**) es un plano de 5 puntos monocromáticos, pero lo que se va a explicar es extrapolable para cualquier plano monocromático, independientemente del número de puntos que contenga.



**Fig. 2.26** Configuración 5 puntos monocromáticos.

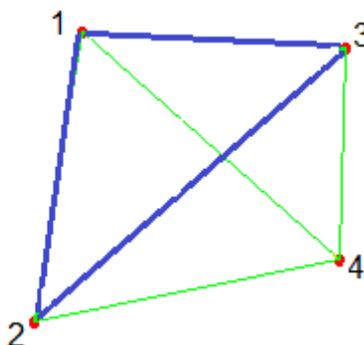
La comparación de áreas consiste en dividir el conjunto en subconjuntos de 4 puntos y analizar sus áreas. Estos 4 puntos serán los tres puntos que forman el triángulo que se está analizando y un 4º punto que irá variable de los restantes en el conjunto. Este 4º punto irá cambiando una vez se complete el procedimiento de comparación.

En primer lugar, se selecciona el triángulo a analizar. En este caso, el triángulo seleccionado será el 1 2 3 (**Fig. 2.27**).



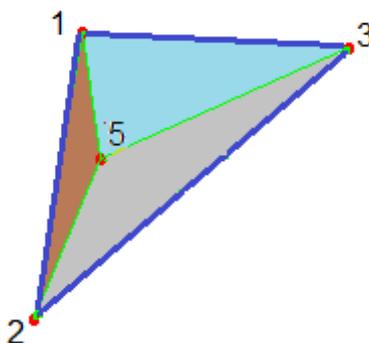
**Fig. 2.27** Triángulo seleccionado [123]

A simple vista se puede observar que este triángulo no está vacío, ya que el punto 5 recae en su interior. Como se ha dicho, la aplicación coge el primer subconjunto de 4 puntos y compara sus áreas. Todo conjunto de 4 puntos está formado por 4 triángulos, en este caso: 123, 124, 134 y 234 (**Fig. 2.28**). Si el área del triángulo que se está tratando es igual a la suma de las áreas de los otros 3 triángulos formados con el punto 4, querrá decir que dicho punto se encuentra en el interior del triángulo analizado. En este caso, la suma de las áreas de los triángulos 124, 134 y 234 es mayor al área del triángulo 123. Por lo tanto, se puede asegurar que el punto 4 no está en el interior del triángulo 123.



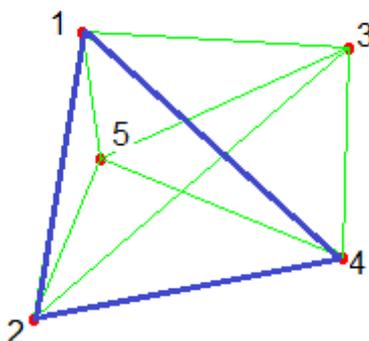
**Fig. 2.28** Subconjunto [1234]

A continuación, la aplicación pasará al siguiente subconjunto: 123, 125, 135, 235. En este caso, la suma de las áreas 125, 135 y 235 es igual al área del triángulo 123. Por lo tanto, se sabrá que el punto 5 está en el interior del triángulo 123 (**Fig. 2.29**).



**Fig. 2.29** Subconjunto [1235]

Una vez concluido el proceso con el triángulo 123, pasaría al siguiente triángulo, el 124 (**Fig. 2.30**).



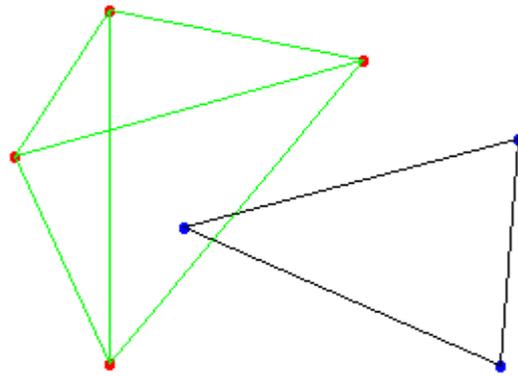
**Fig. 2.30** Triángulo 124

El proceso se repite para todos los triángulos del conjunto. Una vez finalizado muestra el número total de triángulos vacíos en el conjunto estudiado. En el ejemplo se obtienen 2 triángulos llenos, 8 vacíos.

Cada vez que encuentra que un triángulo está lleno, lo contabiliza y pasa directamente al siguiente triángulo.

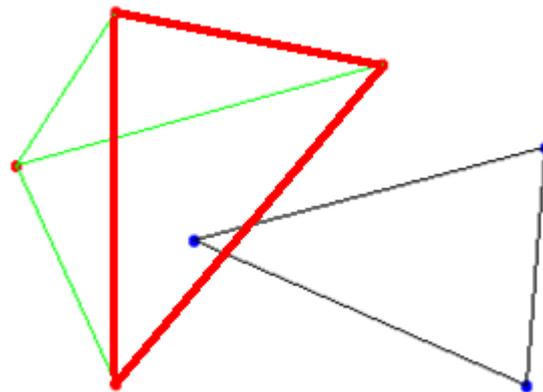
### 2.3.3.2. Triángulos con puntos bicromáticos

Este proceso es exactamente igual que para puntos monocromáticos, al seleccionar un triángulo con el que trabajar se han de tener en cuenta todos los puntos del conjunto, tanto rojos como azules (**Fig. 2.31**).



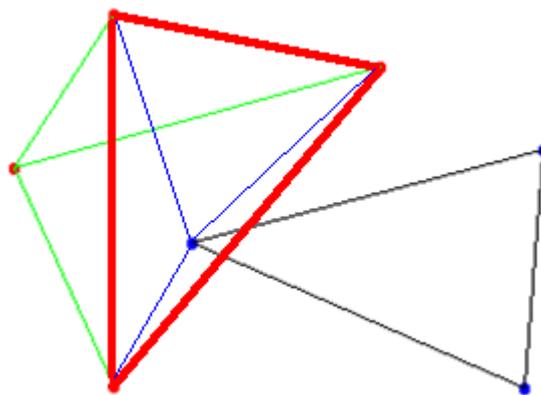
**Fig. 2.31** Triángulos con 4 puntos rojos y 3 azules

Una vez seleccionado el triángulo a analizar (**Fig. 2.32**) se comprueba, de igual manera que en el apartado anterior, si en su interior hay algún punto o si por el contrario está vacío.



**Fig. 2.32** Triángulo seleccionado

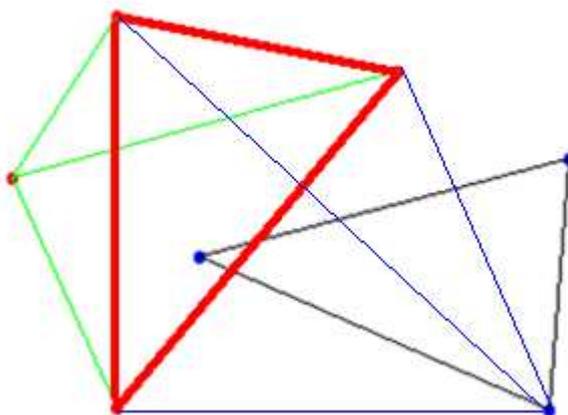
Esta vez no sólo se recorre el vector que contiene los puntos rojos, también ha de recorrerse el vector que contiene puntos azules, por lo que se forman nuevos triángulos (**Fig. 2.33**).



**Fig. 2.33** Formación nuevos triángulos

Una vez obtenidos estos triángulos se calculan sus áreas y se suman. Si el resultado es el mismo que el del área del triángulo trabajado significa que el punto seleccionado está en el interior de éste.

Si por el contrario, la suma de las áreas no coincide con el área del triángulo con el que se trabaja, significará que el punto seleccionado no se encuentra en el interior (**Fig. 2.34**).



**Fig. 2.34** Formación triángulos con punto fuera del triángulo trabajado

Se realiza esto con todos los triángulos del conjunto, tanto los formados por puntos rojos como los azules. Al finalizar los cálculos el software sabe cuántos triángulos vacíos de cada color forman el conjunto.

### 2.3.4. Mínimo número de triángulos vacíos

En este apartado el programa realiza los tres puntos anteriores tantas veces como decida el usuario, pero sin plasmarlo en el plano.

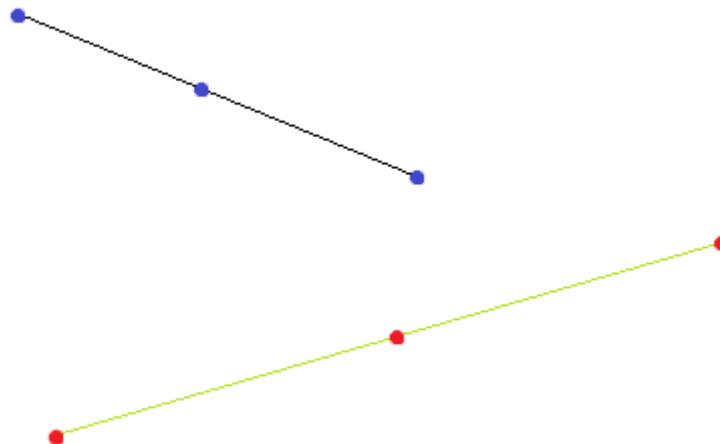
Es decir, genera una distribución de puntos de forma aleatoria, a continuación crea todos los triángulos posibles y por último cuenta cuáles de ellos están vacíos. Una vez tiene el resultado lo guarda en una variable.

Esto lo realiza tantas veces como repeticiones haya decidido el usuario que se hagan. El resultado de cada distribución se compara con el que hay guardado en la variable y si es menor se sobrescribe y se guardan las coordenadas.

Una vez realizadas todas las repeticiones se muestra el resultado de la variable y se dibuja en el plano.

### 2.3.4. Puntos colineales

3 puntos colineales son aquellos que se pueden unir por una sola recta (**Fig. 2.35**).



**Fig. 2.35** Puntos colineales

Con 3 puntos colineales no se puede crear un triángulo ya que su área sería 0. Por lo tanto, en esta aplicación, al generar los puntos de manera

aleatoria comprueba que no haya puntos colineales. En caso de encontrarlos, los elimina y vuelve a redibujarlos.

## CAPÍTULO 3. RESULTADOS TEÓRICOS

### 3.1. Resultados teóricos

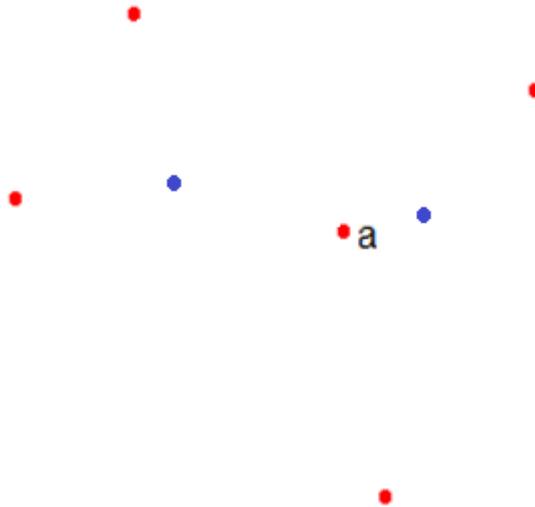
#### 3.1.1. Lema de la discrepancia

El lema siguiente sigue las ideas de un trabajo ya realizado [2].

Si se tienen  $b$  puntos azules y  $v$  puntos rojos (suponiendo  $v > b$ ) entonces:

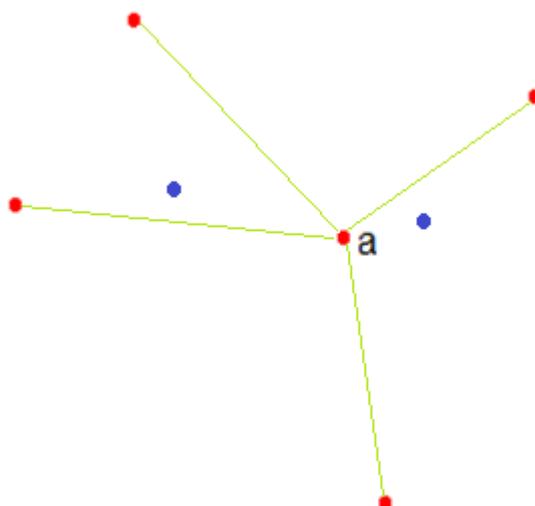
$$\text{Nº triángulos monocromáticos vacíos} \geq \frac{v \cdot (v - 2 - b)}{3}$$

A continuación se demuestra dicha afirmación solo mediante un ejemplo en concreto. Quedará claro que el procedimiento funciona en general.



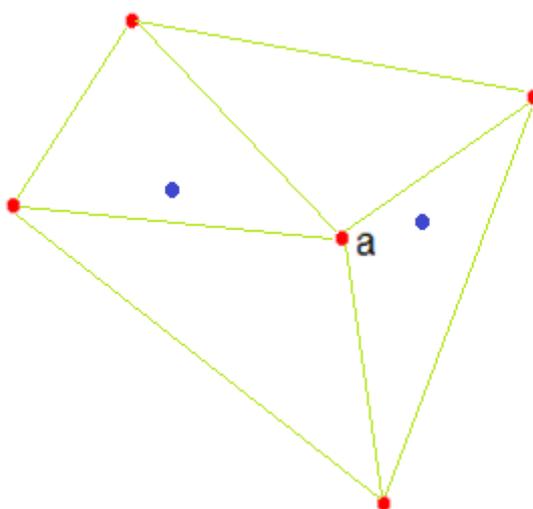
**Fig. 3.1** Distribución de 5 puntos rojos y 2 puntos azules

En la **Fig. 3.1** se observa la configuración de 5 puntos rojos y 2 puntos azules elegida. En este caso se va a trabajar con el punto **a**. Se une el punto **a** con todos los puntos del mismo color restantes del subconjunto (**Fig. 3.2**).



**Fig. 3.2** Unión de los puntos rojos con punto a

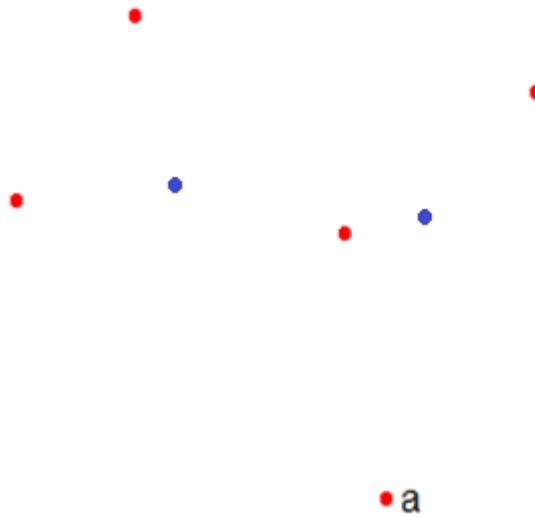
A continuación se forman triángulos con vértices en **a** al conectar puntos consecutivos (ordenados angularmente respecto al punto **a**) (**Fig. 3.3**). No se crean todos triángulos con vértice en **a**. Se crean los triángulos que tienen interiores disjuntos.



**Fig. 3.3** Creación de triángulos con vértice en **a**

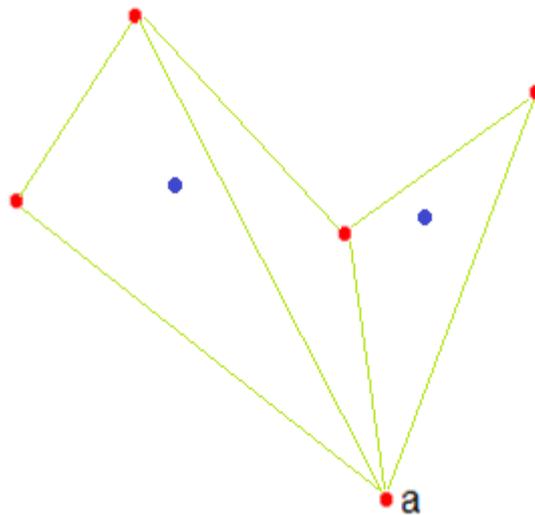
Se observa que aparecen 4 triángulos monocromáticos con vértice **a**. En función de la selección del punto **a**, los triángulos formados son el número de puntos -1 o -2. En la **Fig. 3.3** el punto **a** es un punto interior. En la **Fig. 3.4** el punto elegido pertenece a la frontera de la envolvente convexa del conjunto. En el caso anterior el resultado de triángulos monocromáticos con vértice en **a** es igual al número de puntos totales del conjunto - 1.

En el siguiente caso (**Fig. 3.4**), donde el punto con el que trabajamos no está en el centro, se obtiene un caso diferente.



**Fig. 3.4** Otra selección para el punto **a**

En este caso, si se forman todos los triángulos monocromáticos con vértice en **a**, el resultado de triángulos monocromáticos es igual al número de puntos  $-2$ . Por lo tanto aparecen 3 triángulos monocromáticos del conjunto de 5 puntos (**Fig. 3.5**).



**Fig. 3.5** Creación de triángulos con vértice en **a**

Ahora consideramos también los puntos azules. Cada punto azul puede rellenar, como mucho, un triángulo. Por lo tanto, se llega a la siguiente conclusión:

El número de triángulos monocromáticos vacíos incidentes al punto  $a \geq v - 2 - b$ . En nuestro ejemplo, donde  $v=5$  y  $b=2$ , el resultado de triángulos vacíos es  $\geq 1$ .

Una vez trabajado un punto  $a$  se ha de repetir la misma operación para cada uno de los puntos rojos de la configuración. De esta manera el número total de triángulos vacíos contados es como mínimo

$$v ( v - 2 - b )$$

Cada triángulo se cuenta como máximo 3 veces, una por cada vértice de éste. Finalmente se puede afirmar que:

$$\text{Nº triángulos monocromáticos vacíos} \geq \frac{v \cdot (v - 2 - b)}{3}$$

Observamos si  $v \gg b$ , es decir, cuando hay discrepancia alta, el número de triángulos vacíos es de orden cuadrático (el término importante es  $v^2/3$ .)

El lema de la discrepancia puede servir para demostrar que las configuraciones encontradas experimentalmente son óptimas.

### 3.1.2. Resultados teóricos de Oswin Aichholzer

Oswin Aichholzer en [1] realiza un estudio sobre el número mínimo de triángulos vacíos en un plano monocromático. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
triángulos vacíos	1	3	7	13	21	31	43	58	75	94	114-116	136-141	160-169

Estos resultados son los más exactos conocidos en cuanto a planos compuestos por puntos de un solo color.

En el siguiente capítulo se comprueba como el software creado se acerca a estos resultados. Contra mayor es el número de puntos mayor es la diferencia entre el resultado teórico y el experimental. Hay que tener en cuenta la gran cantidad de configuraciones de puntos existentes. Son de tamaño exponencial en  $n$ . Esto imposibilita generar todas las configuraciones existentes, de aquí la diferencia obtenida.

### 3.1.3. Resultados teóricos para planos bicromáticos

A diferencia de los planos monocromáticos, en planos bicromáticos no hay tantos estudios previos en los que se den aproximaciones o rangos de

soluciones para el mínimo número de triángulos monocromáticos para planos formados por puntos de dos colores.

Concretamente se conocen cotas asintóticas, la mejor es de Pach y G.Toth [11]. En este proyecto se estudian conjuntos pequeños de puntos. Por ejemplo: ¿Cuál es el mínimo número de triángulo vacíos para 4 puntos rojos y 6 puntos azules? No existen estudios previos sobre este tipo de conjuntos.

Aichholzer en [1] estudia casos de triángulos formados por puntos de dos colores, sin encontrar, en el caso de 4 puntos de cada color, ningún triángulo vacío. También para 9 y 10 puntos en total de dos colores encuentra conjuntos con 1 solo triángulo vacío.

Sin embargo, Aichholzer no estudia la discrepancia, es decir el número de triángulos vacíos en función de la diferencia entre el número de puntos rojos y el número de puntos azules.

En el siguiente capítulo se verán los resultados que se han obtenido tras realizar una serie de pruebas con la ayuda del software programado con el objetivo de realizar el primer estudio aportando las primeras soluciones a un tema aún sin estudiar.

## CAPÍTULO 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

### 4.1. Resultados experimentales para planos monocromáticos

En esta sección se darán a conocer los resultados obtenidos, mediante el software creado, para distribuciones de puntos monocromáticos.

La siguiente tabla contiene los resultados monocromáticos obtenidos después de ejecutar la aplicación de manera automática. Se realizan pruebas hasta 20 puntos y más de 30000 ejecuciones para encontrar los resultados más óptimos.

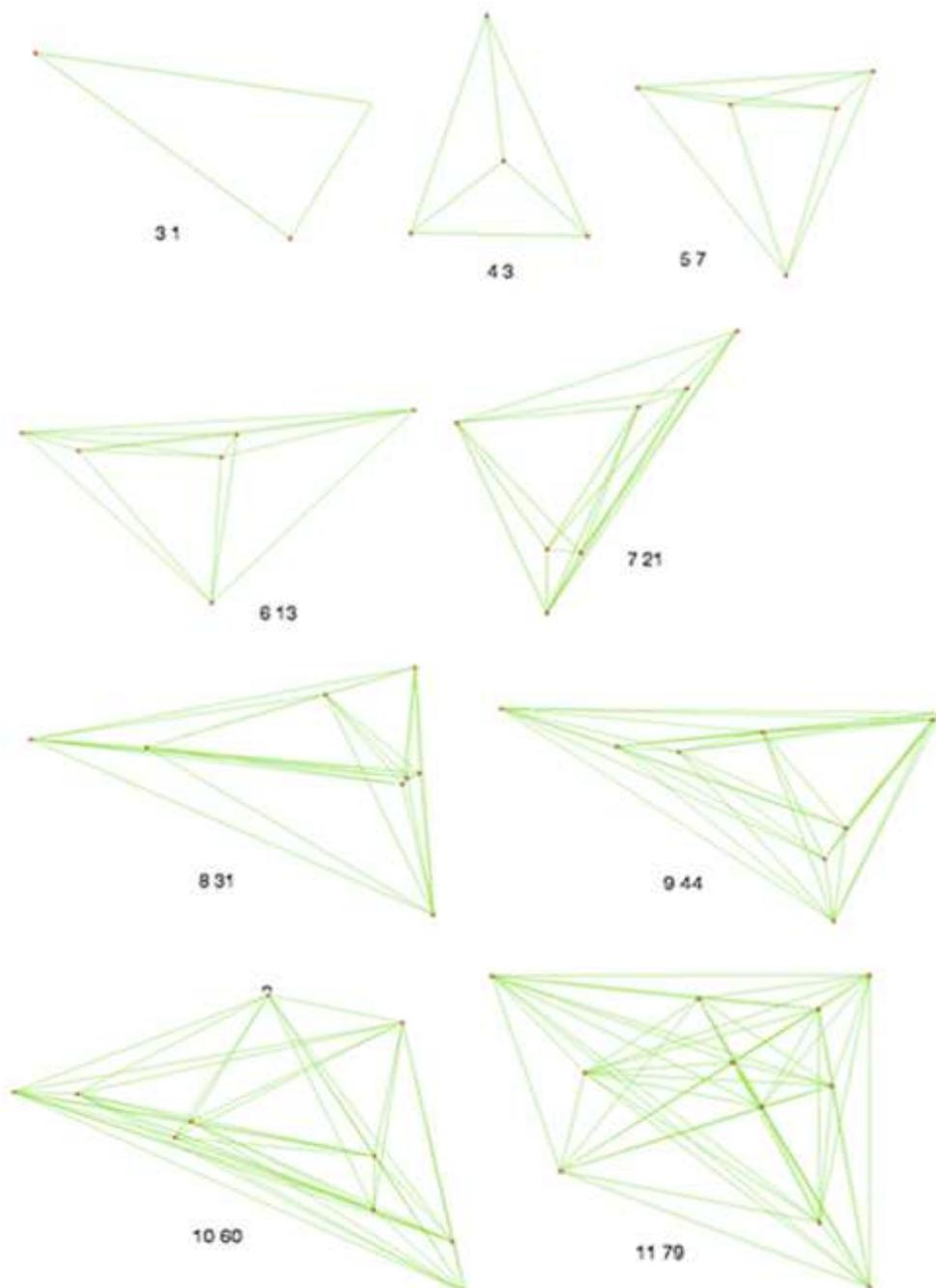
<b>N</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos totales</b>
1	0	0
2	0	0
3	1	1
4	3	4
5	7	10
6	13	20
7	21	35
8	31	56
9	44	84
10	60	120
11	79	165
12	101	220
13	126	286
14	155	364
15	191	455
16	224	560
17	260	680
18	306	816
19	348	969
20	404	1140

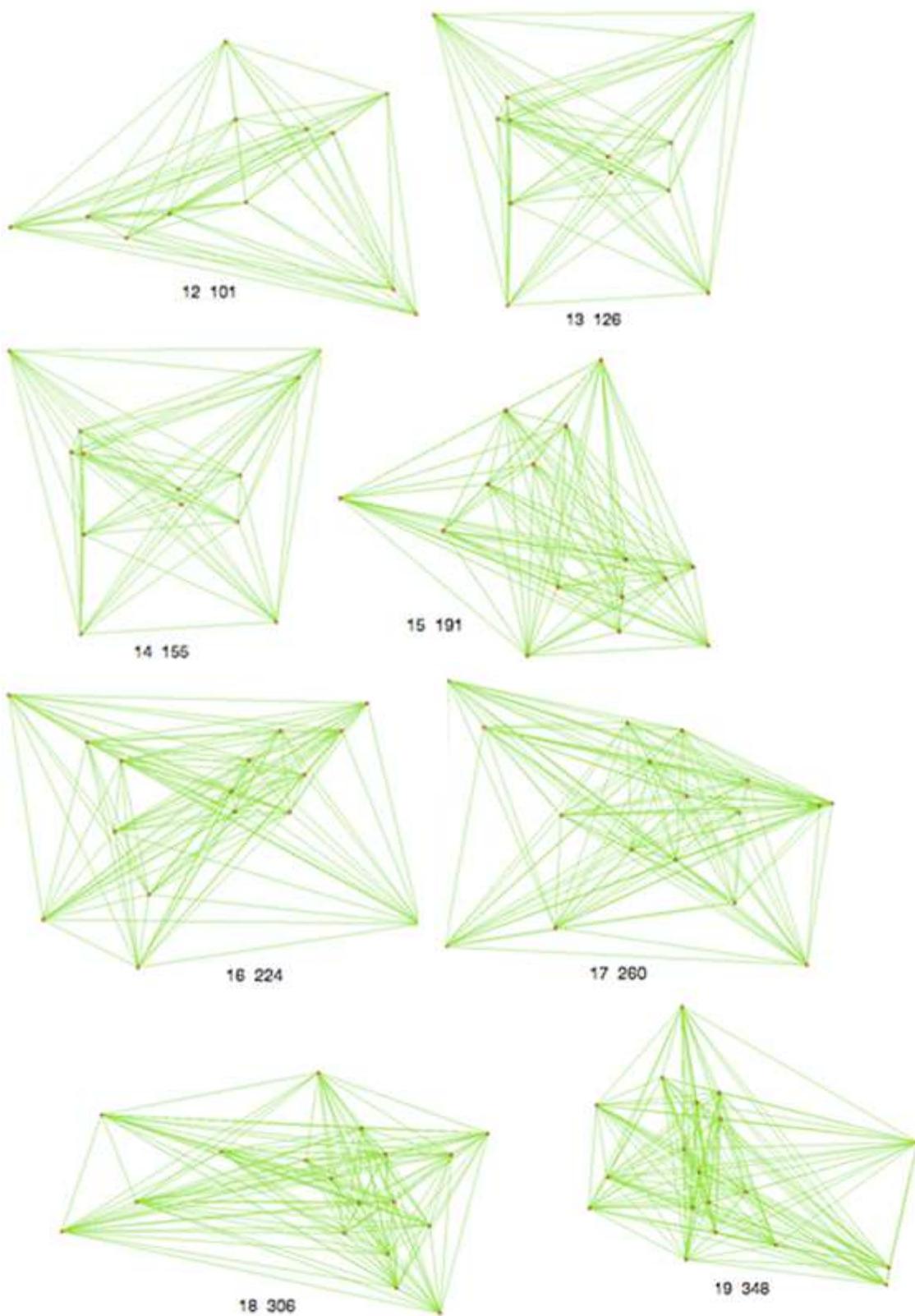
Comparando estos resultados con los obtenidos por Oswin Aichholzer en [1] se puede observar la diferencia anteriormente citada.

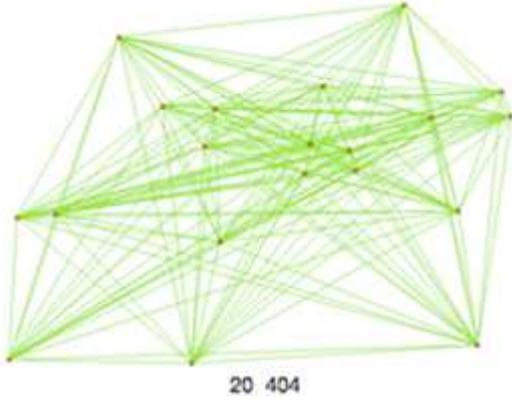
### 4.1.1. Representación gráfica de los resultados obtenidos

Cada resultado citado en la tabla es una distribución en el plano diferente. A continuación se muestran las distribuciones más óptimas generadas por el software.

Debajo de cada distribución existen dos números. El primer número es el número de puntos de la distribución, el segundo número es el número de triángulos vacíos existentes.







## 4.2. Resultados experimentales para planos bicromáticos

En esta sección se darán a conocer los resultados obtenidos, mediante el software creado, para distribuciones de puntos de dos colores.

Las siguientes tablas contienen los resultados obtenidos después de ejecutar la aplicación de manera automática. Se realizan pruebas con hasta 15 puntos por color, teniendo en cuenta todas las posibilidades numéricas, y más de 30000 ejecuciones para encontrar los resultados más óptimos.

<b>n-Rojos</b>	<b>n-Azules</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos Totales</b>
3	3	0	2
4	3	0	5
5	3	1	11
6	3	5	21
7	3	10	36
8	3	17	57
9	3	26	85
10	3	37	121
11	3	51	166
12	3	73	221
13	3	91	287
14	3	116	365
15	3	143	456
<b>n-Rojos</b>	<b>n-Azules</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos Totales</b>
4	4	0	8
5	4	2	14
6	4	5	24
7	4	10	39
8	4	16	60
9	4	25	88
10	4	35	124
11	4	49	169
12	4	69	224
13	4	85	290
14	4	110	368
15	4	135	459
<b>n-Rojos</b>	<b>n-Azules</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos Totales</b>
5	5	4	20
6	5	7	30
7	5	12	45
8	5	16	66
9	5	27	94
10	5	36	130

11	5	52	175
12	5	64	230
13	5	83	296
14	5	103	374
15	5	132	465
<b>n-Rojos</b>	<b>n-Azules</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos Totales</b>
6	6	11	40
7	6	12	55
8	6	20	76
9	6	25	104
10	6	34	140
11	6	51	185
12	6	65	240
13	6	83	306
14	6	101	384
15	6	127	475
<b>n-Rojos</b>	<b>n-Azules</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos Totales</b>
7	7	18	70
8	7	24	91
9	7	33	119
10	7	41	155
11	7	52	200
12	7	66	255
13	7	84	321
14	7	105	399
15	7	127	490
<b>n-Rojos</b>	<b>n-Azules</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos Totales</b>
8	8	29	112
9	8	36	140
10	8	47	176
11	8	57	221
12	8	71	276
13	8	87	342
14	8	106	420
15	8	128	511
<b>n-Rojos</b>	<b>n-Azules</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos Totales</b>
9	9	46	168
10	9	55	204
11	9	67	249
12	9	79	304
13	9	93	370
14	9	113	448
15	9	131	539

<b>n-Rojos</b>	<b>n-Azules</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos Totales</b>
10	10	65	240
11	10	75	285
12	10	86	340
13	10	101	406
14	10	118	484
15	10	142	575
<b>n-Rojos</b>	<b>n-Azules</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos Totales</b>
11	11	82	330
12	11	95	385
13	11	117	451
14	11	127	529
15	11	149	620
<b>n-Rojos</b>	<b>n-Azules</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos Totales</b>
12	12	106	440
13	12	122	285
14	12	145	340
15	12	162	406
<b>n-Rojos</b>	<b>n-Azules</b>	<b>Mínimo vacíos</b>	<b>Triángulos Totales</b>
13	13	139	572
14	13	159	650
15	13	169	741
14	14	164	728
15	14	186	819
15	15	204	910

Los resultados obtenidos indican las cotas para cada número  $n$ .

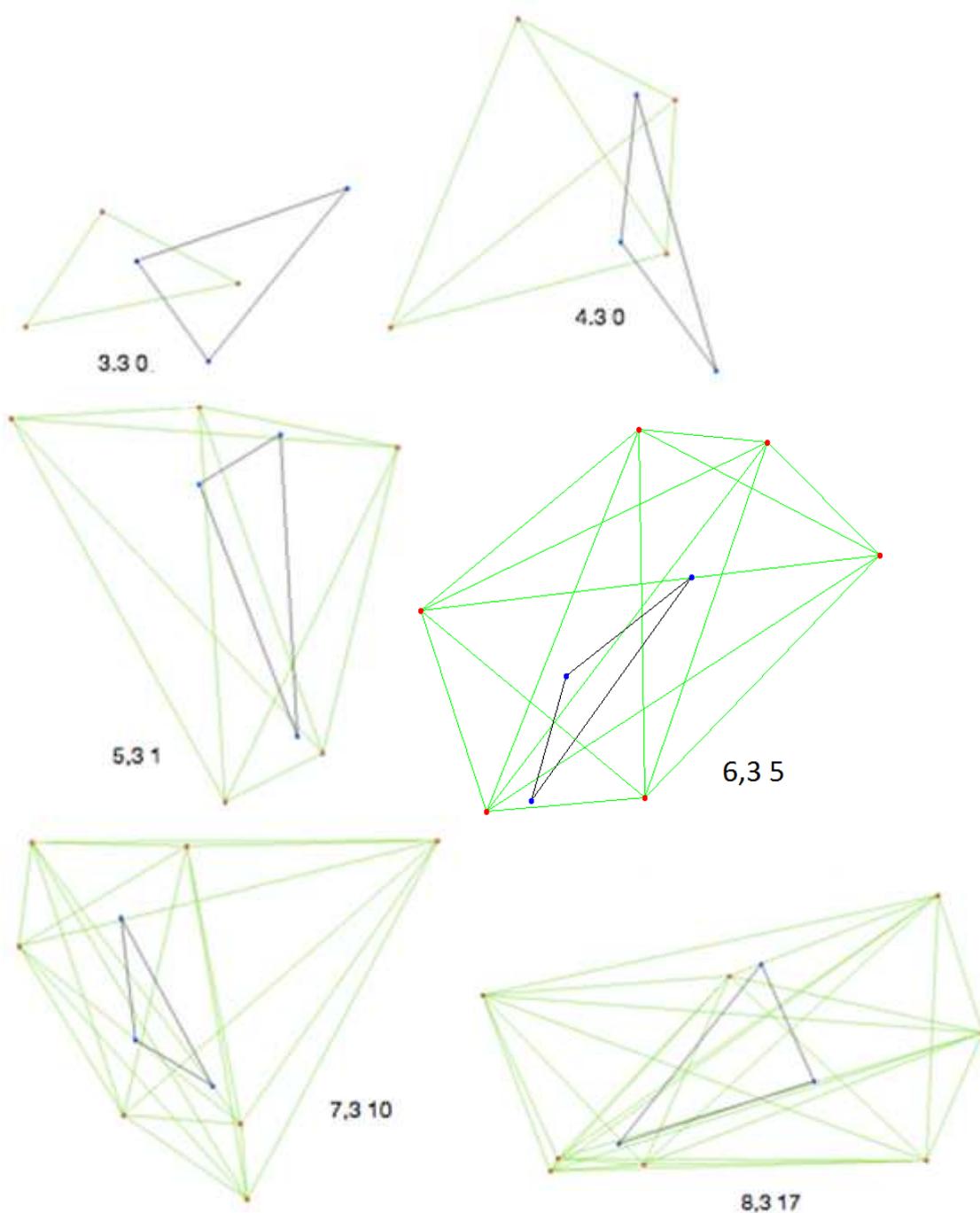
Se puede afirmar que para cada número  $n$  de puntos estudiado, el mínimo número de triángulos monocromáticos vacíos es como máximo el valor obtenido.

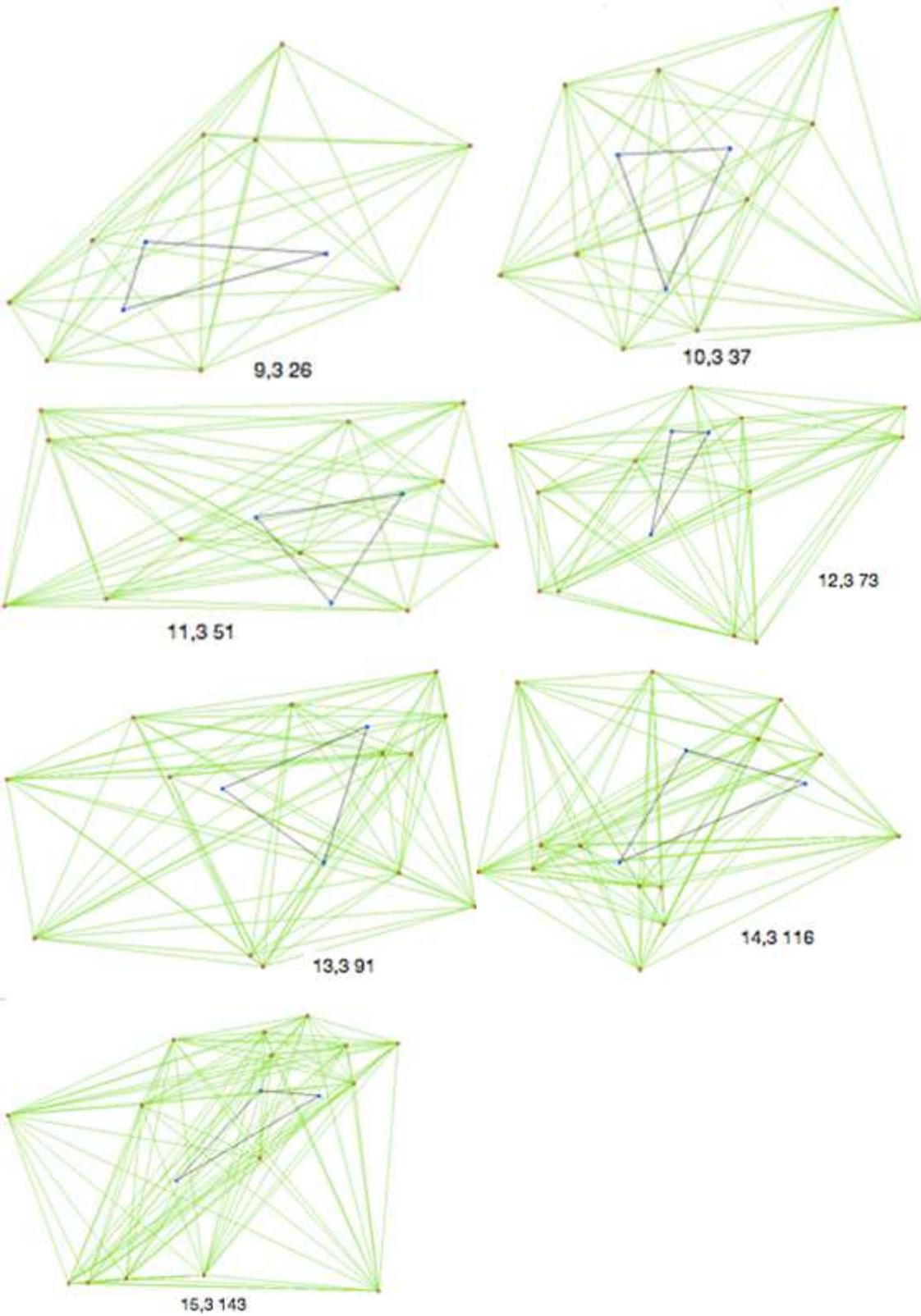
Es decir, utilizando un ejemplo, para una configuración con 13 puntos rojos y 13 puntos azules el mínimo valor de triángulos vacíos obtenido es como mucho 139.

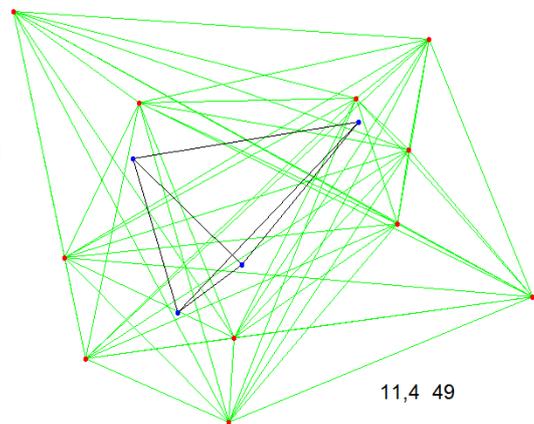
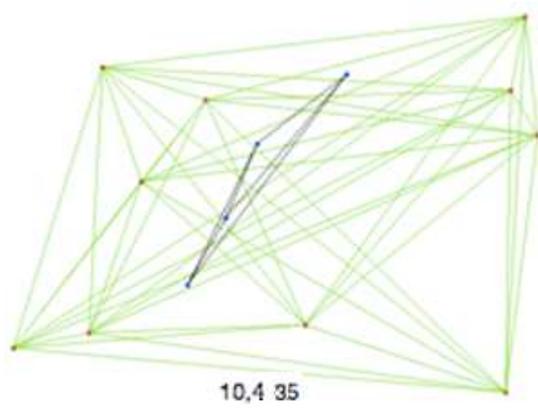
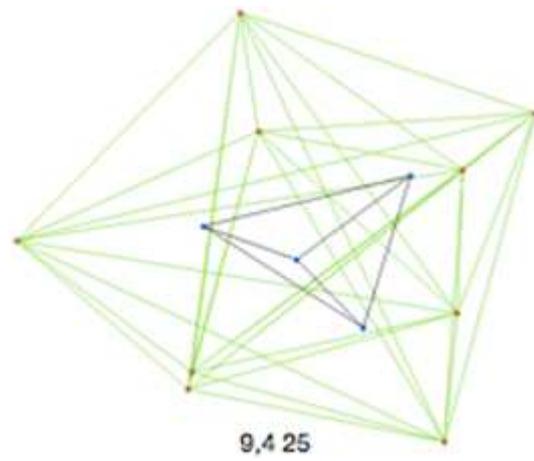
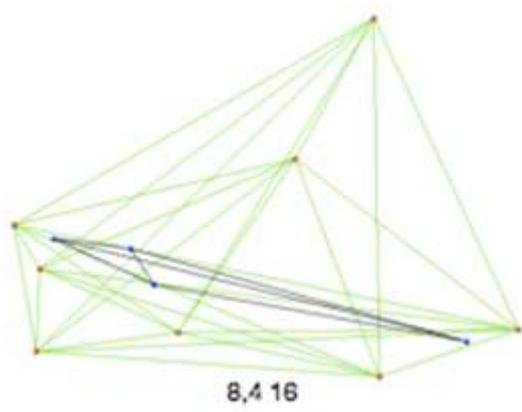
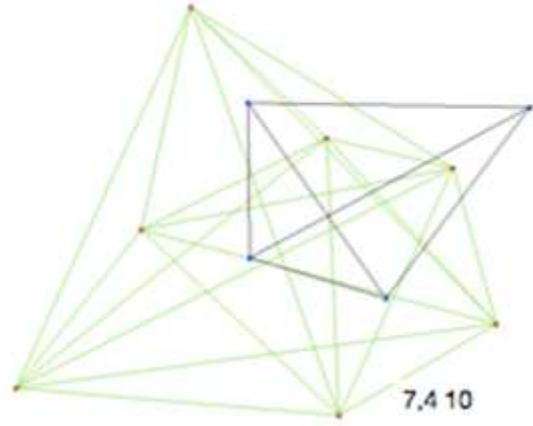
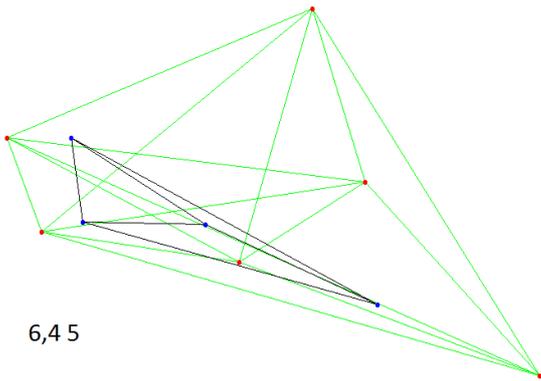
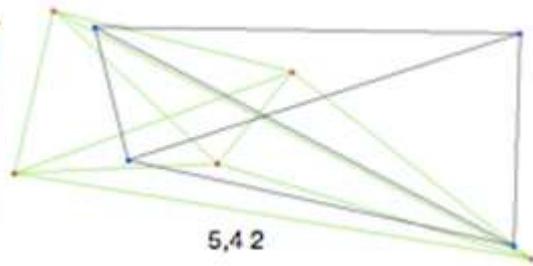
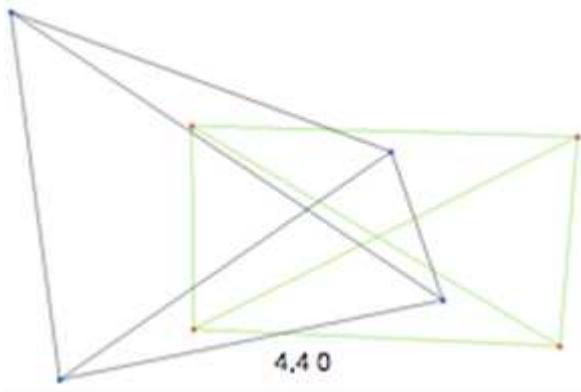
### 4.2.1. Representación gráfica resultados obtenidos

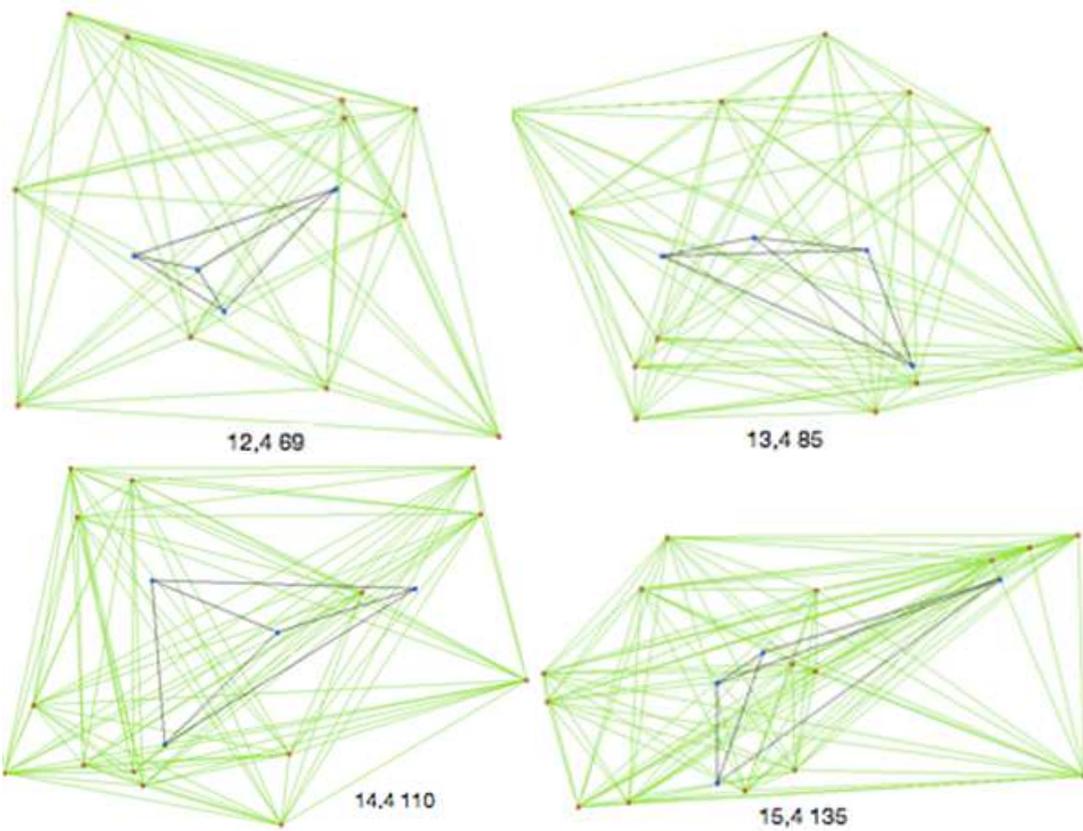
Cada resultado citado en la tabla es una distribución en el plano diferente. A continuación se muestran las distribuciones más óptimas generadas por el software.

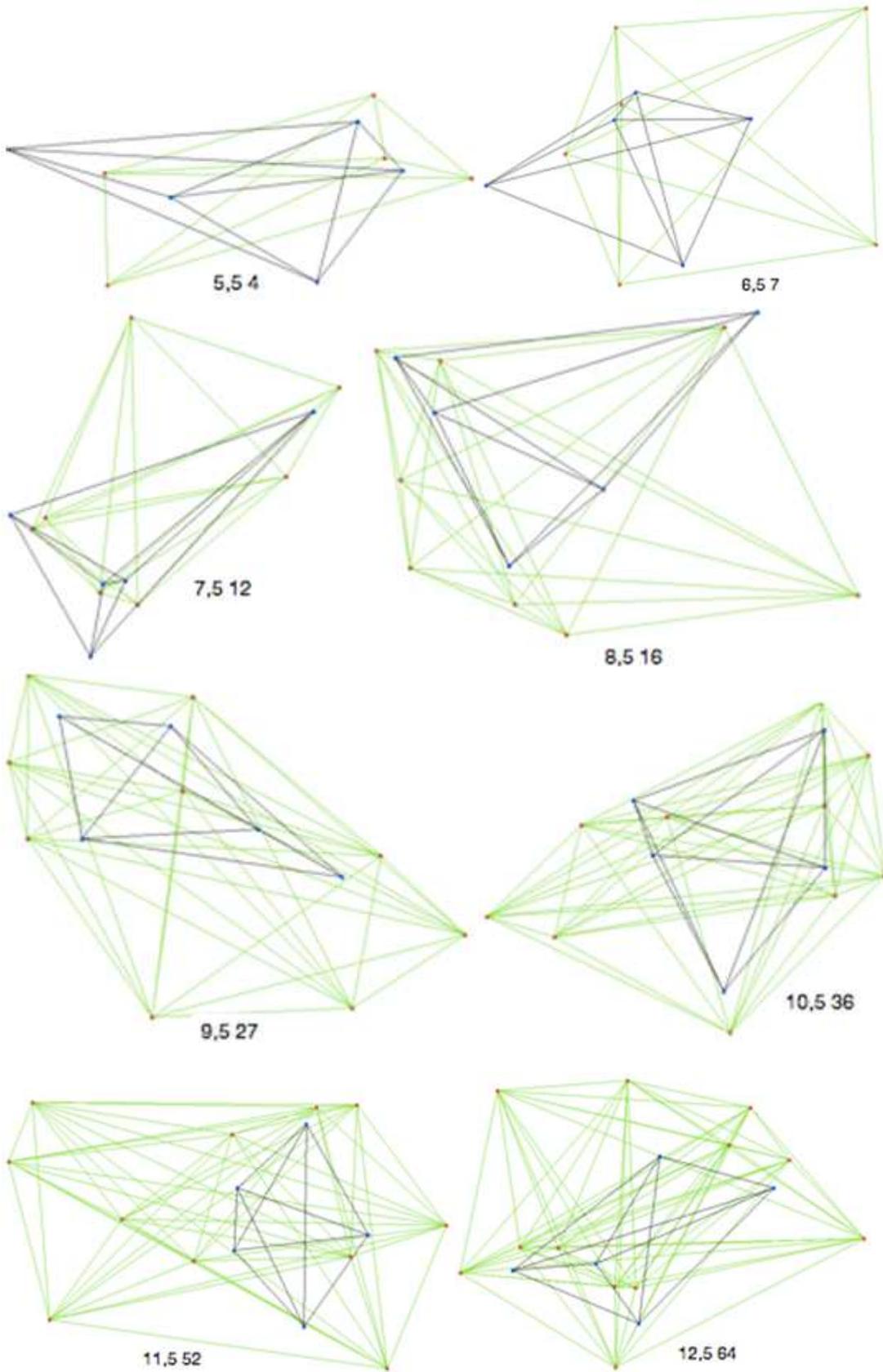
Debajo de cada distribución existen tres números. El primer número es el número de puntos rojos de la distribución, el segundo número es el número de puntos azules, y el tercero es el número triángulos vacíos existentes.

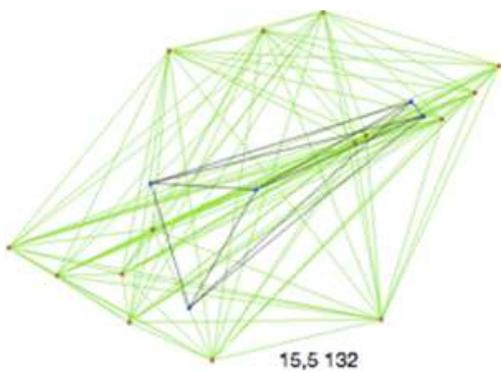
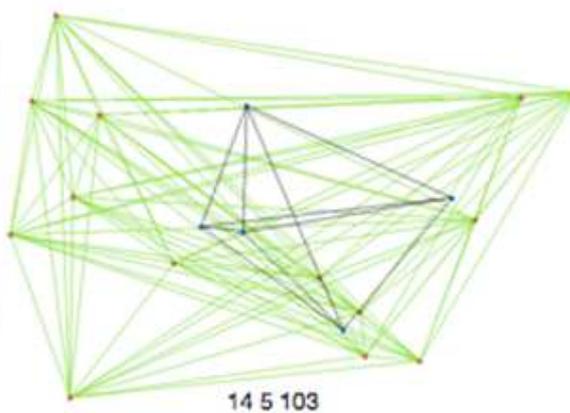
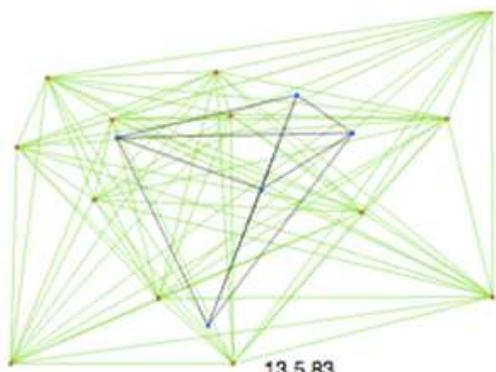


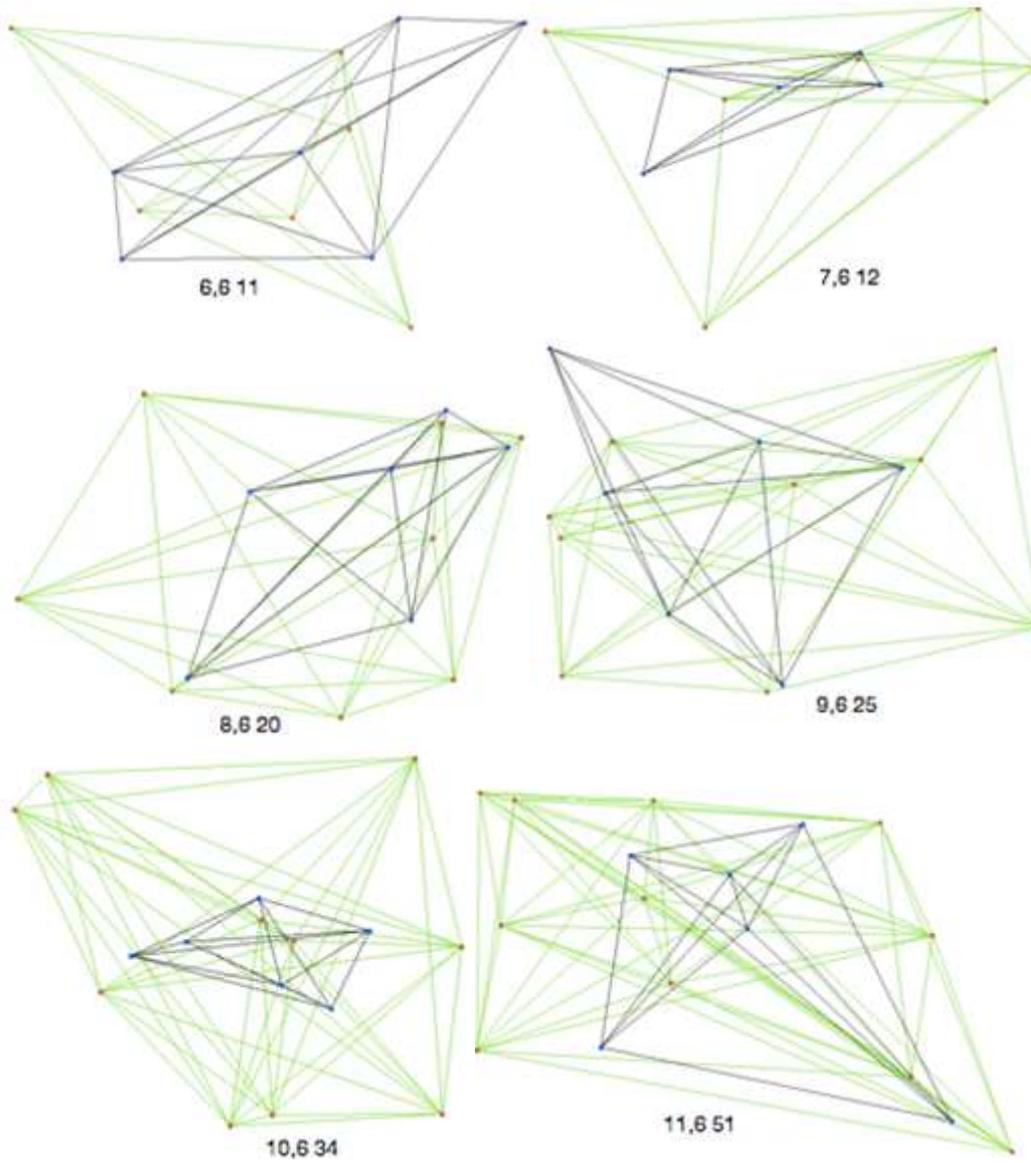


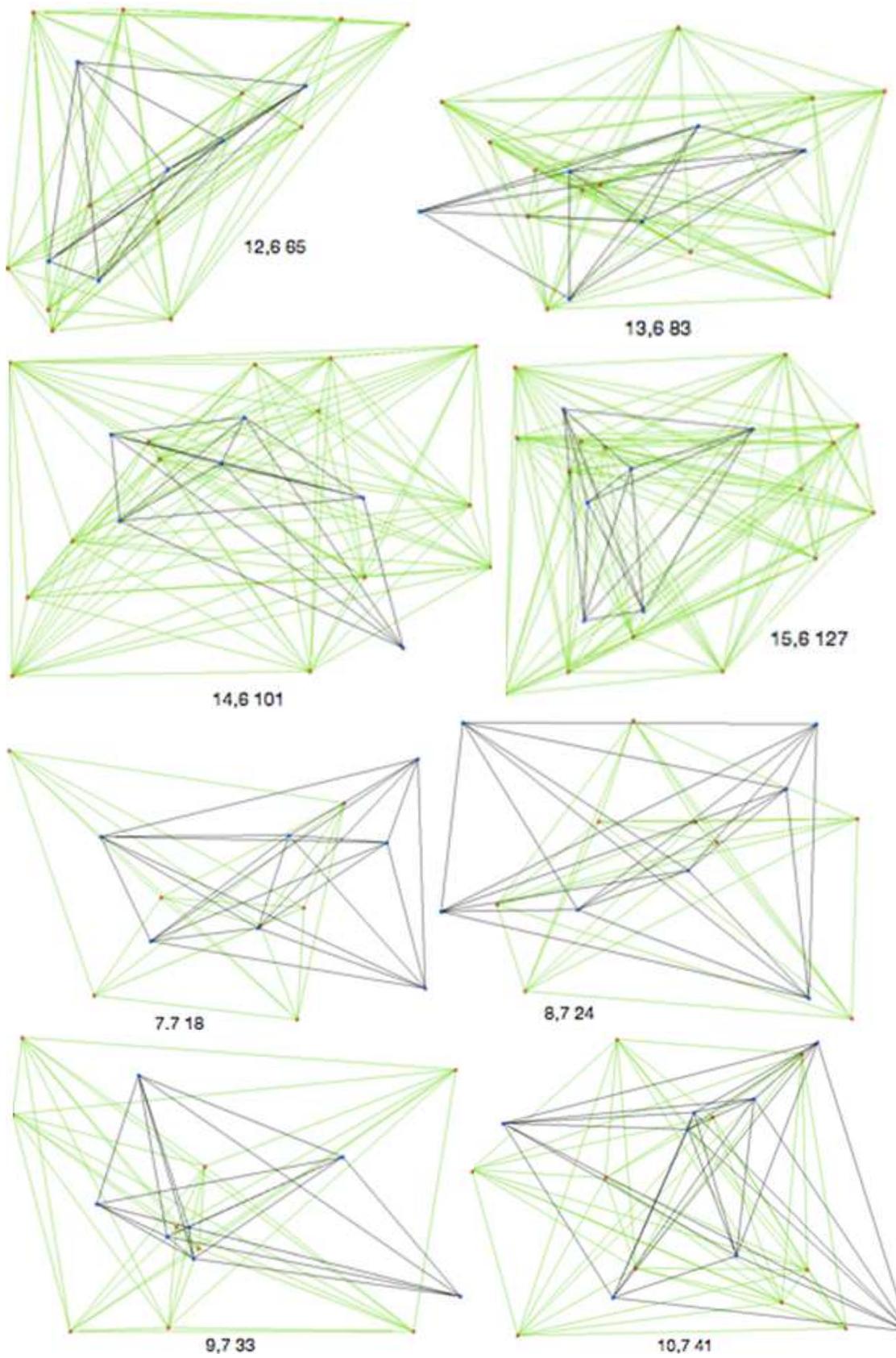


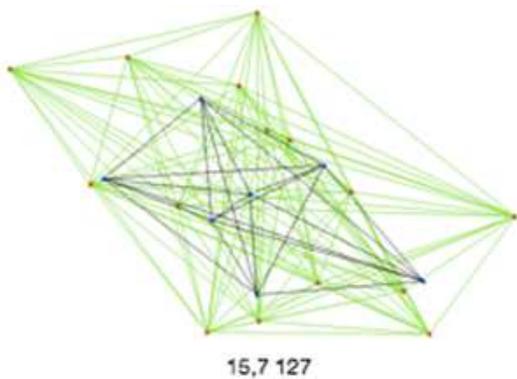
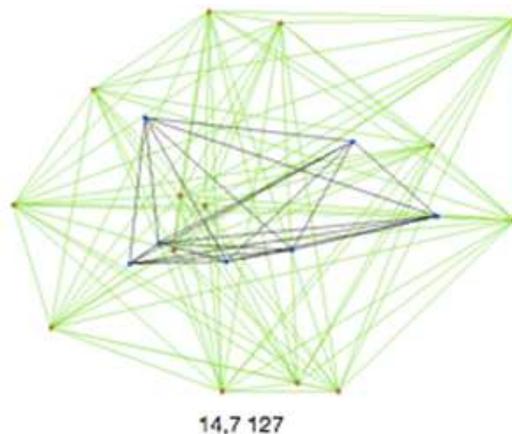
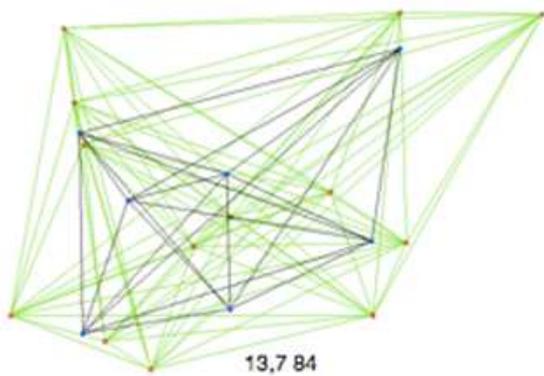
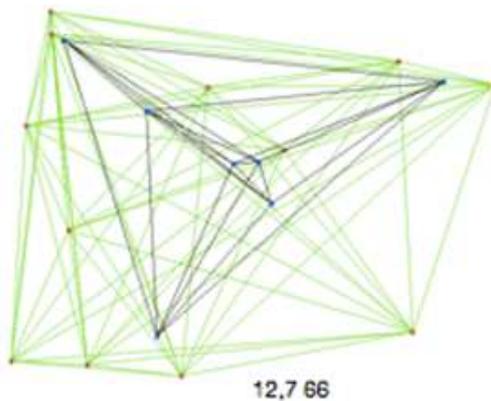
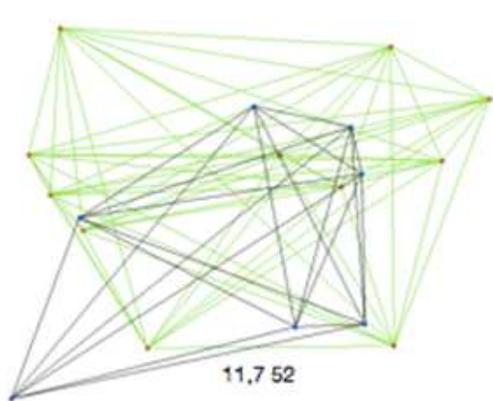


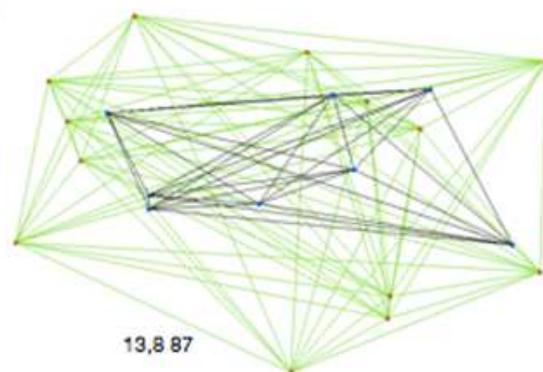
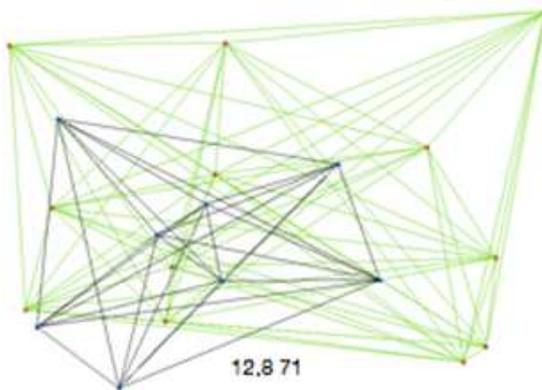
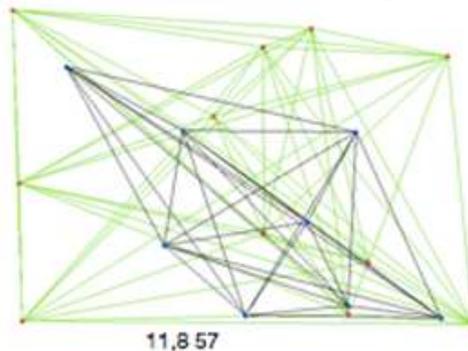
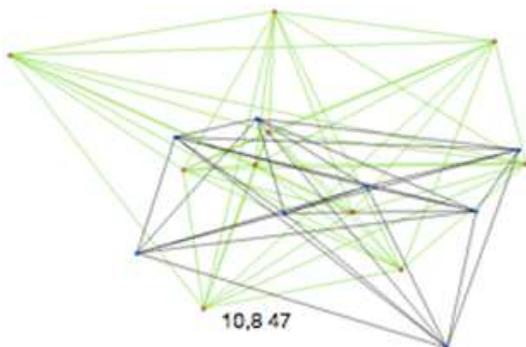
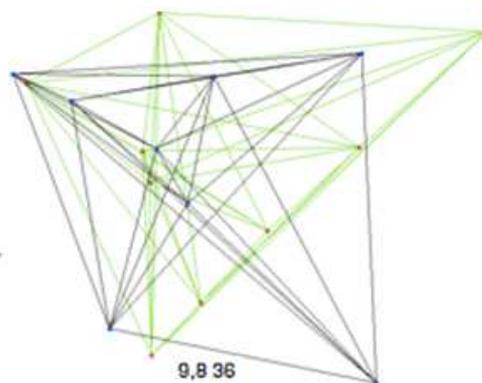
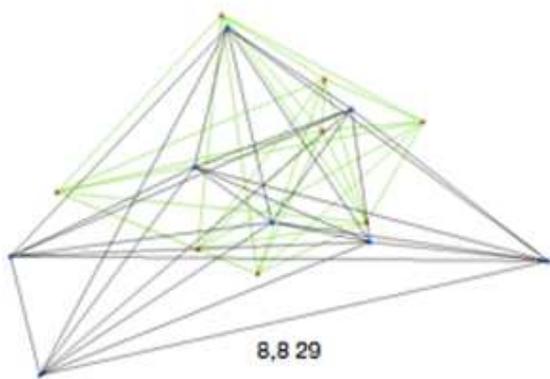


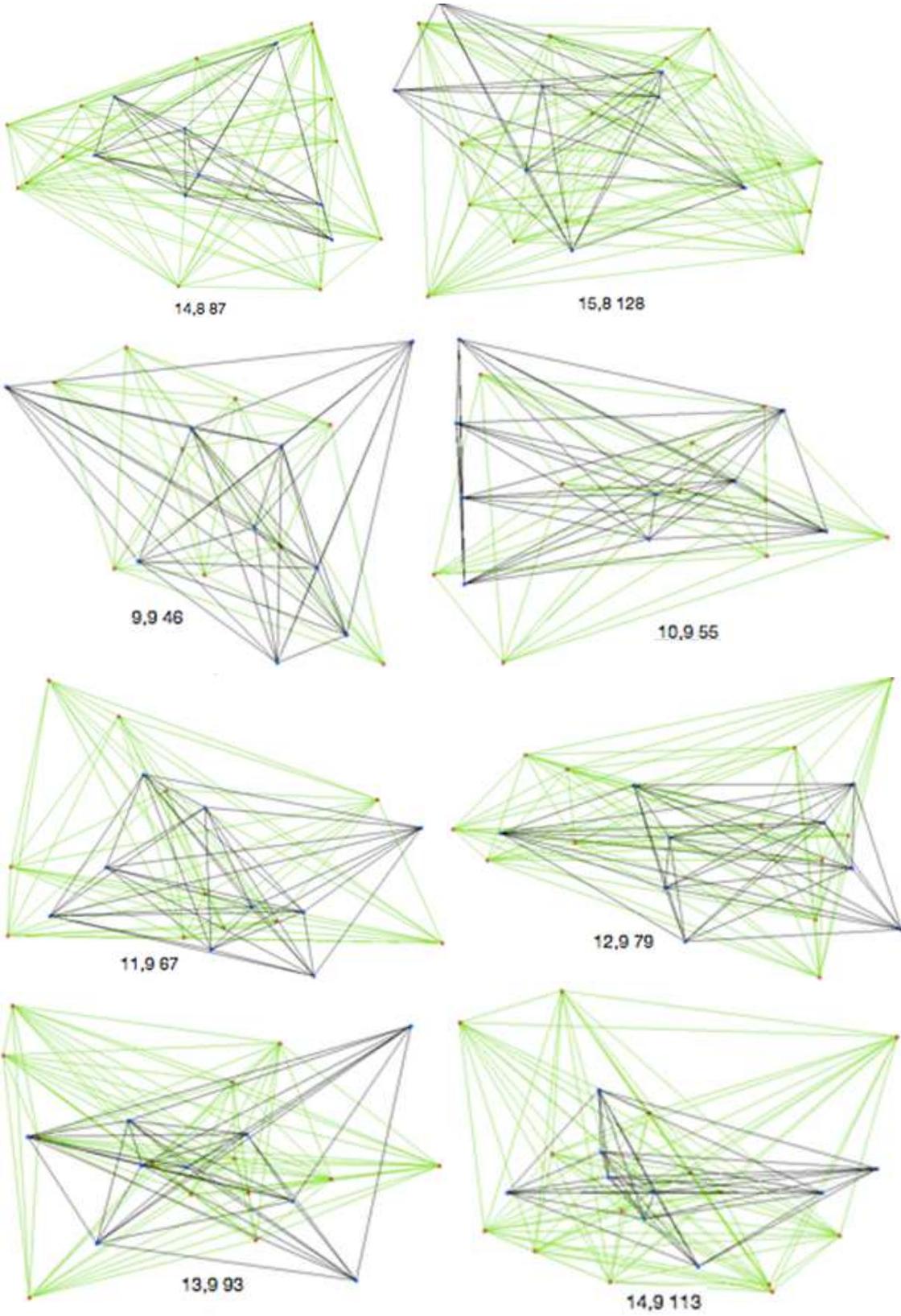






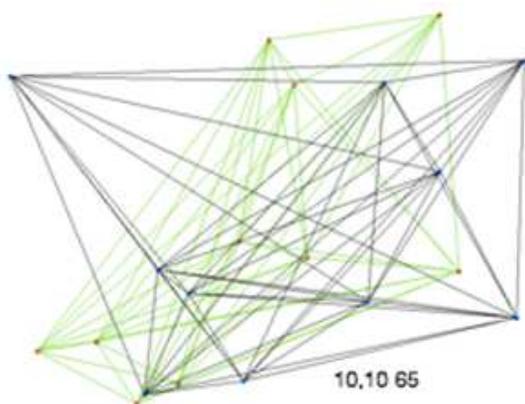




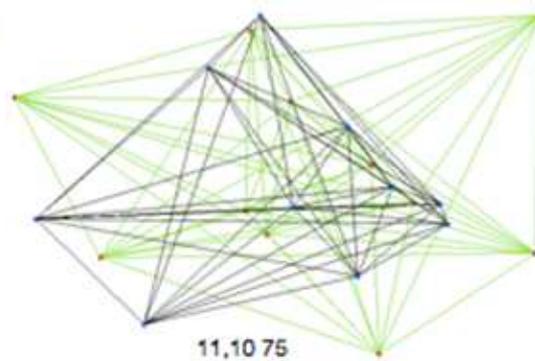




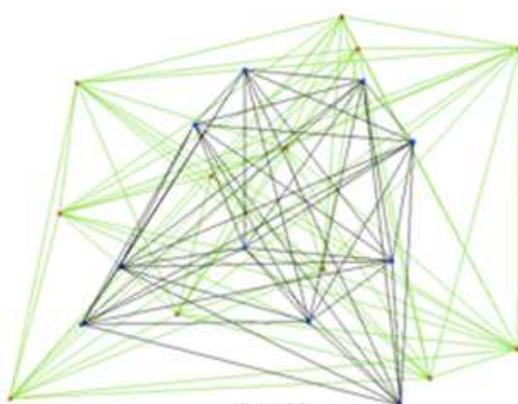
15,9 131



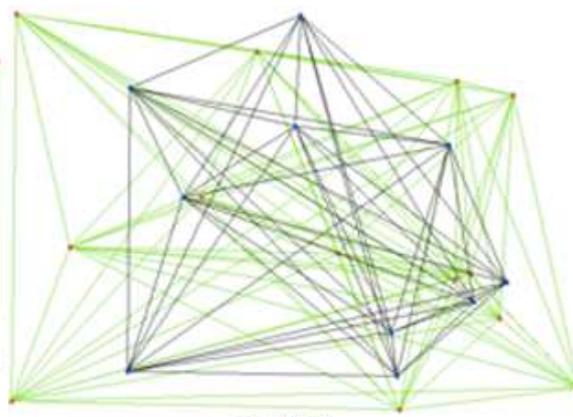
10,10 65



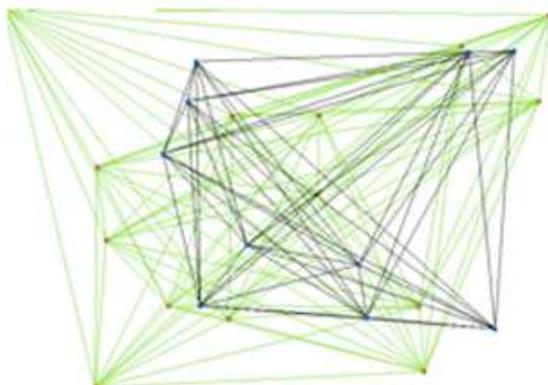
11,10 75



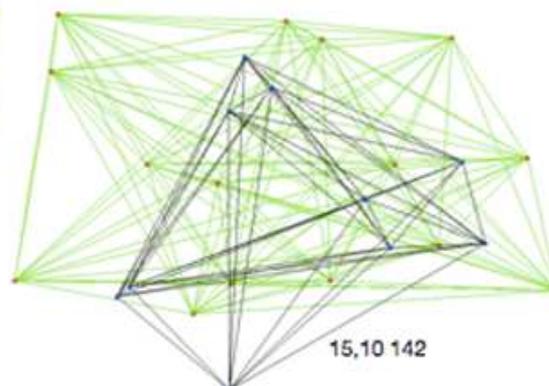
12,10 86



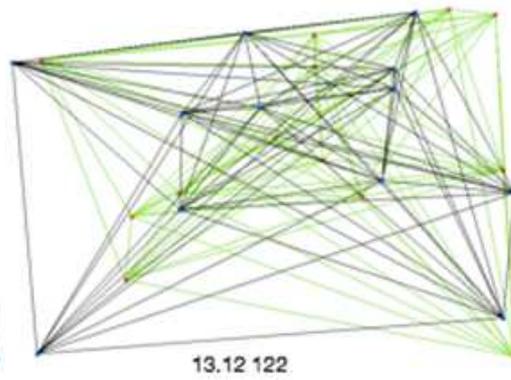
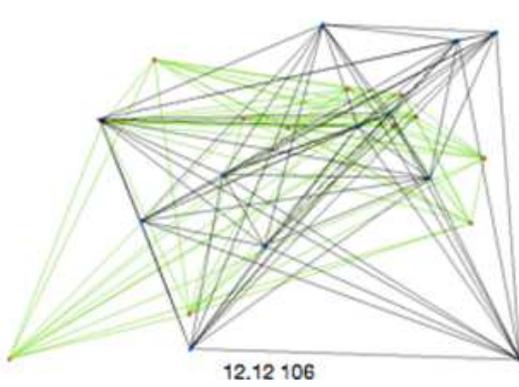
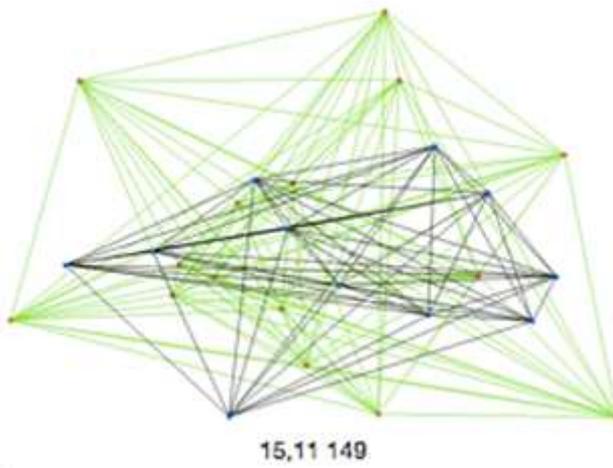
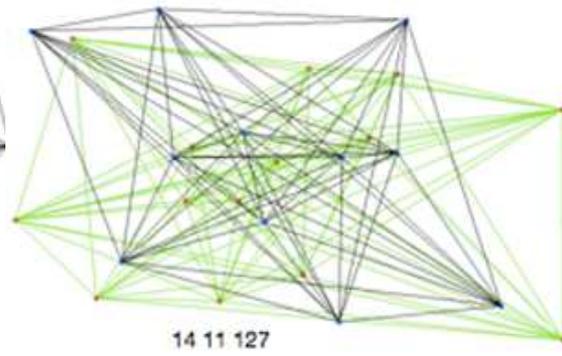
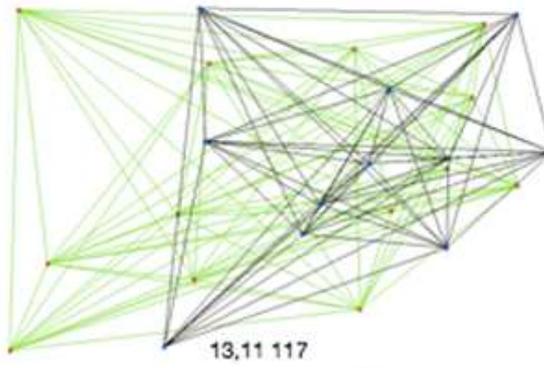
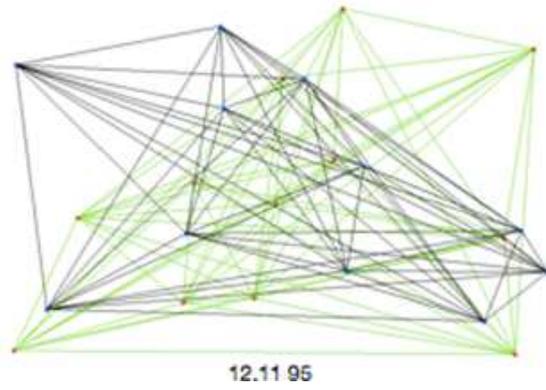
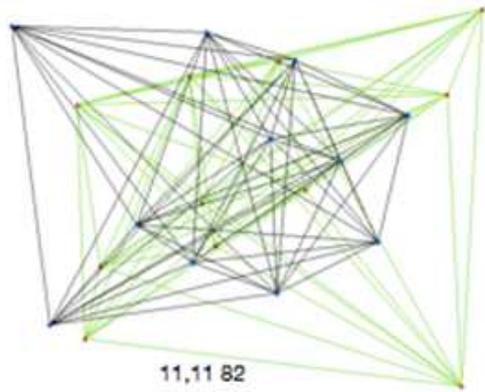
13,10 101

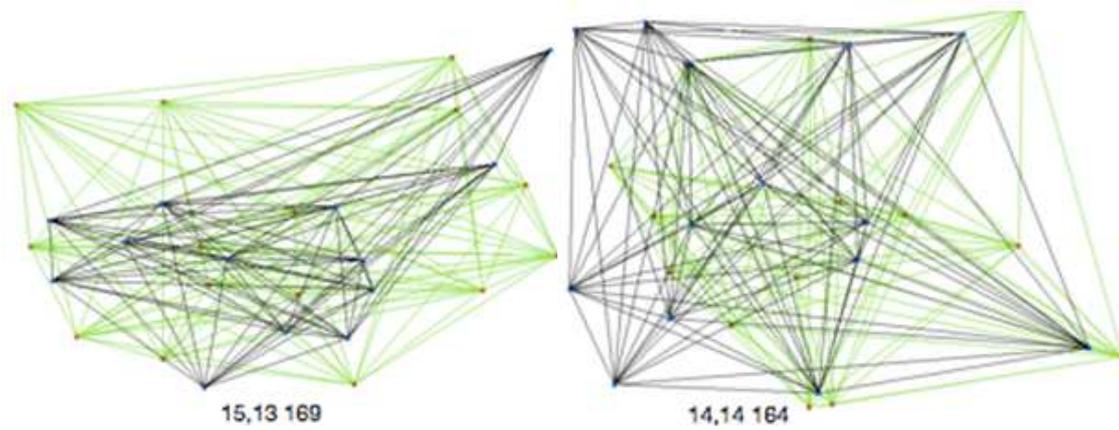
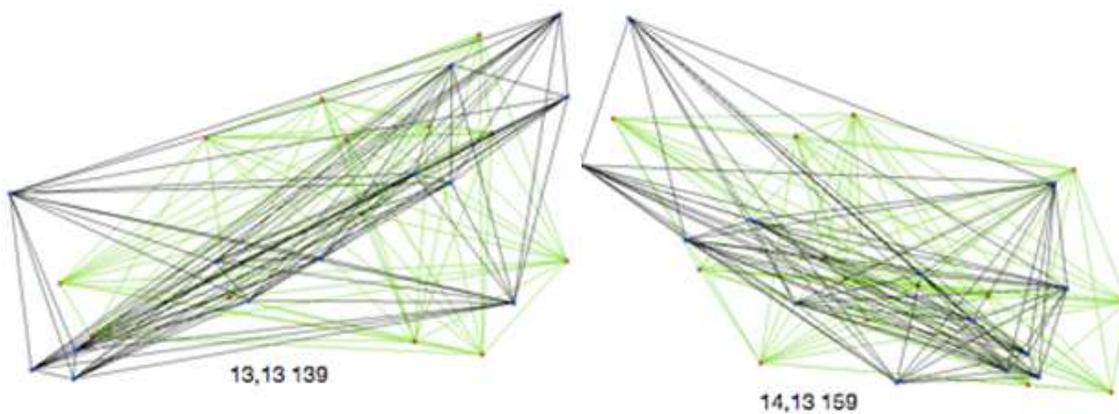
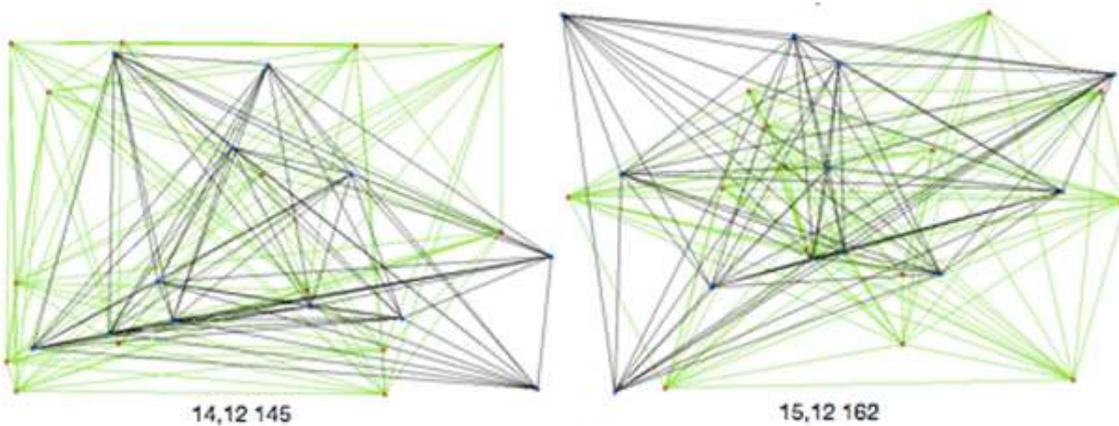


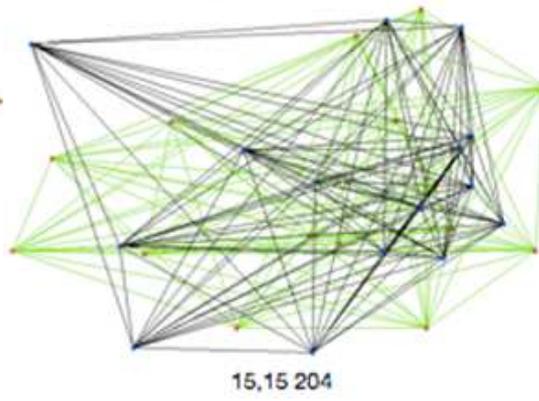
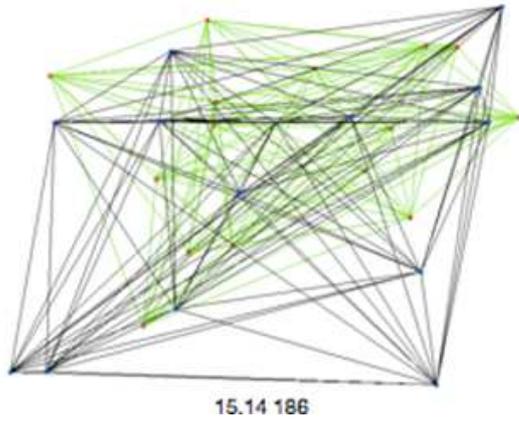
14,10 118



15,10 142







## Conclusiones

El proyecto se centra especialmente en distribuciones formadas por puntos bicromáticos. Puesto que no hay estudios previos con resultados concretos, únicamente los anteriormente comentados de Aichholzer (4 puntos de cada color sin encontrar ningún triángulo vacío y 9 y 10 puntos de diferente color encontrando conjuntos con un solo triángulo vacío), los resultados obtenidos en las pruebas realizadas no se pueden comparar. Por lo tanto, los resultados obtenidos se consideran aproximaciones o cotas cercanas a los resultados concretos, para las diferentes distribuciones trabajadas.

Existe un factor limitante que es la gran cantidad de configuraciones de puntos existentes (que es de un tamaño exponencial en  $n$ ). Esto imposibilita generar todas las configuraciones de  $n$  puntos con lo cual con esta aplicación no se puede asegurar que el resultado sea el más exacto posible.

En cuanto a distribuciones con puntos monocromáticos sí existen resultados teóricos estudiados con anterioridad. Comparando dichos resultados con las pruebas experimentales realizadas se puede afirmar que contra mayor es el número de puntos, más discrepancia existe entre el resultado teórico y las pruebas realizadas.

Futuros proyectos podrían mejorar el actual. El algoritmo implementado tiene complejidad algorítmica alta ( $O(n^4)$ ). Un objetivo sería diseñar e implementar un algoritmo más rápido.

Otra mejora sería la posibilidad de incorporar el conteo y estudio de distribuciones formadas por polígonos de más de tres vértices (cuadrados, pentágonos, hexágonos...).

En cuanto al estudio de conteo de triángulos, se podría refinar la búsqueda para configuraciones con pocos triángulos vacíos, no generando los nubes de puntos de manera puramente aleatoria, sino con ciertas restricciones. Por ejemplo se podría mejorar el apartado de las circunferencias, posibilitando el añadir más circunferencias en función de la necesidad del usuario y el modificar el radio de las circunferencias utilizadas.

## Bibliografía

- [1] O. Aichholzer. Empty colored  $k$ -gons - Recent results on some Erdős-Szekeres type problems. In *Proc. XIII Encuentros de Geometría Computacional*, pages 43-52, Zaragoza, Spain (2009).
- [2] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hack, C. Huemer, J. Urrutia, *Empty Monochromatic Triangles*, Computational Geometry: Theory and Applications, 42, 934-938 (2009).
- [3] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, T. Hackl, C. Huemer, A. Pilz, B. Vogtenhuber, *Lower bounds for the number of small convex  $k$ -holes*, In Proc. 24<sup>th</sup>. Annual Canadian Conference on Computational Geometry CCCG 2012, 247-252 (2012).
- [4] Boltyanski, S., Martini, H., Soltan, P. S.; *Excursions into combinatorial geometry*, Springer-Verlag (1996).
- [5] Boltyanski, *The Szökefalvi-Nagy problem in combinatorial geometry*, Moskva : Nauka : Fizmatlit, (1997).
- [6] Borsuk, K., Drei Sätze Über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre. *Fund Math.* 20 pág. 177-190 (1933).
- [7] J. Eckhoff, *Helly, Radon, and Carathéodory type theorems*, Handbook of convex geometry, Vol. A, B, 389-448, North-Holland, Amsterdam, (1993)
- [8] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, (1935).
- [9] T. Hales. A proof of the Kepler conjecture. *Annals of Math.* (2005).
- [10] Meir Katchalski and Amram Meir. On empty triangles determined by points in the plane. *Acta Math. Hungar.*, 51(3-4):323–328, (1988)
- [11] J. Pach and G. Toth: Monochromatic empty triangles in two-colored point sets, in: *Geometry, Games, Graphs and Education: the Joe Malkevitch Festschrift* (S. Garfunkel, R. Nath, eds.), COMAP, Bedford, MA, 195-198 (2008).
- [12] <http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3217850.pdf>