



Escola Politècnica Superior
d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

PROJECTE FI DE CARRERA

**TÍTOL: REDUCCIÓ D'ORDRE PER A SISTEMES LINEALS - TRUNCAMENT
BALANCEJAT**

AUTOR: GHIZLANE LABTIMI

**TITULACIÓ: ENGINYERIA TÈCNICA INDUSTRIAL, ESPECIALITAT
MECÀNICA**

DIRECTOR: CARLES BATLLE ARNAU

DEPARTAMENT: MATEMÀTICA APLICADA IV

DATA: 25/06/2012

PROJECTE FI DE CARRERA

RESUM (màxim 50 línies)

Degut al gran avenç tecnològic de les últimes dècades s'ha incrementat la necessitat de simular numèricament fenòmens físics associats a aplicacions concretes de l'electrònica, la mecànica, l'electromagnetisme, la fluidomecànica, etc. Per descriure aquests fenòmens fan falta models matemàtics que comparteixen la característica de que la seva dimensió és molt gran. Especialment, la modelització de circuits integrats, per exemple els microprocessadors, implica un sistema dinàmic a gran escala que no pot ser resolt amb mètodes numèrics tradicionals. Al seu efecte, són necessaris tècniques computacionals d'alt rendiment per fer front a aquests problemes.

En el present projecte es tractarà una se les eines de computació científica que permet simular sistema a gran escala. Concretament, es revisarà el mètode de truncament balancejat per la reducció de models que permet, per la seva part, reduir el temps i el cost de simulació. Els algoritmes involucrats en aquest mètode han sigut implementats per a Matlab.

El truncament balancejat és una tècnica que efectua un canvi de coordenades i després es procedeix a truncar el sistema quedant-nos amb un cert nombre de les noves coordenades, de manera que, aquestes coordenades són les que guarden la major part de l'energia del sistema, és a dir que, donat un sistema en temps continu i invariant com el següent

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

d'ordre n , s'ha d'aconseguir un altre sistema

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t)\end{aligned}$$

d'ordre r , on $r \ll n$. Al mateix temps aquest nou sistema malgrat no és precís al 100% com l'original, conserva importants propietats del sistema original com l'estabilitat i la passivitat i el més important és que el nou sistema és de dimensió molt més petita, la qual cosa, minimitza i redueix tan el cost com l'esforç computacional.

Paraules clau (màxim 10):

Reducció de models	Truncament balancejat	Equacions de Lyapunov	Sistemes mecànics
Lleis de Newton	Sistemes elèctrics	Lleis de Kirchhof	

Índex

Introducció	5
Estructura del projecte.....	6
Programari utilitzat.....	7
Capítol 1. Conceptes fonamentals	8
1.1 Conceptes bàsics d'àlgebra.	8
1.1.1 Notació	8
1.1.2 Valors i vectors propis.....	8
1.1.3 Valors i vectors singulars	9
1.2 Conceptes bàsics de l'anàlisi i disseny del SLC.....	10
1.2.1 El model d'espai d'estats.....	10
1.2.2 Estabilitat i passivitat.....	12
1.2.3 Controlabilitat.....	13
1.2.4 Observabilitat	13
1.2.5 Realitzacions minimal.....	13
1.2.6 Les matrius Gramianes i els valors singulars de Hankel d'un SLC.	14
1.3 Els mètodes de reducció d'ordre de models	17
Capítol 2. Mètode del truncament balancejat a l'espai d'estats	19
2.1 Introducció	19
2.2 Interpretació de W_C i W_O	19
2.3 Truncament balancejat	21
Capítol 3. Aplicacions reals de la reducció de sistemes mitjançant Truncament Balancejat	25
3.1 Introducció	25
3.2 Plantejament del problema	25
3.2.1 Exemple mecànic	25
3.2.2 Exemple elèctric	27
Capítol 4. Reducció d'ordre de sistemes mecànics.....	29
4.1 Introducció	29
4.2 Sistema mecànic de translació.....	29
4.3 Sistema reduït.....	32
4.4 Comparació de resultats	37
4.5 Sistema mecànic de rotació	39

4.6 Sistema reduït.....	42
4.7 Comparació de resultats.	45
Capítol 5. Reducció d'ordre de sistemes elèctrics	47
5.1 Introducció	47
5.2 Sistema elèctric.....	47
5.3 Sistema reduït.....	51
5.4 Comparació de resultats.	54
Conclusions	56
Bibliografia.....	58
Referències d'internet	59
Agraïments	60

Introducció

"A causa dels avenços en el procés de producció de circuits integrats de les últimes dècades, la mida dels dispositius s'ha reduït i la velocitat dels mateixos s'ha incrementat en una relació inversament proporcional", així ho va afirmar Gordon E. Moore, cofundador d'Intel, el 19 d'abril de 1965 a la seva coneguda Llei de Moore.

Actualment resoldre problemes d'àmbit científic i/o tècnic dins d'uns límits determinats de temps, precisió i cost s'ha convertit en l'objectiu de la comunitat científicotècnica. Aquests problemes tenen cada vegada major dimensió i major complexitat, en alguns casos massa com per ser resolts dins dels límits de temps i precisió desitjables. La necessitat de resoldre aquests problemes ocasiona la creixent utilització de sistemes informàtics paral·lels i distribuïts i per tant, d'una banda, es dissenyen sistemes amb majors prestacions i que puguin executar el codi desenvolupat d'una manera més eficient i, per una altra, es desenvolupen nous algorismes numèrics i estratègies de programació més adequades per obtenir el major profit dels computadors ja existents.

Un dels temes crucials en l'enginyeria és la modelització de sistemes dinàmics complexos. No obstant això, perquè sigui factible el tractament de problemes reals, són necessàries aproximacions que el transformin en un problema més simple. Un sistema dinàmic complex sol ser no lineal, distribuït i variable en el temps, de manera que una de les primeres aproximacions clàssicament realitzades és la seva transformació en un sistema lineal invariant en el temps. Els sistemes lineals invariants en el temps resultants d'aquesta aproximació inicial solen ser sistemes de gran mida que posseeixen un gran nombre de variables d'estat. Per això cal buscar models matemàtics més simples que s'aproximin al màxim el comportament del sistema original. Aquest model, que posseirà menor nombre d'estats que el sistema original, s'anomena model reduït o model d'ordre reduït.

La reducció de models que era un problema obert en teoria de sistemes fa uns anys i en l'actualitat és un dels seus temes fonamentals degut a la seva importància que cada vegada augmenta. Existeixen diversos mètodes de reducció de models i un d'ells s'anomena el mètode de truncament balancejat, en el qual es basa aquest projecte. El mètode de truncament balancejat permet reduir un sistema conservant-ne importants propietats com l'estabilitat i la passivitat, a més de tenir controlat l'error que és comés en la reducció.

Aquesta tècnica facilita la comprensió i la resolució de molts problemes en diversos àmbits malgrat que l'enginyeria és la més beneficiada ja que una gran quantitat de problemes de la física (en totes les seves especialitats) es poden solucionar fàcilment amb aquesta tècnica. Entre les aplicacions reals dels mètodes de reducció de models i, concretament, el mètode del truncament balancejat, es troben problemes mecànics, elèctrics, químics, hidràulics, problemes d'elasticitat i de la ciència del materials en general. No obstant, cal destacar que l'electrònica és la branca industrial que més ús li dona a la reducció de models a la hora d'estudiar el comportament dels components d'un circuit integrat una vegada dissenyat un model.

La finalitat d'aquest projecte és mostrar i donar a saber en què es basa el mètode de truncament balancejat, quines són les teories que estan darrere, com s'aplica i en quins casos, quins avantatges i inconvenients té, com s'interpreta, exemples d'aplicació real, etc.

Estructura del projecte

El contingut d'aquest projecte està estructurat en 6 capítols que es detallen a continuació.

Després de la introducció del projecte on es descriuen els objectius i la justificació del mateix, es troba una breu descripció del programari informàtic utilitzat al llarg del projecte.

A continuació, al primer capítol es recorden alguns conceptes bàsics de l'àlgebra lineal i de l'anàlisi i disseny de sistemes lineals de control (SLC). L'última part d'aquest primer capítol està dedicada a la descripció del problema de reducció de models.

Durant el segon capítol, es realitza una detallada descripció i explicació del mètode de truncament balancejat a l'espai d'estats.

Llavors, al tercer capítol es descriuen, com a introducció a la part pràctica del projecte, algunes aplicacions o models simples que posteriorment es connectaran i formaran un model complex de gran dimensió. Degut al camp industrial al que pertany la carrera en curs, s'ha escollit el tractament de tres exemples: dos de mecànics, de translació i de rotació, i un d'elèctric.

Tot seguit, el quart capítol tracta en detall l'estudi de sistemes mecànics, en primer lloc es troba un sistema mecànic de translació i en segon lloc un sistema mecànic de rotació. En tots dos casos, s'estudia el sistema original i el reduït i després es comparen per treure'n resultats.

El cinquè capítol conté l'estudi detallat d'un sistema elèctric RLC tan l'original com el reduït i igual que els sistemes mecànics, també es fa una comparació de tots dos mètodes.

Per últim, al sisè capítol es detallen les conclusions a les que s'ha arribat al llarg del projecte.

Programari utilitzat

Per la realització d'aquest projecte i dur a terme la seva part pràctica s'ha utilitzat com a eina de càlcul matemàtic avançat el programari MatLab®.

MATLAB és un acrònim de MATrix LABORatory i va ser creat per Cleve Moler l'any 1984. Avui en dia, és un llenguatge de computació tècnica d'alt nivell i un entorn interactiu pel desenvolupament d'algoritmes, visualització de dades, anàlisi de dades i càlcul numèric. Malgrat que utilitza el seu propi llenguatge, MATLAB permet la comunicació i la integració amb altres programes de diferent llenguatge tals com: C, C++ i FORTRAN.

Entre les seves característiques principals es troba:

- Llenguatge d'alt nivell per a càlcul tècnic.
- Entorn de desenvolupament per a la gestió de codis, arxius i dades.
- Eines interactives per a l'exploració, disseny i resolució de problemes iteratius.
- Funcions matemàtiques per a àlgebra lineal, estadística, anàlisi de Fourier, filtratge, optimització integració numèrica i molts altres camps de la matemàtica aplicada.
- Funcions gràfiques bidimensionals i tridimensionals per la visualització de dades.
- Eines per crear interfases gràfiques d'usuari personalitzades.
- Funcions per integrar els algoritmes basats en Matlab amb aplicacions i llenguatges externs, com per exemple: C/C++, FORTRAN, JAVA, COM, i Microsoft EXCEL.

D'altra banda, Matlab és l'estàndard industrial per al tractament de problemes d'enginyeria amb un alt contingut matemàtic i, amb la seva extensió de programació gràfica Simulink® , proporciona entorns molt potents de simulació i disseny de sistemes complexos.

Capítol 1. Conceptes fonamentals

1.1 Conceptes bàsics d'àlgebra.

1.1.1 Notació

Al començament i abans de tot caldria introduir la notació i algunes definicions bàsiques de la teoria de matrius utilitzada al llarg d'aquest projecte.

Definició 1.

- Una matriu diagonal és aquella els elements no diagonals de la qual són nuls, és a dir, $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$. Aquesta matriu queda unívocament definida per els seus elements diagonals $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{pp}), p = \min(m, n)$.
- La matriu identitat d'ordre n es defineix com la matriu $I_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ de dimensió $n \times n$.
- Una matriu és triangular superior (inferior) si $a_{ij} = 0, \forall i > j$ ($a_{ij} = 0 \forall i < j$).
- La matriu transposada de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es denota com $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ i s'obté al intercanviar les files de A per les seves columnes.
- La matriu conjugada transposada de $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ es denota com $A^H \in \mathbb{C}^{n \times m}$ i s'obté al intercanviar les files de A per les seves columnes i conjugar cada un dels seus elements.
- Una matriu quadrada és definida positiva si $x^T A x > 0, \forall x \neq 0$. Una matriu quadrada és semidefinida positiva si $x^T A x \geq 0, \forall x \neq 0$.
- Una matriu real és simètrica si $A^T = A$.
- Una matriu complexa és hermitiana si $A^H = A$.
- Una matriu quadrada és invertible (no és singular) si $\exists A^{-1} : A^{-1} A = A A^{-1} = I$.
- Una matriu quadrada real és ortogonal si $A^T A = A A^T = I$.

1.1.2 Valors i vectors propis

A continuació es defineix un seguit de conceptes i propietats que es consideren importants respecte valors i vectors propis. Tots aquests conceptes es poden donar tant per matrius quadrades reals $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com per matrius quadrades complexes $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Definició 2.

- Els valors propis d'una matriu A de dimensió $n \times n$ són les arrels del seu polinomi característic: $p(z) = \det(zI_n - A)$ on \det és el determinant de la matriu.
- El seguit de valors propis de $A, \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, també anomenat *espectre* de A , s'indicarà com $\Sigma(A)$, o simplement Σ quan no hi hagi possibilitat de confusió. A més a més, si $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ llavors $\text{Re}(\lambda) = \alpha$ i $\text{Im}(\lambda) = \beta$.

Proposició 1.

Els valors propis de A compleixen les propietats següents:

- *Els valors propis són invariants sota transformacions de semblança.*
- *El determinant de A és igual al producte dels seus valors propis.*
- *La traça de A es defineix com la suma dels elements diagonals de A i és igual a la suma dels seus valors propis.*
- *Si $\lambda \in \Sigma(A)$ llavors existeix un vector $x \neq 0$ de dimensió n tal que $Ax = \lambda x$. Aquest vector es coneix com el vector propi associat al valor propi λ .*
- *Si $\lambda = \alpha + i\beta$ és un valor propi complex de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ llavors el seu complex conjugat, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, també és un valor propi de A .*

1.1.3 Valors i vectors singulars

Tot seguit s'introdueixen definicions relacionades amb valors i vectors singulars.

Teorema 1. (Descomposició en valors singulars o SVD [Golub 89]).

- *Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $p = \min(m, n)$ existeix un parell de matrius ortogonals $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que:*

$$U^T A V = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0.$$

En el cas de que A sigui una matriu quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, llavors

$$U^T A V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$$

En aquesta descomposició, σ_i és el valor singular i -èssim de A i les columnes i -èssimes de U i V són els vectors singulars associats a σ_i per l'esquerre i per la dreta, respectivament.

Definició 3.

- *El rang d'una matriu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es defineix com el nombre de columnes o files linealment independents.*

Proposició 2.

- La matriu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ té rang r si i només si es compleix que:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p$$

És a dir, el rang de la matriu A coincideix amb el nombre de valors singulars no nuls.

1.2 Conceptes bàsics de l'anàlisi i disseny del SLC**1.2.1 El model d'espai d'estats**

A continuació s'insereixen diversos conceptes bàsics de la teoria de control corresponents a l'anàlisi i al disseny d'un Sistema Lineal de Control (SLC). Seguidament d'una definició formal dels SLC en el model d'espai d'estats s'introdueixen diverses propietats importants d'aquests sistemes tals com estabilitat, controlabilitat i observabilitat.

Definició 4.

- Un SLC generalitzat, continu i invariant en el temps, està definit per una equació diferencial i una equació algebraica.

$$\begin{aligned} F \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

on $x(t) \in \mathbb{R}^n$ denota el vector de variables d'estat, $x(0) = x_0$ és l'estat inicial del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ és el vector d'entrades o controls, i $y(t) \in \mathbb{R}^p$ és el vector de sortides, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es coneix com la matriu d'estats, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és la matriu d'entrades, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ és la matriu de sortides [Kailath 80, Petkov 91], n és l'ordre (o la dimensió de l'espai d'estats) del sistema.

Definició 5.

- Un SLC continu i invariant en el temps es pot veure com un cas particular d'un SLC generalitzat on $F = I_n$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Definició 6.

- La matriu funció de transferència del SLC (1.2), $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}$, ve determinada per la següent expressió:

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1} B$$

La realització (1.2) assignada a una matriu funció de transferència $G(s)$ no és única. Una mateixa funció de transferència es pot obtenir amb diversos sistemes SLC del mateix ordre. Per exemple, si realitzem el canvi de coordenades:

$$x(t) = S\hat{x}(t)$$

on S és una matriu no singular llavors s'obté l'SLC equivalent:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

En aquest nou sistema d'ordre n

$$\begin{aligned} \hat{A} &= TAS \\ \hat{B} &= TB \\ \hat{C} &= CS \end{aligned}$$

en el qual

$$T = S^{-1}$$

La nova expressió per a $G(s)$ serà:

$$G(s) = \hat{C}(sI_n - \hat{A})^{-1} \hat{B} = C(sI_n - A)^{-1} B$$

És també possible obtenir la mateixa funció de transferència a partir d'un SLC d'ordre diferent al donat. En aquest cas, però, no hi ha una transformació de coordenades entre els dos sistemes. Tal com veurem més endavant, la reducció d'ordre no pretén obtenir un SLC de dimensió més petita amb la mateixa funció de transferència, sinó una funció de transferència aproximada. Més concretament, veurem que la reducció d'ordre basada en una transformació de balanceig efectua un canvi de coordenades (que no redueix, per tant, l'ordre) i després es procedeix a truncar el sistema quedant-nos amb un cert nombre de les noves coordenades.

1.2.2 Estabilitat i passivitat

L'estabilitat és una de les característiques més importants dels SLC, en la següent definició i teorema es presenta aquesta característica.

Definició 7.

- Un SLC continu i invariant en el temps definit per:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(0) = x_0 \quad (1.4)$$

és asimptòticament estable si $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \forall x_0$. Si $\forall x_0, \exists c < \infty$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| < c$ llavors el sistema és estable. Si existeix un estat inicial, \tilde{x}_0 , tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty, x(0) = \tilde{x}_0$, llavors el sistema es inestable.

Teorema 2

- L'SLC (1.4) és asimptòticament estable si i només si tots els valors propis de A tenen part real negativa, això és, $\text{Re}(\lambda) < 0, \forall \lambda \in \Sigma(A)$. En tal cas A és una matriu d'estabilitat [Gantmacher 66].

El fet de que l'SLC (1.4) sigui asimptòticament estable té la següent conseqüència important.

Proposició 3.

- Si l'SLC (1.4) és asimptòticament estable llavors l'SLC (1.3) és el que, entrades $u(t)$ acotades produeixen sortides $y(t)$ acotades.

Definició 8

- Un sistema passiu és aquell del qual es pot treure, com a màxim, quantitats finites d'energia [Antoulas 05].

Exemples de sistemes passius són els sistemes mecànics o elèctrics constituïts per masses, molles, mecanismes de dissipació (fregament), bobines, condensadors, resistències o transformadors. No són passius, però, aquells sistemes que contenen elements *actius*, com ara fonts de tensió o de corrent, o motors de diversos tipus (si es suposa que aquests darrers tenen a la seva disposició una quantitat no fitada de combustible). Tampoc és un sistema passiu (encara que l'exemple no és realitzable a la pràctica)

1.2.3 Controlabilitat

La controlabilitat és un altre important propietat dels SLC. Aquesta propietat es considera associada a la part del SLC (1.2) que relaciona el parell entrada-sortida, és a dir:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \quad (1.5)$$

Definició 8.

- L'SLC (1.5) (el parell (A, B)) és controlable si $\forall x_0$ i per a qualsevol estat final x_f existeix un temps finit t_f i un control $u(t), 0 \leq t \leq t_f$, tal que $x(t_f) = x_f$.

1.2.4 Observabilitat

Un altre important propietat és la observabilitat del SLC. Aquesta propietat es considera relacionada amb la part del SLC (1.2) del parell estat-sortida en la falta de controls, és a dir:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Definició 9.

- L'SLC (1.6) (el parell (A, C)) és observable si $\forall x_0$ existeix un temps finit tal que, a partir del coneixement de les sortides $y(t), 0 \leq t \leq t_f$, és possible determinar x_0 .

La controlabilitat i l'observabilitat són propietats duals que sempre es compleixen juntes en el sentit de si el parell (A, B) és controlable si i només si el parell (A^T, B^T) és observable.

1.2.5 Realitzacions minimalis

Definició 10.

- Una realització (A, B, C) d'un SLC es diu que és minimal si (A, B) és controlable i (A, C) és observable [Van Dooren 95].

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

El caràcter minimal d'un SLC és molt important en la reducció de models, degut a que algunes tècniques utilitzades a l'espai d'estats [Laub 80, Laub 87], i en particular la de truncament balancejat, requereixen que l'SLC sigui minimal.

1.2.6 Les matrius Gramianes i els valors singulars de Hankel d'un SLC.

Definició 11.

- Si l'SLC (1.2) és asimptòticament estable llavors les matrius Gramianes de controlabilitat i observabilitat, W_C i W_O , es defineixen, respectivament, com

$$W_C = \int_0^{+\infty} e^{tA} B B^T e^{tA^T} dt$$

$$W_O = \int_0^{+\infty} e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt$$

Si també el parell (A, B) és controlable i el parell (C, A) és observable, les matrius Gramianes, a més de ser definides positives, $W_C > 0$ i $W_O > 0$, són solució de les equacions de Lyapunov:

$$A W_C + W_C A^T + B B^T = 0$$

$$A^T W_O + W_O A + C^T C = 0$$

Podem demostrar que verifiquen les equacions de Lyapunov de la manera següent.

Matriu Gramiana de controlabilitat.

$$A W_C + W_C A^T + B B^T = A \int_0^{+\infty} e^{tA} B B^T e^{tA^T} dt + \int_0^{+\infty} e^{tA} B B^T e^{tA^T} dt A^T + B B^T$$

Sumant les integrals s'obté:

$$A W_C + W_C A^T + B B^T = \int_0^{+\infty} A e^{tA} B B^T e^{tA^T} + e^{tA} B B^T e^{tA^T} A^T dt + B B^T$$

El terme

$$A e^{tA} B B^T e^{tA^T} + e^{tA} B B^T e^{tA^T} A^T$$

es pot escriure com

$$\frac{d}{dt} \left(e^{tA} B B^T e^{tA^T} \right)$$

i llavors

$$A W_C + W_C A^T + B B^T = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(e^{tA} B B^T e^{tA^T} \right) dt + B B^T$$

Operant:

$$A W_C + W_C A^T + B B^T = \left[e^{tA} B B^T e^{tA^T} \right]_0^{+\infty} + B B^T = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(e^{tA} B B^T e^{tA^T} \right) - e^{0A} B B^T e^{0A^T} + B B^T$$

Si A és Hurwitz, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{tA}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{tA^T}) = 0$ i aleshores:

$$AW_c + W_c A^T + BB^T = 0 - BB^T + BB^T = 0$$

Matriu Gramiana d'observabilitat.

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = A^T \int_0^{+\infty} e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt + \int_0^{+\infty} e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt A + C^T C$$

Sumant les integrals s'obté:

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = \int_0^{+\infty} A^T e^{tA^T} C^T C e^{tA} + e^{tA^T} C^T C e^{tA} A dt + C^T C$$

El terme:

$$A^T e^{tA^T} C^T C e^{tA} + e^{tA^T} C^T C e^{tA} A$$

es pot escriure com

$$\frac{d}{dt} (e^{tA^T} C^T C e^{tA})$$

llavors

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (e^{tA^T} C^T C e^{tA}) dt + C^T C$$

Operant:

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = \left[e^{tA^T} C^T C e^{tA} \right]_0^{+\infty} + C^T C = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{tA^T} C^T C e^{tA}) - e^{0A^T} C^T C e^{0A} + C^T C$$

Si A és Hurwitz, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{tA}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{tA^T}) = 0$ i aleshores:

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 - C^T C + C^T C = 0$$

Pels SLC generalitzats, la definició de les matrius Gramianes es poden expandir com l'explicat en l'SLC (1.1). En aquest cas, les Gramianes de controlabilitat i observabilitat s'aconsegueixen a partir de les solucions X i Y de les equacions de Lyapunov generalitzades

$$AXE^T + EXA^T + BB^T = 0$$

$$A^T YE + E^T YA + C^T C = 0$$

i de les relacions

$$W_c = X$$

$$W_o = E^T Y E$$

Proposició 4

Les matrius Gramianes dels dos sistemes (1.2) i (1.3), amb vectors d'estat $x(t)$ i $\hat{x}(t)$, estan relacionades per [Fortuna 92]

$$\hat{W}_C = TW_C S^{-T}$$

$$\hat{W}_O = S^T W_O S$$

on S és una matriu no singular tal que $x(t) = S\hat{x}(t)$ i $T = S^{-1}$.

Definició 12.

- Per a sistemes minimal, tot el conjunt dels valors propis del producte $W_C W_O$ són nombres reals estrictament positius R^+ . Les arrels quadrades dels mateixos, indicats en ordre decreixent com,

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \dots > \sigma_n > 0$$

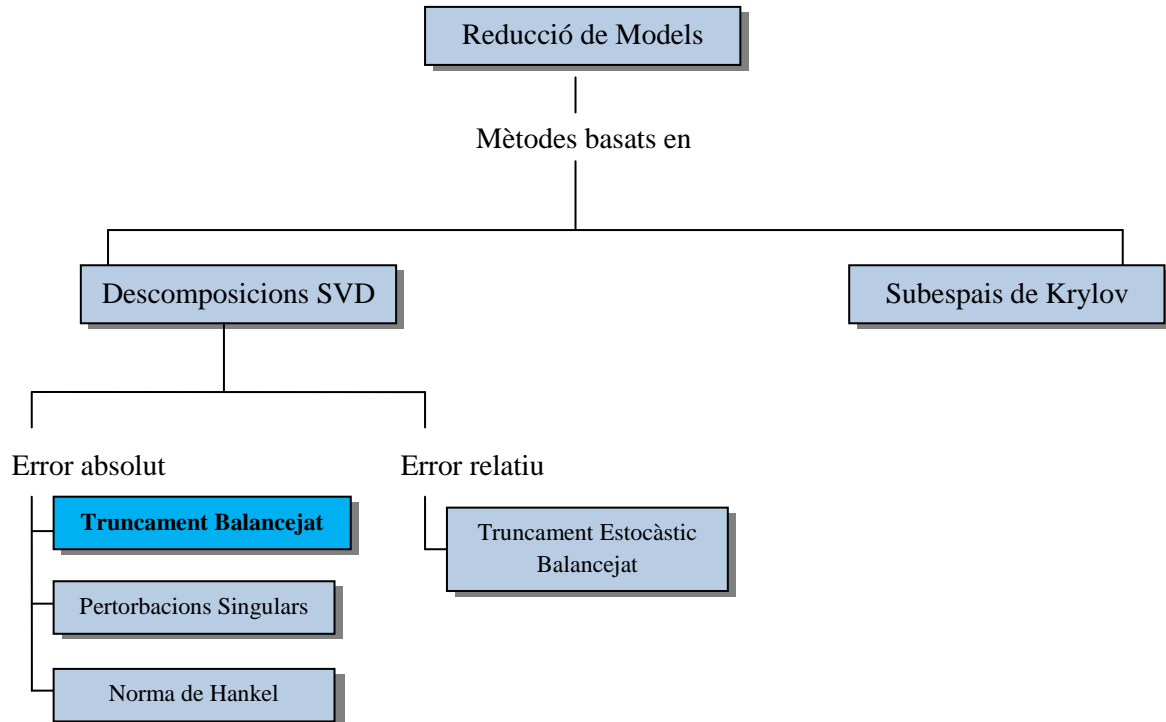
es coneixen com a valors singulars de Hankel (Hankel (HSVs, de l'anglès Hankel singular values) del SLC.

Proposició 5.

- Els valors propis del producte $W_C W_O$ són invariants sota qualsevol transformació de coordenades [Fortuna 92].

1.3 Els mètodes de reducció d'ordre de models

Existeixen diversos mètodes de reducció de models i cadascú té els seus avantatges i inconvenients. Depèn de l'aplicació a la qual està destinat el sistema s'utilitza un o un altre. Els mètodes de reducció de models es poden classificar en:



D'aquest esquema es pot veure que els mètodes de reducció de models més populars es poden agrupar en dues grans famílies: els mètodes d'aproximació basats en descomposició SVD [Li 01, Penzl 00] i els mètodes d'aproximació per subespais de Krylov [Freund 03, Saad 90].

Entre els mètodes de reducció de models basats en aproximació per SVD es poden trobar dues classes: els mètodes d'error absolut i els d'error relatiu. Entre els primers es destaquen els algorismes de truncament balancejat [Moore 81, Varga 91], els algorismes d'aproximació de perturbacions singulars [Liu 86] i els algorismes d'aproximació de la norma de Hankel [Glover 84]. Tots aquests mètodes presenten, com a problema computacional principal, la resolució d'un parell d'equacions matricials (lineals) de Lyapunov que tenen per operands les matrius d'estats, entrades i sortides del SLC. Entre els mètodes d'error relatiu és destaca el mètode de truncament estocàstic balancejat [Dosai 84]. En aquest mètode, el problema computacional clau és la solució d'una equació de Lyapunov i una equació matricial (quadràtica) de Riccati. Els mètodes d'aproximació per subespais de Krylov bàsicament requereixen el càlcul d'algun tipus de factorització de la matriu de controlabilitat de l'SLC, definida per:

$$R_k(A, B) = \left[B, AB, (A)^2 B, \dots, (A)^{k-1} B \right]$$

Aquesta factorització s'obté, habitualment, mitjançant l'algorisme iteratiu de Arnoldi o alguna de les seves variants [Golub 96].

Aquest projecte es centra en els mètodes SVD i, més concretament, en els mètodes d'error absolut per Truncament Balancejat, ja que és una de les tècniques de reducció de models més populars. Si bé els

mètodes basats en la SVD en general presenten un major cost computacional que l'aproximació per subespais de Krylov, els primers tenen com a avantatge principal que garanteixen la preservació d'importants propietats del sistema original, com l'estabilitat i la passivitat [Antoulas 05]. A més, aquest tipus de mètodes proporciona una cota de l'error introduït pel model reduït, la qual cosa permet desenvolupar mètodes adaptatius que redueixen la dimensió del sistema en funció d'un marge d'error requerit.

Capítol 2. Mètode del truncament balancejat a l'espai d'estats

2.1 Introducció

Generalment, un sistema lineal de control SLC té infinites representacions que estan definides per les matrius (A, B, C) i la seva funció de transferència és invariant sota transformacions en l'espai d'estats. Es pot concloure que la representació assignada a un SLC no és única. És més, qualsevol afegiment en els estats que no modifiqui la relació entre les entrades i sortides de l'SLC comporta a una realització vàlida del mateix SLC. Així mateix, la dimensió o l'ordre d'un sistema pot ser arbitràriament estès sense modificar el mapatge entrada-sortida. D'altra banda, per a cada sistema existeix una quantitat mínima d'estats, r , necessaris per descriure per complet el comportament de la relació entrada-sortida establerta en el sistema. Aquest nombre s'anomena grau de McMillan del sistema i la representació $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ d'ordre r és una realització mínima del sistema. És important dir que el grau de McMillan és únic i la transformació de l'espai d'estats del sistema en condueix a una altra realització mínima.

Trobar una realització mínima per a un sistema donat, on els estats redundants (no mínims) són eliminats del sistema, es pot considerar com un primer pas en la resolució del problema de reducció de models. Encara que les realitzacions no són úniques, un SLC estable té un conjunt d'estats invariants pel que fa a la transformació de l'espai d'estats que proveeix una bona via per buscar el model d'ordre reduït. A més, com es va comentar anteriorment, si la matriu A és estable, les equacions de Lyapunov tenen solucions úniques i semidefinides positives, W_C i W_O . Atès que la controlabilitat i l'observabilitat són equivalents a que el sistema sigui minimal, i que per a un sistema mínim tots els valors propis del producte $W_C W_O$ són estrictament positius, es poden calcular els valors singulars de Hankel, HSVs, del SLC, que són invariants en el sistema.

Una classe de realitzacions important són les realitzacions balancejades. Una realització (A, B, C) s'anomena balancejada si i només si les Gramianes de controlabilitat i d'observabilitat són diagonals i iguals entre si, amb els HSVs ordenats de forma decreixent com entrades de les seves respectives diagonals.

2.2 Interpretació de W_C i W_O

Hom pot definir unes funcions de controlabilitat $W_C(x)$ i d'observabilitat $W_O(x)$ [Van Dooren 00] mitjançant:

$$W_C(x) = \min_u \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \|u(t)\|^2 dt, x(-\infty) = 0, x(0) = x$$

$$W_O(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \|y(t)\|^2 dt, x(0) = x, u(t) = 0, t \geq 0$$

$W_C(x)$ és la mínima energia requerida per conduir el sistema des de l'estat inicial en $t = -\infty$ fins l'estat x en $t = 0$. D'altra banda, $W_O(x)$ és la màxima energia obtinguda mitjançant l'observació de la sortida amb estat inicial x fins l'estat $x_f = 0$ sota cap entrada.

Per a SLC, les funcions de controlabilitat i observabilitat estan relacionades amb les gramianes corresponents mitjançant

$$W_c(x) = \frac{1}{2} x^T W_c^{-1} x$$

$$W_o(x) = \frac{1}{2} x^T W_o x$$

Efectuant canvis de coordenades, s'arriba a:

$$W_o = W_c = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad \text{i:} \quad W_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sigma_n} \end{bmatrix}$$

Operant s'obté:

$$W_c(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_1} x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_2} x_2^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_3} x_3^2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_n} x_n^2$$

$$W_o(x) = \frac{1}{2} \sigma_1 x_1^2 + \frac{1}{2} \sigma_2 x_2^2 + \frac{1}{2} \sigma_3 x_3^2 + \dots + \frac{1}{2} \sigma_n x_n^2$$

Per una banda, a la primera equació, degut a que les σ estan en ordre decreixent i estan en els denominadors, el valor de $W_c(x)$ cada vegada és més gran, per això la mínima energia requerida està en els primers termes de l'equació. Per l'altra banda, a la segona equació, com que les σ estan en ordre decreixent, el valor de $W_o(x)$ cada vegada és més petit, per això la màxima energia obtinguda està en els primers termes de l'equació.

En resum, és possible obtenir un model d'ordre reduït que approximi a l'original mitjançant l'eliminació dels estats menys controlables o menys observables, mantenint els estats que contenen la major part de l'energia, ja que aquests són els que estan més implicats en la transferència d'energia des de les entrades a les sortides. Això és el que s'aconsegueix mantenint els estats corresponents als HSVs de major valor, i és exactament la idea que persegueix al mètode de truncament balancejat que es descriu a continuació.

2.3 Truncament balancejat

Suposem un SLC continu i invariant en el temps:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Sent $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^p, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{p \times n}$. Entenem que l'SLC és asimptòticament estable, que el parell (A, B) és controlable i que el parell (A, C) és observable. A més, les matrius Gramianes de controlabilitat i d'observabilitat del sistema, W_C i W_O , són simètriques i definides positives, degut al caràcter controlable i observable del sistema i compleixen les següents equacions matricials de Lyapunov en temps continu:

$$\begin{aligned}AW_C + W_C A^T + BB^T &= 0 \\ A^T W_O + W_O A + C^T C &= 0\end{aligned}$$

Aplicant una transformació de coordenades a l'espai d'estats:

$$x(t) = S\hat{x}(t)$$

on $S \in R^{n \times n}$ és una matriu invertible, s'aconsegueix la nova realització de l'SLC representat per les equacions

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t)\end{aligned}$$

en el qual:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= TAS \\ \hat{B} &= TB \\ \hat{C} &= CS\end{aligned}$$

Es pot veure que les matrius Gramianes del nou sistema i les del sistema inicial estan relacionades per:

$$\begin{aligned}\hat{W}_C &= TW_C S^{-T} \\ \hat{W}_O &= S^T W_O S\end{aligned}$$

D'aquestes expressions es pot saber que:

- Els valors propis de A són invariants davant la transformació de coordenades, ja que \hat{A} i A són matrius similars.

$$\Sigma(A) = \Sigma(\hat{A})$$

- Els valors propis de les matrius Gramianes no són invariants davant la transformació de coordenades, ja que les matrius \hat{W}_C i W_C (W_O i \hat{W}_O) no estan relacionades mitjançant una transformació de semblança.
- Els productes de les matrius Gramianes compleixen una relació de semblança i per tant els seus valors propis segueixen sent invariants sota de la transformació de coordenades.

Ens interessa, en particular, un tipus de canvi de coordenades S que anomenarem transformació contragradient i que definim a continuació.

Definició 14.

- Una transformació de coordenades S per la que les noves matrius Gramianes \hat{W}_C i \hat{W}_O són diagonals serà una transformació contragradient.

Existeixen diversos tipus de transformacions contragradientes però la que és del nostre interès és la que queda definida com

$$S = L_C V \Sigma^{-1/2}$$

$$T = \Sigma^{-1/2} U^T L_O^T$$

on:

L_C i L_O que equivalen a X i Y respectivament, són els factors de Cholesky i $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és una matriu ortogonal.

A partir d'aquí, les principals etapes de l'algorisme per obtenir una transformació balancejada són les següents [Laub 87]:

ETAPA 1.

Calcular els factors de Cholesky de les matrius Gramianes W_C i W_O definides com les solucions de les equacions de Lyapunov

$$AW_C + W_C A^T + BB^T = 0$$

$$A^T W_O + W_O A + C^T C = 0$$

És a dir:

$$W_C = L_C L_C^T \quad \text{i} \quad W_O = L_O L_O^T$$

Sent L_C i L_O matrius triangulars inferior amb elements diagonals positius. Busquem els factors de Cholesky de les Gramianes per poder obtenir la matriu de valors propis de $W_C W_O$, Σ^2 , sense necessitat de calcular el producte dels Gramianes.

ETAPA 2.

Calcular la descomposició en valors singulars (SVD) del producte dels factors de Cholesky [Fernando 88, Heath 86]:

$$L_o^T L_C = U \Sigma V^T$$

ETAPA 3.

Obtenir la transformació balancejada

$$S = L_C V \Sigma^{-1/2}$$

I la seva inversa

$$T = \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T$$

ETAPA 4.

Aconseguir les matrius que defineixen la nova realització internament balancejada:

$$\hat{A} = T A S = \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T A L_C V \Sigma^{-1/2}$$

$$\hat{B} = T B = \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T B$$

$$\hat{C} = C S = C L_C V \Sigma^{-1/2}$$

Utilitzant les expressions de l'etapa 3 es pot veure que S és una transformació contragradient per a W_C i W_o . Els valors singulars de $L_o^T L_C$ coincideixen amb les arrels quadrades positives dels valors propis del producte $W_C W_o$.

Una vegada obtinguda la nova realització internament balancejada:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{B} u(t)$$

$$y(t) = \hat{C} \hat{x}(t)$$

Per aconseguir el model reduït d'ordre r , $r \ll n$, es realitzen les següents particions del sistema [Moore 81]:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \hat{x}(t)$$

on $\hat{A}_{11} \in R^{r \times r}$, $\hat{A}_{22} \in R^{(n-r) \times (n-r)}$, $\hat{B}_1 \in R^{r \times m}$, $\hat{C}_1 \in R^{p \times r}$. Truncant els $n-r$ estats menys controlables i observables obtenim el model reduït la matriu de transferència del qual està donada per

$$\hat{G}(s) = \hat{C}_1 (I_s - \hat{A}_{11}) \hat{B}_1$$

Les Gramianes de controlabilitat i d'observabilitat d'aquest model reduït, estable, minimal i balancejat són diagonals i iguals a

$$W_C = W_O = \Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$$

Per calcular la validesa del model reduït s'utilitza la norma sub-infinit. La norma d'una matriu és la forma d'indicar la seva grandària mitjançant un número, és a dir, el mòdul d'una matriu.

La norma sub-infinit es defineix com:

$$\|G\|_\infty = \max_{w \rightarrow (-\infty, +\infty)} |G(jw)|$$

Es pot veure que la norma de la diferència entre la funció de transferència del model reduït i la del model original està acotada per [Glover 84]:

$$\|G - \hat{G}\|_\infty \leq 2 \sum_{k=r+1}^n \sigma_k$$

i, per tant

$$\left(G(jw) - \hat{G}(jw) \right) \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i \quad \forall w$$

Capítol 3. Aplicacions reals de la reducció de sistemes mitjançant Truncament Balancejat

3.1 Introducció

No hi ha dubte que les matemàtiques són l'eina imprescindible per a l'estudi i el tractament de qualsevol sistema físic. En el moment de plantejar qualsevol anàlisi o disseny d'un sistema de caràcter físic, prèviament serà necessari preparar un model matemàtic que s'ajusti el més fidelment al sistema real a estudiar, utilitzant-ne les lleis físiques aplicables que en disposem o resultats experimentals. No obstant, en les últimes dècades estem considerant sistemes cada vegada més complexos en la majoria de les enginyeries o ciències aplicades. Sovint aquests sistemes són obtinguts interconnectant sistemes senzills del mateix àmbit, però, també de sistemes ja suficientment complexos de diversos àmbits. A conseqüència d'això, estem obtenint cada cop sistemes amb una dimensió més elevada.

En aquests casos la reducció de models pren un paper molt important en la resolució de problemes en molts àmbits malgrat que l'enginyeria és la que cada vegada és més essencial el mètode de truncament balancejat, ja que una gran quantitat de problemes de la física es poden solucionar fàcilment amb aquesta tècnica. Entre les aplicacions reals i pràctiques dels mètodes de reducció de models trobem problemes de caràcter mecànic, elèctric, fluidomecànic i també problemes de resistència de materials.

La raó d'aquest fet és que la solució d'aquest tipus de problemes depèn de gran quantitat d'elements que formen part del sistema a tractar. Generalment, obtenim un conjunt d'equacions diferencials (no necessàriament lineals ni invariants en el temps).

A partir d'aquest capítol el projecte deixa de ser purament teòric i passa a tenir un caràcter més pràctic. A continuació, estudiarem dos tipus de casos d'aplicació directe de reducció de models per truncament balancejat de més popularitat i ús.

3.2 Plantejament del problema

Per tal d'entendre i situar bé els problemes a tractar, plantejarem un parell d'exemples on es pot veure clarament la necessitat de reduir l'ordre dels sistemes. Començarem amb un cas que pertany a l'àmbit mecànic i tot seguit un altre d'àmbit elèctric.

3.2.1 Exemple mecànic

Un sistema mecànic simple de translació com el de la *figura 1*, està compostat per una massa M , un esmorteïdor que pren el paper del fregament i té una constant B i una ressort que té una constant K . S'aplica una força $f(t)$ al sistema:

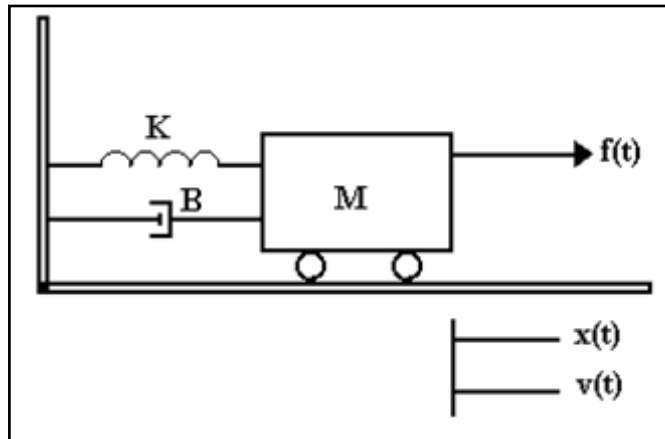


Figura 1: Sistema mecànic.

on:

M = Massa M del cos (Kg).

K = Constant K de la molla (N/m).

B = Constant d'esmoreïment B (N·s/m).

$f(t)$ = força aplicada (N).

$x(t)$ = posició respecte el temps (m).

$v(t)$ = Velocitat respecte el temps (m/s).

Per la segona llei de Newton sabem que el sumatori de forces en general (si la massa no varia respecte el temps), és la massa per l'acceleració:

$$\sum f(t) = M \cdot a(t)$$

Per tant tenim:

$$f(t) - B \cdot v(t) - K \cdot x(t) = M \cdot a(t)$$

També sabem que la derivada primera de la posició respecte el temps és la velocitat i la derivada segona és l'acceleració, llavors:

$$f(t) - B \cdot \dot{x}(t) - K \cdot x(t) = M \cdot \ddot{x}(t)$$

Això és el mateix que

$$f(t) - B \cdot v(t) - K \cdot x(t) = M \cdot \dot{v}(t)$$

Si aïllem la velocitat i l'acceleració, tenim en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f(t)$$

Solucionant aquest simple sistema d'equacions diferencials, podem obtenir tan la velocitat com l'acceleració de qualsevol element del sistema. Però, el problema està en:

Què és el que passa quan tenim n , ($n \rightarrow \infty$), elements en un sistema?

La resposta és que seguim tenint la mateixa estructura matemàtica però l'ordre de les matrius o del propi sistema és $2 \cdot n$, això es converteix en un procés molt lent, cansat i costos de resoldre a més que normalment no tenim un sol sistema sinó diversos a la vegada. Llavors si poguéssim tenir abast una eina que ens permeti reduir l'ordre d'aquest sistema, ens estalviariem molts passos matemàtics costos de resoldre la qual cosa estem estalviant temps i això pot ser un factor molt important alhora de parlar de qüestions econòmiques. El truncament balancejat ens permet reduir l'ordre conservar-ne l'estabilitat i la validesa del sistema. És cert que es comet un error a la reducció però depèn de la finalitat de l'estudi es pot donar per correcte

3.2.2 Exemple elèctric

Un circuit elèctric del tipus RLC sèrie és el que es mostra en la figura 2. Les variables d'estat del sistema són: la corrent a l'inductor i la càrrega al condensador.

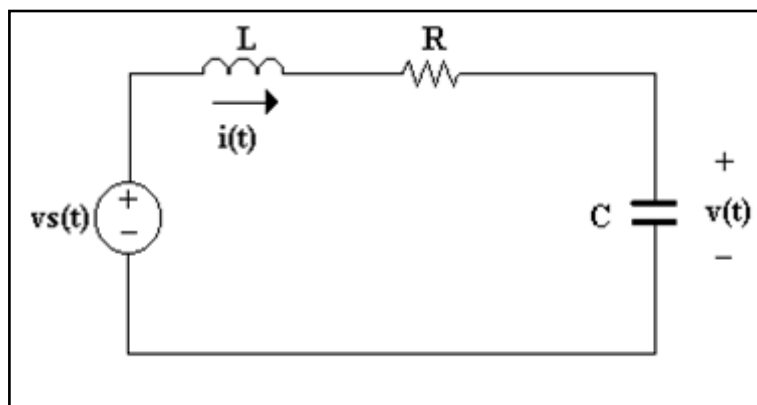


Figura 2. Sistema elèctric.

on:

L = Autoinductància de l'inductor (H)

C = Capacitància del condensador (F)

R = Resistència del resistor (Ω)

$q(t)$ = Càrrega del condensador respecte el temps (C)

$i(t)$ = Corrent a l'inductor respecte el temps (A)

$v_s(t)$ = Font de voltatge respecte el temps (V)

Al aplicar la llei de Kirchhoff per a voltatges, es troben les equacions d'estat del sistema, així:

$$L \cdot \dot{i}(t) = v_s(t) - R \cdot i(t) - \frac{q(t)}{C}$$

En forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v_s(t)$$

Estem davant del mateix problema que en el cas del sistema mecànic, com més elements posem, més elevat serà l'ordre del sistema i més difícil en serà la resolució.

Clarament es pot veure l'analogia entre el sistema mecànic i el sistema elèctric de tal forma que es pot analitzar el comportament del sistema mecànic fent la simulació del sistema elèctric. L'equivalència dels sistemes es presenta en la següent taula.

Sistema mecànic	Sistema elèctric
Massa: M	Inductància: L
Esmorteïdor: B	Resistència: R
Elasticitat: K	Inversa de la capacítancia: 1/C
Posició: $x(t)$	Carga al condensador: $q(t)$
Velocitat: $v(t)$	Corrent a l'inductor: $i(t)$

Capítol 4. Reducció d'ordre de sistemes mecànics

4.1 Introducció

Les equacions d'un sistema mecànic lineal s'escriuen construint primer un model del sistema que contingui els elements lineals connectats i, després, s'aplica la llei de moviment de Newton al diagrama de cos lliure del sistema (translació i/o rotació).

A continuació veurem dos casos de sistemes mecànics de translació i de rotació respectivament. En el primer tractarem un sistema de translació compost per un seguit de masses, amortidors i molles. Com hem dit en el capítol 3, els amortidors representen el fregament que pateix el sistema i encara que tant el fregament com les molles reals no son lineals, els podem linealitzar degut a les seves petites deformacions.

El segon exemple de sistema mecànic és el de rotació on estudiarem el cas d'una composició de discs muntats en un eix que està fix a un extrem. El sistema té moments d'inèrcia dels discs al voltant de l'eix, fregament degut a la proximitat entre la composició i una superfície determinada i per últim ressorts de torsió.

4.2 Sistema mecànic de translació

La següent figura (*figura 3*) representa un sistema mecànic on el moviment lineal d'interès és l'horitzontal. El sistema està compost per 15 masses, 15 amortidors i 15 molles. També està aplicada una força $f(t)$ a l'extrem del sistema.

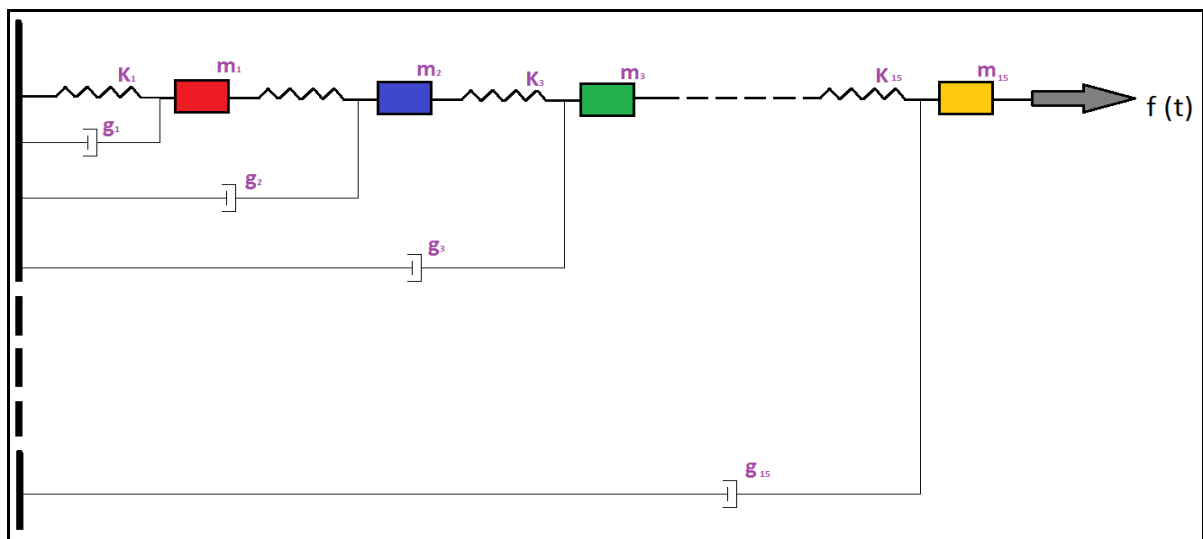


Figura 3. Sistema mecànic de translació.

On:

m = Massa del cos (Kg)

k = Constant de la molla (N/m)

g = Constant d'amortiment o fregament del sistema (N·s/m)

$f(t)$ = Força externa que s'aplica al sistema (N)

Les constants M, k i g i la variable $f(t)$ estan definides mitjançant les següents funcions on $i \in N^+$ representa la posició de cada element i pren valors entre $i = 1$ i $i = 15$.

$$M(i) = 0.6 + 0.09 \cdot \sin(i)$$

$$k(i) = 0.05 \cdot (i + 1)$$

$$g(i) = 0.1 + \text{abs}(\cos(i))$$

$$f(t) = \sin(t)$$

Aquest cas és un exemple de sistema lineal de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Posant-hi els valors corresponents i seguint les equacions següents:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1 & \dot{v}_1 &= -\frac{g_1 v_1}{m_1} - \frac{k_1 x_1}{m_1} + \frac{k_2 x_2}{m_1} \\ \dot{x}_2 &= v_2 - v_1 & \dot{v}_2 &= -\frac{g_2 v_2}{m_2} - \frac{k_2 x_2}{m_2} + \frac{k_3 x_3}{m_2} \\ \dot{x}_3 &= v_3 - v_2 & \dot{v}_3 &= -\frac{g_3 v_3}{m_3} - \frac{k_3 x_3}{m_3} + \frac{k_4 x_4}{m_3} \\ \dot{x}_4 &= v_4 - v_3 & \dot{v}_4 &= -\frac{g_4 v_4}{m_4} - \frac{k_4 x_4}{m_4} + \frac{k_5 x_5}{m_4} \\ \dot{x}_5 &= v_5 - v_4 & \dot{v}_5 &= -\frac{g_5 v_5}{m_5} - \frac{k_5 x_5}{m_5} + \frac{k_6 x_6}{m_5} \\ \dot{x}_6 &= v_6 - v_5 & \dot{v}_6 &= -\frac{g_6 v_6}{m_6} - \frac{k_6 x_6}{m_6} + \frac{k_7 x_7}{m_6} \\ \dot{x}_7 &= v_7 - v_6 & \dot{v}_7 &= -\frac{g_7 v_7}{m_7} - \frac{k_7 x_7}{m_7} + \frac{k_8 x_8}{m_7} \\ \dot{x}_8 &= v_8 - v_7 & \dot{v}_8 &= -\frac{g_8 v_8}{m_8} - \frac{k_8 x_8}{m_8} + \frac{k_9 x_9}{m_8} \\ \dot{x}_9 &= v_9 - v_8 & \dot{v}_9 &= -\frac{g_9 v_9}{m_9} - \frac{k_9 x_9}{m_9} + \frac{k_{10} x_{10}}{m_9} \\ \dot{x}_{10} &= v_{10} - v_9 & \dot{v}_{10} &= -\frac{g_{10} v_{10}}{m_{10}} - \frac{k_{10} x_{10}}{m_{10}} + \frac{k_{11} x_{11}}{m_{10}} \\ \dot{x}_{11} &= v_{11} - v_{10} & \dot{v}_{11} &= -\frac{g_{11} v_{11}}{m_{11}} - \frac{k_{11} x_{11}}{m_{11}} + \frac{k_{12} x_{12}}{m_{11}} \\ \dot{x}_{12} &= v_{12} - v_{11} & \dot{v}_{12} &= -\frac{g_{12} v_{12}}{m_{12}} - \frac{k_{12} x_{12}}{m_{12}} + \frac{k_{13} x_{13}}{m_{12}} \\ \dot{x}_{13} &= v_{13} - v_{12} & \dot{v}_{13} &= -\frac{g_{13} v_{13}}{m_{13}} - \frac{k_{13} x_{13}}{m_{13}} + \frac{k_{14} x_{14}}{m_{13}} \\ \dot{x}_{14} &= v_{14} - v_{13} & \dot{v}_{14} &= -\frac{g_{14} v_{14}}{m_{14}} - \frac{k_{14} x_{14}}{m_{14}} + \frac{k_{15} x_{15}}{m_{14}} \\ \dot{x}_{15} &= v_{15} - v_{14} & \dot{v}_{15} &= -\frac{g_{15} v_{15}}{m_{15}} - \frac{k_{15} x_{15}}{m_{15}} + f(t) \end{aligned}$$

4.3 Sistema reduït

- En primer lloc definim el sistema a reduir mitjançant el següent *script* de Matlab.

```

%Nombre de components del sistema.
%=====
n=15;

% Crear els vectors/matrius
%=====
A=zeros(2*n,2*n);
B=zeros(2*n,1);
C=zeros(1,2*n);
m=zeros(1,n);
k=zeros(1,n);
g=zeros(1,n);

% Donar valors als vectors de treball
%=====
for i=1:n
    m(i)=0.6+0.09*sin(i);
    k(i)=0.05*(i+1);
    g(i)=0.1+abs(cos(i));
end

%Definir els valors de A. El primer quadrant de la matriu A,
%és a dir, el quadrant superior esquerre, no l'actualitzem perquè només
%es compona per zeros.
%=====
%quadrant superior dret
A(1,n+1)=1;
for i=2:n
    A(i,n+i)=1;
    A(i,n+i-1)=-1;
end

%quadrant inferior dret
for i=1:n
    A(n+i,n+i)=-g(i)/m(i);
end

%quadrant inferior esquerra
for i=1:n-1
    A(n+i,i)=-k(i)/m(i);
    A(n+i,i+1)=k(i+1)/m(i);
end
A(2*n,n)=-k(n)/m(n);

%Definir el terme de control
%=====
B(2*n)=1/m(n);

%Definir el terme de sortides
%=====
C(2*n)=1;

```

Script de Matlab. Definició sistema de translació.

- En segon lloc executem l'algorisme per obtenir la matriu S i la matriu que dona la transformació de balanceig. Els algorismes estan implementats com a funcions de Matlab que poden ser cridades per a qualsevol sistema que es tingui.

```

% bal_hankel.m
% Donat un SLC (A,B,C) ens retorna la transformació balancejada x=Ty,
% juntament amb els valors singulars de Hankel ordenats de manera
% decreixent en el vector S. Aquest algorisme també comprova
% l'estabilitat de A i (per n<=6) la controlabilitat de (A,B) i la
% observabilitat de (A,C). Se sap que A,B,C tenen dimensions
% compatibles.

function [T,s]= bal_hankel(A,B,C)

    n=size(A,1); % Ordre del sistema
    hA=sort(real(eig(A)), 'descend'); % Ordena els valors propis de A
    descendent ment

    if (hA(1)>= 0) % Comprova l'estabilitat de A

        error('Matriu A no és Hurwitz a bal_hankel(A,B,C)');
    else
    end

    CM=B; % inicialitza la matriu de controlabilitat.
    OM=C; % inicialitza la matriu d'observabilitat.
    Ba=B; % parell de vectors auxiliars.
    Ca=C;

    for k=1:n-1
        Ba=A*Ba;
        CM=cat(2,CM,Ba);
    end

    if (rank(CM)<n && n<=6)
        error('el parell(A,B) no és controlable a bal_hankel(A,B,C)');
    else
    end

    for k=1:n-1
        Ca=Ca*A;
        OM=cat(1,OM,Ca);
    end

    if (rank(OM)<n && n<=6)
        error('el parell(A,C) no és observable a bal_hankel(A,B,C)');
    else
    end

    X=(lyapchol(A,B*B'))';% resol la segona equació de Lyapunov:
    A Wc + Wc A'+ BB'=0 i Lc

    Y=(lyapchol(A',C'*C))';% resol la primera equació de Lyapunov: A'
    Wo+Wo A +C'*C=0 i Lc

    [U,S,V]=svd(Y'*X); % svd de Y'X

```

```

T=X*v/sqrt(S); % obtenció de la transformació balancejada. La /
indica operar amb la inversa

s=diag(S); % els valors singulars de Hankel.
end

```

Algoritme 1. "bal_hankel.m"

Matriu S d'on traurem els r estats més observables i controlables:

$$S = \begin{bmatrix} 0.655831437383975 \\ 0.455015655618540 \\ 0.190912055586741 \\ 0.151353173405050 \\ 0.111704462340690 \\ 0.044480567625554 \\ 0.007945818293769 \\ 0.006239625046398 \\ 0.003143704697589 \\ 0.000513468778623 \\ 0.000389670809867 \\ 0.000114317124419 \\ 0.000021215669040 \\ 0.000013692301274 \\ 0.000008961833023 \\ 0.000000385788878 \\ 0.000000048496836 \\ 0.000000023579411 \\ 0.000000020713873 \\ 0.000000006784860 \\ 0.000000004917562 \\ 0.000000000289960 \\ 0.000000000045761 \\ 0.000000000002773 \\ 0.000000000002446 \\ 0.000000000000208 \\ 0.000000000000022 \\ 0.000000000000015 \\ 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 \end{bmatrix}$$

El valor de r determina la precisió del sistema reduït. En aquest cas, prendrem els 6 primers valors de la matriu S .

$$r = 6$$

- En tercer lloc executem l'algoritme per obtenir les matrius $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ reduïdes:

```

% reduction.m
% Donat un SLC (A,B,C), una transformació T, i un integral r, ens
% retorna un sistema reduït obtingut truncant per les r coordenades
% transformades.
% Pot ser utilitzat per qualsevol T.

function [rtA,rtB,rtC]=reduction(A,B,C,T,r)
    n=size(A,1); % ordre del sistema
    m=size(B,2); % nombre de controls
    p=size(C,1); % nombre de sortides
    if (r>n)
        error('... està intentant donar-li al sistema més estats dels
que té. ');
    else
        end
        tA=T\A*T; % defineix les noves coordenades : ^A
        tB=T\B; % defineix les noves coordenades : ^B
        tC=C*T; % defineix les noves coordenades : ^C
        rtA=tA(1:r,1:r); % agafa els r valors que l'usuari li diu de ^A
        rtB=tB(1:r,1:m); % agafa els r valors que l'usuari li diu de ^B
        rtC=tC(1:p,1:r); % agafa els r valors que l'usuari li diu de ^C
    end

```

Algoritme 2. "reduction.m"

Matrius $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ reduïdes:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1.8549 & -0.8684 & 1.1982 & -0.3035 & -0.1567 & -0.2175 \\ 0.8684 & -0.0137 & 0.0618 & -0.0578 & -0.0108 & -0.0191 \\ -1.1982 & 0.0618 & -0.3341 & 1.4180 & 0.0645 & 0.1293 \\ -0.3035 & 0.0578 & -1.4180 & -0.0815 & -0.2165 & -0.1253 \\ 0.1567 & -0.0108 & 0.0645 & 0.2165 & -0.0134 & -0.0298 \\ 0.2175 & -0.0191 & 0.1293 & 0.1253 & -0.0298 & -0.0817 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1.0272 \\ -0.0736 \\ 0.2352 \\ 0.1034 \\ -0.0360 \\ -0.0561 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [1.5598 \quad 0.1118 \quad -0.3571 \quad 0.1571 \quad 0.0547 \quad 0.0853]$$

- Per últim definim el valor de l'entrada $u(t)$ i l'interval de temps t_f i executem l'algorisme que ens retorna una gràfica amb els valors de la velocitat lineal de la última massa tant del sistema original com del reduït.

$$u = \sin(t)$$

$$t_f = 30s$$

```

% red_sim.m
% Donat un SLC(A,B,C), i el reduït i balancejat (rtA,rtB,rtC),
% retorna les corresponents sortides per una u(t) donada amb
% condicions inicials zero, en un interval de temps [0,tf].

function red_sim(A,B,C,rtA,rtB,rtC,tf,u)

    figure;
    n=size(A,1); % ordre del sistema
    rn=size(rtA,1); % ordre del sistema reduït
    m=size(C,1); % nombre de sortides

    f=@(t,x) A*x+B*u(t);
    rf=@(t,x) rtA*x+rtB*u(t);

    [T,X]=ode45(f,[0,tf],zeros(n,1)); % integra el sistema original

    [rT,rX]=ode45(rf,[0,tf],zeros(rn,1)); % integra el sistema reduït

    for k=1:m
        subplot(m,1,k); % retorna la gràfica.
        hold on;
        plot(T,(C(k,:))*X','b')
        plot(rT,(rtC(k,:))*rX','r')
        title(['y(',int2str(k),') ', 'amb ordre reduït = ',int2str(rn)], 'Color','r')
    end

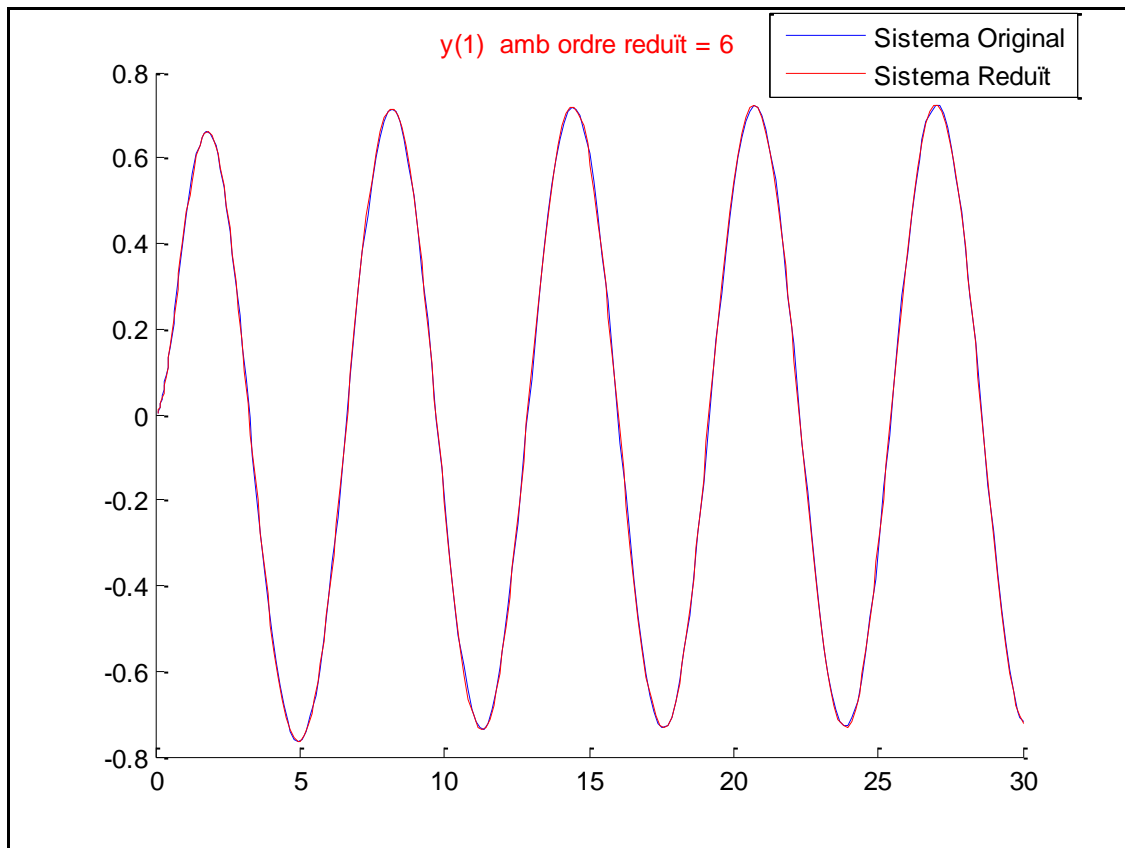
end
end

```

Algorisme 3. "red_sim.m"

4.4 Comparació de resultats

Amb l'ajuda de la següent gràfica podem veure els resultats tan del sistema original com del sistema reduït.



Gràfica 1. Comparació sistema mecànic de translació.

La gràfica ens mostra el resultat de la velocitat lineal de l'última massa del sistema executat en un interval de temps de 30 segons. Tal i com diu la llegenda, la línia blava indica la velocitat lineal de la última massa respecte el temps mitjançant el sistema original d'ordre 30 i la línia vermella també ens indica la velocitat lineal respecte el temps de la última massa del sistema però aquesta vegada, el sistema és d'ordre 6. Es pot veure que realment el mètode de truncament balancejat s'apropa molt al sistema original sense reducció. Depèn dels r valors que s'agafen de la matriu S , l'error comés en la reducció és més o menys gran. La decisió de quin serà el valor de r depèn de la precisió i de les toleràncies que ens venen marcades. No obstant, es solen agafar els r valors més propers.

Per comprovar la validesa del sistema reduït apliquem la norma sub-infinit:

$$\left(G(jw) - \hat{G}(jw) \right) \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i \quad \forall w$$

```

% Aplicació de la norma sub-infinit
%=====

sys=ss(A,B,C,0); % Crea un espai d'estats Sistema original
rsys=ss(rtA,rtB,rtC,0);% Crea un espai d'estats Sistema reduït
G=tf(sys); % Calcula la funció de transferència Sistema original
rG=tf(rsys); % Calcula la funció de transferència Sistema reduït
V=norm(G-rG,inf); % Norma sub-infinit
W=2*sum(S(7:30)); % Condició validesa sistema reduït

```

Script de Matlab. Comprovació de la norma L_∞ .

En aquest cas:

$$V = \max \left(G(j\omega) - \hat{G}(j\omega) \right)$$

$$W = 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$$

$$V \leq W$$

Resultats de V i W :

$$V = 0.0067$$

$$W = 0.0368$$

Conclusió final: El model reduït compleix la condició de validesa.

4.5 Sistema mecànic de rotació

La següent figura (*figura 4*) representa un sistema mecànic on el moviment d'interès és el de rotació. El sistema està compost per 26 discs que giren al voltant d'un eix fix a un extrem, 26 constant de ressort de torsió i degut a que el mecanisme està en contacte amb 26 superfícies diferents, tenim 26 constants de fregament. S'aplica un moment $T(t)$ a l'últim disc tal i com mostra la figura 4:

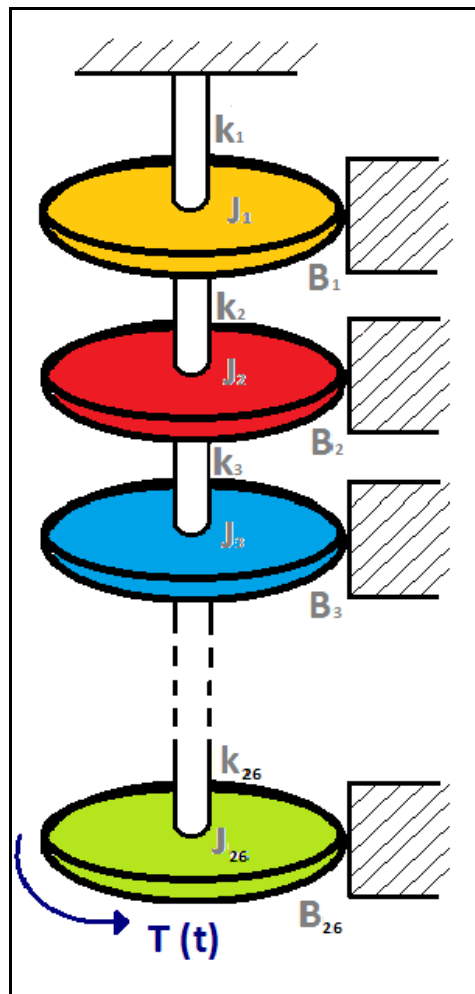


Figura 4. Sistema mecànic de rotació

on:

k = Constant de torsió ($N \cdot m$)

B = Constant de fregament ($N \cdot s/m$)

J = Moment d'inèrcia del disc ($kg \cdot m^2$)

$T(t)$ = Moment extern que s'aplica al sistema ($kg \cdot m^2/s$)

Les constants J, k i B i la variable $T(t)$ estan definides mitjançant les següents funcions on $i \in N^+$ representa la posició de cada element i pren valors entre $i = 1$ i $i = 26$.

$$\begin{aligned} J(i) &= 0.9 + 0.01 \cdot \sin(i) \\ k(i) &= 0.06 \cdot (i+1) \\ B(i) &= 0.1 + \text{abs}(\cos(i)) \\ T(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

L'equació del moment al voltant de l'eix és la següent:

$$T(t) - B \cdot \dot{\theta} - k \cdot \theta = J \cdot \ddot{\theta}$$

Degut a la equivalència entre el sistema de translació i el de rotació s'utilitza el mateix mètode d'interpretació i de resolució que l'exemple de translació que hem tractat abans només canviant-ne els paràmetres. Escrivim les equacions que defineixen el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\frac{b_1 \omega_1}{J_1} - \frac{k_1 \theta_1}{J_1} + \frac{k_2 \theta_2}{J_1} \\ \dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 - \omega_1 \\ \dot{\theta}_3 &= \omega_3 - \omega_2 \\ \dot{\theta}_4 &= \omega_4 - \omega_3 \\ \dot{\theta}_5 &= \omega_5 - \omega_4 \\ \dot{\theta}_6 &= \omega_6 - \omega_5 \\ \dot{\theta}_7 &= \omega_7 - \omega_6 \\ \dot{\theta}_8 &= \omega_8 - \omega_7 \\ \vdots & \\ \dot{\theta}_{26} &= \omega_{26} - \omega_{25} \\ \dot{\omega}_1 &= -\frac{b_1 \omega_1}{J_1} - \frac{k_1 \theta_1}{J_1} + \frac{k_2 \theta_2}{J_1} \\ \dot{\omega}_2 &= -\frac{b_2 \omega_2}{J_2} - \frac{k_2 \theta_2}{J_2} + \frac{k_3 \theta_3}{J_2} \\ \dot{\omega}_3 &= -\frac{b_3 \omega_3}{J_3} - \frac{k_3 \theta_3}{J_3} + \frac{k_4 \theta_4}{J_3} \\ \dot{\omega}_4 &= -\frac{b_4 \omega_4}{J_4} - \frac{k_4 \theta_4}{J_4} + \frac{k_5 \theta_5}{J_4} \\ \dot{\omega}_5 &= -\frac{b_5 \omega_5}{J_5} - \frac{k_5 \theta_5}{J_5} + \frac{k_6 \theta_6}{J_5} \\ \dot{\omega}_6 &= -\frac{b_6 \omega_6}{J_6} - \frac{k_6 \theta_6}{J_6} + \frac{k_7 \theta_7}{J_6} \\ \dot{\omega}_7 &= -\frac{b_7 \omega_7}{J_7} - \frac{k_7 \theta_7}{J_7} + \frac{k_8 \theta_8}{J_7} \\ \vdots & \\ \dot{\omega}_8 &= -\frac{b_8 \omega_8}{J_8} - \frac{k_8 \theta_8}{J_8} + \frac{k_9 \theta_9}{J_8} \\ \vdots & \\ \dot{\omega}_{26} &= -\frac{b_{26} \omega_{26}}{J_{26}} - \frac{k_{26} \theta_{26}}{J_{26}} + T(t) \end{aligned}$$

4.6 Sistema reduït

- En primer lloc definim el sistema a reduir mitjançant el següent *script* de Matlab:

```

%Nombre de components per fer els vectors i matrius.
%=====
n=26;

%Crear els vectors/matrius
%=====
A=zeros(2*n,2*n);
B=zeros(2*n,1);
C=zeros(1,2*n);
j=zeros(1,n);
k=zeros(1,n);
b=zeros(1,n);

%Donar valors als vectors de treball
%=====
for i=1:n
    j(i)=0.9+0.01*sin(i);
    k(i)=0.06*(i+1);
    b(i)=0.1+abs(cos(i));
end

%Definir els valors de A. El primer quadrant de la matriu A,
%és a dir, el quadrant superior esquerre, no l'actualitzem perquè
%només es compona per zeros.
%=====
% quadrant superior dret
A(1,n+1)=1;
for i=2:n
    A(i,n+i)=1;
    A(i,n+i-1)=-1;
end

% quadrant inferior dret
for i=1:n
    A(n+i,n+i)=-b(i)/j(i);
end

% quadrant inferior esquerra
for i=1:n-1
    A(n+i,i)=-k(i)/j(i);
    A(n+i,i+1)=k(i+1)/j(i);
end
A(2*n,n)=-k(n)/j(n);

%Definir el terme de control
%=====
B(2*n)=1/j(n);

%Definir el terme de sortides
%=====
C(2*n)=1;

```

Script de Matlab. Definició sistema de rotació.

El valor de r determina la precisió del sistema reduït. En aquest cas, farem dos reduccions del sistema per tal de mostrar les diferències.

$$r = 2$$

$$r = 7$$

- En tercer lloc executem l'algoritme "*reduction.m*" per obtenir les matrius \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} reduïdes:

$r = 2$:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1.5708 & -1.3311 \\ 1.3311 & -0.0533 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1.0408 \\ -0.1545 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [1.1467 \quad 0.1702]$$

$r = 7$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1.5708 & -1.3311 & 0.9904 & -0.2389 & 0.0741 & -0.0807 & 0.2340 \\ 1.3311 & -0.0533 & 0.1316 & -0.0428 & 0.0153 & -0.0200 & 0.0499 \\ -0.9904 & 0.1316 & -0.4291 & 0.1664 & -0.0671 & 0.1087 & -0.2254 \\ 0.2389 & -0.0428 & 0.1664 & -0.0759 & 0.0356 & -0.0880 & 0.1253 \\ -0.0741 & 0.0153 & -0.0671 & 0.0356 & -0.0203 & 0.2631 & -0.0771 \\ -0.0807 & 0.0200 & -0.1087 & 0.0880 & -0.2631 & -0.0341 & 1.1564 \\ -0.2340 & 0.0499 & -0.2254 & 0.1253 & -0.0771 & -1.1564 & -0.3028 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1.0408 \\ -0.1545 \\ 0.2556 \\ -0.0714 \\ 0.0236 \\ 0.0276 \\ 0.0754 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [1.1467 \quad 0.1702 \quad -0.2817 \quad 0.0787 \quad -0.0260 \quad 0.0304 \quad -0.0831]$$

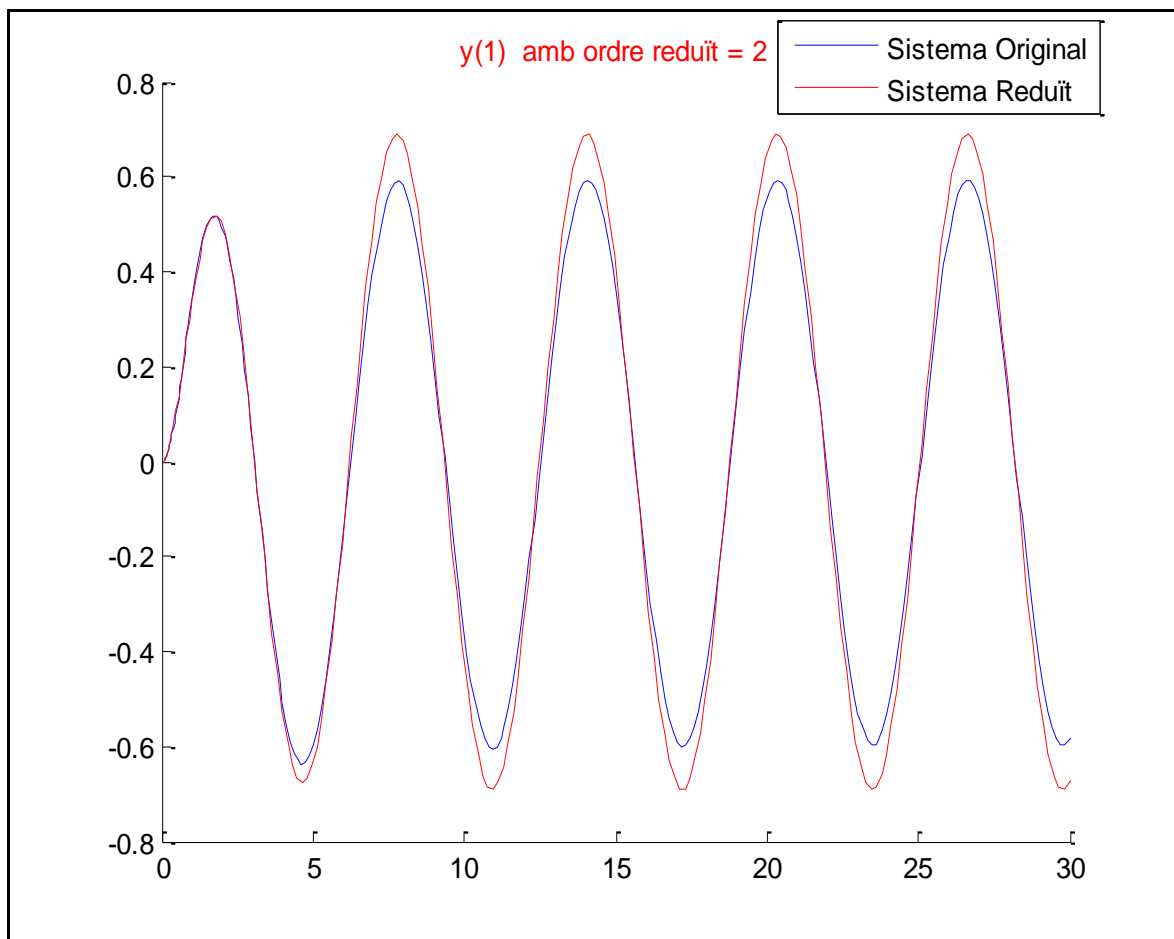
- Per últim definim el valor de l'entrada $u(t)$ i l'interval de temps t_f i executem l'algoritme "red_sim.m" que ens retorna una gràfica amb els valors de la velocitat angular de l'últim disc tant del sistema original com del reduït.

$$u = \sin(t)$$

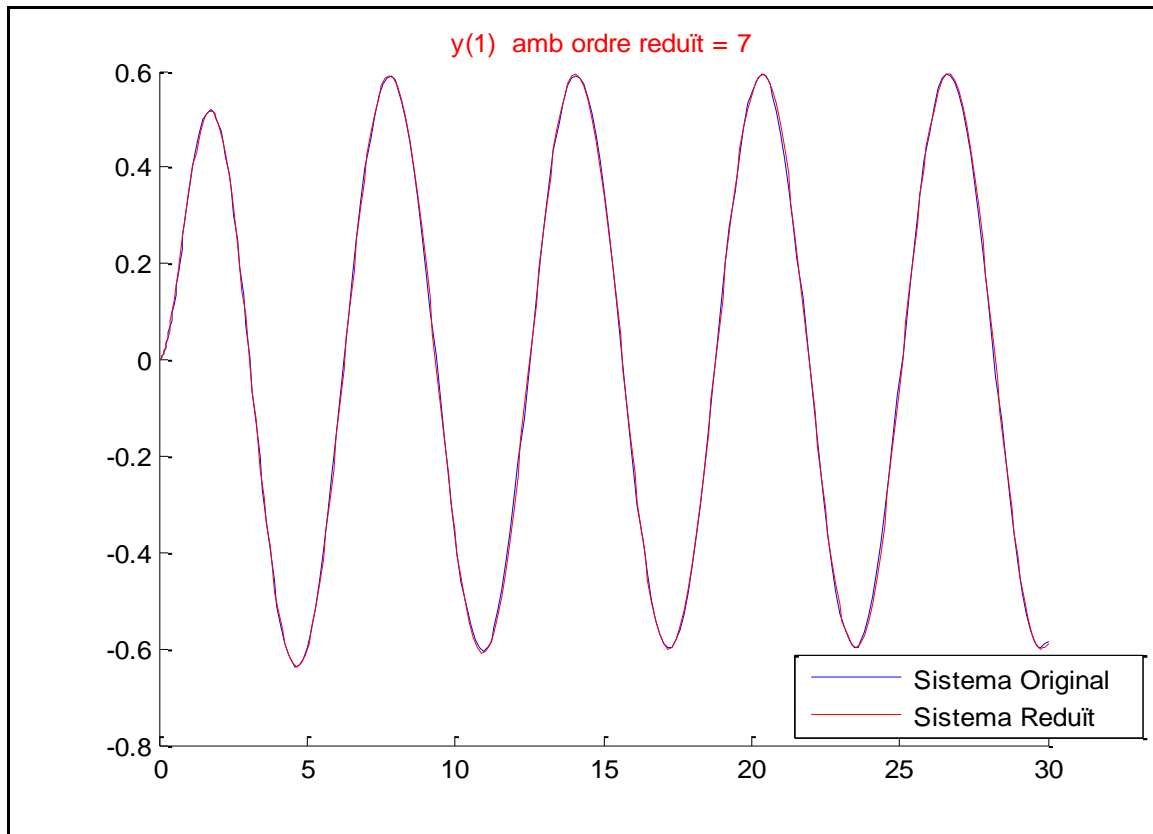
$$t_f = 30s$$

4.7 Comparació de resultats.

Mitjançant la següent gràfica es poden contrastar els resultats obtinguts per tots dos sistemes, l'original i els reduïts a $r = 2$ i $r = 7$.



Gràfica 2. Comparació sistema mecànic de rotació d'ordre 2.



Gràfica 3. Comparació sistema mecànic de rotació d'ordre 7.

Igual que l'exemple de translació, s'ha executat el sistema durant 30 segons i s'ha obtingut la velocitat angular de l'últim disc tant del sistema original d'ordre 52 com dels sistema reduïts d'ordre 2 i 7 respectivament. Com es pot veure, la decisió de r és molt important ja que ens determina la precisió del sistema reduït. Per comprovar que es compleix la norma sub-infinit, executem "Comprovació de la norma L_∞ " i obtenim:

$$V = 0.0079$$

$$W = 0.0282$$

Efectivament es compleix que

$$\left(G(j\omega) - \hat{G}(j\omega) \right) \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$$

on:

$$V = \max \left(G(j\omega) - \hat{G}(j\omega) \right)$$

$$W = 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$$

$$V \leq W$$

Capítol 5. Reducció d'ordre de sistemes elèctrics

5.1 Introducció

En el cas de circuits elèctrics, i al no ser aquest un sistema mecànic, termes com la força, la velocitat o el desplaçament manquen de sentit. No obstant les semblances en el comportament d'aquest sistema elèctric amb els anteriors sistemes mecànics és tan gran, com quedarà de manifest a l'establir l'equació diferencial que el descriu, que l'estudi dels tres sistemes mereix ser abordat conjuntament

Igual que un sistema mecànic, les equacions d'un sistema elèctric s'escriuen construint primer un model del sistema que contingui els elements connectats, bé en sèrie, en paral·lel o un sistema mixt, i, després, s'apliquen les lleis corresponents. En aquest projecte ens basarem en la llei d'Ohm generalitzada (s'entén que és la llei matemàtica que relaciona les variables tensió/corrent, per un element) i les dues lleis de Kirchhoff. Així els sistemes elèctrics podran venir donats com un conjunt d'equacions diferencials que podran transformar-se sense problemes en un sistema d'equacions d'estat.

5.2 Sistema elèctric

Considerem un exemple de sistema elèctric RLC tradicional on tenim 50 unitats de cada element:

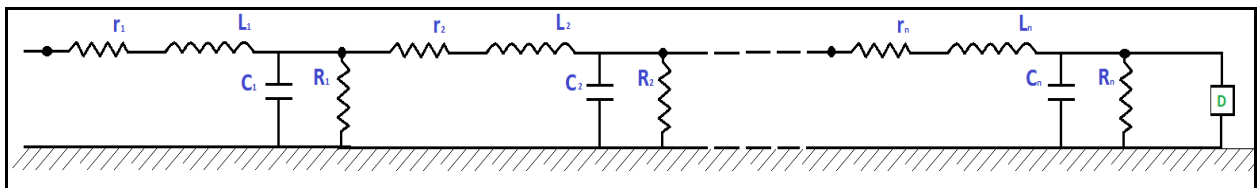


Figura 5. Sistema elèctric.

on:

V = voltatge o tensió entre els pols (V)

r = Resistència (Ω)

L = Inductància (H)

C = Condensador (F)

R = Resistència (Ω)

Per tal de facilitar la comprensió i la interpretació del sistema i de les equacions, es dibuixa el sistema elèctric anterior amb les corresponents entrades i sortides tan de la corrent com del voltatge pels diferents elements que componen el sistema.

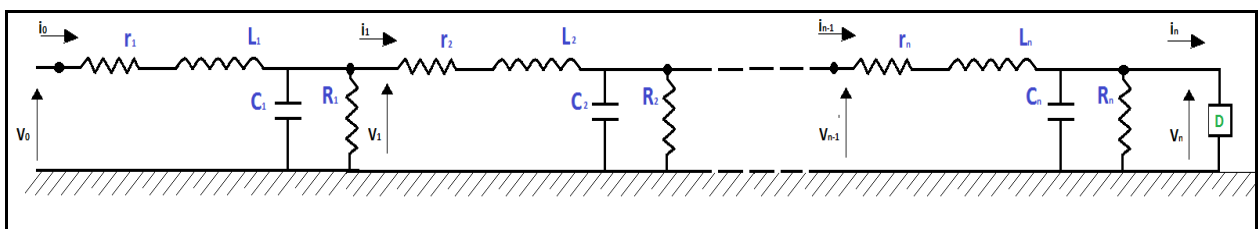


Figura 6. Sistema elèctric

Abans d'assignar valors a les variables repassem una mica la obtenció de les equacions d'estat que es requereixen per la resolució del sistema.

En primer lloc tenim les lleis de Kirchoff:

$$i_{n-1} = i_n + i_{R_n} + i_{C_n}$$

$$V_{n-1} = V_n + r_n \cdot i_{n-1} + L_n \cdot \frac{di_{n-1}}{dt}$$

Per la llei d'Ohm sabem que $i_{R_n} = \frac{V_n}{R_n}$ i $i_{C_n} = C_n \frac{dV_n}{dt}$, substituint en la primera equació, aïllant $C_n \frac{dV_n}{dt}$ també de la primera equació i $L_n \cdot \frac{di_{n-1}}{dt}$ de la segona equació obtenim les dues equacions d'estat.

$$C_n \frac{dV_n}{dt} = i_{n-1} - \frac{V_n}{R_n} - i_n$$

$$L_n \frac{di_{n-1}}{dt} = -r_n \cdot i_{n-1} - V_n + V_{n-1}$$

que escrites en forma matricial arribem a:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{n-1} \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r_n}{L_n} & -\frac{1}{L_n} \\ \frac{1}{C_n} & -\frac{1}{C_n R_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{n-1} \\ V_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{n-1} \\ i_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_{n-1} \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{n-1} \\ V_n \end{pmatrix}$$

Ara sí donem valors als paràmetres i seguim amb aquest mateix exemple de circuit RLC. Les constants R, r, L i C i les variables $V(t)$ i $i(t)$ estan definides mitjançant les següents funcions on $i \in \mathbb{N}^+$ representa la posició de cada element i pren valors entre $i = 1$ i $i = 50$.

$$L(i) = 0.2 + 0.05 \cdot \sin(i)$$

$$C(i) = 0.2 \cdot (i+1)$$

$$R(i) = 0.5 \cdot (i+1)$$

$$r(i) = 0.1 + \text{abs}(\cos(i))$$

$$D = 1$$

$$V_0(t) = \sin(t)$$

Seguint amb les equacions d'estat anteriors escrivim les noves equacions ja aïllant les variables de la corrent i el voltatge:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_0 &= -\frac{r_1}{L_1} i_0 - \frac{1}{L_1} V_1 + \frac{1}{L_1} V_0 \\ \frac{d}{dt} V_1 &= \frac{1}{C_1} i_0 - \frac{1}{C_1 R_1} V_1 + \frac{1}{C_1} i_1 \\ \frac{d}{dt} i_1 &= -\frac{r_2}{L_2} i_1 - \frac{1}{L_2} V_2 + \frac{1}{L_2} V_1 \\ \frac{d}{dt} V_2 &= \frac{1}{C_2} i_1 - \frac{1}{C_2 R_2} V_2 + \frac{1}{C_2} i_2 \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} i_{49} &= -\frac{r_{49}}{L_{50}} i_{49} - \frac{1}{L_{50}} V_{50} + \frac{1}{L_{50}} V_{49} \\ \frac{d}{dt} V_{50} &= \frac{1}{C_{50}} i_{49} - \frac{1}{C_{50} R_{50}} V_{50} + \frac{1}{C_{50}} \frac{V_{50}}{D} \end{aligned}$$

Finalment la notació matricial queda de la següent manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_0 \\ V_1 \\ i_1 \\ V_2 \\ i_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ i_{49} \\ V_{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & -\frac{r_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} & -\frac{r_3}{L_3} & -\frac{1}{L_3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} & -\frac{1}{C_3 R_3} & -\frac{1}{C_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{50}} & -\frac{r_{50}}{L_{50}} & -\frac{1}{L_{50}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{50}} & -\frac{1}{C_{50}} \left(\frac{1}{R_{50}} + \frac{1}{D} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_0 \\ V_1 \\ i_1 \\ V_2 \\ i_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ i_{49} \\ V_{50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} i_0 \\ V_1 \\ i_1 \\ V_2 \\ i_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ i_{49} \\ V_{50} \end{bmatrix}$$

5.3 Sistema reduït

- En primer lloc definim el sistema a reduir mitjançant el següent *script* de Matlab:

```

% Nombre de components per fer els vectors i matrius.
%=====
n=50;

% Crear els vectors/matrius
%=====
A=zeros(2*n,2*n);
B=zeros(2*n,1);
C=zeros(1,2*n);
l=zeros(1,2*n);
c=zeros(1,2*n);
r=zeros(1,2*n);
R=zeros(1,2*n);

% Donar valors als vectors de treball
%=====
for i=1:2*n
    l(i)=0.2+0.05*sin(i);
    c(i)=0.2*(i+1);
    R(i)=0.5*(i+1);
    r(i)=0.1+abs(cos(i));
    d=1;
end

%Inicialitzar els primers valors d'A, com que la primera fila de A és
%diferent que les altres, la definim sola.
%=====
    A(1,1)=-r(1)/l(1);
    A(1,2)=-1/l(1);

%Definir la resta de valors de la matriu A, la primera funció omple
%les files imparells: 3,5,7,9,... i la segona funció les files
%parells: 2,4,6,8,...
%=====
    for i=3:2:2*n-1;
        A(i,i-1)=1/l((1/2)*(i+1));
        A(i,i)=-r((1/2)*(i+1))/l((1/2)*(i+1));
        A(i,i+1)=-1/l((1/2)*(i+1));
    end

    for i=2:2:2*n-2;
        A(i,i-1)=1/c(i/2);
        A(i,i)=-1/c(i/2)*R(i/2);
        A(i,i+1)=-1/c(i/2);
    end

%Com que la última fila es diferent que les anteriors ja que
%s'afegeix una nova variable (d), es defineix com:
%=====
    A(2*n,2*n-1)=1/c(n);
    A(2*n,2*n)=(-1/c(n))*((1/R(n))+(1/d));

```


En aquest cas, també farem dos reduccions del sistema per tal de mostrar les diferències.

$$r = 1$$

$$r = 4$$

- En tercer lloc executem l'algoritme "*reduction.m*" per obtenir les matrius $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ reduïdes:

$r = 1$:

$$\hat{A} = [-4.7860]$$

$$\hat{B} = [-1.0535]$$

$$\hat{C} = [-4.3521]$$

$r = 4$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -4.7860 & -3.5067 & -0.9026 & -0.5390 \\ 3.5067 & -4.4634 & -4.6178 & -1.3834 \\ -0.9026 & 4.6178 & -0.9981 & -1.5096 \\ 0.5390 & -1.3834 & 1.5096 & -1.2459 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} -1.0535 \\ 0.3423 \\ -0.1040 \\ 0.0586 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [-4.3521 \quad -1.4140 \quad -0.4296 \quad -0.2421]$$

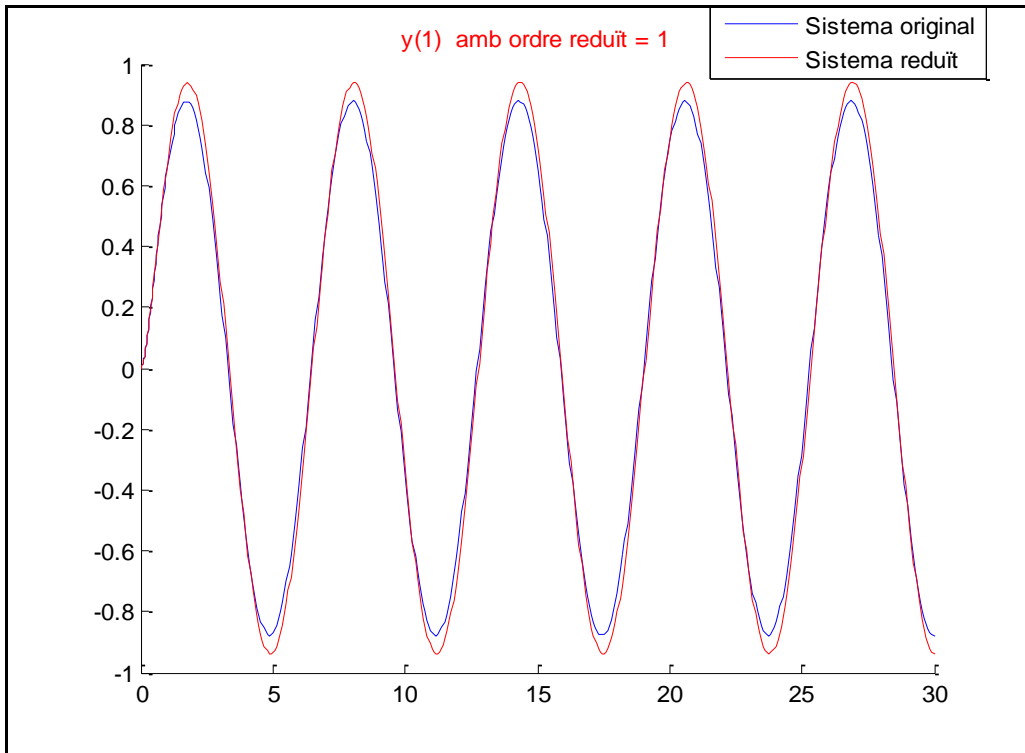
- Per últim definim el valor de l'entrada $u(t)$ i l'interval de temps t_f i executem l'algoritme "*red_sim.m*" que ens retorna una gràfica amb els valors de la intensitat i_0 tant del sistema original com dels reduïts.

$$u = \sin(t)$$

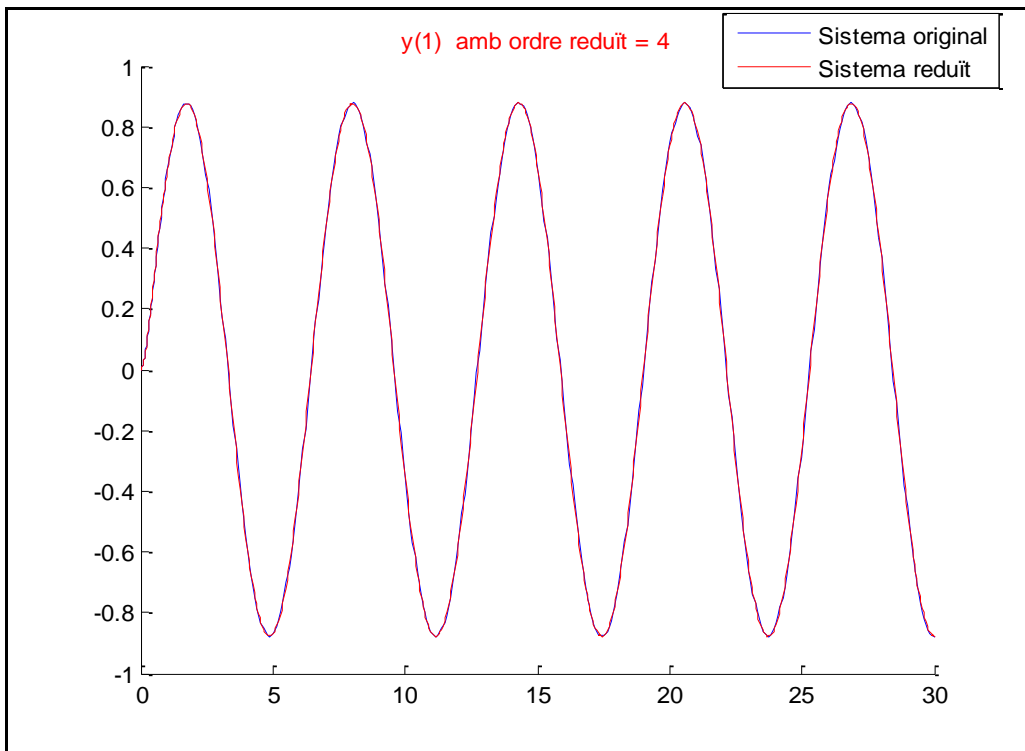
$$t_f = 30s$$

5.4 Comparació de resultats.

Mitjançant la següent gràfica es poden comparar els resultats obtinguts per tots dos sistemes, l'original i els reduïts a $r = 1$ i $r = 4$.



Gràfica 5. Comparació sistema elèctric RLC.



Gràfica 6. Comparació sistema elèctric RLC.

La gràfica mostra el valor de la corrent (i_θ) respecte el temps utilitzant tan el sistema original com els reduïts en un interval de temps de 30 segons. El mètode original és d'ordre 100, en canvi, els reduïts són de 1 i 4 respectivament. Podem veure que el primer valor de la matriu S guarda la màxima energia del sistema i per tant, en aquest cas, amb un únic valor ens apropem bastant al sistema original d'ordre 100.

Fem la comprovació de la reducció i obtenim:

$$V = 0.1539$$

$$W = 0.6806$$

Efectivament es compleix que

$$\left(G(j\omega) - \hat{G}(j\omega) \right) \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$$

On

$$V = \max \left(G(j\omega) - \hat{G}(j\omega) \right)$$

$$W = 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$$

$$V \leq W$$

Conclusions

La importància de la reducció de models al món de la tecnologia, ha fet que sigui un dels punts més destacats i necessaris per seguir la competència del mercat. Resoldre una necessitat tecnològica d'una manera precisa, ràpida i econòmica és l'objectiu pel qual vetllen totes les indústries. Mitjançant aquest projecte s'ha estudiat la manera de convertir un sistema matemàtic complex i costós de resoldre a un altre molt més senzill i ràpid de solucionar a través del mètode de truncament balancejat.

El truncament balancejat es basa en trobar un sistema de coordenades apropiat per l'espai d'estats, en el qual les gramianes de controlabilitat i d'observabilitat del sistema $W_C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $W_O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ respectivament, són diagonals i iguals. És més, el mètode de truncament balancejat explota el fet de que les gramianes del sistema, obtingudes com la solució de les equacions de Lyapunov, permeten una interpretació de l'energia d'estats, on $W_C(x)$ és la mínima energia requerida per conduir el sistema des de l'estat inicial en $t = -\infty$ fins l'estat x en $t = 0$. Per una altra banda, $W_O(x)$ és la màxima energia obtinguda mitjançant l'observació de la sortida amb estat inicial x fins l'estat $x_f = 0$ sota entrada nul·la.

En resum, és possible obtenir un model d'ordre reduït que approximi a l'original mitjançant l'eliminació dels estats menys controlables o menys observables, mantenint els estats que contenen la major part de l'energia, ja que aquests són els que estan més implicats en la transferència d'energia des de les entrades a les sortides. Això és el que s'aconsegueix mantenint els estats corresponents als HSVs de major valor.

Com a avantatges i inconvenients del truncament balancejat, es que per una banda, el model reduït conserva importants propietats del sistema original com l'estabilitat i la passivitat a més de ser molt més simple i ràpid tan d'interpretar com d'executar. Però per l'altra banda, és més inexacte malgrat que, proporciona una cota de l'error introduït pel model reduït, la qual cosa permet desenvolupar mètodes adaptatius que redueixen la dimensió del sistema en funció d'un marge d'error requerit. El dissenyador haurà de conèixer l'impacte que aquesta reducció produeix sobre el comportament del sistema, per poder avaluar el tipus i quantitat de reducció en cada cas atenent als límits d'error dintre de la tolerància permesa.

Pel que fa a la part pràctica d'aquest projecte s'ha vist el paper que pren la reducció de models i especialment el mètode de truncament balancejat a l'enginyeria, ja que aquesta tècnica és fonamental per a reduir els requeriments de hardware, simplificar el disseny de controladors, en els que apareix la resolució de problemes numèrics particularment costosos, i en alguns casos, aconseguir un model reduït adequat per a aplicacions en temps real.

Les aplicacions del mètode del truncament balancejat són diverses, malgrat que en aquest projecte només s'ha estudiat l'àmbit mecànic i l'elèctric. Aquesta tècnica es pot expandir perfectament en problemes de la fluidomecànica, la resistència de materials i la termodinàmica i també a la hora de dissenyar dispositius electrònics, on és necessari especificar la posició i les connexions entre els circuits. Utilitzant aquest mateix cas dels dispositius electrònics, es pot prendre com a exemple els telèfons mòbils on en un espai físic cada dia reduït s'integren una quantitat major de funcionalitats (telèfon pròpiament dit, càmera de fotos, GPS, etc.) i les seves components han de respectar diverses restriccions i qualitats desitjables (consum i transmissió d'energia, camp magnètic, interferències...).

En definitiva i com a conclusió general, la reducció de models pot ser de vital importància, entre altres, en les següents circumstàncies:

- Quan els recursos disponibles no permeten operar amb sistemes de gran dimensió (per exemple, en dispositius encastats amb una memòria limitada).
- Quan l'aplicació imposa un temps de resposta màxim que és impossible d'assolir si s'opera amb sistemes de gran dimensió (per exemple, en entorns que operen en temps real).

I llavors les principals raons per obtenir models d'ordre reduït són les següents:

- Minimitzar el cost computacional en els problemes de simulació.
- Reduir l'esforç computacional en el disseny de controladors numèricament més eficients

L'aproximació usual per obtenir models d'ordre reduït sol ser la mateixa per a sistemes en temps continu que per a sistemes en temps discret. Ens hem referit normalment al primer tipus de sistemes, ja que en la majoria dels casos les conclusions són extensibles sense excessiva dificultat per al cas de temps discret.

Com a conclusions específiques obtingudes de les simulacions que s'han estudiat en el projecte, veiem que:

- I. La velocitat amb la que decreixen els valors de la matriu S depenen dels paràmetres del sistema a estudiar. S'ha vist que en l'exemple elèctric els valors de la matriu S han decregut molt ràpidament, i en canvi, en els dos exemples mecànics s'han anat disminuint més lentament. Això és degut únicament als paràmetres que s'han assignat als sistemes.
- II. El valor del nou ordre del sistema, r , marca la precisió del sistema reduït. Òbviament, com més gran és r més ens apropem al sistema original però, es tracta de treballar amb el mínim valor de r i el màxim grau de precisió. Per aconseguir aquest objectiu, s'agafen els primers r valors més propers entre ells, de manera que entre el valor r i el $r+1$ hi hagi un salt gran, si això és possible.
- III. La comprovació de la validesa dels sistemes reduïts ha sigut satisfactòria en tots 3 exemples plantejats. La qual cosa demostra l'eficàcia i l'eficiència del mètode de truncament balancejat.

Com a conclusió més general, hem pogut constatar que Matlab ofereix un entorn propici per a la realització d'experiments numèrics i manipulacions en la teoria de sistemes i de control, degut a la facilitat amb què és possible programar algoritmes i definir sistemes complexos.

Bibliografia

Per la realització d'aquest projecte s'han utilitzat algunes de les referències bibliogràfiques següents. S'han inclòs altres referències que, si bé no hem consultat directament, contenen alguns dels resultats originals en aquest camp o són treballs bàsics per continuar treballant en aquest camp.

- [Antoulas 05] A.C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM Publications, Philadelphia, PA, 2005.
- [Desai 84] U.B. Desai and D. Pal. *A transformation approach to stochastic model reduction*. IEEE Trans. Automat. Control, AC-29, pp. 1097-1100, 1984.
- [Fernando 88] K. V. Fernando, S. J. Hammarling. *A product induced singular value decomposition (PSVD) for two matrices and balanced realization*, in B.N. Datta, C.R. Johnson, M.A. Kaashoek, R.J. Plemmons, and E.D. Sontag, Eds., *Linear Algebra in Signals, Systems, and Control*, SIAM, PA, Philadelphia, pp. 128-140, 1988.
- [Fortuna 92] L. Fortuna, G. Nunnari, A. Gallo. *Model order reduction techniques with applications in electrical engineering*. (Springer-Verlag, 1992).
- [Freund 03] R. Freund. *Model reduction methods based on Krylov subspaces*. Acta Numerica, Vol. 12, pp. 267-319, 2003.
- [Gantmacher 66] F. R. Gantmacher. *Théorie des matrices*. (Tome 1, Ed. Dunod, París, França, 1966).
- [Glover 84] K. Glover. *All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds*, International Journal of Control, Vol. 39, N° 6, pp. 1115-1193, 1984.
- [Golub 89] G. H. Golub, C. F. Van Loan. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Estats Units, 1989.
- [Heath 86] M. T. Heath, A. J. Laub, C. C. Paige, R. C. Ward. *Computing the singular value decomposition of a product of two matrices*, SIAM J. on Sci. & Stat. Comp., Vol. 7, N° 4, 1986.
- [Kailath 80] T. Kailath. *Linear systems*. Prentice-Hall Int., Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [Laub 80] A. J. Laub. *Computation of balancing transformations*. Proceedings of the Joint Automate Control Conference, S. Francisco, Vol. II, 1980.
- [Laub 87] A. J. Laub, M. T. Heath, Paige, R. C. Ward. *Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms*, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-32, pp. 115-122, 1987.
- [Li 01] J. R. Li and J. White. *Reduction of large circuit models via low rank approximate gramians*. Int. J. Appl. Math. Comp. Sci., Vol. 11, N° 5, pp. 1151-1171, 2001.
- [Liu 86] Y. Liu and B.D.O. Anderson. *Controller reduction via stable factorization and balancing*. Internat. J Control, Vol. 44, pp. 507-531, 1986.

- [Moore 81] B. C. Moore. *Principal component analysis in linear systems: Controlability, observability and model reduction*. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 26, N° 1, pp. 100-105, 1981.
- [Penzl 00] T. Penzl. *A cyclic low rank Smith method for large sparse Lyapunov equations*. SIAM J. Sci. Comput. Vol. 21, N° 4, pp. 1401-1418, 2000.
- [Petkov 91] P. Hr. Petkov, N. D. Christov, M. M. Konstantinov. *Computational methods for linear control systems*, Prentice-Hall International Ltd., Regne Unit, 1991.
- [Saad 90] Y. Saad. *Numerical solution of large Lyapunov equation*. In M. A. Kaashoek, J. H. van Schuppen, and A. C. M. Ran, editors, *Signal Processing, Scattering, Operator Theory and Numerical Methods*, pp. 503-511. Birkhäuser, 1990.
- [Van Dooren 95] P. M. Van Dooren. *Numerical linear algebra for signal systems and control*. Draft notes for the Graduate School in Systems and Control, Louvain-la-Neuve, Bèlgica, 1995.
- [Van Dooren 00] P. Van Dooren. *Gramian based model reduction of large-scale dynamical systems*. In D.F. Griffiths and G.A. Watson, editors, *Numerical Analysis 1999. Proc. 18th Dundee Biennial Conference on Numerical Analysis*, pp. 231-247, Londres, Regne Unit, 2000. Chapman & Hall/CRC.
- [Varga 91] A. Varga. *Efficient minimal realization procedure based on balancing*. In Prepr. of the IMACS Symp. on Modelling and Control of Technological Systems, Vol 2, pp. 42-47, 1991.

Referències d'internet

Control systems / Controlability and Observability:

http://en.wikibooks.org/wiki/Control_Systems/Controllability_and_Observability

Pràctiques amb Matlab:

http://www-ma4.upc.edu/~carles/apunts/practiquesMATLAB_EQDI.pdf

Agraïments

Vull expressar en aquestes breus línies els meus agraïments a les persones que m'han ajudat durant la realització d'aquest projecte. Especialment, al meu director, Dr. Carles Batlle Arnau, per la seva atenció, paciència i consells durant totes les etapes del projecte.

Aprofito aquesta ocasió per agrair a Rafael Morillas pel seu suport durant els anys de la carrera, a Albert Admetlla que sempre ha estat disposat a donar-me un cop de mà. I per últim, el meu especial agraïment als meus germans: Mustapha, Sara i Ekram Labtimi, per creure sempre en mi i estar al meu costat en tot moment.