TREBALL DE FI DE MÀSTER

Màster en Matemàtica Aplicada

Títol: Sistemes de Lie i l'equació de Riccati matricial

Autor: Bernat Joseph i Duran

Director: Xavier Gràcia Sabaté

Departament: Departament de Matemàtica Aplicada IV

Convocatòria: 28 de gener de 2009

UPC

Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Treball de fi de màster

Sistemes de Lie
i l'equació de Riccati matricial

Bernat Joseph i Duran

Director: Xavier Gràcia Sabaté

27 de gener de 2009

Màster en Matemàtica Aplicada
Facultat de Matemàtiques i Estadísitca
Universitat Politècnica de Catalunya

Índex

1 Introducció **1**

2 Grups de Lie i equacions diferencials en varietats **7**
2.1 Sistemes no autònoms 7
2.2 Distribucions i foliacions 9
2.3 Grups de Lie 10
2.4 Àlgebres de Lie 11
2.5 Exemples de grups i àlgebres de Lie 14
2.6 L'aplicació exponencial 16
2.7 Accions de grups de Lie en varietats 19
2.8 Prolongació diagonal de camps 21

3 Sistemes de Lie **27**
3.1 Definicions i exemples 27
3.2 El teorema de Lie 29
3.3 Principis de superposició i accions de grups en varietats 35
3.4 Caracteritzacions del nombre de solucions 41

4 L'equació de Riccati **43**
4.1 L'equació de Riccati escalar 43
4.2 L'equació de Riccati matricial 45
4.3 L'equació de Riccati quadrada 52

5 Conclusions **55**

A Algunes demostracions **57**
A.1 Prova de la proposició 4.2.1 57
A.2 Prova de la proposició 4.2.2 60

B Fulls de càlcul Maple **63**
B.1 Càlcul de camps vectorials 63
B.2 Càlcul de l'acció 69

Bibliografia **75**

Capítol 1

Introducció

La impossibilitat de resoldre explícitament sistemes d'equacions diferencials ha empès molts matemàtics, des de fa ben bé tres segles, a buscar noves estratègies per donar informació sobre les solucions d'aquests sistemes i calcular-ne algunes sempre que sigui possible. Aquestes noves estratègies s'han desenvolupat en noves branques de les matemàtiques, sobretot al segle XX. Una d'aquestes estratègies, a bastament usada en models teòrics de la física, ha estat la teoria de Sophus Lie de grups continus actuant sobre les varietats en les quals estan definides les equacions.

Aquest és el cas dels sistemes que tractarem en aquest treball: sistemes admetent principis de superposició. El problema, plantejat per dos contemporanis de Lie, Ernest Vessiot ([Ves93a], [Ves93b]) i Alf Guldberg [Gul93], alumne de Lie, és el següent: es tracta de determinar quins sistemes d'equacions diferencials tenen la propietat de poder expressar la seva solució general en funció d'unes quantes solucions particulars (prèviament conegudes) i d'unes quantes constants (relacionades amb les condicions inicials). Aquesta propietat era coneguda en el cas dels sistemes lineals, de la forma:

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n$$

per als quals, conegudes n solucions $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ (linealment independents), la funció:

$$x(t) = \Phi(x_1(t), \ldots, x_n(t); c_1, \ldots, c_n) = c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t)$$

esdevé un principi de superposició: per a cada elecció de les constants $c_1, \ldots, c_n$ s'obté una nova solució i, recíprocament, a cada solució del sistema li corresponen n constants $c_1, \ldots, c_n$. En aquest cas es tracta un principi de superposició lineal: les noves solucions s'obtenen mitjançant combinacions lineals de les solucions prèviament conegudes. No és així en el cas de l'anomenada equació de Riccati, estudiada per primera vegada pel matemàtic italià Jacopo Francesco Riccati (1676 - 1754):

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2$$

amb $x,\ a_0(t),\ a_1(t),\ a_2(t) \in \mathbb{R}$. Aquesta és, segurament, la precursora de les equacions diferencials que admeten un princpi de superposició no lineal. Donades quatre solucions $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ de l'equació de Riccati, es verifica que:

$$\frac{(x_1(t) - x_3(t))(x_2(t) - x(t))}{(x_2(t) - x_1(t))(x(t) - x_3(t))} = k$$

on k és una constant. D'aquesta manera si es coneixen explícitament les solucions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ es pot aïllar $x(t)$ per determinar un principi de superposició:

$$x(t) = \Phi(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t); k) = \frac{(x_2(t) - x_1(t))\, x_3(t)\, k + (x_1(t) - x_3(t))\, x_2(t)}{(x_2(t) - x_1(t))\, k + (x_1(t) - x_3(t))}$$

La caracterització dels sistemes que admeten principis de superposició va ser donada per Lie i apareix per primera vegada en el treball de Georg Scheffers *Vorlesungen über Continuierliche Gruppen* [LS93], on l'autor recull bona part de l'obra de Lie. És per això que aquest resultat que habitualment s'anomena *teorema de Lie* apareix en algunes referències amb el nom de *teorema de Lie-Scheffers*, la qual cosa també peremet distingir-lo d'altres resultats de Lie. El teorema es troba, per tant, emmarcat en la teoria desenvolupada per Lie i que actualment constitueix bona part de l'estudi elemental de la geometria diferencial. Més precisament, en el capítol 24 el teorema 44 ("*teorema sobre els sistemes que admeten un conjunt fonamental de solucions*") diu:

Theorem 44: *Damit das System von n simultanen Differentialgleichungen:* Theorem über die Syst. mit Fundamentallösgn.

$$\frac{dx_i}{dz} = \eta_i(x_1 \ldots x_n) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

in $x_1 \ldots x_n$, z die Eigenschaft besitze, dass das allgemeine Lösungensystem $x_1 \ldots x_n$ aus einer gewissen Anzahl m von allgemein gewählten particularen Lösungensystemen

$$x_1 = x_1^{(k)}, \ldots\ x_n = x_n^{(k)} \quad (k = 1, 2 \ldots m)$$

durch ein Formelsystem:

$$x_i = \varphi_i(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)} \ldots x_n^{(m)},\ a_1 \ldots a_n)$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

mit n willkürlichen Constanten $a_1 \ldots a_n$ darstellbar sei, ist notwendig und hinreichend, dass es die besondere Form habe:

$$\frac{dx_i}{dz} = Z_1(z)\xi_{1i}(x) + \cdots + Z_r(z)\xi_{ri}(x)$$
$$(i = 1, 2 \ldots n),$$

in der $Z_1 \ldots Z_r$ Functionen von z allein und die ξ_{ji} solche Functionen von $x_1 \ldots x_n$ allein sind, dass die infinitesimalen Transformationen

$$X_j f \equiv \sum_1^r{}_i\, \xi_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (j = 1, 2 \ldots r)$$

eine r-gliedrige Gruppe erzeugen.

Auch haben wir gesehen, dass die Zahl m die Ungleichung

$$nm \geqq r$$

erfüllt.

Figura 1.1: El teorema de Lie tal com apareix a *Vorlesungen über Continuierliche Gruppen*

Que podem traduir per:

Teorema 44 *Per tal que un sistema de n equacions diferencials simultànies*

$$\frac{dx_i}{dz} = \eta_i(x_1 \mathinner{..} x_n) \quad (i = 1, 2 \mathinner{..} n)$$

en $x_1 \mathinner{..} x_n$, z tingui la propietat que la solució general del sistema $x_1 \mathinner{..} x_n$ sigui representable en termes d'un nombre m de solucions arbitràriament escollides

$$x_1 = x_1^{(k)} \mathinner{..} x_n = x_n^{(k)} \quad (k = 1, 2 \mathinner{..} m)$$

mitjançant una fórmula

$$x_i = \varphi_i(x_1^{(1)} \mathinner{..} x_n^{(1)} \mathinner{..} x_1^{(m)} \mathinner{..} x_n^{(m)}; a_1 \mathinner{..} a_n) \quad (i = 1, 2 \mathinner{..} n)$$

amb $a_1 \mathinner{..} a_n$ n constants arbitràries, és necessari i suficient que el sistema tingui la forma particular:

$$\frac{dx_i}{dz} = Z_1(z)\xi_{1i}(x) + \mathinner{..} + Z_r(z)\xi_{ri}(x) \quad (i = 1, 2 \mathinner{..} n)$$

amb $Z_1 \mathinner{..} Z_r$ funcions de z únicament i ξ_{ij} funcions de $x_1 \mathinner{..} x_n$ únicament, de manera que les transformacions infinitesimals:

$$X_j f \equiv \sum_{i=1}^{r} \xi_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (j = 1, 2 \mathinner{..} r)$$

formin un grup d'ordre r.

A més, el nombre m satisfà la desigualtat

$$nm \geqq r$$

Amb la nomenclatura actual, el *grup d'ordre r* de Lie (*"r-gliedrige Gruppe"*) correspon a una àlgebra de Lie de dimensió r. El fet d'associar una àlgebra de Lie (i, com es veurà, també un grup de Lie i una acció) al sistema és el que permetrà desenvolupar alguns mètodes per intentar construir principis de superposició.

A mitjans del segle XX W.J. Coles ([Col55], [Col65]), basant-se en un treball anterior de A. Chiellini [Chi48], va recuperar el resultat de Lie per calcular explícitament principis de superposició per un cas particular de l'equació de Riccati. Coles, però, no utilitzava els mètodes relacionats amb grups. Aquests mètodes van ser desenvolupats a la dècada dels 80 per P. Winternitz, R.L. Anderson i altres (vegeu per exemple [AHW81], [Win81], [AHW82] i [HW83]), que els van aplicar per a l'obtenció de principis de superposició, especialment per a l'equació de Riccati matricial:

$$\dot{X} = A + BX + XC + XDX$$

on X és una matriu $n \times m$ i A, B, C i D són matrius d'ordres adequats. Altres treballs dels mateixos autors estudien principis de superposició per a casos particulars (per exemple el cas de X quadrada, el cas de A, B, C i D simètriques, ...) d'aquesta equació, per als quals l'àlgebra de Lie esmentada en el teorema és una subàlgebra de la del cas general. De fet alguns dels articles d'aquests autors són de caire algebraic i consisteixen a estudiar àlgebres de Lie associades a equacions i subàlgebres complint certes propietats. Aquest enfocament també es seguit per [HPW99].

Més recentment han aparegut els articles de José F. Cariñena, Janusz Grabowski, Giuseppe Marmo i altres ([CGM00], [CR01], [CGM07], [CLR08]), així com llibres i articles de N.H. Ibragimov ([Ibr00]), entre d'altres, que revisen els treballs citats anteriorment amb vocació d'aplicar-los a nous àmbits en teoria de control, física, etc. Una de les primeres referències sobre les aplicacions de les equacions de Riccati és [Rei72]. Altres autors ([FJ95], [Fre02]) han estudiat també la relació entre les solucions de l'equació de Riccati diferencial (la que hem presentat anteriorment) i l'equació de Riccati algebraica:

$$0 = A + BX + XC + XDX$$

Un altre punt de vista, més allunyat al d'aquest treball, consisteix en l'estudi de versions discretes de l'equació de Riccati i diferents mètodes numèrics per a aproximar solucions.

Estructura del treball

Aquest treball està estructurat, bàsicament, en tres capítols: *Grups de Lie i equacions diferencials en varietats*, *Sistemes de Lie* i *L'equació de Riccati*, a més d'un recull de conclusions i dos apèndixs final.

Capítol 2: Grups de Lie i equacions diferencials en varietats

En el primer capítol s'exposen les eines necessàries per a desenvolupar la teoria dels apartats següents. La part principal d'aquest capítol és la teoria de grups de Lie i d'accions de grups de Lie en varietats. Evidentment, aquesta introducció no pretén ser exhaustiva, ja que aquesta teoria és molt extensa, sinó tan sols un recull de les definicions i resultats bàsics necessàries per al desenvolupament del treball.

A part de la teoria de grups de Lie també s'exposen les idees necessàries per poder parlar de sistemes no autònoms en una varietat i distribucions. A l'ultima seccio s'estudien amb detall les prolongacions diagonals de camps vectorials, un concepte poc utilitzat però de gran importància en aquest treball.

Capítol 3: Sistemes de Lie

El segon capítol consisteix primerament en l'exposició del resultat de Lie anteriorment esmentat. Ara bé, hem tractat d'anunciar-lo utilitzant el llenguatge formal de la geometria diferencial tal com s'estudia actualment. Per això, hem seguit la referència [CGM07], però hem completat alguns detalls de la demostració. Així, ha calgut afegir certes hipòtesis de no singularitat del principi de superposició i d'independència lineal dels camp vectorial associats el sistema. Amb la intenció de reduir el nombre d'hipòtesis, hem separat el teorema en dues proposicions transformant el *si i només si* de Lie en dues implicacions, cada una amb les seves corresponents hipòtesis.

En la segona part d'aquest capítol s'introdueix el paper que juguen els grups de Lie i les accions de grups en varietats en la construcció de principis de superposició així com la proposició fonamental, que es troba al centre dels mètodes de construcció de principis de superposició, que relaciona, mitjançant una acció, les solucions del sistema amb una corba en el grup de Lie associat. Seguidament es presenten els diferents mètodes per al càlcul de principis de superposició (seguint, essencialment, [AHW82] i [CGM00]) i la determinació del nombre de solucions necessàries per a aquest càlcul.

Capítol 4: L'equació de Riccati

Finalment en l'últim apartat es pretén aplicar la teoria del capítol 2 a l'equació de Riccati. La primera part es centra en l'equació de Riccati escalar, a bastament coneguda, i que permet calcular al principi de superposició explícitament seguint un dels mètodes exposats. Seguidament es treballa l'equació de Riccati matricial en la seva versió més general. Per aquest cas es demostra que, efectivament, es pot escriure com un sistema que admet principi de superposició i es calculen l'àlgebra de Lie i l'acció associades. Tot i que aquests resultats es troben en [HW83], les seves proves no es troben en cap dels articles que he trobat. De fet en [HW83] el problema s'aborda de manera diferent: en comptes de partir d'una equació i intentar calcular l'àlgebra i l'acció associades, es parteix d'aquesta àlgebra i aquesta acció per a construir l'equació. Des del punt de vista que he seguit, el problema consisteix a partir d'una equació i tractar de determinar-ne les propietats.

Per acabar, utilitzant les propietats particulars de l'equació de Riccati matricial per el cas de matrius quadrades, es dóna un càlcul per a arribar a un principi de superposició en aquest cas.

Apèndixs finals

Els apèndixs han estat reservats als càlculs més llargs i enfarfegosos del treball, amb la intenció de no entorpir el desenvolupament de la teoria. Així mateix també hem inclòs el codi i els resultats de dos petits programes realitzats amb el manipulador algebraic Maple que han servit d'ajuda a l'hora d'entendre algunes expressions i fer algunes demostracions.

El propòsit d'aquest treball és, doncs, revisar el teorema de Lie i la seva demostració i il·lustrar alguns casos d'especial importància sobre els quals els resultats que es coneixen actualment tan sols poden ser trobats en els articles citats anteriorment, que sovint no gaudeixen de suficient claredat i nivell de detall per al lector no especialitzat.

En aquest sentit gran part del treball ha consistit a consultar un bon nombre d'articles i seleccionar la informació més adient per tal de realitzar un treball tancat i tan autocontingut com ha estat possible. En conseqüència, una de les tasques amb més dificultat ha consistit a unificar el llenguatge i la notació en un estil més proper al que s'usa actualment en els textos matemàtics. Cal tenir en compte que bona part de la producció en el tema de sistemes de Lie i sistemes d'equacions amb principis de superposició prové de l'interès que han despertat aquestes qüestions en la física teòrica, on s'utilitza un llenguatge una mica diferent que en els llibres de geometria diferencial. En aquest treball hem intentat reescriure alguns resultats usant un llenguatge més proper al de la geometria.

Capítol 2

Grups de Lie i equacions diferencials en varietats

La demostració que Lie va fer del teorema que caracteritza els sistemes d'equacions diferencials que admeten un principi de superposició consisteix bàsicament en resultats sobre solucions de sistemes d'equacions en derivades parcials. En aquest treball el tractament serà més geomètric, i és per això que, en aquest capítol, farem un repàs d'alguns conceptes importants i necessaris per tenir una visió més geomètrica del teorema i fer-ne una demostració alternativa a la original. La majoria d'aquests continguts es poden trobar en libres de geometria diferencial (en particualr el que segueix està basat en [Lee03] i [KMS93]) excepte l'última secció sobre prolongacions diagonals de camps vectorials. Aquest concepte, malgrat que s'usa en els articles que hem consultat sobre sistemes de Lie només apareix definit en [CGM07], però sense donar-ne gaires detalls. Així, per completar aquest capítol de conceptes previs, hem desenvolupat una definició formal del concepte.

2.1 Sistemes no autònoms

Geomètricament, l'estudi de sistemes d'equacions diferencials ordinàries es descriu mitjançant camps vectorials en una varietat M. Aquests camps són, en coordenades, de la forma

$$X(x) = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},\ x = (x^1, \ldots, x^n)$$

on $n = \dim M$, i dónen lloc a les equacions

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x),\ i = 1 \ldots n$$

Aquests sistemes d'equacions diferencials són els anomenats autònoms ja que no hi ha dependència explícita de la variable independent t en l'equació.

En aquest treball ens interessarem per sistemes d'equacions diferencials no autònoms, aquells en què la dependència de l'equació en la variable t és explícita:

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x,t),\ i = 1 \ldots n$$

Si volem considerar un sistema no autònom en una varietat M, és natural pensar que les funcions $X^i(x,t)$ siguin funcions en $M \times \mathbb{R}$.

Geomètricament descriurem aquests sistemes de la següent manera: considerem la projecció

$$\pi : M \times \mathbb{R} \to M$$

Un sistema no autònom en M vindrà descrit per un camp vectorial al llarg de l'aplicació π. Recordem que donada una aplicació entre dues varietats

$$F : N \to M$$

un camp vectorial al llarg de F és una aplicació

$$X : N \to TM$$

tal que

$$\tau_M \circ X = F$$

és a dir, que el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "F"'] & TM \arrow[d, "\tau_M"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Així un sistema no autònom serà una aplicació

$$X : M \times \mathbb{R} \to TM$$

tal que

$$\tau_M \circ X = \pi$$

que equival a dir que

$$X(p,t) \in T_pM, \ \forall (p,t) \in M \times \mathbb{R}$$

En coordenades:

$$X = X^i(x,t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \pi \right) (x,t)$$

Per simplificar la notació escriurem

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \pi \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Les solucions del sistema autònom seran les corbes integrals del camp vectorial al llarg de π definides de la següent manera: una corba integral d'un camp vectorial X al llarg de π és una corba

$$\gamma : I \to M \times \mathbb{R}$$

on $I \subset \mathbb{R}$, de manera que

$$X \circ \gamma = T\pi \circ \dot{\gamma}$$

D'ara endavant ens referirem als camps vectorials al llarg de π com a sistemes no autònoms o camps vectorials t-dependents de manera equivalent.

Al llarg d'aqueata secció hem estat considerant els sistemes no autònoms definits en $M \times \mathbb{R}$. Més generalment es poden considrar, de manera anàloga, definits en un cert obert $W \subset M \times \mathbb{R}$.

2.2 Distribucions i foliacions

2.2.1 Distribucions

Les distribucions i el teorema de Frobenius són un tema clàssic de la geometria diferencial. Ara bé, la definició de distribució pot variar depenent del grau de generalitat que es vulgui assolir. La definició més general d'una distribució en una varietat consisteix a donar per a cada $x \in M$ un subespai vectorial $D_x \subset T_xM$ i considerar la unió disjunta d'aquests espais $\mathcal{D} = \bigsqcup_{x \in M} D_x$. En aquest cas no s'exigeix que la dimensió de D_x sigui constant. Altres definicions de distribució consideren, en canvi, que $\dim D_x$ ha de ser constat, ja que és en aquestes condicions on s'aplica el conegut teorema de Frobenius.

En qualsevol cas, es diu que una distribució és *diferenciable* si, localment, està generada per un conjunt de camps vectorials diferenciables: és a dir per a tot $x_0 \in M$, existeix un entorn $U \subset M$ amb $x_0 \in U$ i un conjunt $\mathcal{V}$ (finit o infinit) de camps definits en U tals que:

$$D_x = \langle\, X(x) \,|\, X \in \mathcal{V} \,\rangle, \ \forall x \in U$$

i en tal cas, es diu que la distribució (diferenciable) és involutiva si per a tot $X,\ Y \in \mathcal{V}$, $[X, Y]$ és una combinació $\mathcal{C}^\infty(U)$-lineal d'elements de $\mathcal{V}$ (els claudàtors indiquen el parèntesi de Lie de camps vectorials).

En aquest treball ens referirem amb el terme "distribució" a una distribució diferenciable i de rang constant (en aquest cas $\mathcal{V}$ es finit), això és, $\dim D_x = \dim D_y\ \forall x, y \in M$ (s'anomena dimensió de la distribució a la de qualsevol d'aquests espais), en cas contrari l'anomenarem "distribució generalitzada".

En la teoria clàssica hom es pregunta si donada una distribució (diferenciable i de rang constant!) $\mathcal{D}$, i un punt x_0 de la varietat M existeix una subvarietat (immersa) $N \subset M$ tal que $x_0 \in N$ i $T_xN = D_x$ per a tot $x \in N$. A una tal subvarietat se l'anomena *varietat integral* de la distribució $\mathcal{D}$. El teorema de Frobenius dóna la resposta a l'anterior pregunta.

Una distribució de rang constant s'anomena *integrable* si per a tot $x \in M$ existeix una varietat integral que passa per x. Així, amb tota aquesta nomenclatura el teorema de Frobenius esdevé:

Teorema 2.2.1 (Frobenius) *Una distribució és integrable si i només si és involutiva.*

Versions més generals de teorema de Frobenius existeixen per al cas de distribucions generalitzades tal com es pot veure, per exemple, en [KMS93], però no són necessàries en aquest treball.

Exemple 2.2.1 Aquest exemple apareix de manera directa en la prova del teorema de Lie i relaciona les distribucions amb els sistemes autònoms: un sistema no autònom en una varietat M:

$$X : M \times \mathbb{R} \to TM$$

defineix una distribució generalitzada en aquesta varietat. Efectivament, si considerem per a cada $x \in M$ el subespai:

$$D_x = \langle X(x, t) | t \in \mathbb{R} \rangle$$

obtenim una distribució generalitzada en M.

2.2.2 Foliacions

Un concepte que es relaciona de manera immediata amb les distribucions i el teorema de Frobenius és el de foliació: una *foliació* r-dimensional en una varietat M (de dimensió n) és una col·lecció $\mathcal{F}$ de subvarietats r-dimensionals disjuntes (anomenades les fulles de la foliació) tals que la seva unió és tota M i tals que en un entorn de cada punt $p \in M$ existeix una carta $(U, (x_i))$ tal que cada fulla de la foliació o bé és disjunta amb U o bé interseca U en una unió numerable de hiperplans k-dimensionals de la forma $x_{k+1} = c_{k+1}, \ldots, x_n = c_n$.

Lema 2.2.1 *El conjunt dels espais tangents a les fulles d'una foliació formen una distribució involutiva en M.*

En aquest context podem enunciar la versió global del teorema de Frobenius:

Teorema 2.2.2 *Sigui $\mathcal{D}$ una distribució involutiva en una varietat M. El conjunt de les varietats integrals maximals (connexes) de $\mathcal{D}$ forma una foliació en M.*

2.3 Grups de Lie

Definició 2.3.1 *Un* gup de Lie *és un conjunt G dotat d'estructura de grup i de varietat diferenciable i tal que les aplicacions*

$$\begin{array}{rcccl} \mu: & G \times G & \to & G & \quad (\textit{producte en } G) \\ & (g_1, g_2) & \mapsto & \mu(g_1, g_2) \equiv g_1 g_2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} \iota: & G & \to & G & \quad (\textit{inversió en } G) \\ & g & \mapsto & \iota(g) \equiv g^{-1} & \end{array}$$

són diferenciables.

Es pot provar que la diferenciabilitat de la inversió és conseqüència de la diferenciabiltat del producte.

Per cada $a \in G$ podem definir les aplicacions

$$\begin{array}{rccl} L_a: & G & \to & G \\ & g & \mapsto & L_a(g) = ag \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} R_a: & G & \to & G \\ & g & \mapsto & R_a(g) = ga \end{array}$$

Aquestes aplicacions són anomenades *translacions* per l'esquerra i per la dreta respectivament i juguen un paper fonamental en la teoria. Les translacions són difeomorfismes, ja que el producte en G és diferenciables i

$$(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$$
$$(R_a)^{-1} = R_{a^{-1}}$$

A més, les translacions verifiquen les següents propietats:

- $L_a \circ L_b = L_{ab}$

- $R_a \circ R_b = R_{ba}$
- $L_a \circ R_b = R_b \circ L_a$

2.4 Àlgebres de Lie

Per tal de definir l'àlgebra de Lie d'un gup de Lie començarem amb la definició algebraica d'àlgebra de Lie.

Definició 2.4.1 *Una* àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *sobre un cos commutatiu* $\mathbb{K}$ *és un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial* $\mathfrak{g}$ *amb una operació interna anomenada* parèntesi *(usualment representada per claudàtors):*

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

verificant les següents propietats:

(i) És bilineal:

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \text{ i } \forall a, b \in \mathbb{K}$$
$$[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \text{ i } \forall a, b \in \mathbb{K}$$

(ii) És alternada:

$$[x, x] = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}$$

o, equivalentment si $\mathbb{K}$ *és de característica diferent de 2, antisimètrica:*

$$[x, y] = -[y, x], \ \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

(iii) Compleix la identitat de Jacobi*:*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$$

S'anomena dimensió de l'àlgebra a la dimensió que té com a $\mathbb{K}$*-espai vectorial. Anàlogament, s'anomena base de l'àlgebra de Lie a qualsevol base del* $\mathbb{K}$*-espai vectorial* $\mathfrak{g}$*.*

Definició 2.4.2 *Un morfisme entre dues àlgebres de Lie* $\mathfrak{g}$ *i* $\mathfrak{g}'$ *sobre un mateix cos, és una aplicació lineal*

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$$

que conserva el parèntesi:

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Donada una àlgebra de Lie n-dimensional $\mathfrak{g}$ podem considerar-ne una base $\mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. En calcular el parèntesi de dos elements d'aquesta base obtenim un nou element de $\mathfrak{g}$, que podem expressar com a combinació lineal dels elements de la base. Els coeficients d'aquestes combinacions lineals són objecte de la següent definició:

Definició 2.4.3 *Donada una base $\mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ d'una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ n-dimensional, s'anomenen* constants d'estructura *de l'àlgebra $\mathfrak{g}$ associades a la base $\mathcal{B}$ els n^3 coeficients $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1 \ldots n)$, definits per:*

$$[a_\alpha, a_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{n} c^{\gamma}_{\alpha\beta}\, a_\gamma$$

Notem que el coneixement de les constants d'estructura permet calcular el parèntesi de dos elements arbitraris de $\mathfrak{g}$:

$$[u, v] = \left[\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha a_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n} \mu_\beta a_\beta\right] = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\alpha \mu_\beta\, [a_\alpha, a_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{n}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\alpha \mu_\beta c^{\gamma}_{\alpha\beta}\right) a_\gamma$$

Si una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ verifica $[X, Y] = 0$ per a tot $X,\ Y \in \mathfrak{g}$ és diu que és una *àlgebra de Lie commutativa* o *abeliana*, i en aquest cas, les constants d'estructura en qualsevol base són nul·les.

Exemple 2.4.1 En aquest treball ens fixarem en l'estructura d'àlgebra de Lie (de dimensió infinita) que té el conjunt $\mathfrak{X}(M)$ dels camps vectorials definits en una varietat M. En aquest cas el parèntesi ve donat pel parèntesi de Lie de dos camps vectorials $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definit com l'únic camp $[X, Y]$ que actua sobre funcions de $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ de la següent manera:

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

Si les expressions en coordenades de X i Y són

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

aleshores ([Lee03], [KMS93] o qualsevol llibre de geometria diferencial):

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

2.4.1 L'àlgebra de Lie d'un grup de Lie

En el cas d'una varietat que és, a més, un grup de Lie G veurem que hi ha una classe especial de camps vectorials, relacionats amb les translacions, que formen una subàlgebra de Lie en $\mathfrak{X}(G)$. Aquesta subàlgebra s'identifica de manera natural amb una classe de subgrups de G i amb l'espai tangent a l'element neutre T_eG, donant lloc a l'anomenada àlgebra de Lie del grup G.

Definició 2.4.4 *Un camp $X \in \mathfrak{X}(G)$ s'anomena invariant per l'esquerra si $\forall a \in G$ $L_a^*(X) = X$, o sigui:*

$$TL_a \circ X = X \circ L_a$$

El conjunt de camps invariants per l'esquerra forma una subàlgebra de Lie $\mathfrak{X}_L(G) \subset \mathfrak{X}(G)$, ja que:

$$L_a^*([X, Y]) = [L_a^*(X), L_a^*(Y)] = [X, Y]$$

és, a dir, que $[X, Y] \in \mathfrak{X}_L(G)$ si $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$.

Vegem ara com un camp invariant per l'esquerra queda determinat pel seu valor en l'element neutre de G, establint-se així una bijecció entre $\mathfrak{X}_L(G)$ i T_eG. Donat $u \in T_eG$ definim:

$$\begin{array}{rccl} X_u: & G & \to & TG \\ & x & \mapsto & T_eL_xu \in T_xG \end{array}$$

Aquesta expressió defineix un camp vectorial diferenciable en G invariant per l'esquerra:

$$TL_a \circ X_u(x) = T_xL_a\, T_eL_x\, u = T_eL_{ax}\, u = T_eL_{L_a(x)}\, u = X_u \circ L_a(x)$$

Recíprocament, si $X \in \mathfrak{X}_L(G)$:

$$X(x) = X \circ L_x(e) = TL_x \circ X(e) = X_{X(e)}(x)$$

Així doncs tenim la següent bijecció, que és, de fet, un isomorfisme d'espais vectorials:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_L(G) & \leftrightarrow & T_eG \\ X & \leftrightarrow & X(e) \\ X_u & \leftrightarrow & u \end{array}$$

Aquest isomorfisme permet traslladar l'estructura d'àlgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$ a T_eG:

$$u, v \in T_eG, \quad [u, v] = [X_u, X_v](e)$$

Definició 2.4.5 *Donat un grup de Lie G s'anomena* àlgebra de Lie de G *(i es denota $\mathfrak{g}$ o Lie(G)) indistintament a $\mathfrak{X}_L(G)$ o T_eG amb l'estructura transportada.*

La mateixa construcció es pot realitzar de manera anàloga usant camps invariants per la dreta:

$$TR_a \circ X = X \circ R_a$$

En cas de possible confusió es denotarà al camp invariant per l'esquerra associat un vector $v \in T_eG$ com X_v^L i al camp invariant per la dreta com X_v^R.

Els camps vectorials invariants per la dreta i per l'esquerra estan relacionats per la inversió ι i , i l'aplicació ι_*

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "T_e\iota"] \arrow[d] & T_eG \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_L(G) \arrow[r, "\iota_*"] & \mathfrak{X}_R(G) \end{tikzcd}$$

és un isomorfisme entre les àlgebres de Lie $\mathfrak{X}_L(G)$ i $\mathfrak{X}_L(G)$: $\iota_*[X, Y] = [\iota_*(X), \iota_*(Y)]$.

Tenint en compte que $T_e\iota = -Id_{T_eG}$, si anomenem $(T_eG)_L$ l'estructura d'àlgebra de Lie produïda per $\mathfrak{X}_L(M)$ i $(T_eG)_R$ la produïda per $\mathfrak{X}_R(M)$ tenim que $u \mapsto -u$ és un isomorfisme entre ambdues, és a dir $(T_eG)_R$ és l'àlgebra oposada de $(T_eG)_L$.

Un resultat important que utilitzarem més endavant relaciona grups i àlgebres de Lie. Aquest resultat pot ser trobat en qualsevol llibre que tracti aquest tema ja que és un dels fonamentals. La demostració es basa en el teorema d'Ado sobre l'existència de representacions fidels d'àlgebres de Lie. Com que les proves són llargues i complicades donem simplement el resultat:

Teorema 2.4.1 (Correspondència entre grups i àlgebres de Lie) *Existeix una correspondència bijectiva entre classes d'isomorfisme d'àlgebres de Lie de dimensió finita i classes d'isomorfisme de grups de Lie simplement connexos, que consisteix a associar a cada grup de Lie simplement connex G la seva àlgebra de Lie $Lie(G)$.*

2.5 Exemples de grups i àlgebres de Lie

En aquest apartat veurem alguns exemples de grups de Lie que intervindran en el capítol 4, quan parlem de l'equació de Riccati. Els grups de Lie de matrius, com els que veurem tot seguit, van ser els primers a ser estudiats des del punt de vista que presentem i reben el nom de grups "clàssics". Tenen l'avantatge que permeten identificar fàcilment les seves àlgebres de Lie amb àlgebres de matrius de manera que el llenguatge que apareix en el seu estudi és el de l'àlgebra lineal.

2.5.1 $GL_n(\mathbb{R})$ i $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$

Un dels exemples clàssics de grup de Lie és el grup lineal d'un espai vectorial. Si considerem espais vectorials reals de dimensió finita podem identificar-los amb $\mathbb{R}^n$. Així definim el grup lineal de $\mathbb{R}^n$, $GL_n(\mathbb{R})$, com el conjunt dels endomorfismes invertibles de $\mathbb{R}^n$ amb l'operació de composició. Molts dels grups de Lie clàssics consisteixen en subgrups $GL_n(\mathbb{R})$.

L'estructura de varietat de $GL_n(\mathbb{R})$ prové d'identificar aquest conjunt amb el de les matrius reals i invertibles de dimensions $n \times n$, que és obert en $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, ja que coincideix amb l'antiimatge de $\mathbb{R} - \{0\}$ per l'aplicació (diferenciable) determinant:

$$\begin{array}{rccc} \det: & M_{n\times n}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \det A \end{array}$$

Així $GL_n(\mathbb{R})$ s'identifica amb un obert de $\mathbb{R}^{n^2}$ i és, per tant, una varietat de dimensió n^2. Tant el producte com la inversió són diferenciables ja que són composició d'operacions diferenciables en $\mathbb{R}$.

Hem vist que els camps vectorials invariants per l'esquerra es poden escriure en general com:

$$X(A) = T_I L_A v$$

on $v = X(I) \in T_I GL_n(\mathbb{R})$. D'aquesta manera, denotàvem $X \equiv X_v$.

Volem veure quina és l'expressió del parèntesi induïda a $T_I GL_n(\mathbb{R})$, ja que podem identificar aquets espai amb $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Així podrem identificar l'àlgebra de Lie del grup lineal amb una àlgebra de matrius. Vegem com actuen els camps invariants sobre funcions $f \in \mathcal{C}^\infty(GL_n(\mathbb{R}))$. Tenint en compte que TL_A consisteix en multiplicar per A:

$$X_v f(A) = T_I L_A v\, f(A) = (Av)f(A) = \sum_{i,j,s=1}^{n} A_{is} v_{sj} \frac{\partial f}{\partial A_{ij}}(A)$$

Llavors

$$X_u(X_vf(A)) = \sum_{i,j,k,l,r,s=1}^{n} A_{kr}u_{rl}\frac{\partial}{\partial A_{kl}}\left(A_{is}v_{sj}\frac{\partial f}{\partial A_{ij}}\right) =$$

$$= \sum_{i,j,k,l,r,s=1}^{n} A_{kr}u_{rl}\left(\frac{\partial A_{is}}{\partial A_{kl}}v_{sj}\frac{\partial f}{\partial A_{ij}} + A_{is}v_{sj}\frac{\partial^2 f}{\partial A_{ij}A_{kl}}\right) =$$

$$= \sum_{i,j,k,l,r,s=1}^{n} A_{ir}u_{rs}v_{sj}\frac{\partial f}{\partial A_{ij}} + A_{kr}u_{rl}A_{is}v_{sj}\frac{\partial^2 f}{\partial A_{ij}A_{kr}}$$

Al restar les derivades d'ordre 2 desapareixen:

$$[X_u, X_v]f(A) = X_u(X_vf(A)) - X_v(X_uf(A)) =$$

$$\sum_{i,j,r,s=1}^{n} A_{ir}u_{rs}v_{sj}\frac{\partial f}{\partial A_{ij}} - A_{ir}v_{rs}u_{sj}\frac{\partial f}{\partial A_{ij}} =$$

$$\sum_{i,j,r,s=1}^{n} A_{ir}(u_{rs}v_{sj} - v_{rs}u_{sj})\frac{\partial f}{\partial A_{ij}} = (A(uv - vu))\, f(A) = X_{uv-vu}f(A)$$

per tant:

$$[u, v] = [X_u, X_v](I) = uv - vu$$

Resumint, podem identificar l'àlgebra de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$, que denotarem per $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, amb l'àlgebra de les matrius $n \times n$ amb el commutador com a parèntesi. La base estàndard d'aquesta àlgebra està formada per les matrius e_{ij} que tenen un 1 a la posició (i, j) i zeros a la resta. Aleshores, tenint en compte que $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ (on δ_{ij} és la funció delta de Kronecker), és evident que

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}$$

de manera que les constants d'estructura de $GL_n(\mathbb{R})$ associades aquesta base són:

$$c^{rs}_{ij,kl} = \delta_{ri}\delta_{sl}\delta_{jk} - \delta_{rk}\delta_{sj}\delta_{il}$$

2.5.2 $SL_n(\mathbb{R})$ i $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$

L'exemple clàssic de grup de Lie que apareixerà en l'estudi de l'equació de Riccati en posteriors capítols és l'anomenat grup especial lineal real. Anem a definir-lo i a estudiar la seva àlgebra de Lie.

Com abans, considerem l'aplicació determinant:

$$\begin{array}{rccc} \det: & GL_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^* \\ & A & \mapsto & \det A \end{array}$$

El grup especial lineal consisteix en el conjunt $SL_n(\mathbb{R})$ de matrius de determinant 1, és a dir:

$$SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$$

Si denotem per $\Delta_{ij}(v)$ al determinant del menor de la matriu v que resuta d'eliminar la fila i i la columna j, aleshores si $v \in T_AGL_n(\mathbb{R})$:

$$T_A \det v = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \det}{\partial A_{ij}}(A)\, v_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)\, v_{ij} = \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}v) \qquad (2.5.1)$$

(s'identifica $T_p\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, és a dir ens estalviem col·locar $\frac{d}{dt}\big|_p$ al final de cada expressió). En l'anterior càlcul s'ha usat que la matriu $\left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)\right)^\top = \mathrm{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$ i que per matrius arbitràries A i B

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}B_{ij} = \mathrm{tr}(A^\top B)$$

Així hem vist que $T_A \det \neq 0,\ \forall A \in GL_n(\mathbb{R})$ i que per tant $SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ és una subvarietat regular de dimensió $n^2 - 1$.

Per identificar l'àlgebra de Lie de $SL_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, amb una àlgebra de matrius podem adaptar el càlcul 2.5.1 al cas $v \in T_I GL_n(\mathbb{R}) \cong M_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$$T_I \det v = \mathrm{tr}\ v$$

Finalment:

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = T_I SL_n(\mathbb{R}) = \ker T_I \det = \ker \mathrm{tr} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr} A = 0\}$$

És a dir, que identifiquem l'àlgebra de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ amb l'àlgebra de les matrius $n \times n$ de traça nul·la. El parèntesi en aquesta àlgebra és, naturalment, el parèntesi heretat de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, és a dir el commutador de matrius.

2.6 L'aplicació exponencial

L'aplicació exponencial és una eina que relaciona els grups de Lie amb les seves àlgebres mitjançant els fluxos dels camps invariants per translacions i els subgrups uniparamètrics del grup. En aquest treball la utilitzarem per definir les coordenades canòniques en un grup de Lie i per estudiar els camps vectorials fonamentals d'una acció, que apareixen en els mètodes per a calcular principis de superposició.

2.6.1 Subgrups uniparamètrics

Definició 2.6.1 *Un* subgrup uniparamètric *d'un grup de Lie G és un morfisme de grups de Lie entre* $(\mathbb{R}, +)$ *i G. És a dir:*

$$\alpha : \mathbb{R} \to G$$

tal que:

$$\begin{aligned} \alpha(t_1 + t_2) &= \alpha(t_1)\alpha(t_2) \\ \alpha(0) &= e \end{aligned}$$

Els subgrups uniparamètrics són, en particular, corbes en G que passen per l'element neutre quan $t = 0$. Així $\alpha'(0) = u \in T_eG$ defineix un element de l'àlgebra de Lie de G:

Definició 2.6.2 *Donat un subgrup uniparamètric α d'un grup de Lie G, s'anomena* generador infinitesimal *del subgrup uniparamètric al vector $\alpha'(0) = u \in T_eG$*

Aquest nom es deu al fet que un subgrup uniparamètric queda determinat pel seu vector tangent a l'element neutre de G. Vegem-ho:

Proposició 2.6.1 *Donat $u \in T_eG$ són equivalents:*

(i) α és subgrup uniparamètric amb $\alpha'(0) = u$

(ii) α és la corba integral de X_u^L amb $\alpha(0) = e$

(ii) α és la corba integral de X_u^R amb $\alpha(0) = e$

Demostració:
$(i) \Rightarrow (ii)$

Volem veure que si α és un subgrup uniparamètric amb $\alpha'(0) = u$ aleshores $\alpha'(t) = X_u^L(\alpha(t))$.

Per ser α subgrup uniparamètric:

$$\alpha(t_1 + t) = \alpha(t_1)\alpha(t) = L_{\alpha(t_1)}\alpha(t)$$

Derivant respecte t:

$$\alpha'(t_1 + t) = T_{\alpha(t)}L_{\alpha(t_1)}\alpha'(t)$$

Finalment posant $t = 0$

$$\alpha'(t_1) = T_e L_{\alpha(t_1)}\alpha'(0) = T_e L_{\alpha(t_1)}u = X_u^L(\alpha(t_1))$$

$(ii) \Rightarrow (i)$

Volem veure que si α és la corba integral de X_u^L amb $\alpha(0) = e$ aleshores α és subgrup uniparamètric amb $\alpha'(0) = u$. Cal, per això, veure que:

- $\alpha(t + s) = \alpha(t)\alpha(s)$
- $\alpha(t)$ està definida $\forall t \in \mathbb{R}$

Vegem primer que si $\alpha(t)$ és la corba integral de X_u^L amb $\alpha(0) = e$ i $x \in G$ aleshores $\gamma(t) = x\alpha(t)$ és la corba integral de X_u^L amb $\gamma(0) = x$. En efecte, derivant i usant que $X_u^L \in \mathfrak{X}(G)$:

$$\gamma'(t) = T_{\alpha(t)}L_x\alpha'(t) = T_{\alpha(t)}L_x X_u^L(\alpha(t)) = X_u^L(L_x(\alpha(t))) = X_u^L(x\alpha(t)) = X_u^L(\gamma(t))$$

La unicitat de solucions de sistemes d'equacions diferencials ordinàries ens dóna immediatament el resultat recíproc: si $\gamma(t)$ és una corba integral de X_u^L amb $\gamma(0) = x$ aleshores $\gamma(t) = x\alpha(t)$, on α és la corba integral de X_u^L amb $\alpha(0) = e$.

Sigui ara I l'interval màxim de definició de $\alpha(t)$. Si $t, t_0, t_0 + t \in I$, pel lema de translació $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t_0 + t)$ és la corba integral de X_u^L amb $\tilde{\alpha}(0) = \alpha(t_0)$. Així pel que acabem de veure:

$$\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(0)\alpha(t) \Rightarrow \alpha(t_0 + t) = \alpha(t_0)\alpha(t)$$

Finalment, notem que totes les corbes integrals de X_u^L estan definides en tot I ja que qualsevol corba integral $\gamma(t)$ es pot escriure

$$\gamma(t) = \gamma(0)\alpha(t)$$

on α és la corba integral de X_u^L, amb $\alpha(0) = e$ i $u = \gamma'(0)$. Per tant qualsevol corba integral es pot prolongar per tot $t \in \mathbb{R}$, ja que podem anar allargant les corbes integrals considerant noves condicions inicials damunt la mateixa corba. Així doncs X_u^L és complet, la qual cosa acaba la prova.

De manera anàloga es prova que $(i) \Leftrightarrow (iii)$ □

En aquesta demostració hem provat, a més, que:

Corol·lari 2.6.1 *Els camps vectorials invariants per l'esquerra d'un grup de Lie G, $\mathfrak{X}_L(G)$ (anàlogament,$\mathfrak{X}_R(G)$), són complets.*

2.6.2 L'aplicació exponencial

Definició 2.6.3 *Donat un grup de Lie G amb àlgebra de Lie $\mathfrak{g} = Lie(G)$, es defineix l'aplicació exponencial com*

$$\begin{array}{rccc} \exp: & \mathfrak{g} & \to & G \\ & u & \mapsto & \alpha_u(1) \end{array}$$

on $\alpha_u : \mathbb{R} \to G$ és la corba integral de $X_u \in \mathfrak{X}_L(G) \equiv \mathfrak{g}$ amb $\alpha'(0) = e$.

Observació: La definició anterior és equivalent usant camps invariants per la dreta (veure la proposició anterior).

Proposició 2.6.2 *Propietats de l'aplicació exponencial:*

- *És diferenciable.*
- $\exp(0) = e$
- $\exp((t_1 + t_2)u) = \exp(t_1 u)\exp(t_2 u)$
- $\exp(-u) = exp(u)^{-1}$
- *Amb la nomenclatura anterior es compleix, a més, que:*

$$\exp(tu) = \alpha_u(t)$$

Demostració: Anem a veure tan sols l'últim punt.

En efecte, la corba $\beta(s) = \alpha_u(st)$ és diferenciable (perquè ho és α) i verifica:

$$\begin{cases} \beta(s_1 + s_2) = \beta(s_1)\beta(s_2) \\ \beta(0) = e \\ \beta'(0) = t\alpha'(0) = tu \end{cases}$$

Per tant és un subgrup uniparamètric amb vector tangent en el neutre tu. Per la proposició anterior, és la corba integral de X_{tu}, per tant:

$$\alpha_u(t) = \beta(1) = \exp(tu)$$

□

Reescrivint el resultat de la proposició 2.6.1 en termes de l'aplicació exponencial, els fluxos dels camps invariants tenen la forma:

$$\phi_{X_u^L}(t, g) = g\exp(tu)$$
$$\phi_{X_u^R}(t, g) = \exp(tu)\, g$$

2.6.3 Coordenades canòniques

L'aplicació exponencial constitueix una eina per a definir un tipus especial de coordenades en un grup de Lie: les coordenades canòniques. Més endavant farem ús d'aquestes coordenades per intentar determinar les accions que intervenen en els principis de superposició.

Com ja hem vist una de les propietats de l'aplicació exponencial és que envia el $0 \in \mathfrak{g}$ a l'element neutre $e \in G$. Així:

$$T_0 \exp : T_0\mathfrak{g} \to T_e G$$

Vegem com opera $T_0 \exp$ sobre un element $v \in T_0\mathfrak{g}$:

$$T_0 \exp v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\,v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_{X_v}(t,e) = v$$

Així doncs identificant $T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$ tenim que $T_0 \exp \equiv Id_{\mathfrak{g}}$. Com que $T_0 \exp$ és no singular en 0 tampoc ho és en un entorn i per tant exp es un difeomorfisme entre un entorn $0 \in U_0 \subset \mathfrak{g}$ i un entorn $e \in V_e \subset G$. Així doncs podem considerar l'aplicació inversa:

$$\log : V_e \to U_0 \subset \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$$

Fixada una base una base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de $\mathfrak{g}$, si $g \in V_e$, log aplica:

$$g = \exp(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

i constitueix una carta local en un entorn de $e \in G$. Són les anomenades *coordenades canòniques de primera espècie.*

De manera similar, l'aplicació:

$$\begin{array}{cccc} \beta : & \mathbb{R}^n & \to & G \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \exp(x_1 a_1)\exp(x_2 a_2)\ldots\exp(x_n a_n) \end{array}$$

és, de nou, un difeomorfisme entre entorns de $0 \in \mathbb{R}^n$ i $e \in G$. La seva inversa aplica, en aquests entorns:

$$g = \exp(x_1 a_1)\exp(x_2 a_2)\ldots\exp(x_n a_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Són les anomenades *coordenades canòniques de segona espècie.*

2.7 Accions de grups de Lie en varietats

En el proper capítol caracteritzarem els sistemes d'equacions diferencials que admeten un principi de superposició, de manera semblant a la que hem vist en la introducció. Aquesta caracterització associa una àlgebra de Lie de camps vectorials amb el sistema en qüestió i usant el teorema de correspondència entre grups i àlgebres de Lie 2.4.1 podem també associar-hi un grup de Lie. En el pròxim capítol veurem que en el centre de tots els mètodes per a l'obtenció de principis de superposició hi ha una acció del grup associat al sistema sobre la varietat en què està definit.

En el que segueix farem un repàs del concepte d'acció i introduirem algunes construccions geomètriques que les accions de grups de Lie indueixen sobre les varietats en què actuen i que serviran per caracteritzar, en el proper capítol, l'acció associada a un sistema que admeti un principi de superposició.

Definició 2.7.1 *Una acció (per l'esquerra) d'un grup G sobre un conjunt M és una aplicació:*

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & G \times M & \to & M \\ & (g,x) & \mapsto & \Phi(g,x) \equiv gx \end{array}$$

tal que

(i) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x), \ \forall g_1, g_2 \in G$ *i* $\forall x \in M$

(ii) $ex = x, \ \forall x \in M$

En el cas que G sigui un grup de Lie i M una varietat, caldrà, a més, que l'aplicació Φ sigui diferenciable.

Depenent de les propietats addicionals que verifiqui una acció s'anomenarà:

- Transitiva si $\forall x_1, x_2 \in X$, $\exists\, g \in G$ tal que $gx_1 = x_2$
- Lliure (sense punts fixos) si donats $g_1, g_2 \in G$ i $x \in X$, es verifica $g_1 x = g_2 x$ llavors $g_1 = g_2$
- Efectiva si $\Phi(g, \cdot) = Id_X$ implica $g = e$

2.7.1 Camps vectorials fonamentals d'una acció

Una acció d'un grup de Lie en una varietat defineix un conjunt de camps vectorials anomenats camps fonamentals de l'acció. Donada una acció Φ d'un grup de Lie G en una varietat M, per cada $x \in M$ podem considerar l'aplicació:

$$\begin{array}{rccl} \Phi_x: & G & \to & M \\ & g & \mapsto & \Phi_x(g) = \Phi(g,x) \end{array}$$

L'aplicació tangent en el neutre $e \in G$ defineix una aplicació de l'àlgebra de Lie de G, $\mathfrak{g} \cong T_eG$, en T_xM:

$$T_e\Phi_x: \ \mathfrak{g} \ \to \ T_xM$$

Mitjançant aquesta aplicació podem definir els camps vectorials fonamentals de l'acció Φ:

Definició 2.7.2 *Donada una acció Φ d'un grup de Lie G en una varietat M i una base de l'àlgebra de Lie de G, $\{a_1, \ldots, a_n\}$, els* camps vectorials fonamentals de l'acció Φ *associats a la base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ són els camps:*

$$\begin{array}{rccl} X_\alpha: & M & \to & TM \\ & x & \mapsto & X_\alpha(x) = -T_e\Phi_x a_\alpha \end{array}$$

amb $\alpha = 1 \ldots n = \dim M$.

Donat un element qualsevol de $u \in Lie(G)$ es pot definir el camp fonamental associat X_u, ara bé, per la linealitat de l'aplicació tangent és suficient definir els camps fonamentals associats a una base, ja que qualsevol altre s'obté com a combinació lineal d'aquests.

Proposició 2.7.1 *El flux $\phi_{X_\alpha}(t,x)$ dels camps vectorials fonamentals d'una acció Φ, X_α, ve donat per l'expressió:*

$$\phi_{X_\alpha}(t,x) = \Phi(exp(-ta_\alpha), x)$$

En particular, els camps vectorials fonamentals d'una acció són complets.

Demostració: La condició inicial es verifica fàcilment:

$$\phi_{X_\alpha}(0,x) = \Phi(\exp(0),x) = \Phi(e,x) = x$$

Anem a veure ara que $\frac{d}{dt}\Phi(-\exp(ta_\alpha),x) = X_\alpha(\Phi(\exp(-ta_\alpha),x))$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\Phi(\exp(-ta_\alpha),x) &= \tfrac{d}{dt}\Phi_x(\exp(-ta_\alpha)) = \\
&= T_{\exp(-ta_\alpha)}\Phi_x \tfrac{d}{dt}(\exp(-ta_\alpha)) = \\
&= T_{\exp(-ta_\alpha)}\Phi_x \left(X^R_{-a_\alpha}(\exp(-ta_\alpha))\right) = \\
&= T_{\exp(-ta_\alpha)}\Phi_x\ T_e R_{\exp(-ta_\alpha)}(-a_\alpha) = \\
&= -T_e(\Phi_x \circ R_{\exp(-ta_\alpha)})a_\alpha = \\
&= -T_e\Phi_{\Phi(\exp(-a_\alpha),x)}a_\alpha = \\
&= X_\alpha(\Phi(\exp(-ta_\alpha),x))
\end{aligned}$$

□

Així, els camps fonamentals actuen sobre funcions $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ de la següent manera:

$$(X_\alpha f)(x) = \frac{d}{dt} f\big(\Phi(exp(-ta),x)\big)\Big|_{t=0}$$

Observació: La definició usual de camp fonamental que es pot trobar a la literatura no porta el signe menys, és a dir, és la següent:

$$\begin{array}{rccl} X_\alpha: & M & \to & TM \\ & x & \mapsto & X_\alpha(x) = T_e\Phi_x a_\alpha \end{array}$$

L'assignacióAmb aquest conveni, l'assignació $a_\alpha \mapsto X_\alpha$ constitueix un antiisomorfisme d'àlgebres de Lie entre $Lie(G) = T_eG$ i $\mathfrak{X}(M)$, ja que es verifica:

$$[X_a, X_b] = -X_{[a,b]},\ \forall\, a,b \in T_eG$$

Hem canviat el signe de la definició perquè aquest antiisomorfisme esdevingui un isomorfisme, d'aquesta manera, en els pròxims capítols podrem intentar trobar una acció que tingui uns camps vectorials fonamentals prèviament fixats.

2.8 Prolongació diagonal de camps

En l'estudi de sistemes d'equacions diferencials que admeten un principi de superposició ens trobarem amb la necessitat de caracteritzar un espai on diverses solucions del nostre sistema puguin evolucionar simultàniament, ja que el principi de superposició serà una funció de diverses solucions, ja conegudes, del sistema. En aquest apartat definirem la prolongació diagonal d'un camp vectorial, que no és res més que la còpia del mateix camp a diverses còpies de la varietat on està definit. La definició de prolongació diagonal no es troba en cap de les referències estudiades de la manera que la donem aquí ja que el que segueix és una presentació pròpia. Tot i que el concepte és força senzill hem intentat enmarcar-lo en un context una mica més general de l'estrictement necessari. De fet la definició la definició en què ens basem, i que aparèix en [CGM07], és únicament una definició en coordenades.

És conegut que donades varietats $N_1, \ldots, N_m$, l'espai tangent en el producte s'identifica amb el producte dels espais tangents a cada una de les varietats:

$$T_{(p_1,\ldots,p_m)}(N_1 \times \ldots \times N_m) \cong T_{p_1}N_1 \times \ldots \times T_{p_m}N_m \tag{2.8.2}$$

per exemple, projectant camins en el producte a un camins sobre cada una de les varietats mitjançant les projeccions $\mathrm{pr}_a,\ a = 1 \ldots m$:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{pr}_a : & N_1 \times \ldots \times N_m & \rightarrow & N_a \\ & (p_1, \ldots, p_m) & \mapsto & p_a \end{array}$$

Aquesta idea permet escriure un camp vectorial en el producte $X \in \mathfrak{X}(N_1 \times \ldots \times N_m)$ com a suma a de camps vectorials al llarg de les projeccions:

$$X = \bigoplus_{a=1}^{m} X_a \equiv (X_1, \ldots, X_m), \qquad X_a = T\mathrm{pr}_a \circ X$$

És a dir que podem identificar els espais vectorials:

$$\mathfrak{X}(N_1 \times \ldots \times N_m) \cong \mathfrak{X}(\mathrm{pr}_1) \times \ldots \times \mathfrak{X}(\mathrm{pr}_m)$$

En particular, si considerem que $\mathfrak{X}(N_a) \subset \mathfrak{X}(\mathrm{pr}_a)$ assignant:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(N_a) & \rightarrow & \mathfrak{X}(\mathrm{pr}_a) \\ Y & \mapsto & Y \circ \mathrm{pr}_a \end{array}$$

donats camps $X_a \in \mathfrak{X}(N_a)$, $a = 1 \ldots n$, i mitjançant la identificació anterior es pot construir un nou camp en $X \in \mathfrak{X}(N_1 \times \ldots \times N_m)$. En coordenades aquests camps tenen l'expressió

$$X(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{a=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_a} X_a^j(x_a) \frac{\partial}{\partial x_a^j}$$

on $n_a = \dim N_a$, $x_a = (x_a^1, \ldots, x_a^{n_a})$ són coordenades en la varietat N_a i

$$X_a(x_a) = \sum_{j=1}^{n_a} X_a^j(x_a) \frac{\partial}{\partial x_a^j}$$

són les expressions en coordenades dels camps X_a. És a dir el valor del vector tangent corresponent a $T_{p_a}N_a$, segons la identificació 2.8.2, només depèn de $p_a \in N_a$.

En particular ens interessarà el cas en què $N_i = M,\ i = 1 \ldots m$ i els camps $X_a = X,\ i = 1 \ldots m$.

Definició 2.8.1 *Donat un camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ en una varietat M s'anomena prolongació diagonal de X a $\tilde{M} = M \times \ldots \times M$ (m còpies) al camp vectorial $\tilde{X}$ en $\tilde{M}$:*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{X} : & \tilde{M} & \longrightarrow & T\tilde{M} \cong (TM)^m \\ & (p_1, \ldots, p_m) & \longmapsto & (X(p_1), \ldots, X(p_m)) \end{array}$$

En coordenades, si

$$X(x) = \sum_{j=1}^{n} X^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

aleshores,

$$\tilde{X}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{a=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X^j(x_a) \frac{\partial}{\partial x_a^j}$$

Vegem ara un lema referent a la prolongació diagonal de camps, que caracteritza en quines condicions una combinació $\mathcal{C}^\infty(\tilde{M})$-lineal de prolongacions diagonals és de nou una prolongació diagonal.

Lema 2.8.1 *Siguin $\tilde{X}_\alpha$, $\alpha = 1 \dots r \leq mn$, prolongacions diagonals a $\tilde{M} = M^{m+1}$ de camps vectorials X_α en una varietat M, $\dim M = n$. Suposem que la projecció sobre els m últims factors*

$$\begin{array}{rccc} \pi_0 : & \tilde{M} = M^{m+1} & \longrightarrow & M^m \\ & (p_0, \dots, p_m) & \longmapsto & (p_1, \dots, p_m) \end{array}$$

és tal que $\forall p \in \tilde{M}$ les projeccions $T_p\pi_0\ \tilde{X}_\alpha(p)$, $\alpha = 1 \dots r \leq mn$, són $\mathbb{R}$-linealment independents. Llavors, la combinació $\mathcal{C}^\infty(\tilde{M})$-lineal:

$$\sum_{\alpha=0}^{r} b_\alpha(x_0, \dots, x_m)\tilde{X}_\alpha(x_0, \dots, x_m)$$

és una prolongació diagonal si i només si els coeficients b_α són constants.

Demostració: La implicació inversa és evident, ja que si b_α són constants llavors la combinació donada és la prolongació diagonal de $\sum_{\alpha=0}^{r} b_\alpha X_\alpha$. Vegem la implicació directa.

En coordenades, si

$$X_\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} X_\alpha^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

aleshores,

$$\tilde{X}_\alpha(x_1, \dots, x_m) = \sum_{a=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_\alpha^j(x_a)\frac{\partial}{\partial x_a^j}$$

Suposem que la combinació $\mathcal{C}^\infty(\tilde{M})$-lineal dels camps $\tilde{X}_\alpha$

$$\sum_{\alpha=0}^{r} b_\alpha(x_0, \dots, x_m)\tilde{X}_\alpha(x_0, \dots, x_m) = \sum_{\alpha=0}^{r}\sum_{a=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_\alpha(x_0, \dots, x_m)X_\alpha^j(x_a)\frac{\partial}{\partial x_a^j}$$

és de nou una prolongació diagonal, és a dir, que existeixen funcions $B^j(x_a, t)$ tals que

$$\sum_{\alpha=0}^{r} X_\alpha^j(x_a)b_\alpha(x_0, \dots, x_m) = B^j(x_a)\ ,\ a = 0 \dots n\ ,\ j = 1 \dots m$$

Matricialment:

$$\left(\begin{array}{ccccc}
X_1^1(x_0) & X_2^1(x_0) & X_3^1(x_0) & \dots & X_r^1(x_0) \\
X_1^2(x_0) & X_2^2(x_0) & X_3^2(x_0) & \dots & X_r^2(x_0) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
X_1^n(x_0) & X_2^n(x_0) & X_3^n(x_0) & \dots & X_r^n(x_0) \\ \hline
X_1^1(x_1) & X_2^1(x_1) & X_3^1(x_1) & \dots & X_r^1(x_1) \\
X_1^2(x_1) & X_2^2(x_1) & X_3^2(x_1) & \dots & X_r^2(x_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
X_1^n(x_1) & X_2^n(x_1) & X_3^n(x_1) & \dots & X_r^n(x_1) \\ \hline
X_1^1(x_2) & X_2^1(x_2) & X_3^1(x_2) & \dots & X_r^1(x_2) \\
X_1^2(x_2) & X_2^2(x_2) & X_3^2(x_2) & \dots & X_r^2(x_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
X_1^n(x_2) & X_2^n(x_2) & X_3^n(x_2) & \dots & X_r^n(x_2) \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} b_1(x_0,\dots,x_m) \\ b_2(x_0,\dots,x_m) \\ \dots \\ b_r(x_0,\dots,x_m) \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{c}
B^1(x_0) \\ B^2(x_0) \\ \dots \\ B^r(x_0) \\ \hline
B^1(x_1) \\ B^2(x_1) \\ \dots \\ B^r(x_1) \\ \hline
\dots \\ B^1(x_2) \\ B^2(x_2) \\ \dots \\ B^r(x_2) \\ \hline
\dots
\end{array}\right)$$

Les r funcions b_α són solució del subsistema en les incògnites u_α:

$$\sum_{\alpha=1}^{r} X_\alpha^j(x_a)u_\alpha(x_0,\dots,x_m) = B^j(x_a)\ ,\ \ a=1\dots n\ ,\ \ j=1\dots m$$

De nou, matricialment:

$$\left(\begin{array}{ccccc}
X_1^1(x_1) & X_2^1(x_1) & X_3^1(x_1) & \dots & X_r^1(x_1) \\
X_1^2(x_1) & X_2^2(x_1) & X_3^2(x_1) & \dots & X_r^2(x_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
X_1^n(x_1) & X_2^n(x_1) & X_3^n(x_1) & \dots & X_r^n(x_1) \\ \hline
X_1^1(x_2) & X_2^1(x_2) & X_3^1(x_2) & \dots & X_r^1(x_2) \\
X_1^2(x_2) & X_2^2(x_2) & X_3^2(x_2) & \dots & X_r^2(x_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
X_1^n(x_2) & X_2^n(x_2) & X_3^n(x_2) & \dots & X_r^n(x_2) \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} u_1(x_0,\dots,x_m) \\ u_2(x_0,\dots,x_m) \\ \dots \\ u_r(x_0,\dots,x_m) \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{c}
B^1(x_1) \\ B^2(x_1) \\ \dots \\ B^r(x_1) \\ \hline
B^1(x_2) \\ B^2(x_2) \\ \dots \\ B^r(x_2) \\ \hline
\dots
\end{array}\right)$$

Aquest subsistema consta de $mn \geq r$ equacions i r incògnites, però per hipòtesi la matriu $(X_\alpha^j(x_a))_\alpha^{j,a}$

$$\left(\begin{array}{ccccc}
X_1^1(x_1) & X_2^1(x_1) & X_3^1(x_1) & \dots & X_r^1(x_1) \\
X_1^2(x_1) & X_2^2(x_1) & X_3^2(x_1) & \dots & X_r^2(x_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
X_1^n(x_1) & X_2^n(x_1) & X_3^n(x_1) & \dots & X_r^n(x_1) \\ \hline
X_1^1(x_2) & X_2^1(x_2) & X_3^1(x_2) & \dots & X_r^1(x_2) \\
X_1^2(x_2) & X_2^2(x_2) & X_3^2(x_2) & \dots & X_r^2(x_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
X_1^n(x_2) & X_2^n(x_2) & X_3^n(x_2) & \dots & X_r^n(x_2) \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}\right)$$

té rang r ja que les columnes estan formades pels camps $T\pi_0(\tilde{X}_\alpha)$, que són linealment independents. Per tant, les funcions b_α solucions del sistema estan completament determinades pels coeficients de la matriu $(X^j_\alpha(x_a))^{j,a}_\alpha$ i les funcions $B^j(x_a)$, $a = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m$ i en particular no depenen de x_0.

Finalment, notem que la hipòtesi segons la qual les projeccions $T_p\pi_0\ \tilde{X}_\alpha(p)$, $\alpha = 1 \dots r \leq mn$, són linealment dependents $\forall p \in \tilde{M}$ és equivalent a què $T_p\pi_i\ \tilde{X}_\alpha(p)$, $\alpha = 1 \dots r \leq mn$, siguin linealment independents $\forall p \in \tilde{M}$ sigui quina sigui la projecció

$$\begin{array}{cccc} \pi_i: & \tilde{M} = M^{m+1} & \longrightarrow & M^m \\ & (p_0, \dots, p_m) & \longmapsto & (p_0, \dots, \widehat{p_i}, \dots, p_m) \end{array}$$

(el barret indica l'absència de la component p_i) ja que tenen totes la mateixa imatge i el camp $\tilde{X}$ és una prolongació diagonal. Així podem repetir el mateix argument per provar que les funcions b_α no depenen de cap de les altres x_i, $i = 1, \dots, m$.

□

En [CGM00] es remarca que és un error comú en diverses referències anunciar aquest lema sense la hipòtesi d'independència lineal de les projeccions i dóna el següent contraexemple il·lustratiu:

Exemple 2.8.1 Considerem els camps en $M = \mathbb{R}$:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$$

i les seves corresponents prolongacions diagonals a $\mathbb{R}^2$

$$\tilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \tilde{X}_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

Les projeccions d'aquestes prolongacions són de nou els camps X_1 i X_2, que són sempre $\mathbb{R}$-linealment dependents. La següent combinació $\mathcal{C}^\infty(M)$ lineal amb coeficients no constants dóna com a resultat una prolongació diagonal d'un camp en $\mathbb{R}$, posant de manifest que sense la hipòtesi d'independència lineal el lema no és cert. Considerem:

$$b_1(x,y) = -xy, \qquad b_2(x,y) = x + y$$

Aleshores:

$$b_1(x,y)\tilde{X}_1(x,y) + b_2(x,y)\tilde{X}_2(x,y) = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

que és la prolongació a $\mathbb{R}^2$ de $x^2\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Capítol 3

Sistemes de Lie

En aquest capítol presentarem el teorema de Lie i la seva demostració així com alguns mètodes més pràctics per al càlcul de principis de superposició. Bàsicament el contingut del capítol es troba en [CGM07] i [AHW82], tot i que en la demostració del teorema hem inclòs algunes modifcacions, tal com s'explica més endavant.

3.1 Definicions i exemples

En el capítol anterior hem vist les eines necessàries per poder definir i caracteritzar els sistemes que admeten un principi de superposició. Anem ara, a donar una definició precisa de principi de superposició i a veure quines conseqüències geomètriques té el fet que un sistema no autònom admeti un principi de superposició.

Definició 3.1.1 *Donat un sistema no autònom X en una varietat M de dimensió n, anomenarem un principi de superposició del sistema a una aplicació:*

$$\Phi : M^m \times U \to M$$

on $U \subset \mathbb{R}^n$ és obert, de tal manera que si $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$ són solucions del sistema definides per $t \in I \subset \mathbb{R}$ i $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ són constants aleshores

$$x(t) = \Phi(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t); k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

també és una solució per $t \in I$.

Definició 3.1.2 *Direm que un sistema no autònom X en una varietat M és un sistema de Lie si el camp vectorial que el defineix es pot escriure, localment, de la forma:*

$$X(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) Y_\alpha(x)$$

on els camps Y_α són $\mathbb{R}$-linealment independents i tanquen una àlgebra de Lie de dimensió r, és a dir:

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta}^{\gamma} Y_\gamma, \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$$

*L'àlgebra que tanquen els camps Y_α rep el nom d'*àlgebra de Vessiot-Guldberg-Lie *del sistema.*

Exemple 3.1.1 L'exemple més senzill és el cas d'un sistema lineal:

$$\dot{x} = A(t)\,x,\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

Si anomenem

$$X_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Aleshores el camp que defineix l'equació s'escriu:

$$X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t) x_j \,\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_{ji}$$

i es verifica:

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{jk} X_{il} - \delta_{il} X_{kj}$$

Aquestes són exactament les mateixes relacions que verifiquen els elements de la base estàndard de $GL_n(\mathbb{R})$ que apareixen al capítol anterior. Així si anomenem $\mathfrak{g}$ a l'àlgebra que tanquen els camps X_{ij}, tenim que:

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$$

Exemple 3.1.2 Un altre exemple que treballarem més extensament en el pròxim capítol és l'equació de Riccati escalar:

$$\dot{x}(t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 \tag{3.1.1}$$

Considerem els camps:

$$X_1(x) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2(x) = x\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3(x) = x^2\,\frac{\partial}{\partial x}$$

Clarament el camp que defineix l'equació de Riccati es una combinació d'aquests camps, que verifiquen:

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2\,X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3$$

En el pròxim capítol veurem que aquesta àlgebra de Lie de camps és isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Exemple 3.1.3 Eventualment, podria passar que algun dels b_α fos nul: els camps necessaris per escriure el camp que defineix l'equació no tanquen una àlgebra de Lie, però afegint-ne de nous sí. Per exemple l'equació de segon ordre de l'oscil·lador dependent del temps:

$$\ddot{x} = -\omega^2(t)\,x$$

en ser escrita com un sistema de primer ordre, esdevé:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2(t)\,x \end{cases}$$

Aquest sistema correspon al correspon al camp:

$$X = v\frac{\partial}{\partial x} - \omega^2(t)\,x\frac{\partial}{\partial v}$$

Així, posant:

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial v}, \quad X_2 = v\frac{\partial}{\partial x}$$

es té:

$$X = -\omega^2(t)X_1 + X_2$$

Quan calculem el parèntesi de Lie dels camps X_1 i X_2 obtenim

$$[X_1, X_2] = x\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial v}$$

per tant no tanquen cap àlgebra de Lie. Ara bé, si introduïm:

$$X_3 = \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

es pot comprovar que:

$$[X_1, X_2] = 2X_3, \quad [X_1, X_3] = -2X_1, \quad [X_2, X_3] = X_2$$

3.2 El teorema de Lie

Ara que ja hem vist diversos exemples de sistemes de Lie, anem a veure la versió geomètrica del teorema de Lie, que, com ja hem vist en la introducció, relaciona aquests sistemes amb els que admeten principis de superposició. El teorema de Lie, en la seva forma inicial, està escrit com una equivalència: en el llenguatge que estem usant diria "un sistema admet un principi de superposició si i només si és un sistema de Lie". Ara bé, les proves que n'hem pogut trobar obvien alguns detalls, és a dir, l'enunciat anterior és cert sempre que el principi de superposició no tingui punts singulars i que les prolongacions diagonals dels camps siguin independents en tot punt. Totes aquestes condicions es donen *en general*.

És precisament aquesta noció de *genèric* que esdevé un entrebanc en un dels passos de la prova. Com ja hem comentat serà necessari que la prolongació diagonal dels r camps que intervenen en l'expressió d'un sistema com a sistema de Lie esdevinguin linealment independents en qualsevol punt. Aquests camps són per suposició $\mathbb{R}$-linealment independents com a elements de $\mathfrak{X}(M)$, però poden ser linealment dependents un cop avaluats en un punt $p \in M$: com a elements de T_pM. Per exemple:

Exemple 3.2.1 Els camps de l'equació de Riccati:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x}$$

definits en $M = \mathbb{R}$ són $\mathbb{R}$-linealment independents però són linealment dependents en tot punt.

Més generalment, si $X \in \mathfrak{X}(M)$ és una camp vectorial no nul i $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ no és una funció constant en el suport de X, aleshores X i fX són $\mathbb{R}$-linealment independents però son linealment dependents en tot $p \in M$.

En un principi crèiem que, tal i com apareixia en les referències, sota la hipòtesi que els camps són $\mathbb{R}$-linealment independents les seves prolongacions diagonals a un cert nombre $m \leq r$ serien *genèricament* linealment independents. En aquest punt enteníem que *genèricament* voldria dir "en un obert dens", tal com succeeix en el cas de l'equació de Riccati:

Exemple 3.2.2 Les prolongacions a $m = 3$ còpies de $M = \mathbb{R}$ dels $r = 3$ camps de l'equació de Riccati són "genèricament" linealment independents. En efecte, la matriu de les prolongacions és:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$$

que té rang 3 sempre que x, y i z siguin diferents (vegeu els detalls enel pròxim capítol).

El següent exemple, però, contradiu la suposició:

Exemple 3.2.3 Considerem $M = \mathbb{R}$ i els següents camps:

$$X_1 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = s(x)\, x^2 \frac{\partial}{\partial x}$$

on $s(x)$ és la funció signe de x. Així $s(x)\, x^2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

En aquest cas tenim $r = 2$ camps per tant hauríem d'esperar que les prolongacions dels camps a $m = 2$ còpies de M fossin linealment independents en tot punt, però no és així. Si considerem el determinant de la matriu formada per les prolongacions diagonals d'aquests camps tenim:

$$\begin{vmatrix} x^2 & s(x)\, x^2 \\ y^2 & s(y)\, y^2 \end{vmatrix} = \Big(s(x) - s(y) \Big)\, x^2 y^2$$

que s'anul·la en tot el primer i tercer quadrant de $M^m = \mathbb{R}^2$. Canviant x^2 per $\exp(-1/x^2)$ obtenim un cas anàleg amb camps $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Aquest exemple sembla posar de manifest que la hipòtesi d'independència lineal dels camps hauria de refinar-se per la d'independència lineal local, en cada obert de M. Tot i que hem pogut demostrar que el rang del conjunt de vectors format per les prolongacions diagonals de camps localment linealment independents augmenta estrictament en un cert obert en augmentar el nombre de còpies de la varietat, no podem donar cap més informació sobre aquest obert i no hem sabut trobar en la bibliografia cap teorema similar, doncs sembla ser que aquesta és una qüestió oberta.

A fi de refinar la prova del teorema l'hem separat en dues implicacions, afegint com a hipòtesis la independència lineal de les prolongacions diagonals dels camps en tot punt en una implicació i la no singularitat del principi de superposició en l'altra:

Teorema 3.2.1 *Sigui*

$$X(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) Y_\alpha(x)$$

un sistema de Lie definit en una varietat M. Suposem que els camps vectorials Y_α, $(\alpha = 1 \dots r)$, són $\mathbb{R}$-linealment independents en tot obert no buit de M, de manera que per a certa $m \leq r$ les seves prolongacions diagonals a M^m són linealment independents en tot punt d'un obert $W \subset M^m$. Aleshores el sistema admet un principi de superposició definint localment en $W \times \mathbb{R}^n$.

Demostració:

Com que les prolongacions diagonals dels camps Y_α $(\alpha = 1 \dots r)$ a M^m són linealment independents en tot punt de W també ho són les prolongacions $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_r$ a $\tilde{M} = M^{m+1}$ en tot punt de $M \times W$. Així la distribució $\mathcal{D}_0 = \langle \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_r \rangle$ en $M \times W$ té dimensió constant r i és involutiva ja que els camps Y_α tanquen una àlgebra de Lie i $[\tilde{Y}_\alpha, \tilde{Y}_\beta] = \widetilde{[Y_\alpha, Y_\beta]}$.

Ara, si considerem el fibrat

$$\begin{array}{c} M \times W \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} \\ W \end{array}$$

on $\mathrm{pr}(x_0, x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m)$, tenim que els vectors que pertanyen a la distribució generada per les prolongacions diagonals $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_r$ són transversals a les fibres: això és, no pertanyen a $\ker T\,\mathrm{pr}$. Així, aquesta distribució pot ser, localment, ampliada a una distribució involutiva $\mathcal{D}$ tal que en cada punt $p \in M \times W$:

$$T_p(M \times W) = \ker\, T_p\,\mathrm{pr} \oplus \mathcal{D}_p$$

En efecte, en coordenades adequades en un entorn de qualsevol punt de W, podem considerar que la distribució $\mathcal{D}_0$ està generada pels primers r camps vectorials coordenats $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_r}$. Suposem que en aquest entorn coordenat $\ker T\mathrm{pr} = \langle V_1, \dots, V_n \rangle$. Ara podem reemplaçar n vectors de la base $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_{n(m+1)}}$ per $V_1, \dots, V_n$ (teorema de Steinitz) per obtenir una nova base de $T_p\tilde{M}$. En aquets procés no hem substituït cap dels primers r camps ja que $\ker T\mathrm{pr} \cap \mathcal{D} = \{0\}$, suposem doncs que els camps substituïts són els n últims. Llavors la distribució:

$$\mathcal{D} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{nm}} \right\rangle$$

verifica les propietats desitjades.

Així doncs, en un entorn de qualsevol punt de W podem ampliar $\mathcal{D}_0$ a una distribució involutiva i nm-dimensional $\mathcal{D}$ que pot, mitjançant el teorema de Frobenius, ser integrada per donar lloc a una foliació $\mathcal{F}$ en $M \times W$. Els vectors tangents a les fulles de $\mathcal{F}$ són transversals a les fibres de pr ja que pertanyen a $\mathcal{D}$ que és disjunt amb $\ker T\mathrm{pr}$.

En aquesta situació cada una de les fibres de pr intersequen les fulles de $\mathcal{F}$ en un únic punt: donat $(x_1, \dots, x_n) \in W$ i $k \in \mathbb{R}^n$ existeix un únic punt $x_0 \in M$ tal que $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{F}_k$. Per veure-ho considerem una enumeració Ψ de les fulles de $\mathcal{F}$, és a dir: $\Psi : M \times W \to \mathbb{R}^n$ tal que, localment, les fulles de $\mathcal{F}$ són $\mathcal{F}_k = \Psi^{-1}(k)$ (en particular

Ψ és una submersió). Si podem aplicar el teorema de la funció implícita a Ψ aleshores, localment, existeix una única aplicació $\Phi : W \times \mathbb{R}^n \to M$ tal que si $\Phi(x_1, \dots, x_m; k) = x_0$ aleshores $(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{F}_k$.

Suposem que coneixem solucions $x_1(t), \dots, x_m(t)$ tals que $(x_1(t), \dots, x_m(t)) \in W$ per a tot t en un cert interval $I \subset \mathbb{R}$. Pel que acabem de veure, si $k \in \mathbb{R}^n$, per a cada $t \in I$ existeix un únic $x_0(t) = \Phi(x_1(t), \dots, x_m(t); k)$ tal que $x(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_m(t)) \in \mathcal{F}_k$. Vegem que aquesta funció és un principi de superposició. A cada punt de la corba $x(t)$ el seu vector tangent queda determinat per les següents condicions:

- La seva projecció és el vector tangent a la corba $(x_1(t), \dots, x_m(t))$ en W:

$$\frac{d}{dt}(x_1(t), \dots, x_m(t)) = (X(x_1(t), t), \dots, X(x_m(t), t))$$

- S'expressa de forma única en una base de $T_{x(t)}\mathcal{F}_k = \mathcal{D}_{x(t)}$

Així el vector tangent a $x(t)$ no pot ser cap altre que:

$$\frac{d}{dt}x(t) = (X(x_0(t), t), X(x_1(t), t), \dots, X(x_m(t), t)) = \tilde{X}(x(t), t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)\tilde{Y}_\alpha(x(t))$$

ja que podem prendre $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_r$ com a part d'una base de la distribució, i en particular,

$$\frac{d}{dt}x_0(t) = X(x_0(t), t)$$

tal com volíem veure.

Queda pendent, veure que efectivament podem aplicar el teorema de la funció inversa a $\Psi : M \times W \to \mathbb{R}^n$. Sigui $p = (p_0, p_1, \dots, p_m) \in M \times W$, aleshores:

$$T_p(M \times W) = \ker T_p\mathrm{pr} \oplus \mathcal{D}_p$$

Com que Ψ és constant sobre les fulles de la foliació $\mathcal{F}$, generada per la distribució $\mathcal{D}$, tenim que $T_p\Psi\, v_p = 0$ sempre que $v_p \in \mathcal{D}_p$. Així com que $T_p\Psi$ té rang n (Ψ és una submersió), necessàriament ha de ser bijectiva restringida a $\ker T_p\mathrm{pr}$. Com que els vectors d'aquest nucli tenen la forma $(v_0, 0, \dots, 0)$ amb $v_0 \in T_{p_0}M$, el rang de la matriu de $T_p\Psi$ és el mateix que el de la submatriu formada per les n primeres columnes:

$$\left(\left. \frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \right|_p \right)$$

que, per tant, ha de ser invertible tal com requereix el teorema de la funció implícita.

$\square$

Remarca: Una distribució com la distribució $\mathcal{D}$ que apareix en l'anterior prova s'anomena una *connexió*. Més específicament, una connexió en un fibrat

$$\begin{array}{c} E \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B \end{array}$$

consisteix en donar en cada punt $p \in E$ un complement del $\ker T_p\pi$, és a dir una distribució $\mathcal{D}$ tal que en cada punt

$$T_p E = \ker T_p\pi \oplus D_p$$

Com que habitualment, en el context de l'estudi de fibrats, s'anomenen *vectors verticals* als vectors del nucli de $T\pi$, els vectors que pertanyen a la distribució $\mathcal{D}$ se'ls anomena *vectors horitzontals*. Així els camps vectorials $\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_r$ que apareixen en la prova també s'anomenarien *horitzontals*.

El fet que $\mathcal{D}$ sigui integrable es "mesura" amb el que s'anomena la *curvatura* de la connexió: $\mathcal{D}$ és integrable si i només si la curvatura és zero. Així, la distribució involutiva $\mathcal{D}$ que apareix en la demostració correspon a una connexió de curvatura zero (veure [CGM07]).

Teorema 3.2.2 *Sigui X un sistema no autònom en una varietat M tal que admet un principi de superposició de la forma:*

$$\Phi : M^m \times \mathbb{R}^n \to M$$

Suposem que $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ són m solucions conegudes i definim

$$x_0(t) = \Phi(x_1(t), \ldots, x_m(t); k)$$

Si $k_0 \in \mathbb{R}^n$ i $t_0 \in \mathbb{R}$ són tals que:

$$\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial k}(x_1(t_0), \ldots, x_m(t_0), k_0)\right) \neq 0$$

aleshores en un entorn del punt $x_0(t_0)$ el camp X es pot escriure de la forma

$$X(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) Y_\alpha(x)$$

on els camps Y_α tanquen una àlgebra de Lie de dimensió $r \leq mn$, és a dir:

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta}^{\gamma} Y_\gamma, \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$$

Demostració:
La hipòtesi

$$\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial k}(x_1(t_0), \ldots, x_m(t_0), k_0)\right) \neq 0$$

permet aplicar el teorema de la funció implícita. Així, per k en un entorn $V \subset \mathbb{R}^n$ de k_0 existeix un entorn $W \subset M^{m+1}$ de $(x_0(t_0), x_1(t_0), \ldots, x_m(t_0))$ i una funció

$$\Psi : W \to V$$

tal que, per $|t - t_0|$ prou petit:

$$x_0(t) = \Phi(x_1(t), \ldots, x_m(t); k) \Leftrightarrow k = \Psi(x_0(t), x_1(t), \ldots, x_m(t))$$

Fixats $(x_1(t), \ldots, x_m(t))$ en un entorn de $(x_1(t_0), \ldots, x_m(t_0))$ la funció

$$\bar{\Psi}(\cdot) = \Psi(\cdot, x_1(t), \ldots, x_m(t))$$

definida en un entorn de $\Phi(x_1(t),\dots,x_m(t);k_0)$, és un difeomorfisme amb la seva imatge, que és un obert $V' \subset V \subset \mathbb{R}^n$, i en particular és una submersió. Així, també Ψ és una submersió i les antiimatges de punts $k \in V$ defineixen una foliació en W de codimensió n (dimensió mn):

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_k = \Psi^{-1}(k) \ : \ k \in V\}$$

Els espais tangents a les fulles de $\mathcal{F}$ defineixen una distribució $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ en W que és integrable (les varietats integrals maximals son les fulles de $\mathcal{F}$!) i, per tant, involutiva.

D'altra banda tenim que la prolongació diagonal $\tilde{X}(x_0,x_1,\dots,x_m,t)$ del camp $X(x,t)$ també és tangent a les fulles de $\mathcal{F}$, ja que derivant l'expressió $k = \Psi(x_0(t),x_1(t),\dots,x_m(t))$ i usant les equacions que verifiquen les solucions $x_i(t)$, s'obté:

$$0 = \sum_{a=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_a^j}\frac{dx_a^j}{dt} = \sum_{a=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_a^j} X^j(x_a,t)\ ,\ i = 1\dots n$$

amb la qual cosa

$$\tilde{X}(x_0,x_1,\dots,x_m,t) = \sum_{a=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} X^j(x_a,t)\frac{\partial}{\partial x_a^j} \in \ker T_{(x_0,x_1,\dots,x_m,t)}\Psi$$

i per tant és tangent a les superfícies de nivell (fulles).

Així si denotem per $\mathcal{D}_0$ la distribució generalitzada (la dimensió pot variar punt a punt) generada per $\{\tilde{X}(x_0,\dots,x_m,t) : t \in I\}$ verifica que $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$

Si prenem camps $\tilde{Y}_1,\dots,\tilde{Y}_{r_0}$ que generin $\mathcal{D}_0$ en un entorn de $(x_0(t_0),x_1(t_0),\dots,x_m(t_0))$ i calculem parèntesis de Lie obtindrem noves prolongacions diagonals, ja que $[\tilde{Y}_i,\tilde{Y}_j] = \widetilde{[Y_i,Y_j]}$. Aquestes noves prolongacions no tenen per què pertànyer de nou a $\mathcal{D}_0$, que no té per què ser involutiva, però si a $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$.

Així si calculem tots els parèntesis de Lie possibles entre elements $\tilde{Y}_1,\dots,\tilde{Y}_{r_0}$ i seleccionem d'entre aquests un conjunt de linealment independents obtindrem camps $\tilde{Y}_1,\dots,\tilde{Y}_{r_1}$ amb $r_0 \le r_1 \le mn$ ja que tots pertanyen a $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$. De nou podem repetir el procediment amb els camps $\tilde{Y}_1,\dots,\tilde{Y}_{r_1}$ per obtenir camps $\tilde{Y}_1,\dots,\tilde{Y}_{r_2}$ amb $r_0 \le r_1 \le r_2 \le mn$.

Aquest procés no es pot reproduir de manera indefinida ja que els camps que es van obtenint sempre pertanyen a la distribució $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ que té dimensió finita mn. Així ha d'haver-hi un $r \le mn$ tal que els camps $\tilde{Y}_1,\dots,\tilde{Y}_r$ verifiquin:

$$[\tilde{Y}_\alpha,\tilde{Y}_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{mn} c_{\alpha\beta}^{\gamma}\tilde{Y}_\gamma, \quad \forall \alpha,\beta \in \{1,\dots,mn\} \tag{3.2.2}$$

és a dir, en calcular nous parèntesis no s'obtenen nous camps independents. En l'expressió anterior $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ són en principi funcions diferenciables definides en un entorn de $(x_0(t_0),x_1(t_0),\dots,x_m(t_0))$, però de nou com que $[\tilde{Y}_i,\tilde{Y}_j] = \widetilde{[Y_i,Y_j]}$ és una prolongació diagonal i els $\tilde{Y}_i$ són tots independents podem aplicar el lema 2.8.1 sobre prolongacions diagonals per concloure que $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ són, de fet, constants.

Ara, com que $\tilde{X}(t)$ pertany a la distribució $\mathcal{D}_0$, es pot escriure com a combinació dels camps $\tilde{Y}_1,\dots,\tilde{Y}_r$:

$$\tilde{X}(x_1,\dots,x_m,t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(x_1,\dots,x_m,t)\tilde{Y}_\alpha(x_1,\dots,x_m)$$

però aplicant altra vegada el lema 2.8.1:

$$b_\alpha(x_1, \ldots, x_m, t) = b_\alpha(t)$$

Així:

$$\tilde{X}(x_1, \ldots, x_m, t) = \sum_{\gamma=1}^{r} b_\alpha(t)\tilde{Y}_\alpha(x_1, \ldots, x_m)$$

i també:

$$X(x, t) = \sum_{\gamma=1}^{r} b_\alpha(t)Y_\alpha(x, t)$$

Finalment, el fet que els camps que apareixen en 3.2.2 són prolongacions diagonals implica que:

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta}^{\gamma} Y_\gamma, \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$$

□

3.3 Principis de superposició i accions de grups en varietats

La prova donada en l'apartat anterior no ens dóna cap idea sobre com construir un principi de superposició per un sistema de Lie. Anem a veure que usant el teorema fonamental de correspondència entre grups i àlgebres de Lie podem obtenir alguns mètodes més pràctics.

Hem vist que un sistema admet un principi de superposició si, i només si, el camp vectorial que el defineix es pot escriure, localment, de la forma:

$$X(x, t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)Y_\alpha(x)$$

on els camps Y_α tanquen una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensió r. Mitjançant la correspondència entre àlgebres i grups, sabem que existeix un únic grup de Lie (simplement connex) G (llevat d'isomorfisme) tal que:

$$\mathfrak{g} \cong Lie(G)$$

Si els camps Y_α són complets, podem suposar que són els camps fonamentals d'una certa acció per l'esquerra de G sobre M:

$$\Phi : G \times M \to M$$

és a dir:

$$Y_\alpha(x) = T_e\Phi_x a_\alpha$$

on a_α són les imatges de Y_α en $Lie(G)$. En particular, l'expressió del flux dels camps fonamentals d'una acció, donada per la proposició 2.7.1 del capítol 2 dóna informació de com actua Φ:

$$\phi_{Y_\alpha}(t, x) = \Phi(exp(-ta_\alpha), x), \ \alpha = 1 \ldots r$$

En el pròxim apartat veurem un mètode (Wei i Norman) per a determinar com actua Φ amb les propietats anteriors. Aleshores podríem aplicar la següent proposició:

Proposició 3.3.1 *Si $g(t)$ es la corba en G solució de l'equació diferencial:*

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = -\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) Y_\alpha^R(g(t)) \\ g(t_0) = e \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Aleshores

$$x(t) = \Phi(g(t), x_0)$$

és solució de l'equació diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) Y_\alpha(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Demostració: Clarament es compleix la condició inicial:

$$x(t_0) = \Phi(g(t_0), x_0) = \Phi(e, x_0) = x_0$$

Derivem per veure que es verifica l'equació diferencial:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\Phi(g(t), x_0) = \frac{d}{dt}\Phi_{x_0}(g(t)) = T_{g(t)}\Phi_{x_0}\dot{g}(t)$$

Ara, usant l'equació que per hipòtesi compleix $g(t)$:

$$\dot{x}(t) = T_{g(t)}\Phi_{x_0}\left(-\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) Y_\alpha^R(g(t))\right) = -\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)\, T_{g(t)}\Phi_{x_0}\, T_e R_{g(t)} a_\alpha =$$
$$= -\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)\, T_e\Phi_{\Phi(g(t),x_0)} a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)\left(-T_e\Phi_{x(t)} a_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)\, Y_\alpha(x(t))$$

on s'ha usat que $\Phi_{x_0} \circ R_g = \Phi_{\Phi(g,x_0)}$, i per tant:

$$T_{g(t)}\Phi_{x_0} \circ T_e R_{g(t)} = T_e \Phi_{\Phi(g(t),x_0)}$$

□

Observació: És en aquest punt on intervé el fet que haguem definit els camps fonamentals d'una acció amb el signe canviat. Sigui

$$\psi : \mathfrak{g} \to Lie(G)$$

un isomorfisme. Si volem que els camps Y_α siguin els camps fonamentals d'una acció hauran de verificar:

$$Y_\alpha = X_{\psi(Y_\alpha)}$$

però amb la definició estàndard de camps fonamentals això implicaria:

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = [X_{\psi(Y_\alpha)}, X_{\psi(Y_\beta)}] = -X_{[\psi(Y_\alpha),\psi(Y_\beta)]} = -X_{\psi([Y_\alpha,Y_\beta])} = -[Y_\alpha, Y_\beta]$$

Amb la nova definició no hi ha aquest problema. La definició habitual funcionaria bé amb una acció per la dreta.

3.3.1 Determinació de principis de superposició

La proposició 3.3.1 redueix el problema de la determinació de la solució general dels sistemes de Lie a trobar la corba $g(t)$ en G verificant el problema de valor inicial 3.3.3:

$$\dot{g}(t) = -\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) Y_\alpha^R(g(t)) \,, \qquad g(t_0) = e$$

Aquesta equació es simplifica en el cas de grups multiplicatius de matrius: si apliquem $T_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}$ a ambdues bandes obtenim:

$$\begin{aligned} T_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}\dot{g}(t) &= -\textstyle\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) T_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}\, Y_\alpha^R(g(t)) \\ &= -\textstyle\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) T_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}\, T_e R_{g(t)}\, a_\alpha \\ &= -\textstyle\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)\, a_\alpha \end{aligned}$$

que en el cas de grups de matrius amb el producte esdevé:

$$\dot{g}(t) g^{-1}(t) = -\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)\, a_\alpha$$

o bé:

$$\dot{g}(t) = \left(-\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)\, a_\alpha \right) g(t)$$

que és una equació diferencial lineal. D'aquesta manera el cas d'un sistema de Lie on els coeficients són constants queda resolt, ja que la solució d'un sistema lineal a coeficients constants es pot calcular explícitament:

Proposició 3.3.2 *Sigui X un sistema de Lie amb coeficients constants en una varietat M*

$$X(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha Y_\alpha(x)$$

on els camps Y_α són complets i tanquen una àlgebra de Lie $\mathfrak{g} \cong Lie(G)$, per un cert grup de Lie $G \subset GL_n(\mathbb{R})$. Sigui

$$\Phi : G \times M \to M$$

una acció tal que

$$\phi_{Y_\alpha}(t,x) = \Phi(e^{-t a_\alpha}, x), \;\; \alpha = 1 \ldots r$$

on $\{a_1, \ldots, a_r\}$ és la base de $Lie(G)$ associada a $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ per l'isomorfisme anterior.

Aleshores el flux del sistema ve donat per l'expressió:

$$\phi_X(t, x_0) = \Phi(e^{tA}, x_0)$$

on

$$A = -\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha\, a_\alpha$$

En qualsevol altre cas tenim diferents estratègies per intentar determinar $g(t)$ i per tant obtenir la solució general del sistema ([AHW82], [CGM00]).

Determinació implícita de $g(t)$

L'acció Φ obtinguda en l'apartat anterior no és un principi de superposició tal com l'hem definit, ja que, tot i que ens proporciona qualsevol solució del sistema inicial, no utilitza cap solució coneguda prèviament. Ara bé, el coneixement de solucions servirà per determinar $g(t)$, i així finalment Φ serà un principi de superposició (cf. [AHW82]).

Si coneixem $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ i Φ s'ha de verificar:

$$x_i(t) = \Phi(g(t), x_i(0)), \ i = 1 \ldots m$$

d'on voldríem determinar

$$g(t) = F(x_1(t), \ldots, x_m(t))$$

Com veurem en el quart capítol, una bona elecció de les condicions inicials $x_i(0)$ pot reduir dràsticament la dificultat d'aïllar $g(t)$. En general no és possible escollir les condicions inicials (no és possible escollir les solucions conegudes), però en el cas que veurem un canvi de variables que conserva la forma de l'equació ens porta unes condicions inicials arbitràries a unes d'especialment senzilles.

Finalment, un cop coneguda $g(t)$, substituint, obtindríem el principi de superposició:

$$x(t) = \Phi(g(t), x_0) = \Phi(x_1(t), \ldots, x_m(t); x_0)$$

En el pròxim apartat veurem quin és el nombre m de solucions $x_1, \ldots, x_m$ que calen per tal de poder determinar g d'aquesta manera.

El mètode de Wei-Norman

Tot el procediment anterior depèn de que siguem capaços de trobar una acció

$$\Phi : G \times M \to M$$

Verificant

$$\phi_{Y_\alpha}(t, x) = \Phi(exp(-ta_\alpha), x), \ \alpha = 1 \ldots r$$

Això és, en general, molt difícil. Malgrat que sapiguem com hauria d'actuar Φ sobre els elements de la forma $\exp(-ta_\alpha)$ no tenim cap informació de com actua sobre la resta. Tot i que en alguns casos es pot determinar Φ mitjançant l'observació i la conjectura (com veurem més endavant), aquesta estratègia no resulta eficaç en general.

El següent mètode permet conèixer l'acció sobre qualsevol element en un entorn de $e \in G$ usant coordenades canòniques de segona espècie i va ser proposat a principis dels anys 60 per Wei i Norman ([WN63], [WN64]). Considerem que, donada una base de $\mathfrak{g}$, $\{a_1, \ldots, a_n\}$, expressem $g \in G$ com:

$$g(t) = \exp(-u_1(t)a_1) \exp(-u_2(t)a_2) \ldots \exp(-u_n(t)a_n) \tag{3.3.4}$$

aleshores usant la propietat (ii) de la definició d'acció, si $x \in M$:

$$\begin{aligned} \Phi(g, x) &= \Phi\big(\exp(-u_1(t)a_1) \exp(-u_2(t)a_2) \ldots \exp(-u_n(t)a_n), x\big) = \\ &= \Phi\Big(\exp(-u_1(t)a_1), \Phi\Big(\exp(-u_2(t)a_2), \Phi\big(\ldots, \Phi(\exp(-u_n(t)a_n), x)\big) \ldots\Big)\Big) \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

A més, d'aquesta manera, al substituir l'expressió en coordenades canòniques de segona espècie de $g(t)$ en 3.3.3 obtenim noves equacions per a les funcions $u_i(t)$. Vegem-ho: en general si,

$$g(t) = g_1(t)g_2(t)$$

aleshores:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}g_1(t)g_2(t) &= \tfrac{d}{dt}\mu(g_1(t), g_2(t)) = T_{(g_1(t),g_2(t))}\mu(\dot g_1(t), \dot g_2(t)) = \\ &= T_{g_1(t)}\mu(\cdot, g_2(t))\dot g_1(t) + T_{g_2(t)}\mu(g_1(t), \cdot)\dot g_2(t) = \\ &= T_{g_1(t)}R_{g_2(t)}\dot g_1(t) + T_{g_2(t)}L_{g_1(t)}\dot g_2(t)\end{aligned}$$

Llavors:

$$\begin{aligned}T_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}\dot g(t) &= T_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}\Big(T_{g_1(t)}R_{g_2(t)}\dot g_1(t) + T_{g_2(t)}L_{g_1(t)}\dot g_2(t)\Big) = \\ &= T_{g_1(t)}R_{g_1(t)^{-1}}\dot g_1(t) + T_{g_2(t)}\Big(R_{g_2(t)^{-1}g_1(t)^{-1}} \circ L_{g_1(t)}\Big)\dot g_2(t) = \\ &= T_{g_1(t)}R_{g_1(t)^{-1}}\dot g_1(t) + T_{g_2(t)}\Big(i_{g_1(t)} \circ R_{g_2(t)^{-1}}\Big)\dot g_2(t) = \\ &= T_{g_1(t)}R_{g_1(t)^{-1}}\dot g_1(t) + T_e i_{g_1(t)}\, T_{g_2(t)}R_{g_2(t)^{-1}}\dot g_2(t) = \\ &= T_{g_1(t)}R_{g_1(t)^{-1}}\dot g_1(t) + Ad(g_1(t))\, T_{g_2(t)}R_{g_2(t)^{-1}}\dot g_2(t)\end{aligned}$$

on hem usat la notació $Ad(g) = T_e i_g$ i i_g és l'automorfisme interior de G: $i_g(h) = ghg^{-1}$ ($i_g = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g$).

Notem que en el segon membre de la igualtat anterior apareix una expressió igual que la inicial:

$$\underbrace{T_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}\dot g(t)} = T_{g_1(t)}R_{g_1(t)^{-1}}\dot g_1(t) + Ad(g_1(t))\ \underbrace{T_{g_2(t)}R_{g_2(t)^{-1}}\dot g_2(t)}$$

Per tant podem aplicar reiteradament la fórmula anterior a una corba de la forma (per més detalls veure [CR01])

$$g(t) = \prod_{\alpha=1}^{r} g_\alpha(t)$$

per obtenir:

$$T_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}\dot g(t) = \sum_{\alpha=1}^{r}\left(\prod_{\beta<\alpha} Ad(g_\beta(t))\right) T_{g_\alpha(t)}R_{g_\alpha(t)^{-1}}\dot g_\alpha(t)$$

Ara, si considerem una corba com la de l'expressió 3.3.4, resulta que

$$g_\alpha(t) = \exp(-u_\alpha(t)a_\alpha)$$

i

$$T_{g_\alpha(t)}R_{g_\alpha(t)^{-1}}\dot g_\alpha(t) = -\dot u_\alpha(t)a_\alpha$$

d'on finalment obtenim les equacions per u_α:

$$\sum_{\alpha=1}^{r}\dot u_\alpha(t)\left(\prod_{\beta<\alpha} Ad(\exp(-u_\beta(t)a_\beta))\right) a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)\, a_\alpha$$

amb $u_\alpha(0) = u_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, \ldots, r$. Si expressem la composició d'adjuntes aplicades a a_α en termes de la base:

$$\left(\prod_{\beta<\alpha} Ad(\exp(-u_\beta(t)a_\beta))\right) a_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{r} f_{\alpha\gamma}(t)\, a_\gamma$$

l'expressió anterior esdevé:

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \dot{u}_\alpha(t) \sum_{\gamma=1}^{r} f_{\alpha\gamma}(t)\, a_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)\, a_\alpha$$

o bé:

$$\sum_{\gamma=1}^{r} \left(\sum_{\alpha=1}^{r} \dot{u}_\alpha(t) f_{\alpha\gamma}(t)\right) a_\gamma = \sum_{\gamma=1}^{r} b_\gamma(t)\, a_\gamma$$

Aleshores:

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \dot{u}_\alpha(t) f_{\alpha\gamma}(t) = b_\gamma(t), \quad \gamma = 1 \ldots r$$

Si a través d'aquestes equacions podem resoldre les u_α, aleshores substituint en 3.3.5 obtindríem el flux del sistema.

Mètode d'invariants

Aquest mètode es basa a trobar invariants de l'acció de G sobre M. Com que les solucions de l'equació verifiquen:

$$x_i(t) = \Phi(g(t), x_i(0))$$

si

$$I_0 : M \to \mathbb{R}$$

és una funció G-invariant, és a dir, tal que per a tot $g \in G$ i per a tot $p \in M$

$$I_0(p) = I_0 \circ \Phi(g, p)$$

aleshores:

$$\frac{d}{dt} I_0(x_i(t)) = \frac{d}{dt} I_0 \circ \Phi(g(t), x_i(0)) = \frac{d}{dt} I_0(x_i(0)) = 0$$

Ara, si l'acció compleix certes condicions de regularitat (cf. [Olv86]) existeixen $(I_1, \ldots, I_n)$ invariants independents i la funció

$$\begin{aligned} &I(x(t), x_1(t), \ldots, x_m(t)) = \\ &\quad = (I_1(x(t), x_1(t), \ldots, x_m(t)), \ldots, I_n(x(t), x_1(t), \ldots, x_m(t))) = (c_1, \ldots, c_n) \end{aligned}$$

té rang n. Si disposem de m solucions conegudes podem aïllar mitjançant el teorema de la funció implicita:

$$x(t) = F(x_1(t), \ldots, x_m(t); c_1, \ldots, c_n)$$

3.4 Caracteritzacions del nombre de solucions

El nombre m de solucions necessàries ha de ser tal que la corba $g(t)$ quedi unívocament determinada pel conjunt d'equacions anteriors. Així, intervindrà en la determinació de m l'anomenat subgrup d'isotropia o estabilitzador de $p \in M$:

Definició 3.4.1 *Sigui $\Phi : G \times X \to X$ una acció i sigui $x \in X$. S'anomena* subgrup d'isotropia *de x o* estabilitzador *de x al subgrup:*

$$G_x = \{g \in G : \Phi(g, x) = x\}$$

La corba $g(t)$ que verifica $x(t) = \Phi(g(t), x_0)$ està determinada llevat del producte per la dreta (punt a punt) amb qualsevol corba $\tilde{g}(t) \subset G_{x_0}$:

$$\Phi(\, g(t)\tilde{g}(t)\, ,\, x_0\,) = \Phi\Big(\, g(t)\, ,\, \Phi(\tilde{g}(t), x_0)\, \Big) = \Phi(g(t), x_0)$$

El coneixement de solucions $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ redueix aquesta ambigüitat, ja que si s'ha de verificar

$$\begin{cases} x_1(t) = \Phi(g(t), x_1(0)) \\ x_2(t) = \Phi(g(t), x_2(0)) \\ \ldots \\ x_m(t) = \Phi(g(t), x_m(0)) \end{cases}$$

aleshores $g(t)$ està determinada únicament llevat del producte amb una corba en

$$\bigcap_{i=1}^{m} G_{x_i(0)}$$

Per tant m serà suficient per determinar $g(t)$ quan

$$\bigcap_{i=1}^{m} G_{x_i(0)} = e$$

Per expressar aquesta condició en termes de camps fonamentals podem usar la següent proposició:

Proposició 3.4.1 *Sigui $u \in \mathfrak{g}$ i siguin $X_u \in \mathfrak{X}(M)$ el camp fonamental associat i $\alpha_u(t)$ el subgrup uniparamètric associat. Aleshores si $x \in M$, es compleix:*

$$\alpha_u(t) \subset G_x \Rightarrow X_u(x) = 0$$

Demostració: Suposem que $\alpha_u(t) \subset G_x$. Llavors

$$X_u(x) = X_u\Big(\Phi(\alpha(t), x)\Big) = -T_e\Phi_{\Phi(\alpha(t),x)}\, u = -T_{\alpha(t)}\Phi_x\, \underbrace{T_e R_{\alpha(t)}\, u}_{\dot{\alpha}(t)} = -\frac{d}{dt}\Phi_x(\alpha(t)) = -\frac{d}{dt}x = 0$$

□

Proposició 3.4.2 *Si $(x_1, \ldots, x_m) \in M^m$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, és tal que $\forall \alpha \in \{1, \ldots, r\}$*

- $\tilde{X}_\alpha(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$

- *$X_\alpha(x_i)$, són linealment independents $\forall\, i = 1 \dots m$.*

Aleshores

$$\bigcap_{i=1}^{m} G_{x_i} = e$$

Demostració: Primer de tot notem que $G_{x_i} = \Phi_{x_i}^{-1}(x_i)$ són un subgrups tancats i per tant també ho és $H = \bigcap_{i=1}^{m} G_{x_i}$. Pel teorema del subgrup tancat H és un subgrup de Lie.

Suposem que $H \neq \{e\}$. Sigui llavors $u \in T_eH \subset T_eG$, llavors $u = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha a_\alpha$ i

$$X_u(x) = T_e\Phi_x\, u = T_e\Phi_x \left(\sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha a_\alpha \right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_\alpha T_e\Phi_x\, a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha X_\alpha(x)$$

Així per la proposició anterior, com que $\alpha_u(t) \subset H \subset G_{x_i}$, $i = 1 \dots m$:

$$0 = X_u(x_i) = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha X_\alpha(x_i) \tag{3.4.6}$$

D'altra banda per hipòtesi tenim que:

$$\tilde{X}_\alpha(x_1, \dots, x_m) \neq 0$$

La qual cosa implica que per a cada α existeix un $i_\alpha \in \{1, \dots, m\}$ tal que:

$$X_\alpha(x_{i_\alpha}) \neq 0$$

Però això, juntament amb 3.4.6, implica $\lambda_\alpha = 0, \alpha = 1 \dots r$, ja que els $X_\alpha(x_i)$ són linealment independents.

Així hem vist que $u \in T_eH \Rightarrow u = 0$, la qual cosa és una contradicció amb $H \neq \{e\}$.

$\square$

Capítol 4

L'equació de Riccati

L'estudi del'equció de Riccati com a sistema de Lie eparèix en moltes referències. En el que segueix en hem basat en [CGM00] per al cas escalar i en [HW83] per al cas matricial.

4.1 L'equació de Riccati escalar

Anem a veure el primer exemple detallat de càlcul d'un principi de superposició. Seguim el mètode de calcular $g(t)$ a partir de l'acció associada a l'equació tal com apareix en [CGM00]. Veurem que en aquest cas podem calcular explícitament $g(t)$ i trobar un principi de superposició global.

En l'exemple 3.1.2 hem vist que l'equació de Riccati escalar:

$$\dot{x}(t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 \tag{4.1.1}$$

defineix un sistema de Lie, mitjançant els camps:

$$X_1(x) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2(x) = x\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3(x) = x^2\,\frac{\partial}{\partial x}$$

que verifiquen les següents relacions:

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2\,X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3$$

Per tant formen una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensió 3 que resulta ser isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ mitjançant l'assignació:

$$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$$

que assigna $X_i \mapsto M_i$ on:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'altra banda els fluxos dels camps X_i són:

$$\phi_{X_1}(t, x_0) = t + x_0, \quad \phi_{X_2}(t, x_0) = x_0 e^t, \quad \phi_{X_3}(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

El camp X_3 no és complet si prenem com a varietat on està definida l'equació $M = \mathbb{R}$, però sí si considerem $M = \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Llavors hem de trobar una acció:

$$\Phi : SL_n(\mathbb{R}) \times \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$$

verificant:

$$\Phi\left(\exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x_0\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x_0\right) = t + x_0$$

$$\Phi\left(\exp\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}\right), x_0\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, x_0\right) = x_0 e^t$$

$$\Phi\left(\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -t & 0 \end{pmatrix}, x_0\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}, x_0\right) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

En aquest cas, una certa observació permet arribar a una expressió explícita de l'àcció: si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

llavors

$$\Phi(A, x_0) = \frac{a x_0 + b}{c x_0 + d}, \quad \Phi(A, \infty) = \frac{a}{c}, \quad \Phi\left(A, \frac{-d}{c}\right) = \frac{b}{d}$$

Naturalment, això no és sempre així i s'ha de recórrer a altres mètodes per poder determinar $\Phi(g, x_0)$.

Per conèixer en nombre m de solucions necessàries per trobar un principi de superposició ens hem de fixar en les prolongacions diagonals: han de ser diferents de zero i linealment independents en qualsevol punt amb coordenades diferents (veure proposició 3.4.1).

Per $m = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad x\frac{\partial}{\partial x}, \quad x^2\frac{\partial}{\partial x}$$

són sempre linealment dependents.

Per $m = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

també són linealment dependents en cada punt.

En canvi, per $m = 3$:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial z}$$

són no nuls i linealment independents sempre que les coordenades siguin diferents, ja que per la fórmula del determinant de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x)$$

és diferent de zero si x, y i z són diferents. Per tant $m = 3$.

Siguin doncs $x_1(t), x_2(t)$ i $x_3(t)$ tres solucions de 4.1.1. Volem usar:

$$x_i(t) = \Phi(A(t), x_i(0)), \; i = 1, 2, 3$$

per determinar $A(t)$. Ara bé, donats tres punts $x_1,\ x_2,\ x_3$ en $\mathbb{R}$ sempre existeix una transformació de la forma:

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

tal que:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \mapsto & 1 \\ x_2 & \mapsto & 0 \\ x_3 & \mapsto & \infty \end{array}$$

A més, aquest tipus de transformacions converteixen equacions de Riccati en noves equacions de Riccati (amb coeficients diferents). Així a l'hora d'intentar determinar $A(t)$ podem suposar que:

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = \infty$$

Per tant, hem de resoldre:

$$x_1(t) = \frac{a(t) + b(t)}{c(t) + d(t)}, \quad x_2(t) = \frac{b(t)}{d(t)}, \quad x_3(t) = \frac{a(t)}{c(t)}$$

d'on, si suposem que $d(t) \neq 0$ (en cas contrari $c(t) \neq 0$, perquè l'exponencial d'una matriu en $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ pertany a $SL_2(\mathbb{R})$ i té determinant no nul, i es procedeix igual):

$$a(t) = x_3(t)\frac{x_2(t) - x_1(t)}{x_1(t) - x_3(t)}d(t), \quad b(t) = x_2(t)d(t), \quad c(t) = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{x_1(t) - x_3(t)}d(t)$$

finalment substituint i simplificant:

$$x(t) = \Phi(A(t), x_0) = \frac{(x_2(t) - x_1(t))\, x_3(t)\, x_0 + (x_1(t) - x_3(t))\, x_2(t)}{(x_2(t) - x_1(t))\, x_0 + (x_1(t) - x_3(t))}$$

que és el principi de superposició clàssic de l'equació de Riccati. De fet posant $k = x_0$ i aillant s'obté la fórmula:

$$k = \frac{(x_1(t) - x_3(t))(x_2(t) - x(t))}{(x_2(t) - x_1(t))(x(t) - x_3(t))}$$

que apareixia a la introducció.

4.2 L'equació de Riccati matricial

Els resultats que apareixeran en aquesta secció es troben a [HW83], la majoria sense prova. Aquí arribarem a aquests resultats per un camí diferent i provant tots els passos. La diferència entre els dos enfocaments és la següent: en l'article [HW83] es parteix d'una acció:

$$\Phi : G \times M \to M$$

i es considera l'aplicació que assigna cada element de $Lie(G)$ el seu camp fonamental:

$$\phi : Lie(G) \to \mathfrak{X}(M)$$

Aleshores, Φ permet construir un principi de superposició per equacions de la forma $\phi(v)$, $v \in \mathfrak{g}$. Evidentment, d'aquesta manera per a cada acció que se'ns acudeixi podem calcular l'equació associada als camps fonamentals i construir un principi de superposició. Aquí no hem volgut seguir aquesta estratègia ja que, en principi, hom no sap quina és l'equació que obtindrà d'aquest procés i per tant fem l'acostament contrari: partim de l'equació i reconstruïm el grup i l'acció usant les propietats que han de complir i la informació procedent del cas escalar del capítol anterior.

Donada una matriu $X \equiv X(t)$ de dimensions $n \times m$, s'anomena *equació de Riccati matricial* a la següent equació diferencial:

$$\dot{X} = A + BX + XC + XDX$$

on:

- $A \equiv A(t)$ és una matriu $n \times m$
- $B \equiv B(t)$ és una matriu $n \times n$
- $C \equiv C(t)$ és una matriu $m \times m$
- $D \equiv D(t)$ és una matriu $m \times n$

Clarament, per $n = 1$ s'obté l'equació de Riccati escalar. Podem pensar que aquesta equació està definida en $M = \mathbb{R}^{nm}$ identificant-lo amb l'espai de matrius $n \times m$.

Anem a veure que l'equació de Riccati es pot escriure com un sistema de Lie. Hem de considerar el camp vectorial associat a l'equació. Si anomenem (x_{ij}) a les components de X, l'equació per x_{ij} és:

$$\dot{x}_{ij} = a_{ij} + \sum_{r=1}^{n} b_{ir} x_{rj} + \sum_{s=1}^{m} c_{sj} x_{is} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} d_{lk} x_{il} x_{kj}$$

Així el camp vectorial que defineix l'equació és:

$$\mathcal{X}(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij} + \sum_{r=1}^{n} b_{ir} x_{rj} + \sum_{s=1}^{m} c_{sj} x_{is} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} d_{lk} x_{il} x_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

Anomenant:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_{ij}} && i = 1 \ldots n,\ j = 1 \ldots m \\
B_{ir} &= \sum_{j=1}^{m} x_{rj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} && i, r = 1 \ldots n \\
C_{sj} &= \sum_{i=1}^{n} x_{is} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} && j, s = 1 \ldots m \\
D_{lk} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{il} x_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} && k = 1 \ldots n,\ l = 1 \ldots m
\end{aligned}$$

podem escriure el camp com:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(X, t) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\ A_{ij}(X) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} b_{ir}(t)\ B_{ir}(X) + \\
& \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} c_{sj}(t)\ C_{sj}(X) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} d_{lk}(t)\ D_{lk}(X)
\end{aligned}$$

Proposició 4.2.1 *Els camps A_{ij}, B_{ir}, C_{sj} i D_{lk} verifiquen les relacions:*

$$
\begin{array}{rclcrcl}
[A_{ij}, A_{kl}] & = & 0 & & [B_{ir}, C_{sj}] & = & 0 \\
[A_{ij}, B_{kr}] & = & \delta_{ir} A_{kj} & & [B_{ir}, D_{ut}] & = & \delta_{it} D_{ur} \\
[A_{ij}, C_{sl}] & = & \delta_{sj} A_{il} & & [C_{sj}, C_{ul}] & = & \delta_{ju} C_{sl} - \delta_{sl} C_{uj} \\
[A_{ij}, D_{lk}] & = & \delta_{jl} B_{ik} + \delta_{ik} C_{lj} & & [C_{sj}, D_{ut}] & = & \delta_{ju} D_{st} \\
[B_{ir}, B_{kt}] & = & \delta_{it} B_{kr} - \delta_{kr} B_{it} & & [D_{ij}, D_{lk}] & = & 0
\end{array}
$$

i, per tant, tanquen una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Demostració: Veure Apèndix. □

Així, hem vist que l'equació de Riccati defineix un sistema de Lie. Ara, per poder identificar l'àlgebra de Lie de la proposició anterior amb una àlgebra de Lie de matrius comencem per calcular la dimensió de $\mathfrak{g}$. Les úniques dependències lineals que poden aparèixer entre els camps anteriors són entre els camps B's i C's ja que el grau de les components impedeix qualsevol altra relació. Anem a veure quines relacions verifiquen aquests camps. Suposem que:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_{ir} B_{ir} + \sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \mu_{sj} C_{sj} = 0$$

Llavors:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_{ir} B_{ir} + \sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \mu_{sj} C_{sj} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ir} x_{rj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} + \sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mu_{sj} x_{is} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{r=1}^{n} \lambda_{ir} x_{rj} + \sum_{s=1}^{m} \mu_{sj} x_{is} \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}} = 0
\end{aligned}
$$

La qual cosa implica que per a cada $i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m$:

$$\sum_{r=1}^{n} \lambda_{ir} x_{rj} + \sum_{s=1}^{m} \mu_{sj} x_{is} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{ir} = 0, & i \neq r \\ \mu_{rj} = 0, & r \neq j \\ \lambda_{ii} + \mu_{jj} = 0 \end{cases}$$

Així els únics coeficients que anul·len la relació (llevat de multiplicar per una constant) són:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ii} - \sum_{j=1}^{m} C_{jj} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} = 0$$

Per tant tenim una única relació de dependència lineal entre els camps. Ara hem de tenir en compte que

- $A_{ij},\ i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots m$, són nm camps
- $B_{ir},\ i, r = 1 \dots n$, són n^2 camps
- $C_{sj},\ j, s = 1 \dots m$, són m^2 camps

- $D_{lk},\ k = 1 \dots n,\ l = 1 \dots m$, són nm camps

Per tant en total en tenim:

$$nm + n^2 + m^2 + nm = (n+m)^2$$

Tenint en compte la relació de dependència lineal entre els camps B's i C's podem establir que:

$$\dim \mathfrak{g} = (n+m)^2 - 1$$

El fet que $\dim \mathfrak{sl}_{n+m}(\mathbb{R}) = (n+m)^2 - 1$ i que l'àlgebra de Lie per al cas unidimensional (1×1) sigui $\mathfrak{sl}_{1+1}(\mathbb{R})$ fa sospitar que podria ser $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_{n+m}(\mathbb{R})$.

Anem, a veure que efectivament $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_{n+m}(\mathbb{R})$. Definim, a tal efecte, la següent aplicació:

$$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}_{n+m}(\mathbb{R})$$

que a cada un dels camps anteriors li fa correspondre:

$$\begin{array}{lcll} A_{ij} & \mapsto & -e_{i,j+n} & i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots m \\ B_{ir} & \mapsto & -e_{i,r} & i, r = 1 \dots n, \quad i \neq r \\ C_{sj} & \mapsto & e_{s+n,j+n} & s, j = 1 \dots m, \quad s \neq j \\ D_{lk} & \mapsto & e_{l+n,k} & l = 1 \dots m,\ k = 1 \dots n \end{array}$$

i

$$\begin{array}{lcll} B_{ii} & \mapsto & -e_{i,i} + \frac{1}{n+m} I_{n+m} & i = 1 \dots n \\ C_{jj} & \mapsto & e_{j+n,j+n} - \frac{1}{n+m} I_{n+m} & j = 1 \dots m \end{array}$$

On la matriu I_{m+n} és la identitat $(n+m) \times (n+m)$ i les matrius e_{ij} són les matrius $(n+m) \times (n+m)$ introduïdes en el segon capítol, que tenen un 1 a la posició (i,j) i zeros a la resta i que formen una base de $\mathfrak{gl}_{n+m}(\mathbb{R})$. Recordem que el parèntesi a $\mathfrak{gl}_{n+m}(\mathbb{R})$ és el commutador del producte de matrius, que sobre els elements e_{ij} pren la forma:

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{kj}$$

Vegem que φ es pot estendre linealment, ja que malgrat que els camps que hem utilitzat per definir-la no formen una base de $\mathfrak{g}$, les relacions que compleixen es conserven:

$$\begin{aligned} 0 = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} B_{ii} - \sum_{j=1}^{m} C_{jj}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(B_{ii}) - \sum_{j=1}^{m} \varphi(C_{jj}) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\left(-e_{ii} + \frac{1}{n+m} I_{n+m}\right) &- \sum_{j=1}^{m}\left(e_{j+n,j+n} - \frac{1}{n+m} I_{n+m}\right) = \\ = -\sum_{i=1}^{n} e_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+m} I_{n+m} &- \sum_{j=1}^{m} e_{j+n,j+n} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n+m} I_{n+m} = \\ = -I_{n+m} + \frac{n}{n+m} I_{n+m} &+ \frac{m}{n+m} I_{n+m} = 0 \end{aligned}$$

Així com que φ és lineal i injectiva i les dimensions de l'espai d'arribada i sortida són iguals tenim que φ és un isomorfisme d'espais vectorials. Podem comprovar ara, que de fet també és un isomorfisme d'àlgebres de Lie.

Proposició 4.2.2 *L'aplicació:*

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}_{n+m}(\mathbb{R})$$

és un isomorfisme d'àlgebres de Lie.

Demostració: Veure Apèndix. $\square$

Podem resumir els diferents resultats que hem obtingut sobre l'equació de Riccati matricial:

Proposició 4.2.3 *L'equació de Riccati matricial es pot escriure com un sistema de Lie amb àlgebra de Lie associada $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_{n+m}(\mathbb{R})$*

Ara per intentar trobar l'acció hauríem de conèixer el fluxos dels camps A, B, C i D. Ara bé disposem d'informació sobre l'acció en el cas unidimensional:

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x_0\right) = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}$$

que ens servirà per determinar l'acció en el cas general. Així doncs ens disposem a demostrar que:

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}, X_0\right) = (MX_0 + N)(PX_0 + Q)^{-1}$$

compleix les equacions:

$$\begin{aligned}
\phi_{A_{ij}}(t, X_0) &= \Phi(\exp(-t\,\varphi(A_{ij})), X_0) \\
\phi_{B_{ir}}(t, X_0) &= \Phi(\exp(-t\,\varphi(B_{ir})), X_0) \\
\phi_{C_{sj}}(t, X_0) &= \Phi(\exp(-t\,\varphi(C_{sj})), X_0) \\
\phi_{D_{lk}}(t, X_0) &= \Phi(\exp(-t\,\varphi(D_{lk})), X_0)
\end{aligned}$$

on

$$X_0 = \begin{pmatrix} x^0_{11} & x^0_{12} & x^0_{13} & x^0_{14} & \dots & x^0_{1m} \\ x^0_{21} & x^0_{22} & x^0_{23} & x^0_{24} & \dots & x^0_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^0_{n1} & x^0_{n2} & x^0_{n3} & x^0_{n4} & \dots & x^0_{nm} \end{pmatrix}$$

Per això cal calcular els fluxos dels diferents camps i les accions sobre els elements de la base de $Lie(G)$ i verificar les igualtats. Seguidament s'exposen els càlculs per als camps A_{ij}, B_{ir} i D_{lk}. El cas dels camps C_{sj} és anàleg al dels B_{ir} i l'hem omès per no allargar-nos innecessàriament.

En el que segueix usarem la notació $e^{k\times l}_{ij}$ per indicar les matrius de la base estàndard de l'espai de matrius de dimensions $k \times l$. L'absència de superíndex indica que estem considerant matrius $(n+m)\times(n+m)$.

Flux dels A_{ij}

$$A_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

defineix les equacions:

$$\begin{cases} \dot{x}_{ij} & = & 1 \\ \dot{x}_{kl} & = & 0\ , \quad (k,l) \neq (i,j) \end{cases}$$

així:

$$\phi_{A_{ij}}(t, X_0) = X_0 + t\, e_{ij}^{n\times m}$$

D'altra banda, $\varphi(A_{ij}) = -e_{i,j+n}$ i per tant:

$$\exp(-t\,\varphi(A_{ij})) = I_{n+m} + t\, e_{i,j+n} = \begin{pmatrix} I_n & e_{ij}^{n\times m} \\ 0_{m\times n} & I_m \end{pmatrix}$$

d'on:

$$\Phi(\exp(-t\,\varphi(A_{ij})), X_0) = (I_n X_0 + e_{ij}^{n\times m})(0_{m\times n} X_0 + I_m)^{-1} = X_0 + t\, e_{ij}^{n\times m}$$

Flux dels B_{ir}, $(i \neq r)$

$$B_{ir} = \sum_{j=1}^{m} x_{rj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

defineix les equacions:

$$\begin{cases} \dot{x}_{ij} & = & x_{rj}\ , & j = 1 \dots m \\ \dot{x}_{kj} & = & 0\ , & k \neq i,\ j = 1 \dots m \end{cases}$$

d'on:

$$\begin{cases} x_{ij}(t) & = & x_{rj}^0 t + x_{ij}^0\ , & j = 1 \dots m \\ x_{kj}(t) & = & x_{kj}^0\ , & k \neq i,\ j = 1 \dots m \end{cases}$$

Finalment

$$\phi_{B_{ir}}(t, X_0) = X_0 + \sum_{j=1}^{m} t\, x_{rj}^0\, e_{ij}^{n\times m}$$

D'altra banda, $\varphi(B_{ir}) = -e_{ir}$ i per tant:

$$\exp(-t\,\varphi(B_{ir})) = I_{n+m} + t\, e_{ir} = \begin{pmatrix} I_n + t\, e_{ir}^{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & I_m \end{pmatrix}$$

d'on:

$$\Phi(\exp(-t\,\varphi(B_{ir})), X_0) = ((I_n + t\, e_{ir}^{n\times n}) X_0 + 0_{n\times m})(0_{m\times n} X_0 + I_m)^{-1} = X_0 + t\, e_{ir}^{n\times n}\, X_0$$

però

$$(e_{ir}^{n\times n}\, X_0)_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\alpha i} \delta_{rk} x_{k\beta}^0 = \delta_{\alpha i} x_{r\beta}^0$$

i per tant

$$e_{ir}^{n\times n}\, X_0 = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{m} \delta_{\alpha i} x_{r\beta}^0\, e_{\alpha\beta}^{n\times m} = \sum_{\beta=1}^{m} x_{r\beta}^0\, e_{i\beta}^{n\times m}$$

Flux dels B_{ii}

$$B_{ii} = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

defineix les equacions:

$$\begin{cases} \dot{x}_{ij} &= x_{ij} , \qquad j = 1 \ldots m \\ dotx_{kj} &= 0 , \qquad k \neq i,\ j = 1 \ldots m \end{cases}$$

d'on:

$$\begin{cases} x_{ij}(t) &= x_{ij}^0 e^t , \qquad j = 1 \ldots m \\ x_{kj}(t) &= x_{kj}^0 , \qquad k \neq i,\ j = 1 \ldots m \end{cases}$$

Matricialment:

$$\phi_{B_{ii}}(X_0, t) = X_0 + (e^t - 1) \sum_{j=1}^{m} x_{ij}^0 e_{ij}$$

D'altra banda $\varphi(B_{ii}) = -e_{ii} + \frac{1}{n+m} I_{n+m}$, d'on, usant que si $[A, B] = 0$ llavors $\exp\big(t(A+B)\big) = \exp(tA)\exp(tB)$:

$$\exp(-t\varphi(B_{ii})) = e^{\frac{-t}{n+m}} \exp(t\, e_{ii}) = e^{\frac{-t}{n+m}} \Big[I_{n+m} + (e^t - 1)\, e_{ii} \Big] = e^{\frac{-t}{n+m}} \begin{pmatrix} I_n + (e^t - 1)\, e_{ii}^{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & I_m \end{pmatrix}$$

Així:

$$\begin{aligned} \Phi(\exp(-t\varphi(B_{ii})), X_0) &= (I_n + (e^t - 1)\, e_{ii}^{n\times n} X_0 + 0_{n\times m})(0_{m\times n} X_0 + I_m)^{-1} = \\ &= X_0 + (e^t - 1) e_{ii}^{n\times n} X_0 = X_0 + (e^t - 1) \sum_{j=1}^{m} x_{ij}^0 e_{ij} \end{aligned}$$

el terme $e^{\frac{-t}{n+m}}$ desapareix ja que es troba tant en el numerador com en el denominador.

Flux dels D_{lk}

$$D_{lk} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{il} x_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

defineix les equacions:

$$\begin{cases} \dot{x}_{kl} &= x_{kl}^2 \\ \dot{x}_{kj} &= x_{kl} x_{kj} , \qquad j \neq l \\ \dot{x}_{il} &= x_{il} x_{kl} , \qquad i \neq k \\ \dot{x}_{ij} &= x_{il} x_{kj} , \quad i \neq k,\ j \neq l \end{cases}$$

que es poden anar resolent per ordre: per $i \neq k$ i $j \neq l$:

$$x_{kl}(t) = x_{kl}^0 + \frac{(x_{kl}^0)^2 t}{1 - x_{kl}^0 t}$$

$$x_{kj}(t) = x_{kj}^0 + \frac{x_{kl}^0 x_{kj}^0 t}{1 - x_{kl}^0 t}$$

$$x_{il}(t) = x_{il}^0 + \frac{x_{il}^0 x_{kl}^0 t}{1 - x_{kl}^0 t}$$

$$x_{ij}(t) = x_{ij}^0 + \frac{x_{il}^0 x_{kj}^0 t}{1 - x_{kl}^0 t}$$

Notem que la última expressió serveix de solució general del sistema independentment de si i o j coincideixen amb k o l.

Sembla difícil trobar una expressió pe al flux de D_{lk}, però tot seguit veurem que és:

$$\phi_{D_{ij}}(t, X_0) = X_0 + \frac{t}{1 - tx_{kl}} X_0 e_{lk}^{m\times n} X_0$$

D'altra banda, $\varphi(D_{lk}) = e_{l,k+n}$ i per tant:

$$\exp(-t\,\varphi(D_{lk})) = I_{n+m} - t\,e_{l,k+n} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -t\,e_{lk}^{m\times n} & I_m \end{pmatrix}$$

d'on:

$$\begin{aligned} \Phi(\exp(-t\,\varphi(D_{lk})), X_0) &= (I_n X_0 + 0_{n\times m})(-t\,e_{lk}^{m\times n} X_0 + I_m)^{-1} = \\ = \quad X_0 &\left(\frac{t}{1 - tx_{kl}}\, e_{lk}^{m\times n} X_0 + I_m\right) = \frac{t}{1 - tx_{kl}}\, X_0 e_{lk}^{m\times n} X_0 + X_0 \end{aligned}$$

Finalment, es pot utilitzar la fórmula

$$(X_0 e_{lk}^{m\times n} X_0)_{\alpha\beta} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} x_{\alpha r}^0 \delta_{rl}\delta_{ks} x_{s\beta}^0 = x_{\alpha l}^0 x_{k\beta}^0$$

per comprovar que:

$$\begin{aligned} \Phi(\exp(-t\,\varphi(D_{lk})), X_0)_{kl} &= x_{kl}^0 + \frac{t}{1 - tx_{kl}} (x_{kl}^0)^2 \\ \Phi(\exp(-t\,\varphi(D_{lk})), X_0)_{kj} &= x_{kj}^0 + \frac{t}{1 - tx_{kl}} x_{kl}^0 x_{kj}^0 \\ \Phi(\exp(-t\,\varphi(D_{lk})), X_0)_{il} &= x_{il}^0 + \frac{t}{1 - tx_{kl}} x_{il}^0 x_{kl}^0 \\ \Phi(\exp(-t\,\varphi(D_{lk})), X_0)_{ij} &= x_{ij}^0 + \frac{t}{1 - tx_{kl}} x_{il}^0 x_{kj}^0 \end{aligned}$$

D'aquesta manera podem completar la proposició 4.2.3:

Teorema 4.2.1 *L'equació de Riccati matricial es pot escriure com un sistema de Lie amb àlgebra de Lie associada $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_{n+m}(\mathbb{R})$. Els camps vectorials que defineixen l'equació es corresponen amb els camps fonamentals de l'acció:*

$$\Phi:\ SL_{m+n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}^{nm}$$

definida per:

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}, X\right) = (MX + N)(PX + Q)^{-1}$$

4.3 L'equació de Riccati quadrada

En el cas en què les matrius que apareixen en l'equació de Riccati són matrius quadrades resulta prou senzill arribar a trobar explícitament fórmules de superposició. Seguidament presentem un mètode per obtenir aquestes fórmules proposat en [HW83].

Hem vist en el capítol 3 que l'equació que compleix la corba $g(t)$ en la proposició 3.3.1 es redueix en el cas que l'acció provingui d'un grup multiplicatiu de matrius a:

$$\dot{g}(t) = \left(-\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)\, a_\alpha \right) g(t)$$

En el nostre cas això esdevé:

$$\begin{pmatrix} \dot{M} & \dot{N} \\ \dot{P} & \dot{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ -D & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$$

Aquesta equació resol el problema completament en el cas de matrius constants, ja que es pot integrar explícitament. En qualsevol altre cas continuem amb l'estratègia de generalitzar els resultats del cas escalar. Suposem que tenim solucions: $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t)$, mitjançant un canvi lineal podem suposar que corresponen a condicions inicials:

$$W_1(t_0) \to \infty, \quad W_2(t_0) = 0, \quad W_3(t_0) = I_n$$

aleshores s'ha de verificar:

$$W_1(t) = MP^{-1}, \quad W_2(t) = NQ^{-1}, \quad (M+N)(P+Q)^{-1}$$

Ara podem usar aquestes equacions per simplificar l'equació que hauria de complir una nova solució $W(t)$ amb $W(t_0) = U$:

$$W = (MU + N)(PU + Q)^{-1}$$

Substituint, aquesta expressió esdevé:

$$W = \Big(W_1\big(W_3 - W_1\big)^{-1}\big(W_2 - W_3\big)QU + W_2 Q\Big)\Big(\big(W_3 - W_1\big)^{-1}\big(W_2 - W_3\big)QU + Q\Big)^{-1} \tag{4.3.2}$$

D'on:

$$R := (W_2 - W_3)^{-1}(W_3 - W_1)(W_1 - W)^{-1}(W - W_2) = QUQ^{-1}$$

R s'anomena la *raó anharmònica* de les matrius W_i i és conjugada d'una matriu constant. En el cas escalar això és equivalent a què R sigui constant i les expressions anteriors ens proporcionen el conegut principi de superposició. Quan $n > 1$ cal usar noves solucions per determinar Q. Suposem que coneixem dues solucions més: $W_4(t)$ i $W_5(t)$ amb $W_4(t_0) = U_4$ i $W_5(t_0) = U_5$ i definim:

$$R_a = (W_2 - W_3)^{-1}(W_3 - W_1)(W_1 - W_a)^{-1}(W_a - W_2) = QU_aQ^{-1}, \quad a = 4, 5$$

Aquestes dues equacions ens han de permetre determinar $Q(t)$ i inserint en 4.3.2 determinar un principi de superposició:

$$W = \Phi(W_1, W_2, W_3, W_4, W_5; U)$$

Per poder-ho fer, però, hem de suposar que U_4 té tots els valors propis diferents: n_1 de reals (λ_i, $i = 1 \dots n_1$) i $2n_2$ de complexos (conjugats: $a_j \pm i\, b_j$, $j = n_1 + 1 \dots n_1 + n_2$), amb $n = n_1 + 2n_2$. Aleshores afegint a $Q(t)$ la matrius de canvi de base podem suposar que U_4 és de la forma:

$$U_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & \lambda_{n_1} & & & & & & & & \\ & & & & a_{n_1+1} & b_{n_1+1} & & & & & & \\ & & & & -b_{n_1+1} & a_{n_1+1} & & & & & & \\ & & & & & & a_{n_1+2} & b_{n_1+2} & & & & \\ & & & & & & -b_{n_1+2} & a_{n_1+2} & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & a_{n_1+n_2} & b_{n_1+n_2} \\ & & & & & & & & & -b_{n_1+n_2} & a_{n_1+n_2} \end{pmatrix}$$

D'aquesta manera U_4 és la forma de Jordan de R_4. Ara si escrivim

$$Q(t) = Q_D(t)Q_0(t)$$

amb $Q_D(t)$ en el subgrup d'isotropia de U_4, $Q_0(t)$ té la forma (per columnes):

$$Q_0(t) = (v_1, \dots, v_{n1}, p_{n_1+1}, r_{n_1+1}, \dots, p_{n_1+n_2}, r_{n_1+n_2})$$

on v_i són els vectors propis associats a λ_i i $p_j \pm i\, r_j$ són ls vectors propis associats a $a_j \pm i\, b_j$. Així l'única indeterminació queda en $Q_D(t)$, que podem resoldre mitjançant:

$$\left(Q_0(t)R_5Q_0(t)^{-1}\right) Q_D(t) = Q_D(t)U_5$$

Finalment substituïnt en 4.3.2 obtenim el principi de suprposició desitjat.

Capítol 5

Conclusions

Les publicacions que existeixen sobre el tema de sistemes de Lie es troben força escampades en el temps. Així, les primeres referències posteriors a la publicació de [LS93] són de mitjans del segle XX, mentre que els textos principals des d'una perspectiva moderna estan concentrats als anys 80 amb els articles de Winternitz i els seus col·laboradors. No ha estat fins fa pocs anys que han aparegut nous articles d'altres autors. En aquest treball pretenem fer un compendi dels resultats principals de la teoria expandint una mica algunes explicacions.

Així, seguint un ordre força cronològic hem començat per un revisió del propi teorema de Lie, amb la voluntat d'avançar una mica més en la claredat de la prova geomètrica d'aquest teorema, trobant alguns punts que potser caldria refinar en les anterior versions. Com que la prova del teorema fa un ús important del teorema de la funció implícita, el procediment que dóna no resulta aplicable a la pràctica per al càlcul de principis de superposició i per tant calen mètodes alternatius. Així, hem fet un repàs dels mètodes principals per a poder obtenir aquests principis de superposició, amb la idea d'aplicar-los a l'equació de Riccati. Aquests mètodes, basats en l'acció d'un grup sobre una varietat, permeten calcular un principi de superposició per al cas de l'equació de Riccati escalar.

Pel que fa a l'equació de Riccati matricial, tot i que hem pogut demostrar que, fins i tot en la seva versió més general, és un sistema de Lie, no hem pogut aplicar cap dels mètodes a aquest cas general, ja que esdevé intractable. Malgrat això, la informació que n'hem pogut obtenir (l'àlgebra de Lie, el grup de Lie i l'acció associats) ha permès obtenir mètodes per al càlcul de principis de superposició per al cas particular de l'equació quadrada.

De cara a possibles temes de recerca relacionats amb aquest treball, crec que un primer objectiu seria acabar de refinar la demostració del teorema aprofundint en les propietats de les prolongacions diagonals: intentar caracteritzar el nombre m de còpies a les quals cal prolongar per obtenir independència lineal i donar informació més detallada de l'obert on es compleix aquesta propietat.

Pel que fa a generalitzacions del teorema, caldria destacar la possibilitat d'estudiar sistemes de Lie que comparteixin la mateixa àlgebra de Lie i acció, la qual cosa pot servir per obtenir principis de superposició que utilitzin solucions d'un sistema a per obtenir solucions d'un altre sistema. També, recentment, hem sabut que es pot generalitzar l'estudi a sistemes "quasi"-Lie, que poden ser transformats mitjançant canvis de variables a sistemes de Lie, expandint així les possibilitats d'aplicació de la teoria a una nova classe de sistemes. Una altra possibilitat és considerar l'estudi en el cas d'equacions en derivades parcials, com ja ha aparegut en articles més recents.

Apèndix A

Algunes demostracions

A.1 Prova de la proposició 4.2.1

Demostració: Càlcul de les relacions entre els camps A's, B's, C's i D's:

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right] = 0$$

$$[A_{ij}, B_{kr}] = \left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \sum_{l=1}^{m} x_{rl}\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right] = \delta_{ir}\frac{\partial}{\partial x_{kj}} = \delta_{ir}A_{kj}$$

$$[A_{ij}, C_{sl}] = \left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \sum_{k=1}^{n} x_{ks}\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right] = \delta_{js}\frac{\partial}{\partial x_{il}} = \delta_{js}A_{il}$$

$$\begin{aligned}
[A_{ij}, D_{lk}] &= \left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} x_{rl}x_{ks}\frac{\partial}{\partial x_{rs}}\right] = \\
&= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, x_{rl}x_{ks}\frac{\partial}{\partial x_{rs}}\right] = \\
&= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\left(\delta_{ir}\delta_{jl}x_{ks} + x_{rl}\delta_{ik}\delta_{js}\right)\frac{\partial}{\partial x_{rs}} = \\
&= \sum_{s=1}^{m}\delta_{jl}x_{ks}\frac{\partial}{\partial x_{is}} + \sum_{r=1}^{n}\delta_{ik}x_{rl}\frac{\partial}{\partial x_{rj}} = \\
&= \delta_{jl}B_{ik} + \delta_{ik}C_{lj}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B_{ir}, B_{kt}] &= \left[\sum_{j=1}^{m} x_{rj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \sum_{l=1}^{m} x_{tl}\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right] = \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left[x_{rj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, x_{tl}\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right] = \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(x_{rj}\delta_{it}\delta_{jl}\frac{\partial}{\partial x_{kl}} - x_{tl}\delta_{kr}\delta_{lj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right) = \\
&= \sum_{l=1}^{m}\delta_{it}x_{rl}\frac{\partial}{\partial x_{kl}} - \sum_{j=1}^{m}x_{tj}\delta_{kr}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} = \\
&= \delta_{it}B_{kr} - \delta_{kr}B_{it}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B_{ir}, C_{sj}] = &\left[\sum_{l=1}^{m} x_{rl}\frac{\partial}{\partial x_{il}}, \sum_{k=1}^{n} x_{ks}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}\right] = \\
= &\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left[x_{rl}\frac{\partial}{\partial x_{il}}, x_{ks}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}\right] = \\
= &\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{rl}\delta_{ik}\delta_{ls}\frac{\partial}{\partial x_{kj}} - x_{ks}\delta_{kr}\delta_{lj}\frac{\partial}{\partial x_{il}}\right) = \\
= &\ x_{rs}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} - x_{rs}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B_{ir}, D_{ut}] = &\left[\sum_{j=1}^{m} x_{rj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} x_{ku}x_{tl}\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right] = \\
= &\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\left[x_{rj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, x_{ku}x_{tl}\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right] = \\
= &\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\left(x_{rj}(\delta_{ik}\delta_{ju}x_{tl} + x_{ku}\delta_{it}\delta_{jl})\frac{\partial}{\partial x_{kl}} - x_{ku}x_{tl}\delta_{kr}\delta_{lj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right) = \\
= &\sum_{l=1}^{m} x_{ru}x_{tl}\frac{\partial}{\partial x_{il}} + \delta_{it}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{rj}x_{ku}\frac{\partial}{\partial x_{kj}} - \sum_{l=1}^{m} x_{ru}x_{tl}\frac{\partial}{\partial x_{il}} = \\
= &\ \delta_{it}D_{ur}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[C_{sj}, C_{ul}] = &\left[\sum_{i=1}^{n} x_{is}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \sum_{k=1}^{n} x_{ku}\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right] = \\
= &\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[x_{is}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, x_{ku}\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right] = \\
= &\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{is}\delta_{ik}\delta_{ju}\frac{\partial}{\partial x_{ku}} - x_{is}\delta_{ik}\delta_{sl}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right) = \\
= &\ \delta_{ju}\sum_{k=1}^{n} x_{ks}\frac{\partial}{\partial x_{kl}} - \delta_{sl}\sum_{k=1}^{n} x_{ku}\frac{\partial}{\partial x_{kj}} \\
= &\ \delta juC_{sl} - \delta_{sl}C_{uj}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[C_{sj}, D_{lk}] &= \left[\sum_{i=1}^{n} x_{is}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} x_{ku}x_{tl}\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\left[x_{is}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, x_{ku}x_{tl}\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\left(x_{is}(\delta_{ik}\delta_{ju}x_{tl} + x_{ku}\delta_{it}\delta_{jl})\frac{\partial}{\partial x_{kl}} - x_{ku}x_{tl}\delta_{ik}\delta_{sl}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right) = \\
&= \delta_{ju}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} x_{is}x_{tl}\frac{\partial}{\partial xil} + \sum_{k=1}^{n} x_{ts}x_{ku}\frac{\partial}{\partial x_{kl}} - \sum_{k=1}^{n} x_{ts}x_{ku}\frac{\partial}{\partial x_{kl}} = \\
&= \delta_{ju}D_{st}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D_{lk}, D_{ut}] &= \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{il}x_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} x_{ru}x_{ts}\frac{\partial}{\partial x_{rs}}\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\left[x_{il}x_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, x_{ru}x_{ts}\frac{\partial}{\partial x_{rs}}\right] = \\
&= \sum_{i,j,r,s} x_{il}x_{kj}(\delta_{ir}\delta_{ju}x_{ts} + x_{ru}\delta_{it}\delta_{js})\frac{\partial}{\partial x_{rs}} - \sum_{i,j,r,s} x_{ru}x_{ts}(\delta_{ir}\delta_{ls}x_{kj} + x_{il}\delta_{kr}\delta_{js})\frac{\partial}{\partial x_{ij}} = \\
&= \sum_{r,s}(x_{rl}x_{ku}x_{ts} + x_{tl}x_{ks}x_{ru})\frac{\partial}{\partial x_{rs}} - \sum_{i,j}(x_{iu}x_{tl}x_{kj} + x_{ku}x_{tj}x_{il})\frac{\partial}{\partial x_{ij}} = \\
&= \sum_{i,j}(x_{il}x_{ku}x_{tj} + x_{tl}x_{kj}x_{iu} - x_{iu}x_{tl}x_{kj} - x_{ku}x_{tj}x_{il})\frac{\partial}{\partial x_{ij}} = 0
\end{aligned}
$$

□

A.2 Prova de la proposició 4.2.2

Demostració: Comencem amb els camps que verifiquen la primera definició (és a dir, tots excepte els B_{ii} i els C_{jj}):

$$\begin{aligned}
[\varphi(A_{ij}),\varphi(A_{kl})] &= [-e_{i,j+n},-e_{k,l+n}] = [e_{i,j+n},e_{k,l+n}] = \\
&= \delta_{j+n,k}e_{i,l+n} - \delta_{i,l+n}e_{k,j+n} = 0 = \varphi(0) = \varphi([A_{ij},A_{kl}])
\end{aligned}$$

Ja que els elements de la forma $\delta_{\alpha,\beta+n}$ ò $\delta_{\beta+n,\alpha}$ són zero si $\alpha \in \{1,\dots,n\}$ i $\beta \in \{1,\dots,m\}$.

$$\begin{aligned}
[\varphi(A_{ij}),\varphi(B_{kr})] &= [-e_{i,j+n},-e_{k,r}] = [e_{i,j+n},e_{k,r}] = \\
&= \delta_{j+n,k}e_{i,r} - \delta_{i,r}e_{k,j+n} = -\delta_{ir}e_{k,j+n} = \\
&= \delta_{ir}\varphi(A_{kj}) = \varphi(\delta_{ir}A_{kj}) = \varphi([A_{ij},B_{kr}])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varphi(A_{ij}),\varphi(C_{sl})] &= [-e_{i,j+n},e_{s+n,l+n}] = -[e_{i,j+n},e_{s+n,l+n}] = \\
&= -(\delta_{j+n,s+n}e_{i,l+n} - \delta_{i,l+n}e_{s+n,j+n}) = -\delta_{js}e_{i,l+n} = \\
&= \delta_{sj}\varphi(A_{il}) = \varphi(\delta_{sj}A_{il}) = \varphi([A_{ij},C_{sl}])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varphi(A_{ij}),\varphi(D_{lk})] &= [-e_{i,j+n},e_{l+n,k}] = -[e_{i,j+n},e_{l+n,k}] = \\
&= -(\delta_{j+n,l+n}e_{i,k} - \delta_{ik}e_{l+n,j+n}) = \delta_{jl}\varphi(B_{ik}) + \delta_{ik}\varphi(C_{lj}) = \\
&= \varphi(\delta_{jl}B_{ik} + \delta_{ik}C_{lj}) = \varphi([A_{ij},D_{lk}])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varphi(B_{ir}),\varphi(B_{kt})] &= [-e_{ir},-e_{kt}] = [e_{ir},e_{kt}] = \\
&= \delta_{rk}e_{it} - \delta_{it}e_{kr} = -\delta_{rk}\varphi(B_{it}) + \delta_{it}\varphi(B_{kr}) = \\
&= \varphi(\delta_{it}B_{kr} - \delta_{rk}B_{it}) = \varphi([B_{ir},B_{kt}])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varphi(B_{ir}),\varphi(C_{sj})] &= [-e_{ir},e_{s+n,j+n}] = -[e_{ir},e_{s+n,j+n}] = \\
&= -(\delta_{r,s+n}e_{i,j+n} - \delta_{i,j+n}e_{s+n,r}) = 0 = \varphi(0) = \varphi([B_{ir},C_{sj}])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varphi(B_{ir}),\varphi(D_{ut})] &= [-e_{ir},e_{u+n,t}] = -[e_{ir},e_{u+n,t}] = \\
&= -(\delta_{r,u+n}e_{it} - \delta_{it}e_{u+n,r}) = \delta_{it}e_{u+n,r} \\
&= \delta_{it}\varphi(D_{ur}) = \varphi(\delta_{it}D_{ur}) = \varphi([B_{ir},D_{ut}])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varphi(C_{sj}),\varphi(C_{ul})] &= [e_{s+n,j+n},e_{u+n,l+n}] = \delta_{j+n,u+n}e_{s+n,l+n} - \delta_{s+n,l+n}e_{u+n,j+n} = \\
&= \delta_{ju}\varphi(C_{sl}) - \delta_{sl}\varphi(C_{uj}) = \varphi(\delta_{ju}C_{sl} - \delta_{sl}C_{uj}) = \varphi([C_{sj},C_{ul}])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[]
[\varphi(C_{sj}), \varphi(D_{ut})] &= [e_{s+n,j+n}, e_{u+n,t}] = \delta_{j+n,u+n} e_{s+n,t} - \delta_{s+n,t} e_{u+n,j+n} = \\
&= \delta_{ju} e_{s+n,t} = \delta_{ju} \varphi(D_{st}) = \varphi(\delta_{ju} D_{st}) = \varphi([C_{sj}, D_{ut}])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[]
[\varphi(D_{ij}), \varphi(D_{kl})] &= [e_{i+n,j}, e_{k+n,l}] = \\
&= \delta_{j,k+n} e_{i+n,l} - \delta_{i+n,l} e_{k+n,j} = 0 = \varphi(0) = \varphi([D_{ij}, D_{kl}])
\end{aligned}$$

Per comprovar les relacions que involucren els camps B_{ii} i C_{jj} només cal tenir en compte dues coses: la primera és que en els càlculs anteriors no hem usat enlloc que els subíndex siguin diferents. La segona és que el parèntesi de matrius és lineal i que la matriu I_{n+m} commuta amb qualsevol matriu. Així:

$$[\varphi(M), \varphi(B_{ii})] = [\varphi(M), \varphi(B_{ii})] = [\varphi(M), -e_{ii} + \frac{1}{n+m} I_{n+m}] =$$
$$[\varphi(M), -e_{ii}] + [\varphi(M), \frac{1}{n+m} I_{n+m}] = -[\varphi(M), e_{ii}]$$

$$[\varphi(M), \varphi(C_{j+n,j+n})] = [\varphi(M), \varphi(C_{j+n,j+n})] = [\varphi(M), e_{j+n,j+n} - \frac{1}{n+m} I_{n+m}]$$
$$= [\varphi(M), e_{j+n,j+n}] + [\varphi(M), -\frac{1}{n+m} I_{n+m}] = [\varphi(M), e_{j+n,j+n}]$$

i a partir d'aquí qualsevol càlcul és anàleg als anteriors. □

Apèndix B

Fulls de càlcul Maple

En les seguents seccions s'inclouen alguns càlculs realitzats amb el manipulador algebraic Maple que ajuden a fer-se una idea millor dels camps que intervenen en l'equacio de Riccati matricial i de l'acció que intervé en aquest sistema de Lie.

B.1 Càlcul dels camps vectorials de l'equació de Riccati matricial

Recordem que els camps que intervenen en l'equació de Riccati matricial són

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_{ij}} && i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots m \\
B_{ir} &= \sum_{j=1}^{m} x_{rj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} && i, r = 1 \dots n \\
C_{sj} &= \sum_{i=1}^{n} x_{is} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} && j, s = 1 \dots m \\
D_{lk} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{il} x_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} && k = 1 \dots n,\ l = 1 \dots m
\end{aligned}
$$

El següent programa ens escriu aquests camps en forma de matriu i de vector columna en funció de les dimensions de la matriu incognita del sistema X: en primer lloc tenim totes les definicions i després es treuen els resultats per pantalla. Està executat pel cas $n = 2$ i $m = 5$:

```
> restart:

> with(LinearAlgebra):

> N:=2:
> M:=5:
```

Càlculs

```
> delta:=IdentityMatrix(N*M):
> k:=1:
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to M do
> E[i,j]:=Column(delta,k);
> k:=k+1;
> od;
> od;
```

A's

```
> for n from 1 to N do
> for m from 1 to M do
> A[n,m]:=E[n,m]:
> od;
> od;

> Alist:=[]:
> Alist2:=[]:

> for i from 1 to N do
> for j from 1 to M do
> Aux:=Matrix(N,M,0);
> for k from 1 to N do
> for l from 1 to M do
> Aux[k,l]:=A[i,j][l+(k-1)*M]:
> od;
> od;
> Alist:=[op(Alist),A[i,j]];
> Alist2:=[op(Alist2),Aux];
> od;
> od;
```

B's

```
> for n from 1 to N do
> for m from 1 to N do
> B[n,m]:=Vector(N*M,1,0):
> for j from 1 to M do
> B[n,m]:=B[n,m]+x[n,j]*E[m,j]:
> od;
> od;
> od;

> Blist:=[]:
> Blist2:=[]:
```

```
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to N do
> Aux:=Matrix(N,M,0);
> for k from 1 to N do
> for l from 1 to M do
> Aux[k,l]:=B[i,j][l+(k-1)*M]:
> od;
> od;
> Blist:=[op(Blist),B[i,j]];
> Blist2:=[op(Blist2),Aux];
> od;
> od;
```

C's

```
> for n from 1 to M do
> for m from 1 to M do
> C[n,m]:=Vector(N*M,1,0);
> for i from 1 to N do
> C[n,m]:=C[n,m]+x[i,n]*E[i,m]:
> od;
> od;
> od;
> Clist:=[]:
> Clist2:=[]:
> for i from 1 to M do
> for j from 1 to M do
> Aux:=Matrix(N,M,0);
> for k from 1 to N do
> for l from 1 to M do
> Aux[k,l]:=C[i,j][l+(k-1)*M]:
> od;
> od;
> Clist:=[op(Clist),C[i,j]];
> Clist2:=[op(Clist2),Aux];
> od;
> od;
```

D's

```
> for n from 1 to N do
> for m from 1 to M do
> d[n,m]:=Vector(N*M,1,0):
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to M do
> d[n,m]:=d[n,m]+x[i,n]*x[m,j]*E[i,j]:
> od;
> od;
> od;
> od;
```

```
> Dlist:=[]:
> Dlist2:=[]:
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to M do
> Aux:=Matrix(N,M,0);
> for k from 1 to N do
> for l from 1 to M do
> Aux[k,l]:=d[i,j][l+(k-1)*M]:
> od;
> od;
> Dlist:=[op(Dlist),d[i,j]];
> Dlist2:=[op(Dlist2),Aux];
> od;
> od;
```

Camps en forma matricial

```
> for i from 1 to nops(Alist2) do print(Alist2[i]) od;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> for i from 1 to nops(Blist2) do print(Blist2[i]) od;
```

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} & x_{2,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} & x_{2,5} \end{bmatrix}$$

```
> for i from 1 to nops(Clist2) do print(Clist2[i]) od;
```

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & x_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{2,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{2,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & x_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{2,2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{2,2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & x_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{2,3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{2,3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & x_{1,4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{2,4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{1,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{2,4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{1,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{2,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & x_{1,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{2,5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{1,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{2,5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{1,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2,5} \end{bmatrix}$$

```
> for i from 1 to nops(Dlist2) do print(Dlist2[i]) od;
```

$$\begin{bmatrix} {x_{1,1}}^2 & x_{1,1}x_{1,2} & x_{1,1}x_{1,3} & x_{1,1}x_{1,4} & x_{1,1}x_{1,5} \\ x_{2,1}x_{1,1} & x_{2,1}x_{1,2} & x_{2,1}x_{1,3} & x_{2,1}x_{1,4} & x_{2,1}x_{1,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{2,1}x_{1,1} & x_{1,1}x_{2,2} & x_{1,1}x_{2,3} & x_{1,1}x_{2,4} & x_{1,1}x_{2,5} \\ {x_{2,1}}^2 & x_{2,1}x_{2,2} & x_{2,1}x_{2,3} & x_{2,1}x_{2,4} & x_{2,1}x_{2,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,1}x_{3,1} & x_{1,1}x_{3,2} & x_{1,1}x_{3,3} & x_{1,1}x_{3,4} & x_{1,1}x_{3,5} \\ x_{2,1}x_{3,1} & x_{2,1}x_{3,2} & x_{2,1}x_{3,3} & x_{2,1}x_{3,4} & x_{2,1}x_{3,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,1}x_{4,1} & x_{1,1}x_{4,2} & x_{1,1}x_{4,3} & x_{1,1}x_{4,4} & x_{1,1}x_{4,5} \\ x_{2,1}x_{4,1} & x_{2,1}x_{4,2} & x_{2,1}x_{4,3} & x_{2,1}x_{4,4} & x_{2,1}x_{4,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,1}x_{5,1} & x_{1,1}x_{5,2} & x_{1,1}x_{5,3} & x_{1,1}x_{5,4} & x_{1,1}x_{5,5} \\ x_{2,1}x_{5,1} & x_{2,1}x_{5,2} & x_{2,1}x_{5,3} & x_{2,1}x_{5,4} & x_{2,1}x_{5,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,1}x_{1,2} & {x_{1,2}}^2 & x_{1,2}x_{1,3} & x_{1,2}x_{1,4} & x_{1,2}x_{1,5} \\ x_{1,1}x_{2,2} & x_{2,2}x_{1,2} & x_{2,2}x_{1,3} & x_{2,2}x_{1,4} & x_{2,2}x_{1,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{2,1}x_{1,2} & x_{2,2}x_{1,2} & x_{1,2}x_{2,3} & x_{1,2}x_{2,4} & x_{1,2}x_{2,5} \\ x_{2,1}x_{2,2} & {x_{2,2}}^2 & x_{2,2}x_{2,3} & x_{2,2}x_{2,4} & x_{2,2}x_{2,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,2}x_{3,1} & x_{1,2}x_{3,2} & x_{1,2}x_{3,3} & x_{1,2}x_{3,4} & x_{1,2}x_{3,5} \\ x_{2,2}x_{3,1} & x_{2,2}x_{3,2} & x_{2,2}x_{3,3} & x_{2,2}x_{3,4} & x_{2,2}x_{3,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,2}x_{4,1} & x_{1,2}x_{4,2} & x_{1,2}x_{4,3} & x_{1,2}x_{4,4} & x_{1,2}x_{4,5} \\ x_{2,2}x_{4,1} & x_{2,2}x_{4,2} & x_{2,2}x_{4,3} & x_{2,2}x_{4,4} & x_{2,2}x_{4,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,2}x_{5,1} & x_{1,2}x_{5,2} & x_{1,2}x_{5,3} & x_{1,2}x_{5,4} & x_{1,2}x_{5,5} \\ x_{2,2}x_{5,1} & x_{2,2}x_{5,2} & x_{2,2}x_{5,3} & x_{2,2}x_{5,4} & x_{2,2}x_{5,5} \end{bmatrix}$$

B.2 Càlcul de l'acció

L'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada a l'equació de Riccati matricial, formada pels camps A's, B's, C's i D's que hem pogut veure mitjançant el programa de la secció anterior, és isomorfa a $\mathfrak{sl}_{n+m}(\mathbb{R})$ mitjançant l'isomorfisme explicitat en el Capítol 3:

$$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}_{n+m}(\mathbb{R})$$

El següent programa calcula l'acció dels elements de $\mathfrak{sl}_{n+m}(\mathbb{R})$ imatge dels camps A's, B's, C's i D's sobre una conició inicial arbitrària X_0

$$X_0 = \begin{pmatrix} x^0_{11} & x^0_{12} & x^0_{13} & x^0_{14} & \dots & x^0_{1m} \\ x^0_{21} & x^0_{22} & x^0_{23} & x^0_{24} & \dots & x^0_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^0_{n1} & x^0_{n2} & x^0_{n3} & x^0_{n4} & \dots & x^0_{nm} \end{pmatrix}$$

en funció de les seves dimensions $n \times m$.

Aquest progrma ha servit d'orientació per als càlculs de la demostració de les igualtats:

$$\begin{aligned} \phi_{A_{ij}}(t, X_0) &= \Phi(\exp(-t\,\varphi(A_{ij})), X_0) \\ \phi_{B_{ir}}(t, X_0) &= \Phi(\exp(-t\,\varphi(B_{ir})), X_0) \\ \phi_{C_{sj}}(t, X_0) &= \Phi(\exp(-t\,\varphi(C_{sj})), X_0) \\ \phi_{D_{lk}}(t, X_0) &= \Phi(\exp(-t\,\varphi(D_{lk})), X_0) \end{aligned}$$

```
> restart:
> with(LinearAlgebra):
> N:=2:
> M:=3:
```

Definicions

```
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to M do
> E[i,j]:=Matrix(N,M,0);
> E[i,j][i,j]:=1:
> od;
> od;
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to M do
> a[i,j]:=Matrix(N+M,N+M):
> a[i,j][i,j+N]:=-1:
> od;
> od;
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to N do
> b[i,j]:=Matrix(N+M,N+M):
> b[i,j][i,j]:=-1:
> od;
> od;
```

```
> for i from 1 to M do
> for j from 1 to M do
> c[i,j]:=Matrix(N+M,N+M):
> c[i,j][i+N,j+N]:=1:
> od;
> od;
```

```
> for i from 1 to M do
> for j from 1 to N do
> d[i,j]:=Matrix(N+M,N+M):
> d[i,j][i+N,j]:=1:
> od;
> od;
```

```
> for i from 1 to N do
> b[i,i]:=Matrix(N+M,N+M,0):
> b[i,i][i,i]:=-1:
> b[i,i]:=b[i,i]+1/(N+M)*IdentityMatrix(N+M):
> od:
```

```
> for i from 1 to M do
> c[i,i]:=Matrix(N+M,N+M,0):
> c[i,i][i+N,i+N]:=1:
> c[i,i]:=c[i,i]-1/(N+M)*IdentityMatrix(N+M):
> od:
```

```
> X:=Matrix(N,M,x):
```

```
> Phi:=(G,Y)->
> (SubMatrix(MatrixExponential(-t*G),[1..N],[1..N]).Y
> +SubMatrix(MatrixExponential(-t*G),[1..N],[N+1..N+M])).
> MatrixInverse(SubMatrix(MatrixExponential(-t*G),[N+1..N+M],[1..N]).Y
> +SubMatrix(MatrixExponential(-t*G),[N+1..N+M],[N+1..N+M])):
```

Càlcul de l'acció

```
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to M do
> print('A'[i,j],Phi(a[i,j],X));
> od;
> od;
```

$$A_{1,1}, \begin{bmatrix} x(1,1)+t & x(1,2) & x(1,3) \\ x(2,1) & x(2,2) & x(2,3) \end{bmatrix}$$
$$A_{1,2}, \begin{bmatrix} x(1,1) & x(1,2)+t & x(1,3) \\ x(2,1) & x(2,2) & x(2,3) \end{bmatrix}$$
$$A_{1,3}, \begin{bmatrix} x(1,1) & x(1,2) & x(1,3)+t \\ x(2,1) & x(2,2) & x(2,3) \end{bmatrix}$$
$$A_{2,1}, \begin{bmatrix} x(1,1) & x(1,2) & x(1,3) \\ x(2,1)+t & x(2,2) & x(2,3) \end{bmatrix}$$
$$A_{2,2}, \begin{bmatrix} x(1,1) & x(1,2) & x(1,3) \\ x(2,1) & x(2,2)+t & x(2,3) \end{bmatrix}$$
$$A_{2,3}, \begin{bmatrix} x(1,1) & x(1,2) & x(1,3) \\ x(2,1) & x(2,2) & x(2,3)+t \end{bmatrix}$$

```
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to N do
> print('B'[i,j],simplify(Phi(b[i,j],X)));
> od;
> od;
```

$$B_{1,1}, \begin{bmatrix} x(1,1)\,e^t & x(1,2)\,e^t & x(1,3)\,e^t \\ x(2,1) & x(2,2) & x(2,3) \end{bmatrix}$$
$$B_{1,2}, \begin{bmatrix} x(1,1)+tx(2,1) & x(1,2)+tx(2,2) & x(1,3)+tx(2,3) \\ x(2,1) & x(2,2) & x(2,3) \end{bmatrix}$$
$$B_{2,1}, \begin{bmatrix} x(1,1) & x(1,2) & x(1,3) \\ tx(1,1)+x(2,1) & tx(1,2)+x(2,2) & tx(1,3)+x(2,3) \end{bmatrix}$$
$$B_{2,2}, \begin{bmatrix} x(1,1) & x(1,2) & x(1,3) \\ x(2,1)\,e^t & x(2,2)\,e^t & x(2,3)\,e^t \end{bmatrix}$$

```
> for i from 1 to M do
> for j from 1 to M do
> print('C'[i,j],simplify(Phi(c[i,j],X)));
> od;
> od;
```

$$C_{1,1}, \begin{bmatrix} x(1,1)\,e^t & x(1,2) & x(1,3) \\ x(2,1)\,e^t & x(2,2) & x(2,3) \end{bmatrix}$$
$$C_{1,2}, \begin{bmatrix} x(1,1) & tx(1,1)+x(1,2) & x(1,3) \\ x(2,1) & tx(2,1)+x(2,2) & x(2,3) \end{bmatrix}$$

$$C_{1,3},\ \left[\begin{array}{ccc} x(1,1) & x(1,2) & tx(1,1)+x(1,3) \\ x(2,1) & x(2,2) & tx(2,1)+x(2,3) \end{array}\right]$$

$$C_{2,1},\ \left[\begin{array}{ccc} x(1,1)+tx(1,2) & x(1,2) & x(1,3) \\ x(2,1)+tx(2,2) & x(2,2) & x(2,3) \end{array}\right]$$

$$C_{2,2},\ \left[\begin{array}{ccc} x(1,1) & x(1,2)\,e^t & x(1,3) \\ x(2,1) & x(2,2)\,e^t & x(2,3) \end{array}\right]$$

$$C_{2,3},\ \left[\begin{array}{ccc} x(1,1) & x(1,2) & tx(1,2)+x(1,3) \\ x(2,1) & x(2,2) & tx(2,2)+x(2,3) \end{array}\right]$$

$$C_{3,1},\ \left[\begin{array}{ccc} x(1,1)+tx(1,3) & x(1,2) & x(1,3) \\ x(2,1)+tx(2,3) & x(2,2) & x(2,3) \end{array}\right]$$

$$C_{3,2},\ \left[\begin{array}{ccc} x(1,1) & x(1,2)+tx(1,3) & x(1,3) \\ x(2,1) & x(2,2)+tx(2,3) & x(2,3) \end{array}\right]$$

$$C_{3,3},\ \left[\begin{array}{ccc} x(1,1) & x(1,2) & x(1,3)\,e^t \\ x(2,1) & x(2,2) & x(2,3)\,e^t \end{array}\right]$$

```
> for i from 1 to M do
> for j from 1 to N do
> print('D'[i,j],Phi(d[i,j],X));
> od;
> od;
```

$$D_{1,1},\ \left[\begin{array}{ccc} -\frac{x(1,1)}{tx(1,1)-1} & -\frac{tx(1,1)x(1,2)}{tx(1,1)-1}+x(1,2) & -\frac{tx(1,1)x(1,3)}{tx(1,1)-1}+x(1,3) \\ -\frac{x(2,1)}{tx(1,1)-1} & -\frac{tx(2,1)x(1,2)}{tx(1,1)-1}+x(2,2) & -\frac{tx(2,1)x(1,3)}{tx(1,1)-1}+x(2,3) \end{array}\right]$$

$$D_{1,2},\ \left[\begin{array}{ccc} -\frac{x(1,1)}{tx(2,1)-1} & -\frac{tx(1,1)x(2,2)}{tx(2,1)-1}+x(1,2) & -\frac{tx(1,1)x(2,3)}{tx(2,1)-1}+x(1,3) \\ -\frac{x(2,1)}{tx(2,1)-1} & -\frac{tx(2,1)x(2,2)}{tx(2,1)-1}+x(2,2) & -\frac{tx(2,1)x(2,3)}{tx(2,1)-1}+x(2,3) \end{array}\right]$$

$$D_{2,1},\ \left[\begin{array}{ccc} x(1,1)-\frac{tx(1,2)x(1,1)}{tx(1,2)-1} & -\frac{x(1,2)}{tx(1,2)-1} & -\frac{tx(1,2)x(1,3)}{tx(1,2)-1}+x(1,3) \\ x(2,1)-\frac{tx(2,2)x(1,1)}{tx(1,2)-1} & -\frac{x(2,2)}{tx(1,2)-1} & -\frac{tx(2,2)x(1,3)}{tx(1,2)-1}+x(2,3) \end{array}\right]$$

$$D_{2,2},\ \left[\begin{array}{ccc} x(1,1)-\frac{tx(1,2)x(2,1)}{tx(2,2)-1} & -\frac{x(1,2)}{tx(2,2)-1} & -\frac{tx(1,2)x(2,3)}{tx(2,2)-1}+x(1,3) \\ x(2,1)-\frac{tx(2,2)x(2,1)}{tx(2,2)-1} & -\frac{x(2,2)}{tx(2,2)-1} & -\frac{tx(2,2)x(2,3)}{tx(2,2)-1}+x(2,3) \end{array}\right]$$

$$D_{3,1},\ \left[\begin{array}{ccc} x(1,1)-\frac{tx(1,3)x(1,1)}{tx(1,3)-1} & x(1,2)-\frac{tx(1,2)x(1,3)}{tx(1,3)-1} & -\frac{x(1,3)}{tx(1,3)-1} \\ x(2,1)-\frac{tx(2,3)x(1,1)}{tx(1,3)-1} & x(2,2)-\frac{tx(1,2)x(2,3)}{tx(1,3)-1} & -\frac{x(2,3)}{tx(1,3)-1} \end{array}\right]$$

$$D_{3,2},\ \left[\begin{array}{ccc} x(1,1)-\frac{tx(1,3)x(2,1)}{tx(2,3)-1} & x(1,2)-\frac{tx(2,2)x(1,3)}{tx(2,3)-1} & -\frac{x(1,3)}{tx(2,3)-1} \\ x(2,1)-\frac{tx(2,3)x(2,1)}{tx(2,3)-1} & x(2,2)-\frac{tx(2,2)x(2,3)}{tx(2,3)-1} & -\frac{x(2,3)}{tx(2,3)-1} \end{array}\right]$$

Bibliografia

[AHW81] R.L. Anderson, J. Harnad, P. Winternitz, "Group theoretical approach to superposition rules for systems of Riccati equations", *Lett. Math. Phys.* **5** (1981), 143–148.

[AHW82] R.L. Anderson, J. Harnad, P. Winternitz, "Systems of ordinary differential equations with nonlinear superposition principles", *Physica D, Vol. IV* (1982).

[CGM00] José F. Cariñena, Janusz Grabowski, Giuseppe Marmo, "Lie-Scheffers systems: a geometric approach", *Bibliopolis, Napoli Series On Physics And Astrophysics* (2000).

[CR01] José F. Cariñena, Arturo Ramos,"A new geometric approach to Lie systems and physical applications", *Acta Appl. Math.* **70** (2001) 43–69.

[CGM07] José F. Cariñena, Janusz Grabowski, Giuseppe Marmo, "Superposition rules, Lie theorem and partial differential equations", *Rep. Math. Phys.* **60** (2007), 273-258.

[CLR08] José F. Cariñena, Javier de Lucas, Manuel F. Rañada, "Recent applications of the theory of Lie systems in Ermakov systems", *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* (2008).

[Chi48] A. Chiellini, *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **18** (1948), 44.

[Col55] W.J. Coles, *Duke Math J.* **22** (1955), 333.

[Col65] W.J. Coles, *SIAM J. Appl. Math.* **13** (1965), 627.

[FJ95] G. Freiling, G. Jank, "Non-symmetric Riccati equations", *Zeitschr. f. Analysis und ihre Anwendungen* **14** (1995), 259–284.

[Fre02] G. Freiling, "A survey of nonsymmetric Riccati equations", *Linear Algebra and its Applications* **351-352** (2002), 243–270

[Gul93] A. Guldberg, *Comptes Rendus de l'Acad. des Sci.* **116** (1893), 964.

[HPW99] M. Havlíček, S. Pošta, P. Winternitz, "Nonlinear superposition formulas based on imprimitive group action", *J. Math. Phys.* **40** (1999), 3104–3102.

[HW83] J. Harnad, P. Winternitz, "Superposition principles for matrix Riccati equations", *J. Math. Phys.* (1983).

[Ibr00] N.H. Ibragimov, “Discussion of Lie’s nonlinear superposition theory”, *The International Conference MOGRAN 2000* (2000).

[KMS93] Ivan Kolář, Peter W. Michor, Jan Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer (1993).

[LS93] Sophus Lie, Georg Scheffers, “Vorlesungen über Continuierliche Gruppen” *B. G. Teubner, Leipzig* (1893).

[Lee03] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer (2003).

[Olv86] P. J. Olver, “Applications of Lie groups to differential equations”, *Springer, New York* (1986)

[Rei72] William T. Reid, “Riccati differential equations”, *Academic Press, New York* (1972).

[Ves93a] M.E. Vessiot, *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.* **10** (1893), 53.

[Ves93b] M.E. Vessiot, *Comptes Rendus de l’Acad. des Sci.* **116**(1893), 427, 959, 1112.

[WN63] J. Wei, E. Norman, “Lie algebraic solution of linear differential equations”, *J. Math. Phys.* **4** (1963).

[WN64] J. Wei, E. Norman, “On global representation of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials”, *Mem. AMS* **15** (1964).

[Win81] P. Winternitz, “Nonlinearaction of Lie groups and superposition principles of nonlinear differential equations”, *Physica A* **1-3** (1981), 105–103.