



Escola Tècnica Superior d'Enginyers
de Camins, Canals i Ports de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

PROJECTE O TESIS D'ESPECIALITAT

Títol

**Capacidad última a cortante de vigas armadas de alma
esbelta de inercia variable**

Autor/a

Amadeu Alerany Canut

Tutor/a

Enrique Mirambell Arrizabalaga

Departament

Enginyeria de la Construcció

Intensificació

Análisi i Projecte d'Estructures

Data

Octubre de 2011

RESUMEN

En construcción metálica y mixta se presentan, a menudo, situaciones de diseño en que se deben salvar luces importantes o resistir cargas considerables. En dichos casos, el empleo de vigas armadas de inercia variable proporciona una solución eficiente y económica. Se tiene conocimiento de escasos estudios rigurosos que permitan calcular la capacidad última a cortante de vigas armadas de inercia variable. Por éste motivo, se hace necesario el desarrollar un modelo de capacidad última a cortante de vigas de inercia variable, el cual deberá considerar los diversos mecanismos resistentes que se desarrollan en el panel de alma hasta alcanzar el agotamiento. Los análisis numéricos permitirán poner de manifiesto la superposición de tres mecanismos resistentes claramente diferenciados. El primero corresponde al estado tensional existente en el alma en el instante en que se produce la abolladura de la misma. Dicho estado tensional está integrado por una tensión tangencial (tensión crítica de abolladura) y una tensión normal (tensiones de flexión derivadas del equilibrio de la viga). El segundo mecanismo resistente de las vigas armadas de inercia variable proviene de la capacidad postcrítica del panel de alma, al desarrollarse un campo diagonal de tracciones, anclado en alas y rigidizadores. El tercer mecanismo resistente hace referencia al desarrollo de un mecanismo de marco, cuya capacidad resistente es función de la rigidez a flexión de las alas. El estudio del comportamiento de las vigas armadas de inercia variable hasta colapso se llevará a cabo en dos etapas diferenciadas. La primera consiste en el estudio de la resistencia de dichas vigas hasta alcanzar la inestabilidad del alma (resistencia precrítica) mientras que la segunda trata del estudio de la reserva de resistencia hasta agotamiento que tiene lugar tras la abolladura (resistencia postcrítica).

SUMMARY

In steel and composite construction there are often design situations in which large spans lengths are involved or heavy loads must be resisted. In such cases, the use of tapered plate girders provides an efficient and economical solution. There is knowledge of a few rigorous studies for calculating the ultimate shear capacity of tapered plate girders. For this reason, it is necessary to develop an ultimate shear capacity model of tapered plate girders, which must consider the resistant mechanisms developed in web plate to reach maximum capacity. The numerical analysis will allow reveal the overlap of three distinct resistant mechanisms. The first one is about of stress state existing in web plate at the instant of web buckling. This stress state is formed by a shear stress (critical buckling stress) and a normal stress (bending stresses resulting from the balance girder). The second mechanism of tapered plate girders comes from post-buckling strength of the web plate, due to the development of a tension field, anchored on the flanges and transversal stiffeners. The third is the sway failure mechanism which is determined by bending stiffness of the flanges. Study the behavior of the tapered plate girders will take place in two different stages. The first is the study of strength of these girders to reach the web buckling (pre-critical strength) and the second is about strength reserve, which occurs after local buckling (post-critical strength).

ÍNDICE

Capítulo 1. Introducción	7
1.1. Antecedentes	7
1.2. Objetivos	8
1.3. Contenido del documento	9
Capítulo 2. Estado del conocimiento	11
2.1. Introducción	11
2.2. Optimización estructural y dimensiones usuales de las vigas armadas	11
2.3. Comportamiento estructural de vigas armadas	15
2.3.1. Comportamiento precrítico de las vigas armadas	16
2.3.2. Comportamiento postcrítico de las vigas armadas	18
2.4. Modelos de capacidad postcrítica de vigas prismáticas	19
2.5. Modelos de capacidad postcrítica de vigas armadas esbeltas de inercia variable	26
Capítulo 3. Análisis numérico mediante elementos finitos	29
3.1. Introducción	29
3.2. Fases del análisis numérico mediante <i>Abaqus</i>	30
3.3. Teoría de láminas planas de Kirchhoff	32
3.4. Consideraciones a tener en cuenta en el código numérico	37
3.4.1. Consideración de la no-linealidad del material	37
3.4.2. Consideración de la no-linealidad geométrica	37
3.4.3. El método de Riks modificado para análisis no-lineal	38
3.4.4. Análisis de autovalores	38
3.5. Validación de resultados obtenidos del código numérico	40
Capítulo 4. Tensión crítica de abolladura del alma de vigas armadas esbeltas de inercia variable	43
4.1. Introducción	43
4.2. Código numérico utilizado para el análisis de vigas esbeltas de inercia variable	43
4.2.1. Geometría y condiciones de contorno del prototipo utilizado para el análisis de vigas esbeltas de inercia variable	44
4.2.2. Análisis de convergencia de malla	47
4.3. Estudio de la abolladura del panel de alma con parámetro de forma $\alpha=1$	48
4.4. Influencia del parámetro de forma sobre la tensión crítica de abolladura de paneles esbeltos de inercia variable	52
4.5. Determinación de la expresión analítica del coeficiente crítico de abolladura k , para $\alpha \geq 1$	54
4.6. Determinación de la expresión analítica del coeficiente crítico de abolladura k , para $\alpha < 1$	56
4.7. Tensión crítica de abolladura de paneles esbeltos de inercia variable	56

Capítulo 5. Resistencia postcrítica de vigas armadas esbeltas de inercia variable	57
5.1. Introducción	57
5.2. Resistencia postcrítica de vigas armadas esbeltas de inercia variable	57
5.3. Desarrollo del modelo de capacidad última en vigas armadas esbeltas de inercia variable	59
5.3.1. Definición del campo diagonal de tracciones	59
5.3.2. Determinación del ancho de banda	60
5.3.3. Determinación de las distancias de anclaje del campo diagonal en las alas	62
5.3.4. Obtención del momento plástico reducido en el ala	64
5.4. Tensiones normales en el alma cuando el panel de alma abolla	66
5.5. Criterio de plastificación utilizado	68
5.6. Determinación de los estados tensionales existentes en paneles esbeltos de alma de vigas de inercia variable	70
5.6.1. Estado tensional en el alma cuando se alcanza la inestabilidad	71
5.6.2. Cálculo de la tensión de tracción en la fase postcrítica	72
5.6.3. Ángulo de inclinación del campo diagonal de tracciones	74
5.7. Comparación de los resultados derivados del modelo de capacidad última con resultados obtenidos mediante el código numérico. Mejoras del modelo	74
5.7.1. Evaluación del comportamiento del modelo propuesto	74
5.7.2. Consideración de las tensiones principales de compresión en el modelo de capacidad última del panel de alma	77
5.7.3. Capacidad última a cortante de vigas de inercia variable de alma esbelta y análisis de resultados	80
5.8. Proceso de cálculo para la determinación de la capacidad última a cortante de vigas esbeltas de inercia variable	82
Capítulo 6. Conclusiones y futuras líneas de investigación	85
6.1. Conclusiones	85
6.2. Futuras líneas de investigación	87
Agradecimientos	89
Referencias bibliográficas	91
Anejo 1	

Capítulo 1. Introducción

1.1. Antecedentes

En construcción metálica y mixta se presentan, a menudo, situaciones de diseño de sistemas estructurales en donde los perfiles laminados en caliente (perfiles I y H) no presentan suficiente resistencia o su empleo no resulta económico debido a que los esfuerzos que actúan en una determinada zona de viga son de gran magnitud y presentan una fuerte variación a lo largo de la directriz del elemento.

Tales situaciones se dan en los casos en que se deben salvar luces importantes, resistir cargas considerables o cuando el peso propio condiciona de forma significativa el dimensionamiento de la estructura (puentes metálicos y mixtos, naves industriales). En dichos casos, el empleo de vigas armadas de inercia variable (ensambladas con chapas que en la mayoría de casos se sueldan entre sí) proporciona una solución eficiente y económica.

Con el objetivo de conseguir un elemento estructuralmente más eficiente, las vigas armadas se diseñan como piezas de inercia variable (canto variable), no prismáticas. Habitualmente, dicha inercia variable se consigue a través de un panel de alma cuya altura varía linealmente y un panel de ala que se mantiene horizontal. Dicha variación proporciona al elemento la resistencia requerida de acuerdo con la variación de las leyes de esfuerzos, y asimismo se consigue una reducción adicional del peso propio y, por lo tanto, un diseño más económico, dimensionando paneles de alma de gran esbeltez. Es precisamente este hecho, el que favorece la aparición de inestabilidades en el panel de alma para valores relativamente pequeños del esfuerzo cortante, con respecto al valor del esfuerzo cortante que agotaría plásticamente la sección del alma. El valor de la tensión tangencial para el cual ocurre éste fenómeno es la tensión tangencial crítica de abolladura.

Para el caso de chapas rectangulares sometidas a tensiones tangenciales, existen en la bibliografía expresiones analíticas que permiten calcular dicha tensión tangencial. Dichas expresiones, particularizadas para el caso de condiciones de borde simplemente apoyado, son las utilizadas para el cálculo de la tensión tangencial crítica de abolladura del panel de alma de vigas armadas prismáticas. Estudios analíticos recientes en lo que respecta la inestabilidad del panel de alma de vigas armadas prismáticas, han podido concluir, que adoptar la condición de borde simplemente apoyado en la unión ala-alma de vigas armadas, para la determinación de la tensión crítica de abolladura, es excesivamente conservador. Por el contrario, para el caso de vigas armadas de inercia variable de alma esbelta, se tiene conocimiento de escasos estudios rigurosos que permitan calcular la tensión tangencial para la cual el panel de alma abolla (Mirambell y Zárate, 2000 [1] y [3]). Dicha tensión tangencial, al igual que en vigas armadas prismáticas, es función de las condiciones de contorno del panel de alma en las uniones alma-rigidizador y alma-ala, y de la variación de la geometría del alma.

Posteriormente a la aparición del fenómeno de la abolladura, se desarrolla en el alma un mecanismo que permite resistir tensiones tangenciales más allá de dicha inestabilidad, hasta alcanzar el agotamiento. Dicho mecanismo da lugar a una cierta reserva de

resistencia del panel de alma (resistencia postcrítica), la cual depende principalmente de la esbeltez de dicho panel.

Estudios relativos a la capacidad última a cortante de vigas armadas han constatado que para vigas armadas cuyo panel de alma es muy esbelto, la reserva de resistencia postcrítica es considerable. En cambio, para paneles de alma robustos, dicha reserva tiende a disminuir. Esto ocurre del mismo modo, en vigas armadas de alma esbelta de inercia variable. Los primeros modelos de agotamiento de vigas armadas no consideraban la capacidad postcrítica del panel de alma y se basaban en la teoría clásica para la obtención de las expresiones que permitían determinar la capacidad última a cortante, definiendo el agotamiento de la viga armada cuando el material plastificaba o cuando el alma o una de las alas abollaban. No obstante, modelos recientes de capacidad última a cortante ya consideran dicha capacidad postcrítica.

Concretamente, en lo que se refiere a vigas armadas de inercia variable de alma esbelta únicamente existe, en la bibliografía, un solo estudio riguroso referente a su capacidad postcrítica (Zárate, A. V., 2002 [1] y artículo Mirambell y Zárate, 2004 [4]). Por éste motivo, se hace necesario el desarrollar un modelo de capacidad última a cortante de vigas de inercia variable, el cual deberá considerar los diversos mecanismos resistentes que se desarrollan en el panel de alma hasta alcanzar el agotamiento (abolladura del alma y capacidad postcrítica). Para el desarrollo de dicho modelo, se utilizará como base, el método del campo diagonal de tracciones (“tension field” ENV1993, parte 1-1 [5]). A su vez, el estudio realizado por Zárate, A. V. (2002) [1] acerca del comportamiento de vigas armadas de inercia variable hasta agotamiento, servirá de referencia a lo largo del presente trabajo.

La determinación de la capacidad última de las vigas armadas de inercia variable requiere de un análisis estructural profundo y de un cálculo complejo. Ello es debido a que, en este tipo de vigas se produce el acoplamiento de fenómenos estructurales de carácter no-lineal desde bajos niveles de carga hasta alcanzar el agotamiento. Estos fenómenos son los derivados de la abolladura del panel de alma y los que son consecuencia de la plastificación del material en zonas localizadas del tramo de viga de inercia variable.

Así pues, una vez presentadas las bases del presente trabajo, se exponen a continuación, los objetivos perseguidos en el mismo.

1.2. Objetivos

Este trabajo persigue alcanzar un objetivo global, que consiste en el desarrollo de un modelo de capacidad última a cortante de vigas armadas de inercia variable de alma esbelta, utilizando como base el método del campo diagonal de tracciones y apoyándose en el modelo propuesto por Zárate, A. V. (2002) [1]. Dicho modelo proporcionará dimensionamientos eficientes y seguros de vigas armadas de inercia variable de alma esbelta y deberá potenciar el empleo de esta tipología de vigas, en edificación industrial y obra pública. Para conseguir este objetivo global, deben alcanzarse los tres objetivos parciales que se exponen a continuación.

Objetivo 1: Desarrollo de un prototipo estructural que, tras ser analizado mediante potentes técnicas numéricas de cálculo, permita avanzar en el conocimiento de la respuesta tenso-deformacional de las vigas armadas de inercia variable de alma esbelta. Dicho prototipo deberá ser capaz de reproducir fielmente las condiciones de contorno y los esfuerzos a los que se ven sometidos estos elementos en la realidad. Este prototipo presenta como principal diferencia respecto al desarrollado por Mirambell y Zárate (2000) [2], que permite tener en cuenta el giro alrededor del eje Z de la sección de menor canto del panel de estudio (los ejes y las condiciones de contorno adoptadas en el prototipo quedan reflejadas en el Capítulo 4 del presente trabajo), hecho que se produce generalmente en la mayoría de situaciones reales y que el prototipo de dichos autores no permitía tener en cuenta. Se llevarán a cabo los estudios paramétricos pertinentes, con el fin de conocer mejor el comportamiento estructural de las vigas armadas de inercia variable de alma esbelta y poder valorar la influencia de los parámetros más relevantes que entran en juego en su dimensionamiento.

Objetivo 2: Estudio de la inestabilidad del panel de alma de vigas de inercia variable, el cual deberá realizarse en base a análisis numéricos mediante la utilización del prototipo estructural propuesto. De esta forma, se obtendrán expresiones analíticas prácticas para el cálculo de la tensión tangencial crítica de abolladura del panel de alma, las cuales deberán considerar las condiciones de contorno del panel de alma y su variación geométrica.

Objetivo 3: Desarrollo de un modelo de capacidad postcrítica a cortante de vigas armadas esbeltas de inercia variable. El modelo deberá considerar las propiedades geométricas y mecánicas de las vigas de inercia variable, de tal forma que éste pueda ser utilizado tanto en vigas de inercia variable como en prismáticas. Las vigas prismáticas podrán ser consideradas como un caso particular de las vigas de inercia variable de alma esbelta, con inclinación nula del ala inferior.

1.3. Contenido del documento

Los objetivos anteriormente descritos definen grosso modo, el contenido del presente trabajo. En el capítulo 1 se lleva a cabo una breve introducción al tema, poniendo de manifiesto el interés del trabajo a realizar, los objetivos que se persiguen y el contenido del documento.

En el capítulo 2 se hace un repaso del estado del conocimiento sobre la tipología de las vigas armadas de inercia variable de alma esbelta. En primer lugar, se hace referencia a las estructuras en las cuales es habitual el empleo de vigas de inercia variable, sus características geométricas y su comportamiento estructural hasta agotamiento. En segundo lugar, se estudian los modelos simplificados de cálculo y dimensionamiento de vigas armadas (prismáticas y de inercia variable).

En el capítulo 3 se presenta el código numérico utilizado en este trabajo, el cual se basa en el método de los elementos finitos. Así pues, se describe el elemento finito utilizado en la modelación del prototipo estructural, la teoría en la cual se basa la formulación de dicho elemento finito [10], la base teórica que permite considerar tanto la no-linealidad geométrica como la no-linealidad del material [11] (comportamiento elastoplástico), las

técnicas que emplea el código numérico en la resolución de sistemas no-lineales de ecuaciones y la resolución del problema de autovalores.

En el capítulo 4 se estudia la inestabilidad del alma de vigas armadas esbeltas de inercia variable, teniendo en cuenta la influencia de la geometría del panel de alma (panel trapezoidal) y la presencia de las alas, así como de los rigidizadores transversales. En base a las expresiones de la teoría clásica y de los resultados del código numérico se determinan expresiones analíticas para el cálculo de la tensión tangencial crítica de abolladura del panel de alma, en el rango elástico. Estas expresiones suponen un paso previo a la definición del modelo de capacidad última a cortante de vigas de inercia variable.

En el capítulo 5 se presenta la definición de un modelo de capacidad última a cortante de vigas de alma esbelta de inercia variable. Dicho modelo se fundamenta en la teoría del campo diagonal de tracciones y se apoya en el modelo de Zárate, A. V. (2002) [1]. La capacidad última a cortante de las vigas esbeltas de inercia variable se interpreta a través del desarrollo de tres mecanismos resistentes. El primer mecanismo hace referencia a la capacidad de la viga de inercia variable para resistir cortante hasta la abolladura del panel de alma. El segundo mecanismo atiende a la capacidad postcrítica del panel de alma, la cual se consigue gracias al desarrollo de un campo diagonal de tracciones anclado en las alas y en los rigidizadores transversales. La capacidad postcrítica del panel de alma a resistir cortante se obtiene a través de la componente vertical del campo diagonal de tracciones. El tercer mecanismo corresponde al agotamiento de la viga de inercia variable, que se alcanza al desarrollarse el mecanismo tipo marco, formado por el conjunto: panel de alma, rigidizadores transversales y paneles de alas. Esto ocurre cuando se forman cuatro rótulas plásticas en las alas como consecuencia del anclaje del campo diagonal en éstas.

Finalmente, en el capítulo 6 se exponen las conclusiones extraídas del trabajo realizado y se mencionan futuras líneas de investigación útiles para la profundización en el conocimiento de vigas armadas de inercia variable. Dichas conclusiones ponen de manifiesto que los objetivos perseguidos han sido alcanzados, y así mismo permiten validar las hipótesis propuestas para el desarrollo del modelo de capacidad última de vigas esbeltas de inercia variable.

Al final del documento, se presenta el anejo correspondiente a los resultados obtenidos de la tensión tangencial crítica de abolladura a través del análisis de inestabilidad de vigas esbeltas de inercia variable.

Capítulo 2. Estado del conocimiento

2.1. Introducción

Este capítulo pretende dar, en primer lugar, una visión general relativa al proyecto y fabricación de vigas armadas de inercia variable en la construcción, describiendo los aspectos estructurales más relevantes de las vigas armadas y prestando especial atención a todo lo relacionado con la optimización de la inercia (inercia variable) y con las dimensiones geométricas. Seguidamente, se muestran los aspectos teóricos básicos relacionados con el comportamiento de paneles metálicos esbeltos frente a la abolladura y con la obtención de la tensión tangencial crítica de abolladura.

Luego, se presentan los aspectos más importantes referentes al comportamiento postcrítico (posterior a la abolladura) de paneles de alma de vigas prismáticas sometidos a cortante. De igual manera, se abordan aquellas cuestiones más relevantes de los modelos desarrollados para el cálculo de la capacidad última de vigas armadas prismáticas sometidas a cortante. La presentación de los modelos sigue un orden cronológico, exponiendo en último lugar el método del campo diagonal de tracciones “tension field” utilizado en el Eurocódigo 3 (ENV 1993, parte 1-1 [5]). Dicho método es el más optimizado, el de mayor campo de aplicación y está basado en el modelo de Cardiff (Porter *et al.*, 1975 [12], Rockey *et al.*, 1978 [13]) que ha sido validado por varios resultados experimentales.

Para la tipología de vigas armadas esbeltas de inercia variable, se describen los estudios más destacados en cuanto a su comportamiento estructural y los modelos de capacidad última que se han desarrollado hasta la fecha. Se utilizan como bases de partida los modelos de capacidad última de vigas armadas prismáticas. Así mismo, se realiza un estudio de los mismos, tras el cual se manifiestan algunos puntos débiles en cuanto a la interpretación del comportamiento estructural de las vigas armadas de inercia variable y en cuanto a la propia formulación de dichos modelos. Todo ello lleva a la necesidad de desarrollar un modelo de dimensionamiento que permita obtener una respuesta estructural realista de las vigas armadas de inercia variable y que a su vez permita evaluar la capacidad última de las mismas.

2.2. Optimización estructural y dimensiones usuales de las vigas armadas

Para conseguir el diseño eficaz de una viga armada es necesario que su sección transversal proporcione la rigidez y resistencia requeridas por la estructura, con el menor peso propio posible. Para ello, la relación entre la resistencia y el peso propio de la viga (resistencia específica) debe ser lo mayor posible, sin olvidar que la estructura debe satisfacer las condiciones de servicio (funcionalidad, durabilidad y estética). Esto se consigue diseñando una viga armada con dos paneles de alas separados considerablemente, lográndose así una sección de máximo rendimiento geométrico. Dichos paneles de alas se encargarán de absorber principalmente los bloques de compresión y de tracción derivados de la flexión y de proporcionar la inercia suficiente para verificar los requisitos de servicio. La presencia de un panel de alma de altura considerable conectará los paneles de alas asegurando que éstos trabajen solidariamente. Así mismo, la misión principal del panel de alma será la de absorber el esfuerzo

cortante. Para conseguir un diseño de mínimo peso, se acostumbra a proyectar un alma de pequeño espesor, aunque dicho parámetro vendrá condicionado por los esfuerzos existentes en el panel de alma y por su capacidad resistente.

Para el diseño de vigas armadas metálicas se suele emplear almas muy esbeltas, con sección en clase 3 o clase 4, es decir, secciones de alma en las que no es posible adoptar una distribución uniforme plástica de tensiones. Es por este motivo, que el estudio de la respuesta estructural de vigas armadas con paneles de alma esbelta requiere cuantificar los efectos de posibles inestabilidades locales (abolladura del alma) que habitualmente aparecen en el rango elástico del material. Tras la abolladura del panel de alma, éste puede presentar una cierta reserva de resistencia postcrítica hasta alcanzar el agotamiento.

En el diseño de estructuras se intenta optimizar al máximo el sistema estructural a utilizar. En el caso de vigas armadas de acero, dicha optimización puede obtenerse variando el módulo resistente y la inercia de la sección transversal de acuerdo con la variación de la ley de momentos flectores. La variación del módulo resistente y de la inercia puede conseguirse variando longitudinalmente el ancho y/o el espesor de las alas, o bien, el espesor y/o el canto del alma.

Este trabajo lleva a cabo el análisis del comportamiento de vigas armadas de inercia variable de alma esbelta con rigidizadores transversales, consiguiéndose la variación de la inercia a través de la variación del canto de la sección transversal y manteniendo horizontal el panel de ala superior, tal como se observa en la siguiente figura.

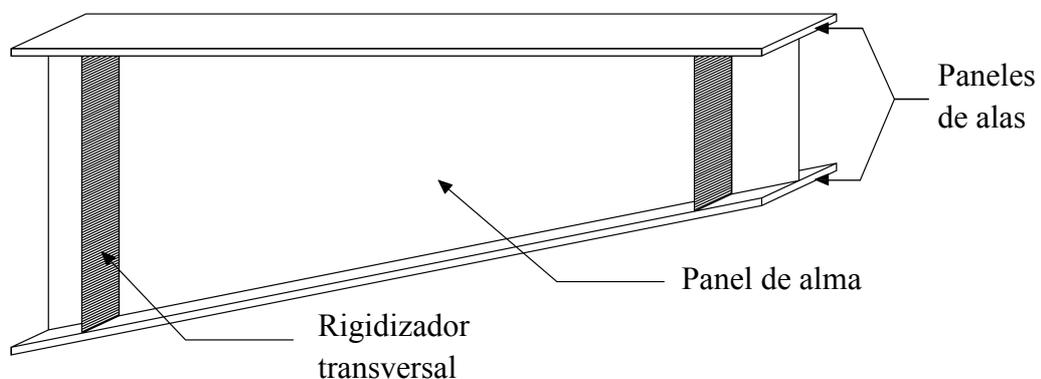


Figura 2.1. Optimización de una viga armada metálica con rigidizadores transversales (viga de inercia variable de alma esbelta).

El hecho de concebir vigas armadas de inercia variable en estructuras metálicas fue debido inicialmente a motivos económicos, dado que ello suponía un ahorro en el consumo del material. Posteriormente, otras ventajas como la disminución del peso propio del sistema estructural y la obtención de un aspecto más estético de la estructura, potenciaron su empleo.

En el caso de estructuras en donde existan ciertas zonas con una importante variación del momento flector, tal y como ocurre en las zonas próximas a apoyos intermedios de puentes continuos, el dimensionamiento de vigas armadas de inercia variable siempre

será una solución eficiente desde un punto de vista estructural. En la figura 2.2 se muestran diferentes puentes en los que se han utilizado vigas armadas de inercia variable para poder salvar luces importantes.



a)



b)



c)



d)

Figura 2.2. Vigas metálicas esbeltas de inercia variable en puentes. a) Puente Quai-Brücke, Zürich. b) Puente sobre el río Rin en Colonia-Deutz (foto: Leonhardt, 1986 [14]). c) Puente en Basel, Switzerland. d) Puente de Grenelle sobre el río Sena, París.

En la figura 2.3 se ofrece un ejemplo de la utilización de las vigas de inercia variable en estructuras de edificación. La figura 2.3.a muestra la utilización de una viga de inercia variable en la zona de mayor variación del momento flector, mientras que la figura 2.3.b pone de manifiesto la utilización de una viga de inercia variable para permitir el paso de instalaciones.



a)



b)

Figura 2.3. Vigas de inercia variable en edificación. a) Viga de inercia variable en zona de mayor variación del momento flector. b) Viga de inercia variable utilizada para permitir el paso de instalaciones.

En la figura 2.4 se muestran ejemplos cualitativos de las dimensiones usuales de vigas armadas de inercia variable en naves industriales, en donde se observa la gran esbeltez del panel de alma, así como el canto de las vigas respecto a la escala humana.



Figura 2.4. Vigas metálicas armadas de inercia variable de gran canto utilizadas en naves industriales.

Dimensiones usuales de vigas armadas

En lo referente a las dimensiones de vigas armadas, existe un amplio rango de posibilidades. La geometría y dimensiones deben proporcionar una sección transversal que permita garantizar que la resistencia y rigidez de la estructura son las adecuadas para soportar las acciones a las que se ve sometida. Por lo tanto, se deberán satisfacer las verificaciones frente a los estados límite último y de servicio. En el ámbito de la ingeniería y la arquitectura, el canto del alma es función de la luz del vano a salvar. En vigas armadas de inercia variable se pueden adoptar una geometría y dimensiones parecidas a las adoptadas en vigas armadas prismáticas. En la figura 2.5 se muestran los parámetros geométricos que definen la sección transversal de vigas armadas.

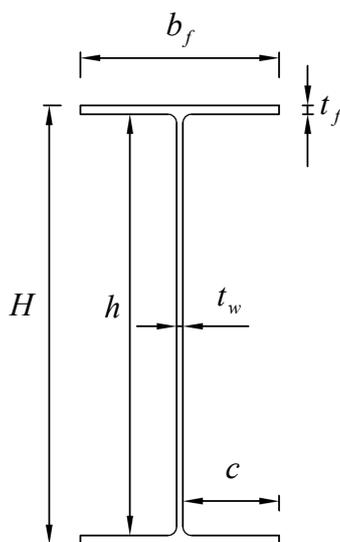


Figura 2.5. Parámetros geométricos de la sección transversal en vigas armadas de alma esbelta.

El canto total H de la viga es un parámetro relevante, ya que influye significativamente en la definición de la rigidez a flexión de la viga armada. El predimensionamiento del canto de las vigas armadas es función de la luz del vano L y del tipo de estructura. Los rangos de variación del canto H se mueven en el entorno de los siguientes valores (Maquoi 1992 [15], Rui–Wamba 1993 [16]):

Edificación	$L/25 \leq H \leq L/15$
Puentes de carretera (canto total)	
Tableros isostáticos	$L/25 \leq H \leq L/15$
Tableros continuos	$L/30 \leq H \leq L/20$

La anchura b_f del ala se define en relación a requisitos de rigidez y resistencia, siendo su rango de variación, en función del canto H , de $H/5 \leq b_f \leq H/3$.

El espesor t_f del ala se define en función de la esbeltez de la propia ala. En el caso de que el panel de ala esté solicitado a esfuerzos de tracción, el espesor t_f queda definido por criterios de resistencia. Por el contrario, para el ala solicitada a esfuerzos de compresión, la esbeltez (b_f/t_f) y por lo tanto el espesor t_f debe cumplir ciertos requisitos frente a inestabilidad. Generalmente, las alas de las vigas armadas se dimensionan de modo a que puedan trabajar como secciones plásticas, pudiendo así adoptar una distribución uniforme plástica de tensiones, ya que las alas serán las encargadas de proporcionar a la estructura las características de inercia y resistencia necesarias. De acuerdo con el Eurocódigo 3, en el caso de una sección en I, para que el ala pueda ser considerada como sección plástica (sección clase 1), debe verificarse que $c/t_f \leq 9\varepsilon$, siendo c el semiancho del ala, $\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$ y f_y el límite elástico.

El espesor t_w del alma está definido en función de la esbeltez del alma (h/t_w) y debe cumplir básicamente, los requisitos de resistencia a cortante. En la práctica general puede adoptarse en el caso de puentes una esbeltez próxima a 200, en cambio dicha esbeltez se encuentra cercana a 300 para obras de edificación industrial (Maquoi, 1992 [15]). El mínimo valor del espesor t_w se encuentra entre 6 y 8 mm para evitar problemas de corrosión.

2.3. Comportamiento estructural de vigas armadas

En vigas armadas se pueden distinguir dos fases en su comportamiento hasta agotamiento. En la primera fase tras un proceso incremental de carga se obtiene una repuesta lineal de la viga. En esta fase lineal, conocida como comportamiento precrítico, se obtiene una distribución lineal de tensiones normales en la sección transversal de la viga, cumpliendo así la hipótesis de Navier-Bernoulli. Dicho comportamiento tiene lugar para valores pequeños del momento flector (Dubas y Gehri, 1986 [17]), siempre y cuando no se supere el rango elástico del material y no existan inestabilidades locales.

Por el contrario en la segunda fase aparecen fenómenos de carácter no-lineal. Esta fase no-lineal se alcanza cuando se supera la tensión correspondiente al límite elástico o cuando aparecen inestabilidades locales en los paneles de las vigas armadas. En estos casos, la hipótesis de Navier-Bernoulli ya no se cumple, y por lo tanto las expresiones

de la resistencia de materiales no son válidas para determinar la capacidad última de la viga armada.

Con el objetivo de determinar el agotamiento de las vigas armadas, se han desarrollado diferentes modelos postcríticos que se describen más adelante y se plantean como base para el desarrollo del modelo de capacidad última de vigas de alma esbelta de inercia variable.

2.3.1. Comportamiento precrítico de las vigas armadas

En la sección transversal de la viga armada, se producen unas distribuciones de tensiones normales y tangenciales, dentro del rango lineal y elástico del material, debidas al momento flector y cortante, las cuales se muestran de forma cualitativa en la figura 2.6.

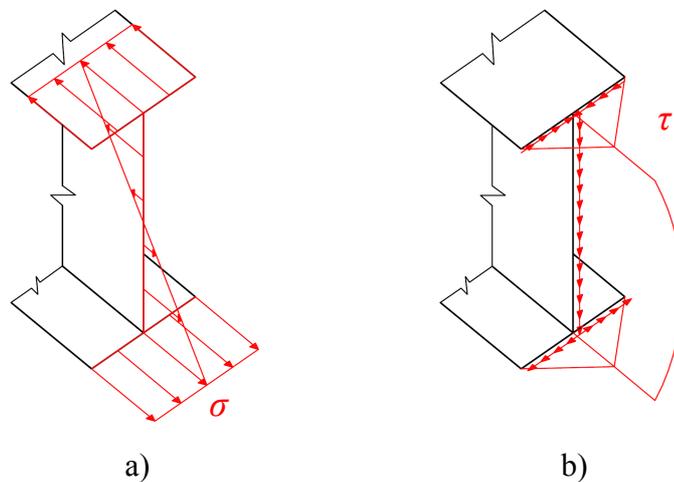


Figura 2.6. Distribución de tensiones normales y tangenciales en una viga armada de canto constante. a) Distribución de tensiones normales. b) Distribución de tensiones tangenciales.

Dado que el panel de alma se ve sometido a un estado de tensiones tangenciales en su contorno, su comportamiento estructural puede interpretarse como el de una placa esbelta solicitada por un estado de tensiones tangenciales en sus bordes. El comportamiento de esta, es lineal hasta que para un determinado valor de la tensión tangencial la placa abolla. El valor de esta tensión se conoce como tensión tangencial crítica de abolladura.

Tensión crítica de abolladura de placas esbeltas

La tensión tangencial crítica de abolladura de placas esbeltas fue inicialmente estudiada por Boobnoff y Timoshenko (Bleich, 1952 [18]). Timoshenko determinó expresiones analíticas para calcular la tensión crítica de abolladura de placas esbeltas con condiciones de contorno de borde simplemente apoyado [19]. Dichas expresiones fueron desarrolladas inicialmente para estados tensionales de flexión y de compresión extendiéndose posteriormente al caso de placas solicitadas por tensiones tangenciales.

Modelo matemático propuesto por Timoshenko. Teoría clásica

La determinación de la tensión crítica de abolladura de una placa rectangular parte del modelo matemático basado en las hipótesis de placa rectangular con condiciones de contorno de bordes simplemente apoyados y sometida a tensiones tangenciales en su plano medio (ver figura 2.7).

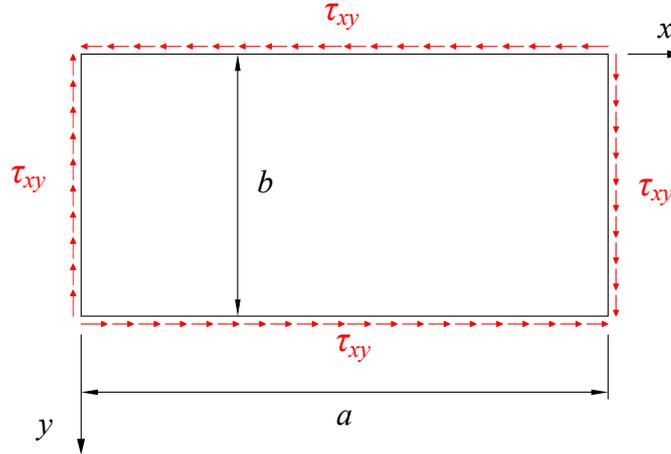


Figura 2.7. Placa rectangular sometida a un estado de tensiones tangenciales y con condiciones de bordes simplemente apoyados.

La placa está definida por tres parámetros geométricos, la longitud a de la placa (distancia entre rigidizadores), el canto b del panel del alma y su espesor t . La respuesta estructural de dicha placa puede obtenerse a través de la resolución de la ecuación diferencial de Saint Venant [2.1].

$$\frac{EI}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) + t \cdot \left(\sigma_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad [2.1]$$

Dicha ecuación fue resuelta por Timoshenko [19] y ello permitió determinar la expresión analítica para el cálculo de la tensión crítica de abolladura para placas.

$$\tau_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 k \quad [2.2]$$

En esta expresión k es el coeficiente crítico de abolladura a cortante, el cual depende del parámetro de forma de la placa α (donde $\alpha = a/b$). Dicho coeficiente viene determinado por la siguiente expresión.

$$k = \frac{9\pi^2}{32} \frac{(1+\alpha^2)^2}{\alpha^3} \quad [2.3]$$

Para varios parámetros de forma α , Timoshenko obtuvo, los correspondientes valores del coeficiente crítico de abolladura k ($\alpha < 2.5$).

Posteriormente, a través de varias investigaciones, Skan y Southwell obtuvieron el valor $k = 5.34$ para $\alpha = \infty$. Por otra parte, Seydel obtuvo el valor de $k = 9.34$ para $\alpha = 1$ y Stein y Neff obtuvieron valores de k para diversos parámetros de forma (Bleich, 1952 [18]). Según estos investigadores a continuación se muestran los resultados de estos investigadores referentes a los valores de k para diferentes relaciones de $1/\alpha$.

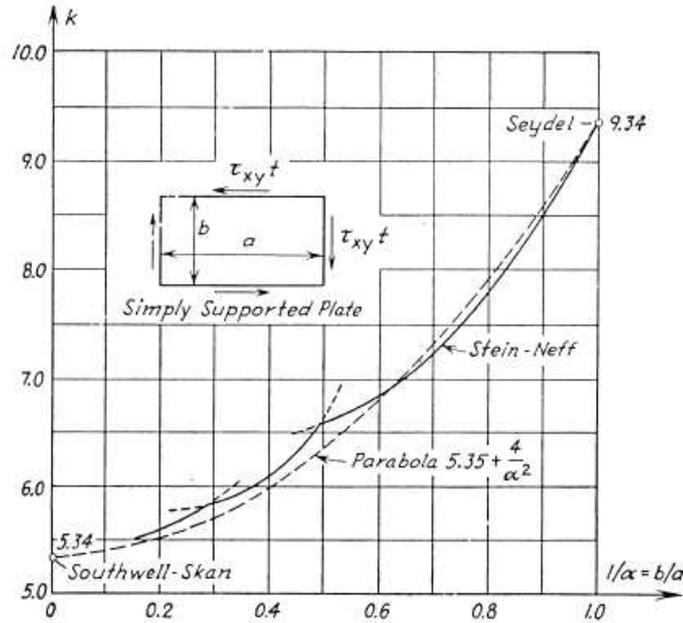


Figura 2.8. Valores del coeficiente crítico de abolladura k respecto al inverso del parámetro de forma $1/\alpha$. (Figura obtenida de Bleich, 1952 [18]).

En la figura 2.8 se observa que, la aproximación a una parábola que pase por los valores $k = 5.34$ y $k = 9.34$ para $1/\alpha = 0$ y $1/\alpha = 1$, proporciona una buena aproximación respecto a los resultados teóricos. Dicha expresión se presenta a continuación:

$$k = 5,34 + \frac{4}{\alpha^2} \quad [2.4]$$

La ecuación [2.2] puede ser extrapolada para el caso de vigas armadas, considerando a través del coeficiente k de placa, otras condiciones de contorno del panel de alma que dependerán del grado de coacción al giro que tenga el alma en la unión alma-ala y en la unión alma-rigidizador. En el caso de vigas armadas de inercia variable, la variación del canto del panel de alma es otro factor decisivo en la obtención de la tensión tangencial crítica de abolladura. Por lo tanto, en el caso de vigas armadas esbeltas de inercia variable, la tensión crítica de abolladura del alma dependerá de las características mecánicas del material, de su geometría (parámetro de forma α e inclinación del ala inferior) y de las condiciones de contorno en los bordes.

2.3.2. Comportamiento postcrítico de las vigas armadas

Como ya se ha comentado, podemos asimilar el comportamiento de los paneles de alma hasta el agotamiento, al de una placa rectangular con bordes simplemente apoyados y sometida a tensiones tangenciales en su contorno.

Puede observarse en la figura 2.9.a, la abolladura cualitativa de una placa esbelta ocasionada por un estado de tensiones tangenciales en los bordes, obtenida con el programa *Abaqus* [8]. En la figura 2.9.b, se muestra la curva tensión tangencial-desplazamiento máximo normal al plano medio de la placa con el fin de estudiar la respuesta estructural de la misma. En dicha curva, puede apreciarse la tensión tangencial crítica de abolladura a partir de la cual la placa abolla.

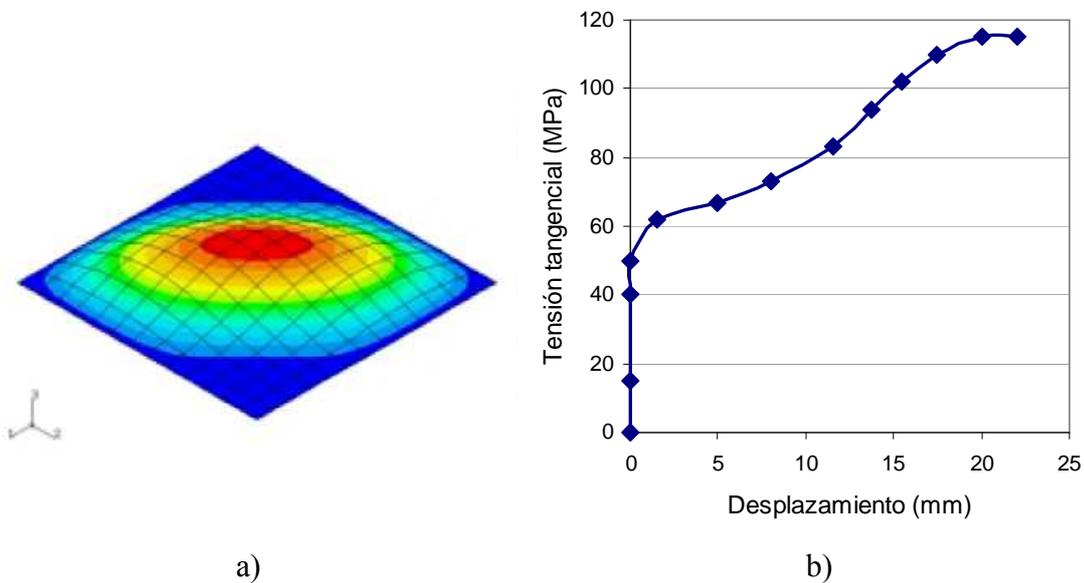


Figura 2.9. Comportamiento de una placa esbelta sometida a tensiones tangenciales. a) Deformada cualitativa de la placa cuando ha abollado. b) Curva tensión tangencial-desplazamiento máximo perpendicular al plano medio de la placa.

Tras la abolladura, se desarrolla un mecanismo que permitirá resistir tensiones tangenciales más allá de la inestabilidad, hasta alcanzar el agotamiento (resistencia postcrítica). Dicho mecanismo puede interpretarse, a través de la formación de un campo diagonal de tracciones (tensiones de membrana) que rigidiza convenientemente el panel de alma, al anclarse las tensiones de membrana en las alas y en los rigidizadores transversales. La existencia de una cierta reserva de resistencia puede observarse claramente a través de la curva de la figura 2.9.b. La esbeltez de la placa es un parámetro influyente en la magnitud de la resistencia postcrítica de la misma. Para placas esbeltas, la magnitud de la tensión crítica de abolladura es pequeña mientras que la capacidad postcrítica es significativa. Por el contrario, para placas robustas la resistencia postcrítica disminuye. El espesor del alma empleado en vigas armadas suele ser pequeño, por lo que la reserva de resistencia del panel de alma es significativa. Por lo tanto, la consideración de dicho efecto en el modelo de capacidad última frente a cortante es de suma importancia. En el caso de vigas armadas de inercia variable, la resistencia postcrítica también deberá tenerse en cuenta para su dimensionamiento y verificación.

2.4. Modelos de capacidad postcrítica de vigas prismáticas

En un comienzo, las expresiones que permitían determinar la capacidad última de vigas armadas a cortante se basaban en la teoría clásica, definiendo el agotamiento cuando el material plastificaba o cuando alguno de los elementos que constituyen la viga

abollaban. Las normativas actuales, ya contemplan la reserva de resistencia como un fenómeno asociado al propio comportamiento postcrítico de las chapas, interpretando dicha reserva de resistencia de manera coherente y no a través de la linealización del fenómeno basado en la teoría lineal clásica de abolladura de chapa.

A continuación se describen algunos de los modelos que, de manera cronológica, hacen referencia a la reserva de resistencia en el rango postcrítico de los paneles de alma de vigas armadas, solicitados principalmente a cortante.

Modelo de Rode

Rode (1916) fue el primer investigador en dar una explicación ingenieril acerca de la capacidad postcrítica de las vigas armadas, deduciendo que la reserva de resistencia ofrecida por dichas vigas era debida al desarrollo de un campo diagonal de tracciones en el alma, posterior a la abolladura (Dubas y Gehri, 1986 [17]). Rode desarrolló un modelo en el cual se definía el campo diagonal de tracciones con un ancho de cincuenta veces el espesor del panel de alma, tal como se observa en la siguiente figura.

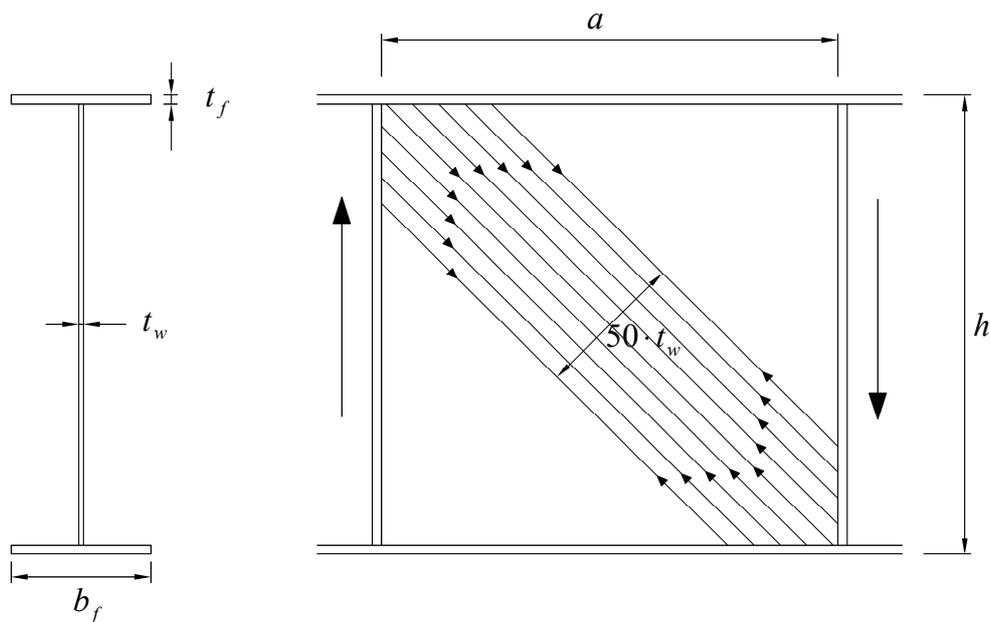


Figura 2.10. Desarrollo del campo diagonal de tracciones en el alma propuesto por Rode (1916).

Teoría del campo de tracciones incompleto

El método denominado “teoría del campo de tracciones incompleto” fue desarrollado por Schapitz (1937) con la finalidad de desarrollar una teoría que fuese útil para el cálculo de la capacidad última de vigas armadas. Dicho método fue posteriormente desarrollado por Kuhn (1956) (Maquoi, 1992 [15]).

La teoría del campo de tracciones incompleto considera que las tensiones principales de compresión y de tracción que aparecen durante la fase postcrítica del panel de alma,

dependen fundamentalmente de la deformada transversal del alma abollada. Por lo tanto, durante la fase postcrítica, la tensión principal de compresión se incrementa, es decir $\sigma_2 > \tau_{cr}$. Dicha teoría se puede interpretar de manera que una vez el panel de alma ha abollado, el círculo de Mohr que define el estado tensional de agotamiento, presenta un incremento tanto de las tensiones principales de compresión como de las de tracción. Esto puede verse en la figura 2.11.

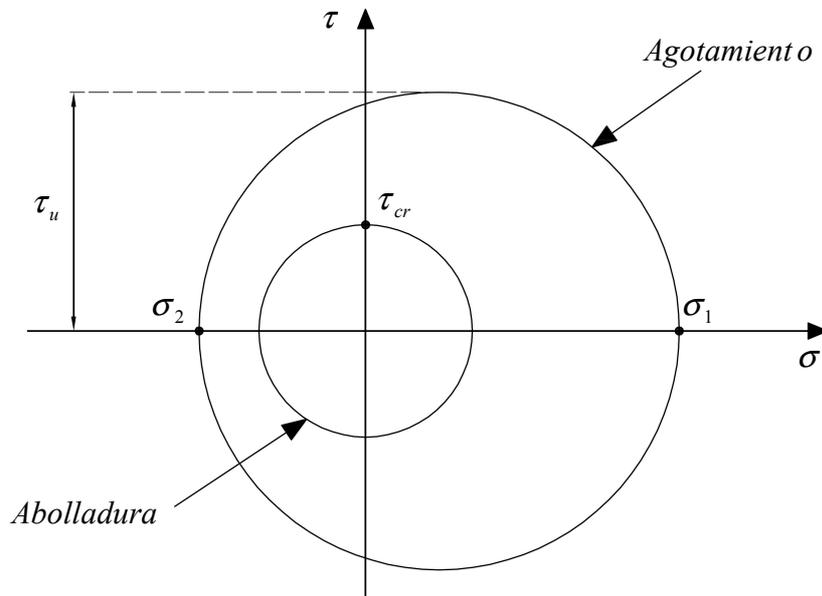


Figura 2.11. Teoría del campo de tracciones incompleto para almas esbeltas sometidas a tensiones tangenciales.

Las investigaciones llevadas a cabo por Skaloud referentes a la capacidad última de placas rectangulares, con condiciones de contorno de borde simple y de borde empotrado, permitieron obtener un modelo de agotamiento fundado en la teoría del campo de tracciones incompleto. Así mismo, las expresiones de dicho modelo no son de fácil aplicación práctica (Ivanyi y Skaloud, 1992 [20]).

Modelo de Basler

Con el objetivo de desarrollar un modelo de capacidad última a cortante de vigas armadas de alma esbelta con rigidizadores transversales, Basler (1959) [21] realizó diversos ensayos experimentales en vigas armadas. En sus estudios, dicho autor consideró que la contribución de los paneles de alas a resistir cortante era despreciable.

El modelo de Basler [21] considera que en la fase postcrítica se desarrolla un campo diagonal de tracciones, y que éste se ancla únicamente en los rigidizadores transversales (ver figura 2.12). La magnitud del campo diagonal de tracciones se determina a través del criterio de plastificación del material (criterio de von Mises). El agotamiento del panel de alma se interpreta a través de la superposición de dos estados tensionales, correspondientes a la tensión crítica de abolladura y al desarrollo del campo diagonal de tracciones.

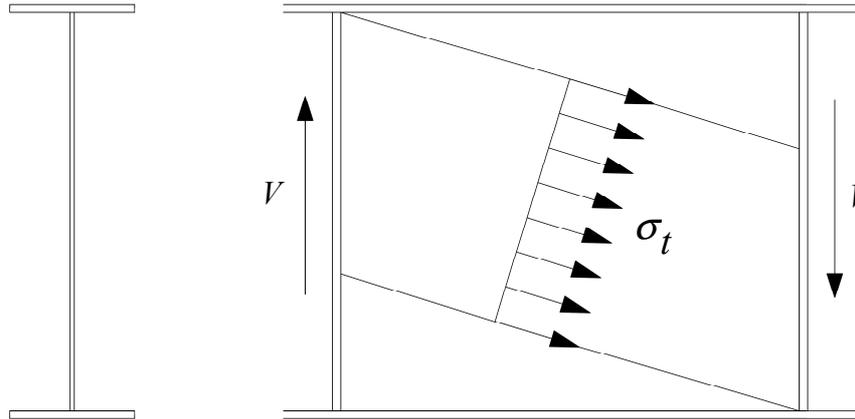


Figura 2.12. Modelo de capacidad última a cortante de vigas armadas propuesto por Basler (1959) [21].

Modelo de Chern y Ostapenko

Posteriormente al modelo de Basler [21], Chern y Ostapenko (1969) [22] desarrollaron un modelo de capacidad última a cortante de vigas armadas, basándose en los resultados obtenidos de ensayos experimentales de vigas armadas. Según estos autores, el modelo desarrollado presenta mejores resultados que los obtenidos con el modelo de Basler.

El modelo de Chern y Ostapenko [22] considera que tras la abolladura del alma, se desarrolla un campo diagonal de tracciones, el cual está formado por tres franjas, una central y dos laterales. La magnitud de las franjas laterales corresponde a un porcentaje ρ de la franja central, siendo ésta determinada de acuerdo con el modelo propuesto por Basler [21]. Así mismo, Chern y Ostapenko también consideran el desarrollo de un mecanismo resistente que responde a un mecanismo tipo marco, formado por los paneles de alas, los rigidizadores transversales y el campo diagonal de tracciones. El desarrollo de rótulas plásticas en la unión del panel de ala con el rigidizador, define el agotamiento de dicho mecanismo tipo marco (ver figura 2.13).

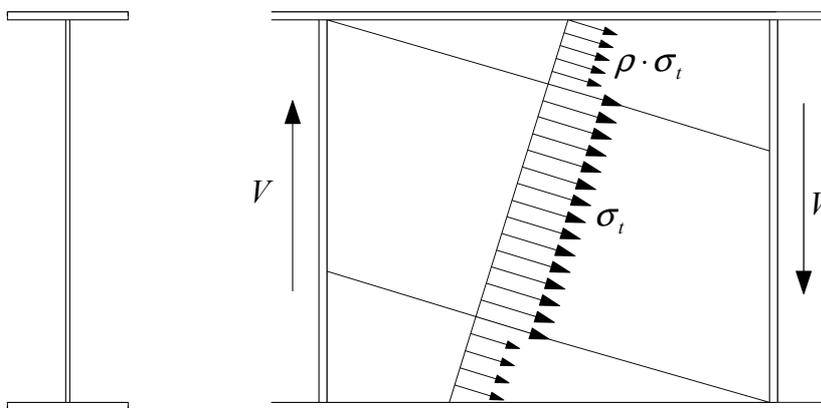


Figura 2.13. Modelo propuesto por Chern y Ostapenko (1969) [22] para el cálculo de la capacidad última a cortante de vigas armadas.

Estudios basados en el modelo de Chern y Ostapenko [22], han puesto de manifiesto que dicho modelo solo proporciona buenos resultados para un determinado rango de variables geométricas de vigas armadas, por lo que su empleo está limitado (Dubas y Gehri, 1986 [17]).

Modelo de Cardiff

Con el objetivo de desarrollar un modelo de capacidad última que pudiera ser utilizado para las diferentes geometrías de vigas armadas obteniendo resultados satisfactorios, un grupo de investigadores realizaron ensayos experimentales en vigas armadas, con el propósito de estudiar el comportamiento estructural de dichos elementos. Los resultados de dichas investigaciones permitieron confirmar la importante influencia que ejerce la rigidez a flexión de los paneles de alas en la capacidad última de vigas armadas. Por lo tanto se definió un modelo de capacidad última llamado modelo de Cardiff (Porter *et al.*, 1975 [12], Rockey *et al.*, 1978 [13]), el cual tenía en cuenta dicha rigidez a flexión de las alas y presentaba una buena aproximación a los ensayos experimentales (ver figura 2.14).

El modelo de Cardiff [12] y [13] considera el desarrollo de un campo diagonal de tracciones que aparece en la fase postcrítica, y que se ancla convenientemente en las alas y en los rigidizadores, proporcionando así una reserva de resistencia a la estructura. La contribución de las alas para resistir cortante, se pone de manifiesto al considerar que la distancia de anclaje del campo diagonal en las alas, depende principalmente de la rigidez de las mismas. El modelo de Cardiff define el agotamiento a través de la formación de cuatro rótulas plásticas en las alas, debido al anclaje del campo diagonal de tracciones (ver figura 2.14). Dicho modelo fue utilizado como base en normativas de acero de gran relevancia, tales como el Eurocódigo 3 (ENV 1993, Parte 1-1 [5]).

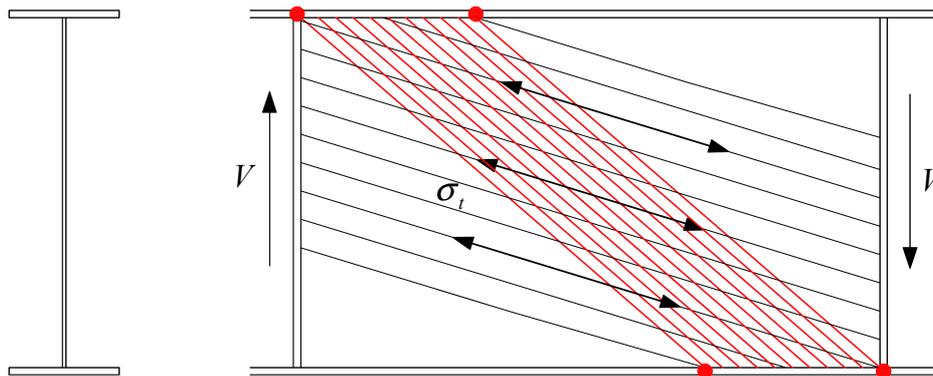


Figura 2.14. Modelo de Cardiff para el cálculo de la capacidad última a cortante de vigas armadas (Porter *et al.*, 1975 [12], Rockey *et al.*, 1978 [13]).

El modelo de Cardiff proporciona muy buenos resultados en cuanto a la determinación de la capacidad última de vigas armadas prismáticas, aunque presenta algunas limitaciones. En primer lugar, su empleo está limitado a valores del parámetro de forma α comprendidos entre 1 y 3. En segundo lugar, la resistencia precrítica (hasta alcanzar la abolladura), no tiene en cuenta la posible coacción al giro del alma en su unión con las alas y los rigidizadores transversales.

Método del campo diagonal de tracciones (tension field method)

El método del campo diagonal de tracciones, es el modelo de capacidad última adoptado en el Eurocódigo 3 (ENV 1993, Parte 1-1 [5]). Dicho método está basado en el modelo de Cardiff y su empleo está limitado a valores del parámetro de forma α superiores a 1 ($\alpha = a/d$). Así mismo, para valores del parámetro de forma α superiores a 3, el “tension field method” [5] proporciona resultados demasiado conservadores, por lo que no se recomienda su uso en de dicho rango de valores.

Tal y como su propio nombre indica, el método del campo diagonal de tracciones considera el desarrollo de un campo diagonal de tracciones que aparece en la fase postcrítica, y que se ancla en las alas y en los rigidizadores, proporcionando una reserva de resistencia a la viga (ver figura 2.15).

El método del campo diagonal de tracciones permite obtener la resistencia última a cortante $V_{bb,Rd}$, mediante la siguiente formulación:

$$V_{bb,Rd} = [(d \cdot t_w \cdot \tau_{bb}) + 0,9 \cdot (g \cdot t_w \cdot \sigma_{bb} \cdot \text{sen}\phi)] / \gamma_{M1} \quad [2.5]$$

donde σ_{bb} es la tensión del campo diagonal de tracciones (según criterio de Von Mises), que se obtiene como:

$$\sigma_{bb} = [f_{y,w}^2 - 3\tau_{bb}^2 + \psi^2]^{0,5} - \psi \quad [2.6]$$

siendo
$$\psi = 1,5 \cdot \tau_{bb} \cdot \text{sen}2\phi \quad [2.7]$$

donde ϕ es el ángulo de inclinación del campo diagonal de tracciones

g es el ancho del campo diagonal de tracciones

τ_{bb} es la tensión crítica de abolladura

La tensión crítica de abolladura τ_{bb} puede obtenerse como sigue:

Cuando $\bar{\lambda}_w \leq 0,8$,
$$\tau_{bb} = f_{y,w} / \sqrt{3}$$

Cuando $0,8 < \bar{\lambda}_w < 1,25$,
$$\tau_{bb} = [1 - 0,8 \cdot (\bar{\lambda}_w - 0,8)] \cdot (f_{y,w} / \sqrt{3}) \quad [2.8]$$

Cuando $\bar{\lambda}_w \geq 1,25$,
$$\tau_{bb} = [1 / \bar{\lambda}_w^2] \cdot (f_{y,w} / \sqrt{3})$$

$$\bar{\lambda}_w = [(f_{y,w} / \sqrt{3}) / \tau_{cr}]^{0,5} = \frac{d/t_w}{37,4 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{k_\tau}} \quad [2.9]$$

donde $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_{y,w}}}$, y k_τ es el coeficiente de abolladura que se determina como sigue:

$$\text{Para paneles con parámetro de forma } \alpha = a/d < 1, \quad k_\tau = 4 + \frac{5,34}{(a/d)^2} \quad [2.10]$$

$$\text{Para paneles con parámetro de forma } \alpha = a/d \geq 1, \quad k_\tau = 5,34 + \frac{4}{(a/d)^2} \quad [2.11]$$

El valor del ancho del “tension field” viene dado como:

$$g = d \cdot \cos \phi - (a - s_c - s_t) \cdot \text{sen} \phi \quad [2.12]$$

Donde s_c y s_t son las longitudes de anclaje del campo diagonal en ambas alas (compresión y tracción, respectivamente), y se obtienen como:

$$s = \frac{2}{\text{sen} \phi} \cdot \left[\frac{M_{Nf,Rk}}{t_w \cdot \sigma_{bb}} \right]^{0,5}, \quad s \leq a \quad [2.13]$$

donde $M_{Nf,Rk}$ es el momento plástico reducido en el ala que se determina como:

$$M_{Nf,Rk} = 0,25 \cdot b \cdot t_f^2 \cdot f_{y,f} \cdot \left[1 - \left[N_{f,Sd} / (b \cdot t_f \cdot f_{y,f} / \gamma_{M0}) \right]^2 \right] \quad [2.14]$$

donde b y t_f son el ancho y el espesor de ala respectivamente.

Así pues se itera en el modelo del campo diagonal respecto al ángulo ϕ hasta obtener un cortante máximo $V_{bb,Rd}$. Toda esta formulación ha sido presentada, ya que en el próximo capítulo se llevará a cabo una comparación entre los resultados del “tension field method” [5], los resultados de los ensayos experimentales de Lee y Yoo (1999) [23] y los resultados del código numérico, para poder validar éstos últimos.

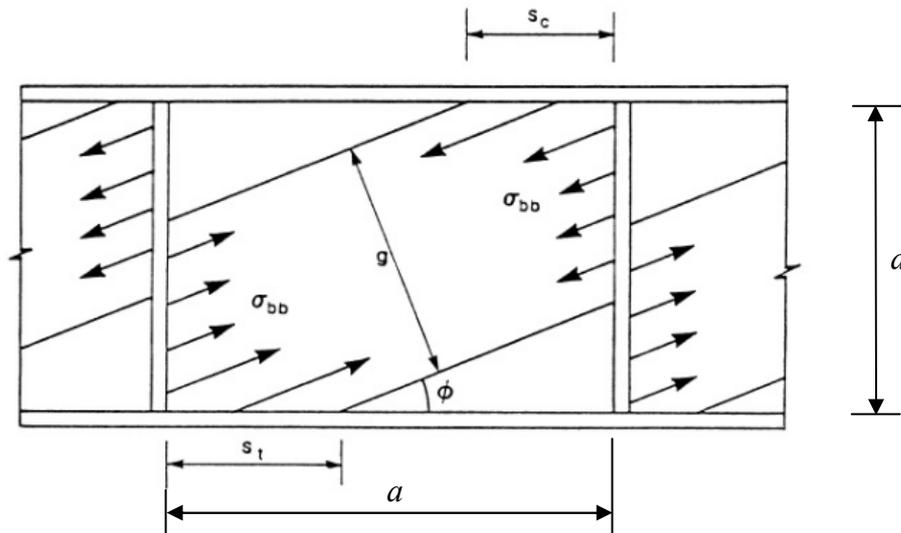


Figura 2.15. Método del campo diagonal de tracciones para el cálculo de la capacidad última a cortante de vigas armadas (Figura obtenida de ENV 1993-1-1: 1992 [5]).

Cabe destacar que, el método del campo diagonal de tracciones utilizado en el Eurocódigo 3 (ENV 1993, Parte 1-1 [5]), y basado en el modelo de Cardiff, ha sido desplazado por el método del campo girado de tensiones desarrollado por Höglund

(1972, 1997) [7], presente en el Eurocódigo 3, Parte 1-5 [6]. Sin embargo, como ya se ha comentado, el presente trabajo se basa en el método del campo diagonal de tracciones [5] ya que es el más optimizado, el de mayor campo de aplicación y además es mucho más formativo e intuitivo que el del campo girado de tensiones [7]; su único inconveniente es que su aplicación práctica no es tan directa como la del modelo del campo girado de tensiones.

2.5. Modelos de capacidad postcrítica de vigas armadas esbeltas de inercia variable

Se exponen a continuación algunos modelos de capacidad última, para la tipología de vigas armadas de inercia variable, basados en los modelos anteriormente expuestos para vigas prismáticas. Cabe destacar que no se tiene conocimiento hasta la fecha de la existencia de muchos y rigurosos trabajos de investigación sobre el comportamiento estructural de vigas armadas de inercia variable. El modelo de capacidad última que se desarrollará en el presente trabajo, se basará en el modelo del campo diagonal de tracciones, método adoptado en el Eurocódigo 3 (ENV 1993, Parte 1-1 [5]), ya que es el modelo que mejor representa el comportamiento real de las vigas armadas esbeltas. Así mismo, el modelo de capacidad última de vigas armadas de inercia variable definido por Zárate, A. V. (2002) [1] será de gran ayuda a lo largo del trabajo.

Modelo de Falby y Lee

Falby y Lee (1976) [25] proponen un modelo de capacidad última de vigas de inercia variable, basado en la teoría desarrollada por Basler [21] para el caso de vigas prismáticas. Los estudios llevados a cabo por Falby y Lee [25], concluyeron que para ángulos de inclinación del ala inferior pequeños, los modelos de capacidad última de vigas prismáticas podían utilizarse para el caso de vigas de inercia variable. Por el contrario, para ángulos de inclinación del ala inferior considerables, Falby y Lee desarrollan un modelo simplificado de cálculo [25].

Dicho modelo define la tensión crítica de abolladura del alma a través de las expresiones de teoría clásica de chapas rectangulares, utilizando como valor del canto, el promedio entre los cantos mayor y menor de la viga. Así mismo, se considera que la capacidad postcrítica del panel de alma se debe al desarrollo de un campo diagonal de tracciones, cuya distribución se muestra en la figura 2.16.

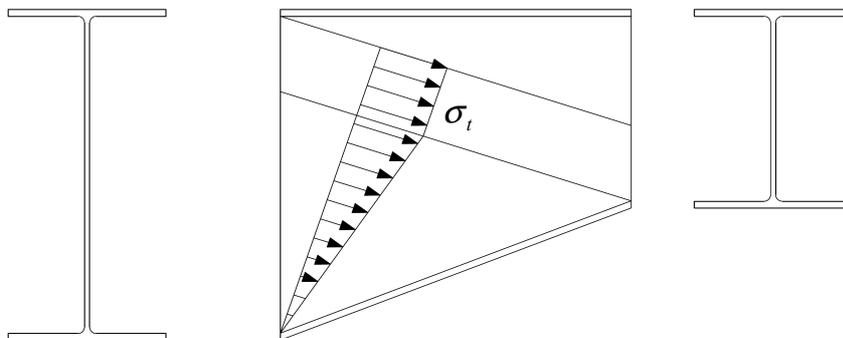


Figura 2.16. Distribución del campo diagonal de tracciones en el panel de alma propuesto por Falby y Lee (1976) [25].

El modelo de Falby y Lee [25], desprecia al igual que el modelo de Basler [21], la contribución de las alas para resistir cortante. Así mismo, se desprecia la componente vertical del axil que discurre por el ala inclinada. Falby y Lee constatan que la distribución del campo diagonal de tracciones en el alma es conservadora, motivo por el cual proponen realizar un estudio sobre la distribución de tensiones en el alma durante la fase postcrítica, con el objetivo de obtener un modelo de capacidad última más afinado.

Modelo de Takeda y Mikami

El modelo de capacidad última de vigas de inercia variable propuesto por Takeda y Mikami (1987) [26], está basado en la teoría propuesta por Chern y Ostapenko (1969) [22] para vigas prismáticas. A pesar de ello, Takeda y Mikami desprecian la contribución de las alas para resistir cortante. Estos autores definen la capacidad última como la superposición de dos estados tensionales correspondientes a las fases precrítica y postcrítica. A diferencia del modelo anterior, la tensión crítica de abolladura se determina a partir de una formulación obtenida del estudio de inestabilidad de una placa trapezoidal mediante teoría de elementos finitos.

Dicho modelo considera que el campo diagonal de tracciones está integrado por una franja central de ancho s , anclada en los rigidizadores verticales, y una segunda franja inferior, cuya magnitud es un porcentaje ρ de la magnitud de la franja central (ver figura 2.17). El desarrollo de esta última franja está limitado en el canto mayor a la cota horizontal definida por el canto menor.

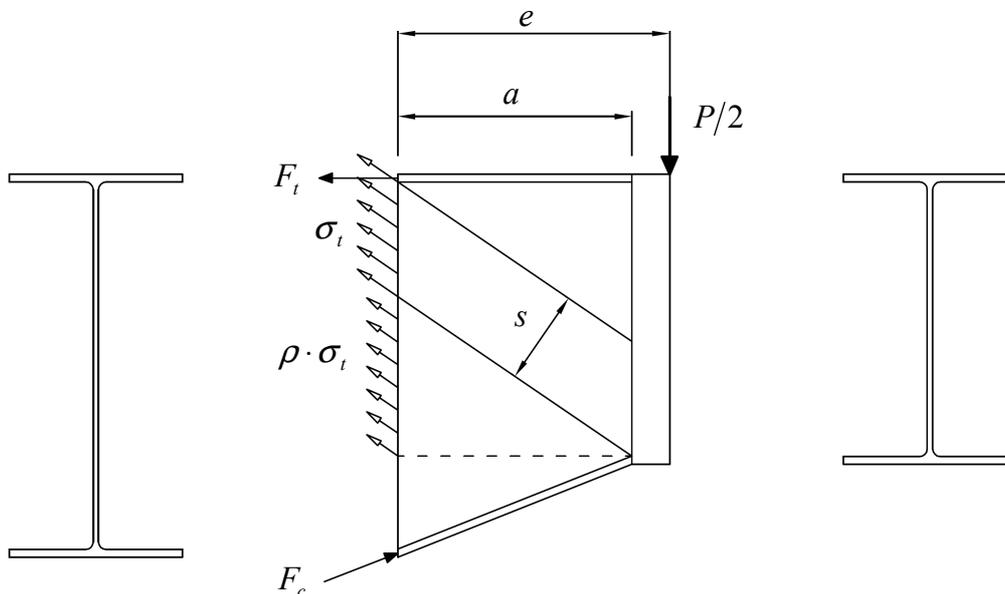


Figura 2.17. Modelo de capacidad última de vigas de inercia variable propuesto por Takeda y Mikami (1987) [26].

El anterior estudio de los modelos más destacados de capacidad última de vigas de inercia variable, ha permitido destacar la existencia de algunos puntos débiles en cuanto a la interpretación del comportamiento estructural de dichos elementos y en cuanto a la propia formulación de dichos modelos. Dichos puntos débiles se pueden resumir en:

- Para la determinación de la tensión crítica de abolladura, se utilizan condiciones de contorno del panel de alma correspondientes a bordes simplemente apoyados, despreciando así la coacción al giro que introducen los paneles de alas. Esto ocurre para todos los modelos comentados anteriormente.
- El modelo de Falby y Lee [25] no permite considerar la existencia de un ala inclinada y consecuentemente no permite determinar la tensión crítica de abolladura en paneles de canto variable.
- No se considera el anclaje del campo diagonal en alas y en consecuencia se desprecia la contribución de las alas para resistir cortante.
- Los modelos de Falby y Lee [25] y de Takeda y Mikami [26] no tienen en cuenta el incremento de las tensiones principales de compresión que tiene lugar durante la fase postcrítica.
- El modelo de Falby y Lee no considera el efecto que provoca la presencia de un momento flector en la capacidad última a cortante. Por el contrario, el modelo de Takeda y Mikami sí tiene en cuenta dicho efecto, a través de la componente vertical del axil que discurre por el ala inclinada.

Se confirma pues la necesidad de desarrollar un modelo de capacidad última de vigas armadas de inercia variable, que permita tener en cuenta todos los efectos comentados, de modo a obtener una respuesta estructural que sea lo más realista posible. La realización de dicho modelo, se basará en el método del campo diagonal de tracciones del Eurocódigo 3 [5], y se apoyará principalmente en el estudio de Zárate, A. V. (2002) [1], el cual ya tuvo en consideración muchos de los efectos despreciados por los anteriores investigadores.

Capítulo 3. Análisis numérico mediante elementos finitos

3.1. Introducción

El estudio de la capacidad última de vigas armadas de inercia variable resulta complejo debido a que en este tipo de vigas se produce el acoplamiento de fenómenos estructurales desde niveles bajos de carga hasta alcanzar el agotamiento. Entre estos fenómenos se encuentran la abolladura de los paneles (derivados de la no-linealidad geométrica) y la plastificación del panel de alma y desarrollo de rótulas plásticas en las alas (derivados de la no-linealidad del material) [27].

Para poder estudiar con realismo el comportamiento de vigas armadas esbeltas de inercia variable hasta su agotamiento, se llevará a cabo un análisis mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) [11] que se presenta como una potente herramienta con una gran versatilidad, precisión y eficiencia, permitiendo la resolución de problemas no-lineales como es el caso que nos pertenece.

En fenómenos estructurales complejos en los que es imprescindible el estudio mediante ensayos experimentales, la utilización de códigos numéricos basados en la teoría de Elementos Finitos permite la realización de innumerables modelizaciones con un coste muy inferior al de los ensayos reales, lo que permite la obtención de mucha más información y conclusiones más exactas.

El estudio del comportamiento hasta agotamiento de vigas armadas esbeltas de inercia variable es claramente una de las situaciones en las que el empleo del análisis mediante elementos finitos puede ser de gran utilidad. El elevado número de parámetros que se ven involucrados en el fenómeno, hace que la experimentación sea absolutamente necesaria.

Por ello, en el presente trabajo se procederá a la definición de varios prototipos que permitan tener en cuenta la influencia de diferentes variables geométricas en el comportamiento de vigas armadas esbeltas de inercia variable, a través del estudio paramétrico pertinente.

Las vigas a estudiar se analizarán con el código numérico de elementos finitos *Abaqus* [8]. El programa *Abaqus* ha sido utilizado en numerosas ocasiones para la modelación de problemas no-lineales en ingeniería estructural, obteniendo resultados óptimos [11].

En este capítulo se presenta el código numérico *Abaqus* [9] y se comentan las diferentes consideraciones a tener en cuenta en el análisis con el fin de lograr el mayor realismo posible en el comportamiento de las vigas armadas esbeltas de inercia variable. Así mismo, se presenta, al final de este capítulo, la validación de los resultados obtenidos del código numérico, a través de su comparación con resultados experimentales sobre piezas prismáticas (Lee y Yoo, 1999 [23]) y con resultados obtenidos del Eurocódigo 3 (ENV 1993, Parte 1-1 [5]).

3.2. Fases del análisis numérico mediante *Abaqus*

Existen dos fases claramente diferenciadas en el análisis numérico, que son el pre-proceso y el post-proceso. En primer lugar, se lleva a cabo el pre-proceso, que consiste en la introducción de los datos del problema a analizar. En esta fase, debemos definir la geometría del problema, la malla, el material, las condiciones de contorno y las cargas. Una vez acabada la fase de pre-proceso, se ejecuta el proceso de cálculo tras el cual llegamos a la fase del post-proceso, donde se obtienen los extensos resultados del análisis para su correcta interpretación.

A continuación, se muestran diferentes imágenes obtenidas del pre-proceso y post-proceso mediante *Abaqus*. En la figura 3.2 pueden apreciarse los mecanismos resistentes que se desarrollan en el panel de alma hasta alcanzar el agotamiento. La figura 3.2.a) muestra la inestabilidad del alma (resistencia precrítica), mientras que la figura 3.2.b) pone de manifiesto el desarrollo de un campo diagonal de tracciones en dirección de la diagonal corta del panel de alma, así como el desarrollo de un mecanismo tipo marco y la formación de rótulas plásticas en las alas al alcanzar el agotamiento de la viga (resistencia postcrítica).

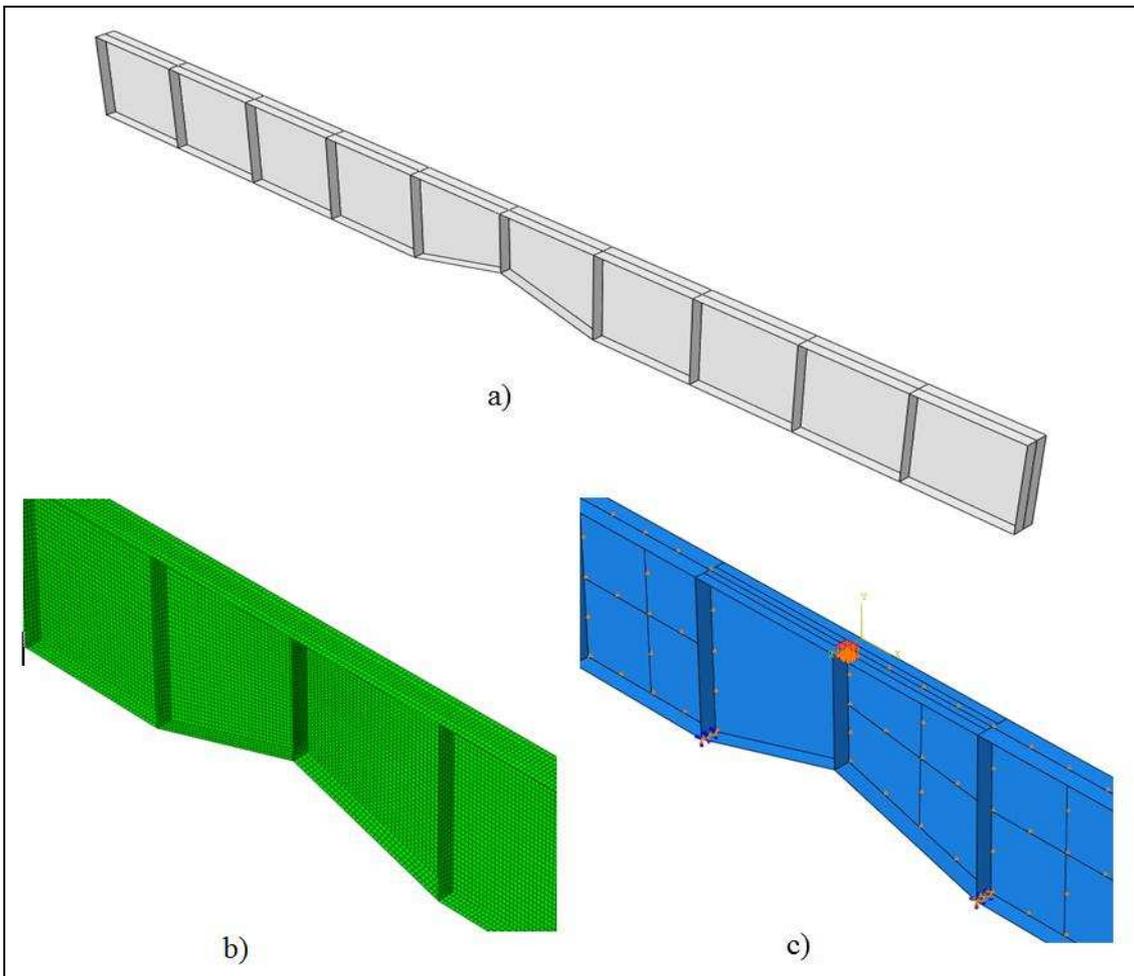


Figura 3.1. Imágenes obtenidas durante la fase del pre-proceso mediante *Abaqus*.
 a) Geometría de una de las vigas de estudio. b) Malla de elementos finitos
 c) Condiciones de contorno y cargas utilizadas en el prototipo.

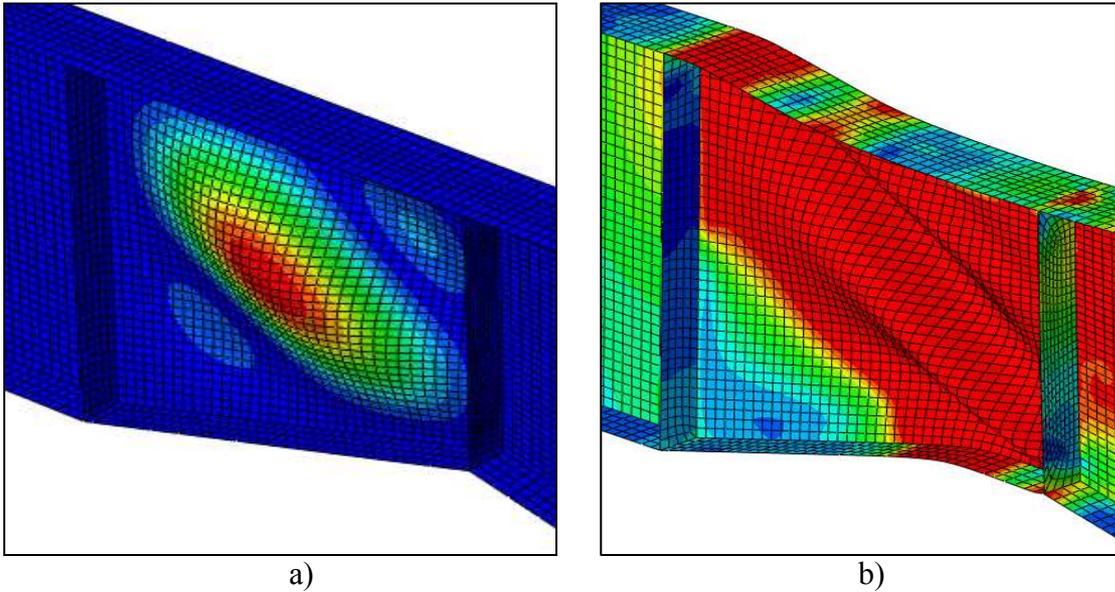


Figura 3.2. Imágenes obtenidas durante la fase del post-proceso mediante *Abaqus*.
 a) Desplazamientos normales al plano medio del alma (abolladura del panel de alma).
 b) Tensiones de Von Mises (agotamiento de la viga).

La discretización de la geometría del prototipo se ha llevado a cabo mediante elementos finitos tipo lámina de 4 nodos, 5 grados de libertad por nodo, y una integración reducida (elemento lineal S4R5) asumiendo la teoría de placas delgadas de Kirchoff.

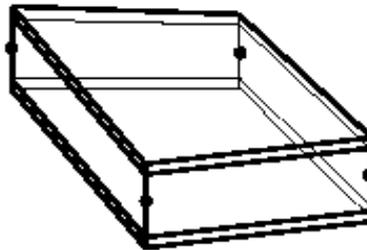


Figura 3.3. Elemento lineal de lámina plana (4 nodos).

Las funciones de forma de estos elementos se basan en interpolaciones polinómicas de Lagrange en dos dimensiones. Esto permite obtener la función de forma de un nodo cualquiera, como producto de dos polinomios de Lagrange unidimensionales en cada una de las dos coordenadas ξ y η correspondientes a dicho nodo.

El elemento rectangular Lagrangiano de cuatro nodos es el más sencillo de la familia Lagrangiana. La función de forma del nodo i de dicho elemento es:

$$N_i(\xi, \eta) = l_1^i(\xi)l_1^i(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad [3.1]$$

donde, $l_1^i(\xi)$ es el polinomio de Lagrange de grado 1 en dirección ξ del nodo i y $l_1^i(\eta)$ el de grado 1 en dirección η . ξ_i y η_i toman los valores de la tabla de la figura 3.4.

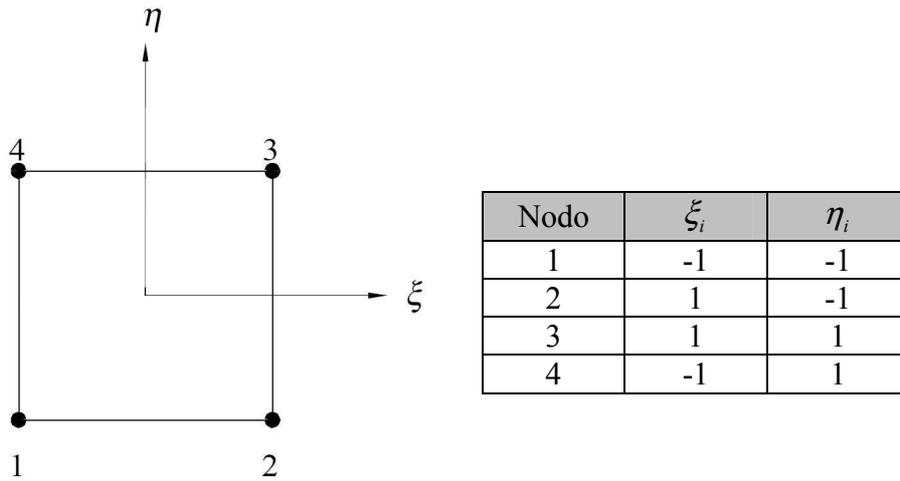


Figura 3.4. Elemento rectangular Lagrangiano de 4 nodos.

3.3. Teoría de láminas planas de Kirchhoff

El comportamiento estructural de vigas armadas metálicas puede interpretarse a través de la teoría de láminas planas de Kirchhoff (Oñate, 1995 [10]) debido a la gran esbeltez del panel de alma de las vigas a analizar. Dicha teoría se basa en las siguientes hipótesis:

1- Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical $\rightarrow w'(x', y', z') = w'_0(x', y')$

2- La tensión normal σ'_z es despreciable.

3- Los puntos sobre rectas normales al plano medio de la deformación, permanecen sobre rectas también ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación. En esta hipótesis, se está despreciando la deformación por cortante.

$$\rightarrow \theta_{x'} = \frac{\partial w'}{\partial x'}, \quad \theta_{y'} = \frac{\partial w'}{\partial y'}$$

Campo de desplazamientos

Se escoge un espacio de ejes globales xyz , en el cual queda definido el elemento de lámina plana rectangular (ver figura 3.5). El plano medio de dicho elemento define un sistema de ejes locales $x'y'z'$, donde z' es la normal al plano medio y $x'y'$ son dos direcciones ortogonales contenidas en él. Vamos a suponer que x' y y' coinciden con los dos lados del plano medio del elemento.

A continuación estudiaremos los desplazamientos del elemento referidos al sistema de ejes locales $x'y'z'$. Los desplazamientos de un punto cualquiera A, situado sobre la normal OA, siendo O el punto de corte de la normal con el plano medio (ver figura 3.6), se pueden expresar de la siguiente forma:

Utilizando la 3ª hipótesis de Kirchhoff se deduce que:

$$\theta_{x'} = \frac{\partial w'}{\partial x'} \quad \text{y} \quad \theta_{y'} = \frac{\partial w'}{\partial y'} \quad [3.3]$$

Por consiguiente, el campo de desplazamientos [3.2] resulta:

$$\begin{aligned} u' &= u'_0 - z' \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ v' &= v'_0 - z' \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ w' &= w'_0 \end{aligned} \quad [3.4]$$

Campo de deformaciones

De acuerdo con la 2ª hipótesis de Kirchhoff (σ_z despreciable), la deformación ε_z no intervendrá en la expresión del trabajo de la lámina, por lo que podemos prescindir de ella. Por otro lado, es fácil comprobar que las deformaciones transversales $\gamma_{xz'}$ y $\gamma_{yz'}$ son nulas. Por lo tanto, el vector de deformaciones de la elasticidad tridimensional se define en ejes locales como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'_0}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'_0}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'_0}{\partial y'} + \frac{\partial v'_0}{\partial x'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z' \frac{\partial^2 w'_0}{\partial x'^2} \\ -z' \frac{\partial^2 w'_0}{\partial y'^2} \\ -z' \left(2 \frac{\partial^2 w'_0}{\partial x' \partial y'} \right) \end{Bmatrix} \quad [3.5]$$

El vector de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}'$ puede escribirse de forma más compacta, de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m + z' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_f \quad [3.6]$$

donde,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m &= \left[\frac{\partial u'_0}{\partial x'}, \frac{\partial v'_0}{\partial y'}, \left(\frac{\partial u'_0}{\partial y'} + \frac{\partial v'_0}{\partial x'} \right) \right]^T \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_f &= \left[-\frac{\partial^2 w'_0}{\partial x'^2}, -z' \frac{\partial^2 w'_0}{\partial y'^2}, -2 \frac{\partial^2 w'_0}{\partial x' \partial y'} \right]^T \end{aligned} \quad [3.7]$$

son los vectores de deformaciones generalizadas de membrana y flexión respectivamente.

Campo de tensiones

Trabajando en ejes locales y teniendo en cuenta que la tensión normal σ_z es nula se puede modificar la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional, llegando a la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}' \boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{D}'_f (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m + z' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_f) = \boldsymbol{\sigma}'_f \quad [3.8]$$

donde, para material isótropo la matriz constitutiva \mathbf{D}'_f tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{D}'_f = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E & \nu \cdot E & 0 \\ \nu \cdot E & E & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)E}{2} \end{bmatrix} \quad [3.9]$$

Esfuerzos

El vector de esfuerzos locales en un punto del plano medio se define como:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_m \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ N_{y'} \\ N_{x'y'} \\ M_{x'} \\ M_{y'} \\ M_{x'y'} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ z' \cdot \sigma_{x'} \\ z' \cdot \sigma_{y'} \\ z' \cdot \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} dz' = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}'_f \\ z' \boldsymbol{\sigma}'_f \end{Bmatrix} dz' \quad [3.10]$$

donde, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_m$ y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_f$ son los vectores de esfuerzos locales de membrana y flexión, respectivamente, y t es el espesor. El vector de esfuerzos de membrana lo forman los tres axiles $N_{x'}$, $N_{y'}$ y $N_{x'y'}$ contenidos en el plano medio, mientras que el vector de esfuerzos de flexión está formado por tres momentos $M_{x'}$, $M_{y'}$ y $M_{x'y'}$ (ver figura 3.7)

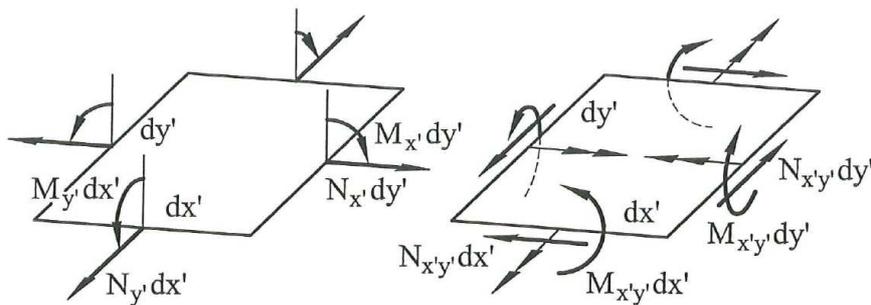


Figura 3.7. Esfuerzos en un elemento diferencial de lámina plana.

La relación entre esfuerzos y deformaciones generalizadas locales se obtiene combinando [3.8] y [3.10]:

$$\hat{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}'_m \\ \hat{\sigma}'_f \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma'_f \\ z' \sigma'_f \end{Bmatrix} dz' = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma'_f \\ z' \sigma'_f \end{Bmatrix} dz' = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} D'_f (\hat{\epsilon}'_m + z' \hat{\epsilon}'_f) \\ z' D'_f (\hat{\epsilon}'_m + z' \hat{\epsilon}'_f) \end{Bmatrix} dz' = \hat{D}' \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon}'_m \\ \hat{\epsilon}'_f \end{Bmatrix} \quad [3.11]$$

donde, \hat{D}' es la matriz constitutiva que relaciona el vector de esfuerzos $\hat{\sigma}'$ y el de deformaciones generalizadas $\hat{\epsilon}'$ en ejes locales. De [3.11] se deduce que:

$$\hat{D}' = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} D'_f & z' D'_f \\ z' D'_f & z'^2 D'_f \end{bmatrix} dz' = \begin{bmatrix} \hat{D}'_m & \hat{D}'_m \\ \hat{D}'_m & \hat{D}'_f \end{bmatrix} \quad [3.12]$$

donde, \hat{D}'_m y \hat{D}'_f son las matrices constitutivas generalizadas correspondientes a esfuerzos de membrana y flexión respectivamente y \hat{D}'_m es la matriz constitutiva de acoplamiento membrana-flexión.

Las expresiones anteriores son de aplicación para el caso más general, en el que las propiedades del material sean heterogéneas a lo largo del espesor. En el caso de vigas armadas metálicas, existe simetría de las propiedades del material con respecto al plano medio por lo que $\hat{D}'_m = 0$ y cada vector de esfuerzos puede calcularse de manera desacoplada a partir de sus correspondientes deformaciones generalizadas como:

$$\hat{\sigma}'_m = \hat{D}'_m \hat{\epsilon}'_m; \quad \hat{\sigma}'_f = \hat{D}'_f \hat{\epsilon}'_f \quad [3.13]$$

Principio de los trabajos virtuales

La expresión del principio de los trabajos virtuales de un elemento de lámina plana sometido a cargas repartidas sobre su superficie t' y fuerzas puntuales q'_i es la siguiente:

$$\iiint_V \delta \epsilon'^T \sigma' dV = \iint_A [\delta u']^T t' dA + \sum_i \delta u'_i q'_i \quad [3.14]$$

donde, V y A son el volumen y área del elemento, respectivamente.

Sustituyendo [3.6] y [3.8] en [3.14] llegamos a la conclusión de que el trabajo de deformación virtual en un elemento aislado es igual a la suma de los trabajos virtuales de membrana:

$$\iiint_V \delta \epsilon'^T \sigma' dV = \iiint_V \delta [\hat{\epsilon}'_m^T + z' \hat{\epsilon}'_f^T] \sigma'_f dV = \iint_A (\delta \hat{\epsilon}'_m^T \hat{\sigma}'_m + \delta \hat{\epsilon}'_f^T \hat{\sigma}'_f) dA = \iint_A \delta \hat{\epsilon}'^T \hat{\sigma}' dA \quad [3.15]$$

3.4. Consideraciones a tener en cuenta en el código numérico

Para poder tratar con realismo el comportamiento de vigas armadas esbeltas de inercia variable deberemos llevar a cabo un análisis no-lineal [11] que nos permitirá tener en cuenta los efectos de segundo orden en el equilibrio (no-linealidad geométrica) y el comportamiento real del material bajo altos niveles de tensión (no-linealidad del material).

3.4.1. Consideración de la no-linealidad del material

A lo largo del proceso incremental de carga al que se somete el prototipo, las propiedades mecánicas de éste van variando. Es por ello que se simulan los cambios de comportamiento que experimenta el material y que se definen gracias al modelo constitutivo adoptado.

El modelo de comportamiento del acero adoptado en el presente trabajo, es un modelo constitutivo biaxial e isótropo, combinado con el criterio de plastificación de Von Mises, el cual define una elipse como superficie de fluencia en el espacio de tensiones σ_1 - σ_2 . Se utiliza un diagrama tensión-deformación uniaxial del acero con comportamiento elastoplástico. El coeficiente de Poisson ν se mantiene constante durante todo el proceso de carga. A continuación se muestra el modelo constitutivo adoptado para el acero.

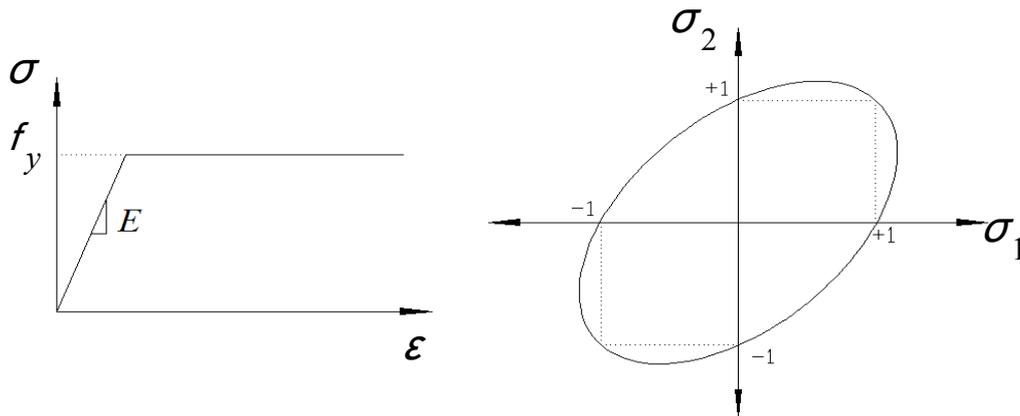


Figura 3.8. Modelo constitutivo del acero. a) Diagrama tensión-deformación con comportamiento elastoplástico. b) Superficie de fluencia de Von Mises.

3.4.2. Consideración de la no-linealidad geométrica

Las vigas armadas están conformadas por paneles esbeltos y sensibles a la aparición de inestabilidades locales (grandes desplazamientos). Tras haber abollado, dichas vigas armadas aún tienen una cierta reserva de resistencia postcrítica, debido al efecto de rigidización de la estructura de chapa. En el presente estudio, dicha rigidización se produce en dirección de la diagonal corta del panel de alma.

Para poder cuantificar de forma precisa el fenómeno de la rigidización postcrítica de chapas, es necesario tener en cuenta la no-linealidad geométrica. El código numérico puede reproducir dicho comportamiento a través de la consideración de los términos de segundo orden en el cálculo de las deformaciones:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Para tener en cuenta la no-linealidad geométrica es necesario llevar a cabo un proceso iterativo, en donde la geometría de la estructura se actualice en cada iteración. La condición de equilibrio se establece sobre la geometría deformada. Este enfoque de la no-linealidad geométrica proviene de la hipótesis de pequeñas deformaciones y grandes desplazamientos junto a una descripción Lagrangiana actualizada.

3.4.3. El método de Riks modificado para análisis no-lineal

Los problemas estáticos con no-linealidad geométrica, necesitan considerar la aparición de inestabilidades locales propiciadas por las cargas exteriores que actúan en los elementos esbeltos. Posterior a dicha inestabilidad, tales elementos pueden mostrar una respuesta carga-desplazamiento, en la que puede existir una matriz tangente no definida positiva. Para hallar una solución a dicha situación, se utilizará un procedimiento de análisis no-lineal en el que los estados de equilibrio durante las fases inestables de respuesta se encuentran a través del método de “Riks modificado” (Hibbitt *et al.*, 2001 [9]), útil en el análisis de estructuras que presentan comportamiento no-lineal geométrico y no-lineal del material.

3.4.4. Análisis de autovalores

Para poder desencadenar el fenómeno de abolladura, es necesario introducir una imperfección geométrica inicial en el código numérico. Esta imperfección a considerar en los análisis numéricos, corresponde al primer modo positivo de abolladura a cortante de los paneles a estudiar. Para determinar dicho modo debe realizarse un análisis de autovalores, el cual permite determinar la carga crítica de abolladura de las vigas armadas esbeltas (Zárate y Mirambell, 1999 [11]).

Suponiendo que existe un vector de cargas \mathbf{f}_0 para el cual la estructura no bifurca, se pretende determinar un factor λ tal que, para un vector $\lambda \mathbf{f}_0$, se produzca la inestabilidad de la estructura. La carga crítica de bifurcación de equilibrio se obtendrá como:

$$\mathbf{f}_{cr} = \lambda \mathbf{f}_0 \quad [3.17]$$

donde, \mathbf{f}_{cr} es la carga crítica de bifurcación de equilibrio y λ el autovalor.

En la figura 3.9 se muestran de forma cualitativa los primeros 4 modos de abolladura a cortante de una viga armada esbelta de inercia variable con una geometría concreta.

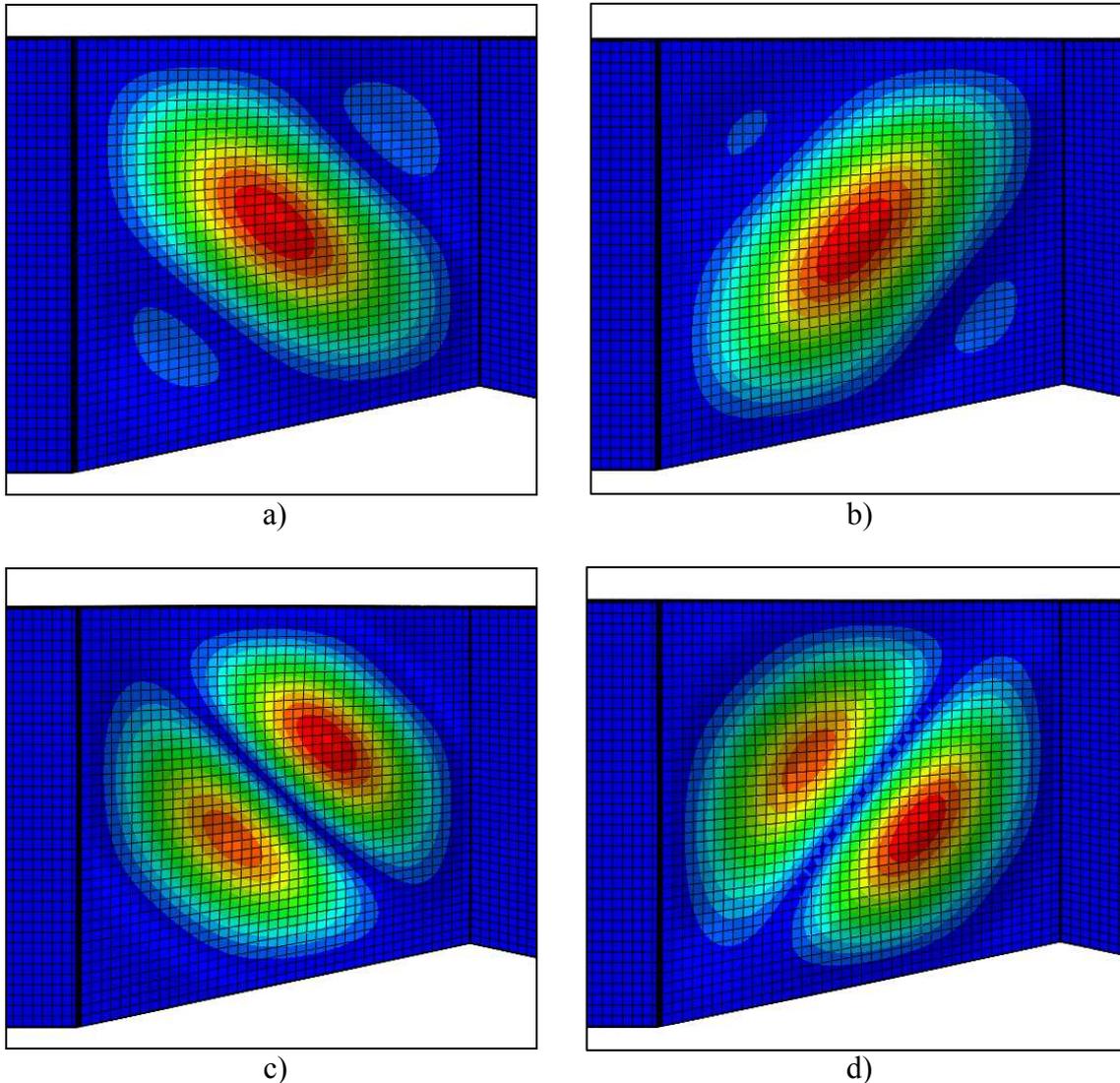


Figura 3.9. Modos de abolladura a cortante de una viga armada de inercia variable con una geometría concreta. a) 1er modo de abolladura. b) 2º modo de abolladura. c) 3er modo de abolladura. d) 4º modo de abolladura.

En la figura anterior, puede apreciarse que la abolladura correspondiente al 1er modo de inestabilidad, sigue la dirección de la diagonal corta del panel de alma, es decir de la diagonal traccionada, tal y como era de esperar. Esta cuestión se tratará detalladamente en el siguiente capítulo.

Como se ha dicho hace un momento, la forma inicial de la deformación perpendicular al panel de alma, atiende al primer modo de abolladura a cortante de los paneles a estudiar, correspondiente al modo de menor energía de deformación. La magnitud de dicha imperfección ha sido elegida de acuerdo con lo dispuesto en el anejo C del Eurocódigo

3, Parte 1-5 [6]. Para desencadenar el fenómeno de abolladura, dicho anejo recomienda utilizar un valor de la imperfección local igual a:

$$\text{Magnitud de la imperfección} = \min(a/200, b/200) \quad [3.18]$$

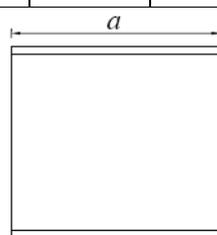
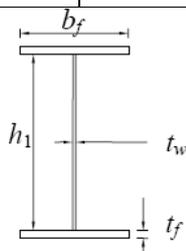
Donde a es la distancia entre rigidizadores transversales y b es la altura del panel de alma. Para el caso que nos ocupa, es decir para vigas armadas de inercia variable se ha decidido adoptar como valor de b , el valor del canto menor del panel de alma h_0 .

3.5. Validación de resultados obtenidos del código numérico

Con el propósito de validar el código numérico a utilizar en el estudio de la capacidad última de vigas de inercia variable de alma esbelta, en este apartado se realiza un análisis comparativo de los resultados derivados del código numérico con resultados de ensayos experimentales de vigas armadas de alma esbelta de sección constante (Lee y Yoo, 1999 [23]) y con resultados del modelo del campo diagonal de tracciones (método utilizado en el Eurocódigo 3, ENV 1993, Parte 1-1 [5]). Dicha comparación permitirá confirmar las hipótesis a plantear en el modelado de las vigas, tales como las condiciones de contorno, la ecuación constitutiva del material, métodos de resolución numérica, etc.

En la tabla 3.1 se muestra la geometría de las vigas ensayadas así como sus propiedades mecánicas. En dicha tabla se puede apreciar la capacidad última según los ensayos experimentales (Lee y Yoo, 1999 [23]), según el método del Eurocódigo 3 [5] y según la que ha sido calculada con el código numérico.

Viga	h_1 (mm)	a (mm)	α	t_w (mm)	t_f (mm)	b_f (mm)	V_u (KN) Exp.	V_u (KN) EC3	V_u (KN) Cod. Num.
G1	400	400	1,0	4,0	15	130	282,4	277	286,4
G2	600	600	1,0	4,0	10	200	324,5	303,5	326,9
G3	600	600	1,0	4,0	15	200	337,3	330	338,2
G5	600	900	1,5	4,0	10	200	286,3	242,4	292,3
G6	600	900	1,5	4,0	20	200	312,8	289,5	303,7



$$\alpha = a/h_1$$

$$f_{y,w} = 318,5 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{y,f} = 303,8 \text{ N/mm}^2$$

Tabla 3.1. Descripción de las vigas armadas ensayadas experimentalmente. Análisis comparativo de su capacidad última según la experimentación (Lee y Yoo, 1999 [23]), según Eurocódigo 3 [5] y según código numérico.

Los resultados mostrados en la tabla 3.1, ponen de manifiesto la gran similitud entre los resultados obtenidos con el código numérico y los obtenidos en los ensayos experimentales de Lee y Yoo (1999) [23]. Por otro lado, el método del campo diagonal de tracciones (ENV 1993-1-1 [5]) proporciona resultados que están siempre del lado de la seguridad, ya que los valores de la resistencia última a cortante son siempre menores a los obtenidos con el código numérico. Debe mencionarse, que los resultados provenientes del Eurocódigo 3, han sido obtenidos para coeficientes $\gamma_{M0} = 1,1$ y $\gamma_{M1} = 1,1$ (ver tabla 3.2). En caso de aplicar los coeficientes del Reino Unido ($\gamma_{M0} = 1,05$ y $\gamma_{M1} = 1,05$), los resultados del EC3-1-1 se ajustan mejor a los resultados derivados del código numérico.

Reference in EC3-1.1	Definition	Symbol	Condition	Value	
				Boxed EC3	UK
5.1.1	Partial safety factors for steel	γ_{M0}	Resistance of Class 1, 2 or 3 cross-sections	1.10	1.05
		γ_{M1}	Resistance of Class 4 cross-sections	1.10	1.05
		γ_{M1}	Resistance of a member to buckling	1.10	1.05
		γ_{M2}	Resistance of net section at bolt holes	1.25	1.20

Tabla 3.2. Coeficientes parciales de seguridad (Tabla: ENV 1993-1-1: 1992 [5]).

Tras el análisis comparativo realizado en este apartado, puede concluirse, que los resultados de la capacidad última obtenidos mediante el código numérico son completamente válidos para el estudio de vigas armadas de inercia variable.

Capítulo 4. Tensión crítica de abolladura del alma de vigas armadas esbeltas de inercia variable

4.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es el de determinar la carga crítica de abolladura del alma de vigas armadas de inercia variable. Para ello, utilizaremos los resultados del código numérico *Abaqus* [8] y posteriormente realizaremos un estudio paramétrico para ver la influencia que tienen los parámetros geométricos sobre el valor de la tensión tangencial que produce la inestabilidad del panel del alma. De este modo, utilizando dichos resultados y tomando como partida la teoría clásica de inestabilidad, se desarrollará la formulación analítica que nos permitirá calcular la tensión crítica de abolladura del panel de alma. Esta formulación será el primer paso para obtener la capacidad última de de vigas armadas de inercia variable.

Se sabe que el comportamiento de un panel metálico sometido a cortante puro en situación de colapso puede interpretarse a través del análisis de dos etapas diferenciadas.

La primera etapa, anterior a la inestabilidad, consiste en una combinación de componentes de tracción y compresión de igual magnitud. La tensión principal de compresión es la que provoca la abolladura del panel, produciéndose ésta en dirección de la diagonal traccionada.

El fenómeno de abolladura del alma en piezas no prismáticas es equivalente al de piezas prismáticas y debido a la esbeltez del alma, las tensiones tangenciales pueden generar inestabilidades, provocando importantes desplazamientos en dirección perpendicular a su plano medio. La tensión tangencial que provoca este fenómeno se conoce como tensión tangencial crítica de abolladura del alma.

La segunda etapa corresponde a la rigidización postcrítica a la que se ve sometido el panel una vez este ya ha abollado, generándose un mecanismo resistente adicional basado en el campo diagonal de tracciones (Basler y Thürlimann, 1959 [21]; Rockey y Skaloud 1968 [28]; Evans y Porter, 1978 [29]; Dubas y Gheri, 1986 [17]).

Del mismo modo que en los paneles prismáticos, también puede observarse la aparición del campo diagonal de tracciones en los paneles de inercia variable, hecho que quedará comprobado en el siguiente capítulo.

4.2. Código numérico utilizado para el análisis de vigas esbeltas de inercia variable

El estudio de la abolladura en estructuras metálicas de chapa es primordial para su correcto dimensionamiento tanto en situación de colapso como en situación de servicio.

Para poder tratar con realismo el comportamiento de estas estructuras deberemos llevar a cabo un análisis no-lineal [11] que nos permitirá tener en cuenta los efectos de segundo orden en el equilibrio (no-linealidad geométrica) y el comportamiento real del material bajo altos niveles de tensión (no-linealidad del material).

El modelo de comportamiento del acero es un modelo constitutivo biaxial e isótropo, combinado con el criterio de plastificación de Von Mises. Se utiliza un diagrama tensión-deformación uniaxial del acero con comportamiento elastoplástico.

El código numérico utiliza un análisis no-lineal en el que los estados de equilibrio durante las fases inestables de respuesta se encuentran utilizando el método de “Riks modificado” (Hibbitt *et al.*, 2001 [9]).

Para poder desencadenar el fenómeno de abolladura, es necesario introducir en el código numérico, por razones del análisis, una imperfección geométrica en los paneles de estudio. Por lo tanto, se introduce una pequeña deformación en la dirección perpendicular al plano medio del alma, cuya forma inicial atiende al primer modo de abolladura a cortante de los paneles analizados (correspondiente al modo de menor energía de deformación).

La discretización de la geometría del prototipo se ha llevado a cabo mediante elementos finitos tipo lámina de 4 nodos con integración reducida (elemento S4R5) asumiendo la teoría de láminas planas de Kirchhoff (Oñate, 1995 [10]).

4.2.1. Geometría y condiciones de contorno del prototipo utilizado para el análisis de vigas esbeltas de inercia variable

El prototipo que proponemos a continuación pretende reproducir el comportamiento de los elementos situados en hombros de pórticos o zonas cercanas de apoyos intermedios de puentes, los cuales se ven sometidos a importantes esfuerzos de flexión y cortante.

Los voladizos no son de utilidad en este trabajo en el que se quiere estudiar la abolladura del panel frente a cortante, pero serán de gran ayuda en futuras líneas de investigación dedicadas a la interacción flexión-cortante, ya que para poder conseguir reproducir los esfuerzos que caracterizan las zonas de estudio se debe introducir una carga puntual en extremos de voladizos. Por lo tanto, el prototipo desarrollado en el presente trabajo, podrá ser utilizado para futuros estudios de interacción flector-cortante.

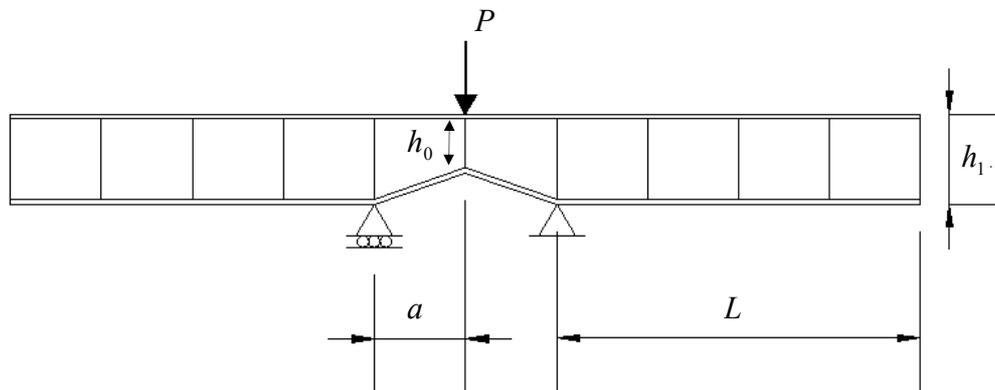


Figura 4.1. Prototipo adoptado en el análisis frente a cortante de las vigas esbeltas de inercia variable

A continuación mostramos la geometría de las vigas armadas de inercia variable a estudiar obtenidas con el código numérico *Abaqus*. A lo largo del trabajo el panel de estudio será el izquierdo, tal como se muestra en la figura 4.2.

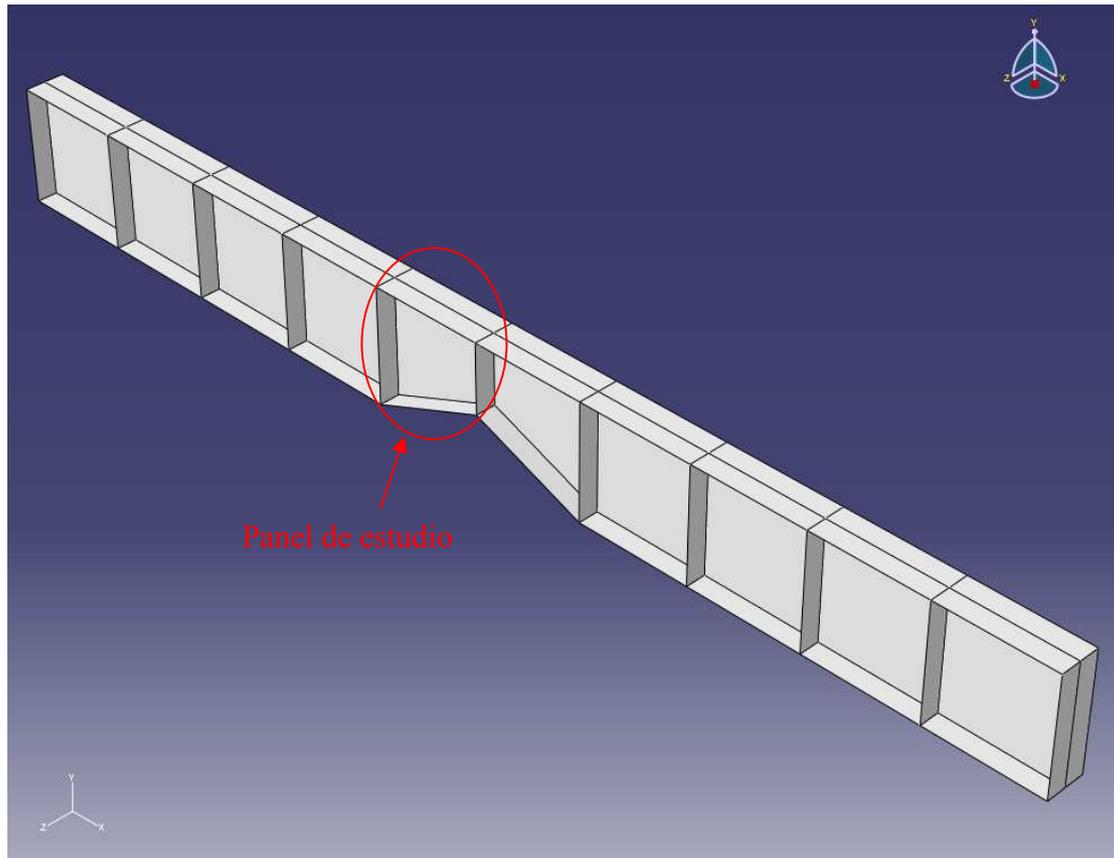


Figura 4.2. Geometría de las vigas esbeltas de inercia variable obtenidas con *Abaqus*

Podemos encontrar en la bibliografía diferentes expresiones que permiten determinar la tensión crítica de abolladura de paneles rectangulares sometidos a tensiones tangenciales, en función de las condiciones de contorno, del parámetro de forma y de las características del material (Timoshenko y Gere, 1961 [19]). En el caso de vigas de inercia variable, la tensión crítica de abolladura del panel de alma depende también de la inclinación del ala inferior y de las condiciones de vinculación entre alma y alas, y entre alma y rigidizadores transversales.

Estudios recientes (Lee et al., 1996 [30] y Lee y Yoo, 1999 [23]) han concluido que adoptar la condición de contorno de borde simplemente apoyado en la unión ala-alma de vigas armadas para la determinación de la tensión crítica de abolladura del alma a cortante, es demasiado conservador. Es por este motivo que en el análisis numérico se ha considerado la presencia de las alas en el prototipo y por lo tanto queda reflejada la influencia de la rigidez de éstas en la tensión crítica de abolladura del alma. Esta consideración se traduce en una cierta coacción al giro que puede experimentar el panel de alma de canto variable. Los paneles de alma están delimitados en la dirección longitudinal por rigidizadores transversales que deben garantizar que no haya desplazamientos transversales del alma en las secciones donde se ubiquen dichos rigidizadores. A su vez, al considerar la presencia de estos rigidizadores en el prototipo se tendrá en cuenta una cierta coacción al giro que puede experimentar el panel del alma. Se ha adoptado un espesor de los rigidizadores de 25mm para asegurar el cumplimiento de las condiciones anteriores. Finalmente, para asegurar que el panel de estudio sea el que siempre abolle, impedimos el movimiento del resto de paneles de alma en dirección perpendicular al plano medio de ésta.

En la figura 4.3 y en la tabla 4.1 se muestran las condiciones de contorno adoptadas para los análisis estructurales de vigas armadas de inercia variable. Los desplazamientos según los ejes globales X, Y, Z son respectivamente u_x , u_y , u_z , mientras que los giros son respectivamente θ_x , θ_y , θ_z . En la tabla 4.1, se utiliza 0 para referirse al grado de libertad libre y 1 para referirse al grado de libertad restringido.

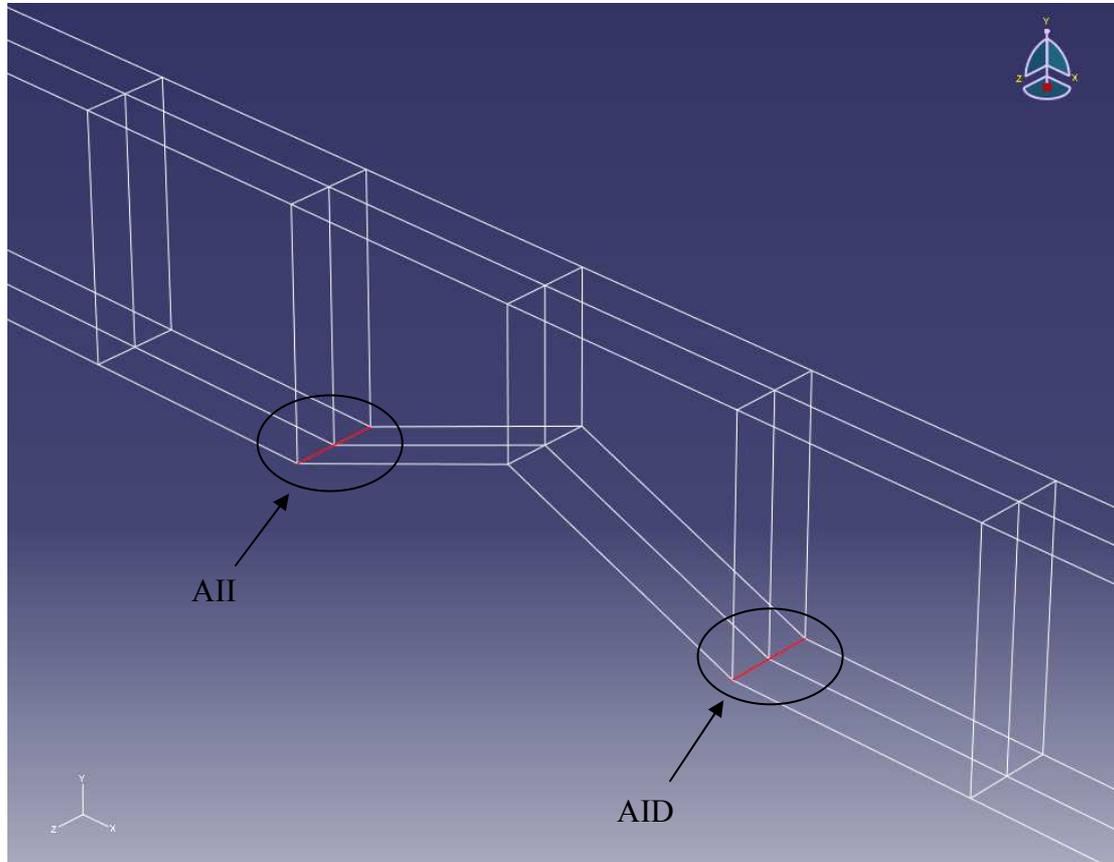


Figura 4.3. Condiciones de contorno adoptadas para el análisis estructural

La viga de estudio es la mostrada en la figura 4.1 donde se aplica una carga puntual en el centro de vano. Se supone que existen arriostramientos perpendiculares al plano medio del alma tanto en el apoyo izquierdo como en el derecho, por lo que se impiden los desplazamientos en dicha dirección. Además, los rigidizadores transversales impiden el giro de los paneles de alas alrededor del eje X global.

Bordes	u_x	u_y	u_z	θ_x	θ_y	θ_z
AII	0	1	1	1	1	0
AID	1	1	1	1	1	0

Tabla 4.1. Condiciones de contorno adoptadas para el análisis estructural

Para no tener problemas de concentración de tensiones, la carga puntual se introduce como carga repartida en una superficie de 180x160mm. De este modo, evitamos que la carga se aplique en un punto pudiéndose obtener entonces errores en el valor de las tensiones. En la figura 4.4 se muestra la aplicación de la carga en dicha superficie.

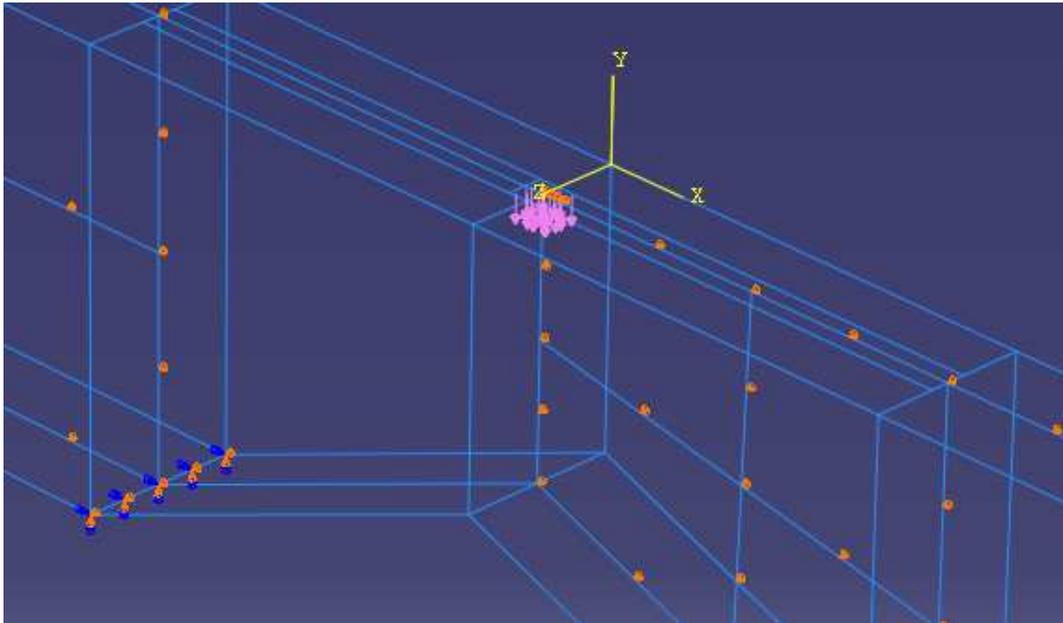


Figura 4.4. Aplicación de la carga puntual en una superficie de 180x160mm

En las vigas a analizar con el código numérico, las condiciones adoptadas permiten considerar un acoplamiento, en el panel de alma, de las tensiones tangenciales y normales. La influencia de las tensiones normales en la capacidad a cortante del panel de alma dependerá de las características geométricas de la viga de estudio.

4.2.2. Análisis de convergencia de malla

Para la determinación de la malla a utilizar en el estudio de vigas esbeltas de inercia variable realizamos un análisis de convergencia en el cual se utiliza el valor de la tensión crítica de abolladura en el canto menor h_0 del panel de estudio como criterio para la obtención de la densidad de malla apropiada.

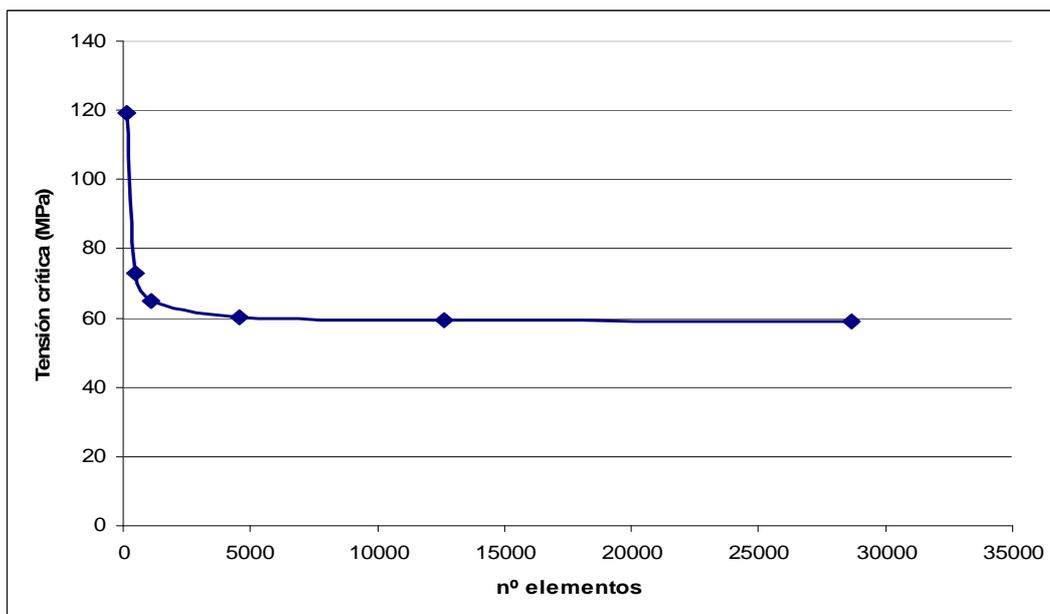


Figura 4.5. Gráfico de convergencia de malla

Tal y como se puede observar en el gráfico a partir de un cierto número de elementos, el valor de la tensión crítica de abolladura converge. El tamaño de elemento elegido es de 50 mm ya que proporciona resultados suficientemente precisos y supone un coste computacional razonable. Si elegimos una malla menos densa los resultados no serán suficientemente precisos y, por el contrario, si elegimos una malla más densa, el coste computacional será demasiado grande sin que se aporte una precisión adicional en los resultados.

4.3. Estudio de la abolladura del panel de alma con parámetro de forma $\alpha=1$

En este apartado estudiaremos el comportamiento a abolladura de paneles esbeltos de inercia variable con parámetro de forma α (relación entre la longitud del panel y el canto mayor) igual a la unidad ($\alpha = a/h_1$).

Primeramente se realizará un estudio paramétrico en el cual intervendrán diferentes variables geométricas y luego se obtendrá la formulación analítica con la que obtendremos la tensión crítica de abolladura en el canto menor del alma, ya que es donde la tensión tangencial es mayor (menor área resistente a cortante).

Los parámetros geométricos utilizados en los análisis se definen a través de las siguientes variables:

$$\lambda_f = \frac{b_f}{t_f}, \eta = \frac{b_f}{h_1}, \alpha = \frac{a}{h_1} \text{ y } \text{tg}\phi$$

donde λ_f : esbeltez del ala

η : relación entre el ancho de ala b_f y el canto mayor del alma h_1

α : parámetro de forma del alma

$\text{tg}\phi$: pendiente del alma inferior

Los rangos de variación de las variables de diseño a contemplar en el estudio paramétrico son: $10 \leq \lambda_f \leq 60$, $0,2 \leq \eta \leq 0,5$, $\alpha \geq 0,5$ y $0,1 \leq \text{tg}\phi \leq 0,6$.

En cuanto a la esbeltez del panel del alma ($\lambda_{w,h_0} = h_0/t_w$) puede adoptarse para puentes una esbeltez próxima a 200 y para edificación industrial una esbeltez próxima a 300 (Maquoi, 1992 [15]). La influencia de dicha variable queda recogida de forma explícita en la formulación que permite determinar la tensión crítica de abolladura de paneles de canto variable.

Para este estudio se utiliza un acero S355 con límite elástico $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$, módulo de elasticidad $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

Con el código numérico podemos obtener la carga última y conocida la tensión crítica de abolladura en el canto menor h_0 y utilizando la formulación de la teoría clásica podemos determinar el coeficiente de abolladura $k_{f\theta}$:

$$\tau_{cr} = k_{f\theta} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{t_w}{h_0}\right)^2 \quad [4.1]$$

donde τ_{cr} : tensión crítica de abolladura

$k_{f\theta}$: coeficiente de abolladura que contempla la esbeltez del ala λ_f y η

E : módulo de elasticidad

ν : coeficiente de Poisson

t_w : espesor del alma

h_0 : canto menor del panel

En la siguiente figura 4.6 se puede apreciar que para diferentes valores de inclinación del ala inferior existe una relación aproximadamente lineal entre el valor del coeficiente de abolladura y la esbeltez del ala. También se observa que la pendiente en todas las gráficas es aproximadamente la misma independientemente de la inclinación del ala inferior $tg\phi$.

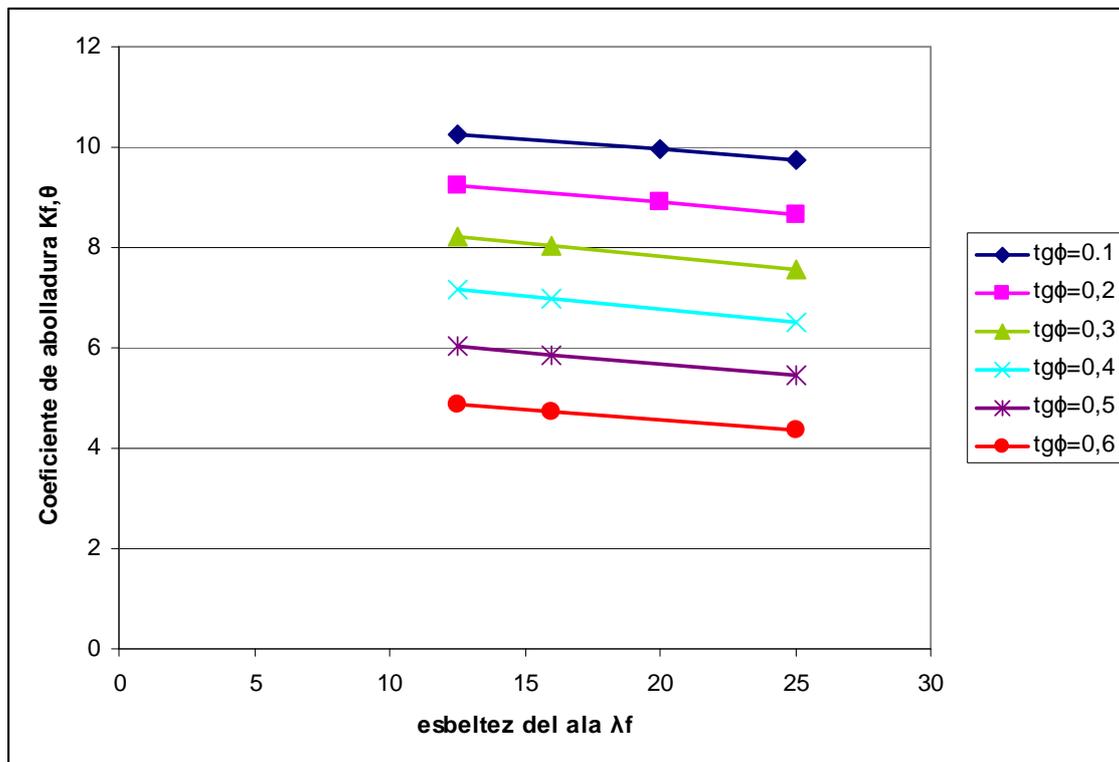


Figura 4.6. Relación entre el coeficiente de abolladura y la esbeltez del ala λ_f para diferentes pendientes del ala inferior $tg\phi$ y parámetro de forma $\alpha = 1$ y $\eta=0,2$

En la figura 4.7 se puede apreciar que para diferentes valores de inclinación del ala inferior existe una relación aproximadamente lineal entre el valor del coeficiente de abolladura y la esbeltez del ala, pero a su vez dicha relación lineal también depende del valor del parámetro η .

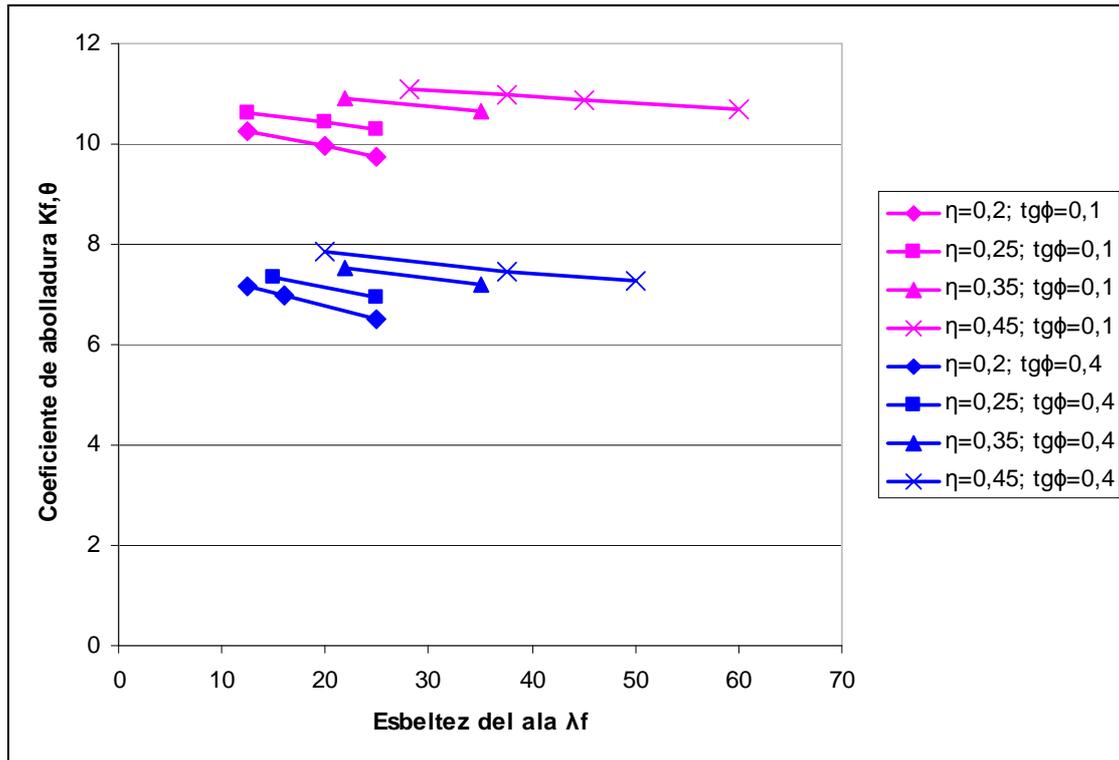
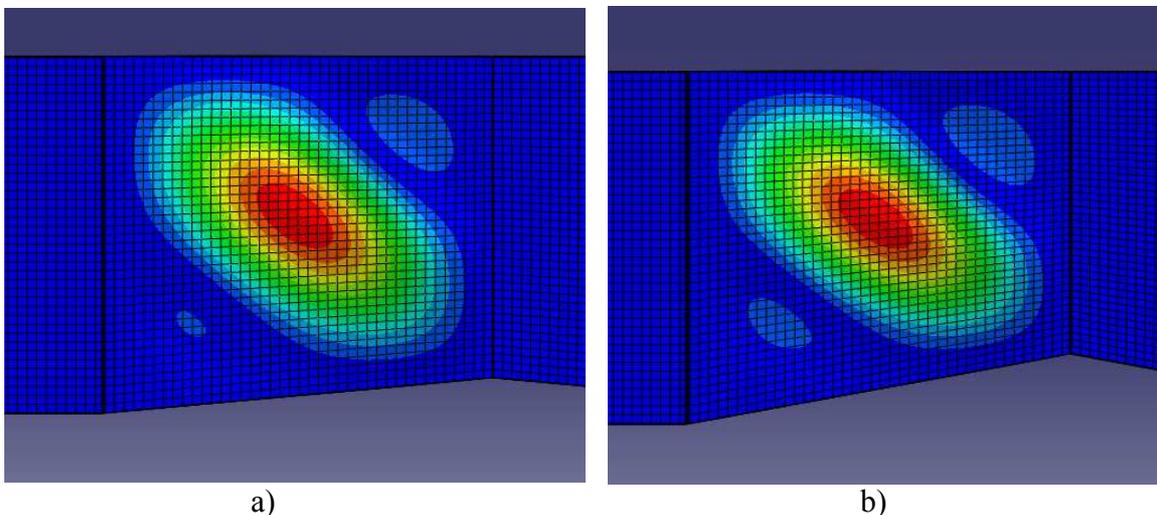


Figura 4.7. Relación entre el coeficiente de abolladura y la esbeltez del ala λ_f para diferentes pendientes del ala inferior $tg\phi$ y η (parámetro de forma $\alpha = 1$)

Puede interpretarse que la relación entre $k_{f\theta}$ y λ_f presenta un comportamiento lineal con respecto a la pendiente del ala inferior $tg\phi$. Por el contrario en función de η el comportamiento de dicha relación viene controlado por un valor de la pendiente diferente.

En la figura 4.8 puede verse la deformada del panel de alma de inercia variable cuando el alma ha abollado para diferentes valores de $tg\phi$. Los resultados del código numérico indican que al aumentar $tg\phi$, la tensión crítica de abolladura del alma tiende a incrementarse. Los resultados pertinentes quedan recogidos en el Anejo 1 de este trabajo.



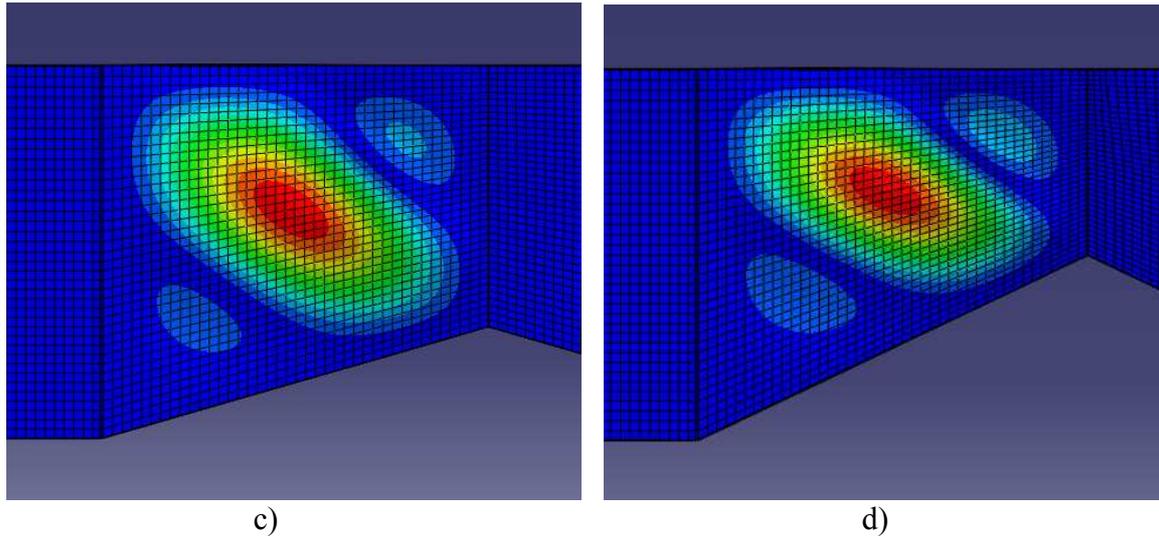


Figura 4.8. Deformada del panel de alma de canto variable cuando el alma ha abollado para diferentes valores de $tg\phi$. a) $tg\phi=0,1$. b) $tg\phi=0,2$. c) $tg\phi=0,3$. d) $tg\phi=0,5$.

A continuación se muestran las correlaciones llevadas a cabo con el fin de obtener la magnitud del coeficiente crítico de abolladura $k_{f\theta}$ para vigas de inercia variable de alma esbelta con parámetro de forma $\alpha=1$.

De acuerdo con lo comentado anteriormente la correlación entre el coeficiente crítico de abolladura $k_{f\theta}$ y la esbeltez del panel de ala λ_f puede interpretarse como una correlación lineal para cualquier valor de las variables η y $tg\phi$. Por lo tanto el comportamiento entre $k_{f\theta}$ y λ_f puede definirse a través de la correlación siguiente:

$$k_{f\theta} = a_{\eta, tg\phi} + b_{\eta, tg\phi} \cdot \lambda_f \quad [4.2]$$

donde $a_{\eta, tg\phi}$ y $b_{\eta, tg\phi}$ son las constantes a determinar.

A partir de los resultados mostrados en la figura 4.7 puede afirmarse que la relación $k_{f\theta} - \lambda_f$ respecto al parámetro η , interpretada por las pendientes de las rectas no presenta una relación lineal. Se considera pues, una correlación entre las constantes $a_{\eta, tg\phi}$ y $b_{\eta, tg\phi}$ y el parámetro η del tipo logarítmico (no-lineal), tal y como se muestra a continuación:

$$a_{\eta, tg\phi} = c_1 \cdot \eta^{c_2} \quad [4.3]$$

$$b_{\eta, tg\phi} = c_3 \cdot \eta^{c_4} \quad [4.4]$$

Tal y como se observa en la figura 4.6, el comportamiento de la curva $k_{f\theta} - \lambda_f$ respecto a $tg\phi$ es lineal. Esto puede ser interpretado a través del hecho de que dicha relación $k_{f\theta} - \lambda_f$ es una recta de pendiente constante para cada valor del parámetro $tg\phi$. Por lo tanto la correlación de c_1 , c_2 , c_3 y c_4 respecto a $tg\phi$ se considera lineal:

$$c_1 = d + e \cdot \operatorname{tg} \phi \quad [4.5.a]$$

$$c_2 = f + g \cdot \operatorname{tg} \phi \quad [4.5.b]$$

$$c_3 = h + i \cdot \operatorname{tg} \phi \quad [4.5.c]$$

$$c_4 = j + l \cdot \operatorname{tg} \phi \quad [4.5.d]$$

donde d, e, f, g, h, i, j y l son las constantes a determinar.

A partir de los resultados obtenidos con el código numérico (ver Anejo 1), y de las correlaciones comentadas anteriormente se determina la expresión analítica que define el coeficiente de abolladura $k_{f\theta}$ en función de las características geométricas de las alas y de la inclinación del ala inferior.

$$k_{f\theta} = c_1 \cdot \eta^{c_2} - c_3 \cdot \eta^{-c_4} \cdot \lambda_f \quad [4.6]$$

Donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son los coeficientes que dependen de la pendiente del ala inferior $\operatorname{tg} \phi$ y que quedan definidos como sigue a continuación:

$$c_1 = 13,44 - 12,71 \cdot \operatorname{tg} \phi \quad [4.7.a]$$

$$c_2 = 0,035 - 0,038 \cdot \operatorname{tg} \phi \quad [4.7.b]$$

$$c_3 = 0,0078 - 0,008 \cdot \operatorname{tg} \phi \quad [4.7.c]$$

$$c_4 = 1,42 + 0,75 \cdot \operatorname{tg} \phi \quad [4.7.d]$$

En el Anejo 1 puede apreciarse que los resultados obtenidos con la formulación analítica coinciden de forma muy clara con los resultados del código numérico (la diferencia entre los valores obtenidos con ambos métodos no supera en ningún caso el 5%). Cabe destacar que Zárate, A. V. (2002) [1] llegó a las mismas expresiones desarrolladas en este apartado, aunque con diferentes valores de los coeficientes c_1, c_2, c_3 y c_4 debido a que los resultados obtenidos por dicho autor a través del código numérico, difieren, aunque de forma poco significativa, de los resultados obtenidos en este trabajo.

4.4. Influencia del parámetro de forma sobre la tensión crítica de abolladura de paneles esbeltos de inercia variable

En el apartado anterior se ha hallado una formulación analítica con la que poder calcular el coeficiente de abolladura $k_{f\theta}$ para paneles de canto variable con parámetro de forma $\alpha=1$. En este apartado se estudiará la influencia del parámetro α sobre el coeficiente de abolladura y de este modo determinaremos una formulación analítica general (para cualquier valor del parámetro α) con la que poder calcular la tensión crítica de abolladura de paneles de alma esbelta de inercia variable.

En la figura 4.9 se muestra la variación del coeficiente crítico de abolladura k general obtenido mediante *Abaqus* respecto al parámetro de forma α . Se observa que la relación entre el coeficiente de abolladura k general y el parámetro de forma α es claramente no-lineal.

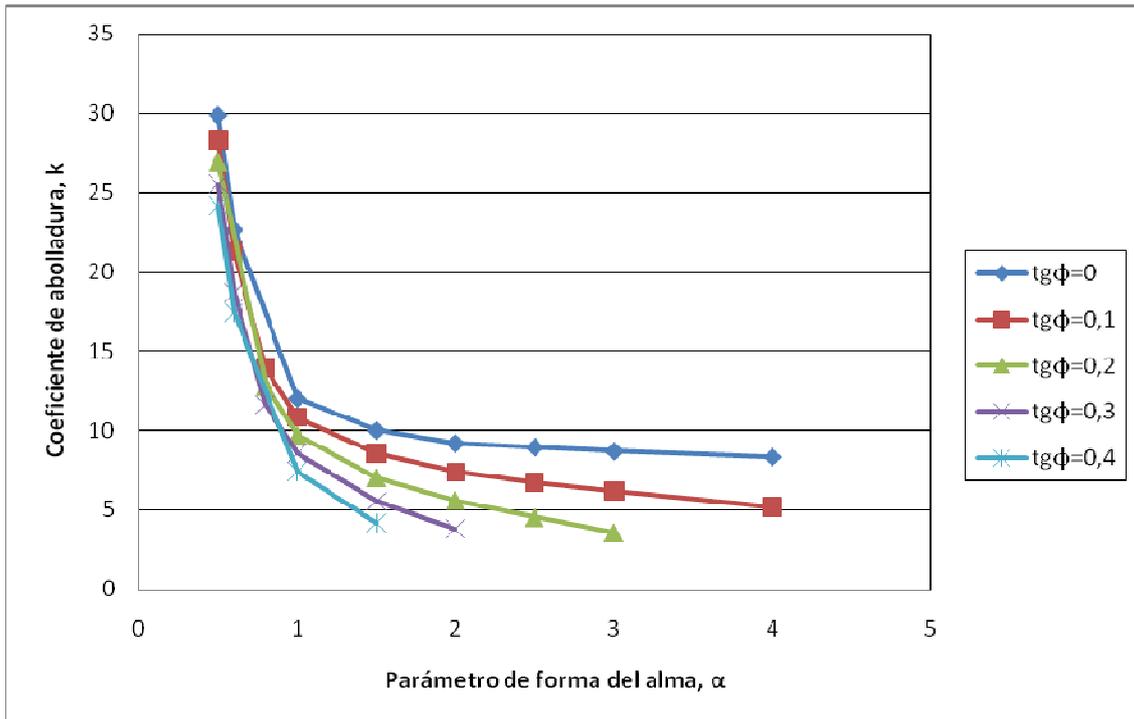


Figura 4.9. Variación del coeficiente de abolladura k en función del parámetro de forma del alma α para diferentes pendientes del ala inferior $tg\phi$ ($\lambda_f=25$; $\eta=0,35$)

También puede observarse que a medida que aumenta $tg\phi$, la variación del coeficiente de abolladura k con respecto al parámetro de forma del alma es menor.

A continuación, se determina la expresión para el cálculo del coeficiente crítico de abolladura k de paneles esbeltos de inercia variable en base a 3 condiciones:

- Se utilizarán como coeficientes de referencia, los coeficientes de abolladura de la teoría clásica (Timoshenko y Gere, 1961 [19]):

$$k = 5,34 + \frac{4}{\alpha^2}, \quad \alpha \geq 1 \quad [4.8.a]$$

$$k = 4 + \frac{5,34}{\alpha^2}, \quad \alpha < 1 \quad [4.8.b]$$

- Se tendrá en consideración la expresión que permite calcular el valor de k para $\alpha=1$.
- Se sumará a los coeficientes [4.8.a] o [4.8.b] la diferencia entre el valor de k obtenido con la teoría clásica y el obtenido con el código numérico para paneles de canto variable.

4.5. Determinación de la expresión analítica del coeficiente crítico de abolladura k , para $\alpha \geq 1$

En base a la ecuación [4.8.a] de la teoría clásica se plantea la siguiente expresión para el cálculo del coeficiente crítico de abolladura para $\alpha \geq 1$:

$$k = (k_{f\theta} - 4) + \frac{4}{\alpha^2} - f(\phi, \alpha), \quad \alpha \geq 1 \quad [4.9]$$

siendo $k_{f\theta}$: coeficiente crítico de abolladura, expresión [4.6]

$f(\phi, \alpha)$: función que depende de la inclinación del ala inferior y del parámetro de forma y que debe ser nula para $\alpha = 1$. De este modo cuando α sea igual a la unidad, el coeficiente k coincide con el $k_{f\theta}$.

La determinación de la función $f(\phi, \alpha)$ se realiza a través del estudio del comportamiento de la ecuación [4.8.a] con respecto a los resultados obtenidos del código numérico para los casos analizados de vigas esbeltas de inercia variable. El valor de k que se obtenga con la ecuación [4.9] debe corresponderse con el valor de $k_{f\theta}$ para $\alpha = 1$ por lo que se traslada sobre el eje de ordenadas la ecuación [4.8.a] para que el origen de las diferentes curvas se corresponda con el valor de $k_{f\theta}$ para $\alpha = 1$.

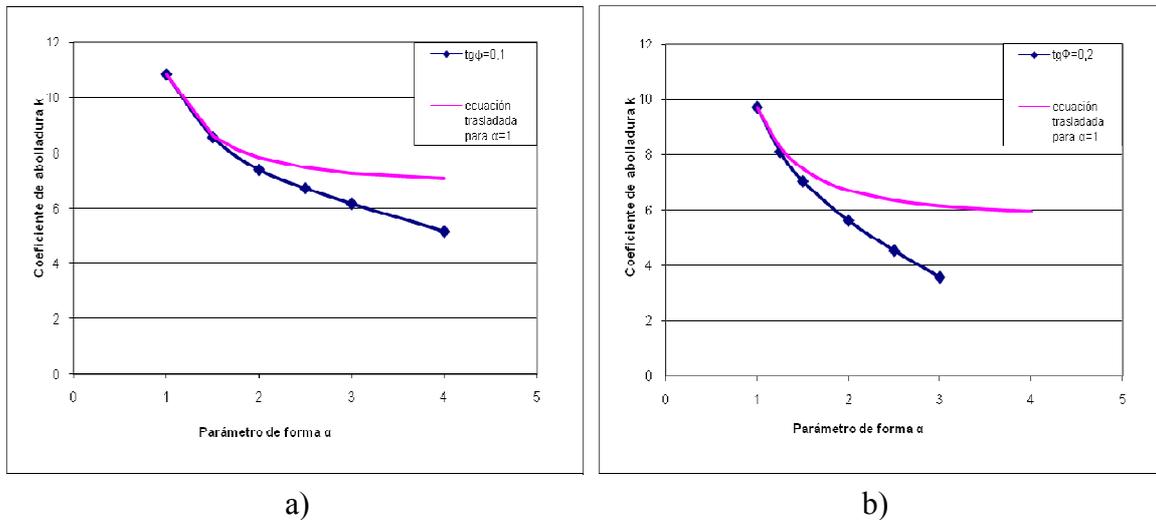


Figura 4.10. Variación del coeficiente de abolladura k en función del parámetro de forma del alma α y ecuación [4.8.a] trasladada en ordenadas para coincidir el origen en $\alpha = 1$ ($\lambda_f = 25$; $\eta = 0,35$). a) Para pendiente de ala inferior $tg\phi = 0,1$. b) Para pendiente de ala inferior $tg\phi = 0,2$.

En la siguiente figura se muestra la diferencia entre los resultados de k obtenidos con el código numérico y los correspondientes a la expresión [4.8.a] trasladada. Tal y como se aprecia en dicha figura, el comportamiento de la función $f(\phi, \alpha)$ respecto a α y para diferentes valores de $tg\phi$ puede interpretarse a través de una correlación lineal.

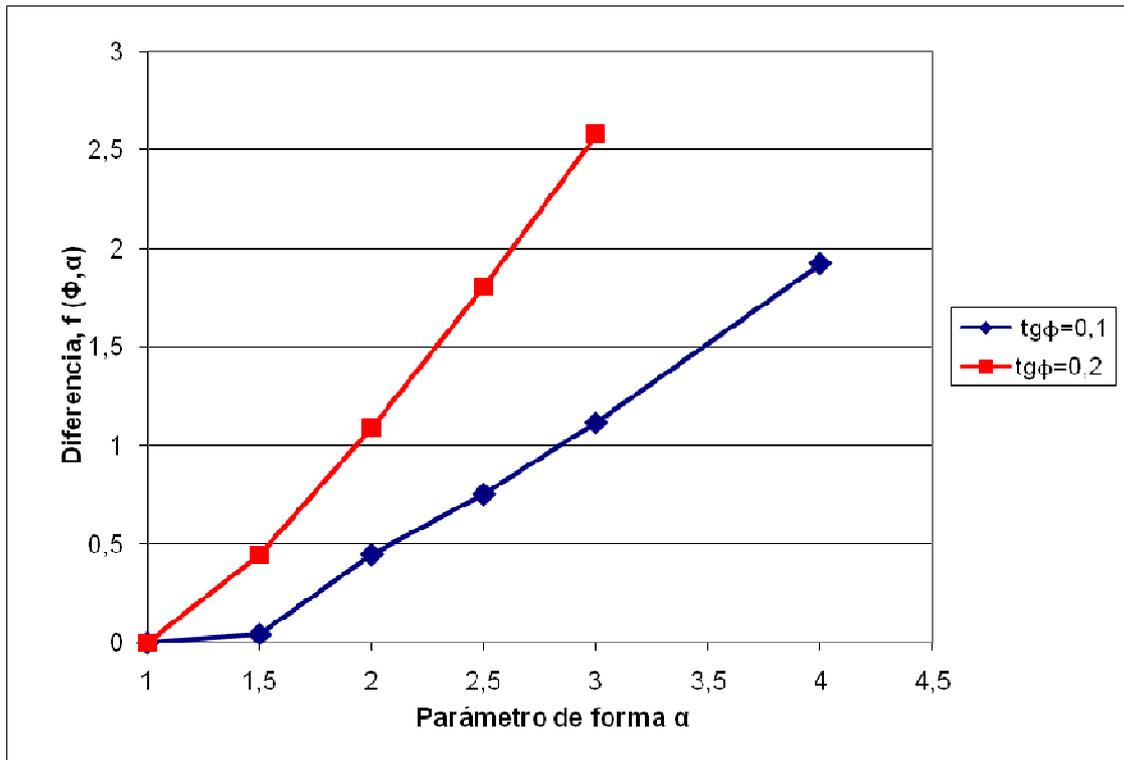


Figura 4.11. Variación de la función $f(\phi, \alpha)$ con respecto al parámetro de forma α para valores de pendiente de ala inferior $\text{tg}\phi=0,1$ y $\text{tg}\phi=0,2$.

Para cada inclinación del ala inferior $\text{tg}\phi$ se lleva a cabo una correlación lineal entre $f(\phi, \alpha)$ y el parámetro de forma α mediante la siguiente expresión:

$$f(\phi, \alpha) = a_\phi + b_\phi \cdot \alpha \quad [4.10]$$

donde a_ϕ y b_ϕ son las constantes a calcular.

Considerando que el comportamiento de las constantes a_ϕ y b_ϕ con respecto a la inclinación del ala inferior es no-lineal (ver figura 4.9), se utiliza una correlación del tipo logarítmico como la siguiente:

$$a_\phi = c_\phi \cdot (\text{tg}\phi)^{d_\phi} \quad [4.11]$$

$$b_\phi = f_\phi \cdot (\text{tg}\phi)^{g_\phi} \quad [4.12]$$

donde c_ϕ , d_ϕ , f_ϕ y g_ϕ son las constantes a determinar.

Tras todo este proceso hallamos finalmente la expresión analítica [4.13] que nos permite calcular el coeficiente crítico de abolladura de vigas esbeltas de canto variable para parámetros de forma $\alpha \geq 1$. Observar que cuando se adopta el valor $\alpha=1$ para dicha expresión, los valores de k y $k_{f\theta}$ coinciden.

$$k = (k_{f\theta} - 4) + \frac{4}{\alpha^2} - 4,85 \cdot (\text{tg}\phi)^{0,8} \cdot (\alpha - 1); \quad \alpha \geq 1 \quad [4.13.a]$$

4.6. Determinación de la expresión analítica del coeficiente crítico de abolladura k , para $\alpha < 1$

Para determinar la expresión analítica que permita calcular el coeficiente crítico de abolladura de vigas esbeltas de inercia variable para parámetros de forma $\alpha < 1$ se procede de la misma forma que en el apartado anterior obteniéndose al final de dicho proceso la siguiente expresión:

$$k = (k_{f\theta} - 5,34) + \frac{5,34}{\alpha^2} + 2 \cdot (tg\phi)^{0,8} \cdot (\alpha - 1); \alpha < 1 \quad [4.13.b]$$

4.7. Tensión crítica de abolladura de paneles esbultos de inercia variable

Una vez obtenidas las expresiones del coeficiente crítico de abolladura, ya podemos determinar la tensión crítica de abolladura de paneles esbultos de canto variable (que en nuestro caso se calculará en el canto menor del panel, tal como se ha dicho anteriormente), cuyo valor se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\tau_{cr} = k \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{t_w}{h_0} \right)^2 \quad [4.14]$$

siendo k : coeficiente de abolladura, expresiones [4.13.a] y [4.13.b]

E : módulo de elasticidad

ν : coeficiente de Poisson

t_w/h_0 : inverso de la esbeltez del alma en la sección de menor canto

En la siguiente tabla se recogen diferentes valores de la tensión crítica de abolladura obtenidos mediante la formulación analítica y con el código numérico *Abaqus* [8]. Puede observarse que la aproximación analítica se ajusta perfectamente a los resultados del código numérico.

$\alpha=a/h_1$	$\lambda_f=b_f/t_f$	$\eta=b_f/h_1$	$tg\phi$	t_w (mm)	h_0 (mm)	h_1 (mm)	τ_{cr} analítico (Mpa)	τ_{cr} MEF (Mpa)	Diferencia (%)
0,5	25	0,35	0,4	8	1576	1970	112,60	118,16	4,70
0,8	25	0,35	0,1	8	1816	1973,9	51,11	51,42	0,60
1	37,5	0,45	0,1	8	1800	2000	41,25	41,18	-0,18
1	37,5	0,45	0,2	8	1600	2000	46,73	46,51	-0,47
1	25	0,45	0,3	8	1400	2000	55,44	55,02	-0,76
1	37,5	0,45	0,4	8	1200	2000	63,64	62,94	-1,11
1	21,88	0,35	0,5	8	1000	2000	77,98	76,91	-1,39
1	20	0,45	0,6	8	800	2000	104,21	101,55	-2,62
2	25	0,35	0,1	8	1576	1970	35,05	36,18	3,11
2	25	0,35	0,3	8	776	1940	76,27	75,99	-0,37
3	25	0,35	0,2	8	776	1940	71,63	72,12	0,67

Figura 4.2. Valores de la tensión crítica de abolladura en paneles esbultos de inercia variable, obtenidos con la formulación analítica y con el código numérico *Abaqus*.

Capítulo 5. Resistencia postcrítica de vigas armadas esbeltas de inercia variable

5.1. Introducción

En el capítulo anterior se ha desarrollado una expresión analítica que permite calcular la tensión tangencial crítica de abolladura del panel de alma de vigas armadas de inercia variable, en función de sus características geométricas y mecánicas. En este capítulo se estudiará la reserva de resistencia postcrítica que presenta el panel de alma, una vez éste ha abollado. Dicha capacidad postcrítica resulta del desarrollo de un campo diagonal de tracciones en el panel de alma, convenientemente anclado en las alas y en los rigidizadores transversales.

Las vigas esbeltas de inercia variable son utilizadas a menudo en elementos estructurales sometidos a cargas importantes o en estructuras que deben salvar grandes luces. La inercia de dichos elementos puede adecuarse a la ley de momentos flectores, optimizando así el material empleado. Dichas situaciones quedan reflejadas en casos de apoyos de puentes o de hombros de pórticos de naves industriales, donde se dispone de una mayor sección transversal en las zonas sometidas a máximo momento negativo. Dadas las características geométricas de la sección transversal de estos elementos, el cortante es resistido por el alma mientras que el momento flector es resistido principalmente por las alas. Además, la existencia de rigidizadores transversales permite el anclaje del campo diagonal de tracciones, logrando así un incremento de la capacidad a cortante del alma.

Los códigos de diseño basados en los estados límite, como es el caso del Eurocódigo 3, permiten calcular la capacidad última de vigas armadas de inercia constante, mediante la aplicación del método del campo girado de tensiones. Este último, ha sustituido recientemente el método del campo diagonal de tracciones (ENV 1993, parte 1.1 [5]). Sin embargo, como ya se ha comentado, el presente trabajo se basa en el método del campo diagonal de tracciones ya que es mucho más formativo e intuitivo que el actual. A pesar de todo, aún no se ha definido un método riguroso y fiable que permita calcular la capacidad última de vigas esbeltas de inercia variable. Este capítulo tiene como principal objetivo desarrollar un método de dimensionamiento y/o verificación de vigas armadas de inercia variable utilizando como base el método del campo diagonal de tracciones.

5.2. Resistencia postcrítica de vigas armadas esbeltas de inercia variable

La capacidad resistente de vigas armadas esbeltas radica en la resistencia de los paneles que forman dicho elemento. Los paneles de alas resisten tensiones normales de flexión mientras que el panel de alma resiste las tensiones tangenciales. Si el alma es lo suficientemente esbelta, las tensiones tangenciales que actúan sobre ella pueden provocar su inestabilidad, como consecuencia del estado de tensiones principales compresión-tracción que aparece en el alma. Tras haber abollado el alma, se desarrollan una serie de mecanismos resistentes que confieren una cierta reserva de resistencia postcrítica hasta alcanzar el agotamiento.

Los análisis numéricos llevados a cabo en este trabajo, han puesto de manifiesto la existencia de la resistencia postcrítica de vigas armadas de inercia variable a través del desarrollo en el alma, de un campo diagonal de tracciones σ_t anclado en alas y en rigidizadores transversales. Esta es una de las principales hipótesis que se utilizará a lo largo de este capítulo, con el objetivo de desarrollar un modelo de capacidad última a cortante de vigas armadas esbeltas de inercia variable.

En la figura 5.1 puede apreciarse de forma cualitativa, la distribución de tensiones principales durante la fase postcrítica de una viga armada de inercia variable con una inclinación del ala inferior correspondiente a un valor de $tg\phi = 0,3$. En la figura 5.1.b) se muestran los vectores correspondientes a las tensiones principales en el momento en que la viga colapsa. Los vectores rojos llevan la dirección de la diagonal corta y representan las tensiones principales de tracción. Dicha distribución permite constatar el desarrollo de un campo diagonal de tracciones en el alma.

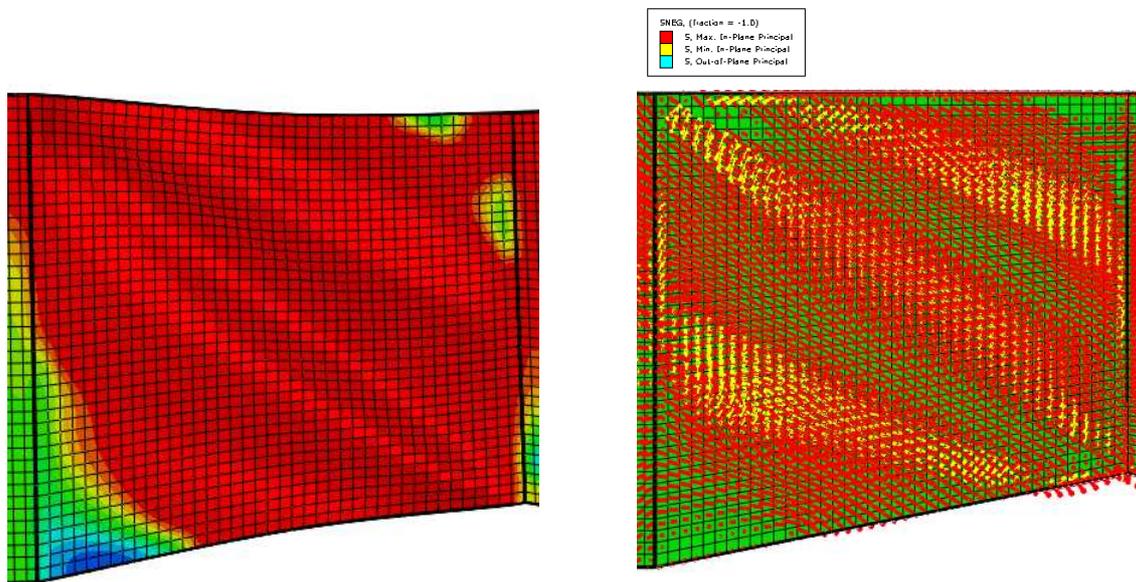


Figura 5.1. Desarrollo del campo diagonal de tracciones en el alma. a) Distribución de tensiones principales. b) Dirección de las tensiones principales.

Para el caso de vigas armadas prismáticas, se conocen varios modelos de capacidad última basados en la teoría del campo diagonal de tracciones. Dichos modelos han sido desarrollados por diferentes autores, entre los cuales cabe destacar los propuestos por Basler y Thürlimann (1959) [21], Rockey y Skaloud (1968 [28], 1971 [31], 1972 [32]), Chern y Ostapenko (1969) [22], Porter, Rockey y Evans (1975) [12] y Lee y Yoo (1999) [23]. Por lo tanto, hoy en día ya existen modelos teóricos de vigas armadas prismáticas capaces de predecir la capacidad última a cortante de una forma precisa.

Por el contrario, en el caso de vigas armadas de inercia variable, no se ha realizado una investigación tan extensa y rigurosa como la realizada para vigas prismáticas. Por este motivo, a continuación se llevará a cabo el estudio del comportamiento estructural de estos elementos con el objetivo de definir un modelo de capacidad última a cortante para vigas armadas de inercia variable que sea capaz de predecir la carga de agotamiento. Dicho modelo se realizará en paralelo al desarrollado por Zárate, A. V. (2002) [1].

5.3. Desarrollo del modelo de capacidad última en vigas armadas esbeltas de inercia variable

Para poder definir con exactitud el comportamiento estructural hasta el agotamiento de las vigas armadas de inercia variable, se debe tener en cuenta un gran número de parámetros geométricos y mecánicos. Por este motivo, se han realizado diferentes análisis numéricos variando dichos parámetros, para ver así la influencia que éstos tienen sobre la respuesta estructural de vigas armadas de inercia variable. Estos análisis numéricos han permitido poner de manifiesto la superposición de tres mecanismos resistentes claramente diferenciados: aparición del fenómeno de abolladura, desarrollo del campo diagonal de tracciones en el alma y mecanismo de marco en las alas (ver figura 5.2).

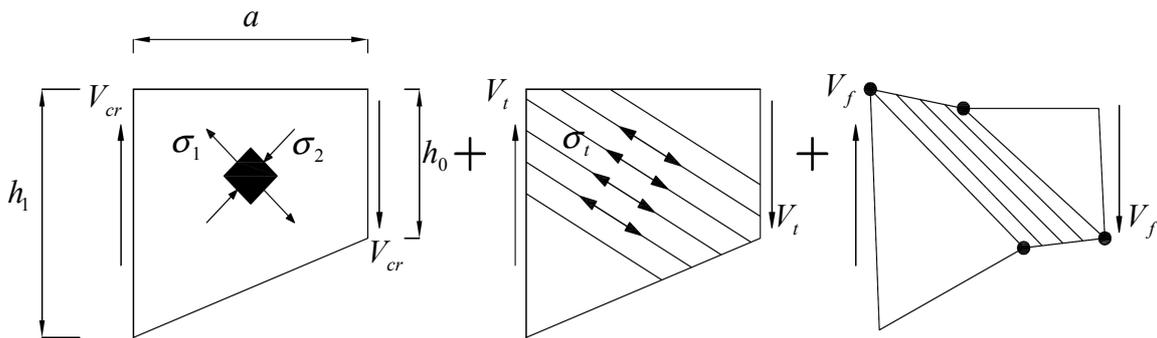


Figura 5.2. Superposición de los tres mecanismos resistentes en vigas prismáticas. a) Tensión crítica de abolladura. b) Desarrollo del campo diagonal de tracciones. c) Mecanismo de marco y formación de rótulas plásticas en alas.

Así pues, se desarrolla de ahora en adelante un modelo de capacidad última a cortante de vigas armadas esbeltas de inercia variable, basado en los estados resistentes anteriormente comentados. Para ello, será necesario estudiar la magnitud y dirección de las tensiones principales de tracción y compresión en el alma, así como la contribución de las alas y de los rigidizadores transversales.

5.3.1. Definición del campo diagonal de tracciones

Tras determinar la tensión crítica de abolladura de vigas esbeltas de inercia variable en el capítulo anterior, seguidamente se define la aparición de un campo diagonal de tracciones en el alma que permitirá determinar la capacidad postcrítica de dichas vigas. Así pues, el modelo postcrítico propuesto tendrá en cuenta el desarrollo de un campo diagonal de tracciones σ_t , debidamente anclado en alas y rigidizadores (ver figura 5.3), y la posterior formación de un mecanismo de marco cuya capacidad resistente será función de la rigidez a flexión de las alas (el agotamiento se alcanza al formarse rótulas plásticas en ambas alas). La capacidad postcrítica del alma proviene de la componente vertical del campo diagonal de tracciones σ_t . Su magnitud dependerá principalmente del ancho g del campo diagonal, el cual se encuentra delimitado por la aparición de las rótulas plásticas en alas.

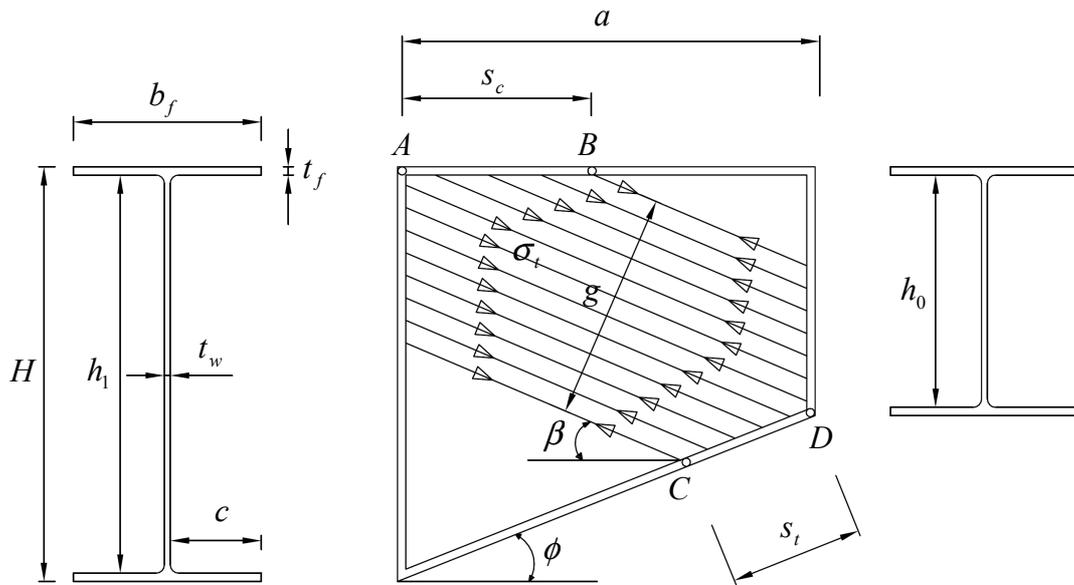


Figura 5.3. Desarrollo del campo diagonal de tracciones σ_t en vigas esbeltas de inercia variable.

Tal y como se aprecia en la figura 5.3, en el modelo postcrítico propuesto intervienen diferentes variables que se pueden separar en dos grupos: geométricas y mecánicas. Las variables geométricas definen de forma inequívoca la geometría del problema, y son el ángulo de inclinación del ala inferior ϕ , la separación entre rigidizadores verticales a , los cantos mayor y menor del panel de alma h_1 y h_0 respectivamente, el espesor del alma t_w , el ancho de alas b_f y el espesor de alas t_f . Mientras que las variables mecánicas definen el propio modelo postcrítico, y son las tensiones de tracción postcríticas σ_t , el ancho de banda g , la longitud de anclaje del campo diagonal en ambas alas s_c y s_t (compresión y tracción respectivamente), el ángulo de inclinación del campo diagonal β y las propiedades mecánicas del material.

La determinación del primer grupo de variables es directa, ya que éstas provienen de las características geométricas de la viga de estudio. Por el contrario, la determinación del segundo grupo de variables se hace más complicada, ya que dichas variables son función de las propiedades geométricas y mecánicas de los paneles que conforman la viga, así como de los esfuerzos internos del elemento.

En los siguientes apartados se determinarán expresiones analíticas que permitirán calcular el campo diagonal de tracciones y el mecanismo de marco. Estas expresiones tendrán en cuenta las características geométricas de las vigas de inercia variable, las condiciones de contorno y los esfuerzos que actúen sobre dichos elementos.

5.3.2. Determinación del ancho de banda

El ancho g del campo diagonal, puede expresarse como la suma de tres sub-anchos (ecuación [5.1]), los cuales se anclan respectivamente a los rigidizadores verticales g_1 , al ala superior g_2 y al ala inferior g_3 (ver figura 5.4). Es de esperar, que a mayor distancia de anclaje del campo diagonal de tracciones en alas (s_c y s_t), mayor será el

ancho g de dicho campo y consecuentemente mayor será la resistencia postcrítica del alma. A su vez, dicha resistencia postcrítica dependerá del ángulo de inclinación β .

Así pues, debe tenerse en cuenta que los sub-anchos anclados en alas (g_2 y g_3) dependen de las distancias de anclaje del campo diagonal de tracciones en alas (s_c y s_t) y de la inclinación del campo diagonal de tracciones β (ver figuras 5.4.a y 5.4.b).

$$g = g_1 + g_2 + g_3 \quad [5.1]$$

Como ya se ha comentado anteriormente, la distancia de anclaje del campo diagonal en alas depende de la rigidez a flexión de las mismas. Como es de esperar, cuanto mayor sea la rigidez a flexión de las alas de la viga armada, mayor será el ancho de anclaje del campo diagonal en éstas y mayor será la resistencia postcrítica de la viga.

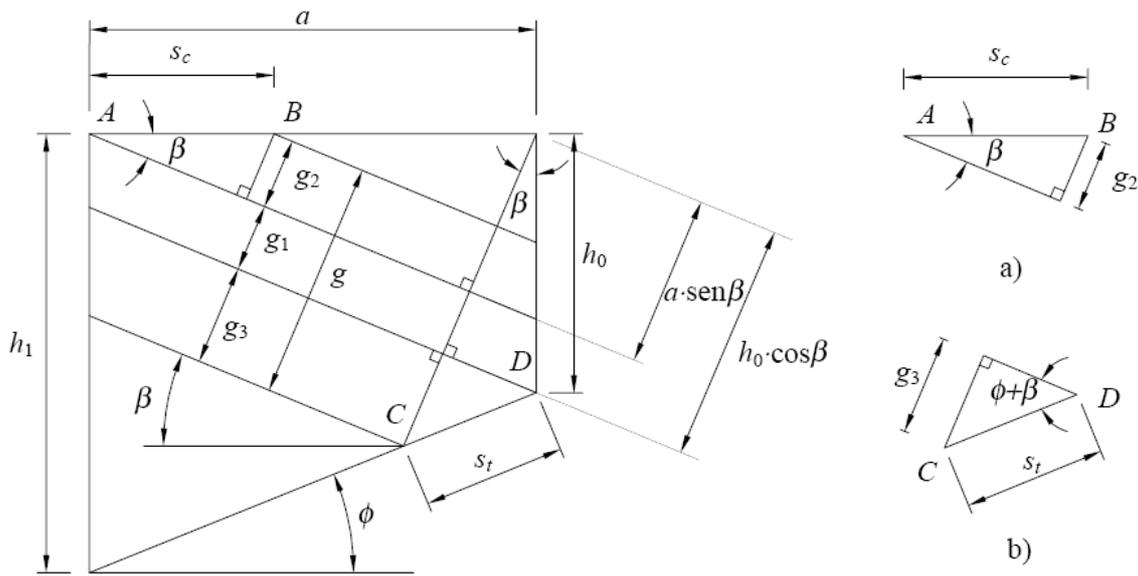


Figura 5.4. Ancho de banda g del campo diagonal de tracciones. a) Distancia de anclaje en ala superior. b) Distancia de anclaje en ala inferior.

La determinación de los sub-anchos del campo diagonal de tracciones se ha realizado a través de las relaciones geométricas derivadas del modelo postcrítico. Por lo tanto, la magnitud de cada uno de los 3 sub-anchos que integran el ancho de banda g , se determina a través de las expresiones [5.2], [5.3] y [5.4].

$$g_1 = h_0 \cdot \cos \beta - a \cdot \text{sen} \beta \quad [5.2]$$

$$g_2 = s_c \cdot \text{sen} \beta \quad [5.3]$$

$$g_3 = s_t \cdot \text{sen}(\phi + \beta) \quad [5.4]$$

Sustituyendo [5.2], [5.3] y [5.4] en [5.1], el ancho del campo diagonal de tracciones g se expresa como:

$$g = (s_c - a) \cdot \text{sen} \beta + h_0 \cdot \cos \beta + s_t \cdot \text{sen}(\phi + \beta) \quad [5.5]$$

La expresión [5.5], pone de manifiesto que para calcular el valor del ancho de banda g , es necesario conocer diferentes variables geométricas y mecánicas tales como las distancias de anclaje del campo diagonal en alas s_c y s_t , y el ángulo de inclinación del campo diagonal de tracciones β .

Para determinar las distancias de anclaje en alas, será necesario conocer los esfuerzos axiales que actúan en las mismas. Por otro lado, la inclinación del campo diagonal de tracciones β , será función de las características geométricas y mecánicas de la viga de inercia variable, así como de los esfuerzos externos que actúen sobre la misma. Cabe destacar de nuevo, que el modelo de capacidad última a cortante definido en este trabajo, se limitará a vigas de inercia variable cuyo agotamiento responda al desarrollo del campo diagonal de tracciones en la dirección de la diagonal geométrica más corta del panel de alma.

5.3.3. Determinación de las distancias de anclaje del campo diagonal en las alas

Los análisis numéricos realizados a lo largo de este trabajo, han permitido definir un modo de colapso de vigas esbeltas de inercia variable, en el cual la capacidad última está estrechamente ligada a la distancia de anclaje del campo diagonal en alas (ver figura 5.5.a).

Cabe destacar, que en este modelo se ha considerado que la viga agota al formarse las rótulas plásticas en ambas alas, siempre y cuando se cumpla que el axil en el ala comprimida no supere la carga que provocará su inestabilidad. Si no se cumpliera esta condición, la capacidad última vendría determinada por la inestabilidad del ala comprimida.

La capacidad última de vigas armadas de inercia variable se define a partir del agotamiento de los paneles que conforman las mismas. En el modelo propuesto, el panel de alma llega a agotamiento al desarrollarse una banda diagonal plastificada en dirección de la diagonal corta del panel, delimitada por las distancias de anclaje del campo en alas s_c y s_t (ver figura 5.5.b). En cambio, el agotamiento de las alas se define a partir de la formación de rótulas plásticas, debido al tiro hacia el interior del alma que ejerce el campo diagonal en las alas.

Aunque los resultados del código numérico, muestran una plastificación del alma que se extiende más allá de los límites marcados por las rótulas plásticas, se considera la hipótesis, de que la banda diagonal plastificada está definida geoméricamente por las distancias de anclaje de los paneles de alas s_c y s_t (ver figura 5.5.a).

Como ya se ha venido comentando, la distancia entre rótulas plásticas depende de la rigidez a flexión de las alas, por lo que las longitudes de anclaje de las tensiones de tracción del alma, se determinan a partir de la resistencia plástica a flexión de las alas. Así pues, es necesario considerar el axil que actúa en las alas ya que éste influye de forma directa en el cálculo de la resistencia plástica a flexión de las alas. Dicho axil proviene de la componente paralela al panel de ala del campo diagonal de tracciones, así como de los posibles esfuerzos exteriores actuantes (momento flector y/o axil).

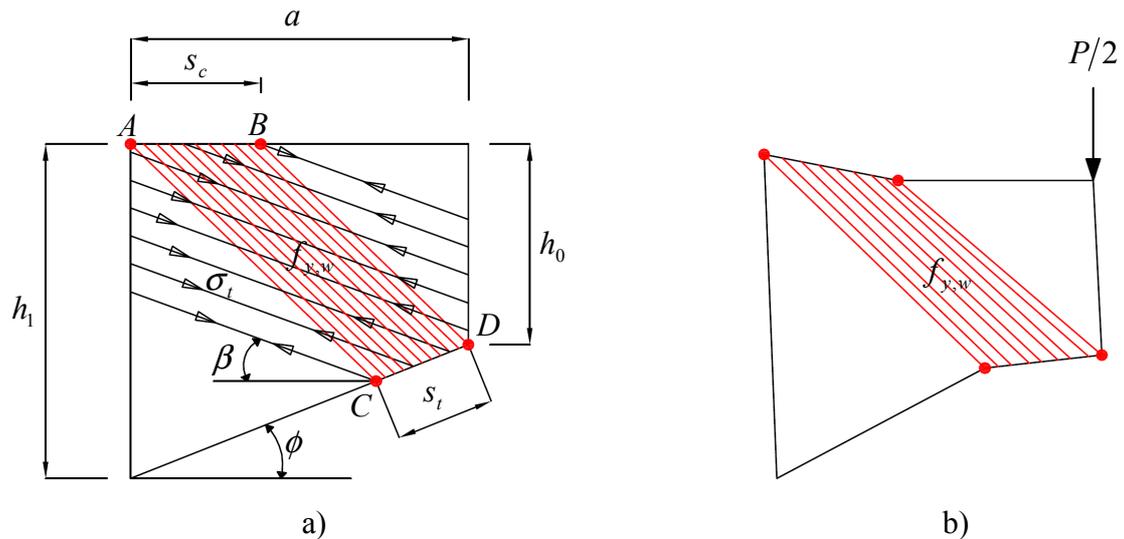


Figura 5.5. Modelo de capacidad última de vigas de inercia variable de alma esbelta. a) Modelo de capacidad última. b) Modo de colapso.

Para determinar la distancia entre rótulas plásticas, se considera cada ala como un elemento lineal sometido a una carga uniformemente repartida perpendicular a su directriz. Dicha carga perpendicular, proviene de la carga exterior resultante del campo diagonal de tracciones que actúa sobre cada ala. A continuación, se presentan las expresiones de dichas cargas actuantes en ambas alas, así como las expresiones de sus componentes perpendiculares.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ala superior} \end{array} \right\} \begin{cases} \sigma_t \cdot t_w \cdot s_c \cdot \text{sen} \beta & \text{(carga exterior resultante del} \\ & \text{campo diagonal de tracciones)} \end{cases} \quad [5.6]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ala superior} \end{array} \right\} \begin{cases} \sigma_t \cdot t_w \cdot s_c \cdot \text{sen}^2 \beta & \text{(componente perpendicular} \\ & \text{a la directriz del ala)} \end{cases} \quad [5.7]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ala inferior} \end{array} \right\} \begin{cases} \sigma_t \cdot t_w \cdot s_c \cdot \text{sen}(\phi + \beta) & \text{(carga exterior resultante del} \\ & \text{campo diagonal de tracciones)} \end{cases} \quad [5.8]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ala inferior} \end{array} \right\} \begin{cases} \sigma_t \cdot t_w \cdot s_c \cdot \text{sen}^2(\phi + \beta) & \text{(componente perpendicular} \\ & \text{a la directriz del ala)} \end{cases} \quad [5.9]$$

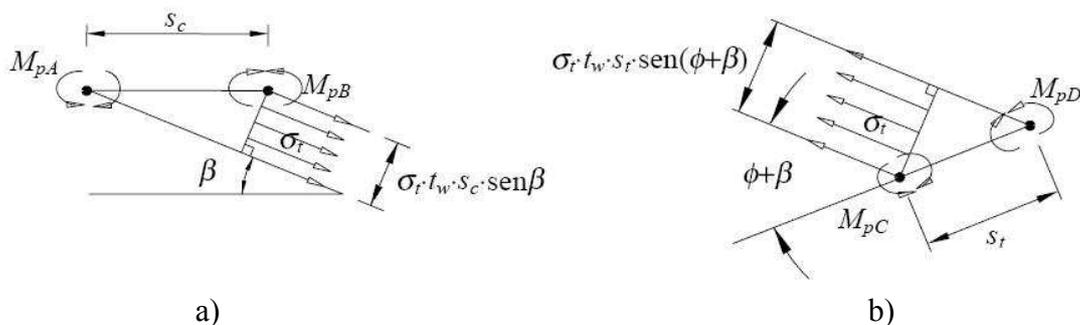


Figura 5.6. Esquemas para la determinación de la distancia entre rótulas plásticas en alas. a) Ala superior. b) Ala inferior.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales en el ala superior, se tiene que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores (componente perpendicular a la directriz del ala, resultante del campo diagonal de tracciones) es igual al trabajo realizado por los momentos plásticos en las secciones donde se han formado rótulas plásticas (ver expresión [5.10]).

$$\sigma_t \cdot t_w \cdot s_c \cdot \text{sen}^2 \beta \cdot (s_c/2) \cdot \omega = (M_{pA} + M_{pB}) \cdot \omega \quad [5.10]$$

donde, M_{pA} y M_{pB} son los momentos plásticos reducidos, cuyo valor depende del esfuerzo axil exterior que actúa en las alas. A través de la ecuación [5.10], se determina la distancia de anclaje del campo diagonal en el ala superior:

$$s_c = \frac{1}{\text{sen} \beta} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (M_{pA} + M_{pB})}{\sigma_t \cdot t_w}} \quad [5.11]$$

Supondremos que los momentos plásticos reducidos en ala A y B no son muy diferentes, y adoptaremos un único valor del momento plástico reducido para el ala superior:

$$s_c = \frac{2}{\text{sen} \beta} \cdot \sqrt{\frac{M_p}{\sigma_t \cdot t_w}}, \quad 0 < s_c < a \quad [5.12]$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales en el ala inferior se llega a la siguiente igualdad:

$$\sigma_t \cdot t_w \cdot s_c \cdot \text{sen}^2(\phi + \beta) \cdot (s_t/2) \cdot \omega = (M_{pC} + M_{pD}) \cdot \omega \quad [5.13]$$

Siguiendo los mismos pasos que antes, se obtiene la siguiente expresión de la distancia de anclaje del campo diagonal en el ala inferior:

$$s_t = \frac{2}{\text{sen}(\phi + \beta)} \cdot \sqrt{\frac{M_p}{\sigma_t \cdot t_w}}, \quad 0 < s_c < a \cdot \text{sec} \phi \quad [5.14]$$

Más adelante se verá que la magnitud del campo diagonal de tracciones σ_t , depende de las tensiones principales de compresión durante la fase postcrítica.

5.3.4. Obtención del momento plástico reducido en el ala

Las expresiones que permiten determinar la distancia de anclaje del campo diagonal en alas, han sido obtenidas en el apartado anterior (ver expresiones [5.12] y [5.14]). Como puede observarse en dichas expresiones, la distancia de anclaje del campo diagonal en alas, es función del momento plástico reducido de cada ala. En este apartado, se determinará dicho momento plástico reducido, el cual considera la existencia de un axil aplicado sobre el ala que genera una distribución uniforme de tensiones. Así pues, el momento plástico de una sección se ve reducido por la presencia de un esfuerzo axil. Este axil resulta de la componente paralela al panel de ala del campo diagonal de

tracciones, así como de los posibles esfuerzos exteriores actuantes (momento flector y/o axil).

En la figura 5.7.a se muestra la distribución de tensiones plásticas en una sección de ala debido a esfuerzos axiles y de flexión. Dicha ala, se ve sometida a una tensión uniforme en la parte central de su sección y en un área definida por $2 \cdot a_f \cdot b_f$ (esfuerzo axil N). La distancia a_f viene determinada por el valor del axil actuante sobre el ala. La existencia de un esfuerzo axil provoca el desplazamiento vertical de la fibra neutra plástica, con respecto a la posición correspondiente a la actuación exclusiva de un momento flector, en cuyo caso la fibra neutra plástica coincide con la fibra baricéntrica.

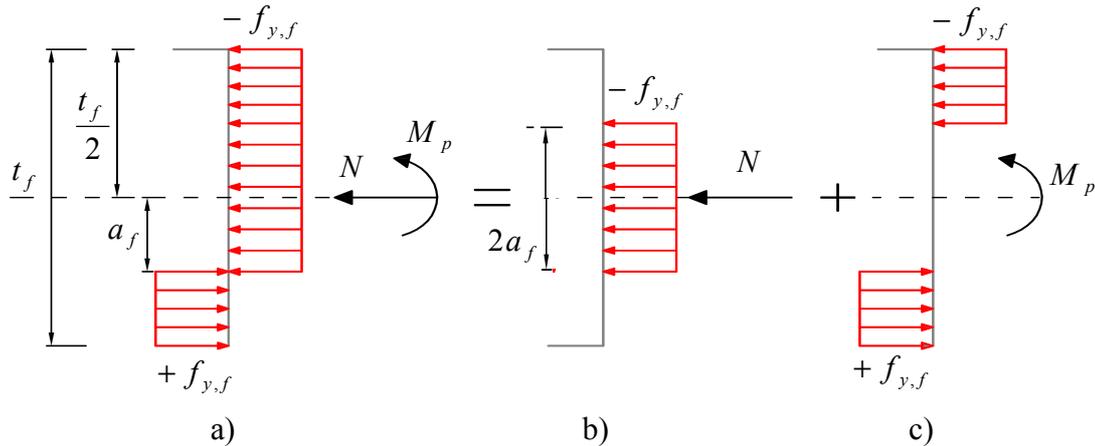


Figura 5.7. Distribución de tensiones plásticas en una sección de ala debido a esfuerzos axiles y de flexión. a) Tensiones plásticas. b) Tensiones plásticas del axil. c) Tensiones plásticas de flexión.

Para obtener el momento plástico reducido M_p mostrado en la figura 5.7.a, puede considerarse un estado tensional equivalente, constituido por dos distribuciones de tensiones. Una distribución uniforme ocasionada por el axil N (ver figura 5.7.b) y una distribución asimétrica debida al momento plástico reducido M_p (ver figura 5.7.c).

Del equilibrio seccional se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$N = 2 \cdot a_f \cdot b_f \cdot f_{y,f} \quad [5.15]$$

$$M_p = M_{ps} - a_f^2 \cdot b_f \cdot f_{y,f} = \frac{t_f^2}{4} \cdot b_f \cdot f_{y,f} - a_f^2 \cdot b_f \cdot f_{y,f} \quad [5.16]$$

donde, M_{ps} es el momento plástico de la sección y $f_{y,f}$ es el límite elástico del acero del ala. Dividiendo N por el axil plástico N_{ps} de la sección total y M_p por M_{ps} , se obtiene:

$$\frac{N}{N_{ps}} = \frac{2 \cdot a_f \cdot b_f \cdot f_{y,f}}{b_f \cdot t_f \cdot f_{y,f}} = 2 \cdot \frac{a_f}{t_f} \quad [5.17]$$

$$\frac{M_p}{M_{ps}} = \frac{M_{ps}}{M_{ps}} - \frac{a_f^2 \cdot b_f \cdot f_{y,f}}{\left(\frac{t_f^2}{4}\right) \cdot b_f \cdot f_{y,f}} = 1 - 4 \cdot \frac{a_f^2}{t_f^2} \quad [5.18]$$

Sustituyendo la ecuación [5.17] en [5.18] se obtiene la siguiente expresión:

$$M_p = M_{ps} \cdot \left[1 - \left(\frac{N}{N_{ps}} \right)^2 \right] = \frac{t_f^2}{4} \cdot b_f \cdot f_{y,f} \cdot \left[1 - \left(\frac{N}{b_f \cdot t_f \cdot f_{y,f}} \right)^2 \right] \quad [5.19]$$

La ecuación [5.19] permite determinar el momento plástico reducido en alas en función del axil actuante N . A su vez, dicha ecuación se puede particularizar al caso de nuestro prototipo, en donde tenemos un momento flector M_{h0} solicitando la sección de canto h_0 , pero en cambio el momento en el canto mayor h_1 es siempre nulo.

$$M_{p,\text{sup}} = \frac{t_f^2}{4} \cdot b_f \cdot f_{y,f} \cdot \left[1 - \left(\frac{N_{\text{sup}}}{b_f \cdot t_f \cdot f_{y,f}} \right)^2 \right] \quad [5.20]$$

$$M_{p,\text{inf}} = \frac{t_f^2}{4} \cdot b_f \cdot f_{y,f} \cdot \left[1 - \left(\frac{N_{\text{inf}}}{b_f \cdot t_f \cdot f_{y,f}} \right)^2 \right] \quad [5.21]$$

donde, N_{sup} y N_{inf} son los axiles actuando en el ala superior e inferior respectivamente, y tienen las siguientes expresiones particularizadas para el caso de nuestro prototipo:

$$N_{\text{sup}} = -\sigma_t \cdot t_w \cdot s_c \cdot \text{sen}\beta \cdot \cos\beta \quad [5.22]$$

$$N_{\text{inf}} = - \left[\frac{M_{h0}}{(h_0 + t_f) \cdot \cos\phi} + \sigma_t \cdot t_w \cdot s_t \cdot \text{sen}(\phi + \beta) \cdot \cos(\phi + \beta) \right] \quad [5.23]$$

5.4. Tensiones normales en el alma cuando el panel de alma abolla

En los apartados anteriores, se han determinado las expresiones de algunas de las variables necesarias para definir el modelo propuesto de capacidad última de vigas esbeltas de inercia variable. Así mismo, aún faltan por determinar dos variables fundamentales, que son, la magnitud de las tensiones de tracción σ_t , en el alma, que aparecen posterior a la abolladura, y la inclinación del campo diagonal de tracciones β .

Para hallar la expresión de dichas variables es necesario conocer previamente el estado tensional en el alma cuando ésta abolla, para que aplicando el criterio de fluencia del material se pueda calcular la capacidad postcrítica del alma, y así determinar las tensiones de tracción σ_t . Dicho estado tensional está constituido por la tensión tangencial crítica de abolladura y las tensiones normales de flexión que actúan en el panel de alma.

Tal y como se ha comentado anteriormente, la capacidad última a cortante de vigas de inercia variable, se interpreta a través de la superposición de tres mecanismos resistentes claramente diferenciados: el primero, correspondiente a la aparición del fenómeno de abolladura (tensión crítica de abolladura), el segundo, asociado al desarrollo de un campo diagonal de tracciones, y el tercero, referente a un mecanismo de marco debido a

la rigidez a flexión de las alas. Los dos primeros mecanismos dependen principalmente de las características geométricas y mecánicas del panel de alma, mientras que el tercero depende de las características de los paneles de alas.

Así pues, el comportamiento hasta agotamiento del panel de alma, se define a través de la superposición del estado tensional cuando el alma abolla (tensión crítica de abolladura) y el estado tensional correspondiente a la fase postcrítica (desarrollo del campo diagonal de tracciones).

En el capítulo anterior se ha estudiado el comportamiento hasta abolladura de vigas armadas de inercia variable, obteniendo expresiones analíticas que permiten calcular la tensión crítica de abolladura del panel de alma, en geometrías habitualmente utilizadas en este tipo de elementos. Sin embargo, la geometría y condiciones de contorno de las vigas de inercia variable favorecen la aparición de tensiones normales de flexión σ_b , cuya magnitud depende de la geometría del elemento y del momento flector proveniente de la carga crítica de inestabilidad del alma. Por lo tanto, para conocer el estado tensional del panel de alma, cuando éste abolla, será necesario obtener el valor de la tensión tangencial crítica de abolladura y de las tensiones normales de flexión σ_b (ver figura 5.8). Así mismo, la determinación del campo diagonal de tracciones τ , requerirá la consideración de la tensión tangencial crítica de abolladura τ_{cr} y de la tensión normal en el alma σ_b .

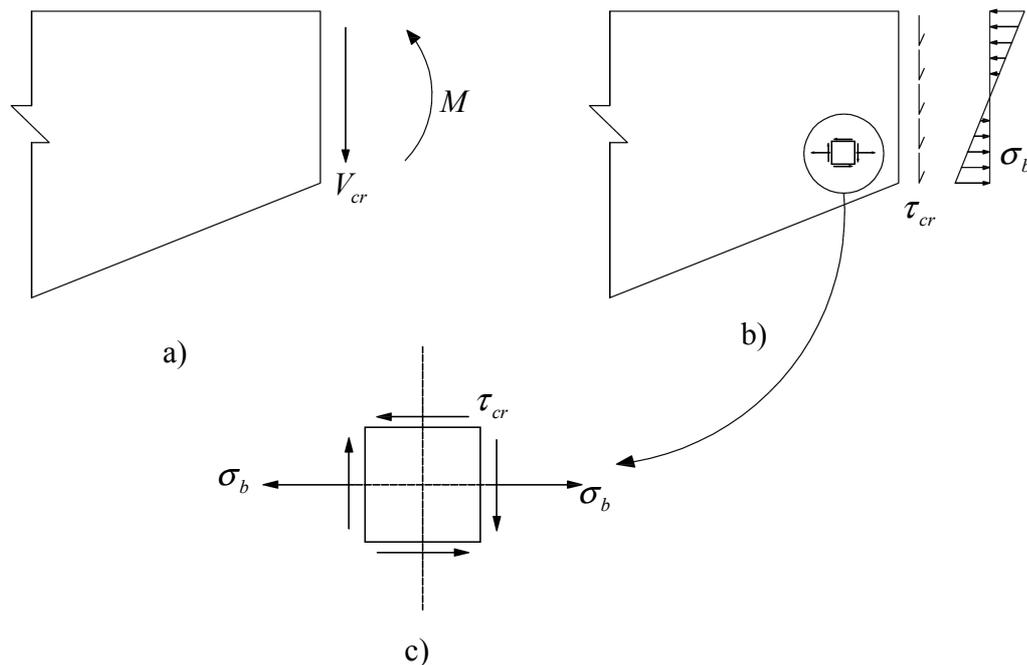


Figura 5.8. Esfuerzos y tensiones en el alma. a) Esfuerzos actuantes en el canto menor. b) Distribución de tensiones en el canto menor. c) Estado tensional en un elemento diferencial cuando el alma abolla.

La determinación de las tensiones normales en el canto menor del alma se realiza considerando el modelo de análisis de la figura 5.9. Dicho modelo consiste en una viga simplemente apoyada con dos voladizos sometida a una carga exterior P en centro de vano.

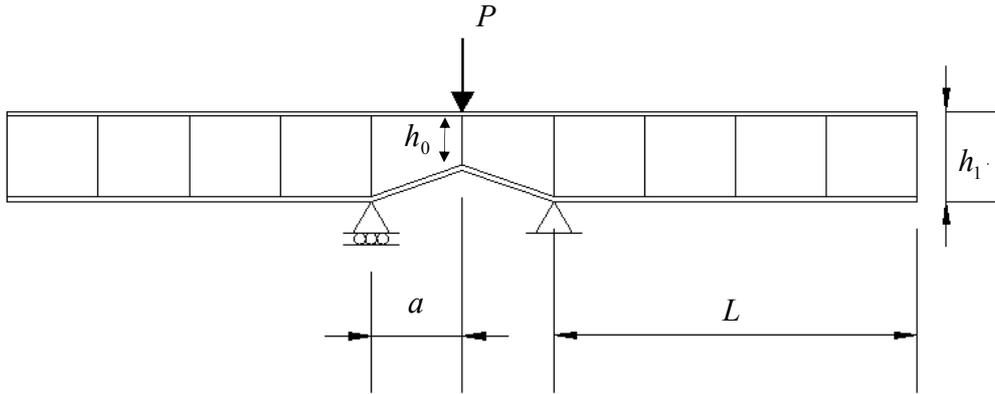


Figura 5.9. Modelo de análisis considerado en la determinación las tensiones normales en el canto menor.

En el momento en que se alcanza la tensión crítica de abolladura (correspondiente a una carga exterior), también aparecen en el alma, tensiones normales cuya magnitud depende de las propiedades geométricas y mecánicas de la viga. Teniendo en cuenta, que el alma resiste la totalidad del esfuerzo cortante, la expresión de la carga para la cual se produce la abolladura del alma, es la siguiente:

$$P = 2 \cdot \tau_{cr} \cdot h_0 \cdot t_w \quad [5.24]$$

donde, h_0 es el canto menor del alma en el tramo de inercia variable y t_w es el espesor del alma. En el instante que abolla el alma, la magnitud del momento flector que actúa en la sección de canto menor h_0 , se determina mediante la expresión [5.25].

$$M = \frac{P}{2} \cdot a = \tau_{cr} \cdot h_0 \cdot t_w \cdot a \quad [5.25]$$

La tensión normal en centro de vano (canto menor del alma) presenta una variación lineal a lo largo del canto. Dado que el considerar dicha variación en el modelo de capacidad última complicaría su utilización, se decide utilizar la tensión normal σ_b correspondiente a una determinada profundidad. Se utilizará la tensión existente en el centro de gravedad de la distribución triangular de tensiones actuante sobre el alma ($(2/3) \cdot (h_0/2)$), obteniendo así la siguiente expresión:

$$\sigma_b = \frac{M \cdot h_0}{3 \cdot I_{h_0}} \quad [5.26]$$

donde, I_{h_0} es el momento de inercia en la sección de canto menor de la viga de inercia variable.

5.5. Criterio de plastificación utilizado

Los paneles que conforman las vigas armadas, están sometidos a un estado de tensión plana, por lo que es necesario definir un criterio de fluencia del material que considere dicho estado de tensiones. El criterio de plastificación con mayor alcance para el caso de materiales dúctiles es el criterio de Von Mises, el cual es aceptado

internacionalmente. Dicho criterio de rotura dúctil postula que la plastificación en un punto comienza cuando en este punto la energía de distorsión almacenada por unidad de volumen es la misma que la almacenada en el ensayo de tracción simple al comienzo de la plastificación.

$$\sigma_{co} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 - \sigma_2 \cdot \sigma_3} \quad [5.27]$$

En la expresión [5.27], σ_1 , σ_2 , y σ_3 son las tensiones principales. Para el caso de estados biaxiales de tensiones, como es el caso de vigas armadas, la expresión de la tensión de comparación queda simplificada como sigue a continuación:

$$\sigma_{co} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + -\sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad [5.28]$$

El criterio de plastificación se define igualando la tensión de comparación σ_{co} al límite elástico del material acero del alma $f_{y,w}$ (ver ecuación [5.29]). Dicha ecuación define una superficie de fluencia para un estado biaxial de tensiones y viene representada por la elipse que se muestra en la figura 5.10. En dicha figura se observan los estados tensionales que provocan la plastificación del material.

$$f_{y,w}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + -\sigma_1 \cdot \sigma_2 \quad [5.29]$$

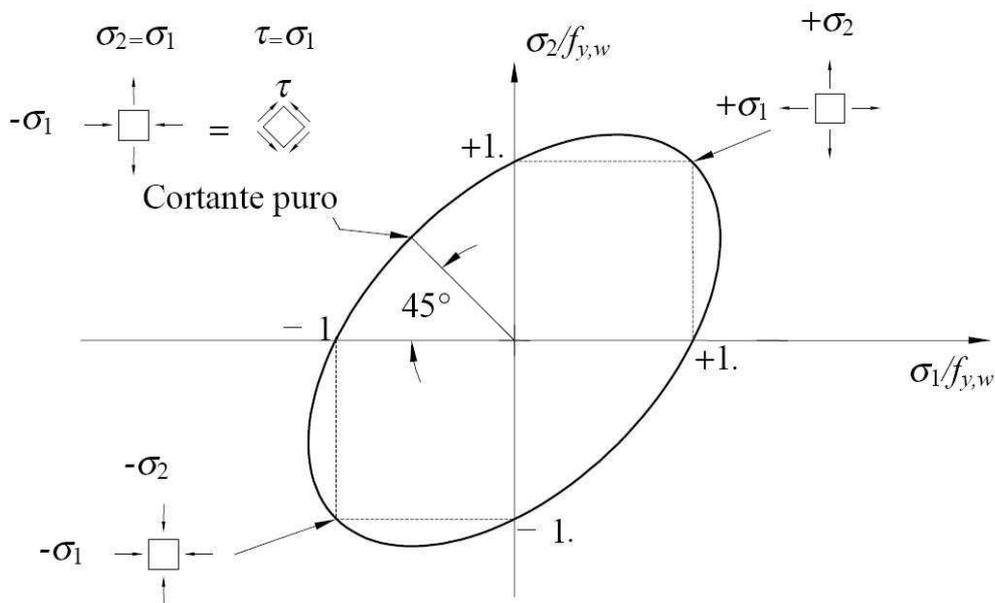


Figura 5.10. Superficie de fluencia del material según criterio de Von Mises para un estado biaxial de tensiones.

Tal y como se observará en los siguientes apartados, será de gran utilidad, el definir el criterio de plastificación respecto a unos ejes coordenados uv diferentes de los principales. Las ecuaciones [5.30] y [5.31] muestran la relación existente entre las tensiones principales y las tensiones normal y tangencial existentes según unos ejes coordenados cualesquiera uv . La relación existente entre las tensiones principales y las

tensiones normal y tangencial según unos ejes coordenados cualesquiera uv queda reflejada en las ecuaciones [5.30] y [5.31].

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_u - \sigma_v}{2}\right)^2 + \tau_{uv}^2} \quad [5.30]$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_u - \sigma_v}{2}\right)^2 + \tau_{uv}^2} \quad [5.31]$$

Sustituyendo [5.30] y [5.31] en [5.29] se obtiene la expresión [5.32] que permite definir el criterio de plastificación del material respecto a un sistema de ejes coordenados uv cualquiera.

$$f_{y,w}^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 - \sigma_u \cdot \sigma_v + 3\tau_{uv}^2 \quad [5.32]$$

5.6. Determinación de los estados tensionales existentes en paneles esbeltos de alma de vigas de inercia variable

Para conocer la capacidad última del panel de alma es necesario referir los estados tensionales que actúan en dicho panel, al criterio de agotamiento del material (criterio de Von Mises). Esto permitirá determinar la magnitud del campo diagonal σ_t , y en consecuencia la capacidad postcrítica del alma. Así pues, para llevar a cabo la superposición de los diferentes estados tensionales del alma, hace falta referir sus respectivas magnitudes tensionales a unos ejes ortogonales uv , de manera que dichas magnitudes se correspondan con las del criterio de plastificación. Con el objetivo de determinar el ángulo de inclinación del campo diagonal de tracciones β , el eje u de las abscisas se dispone paralelo al desarrollo de las tensiones de tracción σ_b , de modo que dicho eje tiene un ángulo de inclinación β respecto al eje global X (ver figura 5.11).

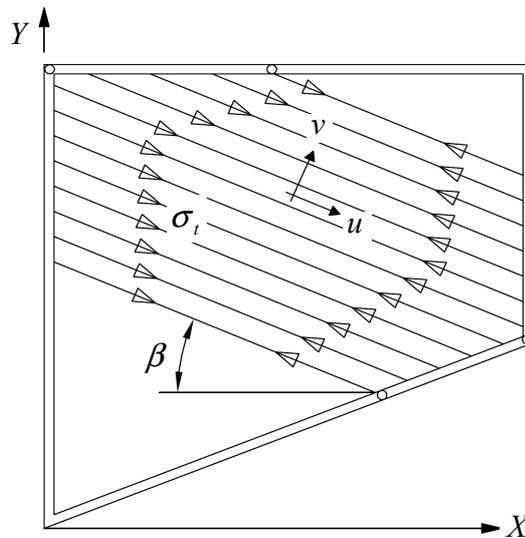


Figura 5.11. Ubicación de los ejes ortogonales uv en el desarrollo del campo diagonal de tracciones.

En los próximos apartados se determinarán expresiones analíticas que permitirán calcular la magnitud de las componentes normales y tangenciales de los estados tensionales referidos al sistema de ejes coordenados uv definidos en la figura 5.11.

5.6.1. Estado tensional en el alma cuando se alcanza la inestabilidad

En el momento en que se produce la abolladura del panel de alma, se desarrolla en el canto menor de dicho elemento, un estado tensional formado por la tensión normal σ_b debida al esfuerzo flector exterior y por la tensión tangencial crítica de abolladura τ_{cr} . Gracias a la ubicación de los ejes uv que ha sido elegida en el apartado anterior, es posible definir el estado tensional del alma en función del ángulo de inclinación del campo diagonal de tracciones β , variable a determinar en el modelo de capacidad última, pudiendo así establecer el criterio de plastificación en función de dicho ángulo de inclinación.

A continuación, se estudia un elemento diferencial de panel de alma localizado en el canto menor de dicho panel y sometido al estado tensional comentado en el párrafo anterior. Para el análisis del elemento, se considera en primer lugar, las tensiones tangenciales y, posteriormente, las tensiones normales, para finalmente, superponer ambos estados tensionales. La figura 5.12.a muestra el círculo de Mohr correspondiente al estado de tensiones tangenciales al que se ve sometido el elemento diferencial de chapa, cuando se alcanza la tensión crítica de abolladura τ_{cr} .

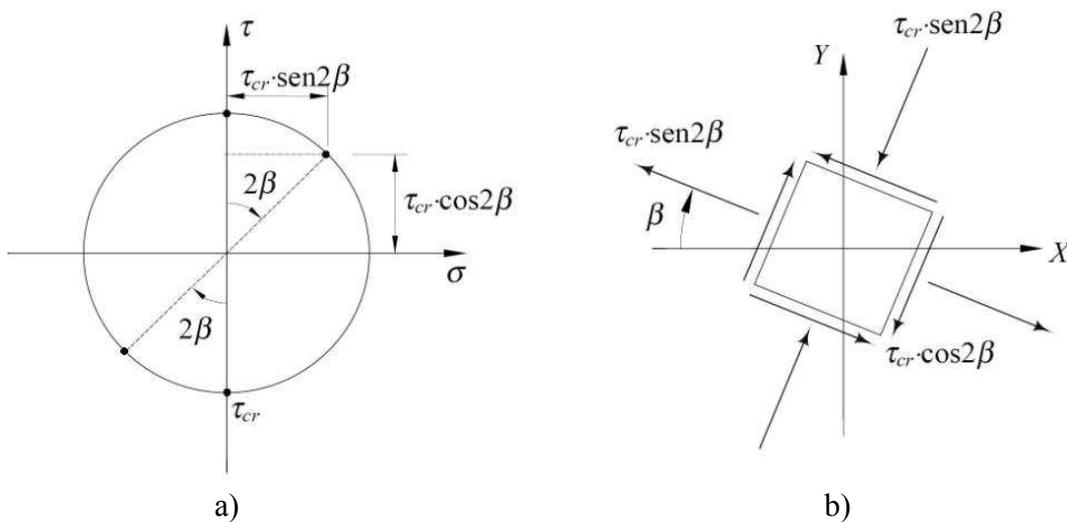


Figura 5.12. Tensiones tangenciales τ_{cr} en un elemento diferencial. a) Interpretación del estado tensional a través del círculo de Mohr. b) Tensiones tangenciales y normales respecto a un ángulo de inclinación β .

Las expresiones analíticas de la tensión normal y tangencial que solicitan el elemento diferencial mostrado en la figura 5.12.b, para cualquier ángulo de rotación β , pueden obtenerse a través del círculo de Mohr (ver figura 5.12.a). Las expresiones [5.33], [5.34] y [5.35] permiten determinar la tensión normal σ_u , paralela a la dirección del campo diagonal de tracciones, la tensión normal perpendicular σ_v y la tensión tangencial τ_{uv} respectivamente.

$$\sigma_u = \tau_{cr} \cdot \text{sen}2\beta \quad [5.33]$$

$$\sigma_v = -\tau_{cr} \cdot \text{sen}2\beta \quad [5.34]$$

$$\tau_{uv} = \tau_{cr} \cdot \text{cos}2\beta \quad [5.35]$$

Consideremos ahora las tensiones normales σ_b . Tal y como se observa en la figura 5.13.a, y del mismo modo que en el caso anterior, es posible obtener a través del círculo de Mohr, las expresiones analíticas para determinar la magnitud de la tensión tangencial y normal del elemento diferencial, en función del ángulo β .

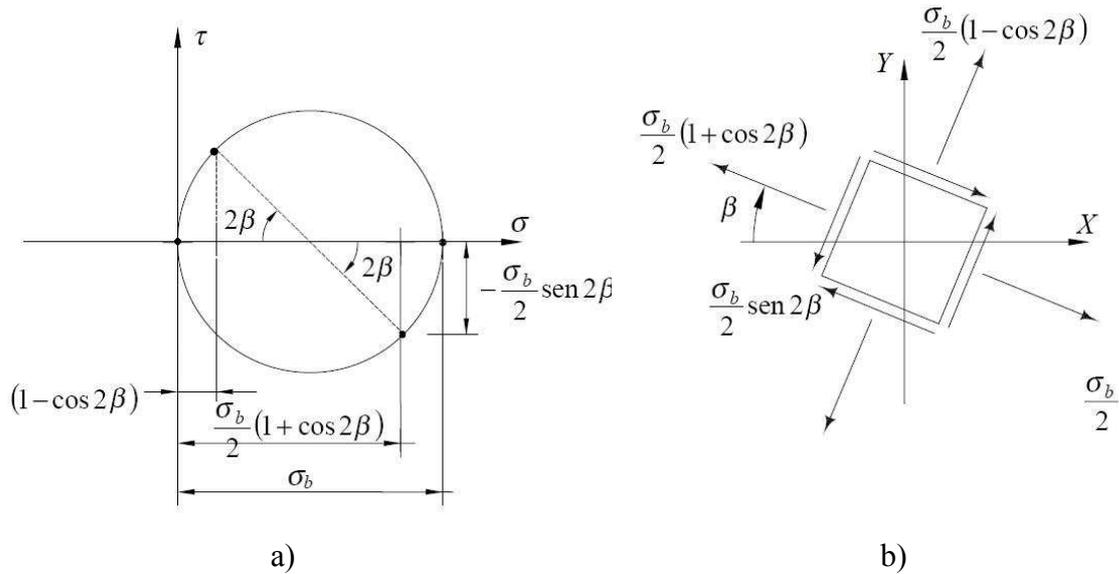


Figura 5.13. Tensiones normales σ_b en un elemento diferencial. a) Interpretación del estado tensional a través del círculo de Mohr. b) Tensiones normales y tangenciales respecto a un ángulo de inclinación β .

Las expresiones [5.36], [5.37] y [5.38] permiten obtener la tensión normal σ_u , paralela a la dirección del campo diagonal de tracciones, la tensión normal perpendicular σ_v y la tensión tangencial τ_{uv} respectivamente.

$$\sigma_u = \frac{\sigma_b}{2} \cdot (1 + \text{cos}2\beta) \quad [5.36]$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_b}{2} \cdot (1 - \text{cos}2\beta) \quad [5.37]$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_b}{2} \cdot \text{sen}2\beta \quad [5.38]$$

5.6.2. Cálculo de la tensión de tracción en la fase postcrítica

Se dispone en estos momentos de expresiones analíticas que permiten determinar, para cualquier ángulo de inclinación β , la magnitud de las tensiones normales y tangenciales de un elemento diferencial del panel de alma cuando éste abolla. Tras abollar el alma, se desarrolla un campo diagonal de tracciones que proporciona una reserva de resistencia postcrítica a la misma, y cuya magnitud se determinará en el presente apartado. Para

ello, se introducen los estados tensionales que intervienen en el desarrollo de la banda plastificada (expresiones [5.33], [5.34], [5.35], [5.36], [5.37] y [5.38]) en la ecuación que define el criterio de plastificación del alma (ecuación [5.32]).

El agotamiento del alma se alcanza cuando se desarrolla una banda plastificada en la misma. El estado tensional en el alma que produce el desarrollo de dicha banda plastificada, se define a través de la superposición de los estados tensionales que corresponden a la tensión crítica de abolladura, la tensión normal y la tensión de tracción del campo diagonal de tracciones (ver figura 5.14).

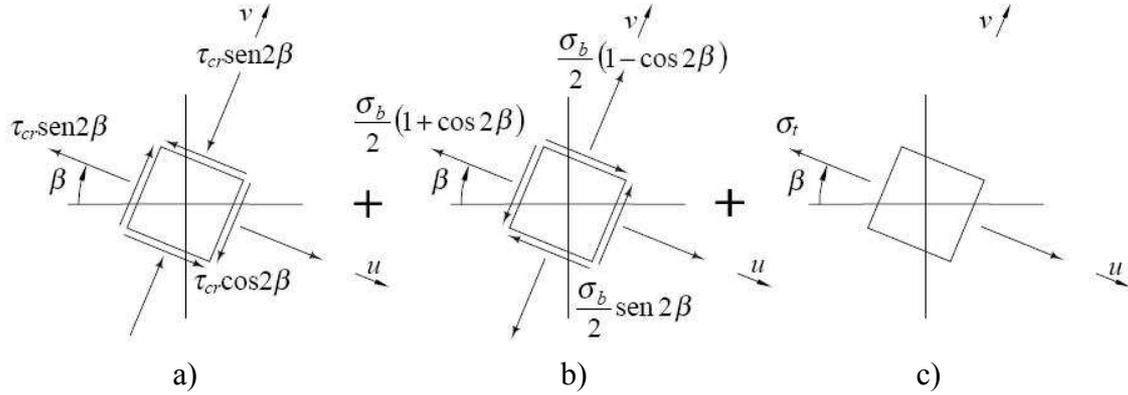


Figura 5.14. Estados tensionales en el alma. a) Tensión crítica de abolladura. b) Tensiones normales. c) Campo diagonal de tracciones.

Así pues, las componentes normales y tangenciales que producen la plastificación del panel de alma pueden obtenerse mediante las expresiones [5.39], [5.40] y [5.41].

$$\sigma_u = \tau_{cr} \cdot \text{sen} 2\beta + \frac{\sigma_b}{2} \cdot (1 + \cos 2\beta) + \sigma_t \quad [5.39]$$

$$\sigma_v = -\tau_{cr} \cdot \text{sen} 2\beta + \frac{\sigma_b}{2} \cdot (1 - \cos 2\beta) \quad [5.40]$$

$$\tau_{uv} = \tau_{cr} \cdot \cos 2\beta - \frac{\sigma_b}{2} \cdot \text{sen} 2\beta \quad [5.41]$$

Sustituyendo las expresiones [5.39], [5.40] y [5.41] en la ecuación [5.32] y tras realizar un seguido de operaciones algebraicas, se determina la ecuación [5.42], que permite obtener la magnitud σ_t del campo diagonal de tracciones, en función del ángulo de inclinación β . Dicha expresión fue determinada por Zárate, A. V. (2002) [1].

$$\sigma_t = -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{A^2 - 4(\sigma_b^2 + 3\tau_{cr}^2 - f_{y,w}^2)}}{2} \quad [5.42]$$

$$A = 3\tau_{cr} \cdot \text{sen} 2\beta + 2\sigma_b \cdot \cos^2 \beta - \sigma_b \cdot \text{sen}^2 \beta$$

5.6.3. Ángulo de inclinación del campo diagonal de tracciones

Llegados a este punto, ya es posible calcular la capacidad última a cortante de vigas esbeltas de inercia variable a través del modelo propuesto. Dicho modelo, define el agotamiento del panel de alma en función, entre otras variables, del ángulo de inclinación β del campo diagonal de tracciones.

Dado la correlación existente entre las distintas variables que definen el modelo propuesto, cualquier variación del ángulo de inclinación β influye en la magnitud del resto de variables y por lo tanto, en la capacidad última de la viga. Por este motivo, se hace necesario determinar un ángulo de inclinación β óptimo del campo diagonal de tracciones.

El ángulo de inclinación β , corresponde a aquél para el cual la derivada del cortante último de la viga respecto a dicho ángulo sea nula. Por lo tanto, se itera en el modelo propuesto respecto al ángulo β hasta obtener un cortante máximo.

5.7. Comparación de los resultados derivados del modelo de capacidad última con resultados obtenidos mediante el código numérico. Mejoras del modelo

El propósito de este apartado, es el de comparar los resultados obtenidos del modelo propuesto con los del código numérico. Esto permitirá reafirmar las hipótesis utilizadas a lo largo de este trabajo, así como redefinir algunas variables con el fin de mejorar los resultados obtenidos del modelo de capacidad última.

5.7.1. Evaluación del comportamiento del modelo propuesto

Se considera una viga esbelta de inercia variable sometida a una carga exterior P , con una esbeltez del panel de alma en el canto menor de $\lambda_{w,h_0} = 267$, un espesor de alma de $t_w = 6$ mm, una inclinación del ala inferior $tg\phi = 0,2$, un ancho de ala $b_f = 900$ mm, con espesores de ambas alas de $t_f = 45$ mm y un espesor de alma de $t_w = 6$ mm.

Se estudian dos puntos representativos del panel de alma. El primero está situado en el centro del panel de alma y próximo al eje neutro, mientras que el segundo se encuentra a una distancia $h_0/3$ del eje neutro del canto menor h_0 (punto donde se ha calculado la tensión normal σ_b en el modelo propuesto). Ambos puntos están ubicados en la diagonal donde se desarrolla el campo diagonal de tracciones.

Los valores de las variables geométricas de la viga de inercia variable descrita hace un momento, así como sus variables mecánicas determinadas a partir del modelo propuesto de capacidad última, se reflejan en la Tabla 5.1. Cabe destacar, que el valor de λ_{w,h_0} , (esbeltez del panel de alma), se ha determinado con respecto al canto menor h_0 del panel de alma, debido a que la capacidad última está referida al agotamiento del alma en dicho canto. Las magnitudes de las tensiones τ_{cr} , σ_b y σ_t se han obtenido a través de las expresiones [4.14], [5.26] y [5.42] respectivamente, mientras que el valor de β se ha determinado mediante un proceso iterativo tras el cual se obtiene el cortante máximo. Las propiedades del material utilizado en este estudio, son las descritas en el capítulo 4 (acero S355 con límite elástico $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$ tanto en alma como en alas, módulo de

elasticidad $E=210000N/mm^2$, coeficiente de Poisson $\nu=0,3$ y comportamiento elastoplástico).

$\lambda_{w,h0}$	λ_f	η	α	$tg\phi$	τ_{cr} (MPa)	σ_b (MPa)	σ_t (MPa)	β
267	20	0,45	1,0	0,2	27,3	5,5	315	30°

Tabla 5.1. Variables geométricas y mecánicas obtenidas con el modelo propuesto de capacidad última a cortante de vigas armadas de inercia variable.

En la figura 5.15 se muestra la representación a través del círculo de Mohr, de los estados tensionales correspondientes a los instantes en que se produce la abolladura del alma y en que se alcanza el agotamiento. En dicha figura, puede apreciarse que tras producirse la abolladura del alma y alcanzar la tensión tangencial crítica de abolladura, se produce un aumento significativo de la tensión principal de tracción hasta alcanzar el agotamiento. Por otro lado, también puede observarse como la tensión principal de compresión, prácticamente no varía respecto a la tensión principal cuando el alma abolla, e incluso se produce una ligera disminución de dicha tensión.

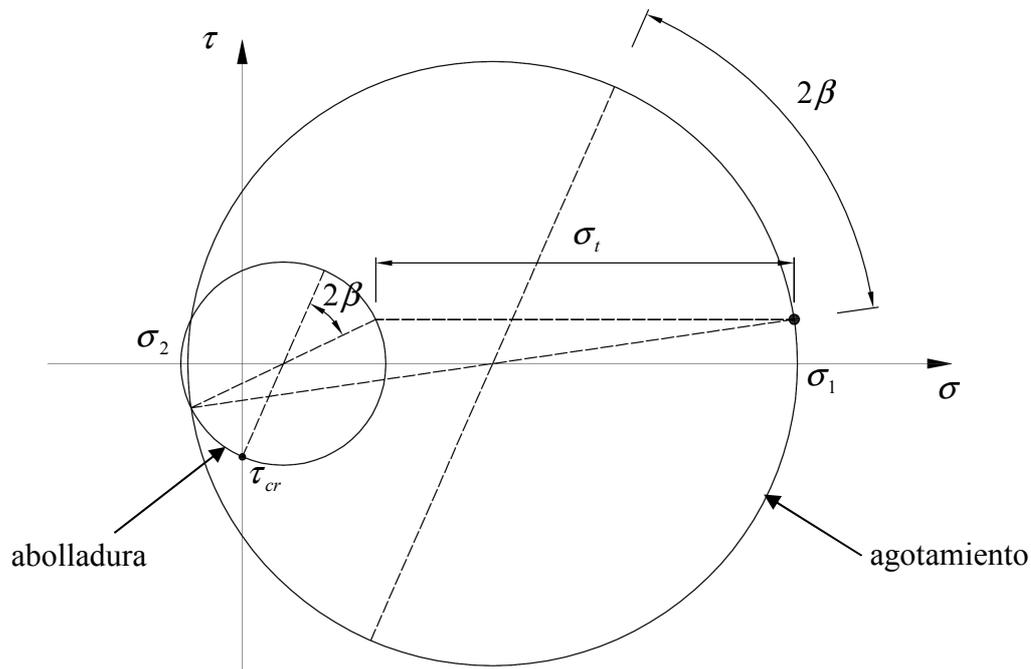


Figura 5.15. Estados tensionales del alma hasta agotamiento según el modelo propuesto y representados a través del círculo de Mohr.

La figura 5.16 muestra el desarrollo de las tensiones principales hasta alcanzar el agotamiento según el modelo propuesto y según el código numérico. Las tensiones principales obtenidas del código numérico, corresponden a un punto de integración situado en el plano medio del panel de alma (tensiones de membrana del panel), de los elementos comentados anteriormente. Así mismo, la figura 5.16 permite constatar que

el comportamiento obtenido a través de ambos métodos es muy similar, ya que tras abollar el alma (punto A), la tensión principal de tracción se incrementa de forma considerable hasta intersectar con la superficie de fluencia (elipse de Von Mises), momento en el cual se produce el agotamiento. Por lo tanto, se puede confirmar la bondad del modelo propuesto de capacidad última de vigas esbeltas de inercia variable. No obstante, se observa que las tensiones principales de compresión obtenidas mediante el código numérico, muestran un incremento nada despreciable. Este efecto se tendrá en cuenta más adelante con el propósito de mejorar los resultados obtenidos.

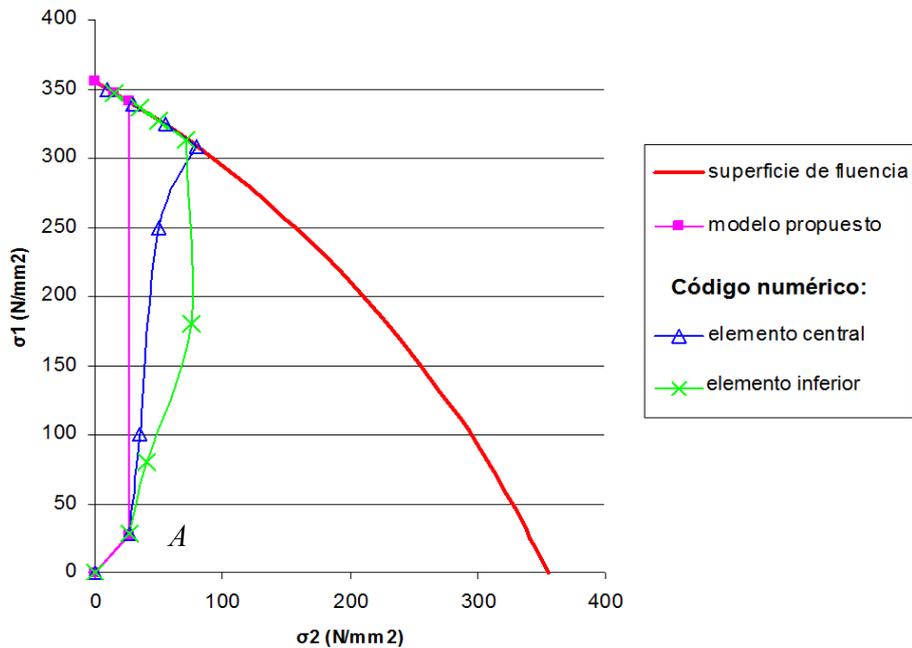


Figura 5.16. Comparación de las tensiones principales según el modelo propuesto y el código numérico de elementos finitos, $tg\phi = 0,2$.

La figura 5.17.b muestra los resultados obtenidos del código numérico referentes a la capacidad última a cortante de vigas armadas de inercia variable. En esta misma figura, se superponen los resultados correspondientes a las distancias de anclaje en alas s_c y s_t , así como el ancho de banda g y el ángulo de inclinación β del campo diagonal de tracciones, los cuales han sido obtenidos mediante el modelo propuesto. Puede apreciarse que la zona del panel de alma en donde se desarrolla el campo diagonal de tracciones según el modelo numérico (zona plastificada), coincide de forma significativa con el ancho de banda g determinado con el modelo propuesto.

En la figura 5.17.c puede observarse la posición de las rótulas plásticas en alas, obtenida con el modelo de elementos finitos. Se pone de manifiesto, que la ubicación de dichas rótulas plásticas coincide con la obtenida mediante el modelo propuesto de capacidad última. En el caso del modelo propuesto, las rótulas plásticas vienen determinadas por las distancias de anclaje del campo diagonal, mientras que en el código numérico, dichas rótulas corresponden a las zonas de los paneles de alas en las que se alcanza la tensión de plastificación de Von Mises (ver figura 5.17). Cabe destacar, que dicha tensión de plastificación se alcanza en una longitud considerable del panel de ala. Las rótulas plásticas se ubican aproximadamente, en las distancias medias de las zonas plastificadas de los paneles de alas.

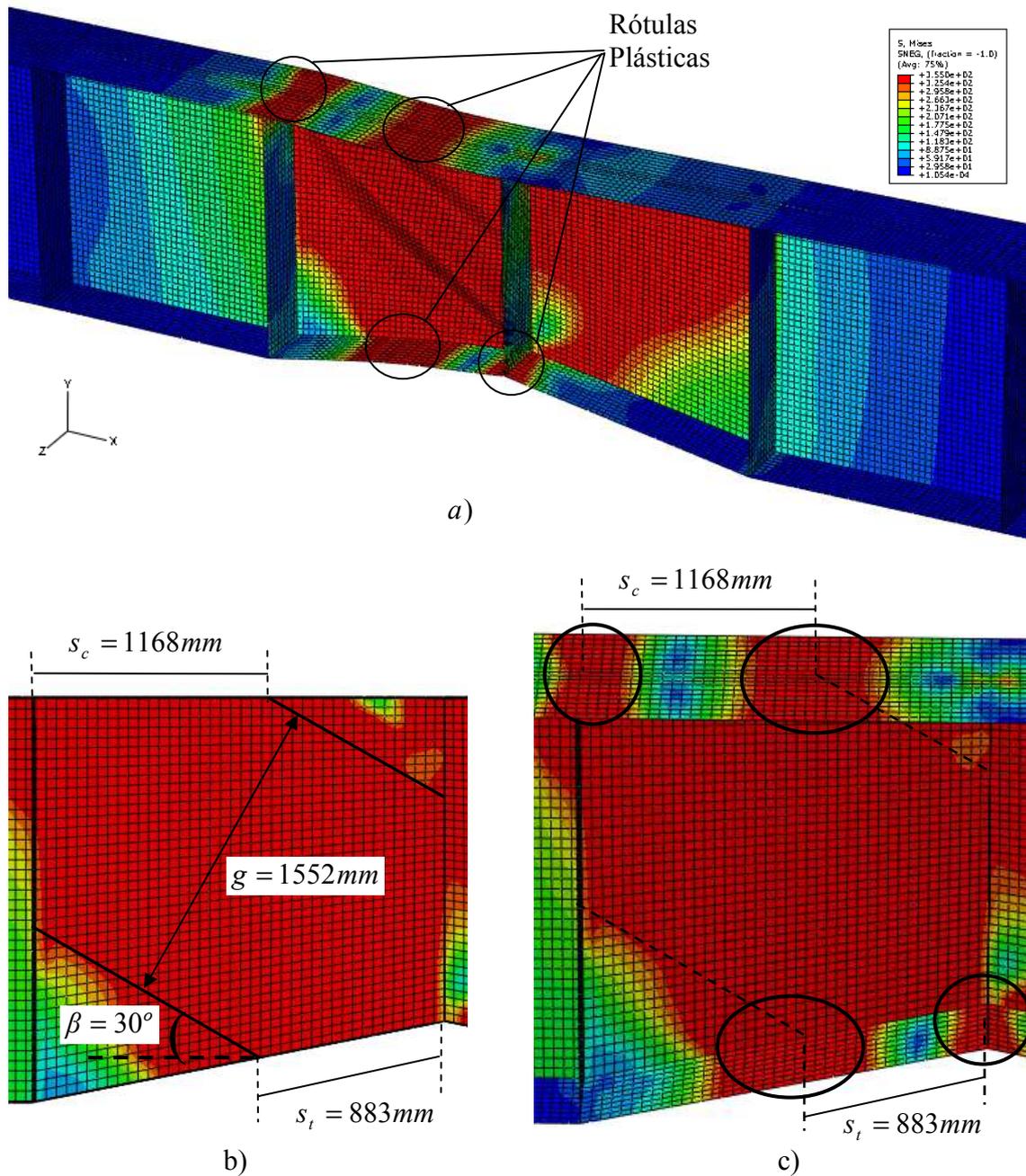


Figura 5.17. Desarrollo de las tensiones en el panel de alma y alas para una viga cuyo ángulo de inclinación del ala inferior es $tg\phi = 0,1$. a) Deformada a escala real y tensiones de Von Mises de la viga estudiada mediante código numérico. b) Superposición de la situación de agotamiento según el modelo propuesto y el modelo numérico. c) Ubicación de las rótulas plásticas según ambos métodos.

5.7.2. Consideración de las tensiones principales de compresión en el modelo de capacidad última del panel de alma

En el modelo propuesto de capacidad última se ha adoptado la hipótesis previa de que tras la abolladura del alma, se desarrolla un campo diagonal de tracciones en el cual las tensiones principales de compresión no sufren ningún incremento. A pesar de ello, los

estudios numéricos realizados, ponen de manifiesto la existencia de un incremento de la tensión principal de compresión, que es tanto más significativa cuanto menos esbelta es el alma de la viga.

En consecuencia, si queremos que el modelo propuesto de capacidad última se aproxime lo máximo posible al comportamiento real del elemento, se deberá tener en cuenta el efecto del incremento de la tensión principal de compresión durante la fase postcrítica, hecho que se traduce en una traslación del círculo de Mohr hacia la zona de compresión (ver figura 5.18).

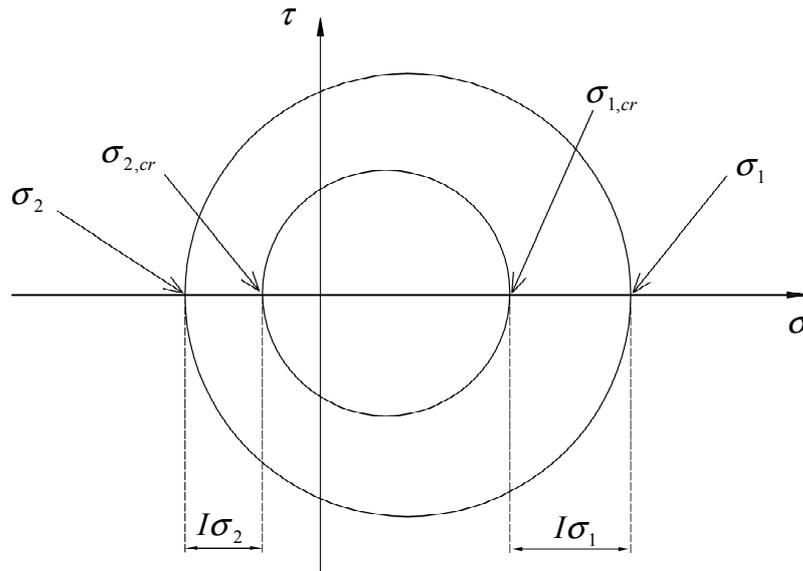


Figura 5.18. Incremento de las tensiones principales en la fase postcrítica.

Dicho efecto ha sido estudiado de forma rigurosa por Zárate, A. V. (2002) [1], mediante la utilización de numerosos modelos numéricos para diferentes geometrías de vigas armadas de inercia variable. Este autor, obtiene mediante el código numérico *Abaqus*, el estado tensional de cada geometría en el instante de abollar el alma y en situación de agotamiento. La diferencia entre ambos estados tensionales le permite calcular el incremento de las tensiones principales de tracción ($I\sigma_1$) y compresión ($I\sigma_2$) durante la fase postcrítica.

El incremento de las tensiones principales de compresión en el alma se debe a varios factores, como son la redistribución de tensiones en el panel de alma (aplastamiento de zonas locales del panel de alma) y la existencia de tensiones fuera del campo diagonal de tracciones que afectan tanto a las alas como al alma. Por este motivo, Zárate, A. V. (2002) [1] decide considerar el efecto del incremento de las tensiones principales de compresión de una manera indirecta, a través del factor de reducción ρ el cual afectará al campo diagonal de tracciones σ_t .

Tras el análisis llevado a cabo por Zárate, A. V. (2002) [1], dicho autor concluye que el factor de reducción ρ , presenta un comportamiento trilineal respecto a la tensión crítica de abolladura normalizada τ_{cr} / τ_p . Donde τ_{cr} representa el valor de la tensión crítica de abolladura y $\tau_p = f_{y,w} / 3$. En la figura 5.19 se muestra el comportamiento del factor de

reducción del campo diagonal de tracciones con respecto a la relación tensión crítica de abolladura/tensión tangencial última, obtenido por Zárate, A. V. (2002) [1].

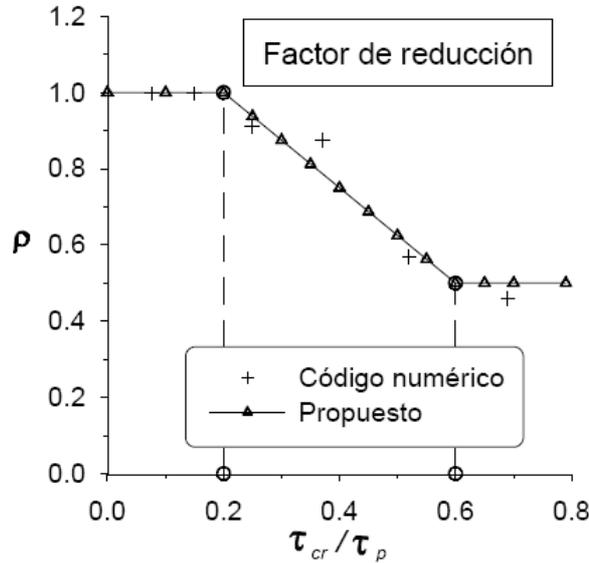


Figura 5.19. Variación del factor de reducción del campo diagonal de tracciones en función de la relación tensión crítica de abolladura/tensión tangencial última (figura: Mirambell y Zárate, 2004 [4]).

Así pues, Zárate, A. V. define el factor de reducción ρ para tres rangos de la tensión tangencial crítica normalizada y define la magnitud del campo diagonal de tracciones de la siguiente manera:

$$\sigma_{bb} = \rho \cdot \sigma_t \quad [5.43]$$

donde el parámetro ρ se determina mediante las expresiones [5.44], [5.45] y [5.46]:

$$\frac{\tau_{cr}}{\tau_p} < 0,2 \quad , \quad \rho = 1,0 \quad [5.44]$$

$$0,2 \leq \frac{\tau_{cr}}{\tau_p} \leq 0,6 \quad , \quad \rho = 1,25 \cdot \left(1 - \sqrt{3} \cdot \frac{\tau_{cr}}{f_{y,w}} \right) \quad [5.45]$$

$$\frac{\tau_{cr}}{\tau_p} > 0,6 \quad , \quad \rho = 0,5 \quad [5.46]$$

De las expresiones anteriores se concluye que, el efecto de las tensiones principales de compresión es despreciable para valores de la tensión crítica de abolladura normalizada inferiores a 0,2. Por el contrario, el factor de reducción ρ , muestra una relación lineal con la tensión crítica normalizada, para valores de la misma comprendidos entre 0,2 y 0,6. Por último, se considera que el incremento de la tensión principal de compresión es el mismo que el de la tensión principal de tracción, para valores de la tensión crítica de abolladura normalizada superiores a 0,6.

Así pues, para tener en cuenta el efecto del incremento de la tensión principal de compresión durante la fase postcrítica, se ha decidido utilizar el factor de reducción ρ

determinado por Zárate, A. V. (2002) [1]. De esta manera, se consigue un modelo corregido de capacidad última a cortante más preciso que el propuesto anteriormente. Los resultados de este modelo definitivo de capacidad última, serán comparados con los resultados del modelo numérico *Abaqus*, poniendo de manifiesto su gran bondad.

5.7.3. Capacidad última a cortante de vigas de inercia variable de alma esbelta y análisis de resultados

A lo largo de este capítulo, se ha desarrollado un modelo de capacidad última a cortante de vigas esbeltas de inercia variable. En el apartado anterior se ha presentado el factor de reducción ρ a través del cual se corrige el modelo de capacidad última propuesto, logrando así considerar el efecto del incremento de la tensión principal de compresión en el alma.

Se considera que el panel de alma resiste la totalidad del esfuerzo cortante exterior, por lo que la resistencia última de vigas esbeltas de inercia variable se define como suma del cortante resistido hasta la abolladura del alma y del cortante resistido en la fase postcrítica (ver expresión [5.47]).

$$V_u = \tau_{cr} \cdot h_0 \cdot t_w + \sigma_{bb} \cdot g \cdot t_w \cdot \text{sen}\beta \quad [5.47]$$

donde τ_{cr} es la tensión crítica de abolladura (expresión [4.14]), h_0 es la altura del canto menor del alma, t_w es el espesor del alma, σ_{bb} es la magnitud del campo diagonal de tracciones (expresión [5.43]), g es el ancho del campo diagonal de tracciones y β la inclinación del campo diagonal de tracciones.

En la siguiente tabla, se muestran las geometrías de diferentes vigas armadas de inercia variable para las cuales se obtendrá su capacidad última mediante el modelo desarrollado y se comparará con los resultados del modelo numérico.

Caso	$\lambda_{w,h_0}=h_0/t_w$	$\alpha=a/h_1$	$\eta=b_f/h_1$	$\lambda_f=b_f/t_f$	$tg\phi$	t_w (mm)	t_f (mm)	h_1 (mm)
1	225	1,0	0,2	12,5	0,1	8	32	2000
2	200	1,0	0,45	20	0,2	8	45	2000
3	160	1,0	0,45	20	0,2	10	45	2000
4	133,33	1,0	0,45	20	0,2	12	45	2000
5	175	1,0	0,25	15,63	0,3	8	32	2000
6	150	1,0	0,45	20	0,4	8	45	2000

Tabla 5.2. Variables geométricas de las diferentes vigas armadas de inercia variable para las cuales se comparan los resultados derivados del modelo propuesto con los del código numérico.

En la Tabla 5.3 se muestran los resultados derivados del modelo desarrollado de capacidad última, correspondientes a las geometrías mostradas en la Tabla 5.2, así como los resultados obtenidos con el código numérico *Abaqus* [8].

Caso	τ_{cr} MEF (MPa)	τ_{cr} modelo (MPa)	Diferencia τ_{cr} (%)	V_u MEF (KN)	V_u modelo (KN)	Diferencia V_u (%)
1	38,49	39,75	-3,27	1916,4	1810.2	5,54
2	47,98	48,53	-1,15	2206,4	2206	0,018
3	73,07	75,83	-3,77	2653	2651,3	0.064
4	102,86	109,19	-6,15	3124,8	3208	-2,66
5	52,13	52,63	-0,96	1524,69	1448	5.02
6	66,29	66,32	-0.045	1708	1716.9	-0.52

Tabla 5.3. Comparación de los resultados derivados del modelo propuesto de capacidad última con los resultados del código numérico.

Como puede observarse en la Tabla 5.3, los resultados del modelo propuesto se ajustan perfectamente a los resultados del código numérico.

En la siguiente figura se muestran las iteraciones llevadas a cabo en el modelo propuesto respecto al ángulo β hasta obtener la capacidad última de las vigas del caso 2 y 4. En el caso 2 se ha obtenido una resistencia última $V_u=2206,4\text{KN}$ y un ángulo $\beta=29^\circ$, mientras que en el caso 4 se ha obtenido una resistencia última $V_u=3124,77\text{KN}$ y un ángulo $\beta=32^\circ$.

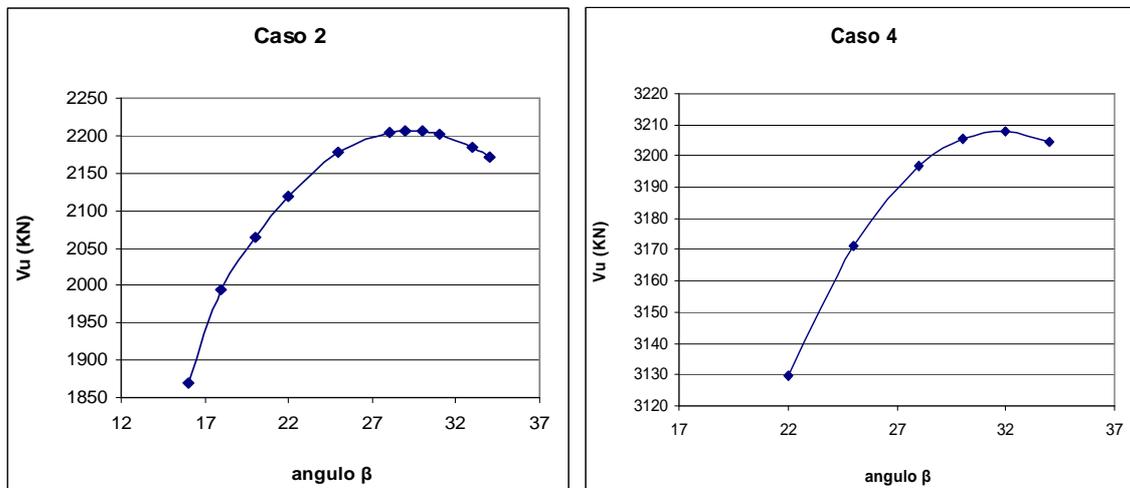


Figura 5.20. Iteraciones llevadas a cabo en el modelo propuesto respecto al ángulo β hasta obtener la capacidad última de las vigas del caso 2 y 4.

5.8. Proceso de cálculo para la determinación de la capacidad última a cortante de vigas esbeltas de inercia variable

A continuación, se describe según el modelo propuesto, el proceso de cálculo a seguir para determinar la capacidad última a cortante de vigas esbeltas de inercia variable.

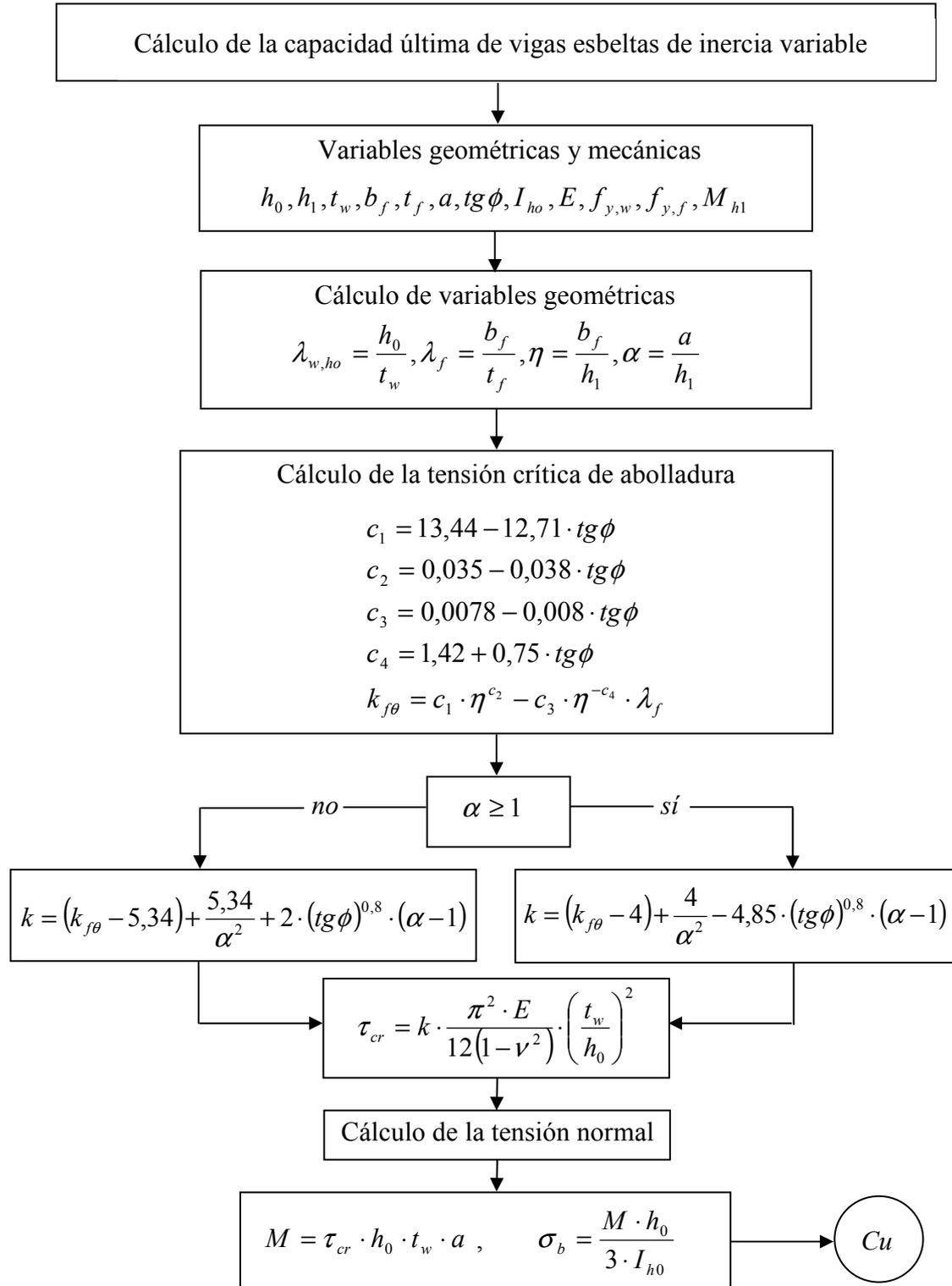


Figura 5.21. Proceso de cálculo a seguir para la determinación de la capacidad última de vigas esbeltas de inercia variable.

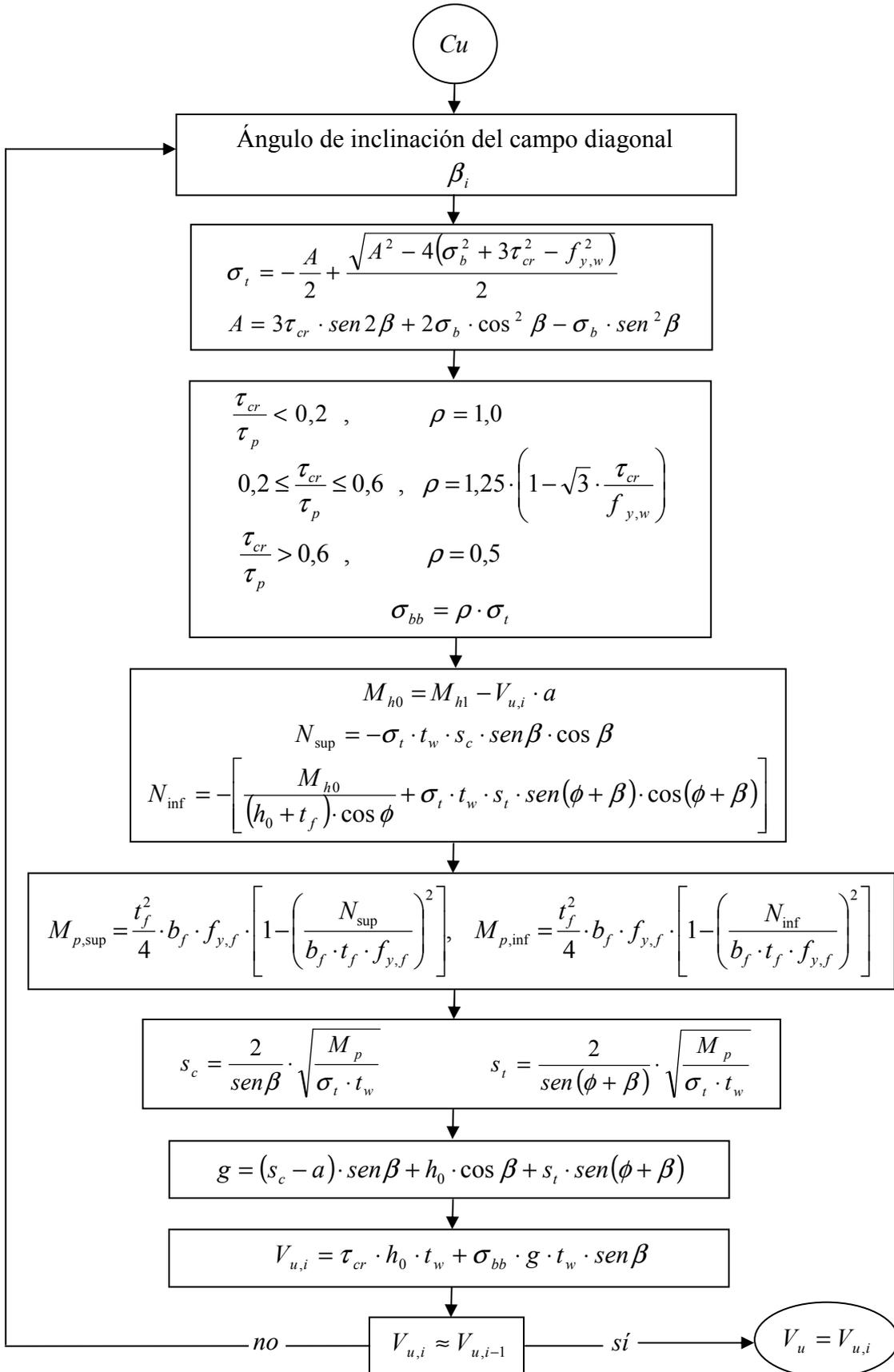


Figura 5.21. Proceso de cálculo a seguir para la determinación de la capacidad última de vigas esbeltas de inercia variable (Continuación).

Capítulo 6. Conclusiones y futuras líneas de investigación

6.1. Conclusiones

A lo largo de este trabajo, se han ido cumpliendo los diferentes objetivos que se habían planteado en un inicio, hasta alcanzar el objetivo global, que consiste en el desarrollo de un modelo de capacidad última a cortante de vigas armadas esbeltas de inercia variable. Así mismo, se han podido confirmar varias hipótesis de trabajo.

El modelo de capacidad última a cortante de vigas esbeltas de inercia variable ha sido desarrollado en base al método del campo diagonal de tracciones, el cual considera que el agotamiento se alcanza tras el desarrollo de tres mecanismos resistentes. El primero corresponde al estado tensional existente en el alma en el instante en que se produce la abolladura de la misma. Dicho estado tensional está integrado por una tensión tangencial (tensión crítica de abolladura) y una tensión normal (tensiones de flexión derivadas del equilibrio de la viga). La tensión crítica de abolladura se ha determinado en base a la expresión de la teoría clásica para piezas prismáticas y realizando un análisis estructural de vigas armadas de inercia variable mediante el código numérico *Abaqus* [8], tras el cual se ha realizado un extenso estudio paramétrico.

El segundo mecanismo resistente de las vigas armadas de inercia variable proviene de la capacidad postcrítica del panel de alma, al desarrollarse un campo diagonal de tracciones (en la dirección de la diagonal corta del alma) debidamente anclado en alas y rigidizadores. Tras los análisis numéricos realizados, se ha constatado que el estado tensional del alma durante la fase postcrítica, no viene únicamente definido por una componente de tracción, sino que también existe un incremento de las tensiones principales de compresión. El efecto del incremento de las tensiones principales de compresión ha sido considerado de una manera indirecta, tal y como propone Zárate, A. V. (2002) [1], a través del factor de reducción ρ el cual afectará al campo diagonal de tracciones σ_t .

El tercer mecanismo resistente hace referencia al desarrollo de un mecanismo de marco, cuya capacidad resistente es función de la rigidez a flexión de las alas. El agotamiento de dicho mecanismo se alcanza al formarse rótulas plásticas en ambas alas como consecuencia del propio anclaje del campo diagonal de tracciones.

En primer lugar, puede concluirse que las hipótesis adoptadas en el código numérico, referentes a las condiciones de contorno, las solicitaciones exteriores, la densidad de malla, las ecuaciones constitutivas y los métodos de resolución numérica utilizados en la modelación de los prototipos, han sido adecuadas para estudiar el comportamiento estructural de las vigas armadas esbeltas de inercia variable. Dicha conclusión se extrae de la gran similitud existente entre los resultados numéricos, los resultados de ensayos experimentales y los resultados del método diagonal de tracciones del Eurocódigo 3 (ENV 1993, Parte 1-1 [5]).

Por otra parte, las expresiones analíticas para calcular la tensión crítica de abolladura a cortante de vigas esbeltas de inercia variable, han sido determinadas a partir de estudios numéricos de inestabilidad del alma. Los resultados obtenidos de dichas expresiones

analíticas han sido comparados con los resultados del código numérico apreciándose un buen ajuste entre ellos.

De los estudios de inestabilidad pueden sacarse diversas conclusiones. La primera, es que el comportamiento del alma frente a abolladura depende de sus características geométricas y de las condiciones de contorno en sus bordes (alas y rigidizadores). El efecto que tienen las alas y los rigidizadores en la coacción al giro del alma, queda recogido en la expresión que permite obtener el coeficiente de abolladura k del panel de alma. Dicho coeficiente de abolladura aumenta para valores crecientes de la rigidez a flexión de las alas. También se concluye que la relación entre el coeficiente de abolladura k del panel de alma y el parámetro de forma α es claramente no-lineal. A medida que aumenta el parámetro α , el coeficiente de abolladura k tiende hacia unos valores asintóticos, los cuales dependen de la inclinación del ala $tg\phi$. Por otro lado, al aumentar la pendiente del ala inferior $tg\phi$, la tensión crítica de abolladura tiende a aumentar, debido al hecho de que el elemento estructural se aproxima cada vez más a una geometría triangular más rigidizada. Este aumento de la tensión crítica de abolladura, también se debe a que dicha tensión se ha referido respecto al canto menor del panel de alma, con lo que al aumentar la pendiente del ala inferior se está reduciendo el área resistente en dicho canto.

Cabe destacar, que la expresión para el cálculo de la tensión crítica de abolladura del panel de alma solo es válida para vigas esbeltas de inercia variable donde el fenómeno de inestabilidad se produce en el rango elástico del material. Dicha situación es la habitual en esta tipología de vigas.

Tras producirse la abolladura del alma, entra en juego la reserva de resistencia postcrítica de la viga de inercia variable, la cual disminuye a medida que aumenta la pendiente del ala inferior $tg\phi$. Ello se debe a que el ángulo de inclinación del campo diagonal β disminuye al aumentar la pendiente del ala inferior $tg\phi$, reduciéndose así la componente vertical del campo diagonal de tracciones.

El agotamiento por cortante en vigas armadas de inercia variable se alcanza al formarse rótulas plásticas en los paneles de alas, como consecuencia del tiro del campo diagonal de tracciones en las mismas.

El modelo de capacidad última a cortante de vigas de inercia variable desarrollado en este trabajo solo podrá aplicarse en aquellos casos en que el modo de colapso obedezca al definido en dicho modelo. Es decir, cuando el campo diagonal de tracciones se desarrolle en la dirección de la diagonal corta del panel de alma. Dicho modo de colapso se da habitualmente en vigas de inercia variable utilizadas en construcción de estructuras metálicas como puentes o edificación.

Las tensiones normales σ_b que actúan en el alma cuando ésta abolla, y que aparecen por consideraciones de equilibrio, influyen en el agotamiento de las vigas armadas de inercia variable. Dicha influencia es tanto más significativa cuanto mayor es la tensión normal que actúa en el panel de alma. A medida que aumenta la inclinación del ala inferior $tg\phi$, la tensión crítica de abolladura aumenta y en consecuencia la tensión normal σ_b se ve incrementada.

La influencia del incremento de las tensiones principales de compresión en el comportamiento postcrítico de las vigas de inercia variable se refleja en la disminución de la magnitud del campo diagonal de tracciones, efecto que ha sido considerado a través del factor de reducción ρ definido por Zárate, A. V. (2002) [1]. Los resultados obtenidos de la consideración de dicho factor de reducción en el modelo desarrollado, ponen de manifiesto el magnífico ajuste de los mismos respecto a los obtenidos con el código numérico.

El cortante último de las vigas de inercia variable se ha definido como la suma del cortante resistido hasta la abolladura del alma y del cortante resistido en la fase postcrítica (componente vertical del campo diagonal de tracciones).

6.2. Futuras líneas de investigación

Debemos tener presente, que en la mayoría de situaciones de diseño en las que se proyectan los tramos de vigas de inercia variable, dichos tramos se ven sometidos concomitantemente a un esfuerzo cortante y a un momento flector, y que dichos esfuerzos varían a lo largo de la directriz del tramo de inercia variable de la viga. Es por ello que una de las futuras líneas de investigación que puede dar continuidad al presente trabajo, es el estudio de la influencia que ejerce la existencia de un momento flector sobre la capacidad última que ofrecen las vigas armadas de inercia variable de alma esbelta. Dicho estudio puede realizarse a través del prototipo definido en este trabajo, ya que los voladizos existentes en el mismo, permiten reproducir la situación de interacción cortante-momento flector que se dan en estos elementos estructurales. La resolución de esta interacción de esfuerzos podría plantearse a través de un diagrama de interacción cortante reducido-momento flector, teniendo en cuenta la componente vertical del esfuerzo axial que discurre por el panel de ala comprimido (efecto Résal).

También se manifiesta la necesidad de realizar ensayos experimentales de vigas de inercia variable sometidas a cortante que permitan confirmar la bondad del modelo propuesto.

Así mismo, sería interesante realizar un estudio paralelo al planteado en este trabajo, con el propósito de definir un modelo de capacidad última de vigas de inercia variable, en el cual, el campo diagonal de tracciones se desarrolle en la dirección de la diagonal geométrica más larga del panel de alma.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a todo el equipo de metálicas, y en especial a mi tutor Enrique Mirambell, la ayuda y consejo que me han prestado a lo largo de la presente tesina. Gracias a ellos he podido descubrir un nuevo mundo dentro de las estructuras, experiencia que me ha aportado muchos y enriquecedores conocimientos.

Gracias también, a Agnieszka por haberme ayudado en mi adiestramiento del código de elementos finitos *Abaqus*, programa que ha resultado ser de gran utilidad.

Quisiera dedicar este trabajo a mis padres y hermano, por haberme apoyado en todo momento y haber tenido que aguantar algún que otro momento de mal humor. Agradecer a mis padres los valores que me han inculcado, tales como la constancia y el esfuerzo, valores sin los cuales no hubiese llegado hasta donde estoy.

Referencias bibliográficas

- [1] Zárate, A. V. (2002), “Un modelo para el dimensionamiento de vigas armadas de inercia variable de alma esbelta”, Tesis Doctoral, UPC, Barcelona, Mayo 2002.
- [2] Mirambell, E. y Zárate, A. V. (2000). “Web Buckling of Tapered Plate Girders”, Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Structures & Buildings, 2000, 140, Feb., 51-60.
- [3] Zárate, A. V. y Mirambell, E. (2000). “Tensión crítica de abolladura a cortante de almas esbeltas de vigas metálicas de inercia variable”, Hormigón y Acero, No 218 (4º trimestre de 2000).
- [4] Mirambell, E. y Zárate, A. V. (2004). “Shear strength of tapered steel plate girders”, Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Structures & Buildings, 157, October 2004, 343-354.
- [5] Eurocode 3 Design of steel structures. Part 1-1 General rules and rules for buildings. ENV 1993-1-1:1992.
- [6] Eurocode 3 Design of steel structures. Part 1-5 General rules. Plated structural elements. ENV 1993-1-5:1997.
- [7] Höglund T. (1981). “Design of thin plate I-girders in shear and bending with special reference to web buckling”, Division of Building Statics and Structural Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1981, Bull. 94.
- [8] Abaqus/Standard V.6.8. Simulia products. Dassault Systemes S.A. 2010.
- [9] Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. (2001). “Abaqus / Standard Theory and User’s Manual”, U.S.A.
- [10] Oñate, E. (1995). “Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos”, Segunda Edición, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España.
- [11] Zárate, A. V. y Mirambell, E. (1999). “Determinación de la tensión crítica de abolladura a cortante de almas esbeltas de vigas metálicas de inercia variable: Utilización del código Abaqus”, IV Reunión Nacional de Usuarios del Programa ABAQUS, 1999, Nov., Barcelona, España.
- [12] Porter, D. M., Rockey, K. C. y Evans, H. R. (1975). “The Collapse Behaviour of Plate Girders Loaded in Shear”, Structural Engineer, 313-325.
- [13] Rockey, K. C., Evans, H. R. y Porter, D. M. (1978). “A Design Method for Predicting the Collapse Behaviour of Plate Girders”, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, 85-112.
- [14] Leonhardt, F. (1986). “Puentes”, Presses Polytechniques Romandes.

- [15] Maquoi, R. (1992). "Constructional Steel Design, An International Guide", Elsevier Applied Science, Plate Girders, Edited by Patrick J. Dowling, John E. Harding and Reidar Bjorhovde, 133-173.
- [16] Rui-Wamba, J. (1993). "Puentes mixtos de hormigón y acero", Rutas, Revista de la Asociación Técnica de Carreteras, 21-38, Madrid, España.
- [17] Dubas, P. y Gehri, E. (1986). "Behaviour and Design of Steel Plated Structures", Applied Statics and Steel Structures, Swiss Federal Institute of Technology Zürich, Switzerland.
- [18] Bleich, F. (1952). "Buckling Strength of Metal Structures", McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, U.S.A.
- [19] Timoshenko, S. P. y Gere J. M. (1961). "Theory of Elastic Stability", Second Edition, McGraw-Hill Co., Inc., New York, U.S.A.
- [20] Ivanyi, M. y Skaloud, M. (1992). "Stability Problems of Steel Structures", Springer-Verlag Wien, New York, U.S.A.
- [21] Basler, K., y Thürlimann, B. (1959). "Plate Girder Research", American Institute of Steel Construction, New York, U.S.A.
- [22] Chern, C. y Ostapenko, A. (1969). "Ultimate Strength of Plate Girders Under Shear", Lehigh University, Fritz Engin. Lab. Report No. 328.7.
- [23] Lee, S. C. y Yoo, C. H., (1999). "Experimental Study on Ultimate Shear Strength of Web Panels", Journal of Structural Engineering, Vol. 125, No. 8.
- [24] Johansson, B., Maquoi R. y Sedlacek, G. "New design rules for plated structures in Eurocode 3", Journal of Constructional Steel Research, 57, (2001), 279-311.
- [25] Falby, W. E. y Lee, G. C. (1976). "Tension Field Design of Tapered Webs", Engineering Journal, AISC, 11-17.
- [26] Takeda, H. y Mikami, I. (1987). "Ultimate Strength of Plate Girder With Varying Depth Loaded in Shear", Journal of Structural Engineering, Vol. 33A, 115-126.
- [27] Roca, P., Mirambell, E. y Costa, J. (1996). "Geometric and Material Nonlinearities in Steel Plates", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 122, No. 12, December.
- [28] Rockey, K. C. y Skaloud, M. (1968). "Influence of Flange Stiffness Upon the Load Carrying Capacity of Webs in Shear", Final Report, 8th Congress IABSE, 429-439, New York, U.S.A.
- [29] Evans, H. R., Porter, D. M. y Rockey, K. C. (1978). "The Collapse Behaviour of Plate Girders Subjected to Shear and Bending", IABSE Proceedings 1-20.
- [30] Lee, S. C., Davidson, J. S. y Yoo, C. H. (1996). "Shear Buckling Coefficients of Plate Girder Web Panels", Computers & Structures, Vol. 59, No. 5, 789-795.

[31] Rockey, K. C. y Skaloud, M. (1971). “The Ultimate Load Behaviour of Plate Girders Loaded in Shear”, IABSE Colloquium London 1971, Vol. 11, 1-19.

[32] Rockey, K. C. y Skaloud, M. (1972). “The Ultimate Load Behaviour of Plate Girders Loaded in Shear”, Structural Engineer 1972, 29-47.

Anejo 1

Resultados de la tensión crítica de abolladura del panel de alma esbelta de inercia variable

$\alpha=a/h_1$	$\lambda_f=b_f/t_f$	$\eta=b_f/h_1$	$tg(\phi)$	t_w (mm)	h_0 (mm)	h_1 (mm)	k modelo	k MEF	τ_{cr} modelo (MPa)	τ_{cr} MEF (MPa)	Diferencia τ_{cr} (%)
0,5	25	0,35	0,0	8	1976	1976	28,11	29,83	87,45	92,81	5,78
0,5	20	0,20	0,1	8	1800	1894,74	25,88	25,08	97,03	94,01	-3,22
0,5	25	0,35	0,1	8	1876	1974,74	26,80	28,34	92,49	97,82	5,45
0,5	25	0,35	0,2	8	1776	1973,33	25,53	26,91	98,31	103,65	5,15
0,5	50	0,45	0,2	8	1784	1982,22	25,32	26,92	96,64	102,76	5,96
0,5	25	0,35	0,3	8	1676	1971,76	24,27	25,55	104,96	110,47	4,99
0,5	25	0,35	0,4	8	1576	1970	23,02	24,16	112,60	118,16	4,70
0,5	25	0,35	0,5	8	1476	1968	21,79	22,86	121,48	127,44	4,68
0,6	25	0,35	0,0	8	1976	1976	21,58	22,63	67,14	70,40	4,63
0,6	25	0,35	0,1	8	1856	1974,47	20,30	21,26	71,59	74,97	4,50
0,6	25	0,20	0,2	8	1744	1981,82	17,76	17,32	70,93	69,18	2,53
0,6	50	0,45	0,2	8	1744	1981,82	18,85	19,92	75,28	79,54	5,36
0,6	25	0,35	0,3	8	1616	1970,73	17,82	18,68	82,89	86,87	4,58
0,6	25	0,35	0,4	8	1496	1968,42	16,59	17,42	90,06	94,55	4,75
0,8	25	0,35	0,1	8	1816	1973,91	13,88	13,96	51,11	51,42	0,60
0,8	25	0,35	0,2	8	1656	1971,43	12,68	12,79	56,15	56,64	0,86
0,8	50	0,45	0,2	8	1664	1980,95	12,47	12,74	54,70	55,90	2,14
0,8	25	0,35	0,3	8	1496	1968,42	11,48	11,62	62,33	63,06	1,16
1,0	25	0,35	0,0	8	1976	1976	12,09	11,99	37,61	37,31	-0,80
1,0	12,5	0,20	0,1	8	1800	2000	10,60	10,27	39,75	38,49	-3,28
1,0	20	0,20	0,1	8	1800	2000	10,02	9,96	37,57	37,36	-0,56
1,0	25	0,20	0,1	8	1800	2000	9,63	9,73	36,11	36,47	0,98
1,0	12,5	0,25	0,1	8	1800	2000	10,96	10,62	41,09	39,81	-3,20

1,0	20	0,25	0,1	8	1800	2000	10,54	10,42	39,52	39,08	-1,13
1,0	25	0,25	0,1	8	1800	2000	10,26	10,27	38,48	38,52	0,11
1,0	21,88	0,35	0,1	8	1800	2000	11,04	10,90	41,39	40,86	-1,31
1,0	25	0,35	0,1	8	1800	2000	11,05	10,85	41,42	40,66	-1,87
1,0	35	0,35	0,1	8	1800	2000	10,60	10,67	39,74	39,99	0,62
1,0	28,13	0,45	0,1	8	1800	2000	11,22	11,10	42,06	41,62	-1,07
1,0	37,5	0,45	0,1	8	1800	2000	11,00	10,98	41,25	41,18	-0,18
1,0	45	0,45	0,1	8	1800	2000	10,83	10,89	40,60	40,82	0,53
1,0	60	0,45	0,1	8	1800	2000	10,48	10,67	39,31	40,02	1,79
1,0	12,5	0,20	0,2	8	1600	2000	9,46	9,24	44,88	43,86	-2,32
1,0	20	0,20	0,2	8	1600	2000	8,88	8,90	42,12	42,21	0,22
1,0	25	0,20	0,2	8	1600	2000	8,49	8,64	40,28	41,02	1,81
1,0	20	0,25	0,2	8	1600	2000	9,40	9,33	44,60	44,28	-0,72
1,0	30	0,25	0,2	8	1600	2000	8,85	8,98	42,00	42,62	1,45
1,0	21,88	0,35	0,2	8	1600	2000	9,88	9,78	46,90	46,40	-1,08
1,0	25	0,35	0,2	8	1600	2000	9,90	9,71	46,96	46,07	-1,93
1,0	35	0,35	0,2	8	1600	2000	9,46	9,49	44,89	45,05	0,35
1,0	20	0,45	0,2	8	1600	2000	10,23	10,11	48,53	47,98	-1,15
1,0	37,5	0,45	0,2	8	1600	2000	9,85	9,80	46,73	46,51	-0,47
1,0	45	0,45	0,2	8	1600	2000	9,68	9,69	45,95	45,96	0,01
1,0	12,5	0,20	0,3	8	1400	2000	8,32	8,21	51,53	50,91	-1,23
1,0	16	0,20	0,3	8	1400	2000	8,05	8,04	49,88	49,81	-0,14
1,0	25	0,20	0,3	8	1400	2000	7,36	7,58	45,63	46,98	2,88
1,0	15,63	0,25	0,3	8	1400	2000	8,49	8,41	52,63	52,13	-0,95
1,0	20	0,25	0,3	8	1400	2000	8,26	8,25	51,20	51,10	-0,19
1,0	30	0,25	0,3	8	1400	2000	7,73	7,88	47,92	48,82	1,84
1,0	21,88	0,35	0,3	8	1400	2000	8,73	8,66	54,09	53,67	-0,78
1,0	25	0,35	0,3	8	1400	2000	8,75	8,58	54,21	53,17	-1,95
1,0	35	0,35	0,3	8	1400	2000	8,33	8,34	51,62	51,71	0,18
1,0	25	0,45	0,3	8	1400	2000	8,95	8,88	55,44	55,02	-0,76
1,0	36	0,45	0,3	8	1400	2000	8,72	8,66	54,07	53,69	-0,71
1,0	12,5	0,20	0,4	8	1200	2000	7,18	7,15	60,55	60,30	-0,41
1,0	16	0,20	0,4	8	1200	2000	6,92	6,97	58,39	58,76	0,64
1,0	25	0,20	0,4	8	1200	2000	6,26	6,51	52,82	54,93	3,84
1,0	15	0,25	0,4	8	1200	2000	7,38	7,34	62,26	61,89	-0,60
1,0	25	0,25	0,4	8	1200	2000	6,88	6,95	58,05	58,66	1,04

1,0	21,88	0,35	0,4	8	1200	2000	7,57	7,51	63,87	63,36	-0,81
1,0	25	0,35	0,4	8	1200	2000	7,60	7,43	64,11	62,65	-2,33
1,0	35	0,35	0,4	8	1200	2000	7,20	7,19	60,77	60,64	-0,22
1,0	20	0,45	0,4	8	1200	2000	7,86	7,86	66,32	66,29	-0,04
1,0	37,5	0,45	0,4	8	1200	2000	7,54	7,46	63,64	62,94	-1,11
1,0	50	0,45	0,4	8	1200	2000	7,32	7,26	61,72	61,20	-0,85
1,0	12,5	0,20	0,5	8	1000	2000	6,05	6,04	73,50	73,33	-0,24
1,0	16	0,20	0,5	8	1000	2000	5,81	5,86	70,60	71,23	0,88
1,0	25	0,20	0,5	8	1000	2000	5,20	5,44	63,13	66,06	4,43
1,0	15,63	0,25	0,5	8	1000	2000	6,21	6,17	75,49	74,89	-0,80
1,0	20	0,25	0,5	8	1000	2000	6,01	6,00	73,06	72,93	-0,18
1,0	25	0,25	0,5	8	1000	2000	5,79	5,83	70,28	70,83	0,78
1,0	21,88	0,35	0,5	8	1000	2000	6,42	6,33	77,98	76,91	-1,39
1,0	25	0,35	0,5	8	1000	2000	6,46	6,25	78,45	75,95	-3,29
1,0	35	0,35	0,5	8	1000	2000	6,09	6,03	73,99	73,24	-1,03
1,0	28,13	0,45	0,5	8	1000	2000	6,55	6,44	79,53	78,17	-1,74
1,0	45	0,45	0,5	8	1000	2000	6,28	6,15	76,26	74,73	-2,05
1,0	12,5	0,20	0,6	8	800	2000	4,94	4,87	93,77	92,50	-1,37
1,0	16	0,20	0,6	8	800	2000	4,73	4,73	89,73	89,75	0,02
1,0	25	0,20	0,6	8	800	2000	4,18	4,36	79,34	82,79	4,17
1,0	16	0,25	0,6	8	800	2000	5,08	4,96	96,33	94,09	-2,38
1,0	25	0,25	0,6	8	800	2000	4,71	4,69	89,48	89,03	-0,50
1,0	21,88	0,35	0,6	8	800	2000	5,27	5,10	100,07	96,82	-3,36
1,0	25	0,35	0,6	8	800	2000	5,32	5,04	101,03	95,61	-5,67
1,0	35	0,35	0,6	8	800	2000	4,99	4,85	94,75	92,13	-2,85
1,0	20	0,45	0,6	8	800	2000	5,49	5,35	104,21	101,55	-2,62
1,0	37,5	0,45	0,6	8	800	2000	5,26	5,05	99,78	95,88	-4,06
1,0	45	0,45	0,6	8	800	2000	5,16	4,96	97,87	94,06	-4,06
1,5	25	0,35	0,0	8	1976	1976	9,87	9,99	30,70	31,09	1,27
1,5	25	0,35	0,1	8	1676	1971,76	8,33	8,58	36,02	37,10	2,91
1,5	25	0,35	0,2	8	1376	1965,71	6,89	7,04	44,22	45,15	2,07
1,5	25	0,35	0,3	8	1076	1956,36	5,48	5,53	57,54	57,97	0,74
1,5	25	0,35	0,4	8	1376	3440	4,10	4,15	26,29	26,65	1,37
1,5	25	0,35	0,5	8	476	1904	2,73	2,55	146,18	136,74	-6,90
2,0	25	0,35	0,0	8	1976	1976	9,09	9,18	28,28	28,56	0,99
2,0	25	0,35	0,1	8	1576	1970	7,17	7,40	35,05	36,18	3,11

2,0	25	0,35	0,2	8	1176	1960	5,44	5,62	47,83	49,33	3,05
2,0	25	0,35	0,3	8	776	1940	3,78	3,77	76,27	75,99	-0,37
2,5	25	0,35	0,0	8	1976	1976	8,73	8,94	27,16	27,80	2,31
2,5	25	0,35	0,1	8	1476	1968	6,42	6,73	35,81	37,53	4,57
2,5	25	0,35	0,2	8	976	1952	4,42	4,54	56,31	57,88	2,71
3,0	25	0,35	0,0	8	1976	1976	8,53	8,69	26,55	27,02	1,75
3,0	25	0,35	0,1	8	1376	1965,71	5,84	6,17	37,49	39,60	5,33
3,0	25	0,35	0,2	8	776	1940	3,55	3,58	71,63	72,12	0,67
3,0	40	0,45	0,2	8	784	1960	3,56	3,56	70,38	70,31	-0,10
4,0	25	0,35	0,0	8	1976	1976	8,34	8,33	25,94	25,90	-0,17
4,0	25	0,35	0,1	8	1176	1960	4,88	5,17	42,86	45,43	5,65