

PROJECTE FI DE CARRERA

DISSENY I CONSTRUCCIÓ DE  
BOBINES DE MIDA ARBITRÀRIA AMB  
CAMP MAGNÈTIC CONFORMABLE A  
L'INTERIOR

*Miguel Ángel Sánchez Moragues*

Directors del projecte:

*Josep Maria Torrents Dolz i Pablo Juan García*



# Índex de continguts

---

<b>Índex de continguts</b> .....	<b>3</b>
<b>Introducció</b> .....	<b>5</b>
<b>Objectius</b> .....	<b>7</b>
<b>Capítol 1: Introducció al formigó</b> .....	<b>9</b>
1. El formigó .....	9
1.1. Armadures .....	10
1.2. Fibres.....	10
2. Formigó reforçat amb fibres (SFRC).....	11
2.1. Tipus.....	11
2.2. Efectes.....	12
2.3. Aplicacions.....	13
3. Avaluació d'estructures de formigó .....	13
3.1. Controls de qualitat.....	13
3.1.1. Mètodes de control destructius.....	14
3.1.2. Mètodes de control no destructius .....	15
3.2. Control del SFRC.....	15
3.2.1. Assajos normalitzats. Normes UNE .....	15
4. Motivació del projecte.....	17
<b>Capítol 2: Estat del coneixement</b> .....	<b>19</b>
1. Bobina de Helmholtz.....	19
2. Bobina de Jian .....	20
3. Bobina de Alldred and Scollar .....	21
4. Bobina de Merrit.....	22
5. Bobina de Rubens.....	23
6. Comparativa .....	23
7. Necessitat d'una nova proposta.....	24
<b>Capítol 3: Fonts de camp magnètic</b> .....	<b>25</b>
1. Camp magnètic produït per corrents elèctrics .....	25
2. Camp magnètic d'una espira circular .....	26
3. Camp magnètic d'una espira quadrada .....	26
3.1. Comparació espira circular i espira quadrada.....	27
4. Camp magnètic d'un solenoide circular .....	28
5. Camp magnètic d'un solenoide quadrat.....	29
5.1. Comparació solenoide circular i solenoide quadrat.....	31
<b>Capítol 4: Disseny de les bobines</b> .....	<b>33</b>
1. Paràmetres de disseny inicials.....	33
2. Un ventall de mètodes.....	33
2.1. Transformada de Fourier .....	33
2.2. Mètode força bruta.....	35
2.3. Mètode analític.....	36
2.4. Branch & Bound.....	38
3. Mètodes definitius .....	39

<b>Capítol 5: Construcció de les bobines .....</b>	<b>41</b>
1. Bobina circular mètode força bruta.....	42
2. Bobina quadrada mètode força bruta.....	43
3. Bobina circular mètode analític.....	45
4. Bobina quadrada mètode analític.....	47
5. Bobina quadrada mètode força bruta amb espires positives.....	49
6. Bobina per mesurar provetes de formigó.....	50
<b>Capítol 6: Mesura de les bobines.....</b>	<b>55</b>
1. Prova camp constant – sistema de mesura.....	55
1.1. Bobina circular mètode força bruta.....	56
1.2. Bobina quadrada mètode força bruta.....	57
1.3. Bobina circular mètode analític .....	58
1.4. Bobina quadrada mètode analític.....	59
1.5. Bobina quadrada mètode força bruta amb espires positives .....	60
1.6. Conclusions.....	61
2. Espires positives i negatives – sentit de construcció .....	61
3. Bobina per mesurar provetes de formigó .....	64
<b>Capítol 7: Aplicació a la mesura de fibres .....</b>	<b>67</b>
1. Inductància de la bobina per mesurar provetes de formigó.....	67
2. Mesura de la variació d'inductància.....	69
3. Mesura de provetes de formigó reforçades amb fibres .....	70
<b>Capítol 8: Conclusions i línies de futur .....</b>	<b>75</b>
1. Conclusions.....	75
2. Valoració del objectius aconseguits .....	75
3. Línies de futur.....	76
<b>Bibliografia.....</b>	<b>79</b>
<b>Annexes .....</b>	<b>81</b>
1. Camp magnètic produït per corrents elèctrics: llei de Biot i Savart.....	81
2. Camp magnètic d'una espira circular .....	82
3. Camp magnètic d'una espira quadrada .....	84
4. Camp magnètic d'un solenoide circular .....	88
5. Camp magnètic d'un solenoide quadrat.....	90
5.1. Resolució analítica de la integral .....	91
6. Codi Matlab .....	95

# Introducció

---

El formigó tradicional pot definir-se, en la seva concepció més simple, com un material de construcció constituït per la mescla d'un aglomerant hidràulic, ciment, amb aigua i pedres de diferent mida, el que anomenem com àrids. Avui en dia, gràcies al desenvolupament tecnològic del formigó, afegeixen nous components amb l'objectiu de millorar alguna de les seves propietats.

Històricament el formigó armat, reforçat amb malles o barres d'acer, és un exemple de material de construcció, no només en l'àmbit de la construcció civil, viaductes, túnels, preses, entre d'altres, sinó també en l'edificació tant industrial com social. Actualment, una tècnica que va guanyant terreny és la de reforçar el formigó mitjançant fibres. Consisteix en utilitzar algun tipus de fibra barrejada amb la mescla com un component més del formigó, l'objectiu de la fibra és conformar una xarxa capaç de resistir les traccions que el formigó no pot absorbir.

Fins avui en les construccions civils, s'utilitzava una combinació d'ambdues tècniques: el formigó amb fibres com a element de reforç però sense prescindir de l'armadura tradicional, o amb el formigó projectat. No obstant això, per a alguns trams de la L9 del metro de Barcelona es proposa l'ús de dovelles on els esforços i per tant les funcions estructurals són suportats per la matriu de formigó amb fibres mentre que la presència d'una malla armada actua de reforç i evita la fissuració en el moment d'emplaçament de la dovella amb els gats hidràulics de la tuneladora.

Aquesta dependència de les fibres com element estructural justifica la necessitat de realitzar un control de qualitat que determini la ubicació d'aquestes dins la massa de formigó, ja sigui referent a la concentració com a l'orientació de les fibres a cada zona de l'espai, les quals estaran òbviament relacionades amb les propietats mecàniques del material. Aquest control, a més, hauria de permetre examinar tot els elements de formigó sense causar-los cap dany. En canvi, els assajos actuals són destructius, això implica que no s'avaluen tots els elements de formigó i que els que s'avaluen no poden ser usats en la construcció.

En els darrers anys s'ha continuat investigant amb l'objecte de proposar mètodes d'assajos no destructius per a la seva implantació industrial en el mercat del formigó reforçat amb fibres. Aquestes recerques estan basades en diferents principis físics, ja sigui de naturalesa acústica, electromagnètica, nuclear, o mètodes mixtes que exploren propietats creuades.

L'aparició d'un mètode fiable que permeti verificar el contingut de fibres i conèixer la seva distribució i orientació és bàsic per tal que l'ús de les fibres s'estengui i es normalitzi definitivament. Amb aquesta finalitat el Departament d'Enginyeria Electrònica juntament amb el d'Enginyeria de la Construcció, tots dos de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), han realitzat un seguit d'investigacions per tal d'oferir mètodes que solucionin les mancances de les tècniques actuals. El treball que aquí es presenta s'emmarca dins d'aquesta recerca i forma part del projecte HATCONS amb la participació de FCC S.A.



# Objectius

---

El formigó reforçat amb fibres és una tècnica de construcció que necessita un mètode fiable d'assaig no destructiu per analitzar les seves propietats. En el nostre treball ens centrarem a quantificar la concentració i orientació de fibres en el formigó mitjançant mètodes magnètics.

Els objectius que es proposen en aquest projecte i que han estat presents durant la realització del mateix són:

- Estudiar els mètodes magnètics per a la detecció de fibres en el formigó.
- Dissenyar i construir bobines de mida arbitrària amb camp magnètic constant a l'interior.
- Construir el prototip que analitzi el contingut de fibres en provetes de 15x15x15 cm.
- Presentar, analitzar i comparar els resultats obtinguts analíticament i experimentalment.
- Valorar els resultats i obtenir conclusions sobre els mateixos.
- En base al projecte en estudi i amb l'experiència adquirida, plantejar possibles línees futures d'investigació.





# Capítol 1: Introducció al formigó

---

## 1. El formigó

El formigó és un material usat en la construcció que resulta de l'emmotllat i enduriment d'una barreja bàsica de components: àrids (grava i sorra), ciment, aigua, i l'eventual inclusió d'altres components com additius, addicions, barres, fibres o pigments. Aquesta barreja ha de tenir la proporció adequada perquè en resulti una massa compacta en què la sorra ompli suficientment els buits compresos entre la grava, el ciment faci de lligam dels grans de sorra i la grava, i ompli els espais compresos entre aquests materials. L'adequada proporció dels ingredients fa que sigui més compacte i resistent a la compressió.

L'enduriment del formigó es produeix per la hidratació del silicat càlcic mitjançant un procés fruit de la combinació del ciment amb l'aigua. La quantitat d'aigua influeix en la presència d'aigua lligada, aigua lliure o aigua oclusa en els porus.

Els components que formen part de la barreja del formigó són:

- Àrids: s'afegeixen a la mescla i garanteixen tant la resistència com la durabilitat del formigó, no poden ser reactius amb el ciment i estan especialment desaconsellats els que contenen nòduls de guix, sulfurs oxidables i compostos de ferro. La mescla d'àrid gruixut (grava) i àrid fi (sorra) ha de fer-se en una proporció adequada i de compromís per aconseguir alhora una barreja prou compacta, és a dir, amb pocs buits.
- Aigua: barrejat amb el ciment inicia reaccions químiques que provoquen la transformació dels components i el seu enduriment. No totes les aigües poden servir per fer formigó, sinó que les que portin dissoltes substàncies perjudicials pel formigó en quantitats excessives no poden ser emprades. Per aquest motiu les diferents normes obliguen a fer anàlisis de l'aigua que s'emprarà per fer formigó.
- Additius: són les substàncies que s'afegeixen abans de l'amasat, que produeixen modificacions particulars en les seves característiques físiques o faciliten la seva aplicació. Els més utilitzats es defineixen segons la característica que modifiquen o confereixen: accelerants, airejants, anticongelants, fluïdificants, impermeabilitzants i retardadors.
- Addicions: Les addicions per a formigó són materials de naturalesa inorgànica que destaquen per les seves característiques cimentants. Són prou coneguts la putzolana, la cendra volant, el fum de sílice (l'única permesa en formigons pretesats) i les escòries d'alts forns. Les addicions disminueixen la participació del ciment a la mescla de formigó, sense variar majorment les propietats.

## 1.1. Armadures

El principal problema del formigó, com a material de construcció, és la seva fragilitat i escassa resistència a tracció. Aquest fet va limitar el seu ús a elements massius treballant purament a compressió, fins l'aparició del formigó armat. Aquesta tècnica utilitza barres d'acer embegudes dins del formigó per resistir de forma eficient les traccions a la peça. D'aquesta forma les barres d'acer resisteixen les traccions mentre que el formigó resisteix les compressions.

Una evolució d'aquesta tècnica són el formigó pretesat i el formigó posttesat on les barres que s'introdueixen al formigó són sotmeses a tensions de manera deliberada. Així introduint abans de l'enduriment aquestes barres tensades d'alta resistència, el formigó queda comprimit en endurir-se, de manera que les traccions que sorgiran per resistir les accions externes, es convertiran en descompressions de les parts prèviament comprimides.



Figura 1.1 - Armadura d'acer abans del formigonat

## 1.2. Fibres

A causa de l'elevat cost de l'acer i de la mà d'obra, l'ús de les fibres s'alça com una alternativa molt vàlida per a incrementar el rendiment dels materials i minimitzar costos. Sobretot, si es combina amb altres tècniques modernes com el formigó d'alta treballabilitat o el formigó autocompactable. La utilització de fibres busca les mateixes millores que en el cas de les armadures però de forma distribuïda en lloc de fer-ho de forma concentrada.



Figura 1.2 - Bloc de formigó reforçat amb fibres

## 2. Formigó reforçat amb fibres (SFRC)

En l'annex 14 de la nova "Instrucció de Hormigón Estructural" (EHE), aprovada el 18 de juliol de 2008, es defineix el formigó reforçat amb fibres com aquell formigó que inclou en la seva composició fibres curtes, discretes (amb presència moderada a la mescla) i aleatòriament distribuïdes en la seva massa. Aquesta incorporació es realitza per millorar algunes de les propietats com la flexió, tracció i tenacitat del formigó (Asociación Científico Técnica del Hormigón Estructural 2000).

Des de l'aparició del formigó amb fibres a la dècada dels anys 60 del segle passat, la tecnologia d'aquesta tipologia de formigó ha experimentat un notable progrés degut a les investigacions realitzades. Aquests avenços, el constant augment del cost de l'acer i de la mà d'obra han propiciat un increment de l'ús del formigó reforçat amb fibres a la indústria de la construcció.

Cal destacar que per especificar la dosificació de fibres aquesta s'expressa com la massa de fibres pel volum de formigó, habitualment  $\text{kg}/\text{m}^3$ , i que freqüentment s'usa per designar-lo l'acrònim en anglès, SFRC (Steel Fibre Reinforced Concrete), o en castellà, HRFA (Hormigón Reforzado con Fibras de Acero).

### 2.1. Tipus

Les fibres d'acer utilitzades en el reforç del formigó són discontinues, amb una distribució discreta i uniforme que confereix al material isotropia i homogeneïtat. La geometria de les fibres és diversa, podem trobar de secció circular, quadrada o rectangular tal com es mostra a la Figura 1.3. A més, amb la finalitat de millorar l'adherència amb el formigó, les fibres poden presentar els extrems conformats, ondulats o aixafats (Blanco 2008). En general, les dimensions de les fibres oscil·len entre 0.25 i 0.80 mm de diàmetre i entre 10 i 75 mm de longitud.

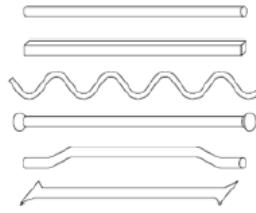


Figura 1.3 – Diferents tipus de fibres d'acer

En funció de l'aplicació de les fibres, aquestes poden ser galvanitzades, amb una millor resistència a la corrosió en obres marítimes, o d'acer inoxidable, impedit la corrosió en atmosferes calentes i amb gasos agressius com és el cas dels formigons en el revestiment de forns o en la indústria petroquímica.

## 2.2. Efectes

En el material compost per les fibres i la matriu de formigó, els esforços de tracció són suportats conjuntament per ambdós elements fins que s'inicia la fissuració (existeix poca diferència entre la resistència a la primera fissura en presència o no de fibres), moment a partir del qual les fibres comencen a treballar independentment, assumint progressivament els esforços i mostrant efectes de cosit (Aguado 2007). Tal com s'ha esmentat anteriorment, per tal de reforçar aquest efecte de cosit, es dissenyen fibres amb formes especials per tal d'augmentar l'adherència entre aquestes i la matriu. D'aquesta manera, augmentant la dosi de fibres en estructures de formigó, incrementa la resistència a la flexió-tracció després de la primera fissura instant a partir del qual comença el treball de les fibres, augmentant la resistència al trencament.

Si bé la presència de fibres aporta una millora en les prestacions mecàniques del material, també és cert que l'addició de fibres d'acer suposa un augment de la heterogeneïtat del material i va en detriment de la facilitat per treballar-lo. Aquest segon cas s'haurà de resoldre mitjançant additius químics (fluïdificants) que permetin millorar la consistència, mentre que el primer haurà de ser estretament vigilat, ja que la pèrdua d'homogeneïtat es tradueix en segregació de components, exsudació (migració de l'aigua a la superfície estructural) i formació de boles o eriçons (concentracions de fibres en una zona de l'espai) (Asociación Científico Técnica del Hormigón Estructural 2000).

En resum, la mescla de les fibres amb el formigó aporta els efectes positius següents:

- Les fibres cusen les fissures del formigó formant un pont entre els àrids, permetent un cert control en les fissures, evitant una fractura fràgil.
- Augmenten la resistència a la corrosió ja que es controla l'obertura de les fissures i per tant l'entrada d'aigua es redueix.
- Proporcionen alta resiliència, és a dir, aconseguen una alta resistència als impactes.
- Donen un reforç uniforme en les tres direccions.

- Milloren la resistència a tracció, flexió i tall.
- En paviments projectats amb formigó reforçat amb fibres, els espessors poden disminuir conservant les mateixes propietats.

### 2.3. Aplicacions

En la dècada dels anys 70 es començaren a utilitzar a Espanya formigons reforçats amb fibres en diversos àmbits: pavimentació de taulers de ponts, paviments industrials, contenidors de ports, revestiments de túnels, prefabricats, etc. En l'actualitat, entre aquestes aplicacions, la de construcció de paviments i revestiments de túnels amb formigó reforçat amb fibres d'acer han tingut un gran èxit (Blanco 2008).

Amb la utilització de fibres és possible estalviar-se o minimitzar els procediments de ferrallat i vibrat del formigó, aquests processos són els menys mecanitzats i que requereixen més mà d'obra, així que l'ús de SFRC redueix el temps d'execució i augmenta la seguretat dels treballadors.

## 3. Avaluació d'estructures de formigó

La construcció és una enginyeria que es pren amb molta importància l'estudi i disseny dels materials i tècniques de construcció. Tots ells s'avaluen de forma exhaustiva dins un ampli ventall de possibilitats i condicions diverses per tal d'assegurar uns marges de seguretat que garanteixin la qualitat de la construcció.

El mètode d'investigació en el camp de la construcció radica en l'avaluació i tabulació dels materials utilitzats en les barreges, ja que segons el percentatge i distribució de les mateixes varien les propietats del producte final. Totes aquestes investigacions perden eficàcia si no van paral·lelament lligades a un control per assegurar que tècniques i materials utilitzats responen de la forma esperada dins d'un patró de qualitat.

### 3.1. Controls de qualitat

Una de les problemàtiques del formigó són els mètodes de control de qualitat. Per assegurar que aquest compleix amb les condicions que se suposen en el seu disseny, ha de ser sotmès a diversos assaigs per comprovar-ne les característiques mecàniques i per garantir que la dosificació prevista és la real.

Els enginyers civils de la construcció han d'assegurar que un element de formigó enllestit és estructuralment adequat i tindrà un comportament concret segons per a la funció per el qual ha estat dissenyat, és l'anomenat control de recepció. Per aquest motiu, es prepara un programa de control de qualitat amb mesures in situ o en els laboratoris amb provetes de mida concreta, amb el mateix formigó de la construcció per comprovar que compleix les especificacions establertes en el projecte. Dins els nombrosos mètodes d'assaig es diferencien dos grans grups: els assaigs destructius i no destructius.



Figura 1.4 – Banc d'assaig a flexió de 50 Tm

### 3.1.1. Mètodes de control destructius

S'anomena mètode de control destructiu aquell tipus de prova practicada a un material que alteri les seves propietats físiques, químiques, mecàniques o dimensionals.

La gran majoria d'assaigs i avaluacions estan pensades per realitzar-se en un laboratori i generalment són destructives. Com que destruir el que s'està construint no té sentit, s'obtenen mostres (provetes) directament de la mateixa construcció, extretes d'uns punts que no l'afectaran. I suposen que les condicions de la mostra són equiparables a les de la resta de la construcció.

Les tipologies d'assaigs es basen en sotmetre les provetes a diversos tipus d'esforç, com per exemple a compressió o tracció-flexió. Les màquines que duen a terme aquests assaigs són tecnològicament molt avançades amb el consegüent elevat cost econòmic. Per aquest motiu, aquestes màquines no són molt abundants més enllà dels centres d'investigació i empreses certificadores.



Figura 1.5 – La proveta s'ha sotmès a un assaig destructiu

### 3.1.2. Mètodes de control no destructius

S'anomena mètode de control no destructiu aquell tipus de prova practicada a un material que no alteri les seves propietats físiques, químiques, mecàniques o dimensionals.

Tenen especial rellevància atès que permeten analitzar les propietats del formigó sense danyar l'estructura i per aquelles obres que per raons funcionals hagin de presentar un bon acabat.

La solució de mètode d'assaig ideal passa per utilitzar un mètode no destructiu, a on no s'hagin d'utilitzar les provetes i que es pugui aplicar a tota l'estructura.

## 3.2. Control del SFRC

L'ús creixent del formigó reforçat amb fibres com element constructiu i estructural, ha d'anar paral·lelament acompanyat de noves investigacions que busquin nous mètodes de control que combinin fiabilitat i economia. Tres són els punts que s'han de considerar per obtenir les propietats del material:

- Contingut total de fibres
- Distribució de les fibres (densitat local)
- Orientació de les fibres

En l'actualitat només estan normalitzats dos assaigs pels primers dos punts, mesurar el contingut, que a més presenten una dispersió de resultats considerable, treballen amb provetes, són laboriosos i lents. Respecte pel que fa a l'altre aspecte, es procedeix suposant que les fibres es reparteixen de forma aleatòria per tota la mescla de manera que s'aconsegueix una densitat més o menys constant i una distribució multidireccional, que permeten repartir les càrregues existents. Dins aquest camp la UPC ha presentat un nou assaig de doble punxament conegut com "assaig Barcelona" (Saludes Requena 2007). Aquest assaig ha tingut una gran acceptació gràcies als seus avantatges (rapidesa, facilitat d'operació, menor cost...) que presenta sobre altres assajos de provetes de formigó reforçat amb fibres.

### 3.2.1. Assajos normalitzats. Normes UNE

Les UNE (Una Norma Espanyola) són un conjunt de normes tecnològiques creades pels Comitès Tècnics de Normalització (CTN), dels que formen part totes les entitats i agents implicats i interessats en els treballs del comitè. Generalment aquests comitès solen estar formats per AENOR (Associació Espanyola de Normalització i Certificació), fabricants, consumidors i usuaris, administració, laboratoris i centres de recerca.

Norma vigent: UNE-EN 14721:2006+A1:2008

Aquesta norma és la versió oficial vigent a Espanya per determinar el contingut en fibres del formigó fresc i l'endurit. És la versió en castellà de la Norma Europea EN

14721:2005+A1:2007 la qual substitueix i anul·la la Norma UNE-EN 14721:2006, que a l'hora és la versió en castellà de la Norma Europea EN 14721:2005 (CEN/TC-229 2005). L'objectiu de la mateixa és descriure "dos mètodes d'assaig per la determinació del contingut en fibres del formigó amb fibres metàl·liques. El mètode A mesura el contingut en fibres d'una proveta de formigó endurit. El mètode B mesura el contingut en fibres d'una proveta de formigó fresc", (AEN/CTN-83 2008).

Els dos mètodes són en realitat força semblants. En el cas del formigó endurit s'han de separar les fibres triturant la proveta literalment, per seguidament recollir-les amb un iman i netejar-les minuciosament. En el cas del formigó fresc directament es renta la proveta amb aigua fins que s'aconsegueixi separar les fibres dels altres materials, per tot seguit arreplegar-les mitjançant també un imant i assecar-les en un forn. Després d'aquests procediments només resta en els dos casos pesar-les en sec. A la pràctica es fan servir poc ja que com es pot comprovar, aquests mètodes resulten tediosos, cars i poc sostenibles ambientalment.

#### Assaig d'inducció electromagnètica

La norma UNE 83512-1:2005 precedent a la norma EN 14721:2005 contempla un altre tipus d'assaig per determinar el contingut de fibres: el mètode d'inducció magnètica. No obstant la norma en qüestió aporta molt poca informació sobre aquest assaig. Segons explica es tracta d'introduir una proveta cilíndrica de formigó fresc o endurit en el nucli d'una bobina, i seguidament mesurar la força electromotriu generada en una bobina secundària per la variació de flux magnètic produïda en la bobina primària (vegeu Figura 1.6).

Per poder determinar la quantitat de fibres en la proveta l'equip ha de realitzar una corba de calibratge que s'ha de fer per cada tipus de formigó amb contingut de fibres. Aquesta corba de calibratge es realitza a partir d'una sèrie de 10 provetes de les quals es coneix la seva concentració de fibres i es mesura el corrent induït per cada mostra.

El resultat de la concentració de fibres es determina a partir de la corba de calibratge realitzada amb anterioritat i sobre la lectura del valor de corrent induït de la proveta en estudi.

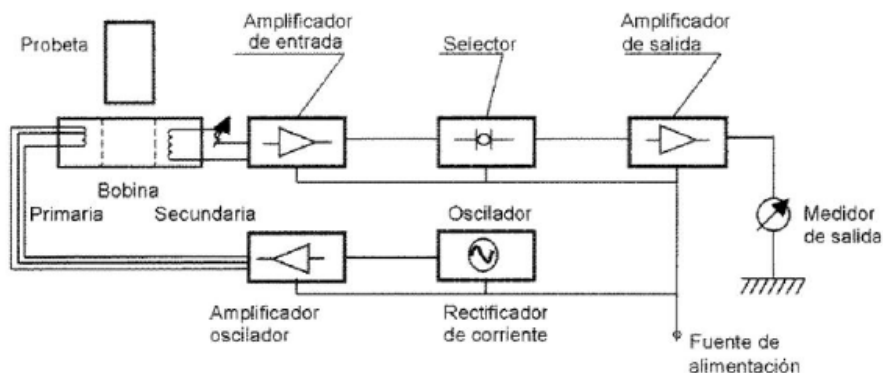


Figura 1.6 – Esquema de la mesura de la norma UNE 83512



En la Figura 1.6 es representa d'una forma esquemàtica el sistema de mesura de la norma. Com es pot observar es genera un senyal altern gràcies a un oscil·lador, el qual s'injectarà a la bobina primària o emissora. En la bobina secundària o receptora es detecta la variació de corrent gràcies a un equip de mesura, i a partir d'aquesta, es busca amb l'ajuda de la corba de calibratge prèviament realitzada, la concentració de fibres en la proveta que corresponen a la mesura en qüestió.

Una implementació comercial (Hertz 2006) propera a aquest mètode la fabrica una empresa alemanya i comercialitza una empresa belga, Bekaert, que proposa un aparell que mesura provetes cúbiques de 15x15x15 cm. Seguint els passos adequats aquest aparell aporta informació sobre la dosificació de fibres així com sobre l'orientació respecte a cadascun dels 3 eixos de la proveta. No obstant això, aquest mètode pondera de forma irregular les fibres en funció de la seva posició vertical a l'interior de la proveta (Masaló 2009).

#### 4. Motivació del projecte

Dins les investigacions que es duen a terme a la UPC s'ha elaborat un assaig d'inducció (Masaló 2009) amb la construcció d'unes bobines i l'ús d'un analitzador d'impedàncies. El mètode desenvolupat permet determinar la orientació de fibres en provetes així com aproximar el seu contingut. No obstant això, el camp magnètic produït per una bobina uniforme té més intensitat al centre que als extrems. Aquesta diferència fa que la mesura en la part central de la bobina prengui més importància que la mesura realitzada als extrems. Concretament, en la mesura de provetes, fa que es doni més importància a les fibres que es troben en la zona central de la proveta que les fibres que es troben en els extrems.

Tal com s'ha esmentat a l'apartat d'objectius, d'aquí prové la motivació d'aquest projecte: per obtenir una mesura correcta és important que la bobina construïda produeixi un camp magnètic constant a l'interior.



# Capítol 2: Estat del coneixement

---

Existeixen nombroses aplicacions a on és necessari produir un camp magnètic uniforme atès un volum determinat. Entre les aplicacions més importants podem citar:

- Per al disseny de magnetòmetres, aparell utilitzat per mesurar la intensitat, i alguns cops també la direcció, d'un camp magnètic (Ausserlechner 1998).
- Per al calibratge de sensors inductius (Bronaugh 1995), (Humar 2005) i (Tumanski 2007).
- Per al disseny de susceptòmetres, aparell utilitzat per mesurar la susceptibilitat ferromagnètica, paramagnètica o diamagnètica (Chen 2004).
- Per a l'obtenció d'imatges de ressonància magnètica (Di Luzio 1998).
- Per al disseny de gradiòmetres, aparell utilitzat per calcular gradients (Merritt et al. 1983).
- Per al disseny de viscosímetres, aparell per determinar la viscositat dinàmica, o el coeficient de viscositat, d'un líquid (Goloshevsky 2005) i (Walls et al. 2005).
- Per a millorar, eliminar i controlar la uniformitat del camp magnètic produït per la Terra (McKeehan 1939) i (Murgatroyd 1983).
- Per al disseny de termòmetres sensibles per a detectar canvis de temperatura dels corrents de pèrdues (Murgatroyd and Belloufi 1990).
- Per a realitzar proves de les propietats magnètiques i dels instruments dels satèl·lits (Pittman and Waidelich 1964).

A continuació es presenten de forma breu els diferents sistemes existents per produir un camp magnètic constant a una zona determinada, començant inicialment pel model clàssic de Helmholtz i es segueix amb les propostes derivades que la milloren. Es detallen les característiques generals de cada sistema així com els resultats que s'obtenen de la seva aplicació.

## 1. Bobina de Helmholtz

La bobina de Helmholtz és un sistema per produir una regió de camp magnètic quasi uniforme. S'anomena en honor del físic alemany Hermann von Helmholtz (Helmholtz 1849).

El dispositiu està format per dues bobines idèntiques circulars, col·locades simètricament una a cada costat del àrea experimental al llarg de l'eix comú i separades per una distància  $h$  igual al radi  $R$  de la bobina (vegeu Figura 2.1). Cada bobina està alimentada amb la mateixa intensitat que flueix a la mateixa direcció.

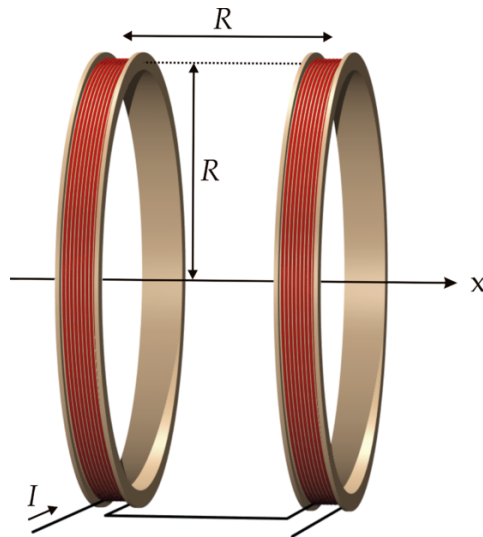


Figura 2.1 – Dibuix esquemàtic d'un parell de Helmholtz

La configuració  $h=R$ , definida com un parell de Helmholtz, maximitza la uniformitat al centre de les bobines però s'obté un 6% de variació d'intensitat en l'eix de les bobines ( $x$ ) entre el centre i els plans de les bobines. El parell de Helmholtz és possible amb espines quadrades, en aquest cas, la uniformitat millora lleugerament respecte a la circular (Kirschvink 1992).

## 2. Bobina de Jian

Una possible millora a la bobina de Helmholtz és afegir una tercera bobina amb el mateix radi i connectada en sèrie (Jian 2002). El nombre d'espines  $N$  de la bobina central és  $k$  vegades el nombre d'espines de les bobines exteriors i la distància  $a$  entre elles es determina segons el radi  $R$  de l'espina. En la Figura 2.2 es mostra un esquemàtic de la proposta.

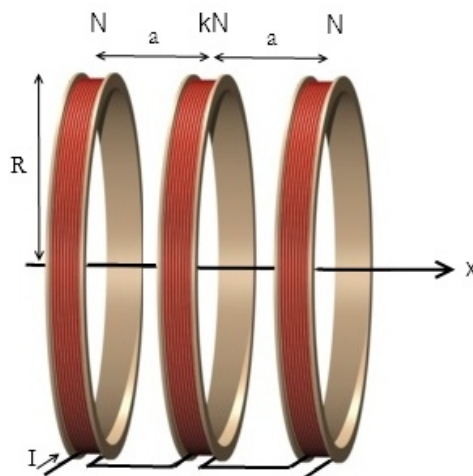


Figura 2.2 – Dibuix esquemàtic de la tri-bobina

En l'article s'indica que per obtenir la solució òptima, la distància entre elles ha de ser 0.7601 vegades el radi i el número d'espines de la bobina central i l'exterior han de ser 59 i 111 voltes respectivament ( $a=0.7601R$  i  $k=0.5315$ ). Aquests valors són obtinguts a partir de l'expressió del camp magnètic sobre l'eix de les bobines i satisfà que les derivades segones i quartes siguin igual a zero.

Segons les condicions anteriors, en les taules 2.1 i 2.2 podem veure una comparativa dels resultats obtinguts a partir de la bobina de Helmholtz i la millora que es proposa. Els resultats es donen en funció del radi de la bobina i ens permet obtenir la llargària del camp uniforme per un error màxim desitjat.

<i>Taula 2.1 – Resultats per un error <math>\leq 1\%</math> sobre l'eix de les bobines (<math>x</math>)</i>	
Bobina de Helmholtz	$ x  \leq 0.3137R$
Bobina de Jian	$ x  \leq 0.5104R$

<i>Taula 2.2 – Resultats per un error <math>\leq 0.1\%</math> sobre l'eix de les bobines (<math>x</math>)</i>	
Bobina de Helmholtz	$ x  \leq 0.1731R$
Bobina de Jian	$ x  \leq 0.3304R$

Segons les taules anteriors, considerem que desitgem un error més petit que 1% i el radi de la bobina és 7.5 cm, obtenim que el camp serà uniforme a l'interval  $|x| \leq 2.3$  cm en el cas de la bobina de Helmholtz i de  $|x| \leq 3.828$  cm en el cas de la millora de la bobina de Helmholtz.

### 3. Bobina de Alldred and Scollar

Aquest disseny consisteix en quatre bobines quadrades col·locades simètricament a una distància respecte del centre de -0.5254, -0.1441, 0.1441 i 0.5254 (Alldred and Scollar 1967). La principal diferència respecte als altres dissenys és que les bobines exteriors són lleugerament més petites que les interiors amb una relació de 0.95552 (vegeu Figura 2.3). El mètode de disseny es basa amb la imposició matemàtica següent: la relació entre el nombre d'espines de les bobines interiors i exteriors sigui un nombre enter racional, com per exemple, 21 espines per les bobines exteriors i 11 espines per les bobines interiors.

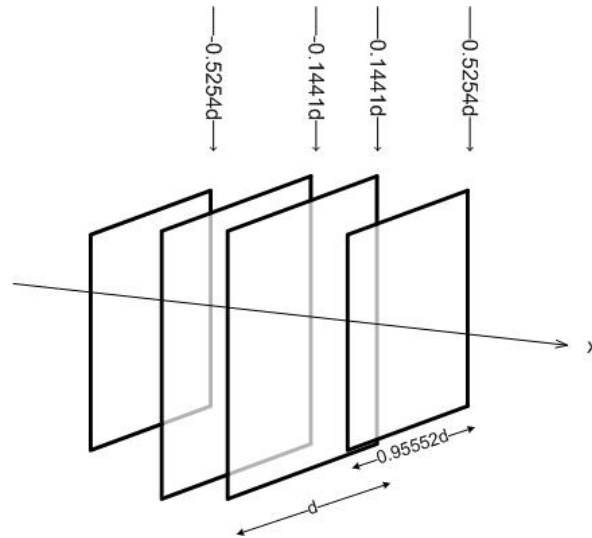


Figura 2.3 – Dibuix esquemàtic del disseny Allred and Scolar

#### 4. Bobina de Merrit

L'autor d'aquesta proposta presenta un disseny format per quatre bobines quadrades de les mateixes dimensions col·locades simètricament a una distància respecte del centre de  $-0.5055$ ,  $-0.1281$ ,  $0.1281$  i  $0.5055$  (vegeu Figura 2.4) (Merritt et al. 1983).

La relació entre el número d'espises de les bobines exteriors i interiors ha de ser 2.3612. Per exemple, amb un error de 0.1% es suggereix la distribució 26/11/11/26. També és possible la distribució 59/25/25/59 amb un 0.05% d'error o 85/36/36/85 amb un error del 0.004%. No obstant, l'article conclou que és més important preocupar-se de la posició de les bobines que de l'error produït per la proporció del nombre d'espises.

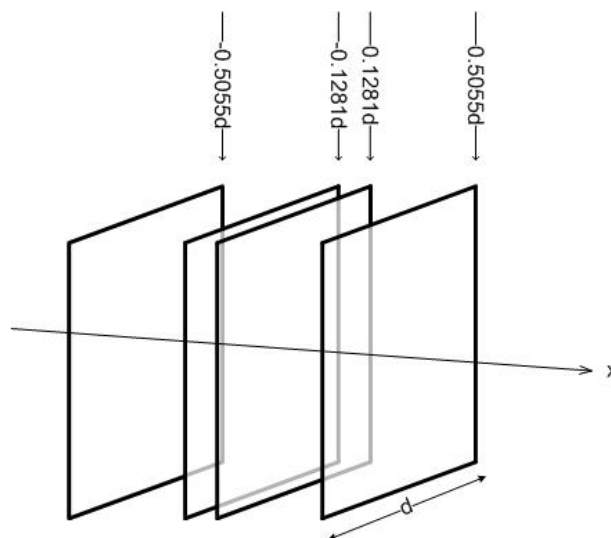


Figura 2.4 – Dibuix esquemàtic del disseny Merrit

## 5. Bobina de Rubens

El dissenys presentats fins ara són obtinguts a partir de l'expressió del camp magnètic i satisfà que les derivades d'alt ordre siguin igual a zero. Rubens ho enfoca de forma diferent col·locant inicialment cinc bobines quadrades separades entre elles a una distància de  $0.25d$  formant una superfície cúbica (vegeu Figura 2.5). Seguidament resol per conjunts la integral que dóna la relació entre el nombre d'espines de les bobines per aconseguir un camp uniforme (Rubens 1945). La solució òptima al problema surt amb una relació de  $19/4/10/4/19$ .

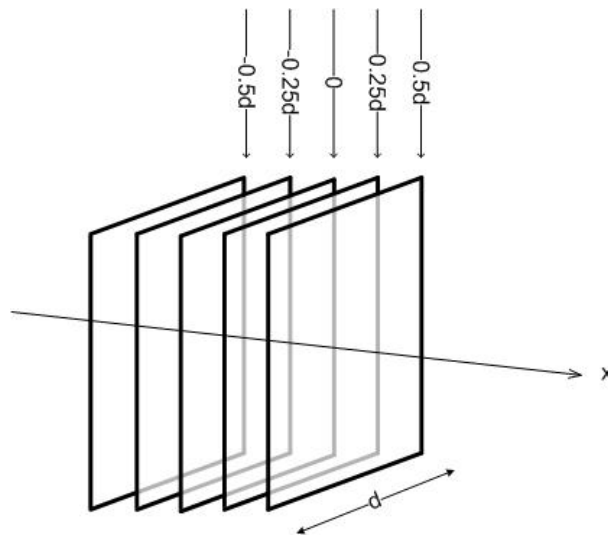


Figura 2.5 – Dibuix esquemàtic del disseny Rubens

## 6. Comparativa

A la Taula 2.3 podem observar un resum dels sistemes que s'han presentat anteriorment.

*Taula 2.3 – Especificacions de disseny dels sistemes discutits*

Disseny	Forma	Nº de bobines	Diàmetre o costat bobina	Espaiat	Proporció de voltes
Helmholtz	○	2	d,d	-0.25d, +0.25d	1/1
	□	2	d,d	-0.2726d, +0.2726d	1/1
Jian	○	3	d,d,d	-0.38005d, 0, +0.38005d	111/59/111
Alldred and Sclar	□	4	0.95552d, d, d, 0.95552d	-0.5254d, -0.1441d, +0.1441d, +0.5254d	21/11/11/21
Merrit et al.	□	4	d,d,d,d	-0.5055d, -0.1281d, +0.1281d, +0.5055d	26/11/11/26
Rubens	□	5	d,d,d,d,d	-0.5d, -0.25d, 0, +0.25d, +0.5d	19/4/10/4/19

És important considerar que no és possible obtenir un camp magnètic uniforme fora dels dominis de la pròpia bobina. Per exemple, si disposem de la bobina de Helmholtz amb  $d=1$  cm, com a màxim ens podrà proporcionar un camp uniforme dins l'interval  $|x|\leq 0.25$  cm i fora d'aquest interval el camp anirà decreixent.

En el nostre cas concret, la bobina que volem dissenyar ha d'envoltar les provetes cúbiques amb dimensions de  $15\times 15\times 15$  cm, per tant,  $d=15$  cm. Això vol dir que necessitem el camp més uniformitzat possible sobre l'interval  $|x|\leq 7.5$  cm.

Segons els resultats de la Taula 2.3, tots els dissenys proposats ens proporcionarien un camp uniforme de llargària molt inferior a l'interval que necessitem. Posem per cas l'exemple més favorable, la bobina de Merrit, només ens proporcionaria un camp uniforme sobre l'interval  $|x|\leq 3.79125$  cm. Per tant, cap dels sistemes proposats s'adapten a la nostra necessitat.

## 7. Necessitat d'una nova proposta

Si bé cap dels sistemes presentats satisfà completament la necessitat d'obtenir un camp magnètic uniforme atès un interval determinat, l'estudi de les propostes anteriors ens donarà futures idees de com dissenyar inicialment la nostra bobina, per exemple, que el nombre d'espines no serà constant a tot l'interval.

Abans d'afrontar el disseny de la bobina serà necessari realitzar un estudi de les fonts de camp magnètic. Si es desitja dissenyar un conjunt de bobines, de geometria quadrada o rodona i a priori amb un nombre d'espines diferent al llarg del seu eix, serà necessari conèixer prèviament el camp magnètic generat per una sola espira, per tant, aquest pas previ queda justificat.



# Capítol 3: Fonts de camp magnètic

En aquest capítol s'estudien les fonts de camp magnètic. Comencem amb l'element més bàsic, un element de corrent per posteriorment analitzar el camp magnètic produït per una espira circular i quadrada. Seguidament s'obté el camp produït per un solenoide circular i quadrat. Aquests càlculs són necessaris i s'utilitzaran posteriorment pel disseny de les bobines.

## 1. Camp magnètic produït per corrents elèctrics

La llei de Biot i Savart indica el camp magnètic creat per un element de corrent elèctric  $I d\mathbf{l}$  i ve donada per l'expressió [3.1].

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad [3.1]$$

El camp magnètic decreix amb el quadrat de la distància i la direcció és perpendicular a  $\hat{\mathbf{r}}$  i  $d\mathbf{l}$ . Per exemple, en un punt situat al llarg de la línia d'un element de corrent, tal com el punt  $P_2$  de la Figura 3.1, el camp magnètic degut al esmentat element és zero (l'equació [3.1] dóna  $d\mathbf{B} = 0$  si  $\hat{\mathbf{r}}$  i  $d\mathbf{l}$  són paral·lels o antiparal·lels).

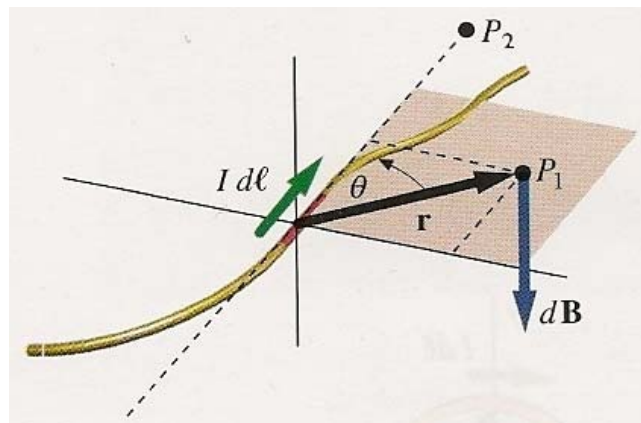


Figura 3.1 – (Tipler 2005) Un element de corrent per il·lustrar la llei de Biot i Savart. El camp al punt  $P_1$  és perpendicular a  $\hat{\mathbf{r}}$  i  $d\mathbf{l}$

## 2. Camp magnètic d'una espira circular

A partir de la llei de Biot i Savart, el camp magnètic produït sobre el seu eix interior per una espira circular de radi  $R$ , alimentada amb intensitat  $I$  a una distància  $x$  del centre, ve donat per l'expressió [3.2].

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad [3.2]$$

El paràmetre  $\mu_0$  és la permeabilitat en el buit i és una constant tal que en el buit el seu producte amb el camp magnètic és igual a la densitat de flux magnètic. El desenvolupament de l'expressió [3.2] es pot trobar detallat a l'annex i a la referència (Tipler 2005).

En la Figura 3.2 veiem un gràfic normalitzat del camp magnètic sobre l'eix interior d'una espira circular de radi  $R=2$  cm en funció de la posició  $x$ . Observem que el màxim de la funció s'obté en  $x=0$  i així com ens allunyem el camp disminueix.

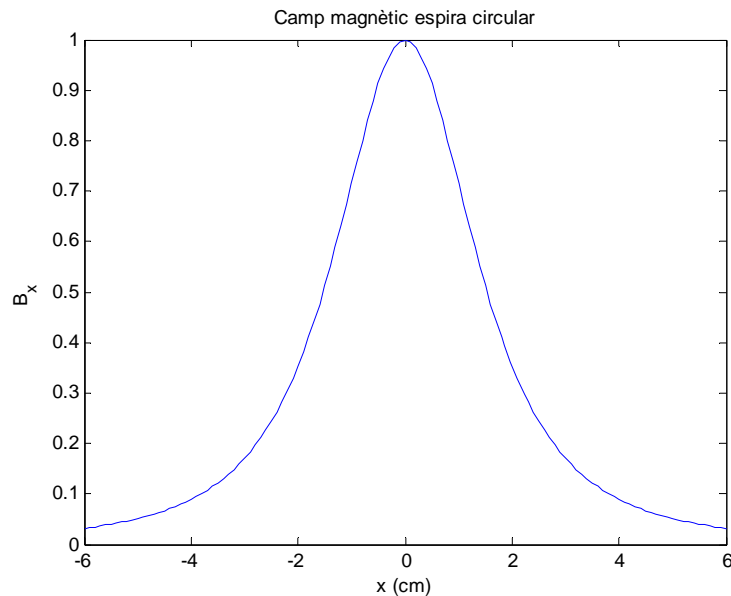


Figura 3.2 – Camp magnètic produït per una espira circular

## 3. Camp magnètic d'una espira quadrada

El camp magnètic produït sobre el seu eix longitudinal per una espira quadrada de costat  $L$ , alimentada amb intensitat  $I$  a una distància  $x$  del centre, ve donat per l'expressió [3.3].

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} I\sqrt{2} \frac{8L^2}{(4x^2 + L^2)\sqrt{(2x^2 + L^2)}} \quad [3.3]$$

El desenvolupament de l'expressió [3.3] es pot trobar detallat a l'annex.

En la Figura 3.3 veiem un gràfic normalitzat del camp magnètic sobre l'eix interior d'una espira quadrada de costat  $L=4$  cm en funció de la posició  $x$ . Novament observem que el màxim de la funció s'obté en  $x=0$  i així com ens allunyem el camp disminueix.

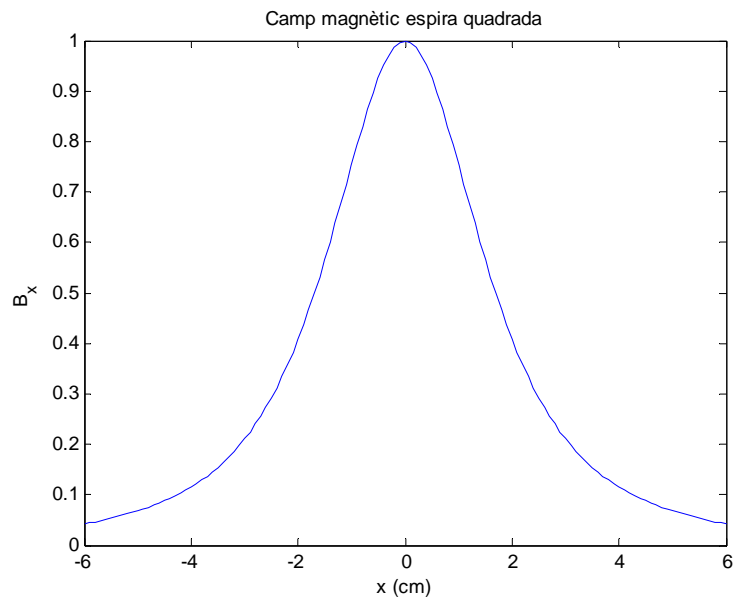


Figura 3.3 – Camp magnètic produït per una espira quadrada

### 3.1. Comparació espira circular i espira quadrada

Un cop conegut el camp produït per l'espira circular i l'espira quadrada és el moment de comparar ambdós resultats. En la Figura 3.4 vegem simultàniament el camp magnètic produït pels dos tipus d'espira amb  $R=2$  cm i  $L=4$  cm.

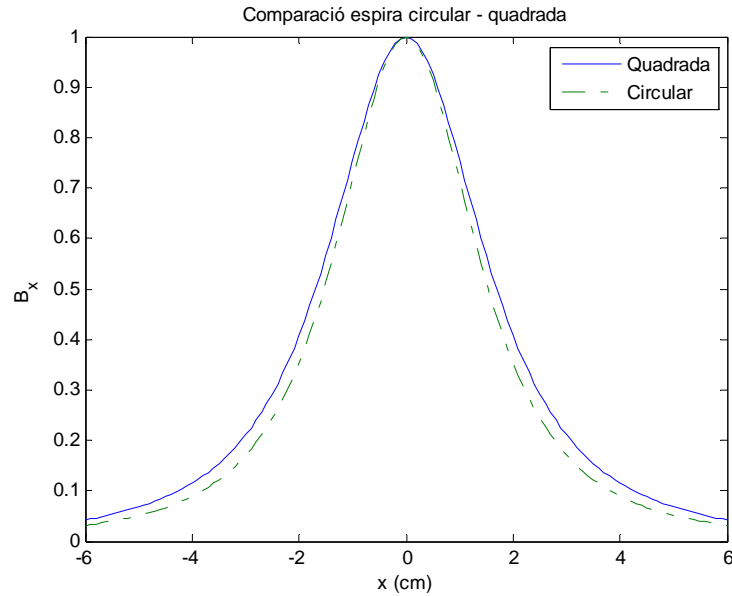


Figura 3.4 – Comparació espira circular i espira quadrada

Podem observar com en el cas de l'espira circular les cues decauen amb més rapidesa que en el cas de l'espira quadrada. No obstant, el màxim de la funció es troba en el centre, quan  $x=0$ .

#### 4. Camp magnètic d'un solenoide circular

Un solenoide és un filferro enrotllat en forma d'hèlix amb espires molt pròximes entre sí (vegeu la Figura 3.5). El camp magnètic produït per un solenoide circular, ve donat per l'expressió [3.4].

$$B_x(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} \right) \quad [3.4]$$

De l'expressió anterior definim (vegeu Figura 3.5):

- $N$ : nombre de voltes
- $R$ : radi de l'espira circular
- $l$ : longitud total del solenoide
- $n = N/l$ : nombre de voltes per unitat de longitud
- $x_1$ : extrem esquerre
- $x_2$ : extrem dret

El desenvolupament de l'expressió [3.4] es troba detallat a l'annex.

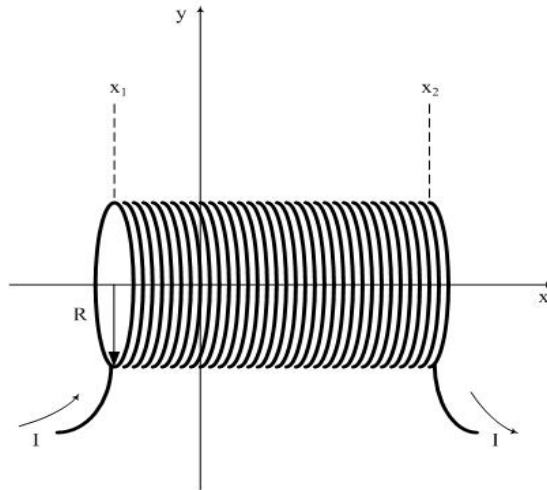


Figura 3.5 – Geometria pel càlcul del camp magnètic dintre el solenoide circular sobre l'eix

En la Figura 3.6 veiem un gràfic normalitzat del camp magnètic sobre l'eix interior d'un solenoide circular, de 20 cm de longitud i amb radi  $R=2$  cm, en funció de la posició  $x$ . Observem que en la zona central s'obté un camp uniforme però ràpidament disminueix a mida que ens anem allunyant del punt central del solenoide.

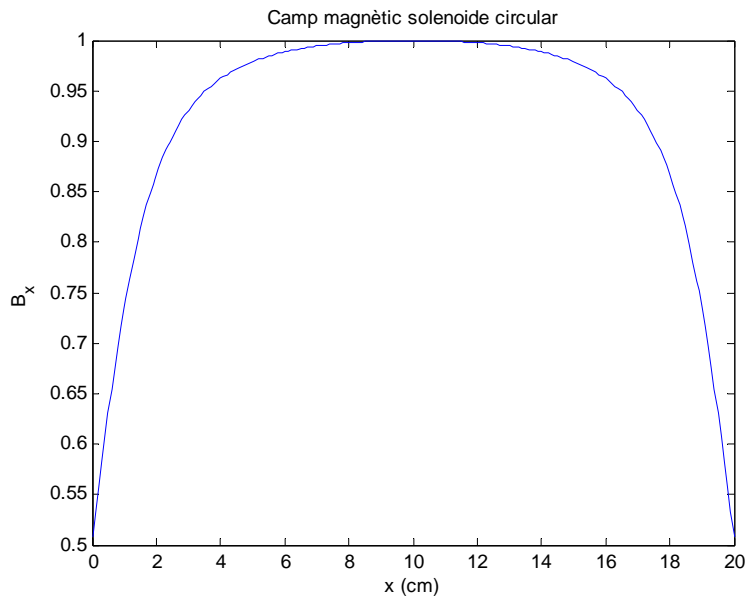


Figura 3.6 – Camp magnètic produït per un solenoide circular

## 5. Camp magnètic d'un solenoide quadrat

El camp magnètic produït per un solenoide quadrat, ve donat per l'expressió [3.5].

$$B_x(x_1, x_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} 8nl \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{2} x_2}{\sqrt{2x_2^2 + L^2}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{2} x_1}{\sqrt{2x_1^2 + L^2}} \right) \right] \quad [3.5]$$

De l'expressió anterior considerem que L és la longitud del costat de l'espina quadrada (vegeu Figura 3.7). El desenvolupament de l'expressió [3.5] es troba detallat a l'annex.

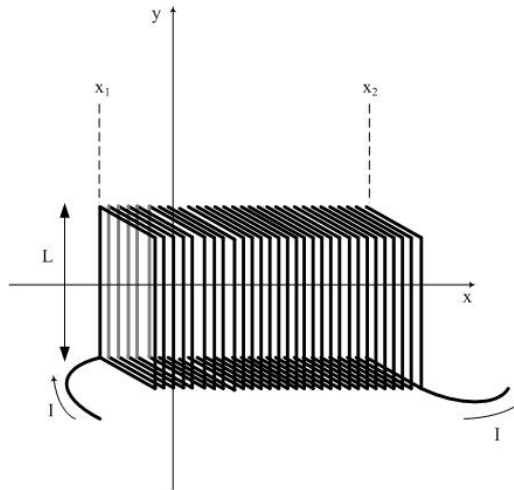


Figura 3.7 – Geometria pel càlcul del camp magnètic dintre el solenoide quadrat sobre l'eix

En la Figura 3.8 veiem un gràfic normalitzat del camp magnètic sobre l'eix interior d'un solenoide quadrat, de 20 cm de longitud i amb costat L=4 cm, en funció de la posició x. Novament observem que en la zona central s'obté un camp uniforme però ràpidament disminueix a mida que ens anem allunyant del punt central del solenoide.

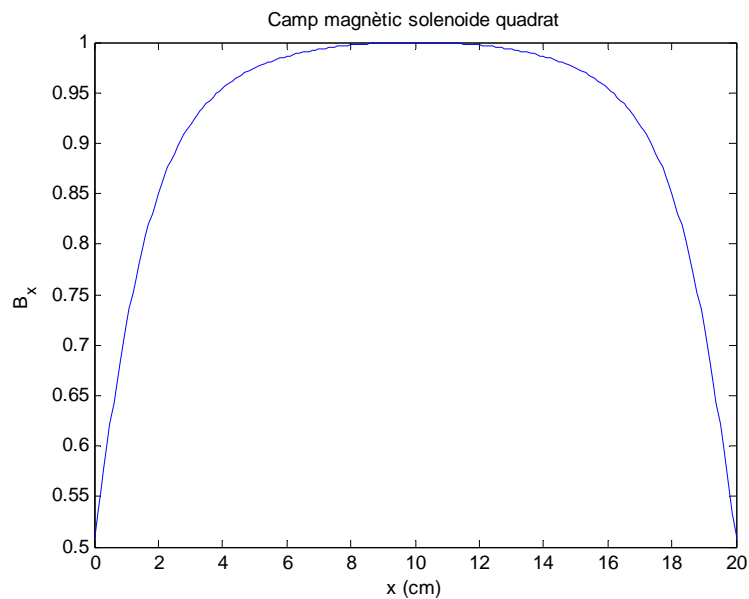


Figura 3.8– Camp magnètic produït per un solenoide quadrat

### 5.1. Comparació solenoide circular i solenoide quadrat

Un cop conegut el camp produït pel solenoide circular i el solenoide quadrat és el moment de comparar ambdós resultats. En la Figura 3.9 vegem simultàniament el camp magnètic produït pels dos tipus de solenoide amb  $R=2$  cm i  $L=4$  cm.

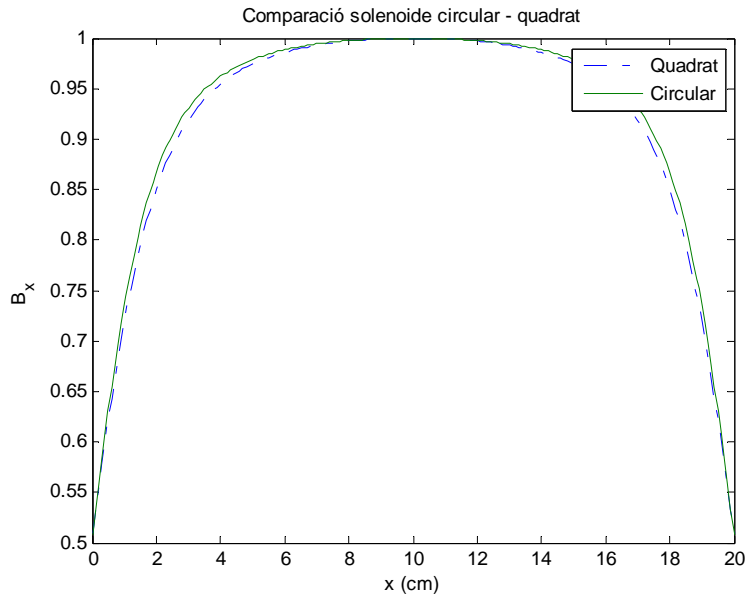


Figura 3.9 - Comparació solenoide circular i solenoide quadrat

Podem observar que ambdós funcions són quasi idèntiques a diferència de que tenim més uniformitat en el solenoide circular que en el quadrat, no obstant, les cues decauen en un mateix factor. En el cas del solenoide circular disminueix un 49.26% la intensitat entre el centre i els plans extrems de les bobines i en el solenoide quadrat un 49.07%.





# Capítol 4: Disseny de les bobines

---

En aquest capítol es planteja tot el procés de disseny de les bobines. Primer s'identifiquen quins són els paràmetres inicials de disseny per avaluar i seleccionar el mètode més adient.

## 1. Paràmetres de disseny inicials

El nostre principal objectiu és obtenir una bobina quadrada on el seu camp magnètic produït sigui el més uniforme possible al seu interior. Així, el principal paràmetre de disseny es troba definit per la geometria de la bobina.

Per una altra banda, si volem obtenir un camp magnètic uniformitzat sabem que el bobinat no serà uniforme, en tal cas obtindríem un solenoide amb camp no constant tal com s'ha mostrat al capítol 3 - Fonts de camp magnètic. Per tant, obtenim un nou paràmetre de disseny; el nombre de voltes de fil serà diferent en cada interval de l'interior de la bobina.

## 2. Un ventall de mètodes

Amb els paràmetres de disseny plantejats és el moment de trobar eines que ens permetin assolir el nostre repte. Com a tot projecte d'enginyeria, els mètodes matemàtics se'ns presenten com una bona eina per tal de poder traduir numèricament els paràmetres de disseny físics proposats. Durant la fase de disseny s'han fet servir nombrosos mètodes matemàtics, alguns obtenint millors resultats que altres. Tot seguit s'enuncien els mètodes proposats.

### 2.1. Transformada de Fourier

L'equació [3.3] del capítol 3 - Fonts de camp magnètic, ens proporciona el camp magnètic creat per una espira quadrada, l'anomenarem funció  $b(x)$ . Per una altra banda volem obtenir un camp uniforme dins un interval de llargària determinada, en termes matemàtics, una funció del tipus pols quadrat  $t(x)$  de la mateixa durada que l'interval esmentat. Busquem una funció de pesos  $c(x)$  com a suma de les contribucions desplaçades de la funció  $b(x)$ , en notació matemàtica:

$$t(x) = \sum c(\tau) \cdot b(x + \tau) \quad [4.1]$$

La funció  $b(x)$  és parell, per tant podem reescriure [4.1] com:

$$t(x) = \sum c(\tau) \cdot b(x - \tau) \quad [4.2]$$

L'expressió [4.2] correspon a la definició de convolució de dues funcions (Oppenheim 1997), en el nostre cas:

$$t(x) = c(x) \otimes b(x) \quad [4.3]$$

En el domini transformat tenim:

$$T(\phi) = C(\phi) \cdot B(\phi) \quad [4.4]$$

Aïllem la funció de pesos:

$$C(\phi) = \frac{T(\phi)}{B(\phi)} \quad [4.5]$$

Finalment, per obtenir la funció de pesos haurem d'aplicar la transformada inversa de Fourier de l'equació [4.5].

El desenvolupament presentat a priori sembla una bona solució però s'han trobat una sèrie d'inconvenients que fan que no sigui el mètode adient. La transformada de Fourier de la funció  $b(x)$  té una sèrie de punts amb valors ínfims, fins hi tot amb algun zero, que al dividir provoca un resultat final de valors molt alts o fins hi tot resultats indeterminats.

Per demostrar analíticament l'experiment pràctic anterior podem realitzar un anàlisi de coherència espectral que ens proporciona la variabilitat i la correlació creuada espectral de les dues funcions en estudi (Bendat 1986). En la Figura 4.1 podem observar el resultat gràfic d'aquest anàlisi espectral obtingut mitjançant el programa Matlab i amb l'execució de la funció *mscohere*. El gràfic ens proporciona valors entre 0 i 1. Les freqüències properes a 1 (correlació alta) les anomenarem freqüències fiables i les properes a 0 (correlació baixa) freqüències no fiables. En el nostre cas concret, el valor

mitjà és de 0.22, això vol dir que les freqüències no fiables són més abundants que les fiables i que per tant les funcions són altament variables espectralment parlant. Aleshores, intuïtivament dues funcions que entre elles obtenen un valor baix en coherència espectral no es podrà obtenir una tercera com a combinació lineal de les dues primeres.

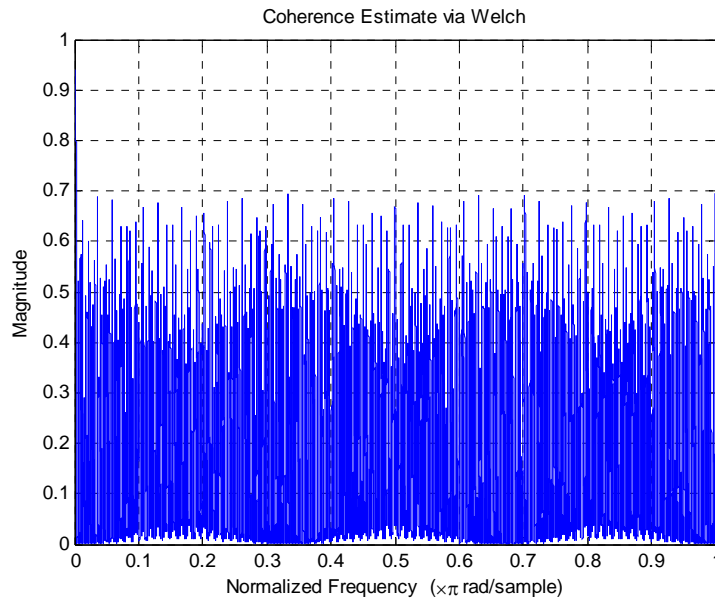


Figura 4.1 – Coherència espectral resultant del disseny a través del mètode de la transformada de Fourier

## 2.2. Mètode força bruta

El mètode de la força bruta consisteix en anar provant de forma iterativa, seguint amb la mateixa notació que en l'expressió [4.2], diferents funcions de pesos  $c(x)$ , realitzar la convolució amb  $b(x)$  per obtenir  $t(x)$ , avaluar l'error i quedar-se amb el resultat que menys error proporciona. S'ha utilitzat el nom de força bruta per analogia al cas de descriptació de dades que rau en anar provant totes les combinacions possibles fins trobar aquella que permet l'accés.

La metodologia consisteix en dividir la funció  $c(x)$  en intervals de la mateixa llargària i donar valors diferents per a cada iteració. En aquest cas cal tenir cura de com es defineix el centre de la funció ja que tenim dues opcions. Per exemple, tal com es mostra a la Figura 4.2, tenim una configuració entre -1.5 i 1.5 (llargària total de 3 cm) i volem dividir-la en intervals iguals. L'opció 1 divideix en 6 intervals de 0.5 cm i l'opció 2 en 7 intervals de 0.43 cm. Per tant, tenim l'opció de declarar intervals parells (opció 1) o intervals senars (opció 2). S'han realitzat una sèrie de simulacions de curta durada i s'ha arribat a la conclusió de que, encara que ambdues solucions són simètriques, al realitzar la convolució s'han obtingut millors resultats numèrics amb la segona opció d'intervals senars.

Un cop ja tenim la divisió feta en intervals, cal donar-los valors d'iteració. En aquest cas s'ha trobat oportú considerar tant els números positius i negatius. Físicament una espira negativa s'implementa canviant el sentit de gir de construcció, és a dir, si acabem de

bobinar 3 espires positives d'una bobina en el sentit de les agulles del rellotge i ara hem de bobinar 4 espires negatives ho haurem de fer en sentit antihorari.

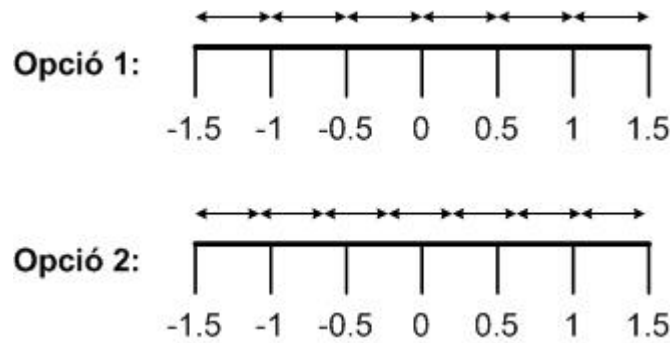


Figura 4.2 – El centre es pot configurar de dues formes obtenint intervals parells o senars

Un altre punt a considerar es com avaluar l'error de la no uniformitat en l'interval d'interès. S'ha trobat adient utilitzar el mètode min/max, que consisteix en obtenir el valor mínim i màxim del interval de mesura i realitzar la divisió d'ambdós valors. Lògicament amb el criteri min/max quan més alt és el valor obtingut menys error s'ha comés.

Aquest mètode al estar compost de bucles enllacats amb càlculs iteratius i convolucionals presenta una gran càrrega computacional. Segons els marges d'iteració dels intervals declarats una execució pot tardar hores, dies o setmanes. No obstant s'obtenen resultats numèricament molt positius a canvi de simulacions de llarga durada.

### 2.3. Mètode analític

El mètode analític consisteix en imposar un resultat a la sortida, funció  $y$ , com a contribució parcial i espacial de la funció d'entrada  $h$ , ambdues conegudes. Els coeficients alfas marquen aquesta contribució i són la incògnita del sistema (Shawe-Taylor 2004). Tot plegat queda escrit com segueix:

$$y = \sum_{i=1}^M \alpha_i \cdot h(x - x_i) \quad [4.6]$$

En el nostre cas particular, la funció  $h$  correspon al camp magnètic produït per una espira i la funció  $y$  a un pols quadrat de llargària igual al camp uniforme que volen obtenir. Si desenvolupem l'expressió [4.6] obtenim:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \sum_{i=1}^M \alpha_i \cdot h(x_1 - x_i) = \alpha_1 \cdot h(x_1 - x_1) + \dots + \alpha_M \cdot h(x_1 - x_M) \\
 y_2 &= \sum_{i=1}^M \alpha_i \cdot h(x_2 - x_i) = \alpha_1 \cdot h(x_2 - x_1) + \dots + \alpha_M \cdot h(x_2 - x_M) \\
 &\quad \vdots \\
 y_M &= \sum_{i=1}^M \alpha_i \cdot h(x_M - x_i) = \alpha_1 \cdot h(x_M - x_1) + \dots + \alpha_M \cdot h(x_M - x_M)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

El desenvolupament de [4.7] es pot escriure en format matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x_1 - x_1) & \dots & h(x_1 - x_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h(x_M - x_1) & \dots & h(x_M - x_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

També [4.8] es pot escriure en format vectorial:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\alpha} \tag{4.9}$$

En el cas que  $\mathbf{H}$  sigui una matriu quadrada i el seu determinant sigui diferent de zero, la solució de [4.9] ve donada per:

$$\boldsymbol{\alpha} = \text{inv}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{y} \tag{4.10}$$

En el cas que  $\mathbf{H}$  no sigui quadrada o el seu determinant sigui zero, haurem d'utilitzar la pseudoinversa, en aquest cas la solució de [4.9] ve donada per:

$$\boldsymbol{\alpha} = \text{pinv}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{y} \tag{4.11}$$

Tant si utilitzem la inversa o la pseudoinversa obtindrem alfes positives i negatives. Si desitgem només obtenir solucions positives farem ús de la funció *lsqnonneg* del matlab.

El vector òptim d'alfes obtinguts formarà part del conjunt dels números fraccionaris i per tant, en la construcció de les bobines, físicament irrealitzable. Per obtenir valors enters arrodonirem el vector òptim i obtindrem en aquest cas un vector d'alfes subòptim. Generalment amb el vector subòptim s'obindrà major error que amb el vector òptim.

Per comprovar que el mètode analític funciona farem dues comprovacions. La primera serà simular una bobina de Helmholtz i la segona un solenoide quadrat.

#### Comprovació 1: bobina de Helmholtz

En aquest cas, la matriu  $\mathbf{H}$  s'omplirà a partir de la funció d'un camp magnètic produït per una espira quadrada. El vector d'alfes vindrà imposat de la següent manera: la distància entre les dues bobines de Helmholtz és igual al radi del costat de l'espira (en el nostre cas concret  $r=7.5$  cm), per tant, tindrem el vector d'alfes tot a zeros excepte en els intervals de 0.25 cm entre  $[-4, -3.75]$  i  $[3.75, 4]$  a on tindrem uns. El vector  $y$  és el que busquem.

El resultat que s'ha obtingut és un camp uniforme amb un error de 5.7 % des del centre al plans de les bobines. L'error d'una bobina de Helmholtz entre el centre i al plans de les bobines és del 6 % per tant considerem que s'ha obtingut un resultat satisfactori.

#### Comprovació 2: solenoide quadrat

En aquest cas, la matriu  $\mathbf{H}$  s'omplirà a partir de la funció d'un camp magnètic produït per una espira quadrada. El vector d'alfes vindrà imposat de la següent manera: tot el vector d'alfes igual a uns, és a dir, tenim entre -7.5 i 7.5 (un solenoide de distància 15 cm) un conjunt d'espires quadrades situades una al costat de l'altre. El vector  $y$  és el que busquem.

Per una altra banda, tenim l'expressió analítica del camp produït per un solenoide, donat per l'equació [3.5]. Obtenim el resultat concret per un solenoide de llargària 15 cm.

Per comparar ambdues solucions, normalitzem el vector  $y$  i el resultat obtingut de l'expressió analítica del solenoide. S'observa que els dos resultats surten pràcticament iguals amb una diferència del 0.11%, per tant considerem que s'ha obtingut un resultat satisfactori.

## 2.4. Branch & Bound

La tècnica Branch & Bound s'aplica per resoldre problemes d'optimització (Sallán Leyes 2005). S'interpreta com un arbre de solucions a on cada branca ens condueix a una possible solució posterior a l'actual. La característica d'aquest mètode és que s'encarrega de detectar en quina ramificació les solucions obtingudes ja no són òptimes i no continuar malgastant recursos i processos en casos que s'allunyen de la solució òptima.

En el nostre cas es proposa utilitzar el mètode Branch & Bound com a complement del mètode analític. La metodologia consistirà en utilitzar un vector subòptim obtingut del mètode analític, modificar de forma iterativa cada posició del vector amb un valor posterior i un valor anterior i avaluar l'error de nou. Si l'error obtingut és millor que l'anterior es guarda temporalment el vector fins que finalment s'han iterat totes les posicions del vector. Per exemple, si la posició 1 del vector d'entrada té valor 3, s'avaluaran els valors 2, 3 i 4 conservant originàriament els valors de les altres posicions. Seguidament es repeteix el procés per la posició 2 del vector i així successivament fins

arribar a la darrera posició, assegurant que es comproven totes les combinacions possibles.

Un cop ja tenim un vector amb un error més baix que el d'entrada, de nou es repeteix tot el procés, tractant-se d'un sistema retroalimentat que finalitza quan l'error del vector d'entrada és el mateix error que del vector de sortida o també quan els vectors d'entrada i sortida són iguals.

El mètode de Branch & Bound es presenta com un complement al mètode analític per millorar-lo i obtenir millors resultats. No obstant és necessària una programació de codi addicional no complicada però que segons la llargària del vector subòptim pot alentir l'execució.

### 3. Mètodes definitius

El mètodes proposats anteriorment presenten avantatges i inconvenients. La força bruta ens proporciona una definició d'interval molt més real físicament a una bobina que els  $M$  punts de l'expressió [4.6] del mètode analític. No obstant la força bruta té una càrrega computacional molt més elevada que el mètode analític amb una computació més àgil i senzilla. Cal buscar un compromís entre cost computacional (temps d'execució) i % error i decidir segons les necessitats i recursos del moment.

Per seleccionar els mètodes que utilitzarem en la construcció de les bobines, s'ha confeccionat un gràfic comparatiu entre el mètode analític, mètode Branch & Bound i el mètode de la força bruta. En ell es mostra el tant per cent d'error en funció del cost computacional (temps d'execució). Per a cada mètode anteriorment citat s'ha simulat per a tres geometries diferents:

- Cercle: les dimensions corresponen a una bobina circular amb 5 cm de llargària i 5 cm de diàmetre.
- Quadrat buit: les dimensions corresponen a una bobina quadrada de 6x6x6 cm (alt, llarg i ample).
- Quadrat ple: les dimensions corresponen a una bobina quadrada de 15x15x15 cm (alt, llarg i ample) indicada per mesurar provetes de formigó.

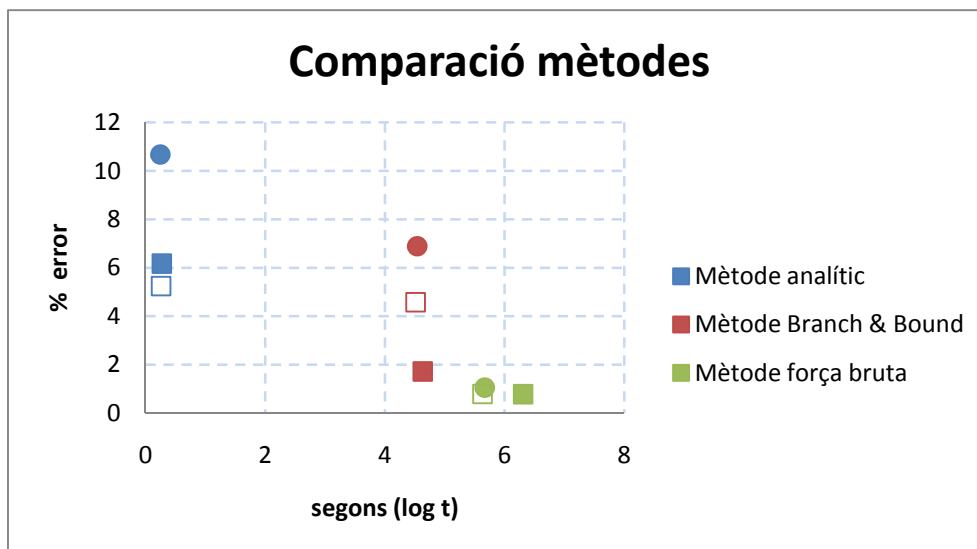


Figura 4.3 – Comparació dels mètodes

Podem obtenir les següents conclusions del gràfic de la Figura 4.3:

- El mètode analític ens proporciona un cost computacional baix a costa d'un error més elevat.
- El mètode Branch & Bound ofereix un error més baix que el mètode analític a canvi d'un major cost computacional però no tan elevat com el mètode de la força bruta.
- El mètode de la força bruta ens ofereix l'error més baix però el cost computacional es veu augmentat de forma considerable.

A la Taula 4.1 podem veure una comparativa dels avantatges i inconvenients dels mètodes proposats.

*Taula 4.1 – Comparació de mètodes*

	<b>Avantatges</b>	<b>Inconvenients</b>
<b>Força bruta</b>	Error baix	Alt cost computacional
<b>Analític</b>	Baix cost computacional	Error alt
<b>Branch &amp; Bound</b>	Proporciona millor error que l'analític	El cost computacional és variable

El mètode ideal és aquell que té error molt baix i poc cost computacional, en termes relatius al gràfic, el punt es situaria proper a les coordenades (0,0). Finalment s'ha decidit utilitzar el mètode de la força bruta, el qual ens proporciona un error baix, i el mètode analític que ens ofereix rapidesa computacional. S'ha descartat el mètode Branch & Bound per trobar-se numèricament entre les dues opcions escollides i per no oferir avantatges destacables als mètodes finalment seleccionats.



# Capítol 5: Construcció de les bobines

---

En aquest capítol es presenten els resultats obtinguts de l'aplicació del mètode de la força bruta i del mètode analític sobre les bobines circulars i quadrades que s'han construït. A la Taula 5.1 podem veure un resum de les especificacions de les bobines construïdes.

*Taula 5.1 – Especificacions de les bobines construïdes*

<b>Dimensions (cm)</b>	<b>Geometria</b>	<b>Mètode</b>	<b>Espires</b>
2.5x5 (radi i llargària)	Circular	Força bruta	Positives i negatives
6x6x6 (alt, llarg i ample)	Quadrada	Força bruta	Positives i negatives
2.5x5 (radi i llargària)	Circular	Analític	Positives i negatives
6x6x6 (alt, llarg i ample)	Quadrada	Analític	Positives i negatives
6x6x6 (alt, llarg i ample)	Quadrada	Força bruta	Positives
15x15x15 (alt, llarg i ample)	Quadrada	Força bruta	Positives

L'ordinador utilitzat per realitzar les execucions del codi programat mitjançant el software Matlab 7.4 és un Intel Core 2 Duo a 2.13 GHz amb 2 GB de memòria RAM i sistema operatiu Windows XP Professional SP3. Per tant totes les referències de durada de l'execució dels programes que es presenten en aquest document fan referència a les especificacions hardware i software anteriorment citades.

Tant en el cas de les bobines circulars i quadrades s'han construït sobre una estructura de PVC per evitar interferències del camp magnètic produït per la mateixa bobina. El fil utilitzat per bobinar, mentre no es digui el contrari, és de coure amb recobriment esmaltat de 0.2 mm de diàmetre i amb resistència teòrica 54.59  $\Omega$  per cada 100 metres de longitud. La resistència del fil es pot calcular fàcilment amb l'expressió [5.1] sabent que la resistivitat  $\rho$  del fil de coure és del  $1.712 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ .

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad [5.1]$$

## 1. Bobina circular mètode força bruta

Es proposa aplicar el mètode de la força bruta amb espines positives i negatives a una geometria circular amb radi 2.5 cm i llargària 5 cm d'on es vol obtenir el camp magnètic el més uniformitzat possible sobre el seu eix longitudinal. L'interval s'ha dividit en 11 parts segons s'ha explicat amb anterioritat a l'apartat 2.2 - Mètode força bruta del capítol 4 - Disseny de les bobines i segons l'opció 2 de la Figura 4.2. Cada divisió de l'interval s'ha iterat entre -10 i 10.

A la Taula 5.2 es resumeixen les especificacions citades anteriorment:

<i>Taula 5.2 - Especificacions bobina circular mètode força bruta</i>	
Radi de la circumferència	2.5 cm
Llargària	5 cm
Nº d'interval	11
Interval d'iteració	[-10 , 10]
Espines	Positives i negatives

A la Taula 5.3 es mostren els resultats numèrics obtinguts:

<i>Taula 5.3 - Resultats bobina circular mètode força bruta</i>	
Vector òptim	{10, -10, 1, 5, 2, -6, 2, 5, 1, -10, 10}
Error	1.053448 %
Temps execució	46649 segons $\approx$ 12.9 hores

L'error expressat a la taula anterior s'ha mesurat amb el criteri min/max al llarg dels 5 cm de la geometria circular i segons s'ha definit anteriorment en l'interval  $[-2.5, 2.5]$ . En el fons aquest error informa de la no uniformitat i ens interessa que sigui el més baix possible. S'ha considerat oportú multiplicar per dos el vector òptim anteriorment obtingut per tal de que el camp magnètic produït per la bobina sigui molt més intens i sigui més fàcilment mesurable, per tant, el vector amb el número d'espines final és {20, -20, 2, 10, 4, -12, 4, 10, 2, -20, 20}. A la Figura 5.1 podem observar el camp magnètic obtingut i la situació de les espines que han resultat de l'execució.

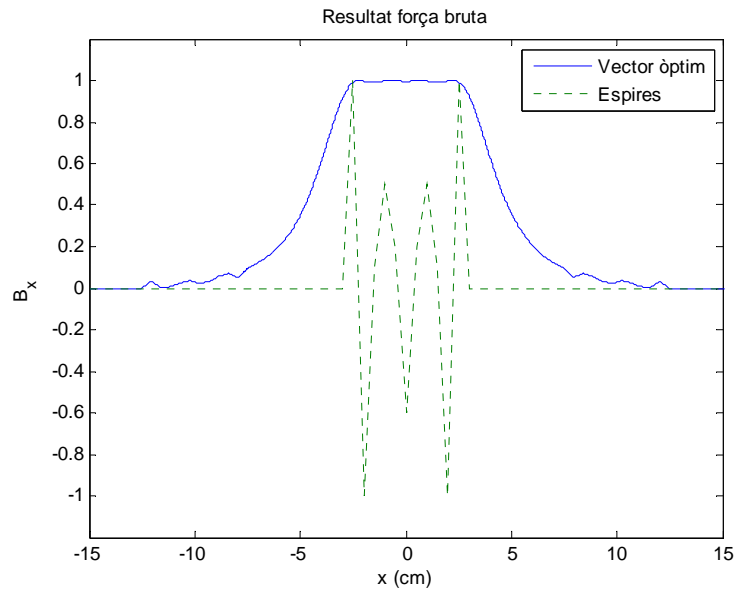


Figura 5.1 – Resultat obtingut amb el mètode força bruta – Bobina circular

La bobina s'ha construït a partir d'un tub de PVC amb dimensions 7 cm de llarg per 5 cm de diàmetre. S'ha assegurat un centímetre de marge a cada costat sobre el llarg de l'estructura per major facilitat alhora de realitzar el bobinatge. A la Figura 5.2 podem observar amb detall el resultat de la construcció.

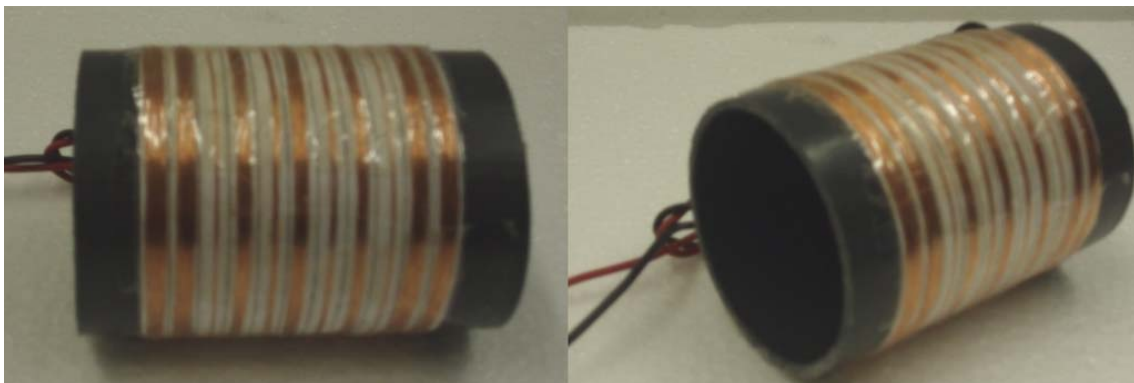


Figura 5.2 – Bobina circular dissenyada amb el mètode de la força bruta

## 2. Bobina quadrada mètode força bruta

Es proposa aplicar el mètode de la força bruta amb espirals positives i negatives a una geometria quadrada amb dimensions 6x6x6 cm (alt, llarg i ample) d'on es vol obtenir el camp magnètic el més uniformitzat possible sobre el seu eix longitudinal. L'interval s'ha dividit en 13 parts segons s'ha explicat amb anterioritat a l'apartat 2.2 - Mètode força bruta del capítol 4 - Disseny de les bobines i segons l'opció 2 de la Figura 4.2. Cada divisió de l'interval s'ha iterat entre -6 i 6.

A la Taula 5.4 es resumeixen les especificacions citades anteriorment:

Dimensions (alt, llarg, ample)	6x6x6 cm
Nº d'interval·s	13
Interval d'iteració	[-6 , 6]
Espires	Positives i negatives

A la Taula 5.5 es mostren els resultats numèrics obtinguts:

Vector òptim	{5, -4, -2, 2, 3, -2, 0, -2, 3, 2, -2, -4, 5}
Error	0.791106 %
Temps execució	428121 segons $\approx$ 4.9 dies

L'error expressat a la taula anterior s'ha mesurat amb el criteri min/max al llarg dels 6 cm de la geometria quadrada i segons s'ha definit anteriorment en l'interval [-3 , 3]. En el fons aquest error ens informa de la no uniformitat i ens interessa que sigui el més baix possible. S'ha considerat oportú multiplicar per set el vector òptim anteriorment obtingut per tal de que el camp magnètic produït per la bobina sigui molt més intens i sigui més fàcilment mesurable, per tant, el vector amb el número d'espines final és {35, -28, -14, 14, 21, -14, 0, -14, 21, 14, -14, -28, 35}. A la Figura 5.3 podem observar el camp magnètic obtingut i la situació de les espines que han resultat de l'execució.

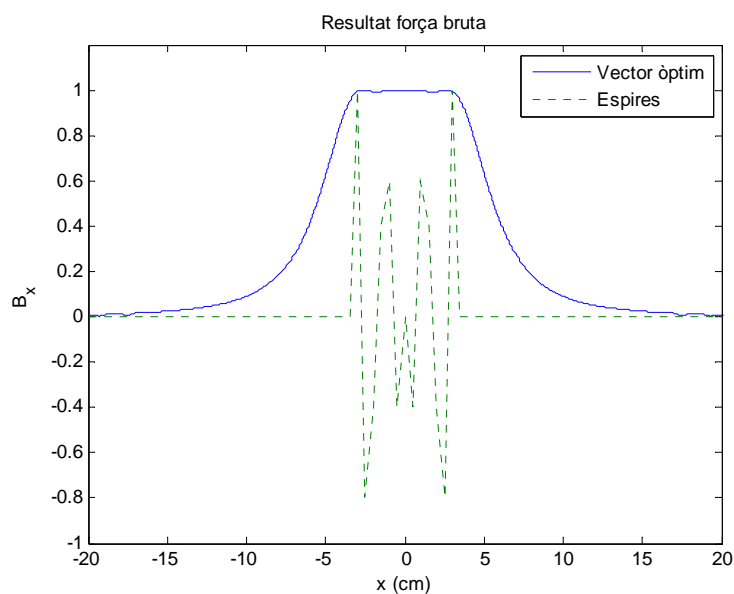


Figura 5.3 – Resultat obtingut amb el mètode força bruta – Bobina quadrada

La bobina s'ha construït a partir d'una canaleta per conduir cables elèctrics de PVC amb dimensions 6x8x6 cm (alt, llarg i ample). S'ha assegurat un centímetre de marge a

cada costat sobre el llarg de l'estructura per major facilitat alhora de realitzar el bobinatge. A la Figura 5.4 podem observar amb detall el resultat de la construcció.

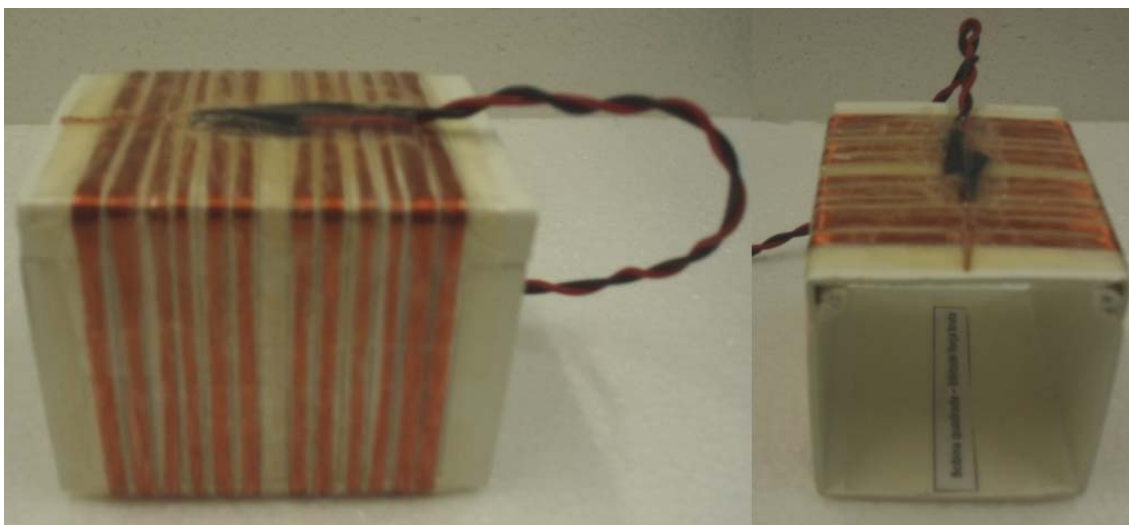


Figura 5.4 – Bobina quadrada dissenyada amb el mètode de la força bruta

### 3. Bobina circular mètode analític

Es proposa aplicar el mètode analític amb espires positives i negatives a una geometria circular amb radi 2.5 cm i llargària de 5 cm d'on es vol obtenir el camp magnètic el més uniformitzat possible sobre el seu eix longitudinal. S'han declarat 11 punts equiespaiats al llarg dels 5 cm segons s'ha explicat amb anterioritat a l'apartat 2.3 - Mètode analític, per tant,  $M=11$  segons correspon a l'expressió [4.6].

A la Taula 5.6 es resumeixen les especificacions citades anteriorment:

Radi de la circumferència	2.5 cm
Llargària	5 cm
$M$	11
Espires	Positives i negatives

A la Taula 5.7 es mostren els resultats numèrics obtinguts:

Vector òptim	{22.67, -2.78, -2.97, 0.12, 4.65, 7.06, 4.65, 0.12, -2.97, -2.78, 22.67}
Vector subòptim	{23, -3, -3, 0, 5, 7, 5, 0, -3, -3, 23}
Error vector òptim	2.727855 %
Error vector subòptim	3.253809 %
Temps execució	0.77 segons

L'error expressat a la taula anterior s'ha mesurat amb el criteri min/max al llarg dels 5 cm de la geometria quadrada i segons s'ha definit anteriorment en l'interval  $[-2.5, 2.5]$ . En el fons aquest error ens informa de la no uniformitat i ens interessa que sigui el més baix possible. Tal com s'esperava l'error en el cas del vector subòptim és superior que en el cas del vector òptim. A la Figura 5.5 podem veure la gràfica d'ambdós vectors i la situació de les espires que han resultat de l'execució. A la Figura 5.6 veiem encara amb més detall l'interval d'interès entre  $[-2.5, 2.5]$  per poder apreciar la diferència entre el vector òptim i el subòptim.

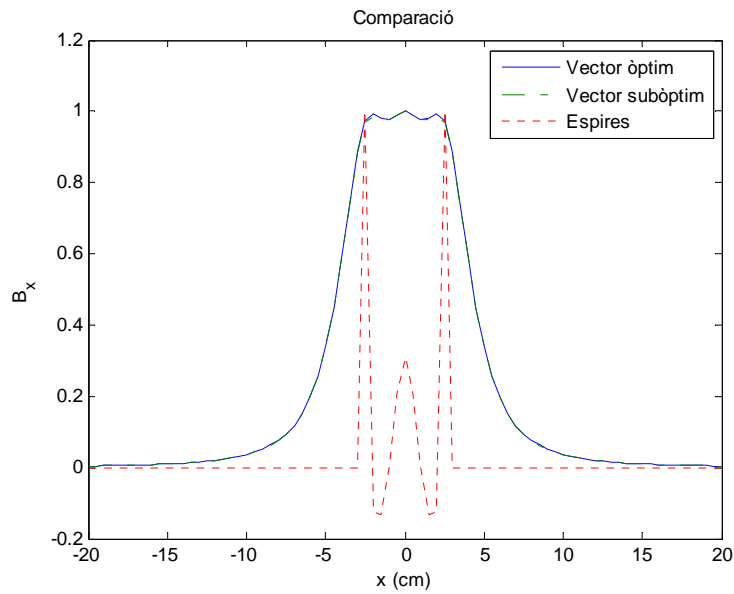


Figura 5.5 – Resultat obtingut amb el mètode analític – Bobina circular

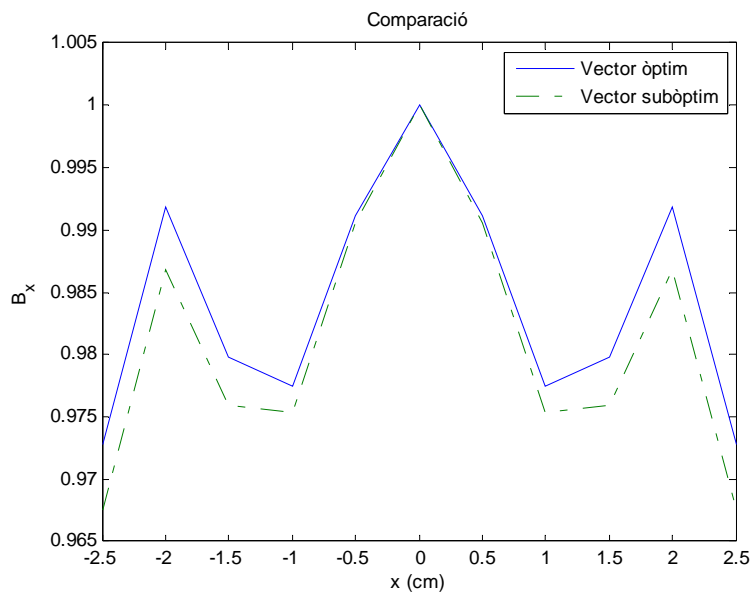


Figura 5.6 – Detall en l'interval d'interès

L'estructura de la bobina és la mateixa que en el cas de la bobina circular dissenyada amb el mètode de la força bruta, és a dir, tub de PVC amb dimensions 7 cm de llarg per 5 cm de diàmetre amb un centímetre de marge a cada costat sobre el llarg de l'estructura per facilitar el bobinatge.

#### 4. Bobina quadrada mètode analític

Es proposa aplicar el mètode analític amb espines positives i negatives a una geometria quadrada amb dimensions 6x6x6 cm (alt, llarg i ample) d'on es vol obtenir el camp magnètic el més uniformitzat possible sobre el seu eix longitudinal. S'han declarat 13 punts equiespaiats al llarg dels 6 cm segons s'ha explicat amb anterioritat a l'apartat 2.3 - Mètode analític, per tant,  $M=13$  segons correspon a l'expressió [4.6].

A la Taula 5.8 es resumeixen les especificacions citades anteriorment:

Dimensions (alt, llarg, ample)	6x6x6 cm
$M$	13
Espines	Positives i negatives

A la Taula 5.9 es mostren els resultats numèrics obtinguts:

Vector òptim	{26.01, -8.59, -6.30, 1.34, 5.49, 3.32, 0.26, 3.32, 5.49, 1.34, -6.30, -8.59, 26.01}
Vector subòptim	{26, -9, -6, 1, 5, 3, 0, 3, 5, 1, -6, -9, 26}
Error vector òptim	4.258520 %
Error vector subòptim	2.007803 %
Temps execució	0.82 segons

L'error expressat a la taula anterior s'ha mesurat amb el criteri min/max al llarg dels 6 cm de la geometria quadrada i segons s'ha definit anteriorment en l'interval  $[-3, 3]$ . Curiosament, i no com s'esperava, l'error en el cas del vector subòptim és inferior que en el cas del vector òptim. A la Figura 5.7 podem veure la gràfica d'ambdós vectors i la situació de les espines que han resultat de l'execució. A la Figura 5.8 veiem encara amb més detall l'interval d'interès entre  $[-3, 3]$  per poder apreciar la diferència entre el vector òptim i el subòptim.

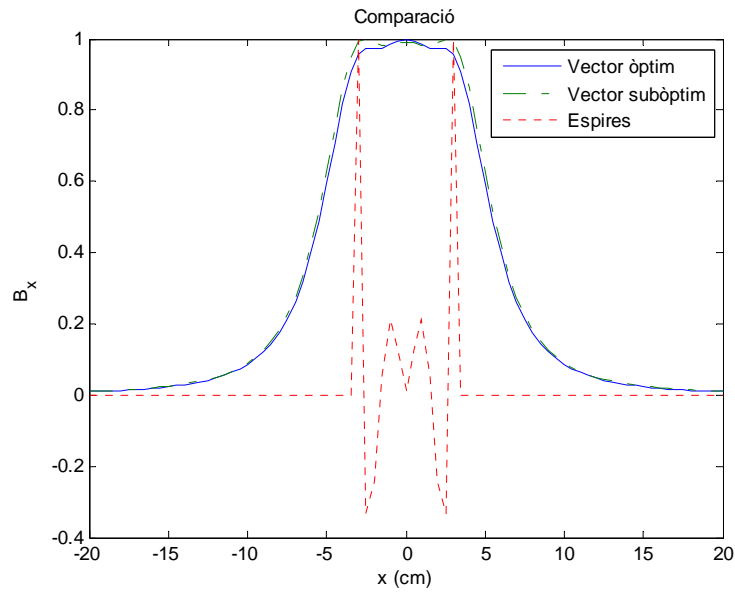


Figura 5.7 – Resultat obtingut amb el mètode analític – Bobina quadrada

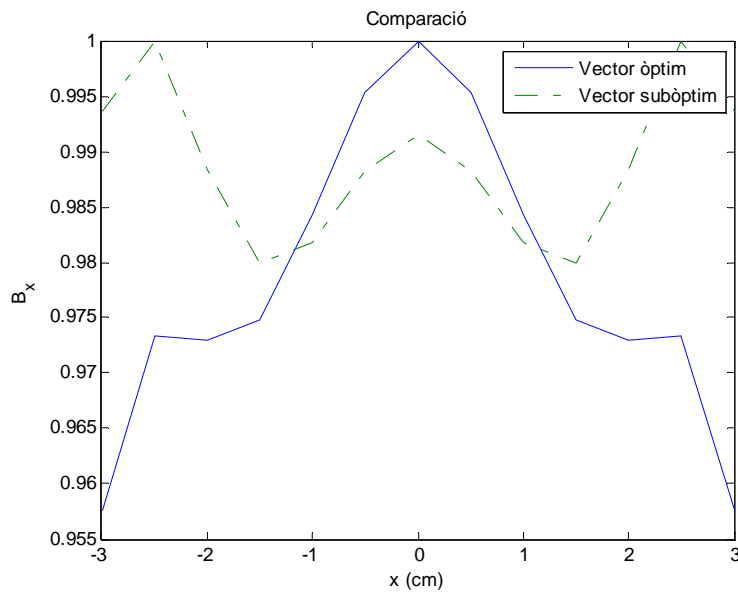


Figura 5.8 – Detall en l'interval d'interès

L'estructura de la bobina és la mateixa que en el cas de la bobina quadrada dissenyada amb el mètode de la força bruta, és a dir, tub de PVC amb dimensions 6x8x6 cm (alt, llarg i ample) amb un centímetre de marge a cada costat sobre el llarg de l'estructura per facilitar el bobinatge.



## 5. Bobina quadrada mètode força bruta amb espires positives

Es proposa aplicar el mètode de la força bruta només amb espires positives a una geometria quadrada amb dimensions 6x6x6 cm (alt, llarg i ample) d'on es vol obtenir el camp magnètic el més uniformitzat possible sobre el seu eix longitudinal. L'interval s'ha dividit en 13 parts segons s'ha explicat amb anterioritat a l'apartat 2.2 - Mètode força bruta del capítol 4 - Disseny de les bobines i segons l'opció 2 de la Figura 4.2.

Per evitar una llarga durada de l'execució del codi, primer s'han executat varies simulacions per intuir la solució (inicialment l'interval s'ha iterat entre -6 i 6) i després s'han realitzat varies execucions addicionals per tal d'ajustar la solució final.

A la Taula 5.10 es resumeixen les especificacions citades anteriorment:

<i>Taula 5.10 - Especificacions bobina quadrada mètode força bruta espires positives</i>	
Dimensions (alt, llarg, ample)	6x6x6 cm
Nº d'interval	13
Espires	Positives

A la Taula 5.11 es mostren els resultats numèrics obtinguts:

<i>Taula 5.11 - Resultats bobina quadrada mètode força bruta espires positives</i>	
Vector òptim	{40, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 12, 1, 0, 0, 0, 0, 40}
Error	5.781342 %
Temps execució	59448 segons $\approx$ 16.5 hores

L'error expressat a la taula anterior s'ha mesurat amb el criteri min/max al llarg dels 6 cm de la geometria quadrada i segons s'ha definit anteriorment en l'interval [-3, 3]. A la Figura 5.9 podem observar el camp magnètic obtingut i la situació de les espires que han resultat de l'execució.

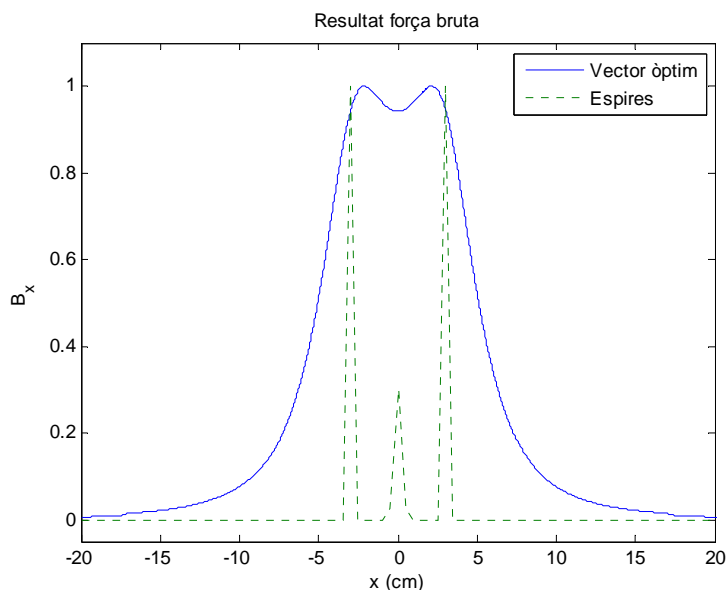


Figura 5.9 – Resultat obtingut amb el mètode força bruta només amb espirals positives – Bobina quadrada

Segons s'observa a la Figura 5.9, es podria pensar en millorar la solució proposada afegint diverses espirals al centre per tal de eliminar els pics i uniformitzar el camp. En tal cas, s'ha comprovat i s'observa que efectivament els pics desapareixen però a canvi l'interval uniformitzat es veu minvat i conseqüentment l'error augmenta.

## 6. Bobina per mesurar provetes de formigó

En aquest cas s'ha decidit utilitzar el mètode de la força bruta només amb espirals positives, decisió que es justificarà raonadament al capítol 6 – Mesura de les bobines.

El disseny físic de la bobina s'ha d'adequar a la geometria i volum de les provetes amb les quals realitzem les mesures. En el nostre cas, es mesuren provetes cúbiques amb unes dimensions de 15x15x15 cm (alt, llarg i ample). Per tant, el disseny de la bobina ha de ser tal que les provetes es puguin introduir al seu interior, deixant un espai d'un centímetre en tots els extrems per si es volguessin fer algunes mesures amb provetes de formigó fresc. El que es pretén és fer una base cúbica on les dimensions interiors són de 15x17x17 cm (alt, llarg i ample) i obert per dos extrems oposats per tal de poder-hi introduir les provetes.

La principal característica que ha de tenir el material per realitzar el cub ha de ser que no afecti al camp magnètic i que a més sigui fàcil de poder doblar-lo per tal de poder construir el cub. Una bona opció es utilitzar PVC, ja que aquest es pot doblar fàcilment aplicant calor i a més no afecta al camp magnètic de la bobina. Un cop escollit el material, es decideix utilitzar una canal UNEX de PVC de les que s'utilitzen per conduir cable elèctric. Aquestes canals tenen una amplada estandarditzada i es decideix utilitzar la de 15 cm d'amplada, que és exactament el que mesuren les nostres provetes. Per poder construir

la proveta s'agafa la canal estàndard de 15 cm i se'n talla una longitud de 68 cm, per tal de poder fer un cub de 17 cm de costat. Es doblen les quatre cares aplicant calor en el material i finalment es fixen els dos extrems utilitzant cola de contacte per tal de tancar el cub. El resultat final es pot veure a la Figura 5.10.



Figura 5.10 – Estructura física de la bobina

Per tant, es proposa aplicar el mètode de la força bruta només amb espires positives a una geometria quadrada amb dimensions 15x17x17 cm (alt, llarg i ample) d'on es vol obtenir el camp magnètic el més uniformitzat possible sobre el seu eix longitudinal. L'interval s'ha dividit en 25 parts segons s'ha explicat amb anterioritat a l'apartat 2.2 - Mètode força bruta del capítol 4 - Disseny de les bobines i segons l'opció 2 de la Figura 4.2, per tant, cada interval tindrà una amplada de 6 mm.

En aquest cas, degut a la gran quantitat de bucles innerats, s'han fet un conjunt d'execucions per tal de distribuir la càrrega computacional. Primer s'han executat varies simulacions per intuir la solució i després s'han realitzat varies execucions addicionals per tal d'ajustar la solució final.

A la Taula 5.12 es resumeixen les especificacions citades anteriorment:

<i>Taula 5.12 - Especificacions bobina provetes de formigó</i>	
Dimensions (alt, llarg, ample)	15x17x17 cm
Nº d'interval	25
Espires	Positives

A la Taula 5.13 es mostren els resultats numèrics obtinguts:

<i>Taula 5.13 - Resultats bobina quadrada mètode força bruta espires positives</i>	
Vector òptim	{1027, 0, 300, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1027}
Error	4.286327 %
Temps execució	118880 segons $\approx$ 1.4 dies

L'error expressat a la taula anterior s'ha mesurat amb el criteri min/max al llarg dels 15 cm de la geometria quadrada i segons s'ha definit anteriorment en l'interval  $[-7.5, 7.5]$ . A la Figura 5.11 podem observar el camp magnètic obtingut i la situació de les espires que han resultat de l'execució.

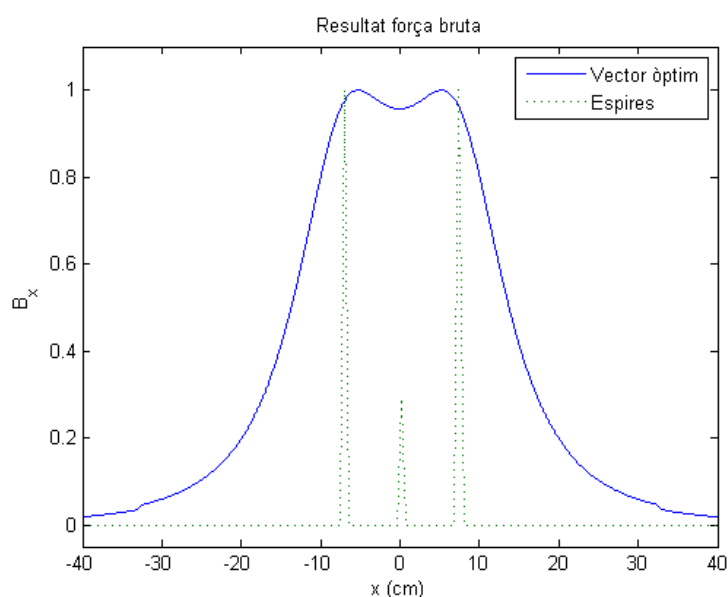


Figura 5.11 – Resultat obtingut amb el mètode força bruta amb només espires positives – Bobina per mesurar provetes de formigó

Segons els resultats de la Taula 5.13, podem calcular que s'obté un total de 2354 voltes i es necessiten aproximadament 1600 m de fil. S'ha mecanitzat el procés de bobinatge per tal d'agilitzar-lo tal com es pot observar a la Figura 5.12. Per una banda, s'ha tallat un cub d'esponja amb les dimensions adients per tal que un cop introduïda al nucli de la bobina es trobi pressionada. Seguidament s'ha foradat a cada un dels dos extrems oberts per poder introduir l'eix giratori d'un suport de rotllo de paper de laboratori (la pròpia pressió de l'esponja evitarà que l'eix patini). Per una altra banda, s'ha utilitzat una màquina de bobinar per subjectar el rodet de fil. A més, amb l'ajuda d'uns sergents s'ha fixat a la taula el suport que subjecta la bobina gran i el del rodet de fil. Finalment només caldrà girar la bobina i anar amb cura que el fil s'introdueixi dins la seva posició corresponent.

Els intervals de les espirs exteriors s'han augmentat fins a 8 mm degut al perfil de plàstic que sobresurt de la tapa de canaleta, ja que interfereix per a les 1027 voltes de fil que s'han de bobinar.

Per evitar que el fil surti del seu lloc s'ha enganxat un perfil de plàstic amb forma de  $\sqcup$ , amb 6 mm d'amplada. A les espirs exteriors aquests perfils amb forma de  $\sqcup$  actuen de paret per evitar que el fil es dispersi i a la espira central actua de canalitzador. Finalment els dos extrems dels cables s'han soldat amb un connector tipus banana de 6 mm sobre una plaqueta de plàstic que s'ha enganxat amb cola al perfil exterior de la bobina. El resultat final de la bobina es pot observar a la Figura 5.13 i Figura 5.14.

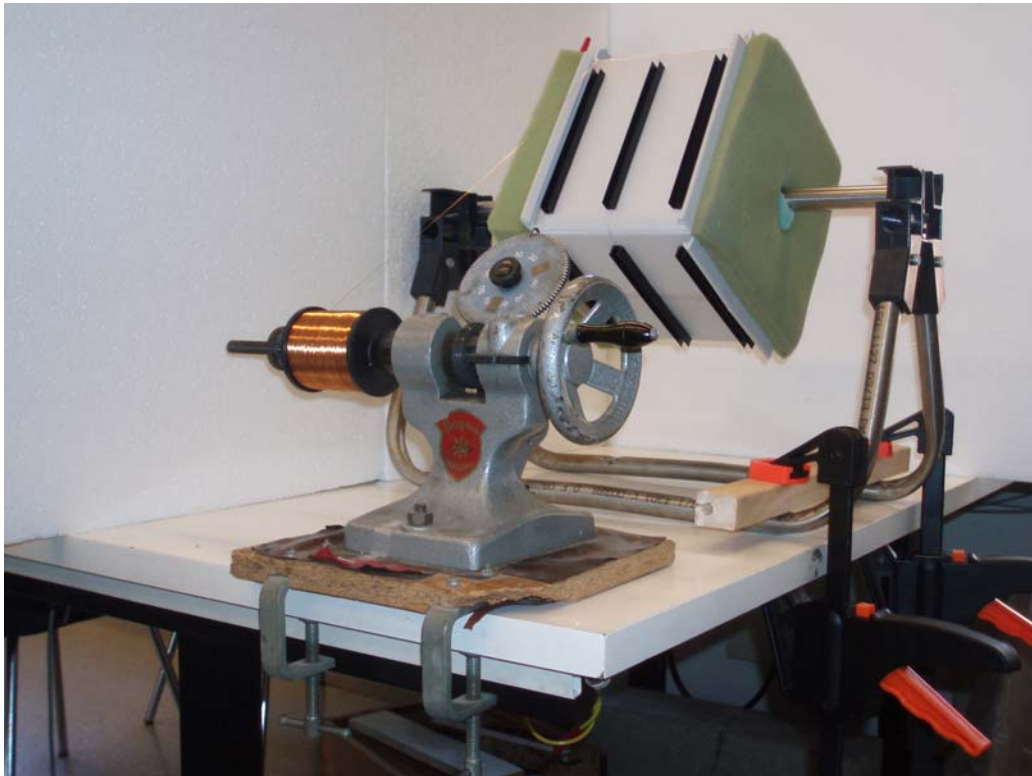


Figura 5.12 – Mecanisme de bobinatge

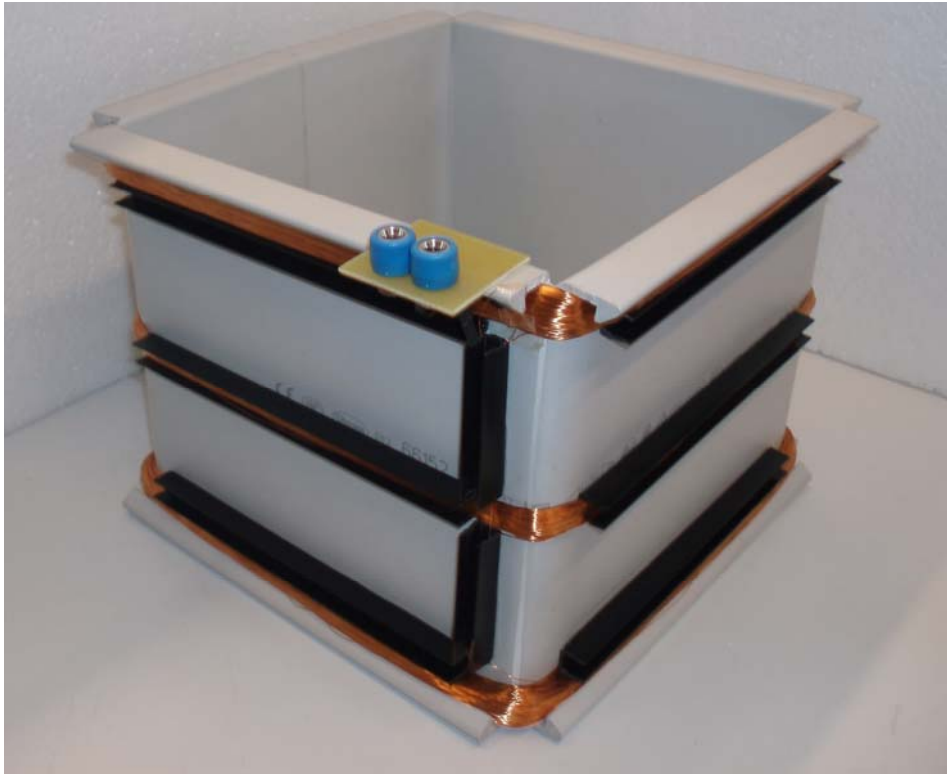


Figura 5.13 – Vista general de la bobina per mesurar provetes de formigó



Figura 5.14 – Perfil de la bobina per mesurar provetes de formigó

# Capítol 6: Mesura de les bobines

---

Un cop construïdes les bobines cal mesurar-les per comprovar si s'obtenen els resultats esperats i comparar-los amb els obtinguts a la fase de disseny. La prova de camp constant ha estat aplicada a totes les bobines que s'han dissenyat.

## 1. Prova camp constant – sistema de mesura

Per mesurar el camp magnètic produït per les bobines farem ús del fenomen de la inducció magnètica. El mètode consisteix en utilitzar dues bobines, la primària i la secundària disposades de forma coaxial. Es genera un senyal altern el qual s'injectarà a la bobina primària i que produirà un camp magnètic. Seguidament es mesura la força electromotriu generada en la bobina secundària per la variació de flux magnètic produïda en la bobina primària. Si la bobina primària es manté fixada en tot moment i la secundària es desplaça sobre el seu eix es pot mesurar el camp magnètic produït per la primària en aquell punt de mesura. La relació d'ambdós ens donarà en termes relatius el camp magnètic d'aquell punt.

S'ha construït un muntatge per poder mesurar les bobines tal com s'ha explicat. En tot moment s'han utilitzat materials no conductors per evitar interferències i mesures errònies. En el nostre cas la bobina primària és la bobina que volem mesurar, és a dir, de la que volem comprovar el camp constant. La bobina secundària s'ha construït sobre un pal de fusta amb 100 espirs concentrades per captar el millor possible el flux magnètic. S'ha utilitzat polièstirè expandit (poliexpán) per formar les estructures que suporten la bobina secundària i que permeten desplaçar-la amb facilitat.

L'aparell utilitzat per injectar el senyal altern a la bobina primària i per mesurar la diferència entre la bobina primària i secundària és l'analitzador d'impedàncies HP4192A amb el mode A-B capaç de donar la funció de transferència d'un sistema. El marge de freqüències recomanat per treballar en aquests casos és entre 60 Hz i 100 Hz, per evitar interferències de la xarxa elèctrica i per evitar que la bobina emeti camp elèctric. En el nostre cas s'ha escollit treballar amb un valor central, a 80 Hz. En la Figura 6.1 es pot observar amb detall la construcció del mètode de mesura pel cas de la bobina circular dissenyada amb el mètode analític.

A continuació es mostren els resultats obtinguts per a cada una de les bobines construïdes a on es comparen tres tipus d'error:

- L'error teòric: obtingut en la fase de disseny i mostrat al capítol 5 per a cada una de les bobines construïdes. Aquest error ens informa de la no uniformitat i ens interessa que sigui el més baix possible. S'ha calculat amb el mètode min/max dins l'interval d'interès,  $[-2.5, 2.5]$  en el cas de la circular,  $[-3, 3]$

en el cas de la quadrada i  $[-7.5, 7.5]$  en el cas de la bobina per provetes de formigó.

- L'error mesurat: obtingut en la fase de mesura. També s'ha calculat amb el mètode min/max i ens proporciona la no uniformitat dins l'interior de la bobina en els mateixos intervals que l'error teòric.
- L'error de construcció: calculat segons l'equació [6.1], fent l'error quadràtic mitjà. En aquest cas s'ha mesurat sobre tot l'interval de que es disposen dades, és a dir, entre  $[-10, 10]$ .

$$\text{Error construcció} = EC = \text{promig}[(x_{\text{teòric}} - x_{\text{mesurat}})^2] \quad [6.1]$$

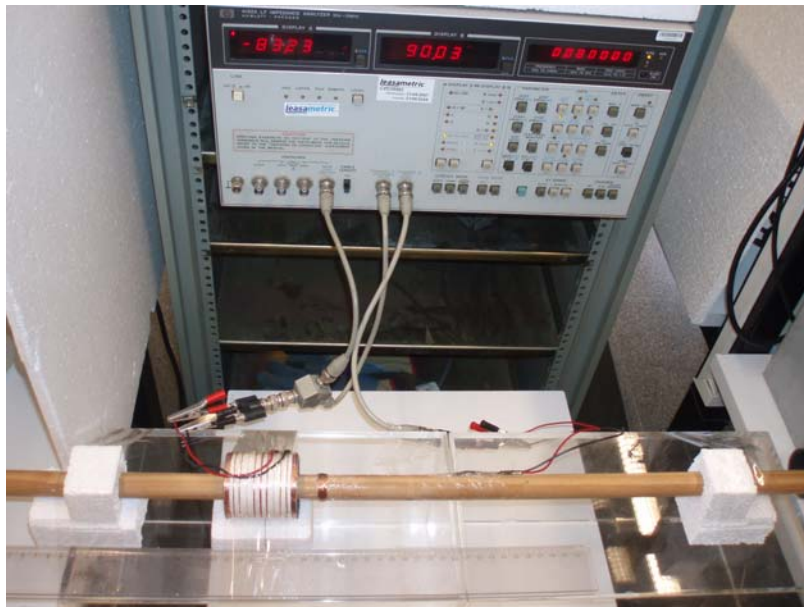


Figura 6.1 – Sistema de mesura per la prova de camp constant

### 1.1. Bobina circular mètode força bruta

La bobina circular dissenyada amb el mètode de la força bruta amb espires positives i negatives s'ha mesurat entre l'interval  $[-10, 10]$  amb pas de 0.5 cm. Els resultats obtinguts es mostren a la Taula 6.1.

<i>Taula 6.1 - Resultats bobina circular mètode força bruta amb espires positives i negatives</i>	
Error teòric	1.053448 %
Error mesurat	4.031618 %
Error de construcció	0.401268 %



A la Figura 6.2 es comparen els resultats obtinguts de la fase de disseny i de la mesura.

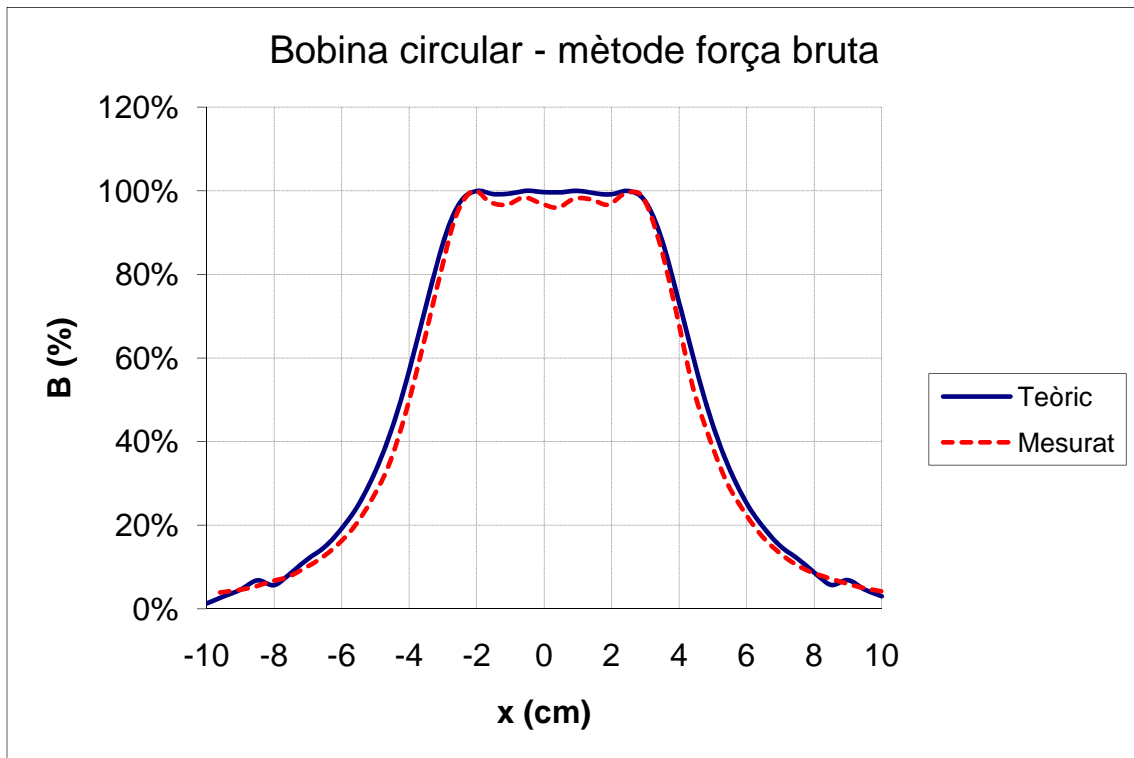


Figura 6.2 – Comparació teòric envers mesurat de la bobina circular dissenyada amb el mètode de la força bruta

### 1.2. Bobina quadrada mètode força bruta

La bobina quadrada dissenyada amb el mètode de la força bruta amb espires positives i negatives s'ha mesurat entre l'interval  $[-10, 10]$  amb pas de 0.5 cm. Els resultats obtinguts es mostren a la Taula 6.2.

<i>Taula 6.2 - Resultats bobina quadrada força bruta amb espires positives i negatives</i>	
Error teòric	0.791106 %
Error mesurat	1.303802 %
Error de construcció	0.161087 %

A la Figura 6.3 es comparen els resultats obtinguts de la fase de disseny i de la mesura.

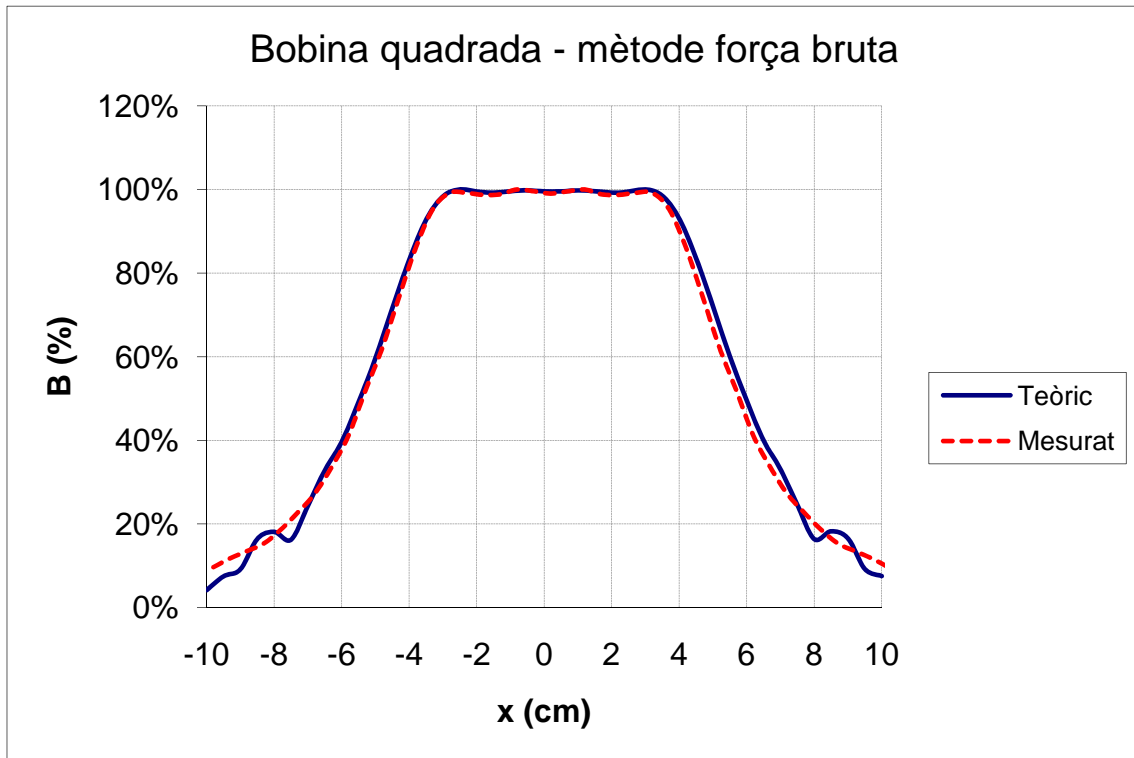


Figura 6.3 – Comparació teòric envers mesurat de la bobina quadrada dissenyada amb el mètode de la força bruta

### 1.3. Bobina circular mètode analític

La bobina circular dissenyada amb el mètode analític amb espires positives i negatives s'ha mesurat entre l'interval  $[-10, 10]$  amb pas de 0.5 cm. Els resultats obtinguts es mostren a la Taula 6.3.

<i>Taula 6.3 - Resultats bobina circular mètode analític amb espires positives i negatives</i>	
Error teòric	3.253809 %
Error mesurat	3.253848 %
Error de construcció	0.057718 %

A la Figura 6.4 es comparen els resultats obtinguts de la fase de disseny i de la mesura.

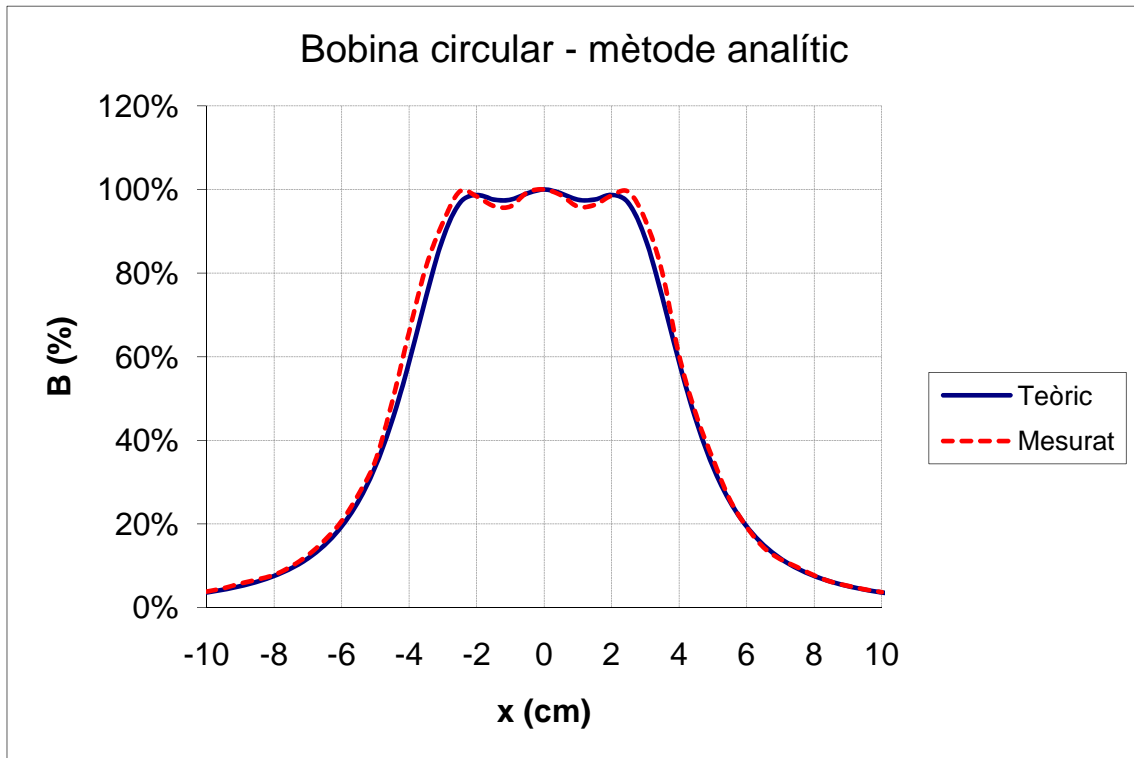


Figura 6.4 – Comparació teòric envers mesurat de la bobina circular dissenyada amb el mètode analític

#### 1.4. Bobina quadrada mètode analític

La bobina quadrada dissenyada amb el mètode analític amb espines positives i negatives s'ha mesurat entre l'interval  $[-10, 10]$  amb pas de 0.5 cm. Els resultats obtinguts es mostren a la Taula 6.4.

<i>Taula 6.4 - Resultats bobina quadrada mètode analític amb espines positives i negatives</i>	
Error teòric	2.007803 %
Error mesurat	5.896661 %
Error de construcció	0.117458 %

A la Figura 6.5 es comparen els resultats obtinguts de la fase de disseny i de la mesura.

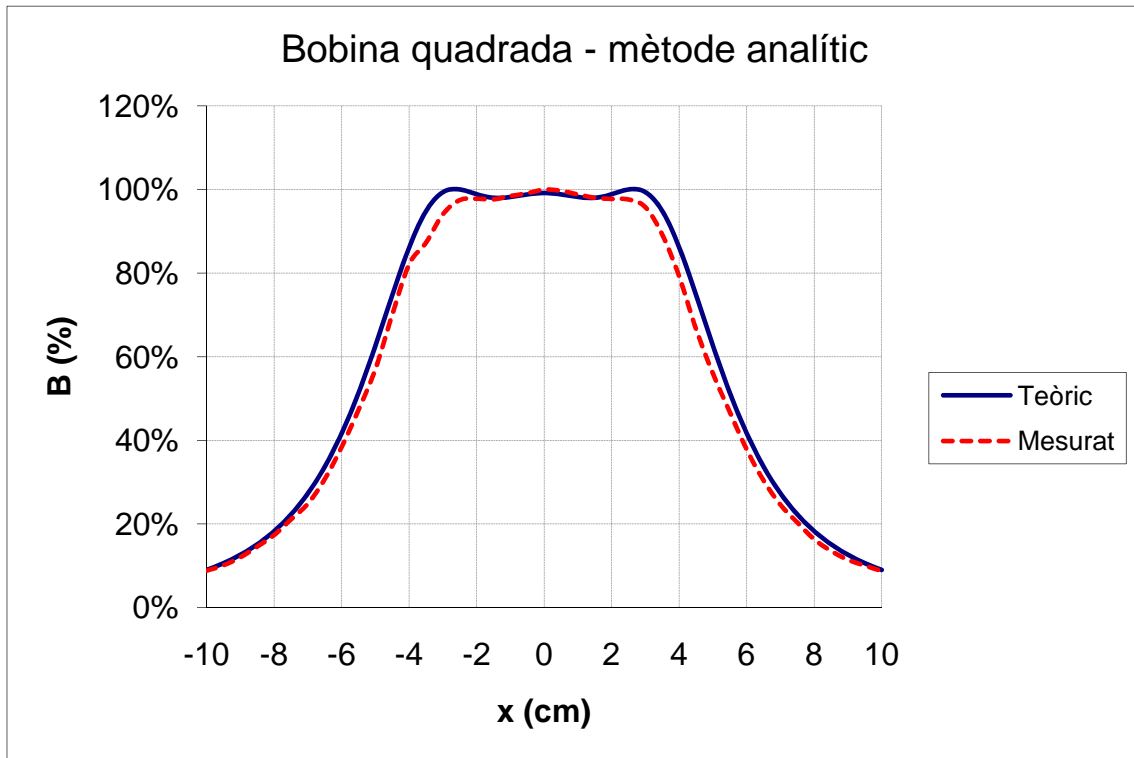


Figura 6.5 – Comparació teòric envers mesurat de la bobina quadrada dissenyada amb el mètode analític

### 1.5. Bobina quadrada mètode força bruta amb espires positives

La bobina quadrada dissenyada amb el mètode de la força bruta amb espires positives s'ha mesurat entre l'interval  $[-10, 10]$  amb pas de 0.5 cm. Els resultats obtinguts es mostren a la Taula 6.5.

<i>Taula 6.5 - Resultats bobina quadrada força bruta espires positives</i>	
Error teòric	5.781342 %
Error mesurat	5.923442 %
Error de construcció	0.125062 %

A la Figura 6.6 es comparen els resultats obtinguts de la fase de disseny i de la mesura.

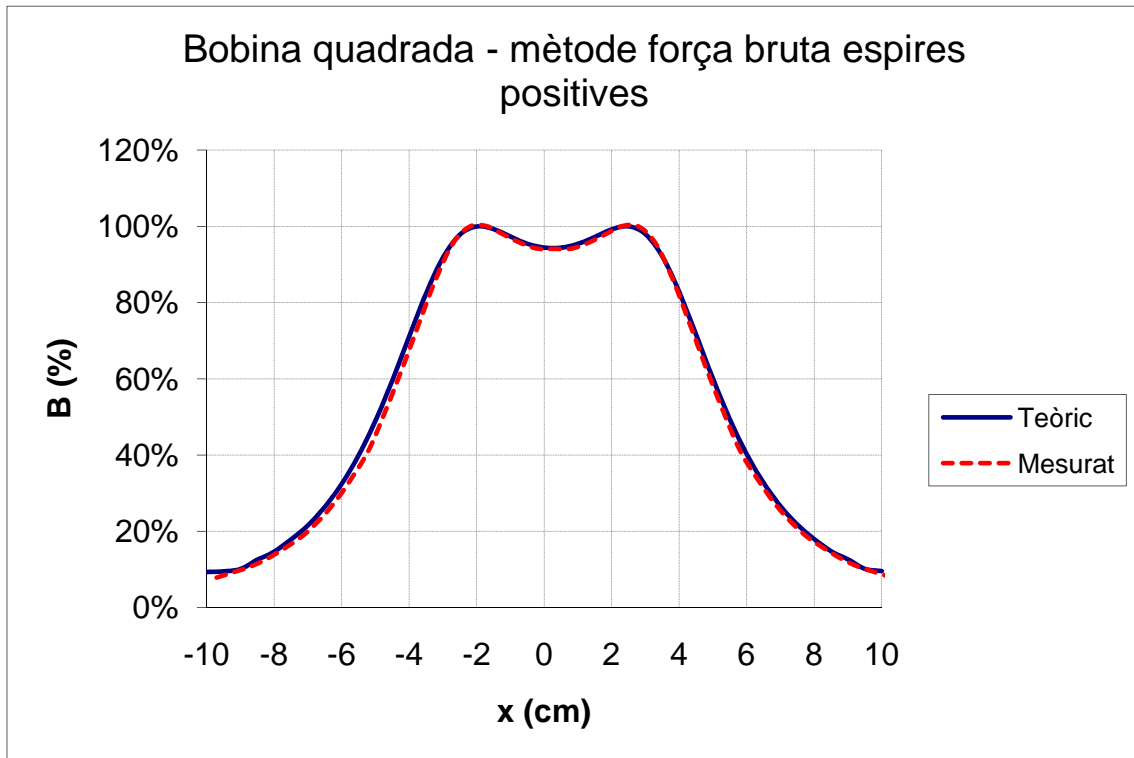


Figura 6.6 – Comparació teòric envers mesurat de la bobina quadrada dissenyada amb el mètode de la força bruta (només espires positives)

## 1.6. Conclusions

Els resultats han estat generalment satisfactoris; no obstant hi ha diferències numèriques amb l'error teòric i amb el mesurat. Els motius que les provoquen s'enumeren a continuació:

- El gruix del fil, al solapar-se una sobre l'altre, fa que el radi de les espires no siguin geomètricament constant provocant que el camp magnètic no sigui el previst.
- Les pèrdues òhmiques del fil.
- La imprecisió del regle al mesurar els intervals i en la construcció de les bobines.
- Les capacitats paràsites que apareixen entre les espires.

## 2. Espires positives i negatives – sentit de construcció

Durant la fase de mesura de les bobines es va detectar que el resultat obtingut no sortia totalment simètric, fet que només succeïa a les bobines construïdes amb espires positives i negatives. Es va estudiar en detall ja que al tenir una construcció simètrica el resultat havia de ser simètric i al no ser així es va buscar el motiu. En un principi es pensava que es tractava d'un error de construcció que fent la mitjana punt a punt entre les

mesures realitzades d'esquerra a dreta i de dreta a esquerra l'asimetria quedava pràcticament anul·lada.

No obstant, es va detectar que en tenir moltes més espines l'efecte asimètric es marcava notablement. Curiosament el pendent asimètric coincidia amb el sentit de bobinatge que fins ara no s'havia donat importància. D'un principi les bobines es construïen de la següent manera: començant de l'esquerra fins a la dreta es bobinaven les espines positives i un cop arribat a l'extrem, de dreta a esquerra es bobinaven les espines negatives. Donada la coincidència es va començar a plantejar un model de pèrdues que justificués l'asimetria que en alguns casos es quantificava fins a 2 dB.

El model de pèrdues consisteix a considerar les capacitats paràsites que apareixen entre les espines de la bobina segons es mostra a la Figura 6.7. En el cas d'una bobina amb espines només positives i bobinada uniformement, l'efecte paràsit es troba uniformement repartit. En el nostre cas, una bobina amb espines positives i negatives bobinada segons s'ha explicat al paràgraf anterior provoca que l'efecte paràsit sigui més agreujat a una part que l'altre. Per tant, es tracta de repartir per igual l'efecte paràsit.

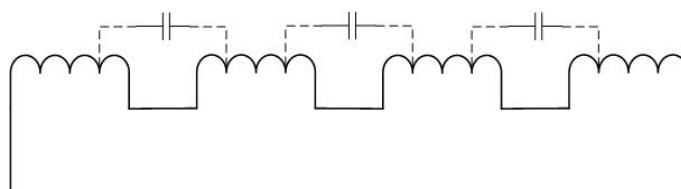


Figura 6.7 – Model de pèrdues

Es van pensar dues estratègies per tal de solucionar el problema de l'efecte paràsit. La primera consisteix en que el sentit de construcció de la bobina sigui en sentit simètric. Per exemple, en el cas d'una bobina amb sis intervals, s'hauria de bobinar segons es mostra a Figura 6.8 a on el número situat a la part inferior ens indica l'ordre de bobinat de l'interval. Com es pot observar aquesta estratègia és independent del signe i del nombre d'espines. El mètode es va provar amb la construcció d'una bobina quadrada dissenyada amb el mètode de la força bruta i es va comprovar que l'asimetria disminuïa però no desapareixia completament.

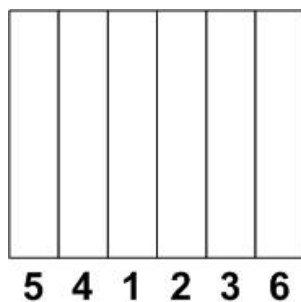


Figura 6.8 – Primera estratègia de bobinat considerant només el sentit de construcció

En veure que els resultats de la primera estratègia no eren els esperats, es va pensar amb una segona opció la qual considera el signe de les espires a bobinar i la distribució de l'efecte paràsit. A la Figura 6.9 tenim un exemple d'una bobina amb sis intervals on l'efecte paràsit no s'ha distribuït. El signe situat dins el rectangle ens indica si estem bobinant espires positives o negatives. El número situat a la part inferior ens indica l'ordre de bobinat de l'interval. El número que apareix entre dos intervals és la resta entre l'ordre de bobinat dels intervals laterals. Si observem el vector obtingut {5, 4, 1, 2, 1} veiem que no és simètric.

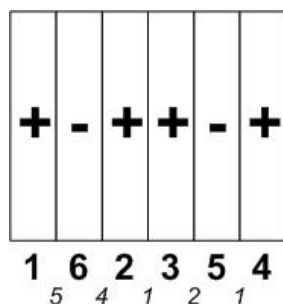


Figura 6.9 – L'efecte paràsit no s'ha distribuït

Aquesta segona estratègia proposa que el bobinatge és fet de la següent manera: bobinar les espires positives del centre fins a l'extrem esquerre de la bobina, després les espires negatives del extrem esquerre fins a l'extrem dret i finalment les espires positives del extrem esquerre fins al centre. A la Figura 6.10 podem observar la bobina de l'exemple de la Figura 6.9 però bobinada segons com s'ha explicat per repartir l'efecte paràsit. En aquest cas obtenim un vector simètric {1, 1, 5, 1, 1}.

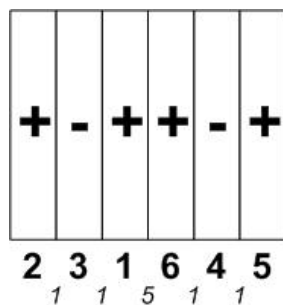


Figura 6.10 – Segona estratègia de bobinat obtenint un vector simètric

La segona proposta es va provar amb la construcció d'una bobina quadrada dissenyada amb el mètode de la força bruta i es va comparar amb el resultat de la primera proposta. Es va comprovar que l'asimetria disminuïa molt més que amb la primera proposta, no obstant, no desapareixia completament i encara es podia apreciar l'asimetria en menor grau.

Per aquest motiu es va decidir que la bobina per mesurar provetes de formigó fos dissenyada i construïda només amb espires positives, per evitar qualsevol tipus d'asimetria.

### 3. Bobina per mesurar provetes de formigó

La bobina quadrada per mesurar provetes de formigó dissenyada amb el mètode de la força bruta amb espires positives s'ha mesurat entre l'interval  $[-22, 22]$  amb pas de 0.5 cm. Els resultats obtinguts es mostren a la Taula 6.6.

<i>Taula 6.6 - Resultats bobina per mesurar provetes de formigó</i>	
Error teòric	4.286327 %
Error mesurat	5.875951 %
Error de construcció	0.082362 %

A la Figura 6.11 es comparen els resultats obtinguts de la fase de disseny i de la mesura.

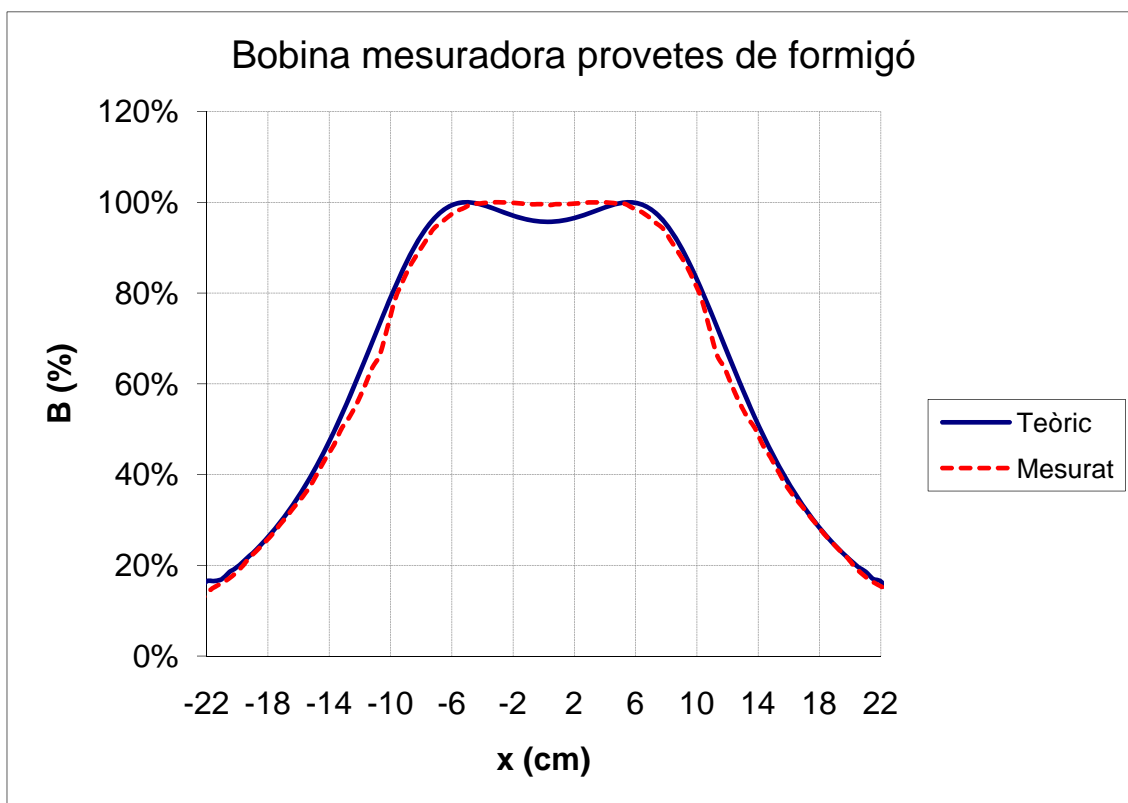


Figura 6.11 – Comparació teòric envers mesurat de la bobina per mesurar provetes de formigó dissenyada amb el mètode de la força bruta (només espires positives)

Els resultats numèrics obtinguts es consideren molts satisfactoris. Curiosament, a la Figura 6.11 veiem que el camp magnètic mesurat obtingut al centre surt molt més uniformitzat que el teòric, però a canvi s'obté un interval uniformitzat més estret.

L'efecte anterior és motivat per un motiu de construcció. En el cas de la bobina per mesurar provetes de formigó els intervals es defineixen de 6 mm. Al bobinar 1027 voltes de fil amb 0.2 mm de diàmetre, suposant una distribució del fil uniforme, es necessita una



altura aproximada de 7 mm. El perfil de plàstic  $\sqcup$  té una altura de 6mm i es va decidir que als extrems els intervals fossin de 8 mm per compensar l'altura que es necessitava.

Degut a la gran quantitat de voltes de les espiras exteriors, l'interval que originàriament hauria de ser de 8 mm passa a convertir-se a 10 mm en els cantons de la bobina on el perfil amb  $\sqcup$  no actua. En el cas de l'espira central de 300 voltes, l'interval que originàriament hauria de ser de 6 mm passa a convertir-se a 8 mm pel mateix motiu exposat anteriorment.

Les inconveniències anteriors es podrien solucionar fabricant un motlle de plàstic amb les dimensions oportunes per tal que el bobinat del fil sigui el més acurat possible, no obstant, al tractar-se d'un prototip preindustrial, aquesta solució es troba fora del pressupost disponible.

Per justificar els errors de construcció exposats anteriorment, el que s'ha fet és executar el mètode de la força bruta a l'invers de fins com s'havia fet fins ara, és a dir, donat un vector determinat obtenir la resposta del camp magnètic. El vector òptim modificat segons els factors de correcció que responen a les inconveniències anteriorment explicades es mostren a la Taula 6.7.

<i>Taula 6.7 – Modificacions del vector òptim</i>	
Vector òptim original	{1027, 0, 300, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1027}
Vector modificat	{1027, 100, 90, 300, 90, 100, 1027}

Per simular els efectes d'error de construcció, el que s'ha fet és afegir 100 espiras al costat de cada una de les espiras exteriors i 90 espiras a la central, simulant l'efecte d'invasió d'intervals pròxims. El resultat de l'execució amb el vector modificat es mostra a la Figura 6.12 i veiem com el resultat numèric teòric i mesurat coincideixen, per tant, obtenim un resultat coherent i satisfactori.

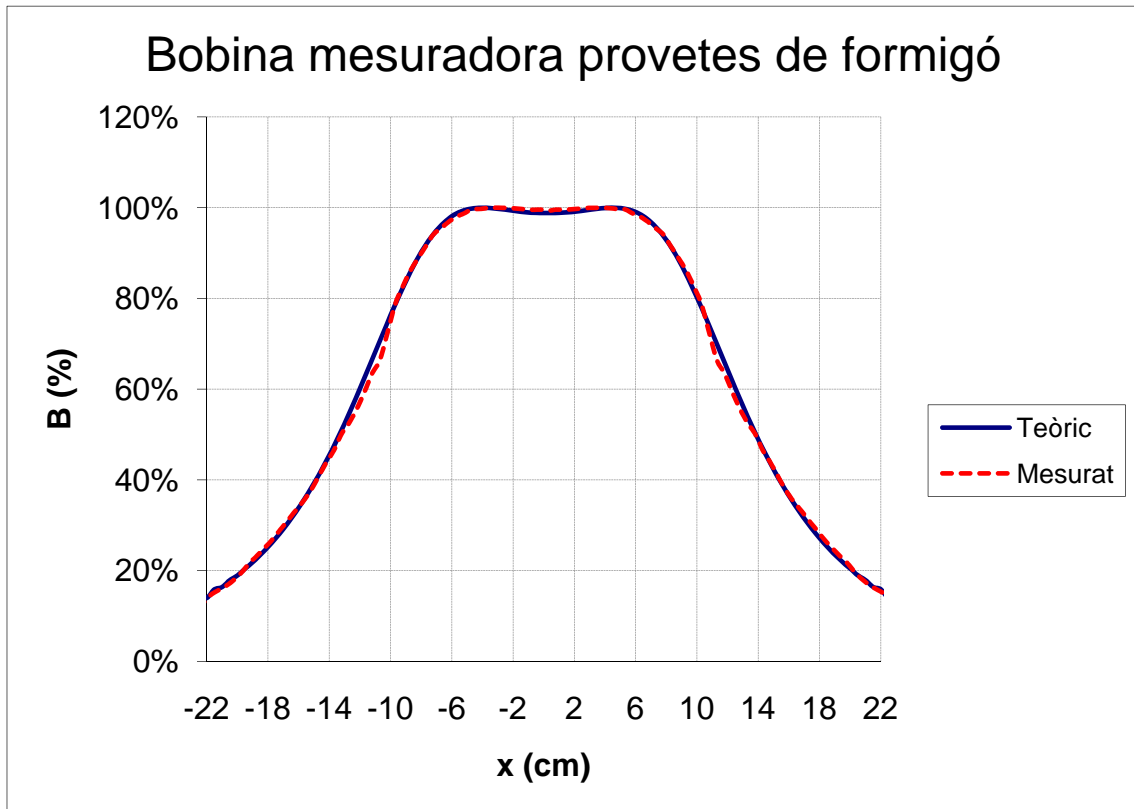


Figura 6.12 – Comparació teòrica envers mesurada amb el factor de correcció aplicat al vector òptim

# Capítol 7: Aplicació a la mesura de fibres

## 1. Inductància de la bobina per mesurar provetes de formigó

Per calcular la inductància teòrica de la bobina farem ús d'un conjunt d'expressions obtingudes dels capítols 2 i 7 de la referència (Rosa and Grover 1913).

La nostra bobina es pot considerar un conjunt de tres bobines separades una distància pròxima entre elles. En la Figura 7.1 veiem un tall en l'eix  $x$  de la disposició de les tres bobines, amb les dimensions de cada una de les seccions i les distàncies entre elles.

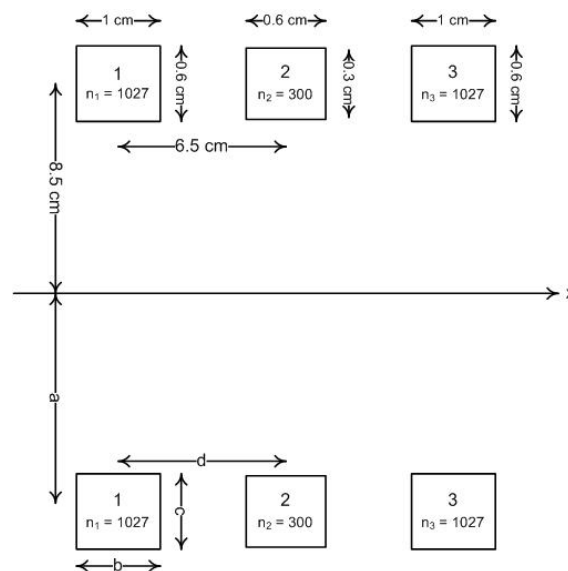


Figura 7.1 – Secció de la bobina

Com es pot observar, la simetria del sistema ens facilita el càlcul de la inductància total. Segons la Figura 7.1,  $L_1 = L_3$ ,  $M_{12} = M_{21} = M_{23} = M_{32}$  i  $M_{13} = M_{31}$ . Per tant, la inductància total ve donada per l'expressió [7.1].

$$L = 2L_1 + L_2 + 4M_{12} + 2M_{13} \quad [7.1]$$

El càlcul de cada una de les autoinductàncies  $L_i$  es calculen amb l'expressió [7.2].

$$L_i = 4\pi a n_i^2 \left\{ \left( 1 + \frac{3b_i^2 + c_i^2}{96a_i^2} \right) \ln \frac{8a}{\sqrt{b_i^2 + c_i^2}} - y_1 + \frac{b_i^2}{16a_i^2} y_2 \right\} \quad [7.2]$$

On les constants  $y_1$  i  $y_2$  depenen del factor  $c_i/b_i$  i es troben tabulades a la taula VI de la referència (Rosa and Grover 1913).

Les inductàncies mútues  $M_{ij}$  es calculen amb l'expressió [7.3].

$$M_{ij} = 4\pi a n_i n_j \left\{ \left( \frac{2}{k_{ij}} - k_{ij} \right) F - \left( \frac{2}{k_{ij}} \right) E \right\} \quad [7.3]$$

On les constants  $F$  i  $E$  depenen del factor  $k_{ij}$  segons l'expressió [7.4] i es troben relacionades amb  $\varphi$  a la taula XII de la referència (Rosa and Grover 1913).

$$k_{ij} = \sin \varphi = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + d_{ij}^2}} \quad [7.4]$$

Substituint a l'expressió [7.2] amb els valors concrets del nostre sistema segons s'ha exposat a la Figura 7.1, obtenim les autoinductàncies  $L_1$  i  $L_2$  :

$$L_1 = 4\pi \cdot 8.5 \cdot 1027^2 \left\{ \left( 1 + \frac{3 + 0.36}{96 \cdot 72.25} \right) \ln \frac{8 \cdot 8.5}{\sqrt{1 + 0.36}} - 0.81823 + \frac{1}{16 \cdot 72.25} 0.3839 \right\} = 366 \text{ mH} \quad [7.5]$$

$$L_2 = 4\pi \cdot 8.5 \cdot 300^2 \left\{ \left( 1 + \frac{3 \cdot 0.36 + 0.09}{96 \cdot 72.25} \right) \ln \frac{8 \cdot 8.5}{\sqrt{0.36 + 0.09}} - 0.796 + \frac{0.36}{16 \cdot 72.25} 0.3066 \right\} = 36.76 \text{ mH} \quad [7.6]$$

En el cas de la inductància mútua  $M_{12}$ , el factor  $k_{12}$  és 0.934 que correspon a un angle  $\varphi = 76.75^\circ$ . Segons la taula XII de la referència (Rosa and Grover 1913), els valors de  $F$  i  $E$  que depenen de  $\varphi$ , són 2.902 i 1.061 respectivament. Substituint a l'expressió [7.3] obtenim:

$$M_{12} = 4\pi \cdot 8.5 \cdot 1027 \cdot 300 \left\{ \left( \frac{2}{0.934} - 0.934 \right) 2.902 - \left( \frac{2}{0.934} \right) 1.061 \right\} \quad [7.7]$$

$$= 40.55 \text{ mH}$$

En el cas de la inductància mútua  $M_{13}$ , el factor  $k_{ij}$  és 0.794 que correspon a un angle  $\varphi = 58.44^\circ$ . Segons la taula XII de la referència (Rosa and Grover 1913), els valors de  $F$  i  $E$  que depenen de  $\varphi$ , són 2.13 i 1.22 respectivament. Substituint a l'expressió [7.3] obtenim:

$$M_{13} = 4\pi \cdot 8.5 \cdot 1027^2 \left\{ \left( \frac{2}{0.794} - 0.794 \right) 2.13 - \left( \frac{2}{0.794} \right) 1.22 \right\} \quad [7.8]$$

$$= 67.7 \text{ mH}$$

Finalment, substituint a l'expressió [7.1] fent ús dels resultats [7.5], [7.6], [7.7] i [7.8] obtenim la inductància teòrica de la bobina:

$$L = 2 \cdot 366 \cdot 10^{-3} + 36.76 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 40.55 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 67.7 \cdot 10^{-3} \quad [7.9]$$

$$= 1.06636 \text{ H}$$

Val a dir que les fórmules utilitzades pel càlcul de la inductància són específiques per bobines circulars i en el nostre cas es tracta d'una quadrada. No obstant, el valor mesurat amb l'analitzador d'impedàncies HP4192A és de 1.19 H, per tant, si comparem amb els 1.07 H teòrics es pot considerar una molt bona aproximació.

## 2. Mesura de la variació d'inductància

La inductància de la bobina varia depenent de la permeabilitat l'objecte que està al seu interior. En el nostre cas es pot fer la mesura directa d'aquest valor d'inductància gràcies a l'analitzador d'impedàncies HP4192A en mode L-R, amb una sensibilitat d'1 mH.

Per fer aquesta mesura s'injecta un senyal de baixa amplitud i freqüència, 1 V i 80 Hz respectivament. Aquest senyal es genera amb el mateix analitzador d'impedàncies amb el qual es realitza la mesura, per tant, el mateix equip serveix per injectar el sistema i fer la mesura.

Dins aquest entorn, es pretén mesurar la sensibilitat de la bobina, és a dir, determinar per a quin increment de quantitat de fibres d'acer la bobina és capaç de detectar-les. El mètode que s'ha utilitzat ha estat mesurar la variació inductància de la bobina per increments de 10 fibres. Les fibres que s'han utilitzat per fer la mesura són model DRAMIX

del fabricant Bekaert, de 50 mm de llargària amb un pes de 0.34 g. Les dades obtingudes de la mesura es poden visualitzar a la Figura 7.2.

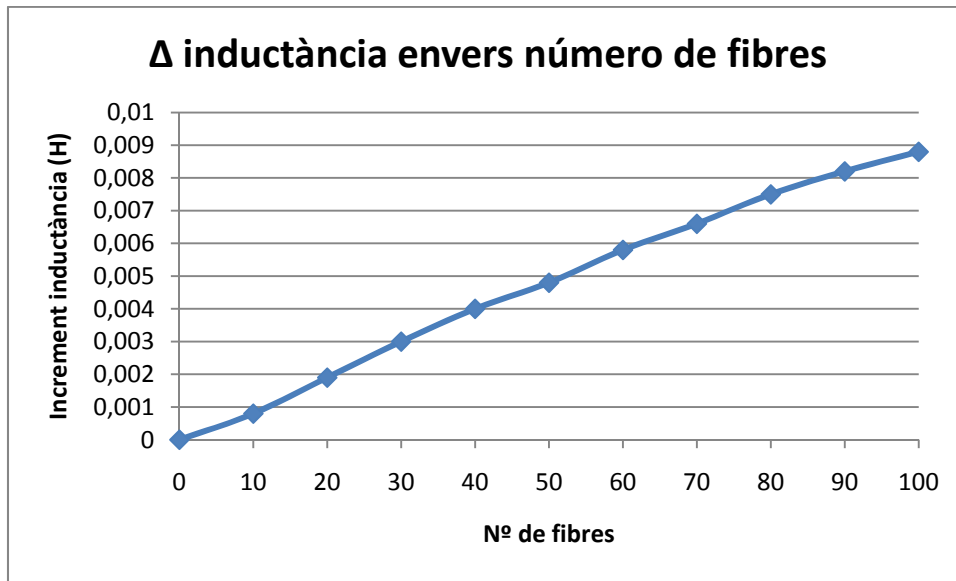


Figura 7.2 – Variació de la inductància de la bobina envers la quantitat de fibres al seu interior

Com es pot observar a la Figura 7.2 l'increment de la inductància augmenta així com la quantitat de fibres. Això és degut a que la permeabilitat de les fibres és un factor directament proporcional al valor final de la inductància.

### 3. Mesura de provetes de formigó reforçades amb fibres

El disseny físic de la bobina està pensat per mesurar provetes cúbiques de 15x15x15 cm (alt, llarg i ample), que són les que mesurarem en aquest apartat. Per poder detectar el contingut de fibres de les provetes s'han de mesurar els tres eixos del cub, ja que la bobina no detecta les fibres que es troben perpendiculars a les línies de camp magnètic. Cal recordar que les línies de camp en la bobina són perpendiculars a la direcció de bobinat d'aquesta.

En la Figura 7.3 observem la gràfica corresponent a la mesura d'inductància de 10 provetes amb concentracions de 15 kg/m<sup>3</sup>, 30 kg/m<sup>3</sup>, 45 kg/m<sup>3</sup> i 60 kg/m<sup>3</sup>. També es dibuixa la línia vermella que marca la mitjana per a cada dosificació. Com es pot observar, a mesura que el contingut de fibres és més elevat el valor d'inductància augmenta. Així, per a la concentració de 15 kg/m<sup>3</sup> tenim una inductància de 8,08 mH, en la de 30 kg/m<sup>3</sup> de 17,88 mH, en la de 45 kg/m<sup>3</sup> de 24,34 mH i en la de 60 kg/m<sup>3</sup> de 35,05 mH.

Analitzant les dades segons la variació respecte l'anterior, en el cas de la proveta de 15 kg/m<sup>3</sup> augmenta 8,08 mH, en la de 30 kg/m<sup>3</sup> augmenta 9,08 mH, en la de 45 kg/m<sup>3</sup>

augmenta 6,45 mH i en la de 60 kg/m<sup>3</sup> augmenta 10,71 mH. Fent un promig dels resultats l'augment és proporcional a 8,7 mH per cada 15 kg/m<sup>3</sup>, o també de 1,7 mH per cada kg/m<sup>3</sup>.

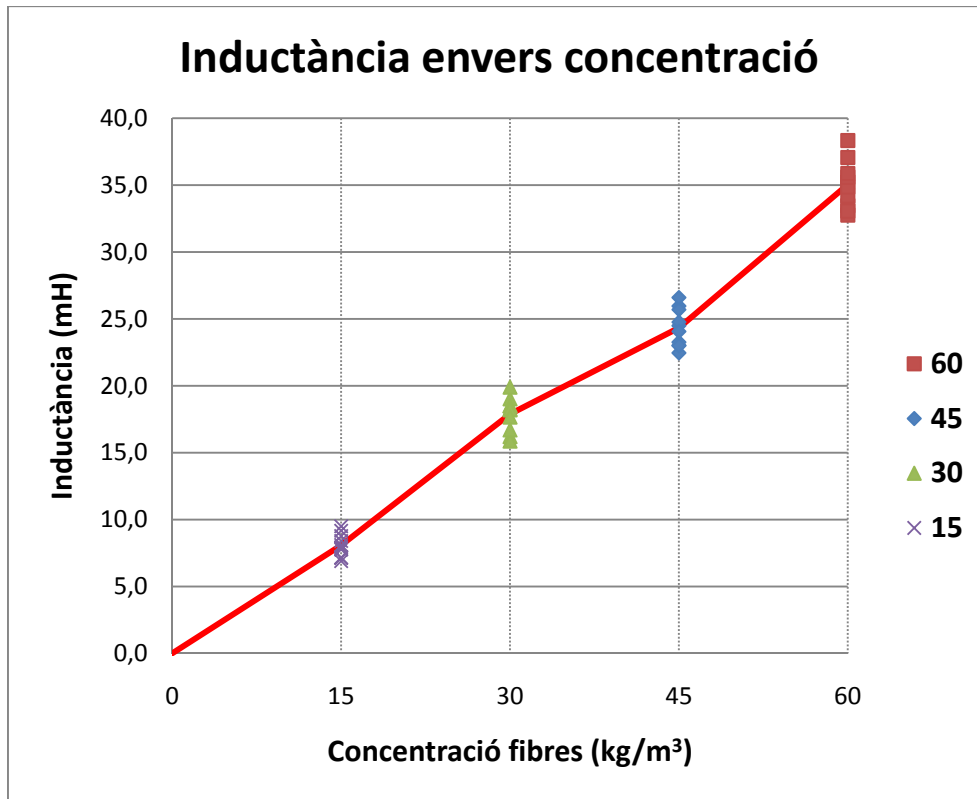


Figura 7.3 – Càlcul de la inductància de distintes provetes

En les figures 7.4, 7.5, 7.6 i 7.7 veiem els resultats de la mesura del contingut de fibres de 10 provetes amb concentracions de 15 kg/m<sup>3</sup>, 30 kg/m<sup>3</sup>, 45 kg/m<sup>3</sup> i 60 kg/m<sup>3</sup>. El resultat d'una proveta ideal seria aquella que obtingués una orientació uniforme de les fibres, això vol dir aconseguir el 33.33 % per a cada un dels eixos.

Dit això i segons els resultats de les mesures realitzades que veiem a les figures 7.4, 7.5, 7.6 i 7.7 generalment s'aconsegueix una orientació uniforme en tots els casos. El pitjor cas succeeix en la concentració de 45 kg/m<sup>3</sup>, on obtenim un 29.91 % per l'eix x, un 35.05 % per l'eix y i un 35.04 % per l'eix z, per tant, en aquest cas hi ha més fibres orientades en direcció a l'eix z que en els altres.

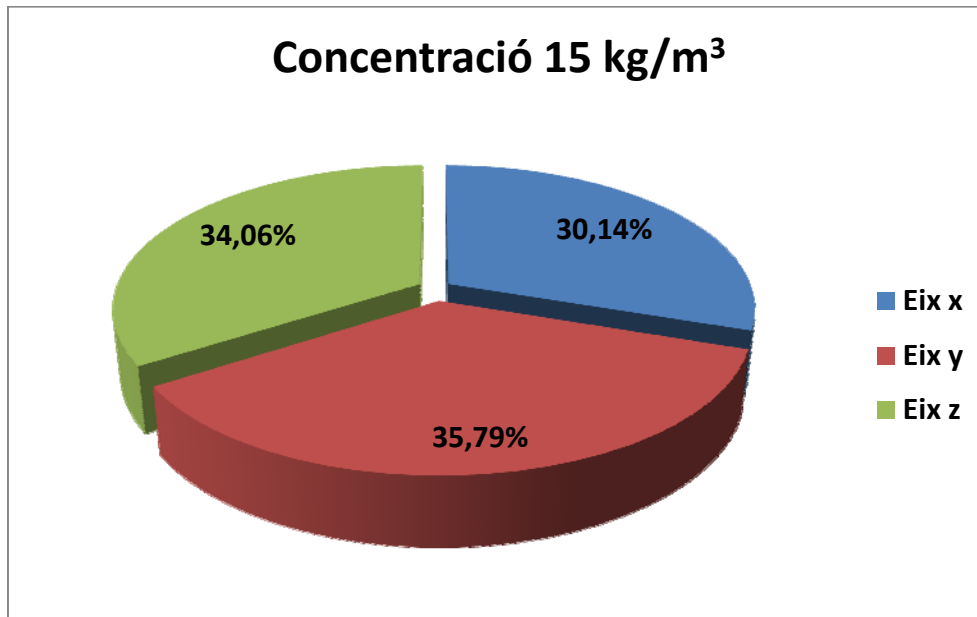


Figura 7.4 – Mesura del contingut de fibres en provetes amb concentració de 15 kg/m<sup>3</sup>

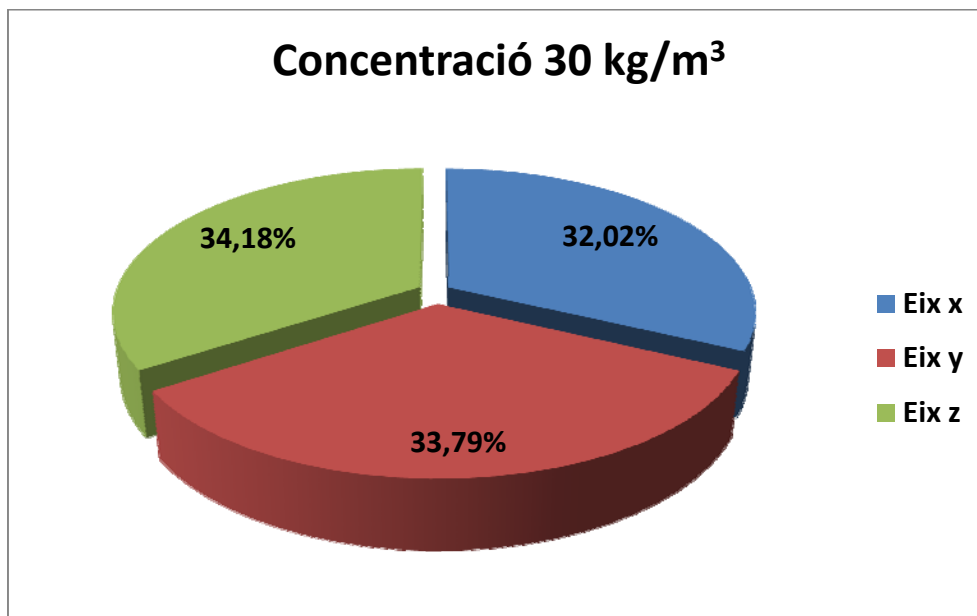


Figura 7.5 – Mesura del contingut de fibres en provetes amb concentració de 30 kg/m<sup>3</sup>



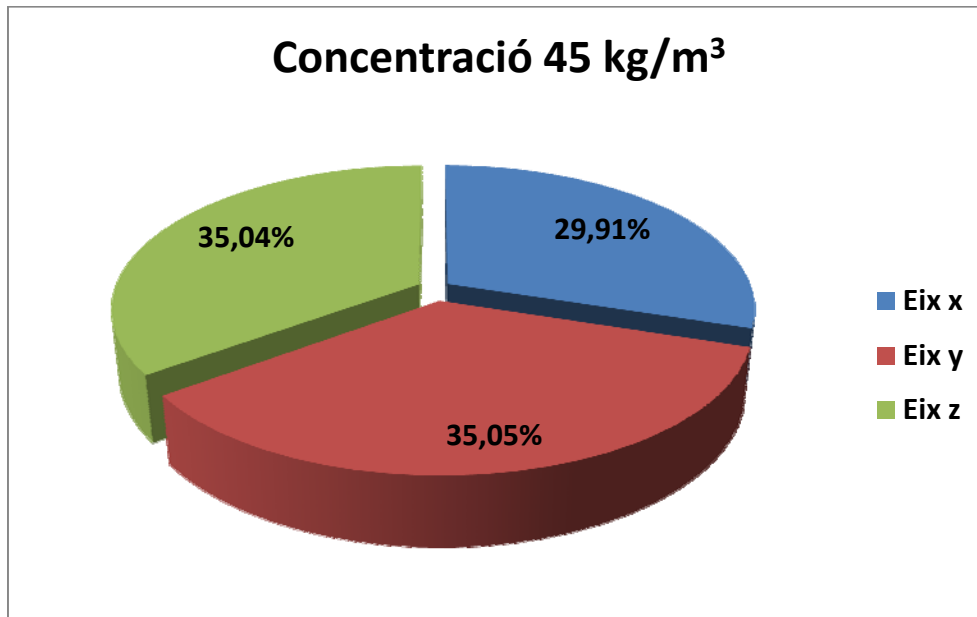


Figura 7.6 – Mesura del contingut de fibres en provetes amb concentració de 45 kg/m<sup>3</sup>

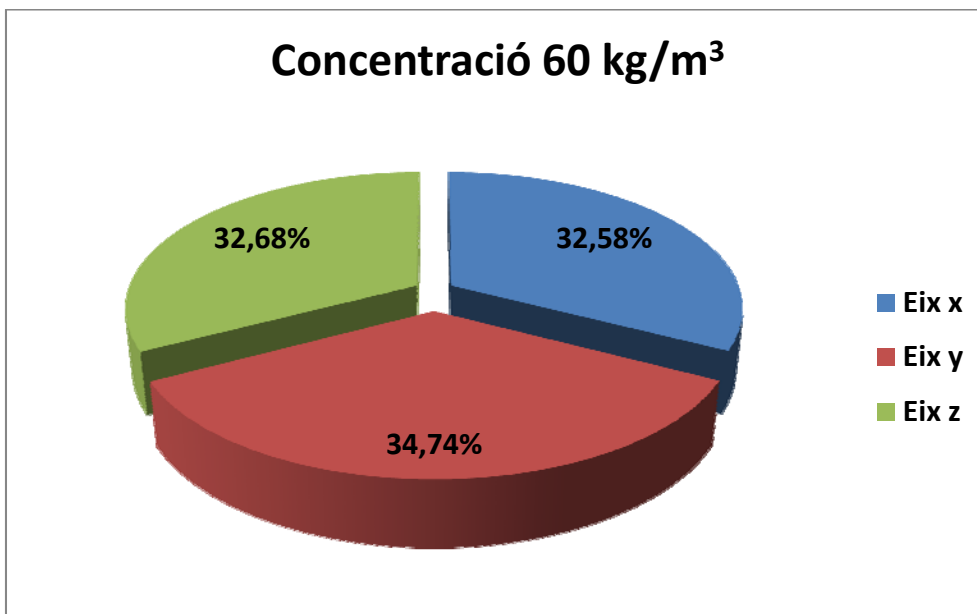


Figura 7.7 – Mesura del contingut de fibres en provetes amb concentració de 60 kg/m<sup>3</sup>

En la Figura 7.8 veiem una comparativa de la orientació de les fibres per a cada una de les concentracions segons els resultats de les figures 7.4, 7.5, 7.6 i 7.7. El gràfic està format per tres vèrtexs, corresponent als tres eixos (x, y, z), on el punt d'equilibri està marcat amb un punt negre. Cada un dels símbols de la llegenda corresponen a una concentració, que es situen sobre el triangle segons el % de cada eix que intervé. El símbol corresponent a una proveta ideal es situaria sobre el punt circular negre.

Posem per exemple el cas de 15 kg/m<sup>3</sup>. El símbol (quadrat) està situat més proper al eix y i més llunyà dels x i z, vol dir que les fibres es troben més orientades sobre l'eix y que respecte els altres (recordem el resultat numèric, vegeu Figura 7.4, x: 30.14 %, y: 35.79 %, z: 34.06 %).

Si comparem els resultats obtinguts de la Figura 7.8, observem que les fibres de les provetes es troben uniformement distribuïdes, a excepte de les provetes de concentració 45 kg/m<sup>3</sup> que es veuen molt més orientades en direcció als eixos y z.

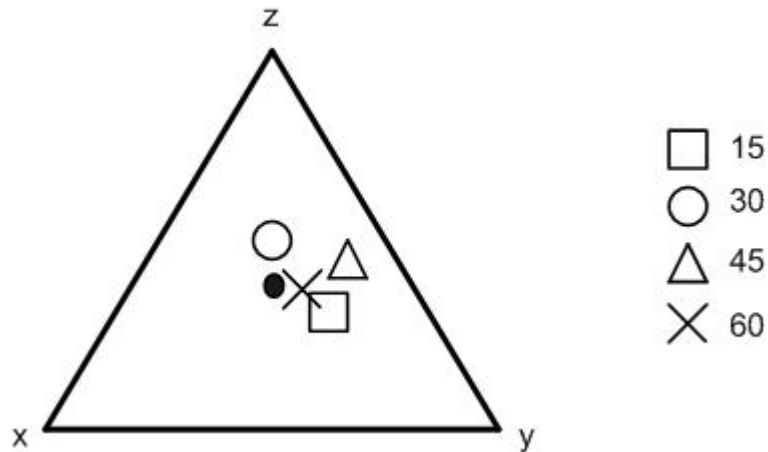


Figura 7.8 – Comparativa de la orientació de les fibres en provetes de 15, 30, 45 i 60 kg/m<sup>3</sup>

# Capítol 8: Conclusions i línies de futur

---

## 1. Conclusions

Al llarg del treball s'han obtingut les següents conclusions:

- El disseny de bobines de mida arbitrària amb camp magnètic conformable a l'interior és possible. Es tracta d'obtenir un compromís entre error d'uniformització i longitud d'interval a uniformitzar. En el cas de geometria cúbica 15x15x15 l'error teòric mínim aconseguit és del 4.28 %.
- Els mètodes de disseny proposats presenten avantatges i inconvenients. El mètode analític ens ofereix un cost computacional baix a canvi d'un error més elevat. El mètode Branch & Bound ofereix un error més baix que el mètode analític a canvi d'un major cost computacional però no tan elevat com el mètode de la força bruta. El mètode de la força bruta ens ofereix l'error més baix però el cost computacional es veu augmentat de forma considerable. En resum, es tracta d'obtenir un compromís entre error i cost computacional.
- Els dissenys de bobines amb espires positives i negatives presenten asimetries causades per les capacitats paràsites que apareixen entre intervals. La solució final òptima tendeix a la simplicitat de disseny amb només espires positives.
- Les mesures experimentals han corroborat que els dissenys plantejats són físicament realitzables amb errors acceptables. En el cas de la bobina per mesurar provetes de formigó, l'error teòric és del 4.29 %, el mesurat del 5.88 % i el de construcció 0.08 %, es consideren resultats molt positius.
- Les diferències aparegudes entre error teòric i mesurat (error de construcció), en el pitjor cas de 0.4 %, es justifiquen per les imprecisions de construcció, les pèrdues òhmiques del fil i les capacitats paràsites que apareixen entre les espires.
- Les mesures experimentals a provetes de formigó han confirmat que el prototip respon amb resultats excel·lents. La ràpida execució de l'assaig és un factor clau a considerar respecte altres assajos disponibles per el formigó reforçat amb fibres.

Es pot concloure, de mode general, que els resultats obtinguts al llarg d'aquest projecte confirmen un avenç positiu dins l'entorn d'assaigs de provetes de formigó amb fibres de tipus no destructiu.

## 2. Valoració del objectius aconseguits

Al llarg d'aquest document s'ha demostrat que els objectius marcats a l'inici del projecte s'han assolit. Els resultats presentats als apartats anteriors així com les conclusions concretes, permeten extreure una idea general del prototip molt acceptable i

prometedora. Per tant, s'ha aconseguit desenvolupar un mètode per obtenir un camp magnètic conformable a l'interior de bobines de mida arbitrària.

Els objectius que s'han complert s'enumeren a continuació:

- Desenvolupar un projecte real amb una aplicació immediata.
- Col·laborar i al mateix temps cobrir una necessitat del Departament d'Enginyeria Electrònica juntament amb el d'Enginyeria de la Construcció, tots dos de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC).
- Proposar mètodes per obtenir un camp magnètic conformable a l'interior de bobines, senzills d'utilitzar, versàtils i adaptables a qualsevol geometria.
- Verificar els resultats dels mètodes proposats i aplicar-los en la construcció d'una bobina per mesurar provetes de formigó reforçades amb fibres d'acer.

Cal a dir que el disseny obtingut per a la bobina per mesurar provetes de formigó a partir del mètode de la força bruta és semblant a la tri-bobina presentada al capítol 2 – Estat del coneixement. No obstant, s'ha de considerar que el valor d'aquest projecte és haver desenvolupat mètodes generals, segons les restriccions que l'usuari desitgi, que permeten obtenir solucions directes canviant fàcilment la geometria.

Així doncs, conscient que el prototipus ofereix unes prometedores prestacions, considero que els objectius s'han assolit de manera satisfactòria.

### 3. Línies de futur

Arribats en aquest punt es poden definir línies de treball pel futur.

- En aquest projecte s'ha aconseguit uniformitzar l'eix  $x$  de les bobines atès un interval determinat. Dins aquest marc, es proposa uniformitzar també la resta dels eixos per aconseguir les mesures molt més fiables.
- En tot moment s'ha treballat amb geometries cúbiques però al mercat industrial també es troben provetes de formigó amb geometria cilíndrica. S'hauria d'estudiar la necessitat de construir una bobina cilíndrica o si seria suficient amb la bobina cúbica actual realitzant algun ajust per adaptar els resultats.
- En relació a la possible sortida al mercat, per tal de mecanitzar la fabricació de la bobina i millorar els errors comesos, majoritàriament de construcció, es podria buscar algun mètode econòmic per fabricar estructures de plàstic cúbiques que facilitessin el bobinatge i la col·locació del fil dins l'interval corresponent. Aquesta solució també hauria de respondre a entorns industrials.
- El mètode d'assaig inductiu és caracteritzat per la seva rapidesa envers altres assajos disponibles. En el cas d'assajar gran quantitat de provetes, es proposa el disseny d'un sistema mecanitzat que automatitzi la mesura dels tres eixos sense implicació manual d'un operari.
- Durant l'execució de les proves, la mesura de la inductància de la bobina es realitza amb un analitzador d'impedàncies, aparell pesat i poc manejable. Per a proves de camp, es proposa dissenyar o adquirir un mesurador portàtil.

- Estudiar amb deteniment si la mesura realitzada amb dues bobines (emissora i receptora) ofereix avantatges (mida i pes de l'instrument, sensibilitat...) respecte la mesura amb una sola bobina, tal com s'ha fet en aquest projecte. En el primer cas, s'ha de mesurar l'acoblament entre bobines i en el segon la inductància.
- Atès una sensibilitat determinada, realitzar un estudi de la quantitat d'espines necessàries per aconseguir-la. Així, segons el resultat del mètode aplicat, només caldrà multiplicar per un factor constant per obtenir la sensibilitat requerida.



# Bibliografia

---

- AEN/CTN-83. (2008). "Métodos de ensayo para hormigón con fibras metálicas. Determinación del contenido en fibras en el hormigón fresco y en el endurecido." Asociación Española de Normalización y Certificación.
- Aguado, A. (2007). "Presentación del anejo de hormigón con fibras de la EHE y ecuación constitutiva del hormigón con fibras." *Cátedra BMB-UPC: Aplicaciones estructurales de hormigón con fibras*. p. 1-32.
- Allred, J., and Scollar, I. (1967). "Square cross section coils for production of uniform magnetic fields." *Journal of Scientific Instruments* (1950), 44(9), 755.
- Asociación Científico Técnica del Hormigón Estructural. (2000). *Manual de tecnología del hormigón reforzado con fibras de acero*, Asociación Científico-técnica del Hormigón Estructural, Madrid :.
- Ausserlechner, U. (1998). "Theoretical discussion of vector pick-up systems for SQUID magnetometers." *Measurement science technology*, 9(6), 989.
- Bendat, J. S. (1986). *Random data : analysis and measurement procedures / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol*, John Wiley and Sons, New York [etc.] :.
- Blanco, A. (2008). *Durabilidad del hormigón con fibras de acero / Ana Blanco Álvarez ; tutor: Antonio Aguado de Cea, Marc Vandewalle*.
- Bronaugh, E. (1995). "Helmholtz coils for calibration of probes and sensors: limits of magnetic field accuracy and uniformity." *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 72.
- CEN/TC-229. (2005). "Test method for metallic fibre concrete - Measuring the fibre content in fresh and hardened concrete." Comité Européen de Normalisation (CEN).
- Chen, D. X. (2004). "High-field ac susceptometer using Helmholtz coils as a magnetizer." *Measurement science technology*, 15(6), 1195.
- Di Luzio, S. (1998). "Novel, cylindrical, transverse gradient coil design for magnetic resonance imaging of large samples." *Measurement science technology*, 9(10), 1663.
- Goloshevsky, A. G. (2005). "Nuclear magnetic resonance imaging for viscosity measurements of non-Newtonian fluids using a miniaturized RF coil." *Measurement science technology*, 16(2), 513.
- Helmholtz, H. V. (1849). "Vortrag in der Sitznug. vom 16, III." *Berlin: Physikalischen Gesellschaft*.
- Hertz. (2006). "Hertznet." HERTZ Systemtechnik GmbH.
- Humar, J. (2005). "AC/DC transfer method for an AC magnetic flux density standard." *Measurement science technology*, 16(8), 1656.
- Jian, W. (2002). "An improved Helmholtz coil and analysis of its magnetic field homogeneity." *Review of scientific instruments*, 73(5), 2175.
- Kirschvink, J. (1992). "Uniform magnetic fields and double-wrapped coil systems - improved techniques for the design of bioelectromagnetic experiments." *Bioelectromagnetics*, 13(5), 401.
- Masaló, J. (2009). "Desenvolupament d'un sistema de mesura inductiu per a la determinació del contingut de fibres d'acer en provetes de formigó," UPC, Barcelona.
- McKeehan, L. (1939). "A method for improving the uniformity of the central magnetic field in a thick solenoid." *Review of scientific instruments*, 10(12), 371.
- Merritt, R., Purcell, C., and Stroink, G. (1983). "Uniform magnetic-field produced by 3-square, 4-square, and 5-square coils." *Review of scientific instruments*, 54(7), 879.

- Murgatroyd, P., and Belloufi, M. (1990). "A sensitive differential thermometer." *Measurement science technology*, 1(1), 9.
- Murgatroyd, P. N. (1983). "Inverse Helmholtz pairs." *Review of scientific instruments*, 54(12), 1736.
- Oppenheim, A. V. (1997). *Señales y sistemas / Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México [etc.] :
- Pittman, M., and Waidelich, D. (1964). "3 + 4 coil systems for homogeneous magnetic fields." *IEEE transactions on aerospace*, AS 2(1), 36.
- Rosa, E. B., and Grover, F. W. (1913). "National Bureau of Standards : Technical news bulletin " *National Bureau of Standards*, Vol 8, nº 1, 1-229.
- Rubens, S. (1945). "Cube-surface coil for producing a uniform magnetic field." *Review of scientific instruments*, 16(9), 243.
- Saludes Requena, S. (2007). *Ensayo de doble punzonamiento aplicado al hormigón reforzado con fibras (ensayo Barcelona)*, UPC-Departament d'Enginyeria de la Construcció, Barcelona :
- Sallán Leyes, J. M. (2005). *Métodos cuantitativos de organización industrial I / José M. Sallan, Albert Suñé, Vicenç Fernández ... [et al.]*, Edicions UPC, Barcelona :
- Shawe-Taylor, J. (2004). *Kernel methods for pattern analysis / John Shawe-Taylor, Nello Cristianini*, Cambridge University Press, Cambridge :
- Tipler, P. A. (2005). *Física para la ciencia y la tecnología / Paul A. Tipler, Gene Mosca*, Reverté, Barcelona:
- Tumanski, S. (2007). "Induction coil sensors - a review." *Measurement science technology*, 18(3), R31.
- Walls, H., Berg, R., and Amis, E. (2005). "Multi-sample Couette viscometer for polymer formulations." *Measurement science technology*, 16(1), 137.



# Annexes

## 1. Camp magnètic produït per corrents elèctrics: llei de Biot i Savart

Quan una càrrega puntual  $q$  es desplaça amb una velocitat  $\mathbf{v}$ , es produeix un camp magnètic  $\mathbf{B}$  en el punt  $P$  de l'espai donat per (vegeu Figura 8.1) (Tipler 2005):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \quad [8.1]$$

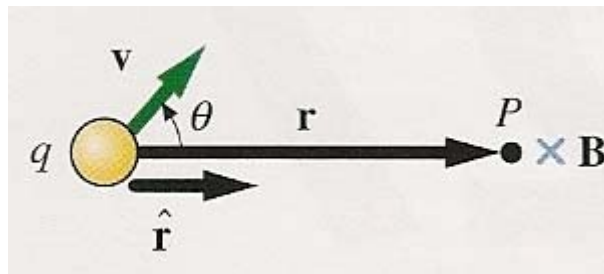


Figura 8.1 – (Tipler 2005) Camp magnètic produït per una càrrega puntual en moviment. La creu al punt  $P$  indica que la direcció del camp és perpendicular al paper i cap a dins

On  $\hat{\mathbf{r}}$  és un vector unitari que apunta des de la càrrega  $q$ , que es desplaça amb velocitat  $\mathbf{v}$ , al punt del camp  $P$  (d'observació del camp) i  $\mu_0$  és una constant de proporcionalitat anomenada permeabilitat de l'espai lliure, amb valor:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m/A} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad [8.2]$$

Per deduir el camp magnètic produït per un element de corrent  $I d\mathbf{l}$ , podem reemplaçar a [3.5]  $q\mathbf{v}$  per  $I d\mathbf{l}$  (vegeu Figura 8.2):

$$\boxed{d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}} \quad [8.3]$$

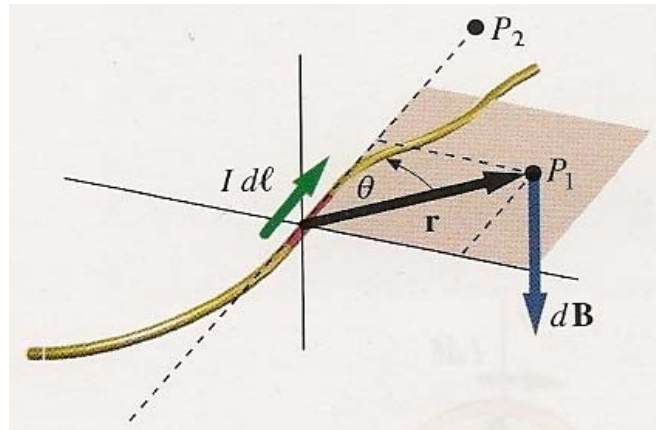


Figura 8.2 – (Tipler 2005) Un element de corrent per il·lustrar la llei de Biot i Savart. El camp al punt  $P_1$  és perpendicular a  $\hat{r}$  i  $d\mathbf{l}$

L'expressió [8.3], coneguda com llei de Biot i Savart, fou també deduïda per Ampère. Aquesta llei i l'equació [3.5] són anàlogues a la llei de Coulomb corresponent al camp elèctric creat per una càrrega puntual. La font de camp magnètic és una càrrega mòbil  $q\mathbf{v}$  o un element de corrent  $I d\mathbf{l}$ , de la mateixa forma que la càrrega  $q$  és la font del camp electrostàtic.

El camp magnètic degut al corrent total que circula per un circuit es pot calcular utilitzant la llei de Biot i Savart per calcular el camp degut a cada element de corrent i després sumant (integrant) per tots els elements de corrent del circuit. Aquest càlcul és difícil analíticament excepte en els casos de circuits de geometria senzilla.

## 2. Camp magnètic d'una espira circular

La Figura 8.3 mostra la geometria per calcular el camp magnètic en un punt de l'eix d'una espira circular de corrent a la distància  $x$  del seu centre (Tipler 2005). Considerem en primer lloc l'element de corrent situat a la part superior de l'espira de la Figura 8.3. Aquí, com en tots els punts de l'espira,  $I d\mathbf{l}$  és tangent a la mateixa i perpendicular al vector  $\hat{r}$  dirigit des de l'element de corrent al punt de camp  $P$ . El camp magnètic  $d\mathbf{B}$  degut a aquest element es troba en la direcció mostrada a la figura, perpendicular a  $\hat{r}$  i també perpendicular a  $I d\mathbf{l}$ . El mòdul de  $d\mathbf{B}$  és:

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I |d\mathbf{l} \times \hat{r}|}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi (x^2 + R^2)} \quad [8.4]$$

De l'equació anterior s'ha considerat que  $r^2 = (x^2 + R^2)$  i que  $d\mathbf{l}$  i  $r$  són perpendiculars, de manera que  $|d\mathbf{l} \times \hat{r}| = dl$ .

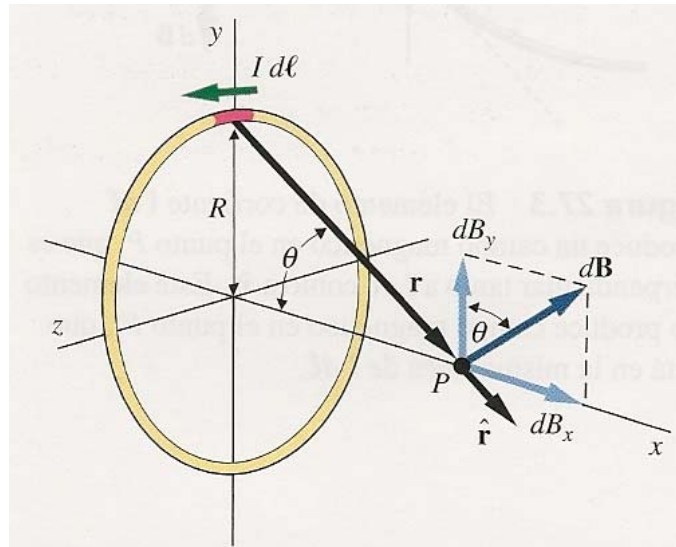


Figura 8.3 – (Tipler 2005) Geometria pel càlcul del camp magnètic en un punt de l'eix d'una espira de corrent circular

Quan sumem tots els elements de corrent de l'espira, les components de  $d\mathbf{B}$  perpendiculars a l'eix de l'espira, tal com  $dB_y$ , de la Figura 8.3, sumen zero, quedant només les components  $dB_x$  que són paral·leles a l'eix. Per tant, hem de calcular només les components  $x$  del camp. Segons la Figura 8.3, tenim:

$$dB_x = dB \sin \theta = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \right) \left( \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR dl}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad [8.5]$$

Per determinar el camp degut a tota l'espira completa, integrem  $dB_x$  al voltant de l'espira. Com  $x$  i  $R$  no varien al sumar per tots els elements de l'espira, podem treure aquestes magnituds de la integral, per tant obtenim:

$$B_x = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \oint dl \quad [8.6]$$

La integral de  $dl$  al voltant de l'espira és  $2\pi R$ . Finalment obtenim:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad [8.7]$$

A mode de comprovació, provem l'expressió [8.7] quan  $x \gg R$ :

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{x^3} \pi R^2 \quad [8.8]$$

Sabent que l'àrea d'una circumferència és:  $A_c = \pi R^2$ , podem simplificar l'expressió [8.8]:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{x^3} A_c \quad [8.9]$$

### 3. Camp magnètic d'una espira quadrada

Per calcular el camp magnètic d'una espira quadrada partirem de l'equació del camp magnètic produït per un conductor rectilini. Segons la Figura 8.4 i (Tipler 2005), el camp magnètic d'un segment conductor rectilini ve donat per:

$$B_{\hat{m}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} [\sin \theta_2 - \sin \theta_1] \quad [8.10]$$

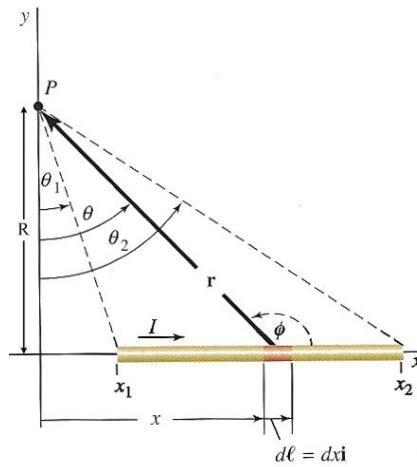


Figura 8.4 - (Tipler 2005) Geometria pel càlcul del camp magnètic en el punt  $P$  causat per un segment rectilini uniforme

En el nostre cas concret, volem analitzar una espira quadrada (formada per quatre conductors rectilinis) segons es mostra a la Figura 8.5. Vegem que  $R = L/2$  i  $\theta_2 = \theta_1 = 45^\circ$ , per tant l'equació [8.10] queda com:

$$B_{\hat{m}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{L/2} [\sin 45^\circ - \sin 45^\circ] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{L/2} 2 \sin(45^\circ) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{L/2} \sqrt{2} \quad [8.11]$$

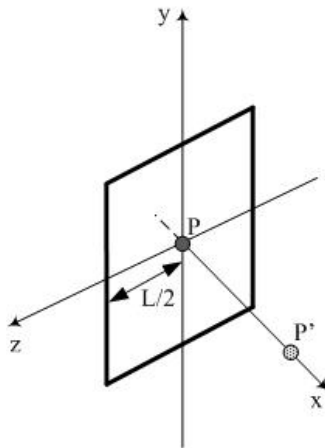


Figura 8.5 – Coneixem el camp al punt P i volem calcular-lo al llarg de l'eix x

L'equació [8.11] té vector unitari  $m$  que està sobre l'eix  $x$ . Si aixequem el punt  $P$  al llarg de l'eix  $x$ , per exemple al punt  $P'$  com es mostra a la Figura 8.5, el camp magnètic degut a aquest costat patirà 2 efectes:

- 1) El angles amb que es veu aquest costat des del punt disminuiran, el sinus d'aquest angle valdrà:

$$\sin \xi = \frac{\cos \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{2} L/2} \right) \right]}{\sqrt{2}}$$

Per a deduir aquest angle  $\xi$  (vegeu Figura 8.6): Un costat i una diagonal de la bobina quadrada formen un angle de  $45^\circ$ . Anomenem  $b$  la distància entre la cantonada i el centre de la bobina. Per tant:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(45^\circ) = \frac{L/2}{b} \Rightarrow b = \sqrt{2} L/2$$

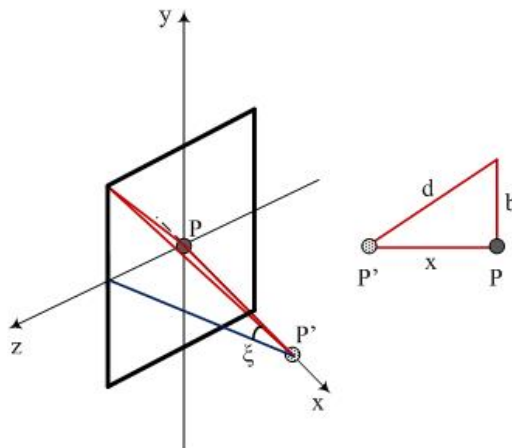


Figura 8.6 – Detall de la geometria pel càlcul de l'angle  $\xi$

Sobre aquesta  $b$ , aixequem un triangle rectangle on un costat serà l'eix vertical (representat per la variable  $x$ ), l'altre costat, la pròpia semi diagonal  $b$  i la hipotenusa una altra variable que anomenem  $d$ . L'angle que formen  $d$  i  $b$  és:

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2} L/2}\right)$$

Formen l' angle  $\xi$  el segment  $d$  amb el segment perpendicular del costat de la bobina que passa per l'extrem del segment  $d$ . Finalment,

$$\sin \xi = \frac{L/2}{d} = \frac{L/2}{\frac{b}{\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2} L/2}\right)\right]}} = \frac{\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2} L/2}\right)\right]}{\sqrt{2}} \quad [8.12]$$

- 2) Canviarà de direcció. Al comptar amb els 4 costats, el camp resultant serà en la direcció de les  $x$  que a la vegada valdrà la projecció del vector unitari  $m$  en la proporció  $(L/2)/R$  on ara  $R$  és la nova distància del punt d'observació al centre de cadascun dels costats:

$$|B_{\hat{m}}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} 2 \sin \xi = \frac{\mu_0 I}{4\pi \sqrt{(L/2)^2 + x^2}} 2 \sin \xi \quad [8.13]$$

I amb la projecció:

$$B_x = |B_{\hat{m}}| \cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{L/2}\right)\right] \quad [8.14]$$

Les equacions anteriors es poden simplificar. Primer anem a presentar la simplificació de [8.12]. Sabent que:

$$\cos[\tan^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Podem escriure [8.12] com:

$$\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2} L/2}\right)\right] = \cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{2} L}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2x}{\sqrt{2} L}\right)^2 + 1}} = \frac{|L|}{\sqrt{2x^2 + L^2}}$$

De l'expressió anterior,  $L > 0$ , sempre serà positiu, per tant:

$$\sin \xi = \frac{\cos \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{2} L/2} \right) \right]}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{L}{\sqrt{2x^2 + L^2}} \quad [8.15]$$

Les expressions [8.16] i [8.17] són igualtats que ens seran útils a posteriori.

$$\frac{1}{\sqrt{(L/2)^2 + x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + L^2}} \quad [8.16]$$

$$\cos \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x}{L/2} \right) \right] = \frac{L}{\sqrt{4x^2 + L^2}} \quad [8.17]$$

A partir de l'equació [8.14], utilitzant les simplificacions [8.15], [8.16] i [8.17] podem escriure:

$$\begin{aligned} B_x &= |B_{\hat{m}}| \cos \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x}{L/2} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\sqrt{(L/2)^2 + x^2}} 2 \sin \xi \cos \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x}{L/2} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{\sqrt{4x^2 + L^2}} 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{L}{\sqrt{2x^2 + L^2}} \frac{L}{\sqrt{4x^2 + L^2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \sqrt{2} \frac{2L^2}{(4x^2 + L^2) \sqrt{(2x^2 + L^2)}} \end{aligned} \quad [8.18]$$

Finalment reescrivint [8.18] i considerant que es tracten de quatre segments rectilinis, obtenim el camp magnètic d'una espira quadrada:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} I \sqrt{2} \frac{8L^2}{(4x^2 + L^2) \sqrt{(2x^2 + L^2)}} \quad [8.19]$$

A mode de comprovació, si a l'equació [8.19] provem  $x \rightarrow \infty$ , és a dir, ens allunyem de l'espira obtenim que el camp és zero, per tant obtenim un resultat coherent.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4 \frac{\mu_0}{4\pi} I \sqrt{2} \frac{2L^2}{(4x^2 + L^2)\sqrt{(2x^2 + L^2)}} = 0$$

Igual que en el cas de l'espira circular, provem l'expressió [8.19] quan  $x \gg L$ :

$$B = 4 \frac{\mu_0}{4\pi} I \sqrt{2} \frac{2L^2}{(4x^2 + L^2)\sqrt{(2x^2 + L^2)}} = 4 \frac{\mu_0}{4\pi} I \sqrt{2} \frac{L^2}{2\sqrt{2}x^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{x^3} L^2 \quad [8.20]$$

Sabent que l'àrea d'un quadrat és:  $A_q = L^2$ , podem simplificar l'expressió [8.20]:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{x^3} A_q \quad [8.21]$$

Si comparem les expressions [8.9] i [8.21] veiem que entre elles hi ha una relació d'àrees que depèn de la geometria en estudi, per tant, tot plegat s'obté un resultat consistent.

#### 4. Camp magnètic d'un solenoide circular

Un solenoide és un filferro enrotllat en forma d'hèlix amb espires molt pròximes entre elles. El solenoide s'utilitza per produir un camp magnètic intens i uniforme en la regió envoltada per les espires. Ocupa en magnetisme una funció anàloga al d'un condensador de plaques paral·leles amb l'objectiu de proporcionar un camp electrostàtic uniforme i intens entre les plaques. El camp magnètic d'un solenoide és essencialment el d'una sèrie de  $N$  espires idèntiques situades unes al costat de les altres.

Les línies de camp corresponents a dins d'un solenoide llarg i enrotllat són aproximadament paral·leles a l'eix i estan espaciades uniformement, indicant l'existència d'un camp uniforme i intens. Fora del solenoide les línies són menys denses.

Considerem un solenoide de longitud  $l$  format per  $N$  voltes de cable conductor que transporta un corrent d'intensitat  $I$ . Escollim l'eix del solenoide com eix  $x$ , amb l'extrem esquerre en  $x=x_1$  i l'extrem dret  $x=x_2$  tal com es mostra a la Figura 8.7. Calcularem el camp magnètic a l'origen. La figura mostra un element del solenoide de longitud  $dx$  a una distància  $x$  de l'origen. Si  $n = N/l$  és el número de voltes per unitat de longitud, en aquest element existeixen  $n dx$  voltes de filferro, cada una de les quals transporta un corrent  $I$ . Per tant, l'element és equivalent a una simple espira que transporta un corrent  $di = nI dx$ . El camp magnètic en un punt sobre l'eix  $x$  causat per una espira situada a l'origen que transporta un corrent  $nI dx$  ve donat per l'equació [8.7] reemplaçant  $I$  per  $di = nI dx$ :



$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 n I dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad [8.22]$$

L'expressió [8.22] representa també el camp magnètic a l'origen degut a una espira de corrent situada en  $x$ . Determinarem el camp magnètic provocat pel solenoide complet integrant aquesta expressió des de  $x=x_1$  a  $x=x_2$ :

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2 n I \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad [8.23]$$

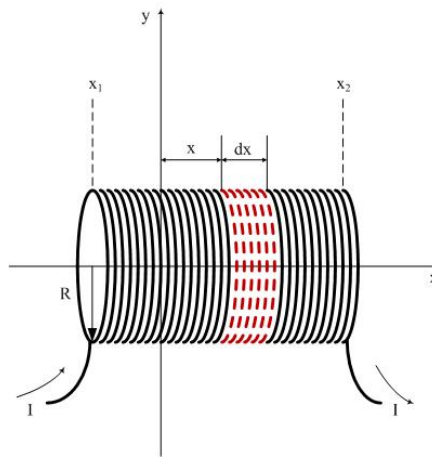


Figura 8.7 – Geometria pel càlcul del camp magnètic d'un solenoide circular

La integral de l'equació [8.23] pot determinar-se realitzant el canvi de variable  $x = R \tan \theta$ , o fent servir una taula estàndard. El seu valor és:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{R^2} \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} \right)$$

Substituint aquest valor dins l'equació [8.23] obtenim finalment el camp magnètic en l'origen de coordenades produït per un solenoide circular:

$$B_x(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} \right) \quad [8.24]$$

## 5. Camp magnètic d'un solenoide quadrat

Per obtenir el camp magnètic d'un solenoide quadrat procedirem de manera similar al cas del solenoide circular. Considerem un solenoide de longitud  $l$  (no confondre amb  $L$ : longitud del costat de l'espina quadrada) format per  $N$  voltes de cable conductor que transporta un corrent d'intensitat  $I$ . Escollim l'eix del solenoide com eix  $x$ , amb l'extrem esquerre en  $x=x_1$  i l'extrem dret  $x=x_2$  tal com es mostra a la Figura 8.8. Calcularem el camp magnètic a l'origen. La figura mostra un element del solenoide de longitud  $dx$  a una distància  $x$  de l'origen. Si  $n = N/l$  és el número de voltes per unitat de longitud, en aquest element existeixen  $n dx$  voltes de filferro, cada una de les quals transporta un corrent  $I$ . Per tant, l'element és equivalent a una simple espina que transporta un corrent  $di = nI dx$ . El camp magnètic en un punt sobre l'eix  $x$  causat per una espina situada a l'origen que transporta un corrent  $nI dx$  ve donat per l'equació [8.19] reemplaçant  $I$  per  $di = nI dx$ :

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} nI\sqrt{2} \frac{8L^2}{(4x^2 + L^2)\sqrt{(2x^2 + L^2)}} dx \quad [8.25]$$

Determinarem el camp magnètic provocat pel solenoide complet integrant l'expressió [8.25] des de  $x=x_1$  a  $x=x_2$ :

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} nI\sqrt{2} 8L^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{(4x^2 + L^2)\sqrt{(2x^2 + L^2)}} dx \quad [8.26]$$

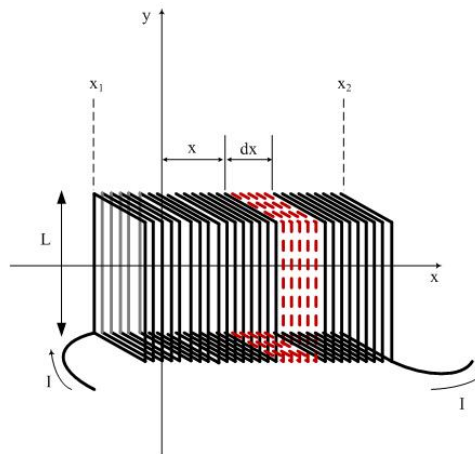


Figura 8.8 – Geometria pel càlcul del camp magnètic d'un solenoide quadrat

La resolució de la integral [8.26] no és trivial i degut a la llargària del mètode s'ha resolt de forma separada a l'apartat 5.1 – Resolució analítica de la integral. Tot seguit es mostra un resultat directe que s'ha obtingut a partir del programa matemàtic Derive. Per resoldre la integral anterior farem ús de l'expressió [8.27].

$$\int \frac{1}{(a + bx^2)\sqrt{c + dx^2}} dx = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{\frac{bc-ad}{a}}}{\sqrt{c+dx^2}}\right)}{a\sqrt{\frac{bc-ad}{a}}} \quad [8.27]$$

Substituint de forma acurada obtenim la solució de la integral:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{(4x^2 + L^2)\sqrt{(2x^2 + L^2)}} dx &= \frac{\sqrt{2}}{2L^2} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2 + L^2}}\right) \Bigg|_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2L^2} \left[ \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x_2}{\sqrt{2x_2^2 + L^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x_1}{\sqrt{2x_1^2 + L^2}}\right) \right] \end{aligned} \quad [8.28]$$

Finalment substituint el resultat de l'expressió [8.28] a l'expressió [8.26] obtenim finalment el camp magnètic produït per un solenoide quadrat:

$$B_x(x_1, x_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} 8nI \left[ \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x_2}{\sqrt{2x_2^2 + L^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x_1}{\sqrt{2x_1^2 + L^2}}\right) \right] \quad [8.29]$$

### 5.1. Resolució analítica de la integral

Recordem que la integral que volem resoldre és:

$$\int \frac{1}{(4x^2 + L^2)\sqrt{(2x^2 + L^2)}} dx \quad [8.30]$$

Per resoldre la integral anterior s'ha de fer servir una substitució d'Euler. Tenim tres possibles tipus de substitucions que depenen de la forma de la integral. En el nostre cas utilitzarem la primera substitució:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = u - x\sqrt{a}$$

En el nostre cas concret tenim:

$$\sqrt{2x^2 + L^2} = u - x\sqrt{2} \quad [8.31]$$

Aïllem  $x$  de l'expressió anterior:

$$\left(\sqrt{2x^2 + L^2}\right)^2 = (u - x\sqrt{2})^2 \rightarrow x = \frac{u^2 - L^2}{2u\sqrt{2}} \quad [8.32]$$

Derivem [8.32]:

$$dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{u^2 - L^2}{2u^2\sqrt{2}}\right) du \quad [8.33]$$

Ja podem substituir, utilitzant [8.31], [8.32] i [8.33]:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(4x^2 + L^2)\sqrt{(2x^2 + L^2)}} dx &= \int \frac{1}{(4x^2 + L^2)(u - x\sqrt{2})} dx \\ &= \int \frac{1}{\left(4\left(\frac{u^2 - L^2}{2u\sqrt{2}}\right)^2 + L^2\right)\left(u - \frac{u^2 - L^2}{2u\sqrt{2}}\sqrt{2}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{u^2 - L^2}{2u^2\sqrt{2}}\right) du \\ &= \int \frac{1}{\left(\frac{u^4 - 2u^2L^2 + L^4}{2u^4} + L^2\right)\left(u - \frac{u^2 - L^2}{2u}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{u^2 - L^2}{2u^2\sqrt{2}}\right) du \\ &= \int \frac{1}{\left(\frac{u^4 + L^4}{2u^2}\right)\left(\frac{u^2 - L^2}{2u}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{u^2 - L^2}{2u^2\sqrt{2}}\right) du \end{aligned}$$

Seguim simplificant:

$$\begin{aligned} \int \frac{4u^3}{(u^4 + L^4)(u^2 - L^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{u^2 - L^2}{2u^2\sqrt{2}}\right) du \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4u^3}{(u^4 + L^4)(u^2 - L^2)} - \frac{u^2 - L^2}{2u^2\sqrt{2}} \frac{4u^3}{(u^4 + L^4)(u^2 - L^2)} du \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4u^3}{(u^4 + L^4)(u^2 - L^2)} - \frac{2u}{(u^4 + L^4)\sqrt{2}} du \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2}(u^4 + L^4)} \left(\frac{4u^3}{(u^2 - L^2)} - 2u\right) du = \int \frac{1}{\sqrt{2}(u^4 + L^4)} \left(\frac{2u^3 - 2uL^2}{u^2 - L^2}\right) du \\ &= \int \frac{2u}{\sqrt{2}(u^4 + L^4)} \left(\frac{u^2 - L^2}{u^2 - L^2}\right) du \end{aligned}$$

Finalment:

$$\sqrt{2} \int \frac{u}{(u^4 + L^4)} du \quad [8.34]$$

Ara utilitzem una altra variable de substitució:

$$\begin{aligned} s &= u^2 \\ ds &= 2u \, du \end{aligned}$$

Substituïm dins [8.34]:

$$\sqrt{2} \int \frac{u}{(u^4 + L^4)} du = \sqrt{2} \int \frac{u}{(s^2 + L^4)} \frac{ds}{2u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{s^2 + L^4} ds \quad [8.35]$$

La integral [8.35] es pot resoldre sabent que:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right)$$

Resolem [8.35] amb l'ajuda de l'expressió anterior:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{s^2 + L^4} ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{L^2} \tan^{-1} \left( \frac{s}{L^2} \right) \quad [8.36]$$

Per acabar, substituïm:

$$\begin{aligned} s &= u^2 \\ u &= x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2 + L^2} \end{aligned}$$

I obtenim el resultat final:

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2L^2} \tan^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{2}}} \right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2L^2} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{2} x}{\sqrt{2x^2 + L^2}} \right) + C} \quad [8.37]$$

Arribat en aquest punt, per un costat tenim el resultat obtingut amb l'ajut del programa matemàtic Derive i per un altre costat el de forma analítica, el que acabem de fer. Per que tot sigui coherent ambdós solucions han de ser equivalents i seguint aquest criteri determinarem el valor de la constant  $C$ . Eliminant els termes multiplicadors constants obtenim la següent igualtat (la banda de la dreta correspon a la solució del programa matemàtic i la banda de la dreta l'analític):

$$\tan^{-1} \left( \frac{(x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2 + L^2})^2}{L^2} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{2} x}{\sqrt{2x^2 + L^2}} \right) + C$$

Matemàticament es descobreix que el valor de  $C$  ha de ser  $C = \frac{\pi}{4}$ . Per tant partim de la següent igualtat:

$$\tan^{-1}\left(\frac{(x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2 + L^2})^2}{L^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2 + L^2}}\right) + \frac{\pi}{4} \quad [8.38]$$

Per tant, ara resta demostrar de forma analítica la igualtat [8.38]. Per fer-ho utilitzarem la següent propietat:

$$\tan^{-1}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \tan^{-1}(z) + \frac{\pi}{4}$$

Apliquem la propietat anterior sobre l'expressió [8.38]. Primer, identifiquem la variable  $z$  del costat dret, per tant:

$$z = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2 + L^2}}$$

Segon, apliquem la propietat per obtenir el costat esquerre:

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2 + L^2}}}{1 - \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2 + L^2}}} = \frac{\sqrt{2x^2 + L^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2 + L^2} - x\sqrt{2}} \quad [8.39]$$

Multipliquem a [8.39] pel seu conjugat:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2x^2 + L^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2 + L^2} - x\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2x^2 + L^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2 + L^2} + x\sqrt{2}} \right) &= \frac{(x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2 + L^2})^2}{(\sqrt{2x^2 + L^2})^2 - (x\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{(x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2 + L^2})^2}{L^2} \end{aligned} \quad [8.40]$$

Es verifica que [8.40] és el costat esquerre de l'expressió [8.38] aleshores queda demostrat que l'expressió [8.38] és certa.

Hem obtingut, mitjançant dos mètodes diferents, dos resultats equivalents per una mateixa integral. S'ha demostrat que matemàticament són iguals però anem a fer una comparació gràfica de ambdós solucions.

Per una banda tenim la solució obtinguda del programa matemàtic Derive:

$$\tan^{-1}\left(\frac{(x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2 + L^2})^2}{L^2}\right) \quad [8.41]$$

I per una altra banda tenim la solució obtinguda de forma analítica:

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2 + L^2}}\right) \quad [8.42]$$

En la Figura 8.9 tenim una gràfica de les funcions [8.41] i [8.42]. Podem observar que en el cas del mètode analític [8.42] la funció passa pels punts (0,0). No obstant, la solució del programa matemàtic es troba desplaçada sobre l'eix  $x \frac{\pi}{4}$ .

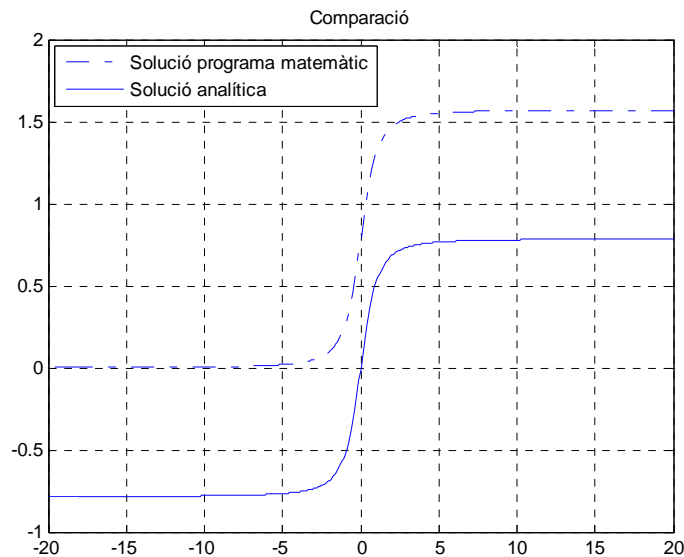


Figura 8.9 – Comparació de les dues funcions

## 6. Codi Matlab

A la Taula 5.6 es mostren el nom dels fitxers del codi Matlab que s'han programat durant tot el projecte. En el cas dels fitxers que es repeteixen per a cada una de les bobines construïdes aquí només es mostra pel cas de la bobina per mesurar provetes de formigó ja que a efectes de programació són anàlegs variant alguns paràmetres.

<i>Taula 8.1 – Relació dels fitxers del codi Matlab</i>	
<b>Nom fitxer</b>	<b>Descripció</b>
espira_quadrada.m	Funció que retorna els valors numèrics del camp magnètic produït per una espira quadrada

espira_circular.m	Funció que retorna els valors numèrics del camp magnètic produït per una espira circular
comparacio_espires.m	Programa que compara gràficament l'espira circular amb l'espira quadrada
comparacio_solenoides.m	Programa que compara gràficament el solenoide circular amb el solenoide quadrat
comprovacio_helmholtz.m	Programa que comprova que el mètode analític funciona en el cas de la bobina de Helmholtz
comprovacio_solenoides.m	Programa que comprova que el mètode analític funciona en el cas d'un solenoide quadrat
matriu_inversa_solucions_totes.m	Programa que implementa el mètode analític per solucions positives i negatives
matriu_inversa_solucions_positives.m	Programa que implementa el mètode analític per només solucions positives
forca_brutav7_simetric_senar_6mm.m	Programa que implementa el mètode de la força bruta amb intervals de 6 mm
matriu_inversa_solucions_totesBB.m	Programa que implementa el mètode Branch & Bound per solucions positives i negatives
bb1.m	Funció utilitzada a matriu_inversa_solucions_totesBB.m i que retorna el vector modificat un cop passat per l'algorisme Branch & Bound

A continuació es mostren el contingut de cada un dels fitxers esmentats a la *Taula 5.6*.

*Taula 8.2 – Codi del fitxer: espira\_quadrada.m*

```
function [B1] = espira(x,t,L)

%ESPIRA calcula el camp creat per una espira quadrada
% centrada al x=t i de costat L
A=100; % Constant d'espira I*mu*sqrt(2)*2*L^2/pi
B1=A./((4.*(x-t).^2+L^2).*sqrt(2.*(x-t).^2+L^2));
```

*Taula 8.3 – Codi del fitxer: espira\_circular.m*

```
function [B1] = espira(x,t,R)

%ESPIRA calcula el camp creat per una espira circular
% centrada al x=t i de radi R
A=10; % Constant d'espira rodona (I*mu)/2
B1=((R^2)*A)/(((x-t).^2 +R^2).^(3/2));
```

*Taula 8.4 – Codi del fitxer: comparacio\_espires.m*

```
t=0;
R=2;
L=4;
x=-6:0.1:6;

quadrada=A./((4.*(x-t).^2+L^2).*sqrt(2.*(x-t).^2+L^2));
```



```

circular=((R^2)*A)./(((x-t).^2 +R^2).^(3/2));

cuadrada=cuadrada./max(cuadrada);
circular=circular./max(circular);

figure
plot(x,circular,'b')
title('Camp magnètic espira circular');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B_x');

figure
plot(x,cuadrada,'b')
title('Camp magnètic espira quadrada');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B_x');

figure
plot(x,cuadrada,'-',x,circular,'-.')
title('Comparació espira circular - quadrada');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B_x');
legend('Cuadrada','Circular');

```

Taula 8.5 – Codi del fitxer: comparacio\_solenoides.m

```

c=10;
L=4;%Longitud costat espira (r=L/2)

%Vector coordenades pel dibuix
h=20;
%La longitud del solenoide es 20
x=0:0.1:h;
x1=0:0.1:h;
x2=sort(x1,'descend');
x1=x1*(-1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Solenoide espira quadrada%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for d=0:(length(x)-1)
    l2=atan((x2(d+1)*sqrt(2))/(sqrt(2*(x2(d+1)^2)+L^2)));
    l1=atan((x1(d+1)*sqrt(2))/(sqrt(2*(x1(d+1)^2)+L^2)));
    cuadrada(d+1)=c*(l2-l1);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Solenoide espira circular%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Radi solenoide
r=L/2;
for d=0:(length(x)-1)
    l2=x2(d+1)/sqrt(x2(d+1)^2+r^2);
    l1=x1(d+1)/sqrt(x1(d+1)^2+r^2);
    circular(d+1)=c*(l2-l1);
end

cuadrada=cuadrada./max(cuadrada);
circular=circular./max(circular);

figure
plot(x,circular,'b')
title('Camp magnètic solenoide circular');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B_x');

figure
plot(x,cuadrada,'b')
title('Camp magnètic solenoide quadrat');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B_x');

figure
plot(x,cuadrada,'-',x,circular,'-.')
title('Comparació solenoide circular - quadrat');
ylabel('B_x');
xlabel('x (cm)');
legend('Quadrat','Circular');

```

Taula 8.6 – Codi del fitxer: comprovacio\_helmholtz.m

```

%% Funció espira %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X1=-15:0.1:15;
b=espira(X1,0,15);

X2=-7.5:0.1:7.5;

%% Matriu H
m=length(X2);
H=zeros(m,m);

for i=1:m
    for j=1:m
        H(i,j)=b(i-j+m);
    end
end

%% El vector 'alfes' tindrà longitud m
% El costat de la bobina és L=15, r=7.5
% La distància entre bobines ha de ser de 7.5
alfes=zeros(1,m);
alfes(X2>=-4 & X2<=-3.75)=1;
alfes(X2<=4 & X2>3.75)=1;

resul=zeros(1,m);
for i=1:m
    for j=1:m
        resul(i)=resul(i)+(alfes(j)*H(i,j));
    end
end

figure
plot(X2,resul,'-.',X2,alfes.*max(resul),'g');
title('Bobina de Helmholtz');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B');
legend('Camp', 'Espires');

maxim=max(resul);
minim=min(resul(38:114));
error=((maxim-minim)/maxim)*100;
fprintf(1, 'Diferència Helmholtz: %1.10f %% \n ',error);

%% Comprovació en els extrems %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x1=-40:0.1:40;
b1=espira(x1,0,15);

x2=-20:0.1:20;

%% Matriu H
m1=length(x2);
H1=zeros(m1,m1);

for i=1:m1
    for j=1:m1
        H1(i,j)=b1(i-j+m1);
    end
end

nous_alfes=zeros(1,m1);
nous_alfes(x2>=-7.5 & x2<=7.5)=alfes(X2>=-7.5 & X2<=7.5);

resul=zeros(1,m1);
for i=1:m1
    for j=1:m1
        resul(i)=resul(i)+(nous_alfes(j)*H1(i,j));
    end
end

figure
plot(x2,resul,'-.',x2,nous_alfes.*max(resul),'r');
title('Bobina de Helmholtz');

```

```
xlabel('x (cm)');
ylabel('B_x');
legend('Camp', 'Espires');
```

*Taula 8.7 – Codi del fitxer: comprovacio\_solenoide.m*

```
%% Funció espira %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x1=-15:0.1:15;
b=espira(x1,0,15);

x2=-7.5:0.1:7.5;

%% Matriu H
m=length(x2);
H=zeros(m,m);

for i=1:m
    for j=1:m
        H(i,j)=b(i-j+m);
    end
end

%% El vector 'alfes' tindrà longitud m
% Volem comparar amb un solenoide de h=15
% per tant, tot el vector=1
alfes=ones(1,m);

resul=zeros(1,m);
for i=1:m
    for j=1:m
        resul(i)=resul(i)+(alfes(j)*H(i,j));
    end
end

% Normalitzo el resultat per poder comparar
resul=resul./max(resul);

% Resultat solenoide
resull=solenoide;
% Normalitzo el resultat per poder comparar
resull=resull./max(resull);

figure
plot(x2,resul,'c',x2,resull,'r');
title('Solenoide');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B');
legend('Mètode matricial', 'Fórmula analítica');
```

*Taula 8.8 – Codi del fitxer: matriu\_inversa\_solucions\_totes.m*

```
%% Funció espira %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X1=-15:pas:15;
b=espira(X1,0,15);

%% Funció quadrat %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X2=-7.5:pas:7.5;
y=zeros(size(X2));
y(X2>=-7.5 & X2<=7.5)=1;

%% Matriu H
m=length(X2);
H=zeros(m,m);

for i=1:m
    for j=1:m
        H(i,j)=b(i-j+m);
    end
end

alfes=lsqlin(H,y',[],[],[],[],-50,150,[],[]);
```

```

% Al no sortir un vector simètric, ho imposen nosaltres
meitat=ceil(length(X2)/2);
alfes1=alfes;
alfes1(meitat+1:length(X2))=flipud(alfes(1:meitat-1));
alfes=alfes1;

clear alfes1;
clear meitat;

%Vector d'alfes retocades
alfes_ret=round(alfes);

%% Comprovació %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Alfes originals
resul=zeros(1,m);
for i=1:m
    for j=1:m
        resul(i)=resul(i)+(alfes(j)*H(i,j));
    end
end

% Alfes retocades
resull=zeros(1,m);
for i=1:m
    for j=1:m
        resull(i)=resull(i)+(alfes_ret(j)*H(i,j));
    end
end

% Comparació entre alfes originals / retocades
figure
plot(X2,resul,'c',X2,resull./max(resull),'r');
title('Comparació');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B');
legend('Originals','Retocades');

%% Comprovació en els extrems %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x1=-40:pas:40;
b1=espira(x1,0,15);

x2=-20:pas:20;

%% Matriu H
m1=length(x2);
H1=zeros(m1,m1);

for i=1:m1
    for j=1:m1
        H1(i,j)=b1(i-j+m1);
    end
end

% Alfes originals
nous_alfes=zeros(1,m1);
nous_alfes(x2>=-7.5 & x2<=7.5)=alfes(X2>=-7.5 & X2<=7.5);

resul=zeros(1,m1);
for i=1:m1
    for j=1:m1
        resul(i)=resul(i)+(nous_alfes(j)*H1(i,j));
    end
end

% Alfes retocats
nous_alfes_ret=zeros(1,m1);
nous_alfes_ret(x2>=-7.5 & x2<=7.5)=alfes_ret(X2>=-7.5 & X2<=7.5);

resull=zeros(1,m1);
for i=1:m1
    for j=1:m1
        resull(i)=resull(i)+(nous_alfes_ret(j)*H1(i,j));
    end
end

```

```

% Comparació entre alfes originals / retocades
figure
plot(x2,resul,'c',x2,resul1./max(resul1),'r',x2,nous_alfes./max(nous_alfes),'g');
title('Comparació');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B');
legend('Originals','Retocades','Espires');

```

Taula 8.9 – Codi del fitxer: *matriu\_inversa\_solucions\_positives.m*

```

%% Funció espira %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X1=-15:0.1:15;
b=espira(X1,0,15);

%% Funció quadrat %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X2=-7.5:0.1:7.5;
y=zeros(size(X2));
y(X2>=-7.5 & X2<=7.5)=1;

%% Matriu H
m=length(X2);
H=zeros(m,m);

for i=1:m
    for j=1:m
        H(i,j)=b(i-j+m);
    end
end

% Només agafo solucions positives %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alfes = lsqnonneg(H,y');

%Vector d'alfes retocades
alfes_ret=round(alfes);

%% Comprovació %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Alfes originals
resul=zeros(1,m);
for i=1:m
    for j=1:m
        resul(i)=resul(i)+(alfes(j)*H(i,j));
    end
end

% Alfes retocades
resul1=zeros(1,m);
for i=1:m
    for j=1:m
        resul1(i)=resul1(i)+(alfes_ret(j)*H(i,j));
    end
end

% Comparació entre alfes originals / retocades
figure
plot(X2,resul,'c',X2,resul1,'r');
title('Comparació');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B');
legend('Originals','Retocades');

%% Comprovació en els extrems %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x1=-40:0.1:40;
b1=espira(x1,0,15);

x2=-20:0.1:20;

%% Matriu H
m1=length(x2);
H1=zeros(m1,m1);

for i=1:m1
    for j=1:m1
        H1(i,j)=b1(i-j+m1);
    end
end

```

```

end

% Alfes originals
nous_alfes=zeros(1,m1);
nous_alfes(x2>=-7.5 & x2<=7.5)=alfes(X2>=-7.5 & X2<=7.5);

resul=zeros(1,m1);
for i=1:m1
    for j=1:m1
        resul(i)=resul(i)+(nous_alfes(j)*H1(i,j));
    end
end

% Alfes retocats
nous_alfes_ret=zeros(1,m1);
nous_alfes_ret(x2>=-7.5 & x2<=7.5)=alfes_ret(X2>=-7.5 & X2<=7.5);

resull=zeros(1,m1);
for i=1:m1
    for j=1:m1
        resull(i)=resull(i)+(nous_alfes_ret(j)*H1(i,j));
    end
end

figure
plot(x2,resul,'c',x2,resull,'r',x2,nous_alfes./max(nous_alfes),'g');
title('Comparació');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B');
legend('Originals','Retocades','Espires');
clear i; clear j;

```

*Taula 8.10 – Codi del fitxer: forca\_brutav7\_simetric\_senar\_6mm.m*

```

L=15;

v=[1027 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 300];

v_optim=[-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1];
minim=-inf; % Inicialitzem a infinit

x=-40:0.02:(40-0.02);
x_c=- (80-0.02):0.02:(80-0.02);

b=espira(x,0,17);
c=zeros(size(x));

pos1=find(x_c==-7.5);
pos2=find(x_c==7.5);

tic
for i=1027:v(1)
for ii=0:v(2)
for iii=0:v(3)
for iiii=0:v(4)
for iiii=0:v(5)
for j=0:v(6)
for jj=0:v(7)
for jjj=0:v(8)
for jjjj=0:v(9)
for jjjjj=0:v(10)
for k=0:v(11)
for kk=0:v(12)
for kkk=300:v(13)

    % Funcio c
    c( x>-L/2 & x<(-L/2+L*(1/25)))=i;
    c( x>(-L/2+L*(1/25)) & x<(-L/2+L*(2/25)) )=ii;
    c( x>(-L/2+L*(2/25)) & x<(-L/2+L*(3/25)) )=iii;
    c( x>(-L/2+L*(3/25)) & x<(-L/2+L*(4/25)) )=iiii;
    c( x>(-L/2+L*(4/25)) & x<(-L/2+L*(5/25)) )=iiiii;
    c( x>(-L/2+L*(5/25)) & x<(-L/2+L*(6/25)) )=j;
    c( x>(-L/2+L*(6/25)) & x<(-L/2+L*(7/25)) )=jj;
    c( x>(-L/2+L*(7/25)) & x<(-L/2+L*(8/25)) )=jjj;

```



```

k=v_optim(11);
kk=v_optim(12);
kkk=v_optim(13);

% Funcio c
c( x>-L/2 & x<(-L/2+L*(1/25)))=i;
c( x>(-L/2+L*(1/25)) & x<(-L/2+L*(2/25)) )=ii;
c( x>(-L/2+L*(2/25)) & x<(-L/2+L*(3/25)) )=iii;
c( x>(-L/2+L*(3/25)) & x<(-L/2+L*(4/25)) )=iiii;
c( x>(-L/2+L*(4/25)) & x<(-L/2+L*(5/25)) )=iiiii;
c( x>(-L/2+L*(5/25)) & x<(-L/2+L*(6/25)) )=j;
c( x>(-L/2+L*(6/25)) & x<(-L/2+L*(7/25)) )=jj;
c( x>(-L/2+L*(7/25)) & x<(-L/2+L*(8/25)) )=jjj;
c( x>(-L/2+L*(8/25)) & x<(-L/2+L*(9/25)) )=jjjj;
c( x>(-L/2+L*(9/25)) & x<(-L/2+L*(10/25)) )=jjjjj;
c( x>(-L/2+L*(10/25)) & x<(-L/2+L*(11/25)) )=k;
c( x>(-L/2+L*(11/25)) & x<(-L/2+L*(12/25)) )=kk;

c( x>(-L/2+L*(12/25)) & x<(-L/2+L*(13/25)) )=kkk;

c( x>(-L/2+L*(13/25)) & x<(-L/2+L*(14/25)) )=kkk;
c( x>(-L/2+L*(14/25)) & x<(-L/2+L*(15/25)) )=kk;
c( x>(-L/2+L*(15/25)) & x<(-L/2+L*(16/25)) )=kkkk;
c( x>(-L/2+L*(16/25)) & x<(-L/2+L*(17/25)) )=kkkk;
c( x>(-L/2+L*(17/25)) & x<(-L/2+L*(18/25)) )=kkk;
c( x>(-L/2+L*(18/25)) & x<(-L/2+L*(19/25)) )=kk;
c( x>(-L/2+L*(19/25)) & x<(-L/2+L*(20/25)) )=k;
c( x>(-L/2+L*(20/25)) & x<(-L/2+L*(21/25)) )=kkkk;
c( x>(-L/2+L*(21/25)) & x<(-L/2+L*(22/25)) )=kkkk;
c( x>(-L/2+L*(22/25)) & x<(-L/2+L*(23/25)) )=kkk;
c( x>(-L/2+L*(23/25)) & x<(-L/2+L*(24/25)) )=kk;
c( x>(-L/2+L*(24/25)) & x<(-L/2+L*(25/25)) )=k;
c(1626)=c(1627);

% Convolució
t=conv(c,b);
plot(x_c,t);

```

Taula 8.11 – Codi del fitxer: matriu\_inversa\_solucions\_totesBB.m

```

pas=0.5;

%% Funció espira %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X1=-15:pas:15;
b=espira(X1,0,17);

%% Funció quadrat %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X2=-7.5:pas:7.5;
y=zeros(size(X2));
y(X2>=-7.5 & X2<=7.5)=1;

%% Matriu H
m=length(X2);
H=zeros(m,m);

for i=1:m
    for j=1:m
        H(i,j)=b(i-j+m);
    end
end

alfes=lsqlin(H,y',[],[],[],[],-50,150,[],[]);

% Al no sortir un vector simètric, ho imposen nosaltres
meitat=ceil(length(X2)/2);
alfes1=alfes;
alfes1(meitat+1:length(X2))=flipud(alfes(1:meitat-1));
alfes=alfes1;

clear alfes1;
clear meitat;

%Vector d'alfes retocades
error=1;
error_nou=0;

```



```

s=0;
alfes_ret=alfes;

tic
while error~=error_nou
    error=error_nou;
    [alfes_ret,error_nou]=bbl(alfes_ret,X2,H);
    s=s+1;
    fi=fopen('salida.txt','a');
    fprintf(fi,'\n Iteració: %i   Error: %f   Vector alfes:',s,100*(1-error_nou));
    for nm=1:length(alfes_ret)
        fprintf(fi,' %i ',alfes_ret(nm,1));
    end
    fclose(fi);
end
toc

fprintf(1,'Nº iteracions: %i \n',s);
clear s;

table=[alfes round(alfes) alfes_ret];

%% Comprovació %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Alfes originals
resul=zeros(1,m);
for i=1:m
    for j=1:m
        resul(i)=resul(i)+(alfes(j)*H(i,j));
    end
end

% Alfes retocades
resul1=zeros(1,m);
for i=1:m
    for j=1:m
        resul1(i)=resul1(i)+(alfes_ret(j)*H(i,j));
    end
end

% Comparació entre alfes originals / retocades
figure
plot(X2,resul,'c',X2,resul1./max(resul1),'r');
title('Comparació');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B');
legend('Originals','Retocades');

%% Comprovació en els extrems %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x1=-40:pas:40;
b1=espira(x1,0,17);

x2=-20:pas:20;

%% Matriu H
m1=length(x2);
H1=zeros(m1,m1);

for i=1:m1
    for j=1:m1
        H1(i,j)=b1(i-j+m1);
    end
end

% Alfes originals
nous_alfes=zeros(1,m1);
nous_alfes(x2>=-7.5 & x2<=7.5)=alfes(X2>=-7.5 & X2<=7.5);

resul=zeros(1,m1);
for i=1:m1
    for j=1:m1
        resul(i)=resul(i)+(nous_alfes(j)*H1(i,j));
    end
end

% Alfes retocats
nous_alfes_ret=zeros(1,m1);

```

```

nous_alfes_ret(x2>=-7.5 & x2<=7.5)=alfes_ret(X2>=-7.5 & X2<=7.5);

resull=zeros(1,m1);
for i=1:m1
    for j=1:m1
        resull(i)=resull(i)+(nous_alfes_ret(j)*H1(i,j));
    end
end

% Comparació entre alfes originals / retocades
figure
plot(x2,resul,'c',x2,resull./max(resull),'r',x2,nous_alfes./max(nous_alfes),'g');
title('Comparació');
xlabel('x (cm)');
ylabel('B');
legend('Originals','Retocades','Espires');

clear i; clear j;

% Evaluació de l'error
pos1=find(x2==-7.5);
pos2=find(x2==7.5);

Nmin=min(resull(pos1:pos2));
Nmax=max(resull(pos1:pos2));
minim_nou=Nmin/Nmax;

fprintf(1,'Error alfes retocades: %f %% \n',100*(1-minim_nou));

Nmin=min(resul(pos1:pos2));
Nmax=max(resul(pos1:pos2));
minim_nou=Nmin/Nmax;

fprintf(1,'Error alfes originals: %f %% \n',100*(1-minim_nou));

```

Taula 8.12 – Codi del fitxer: bb1.m

```

function [alfes_ret,error] = bb1(alfes,x,H)

m=length(x);

pos1=find(x==-7.5);
pos2=find(x==7.5);

% Redondeig per defecte
alfes=round(alfes);

%% Calcular l'error de les alfes
resul=zeros(1,m);
for i=1:m
    for j=1:m
        resul(i)=resul(i)+(alfes(j)*H(i,j));
    end
end

Nmin=min(resul(pos1:pos2));
Nmax=max(resul(pos1:pos2));
minim=Nmin/Nmax;
fprintf(1,'BB Error alfes entrada: %f %% \n',100*(1-minim));

alfes_ret=alfes;

%% Modificar el vector alfes, calcular error i comprovar millora
for i_1=(alfes(1)-1):1:(alfes(1)+1)
    for i_2=(alfes(2)-1):1:(alfes(2)+1)
        for i_3=(alfes(3)-1):1:(alfes(3)+1)
            for i_4=(alfes(4)-1):1:(alfes(4)+1)
                for i_5=(alfes(5)-1):1:(alfes(5)+1)
                    for i_6=(alfes(6)-1):1:(alfes(6)+1)
                        for i_7=(alfes(7)-1):1:(alfes(7)+1)
                            for i_8=(alfes(8)-1):1:(alfes(8)+1)
                                for i_9=(alfes(9)-1):1:(alfes(9)+1)
                                    for i_10=(alfes(10)-1):1:(alfes(10)+1)
                                        for i_11=(alfes(11)-1):1:(alfes(11)+1)

```

