Institut de Ciències de l'Educació

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Màster en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes

Màsters Universitaris

Curs 2009/2010

TREBALL DE FI DE MÀSTER

TÍTOL: **MATEMÀTIQUES I MÚSICA. EL TALLER PITAGÒRIC**

COGNOMS: CARTRÓ GINER NOM: SANDRA

TITULACIÓ: Màster en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes

ESPECIALITAT: Matemàtiques

DIRECTOR/A: MARIBEL ORTEGO

DEPARTAMENT: Matemàtica aplicada III

DATA DE LECTURA: Juny de 2011

*“Tal vez sea la música la matemática del sentimiento
y la matemática la música de la razón”*

Pere Puig Adam (1900-1960)

“La música se ocupa de los números sonoros”

G. Zarlino (1517-1590)

Descobriment de les raons de la consonància per Tubal i Pitàgores
Gaffurio, Theorica musice, 1492

ÍNDEX

1. Introducció

Sovint sentim a parlar de la gran relació que existeix entre les matemàtiques i la música, i és freqüent trobar persones que com jo, sentim gran passió tant per l'una com per l'altra.

Ningú dubta que les matemàtiques són una ciència, ara bé, què en podem dir de la música? És art, és ciència? Què hi ha de matemàtic a la música?

La idea de fer aquest treball em va venir un dia mentres impartia una de les classes del pràcticum als alumnes de 3r d'ESO. En una de les hores més dolentes del matí, els alumnes venien de l'estona de pati més que alterats, i resultava molt difícil mantenir un clima de treball apropiat a l'aula. Aprofitant que fèiem activitats en grups i tenia l'ordinador en marxa, vaig decidir posar música tranquil·la de fons. L'efecte va ser immediat: sorpresa i silenci. Uns segons més tard, tots vam tornar a emprendre el que estàvem fent, aquest cop però, una mica més aserenats. Mai he dubtat de l'efecte que té la música en les persones, com tampoc d'un rerafons matemàtic en qualsevol composició musical, ara bé, què en sé de tot plegat? Si existeixen relacions entre les Matemàtiques i la Música, així com també n'hi ha amb la història, la física, entre d'altres, considero que el seu coneixement pot ser més que útil en la nostra tasca de docents, per tal que el procés d'ensenyament-aprenentatge sigui el més global possible.

Tot i tenir nocions de totes dues matèries, mai fins ara m'havia parat a pensar i analitzar amb deteniment fins a quin punt estaven lligades entre sí, suposo que com a conseqüència d'un aprenentatge independent, sense haver establert massa relacions entre l'una i l'altra.
Sobta però, que després d'uns quants anys, no hi ha massa coses que hagin canviat a les aules, i malgrat la gran quantitat d'aspectes que relacionen unes matèries amb les altres, penso que encara queda molt per fer en aquest sentit.

Aquest és un treball que s'inicia des de la recerca d'aquells elements en comú entre la Música i les Matemàtiques, que podrien ser apropiats per a treballar a l'aula amb uns alumnes que com jo, apliquen en la música aspectes matemàtics abans de conéixer la seva existència.

2. L'origen i la necessitat

Tradicionalment s'ha considerat que la Matemàtica va sorgir de les necessitats concretes de l'home per calcular en el comerç, per mesurar la Terra i el temps i per a predir fets astronòmics. Existeixen dibuixos, molt anteriors als primers registres escrits, que mostren ja alguns coneixements elementals de les matemàtiques i de la mesura del temps basada en els estels, com per exemple les roques d'ocre d'una caverna de Sudàfrica d'uns 70.000 anys d'antiguitat, on es troben tot tipus de patrons geomètrics o alguns artefactes prehistòrics trobats a l'Àfrica i França, d'entre els anys 35.000 i 20.000 a.C., que mostren els intents de l'home per a quantificar el temps. Les dones també van inventar un sistema per a controlar el seu cicle menstrual, realitzant marques en ossos o pedres amb distintius cada 28-30 unitats.
Les matemàtiques són una ciència que seguint un raonament lògic ens permet conèixer les quantitats, les estructures, l'espai i els canvis.

La música és l'art d'expressar sentiments per mitjà de la combinació de diferents sons i silencis en el temps. La música genera, manipula i combina els sons que produeixen les veus humanes i/o els instruments amb la finalitat d'assolir la bellesa formal i expressar emocions.
La música té un origen incert ja que va aparéixer a partir de la veu humana i de la percussió corporal, sense empremtes arqueològiques. Segons defensen filòsofs i sociòlegs com Jean Jacques Rousseau (1712-1778) Johann Gottfried Herder (1744-1803) o Herbert Spencer (1820-1903), és lògic pensar que la música va aparéixer de la mà del llenguatge si ens fixem en la manera en què ens expressem, el nostre to de veu, la velocitat i el ritme, ja que un canvi d'altura musical en el llenguatge produeix un cant. Segons defensa Karl Bücher (1847-1930), previ al llenguatge trobem en la naturalesa i en les activitats quotidianes de l'home, la música en el seu estat més primitiu, sobretot pel que fa al ritme.

“Des que l’home existeix hi ha hagut música. Però també els animals, els àtoms i les estrelles fan música”.

Karlheinz Stockhausen (1928-2007)

Així com les matemàtiques fan sorgir d’unes necessitats concretes i palpables, la música respon a la necessitat d’expressió de l’home, per a relacionar-se amb les divinitats i amb la natura que l’envolta. Existeixen xiulets d’ós, flautes de canya altres artilugis trobats en coves i tombes que són testimonis del poder del so per a evocar estats d’ànim diversos. La música neix de la necessitat de protegir-se d’alguns femòmens naturals, d’allunyar els esperits malignes, d’atraure l’ajuda dels déus, honrar-los i festejar les seves festes així com també de la necessitat de celebrar els canvis d’estació.

Ja ho defensava Darwin que l’home té la necessitat d’expressar l’amor així com fan els animals en la natura, i aquesta relació entre la música i l’amor és del tot coneguda, des de la història antiga fins a la música moderna.

Amb aquests orígens i aquestes necessitats tan diferents entre les Matemàtiques i la Música, és possible trobar vincles entre ambdues? Què comparteixen?

Sens dubte hi ha similituts innegables com el seu caràcter màgic, són tan abstractes que semblen pertànyer a un altre món i en canvi tenen gran poder en aquest món, la música afecta a l’escolta i les matemàtiques tenen múltiples aplicacions pràctiques. Una part de les matemàtiques estudia els nombres, els seus patrons i les seves formes, i aquests elements són inherents a la ciència, la composició i l’execució de la música.

La música canvia la seva textura i el seu caràcter segons el lloc i l’època, pot ser sentimental, explosiva, densa, cristal·lina mentre que les matemàtiques són directes i mai alteren el seu caràcter. La música es crea a partir d’elements físics, instruments de tot tipus que la generen mentres que les matemàtiques són principalment abstraccions que quasi bé no necessiten ni paper, ni llapis.

Tant el matemàtic com el músic es troben enfeinats resolent problemes o composant o interprentant, ensenyant als alumnes sense parar a pensar que ambdós estan entregats a disciplines que són paradigmes d’allò abstracte.

3. Les relacions entre la Música i les Matemàtiques

Les matemàtiques estan reconegudes com una ciència de valor especial, ja que és la base imprescindible per a la resta de ciències. El que ja no està tan clar és que les matemàtiques serveixin com a ajuda en les belles arts, però el fet és que col·laboren a que les arts com la música, la pintura, l’escultura, etc. siguin del tot bellles.

Si analitzem alguns dels aspectes bàsics de la música, com són el ritme, les escales, l’harmonia, etc. veurem la gran relació que manté amb les matemàtiques i com la música difícilment existiria sense una base matemàtica que li fes de suport i com en realitat, una obra musical, si és bonica i compensada, podria ser considerada un treball matemàtic ben resolt.
La manera d’escollir les notes musicals, la seva disposició, les tonalitats, els temps i fins i tot els mètodes de composició són pura matemàtica.

El primer vincle entre la Música i les Matemàtiques el van establir els pitagòrics al S. VI a.C., establint una relació entre les notes musicals i les proporcions entre les longituts de cordes tensades. Ells van crear una divisió del curriculum en *quadrivium* (aritmètica, música, geometria i astronomia) i *trivium* (gramàtica, retòrica i dialèctica) que es va mantenir durant tota l’Edat Mitjana. Durant aquest període, en què es van mantenir aquestes 7 arts lliberals, la música va ser un subconjunt de les matemàtiques de manera les dues disciplines s’estudiaven de manera conjunta. La tradició pitagòrica, durant el període clàssic, es pot obervar en les obres d’Euclides, Arquitas i Nicómano i la relació que van establir entre les matemàtiques i la música es manté encara viva a dia d’avui.
Mostra d’aquesta relació és l’ús, encara que d’una manera intuitiva, del nombre d’or en les sonates de Mozart (1756-1791), a la Quinta Simfonia de Beethoven (1770-1827), o en algunes

obres de Bartók (1881-1945), Messiaen (1908-1992) i Stockhausen (1928-2007). Per altra banda, matemàtics de totes les èpoques han fet de la música el seu objecte d'estudi i en l'actualitat, tan en revistes de Música com de Matemàtiques o per internet, podem trobar nombrosos documents on alguns recursos matemàtics són emprats per a la composició d'obres musicals.

"Las mentes matemáticas secas como el polvo sueñan en blanco y negro, el músico clásico capaz prefiere soñar en colores, como lo hacen los grandes científicos que prefieren la música clásica".

Albert Eisntein (1879-1955)

3.1. Punt de partida: L'escola pitagòrica

Pitàgores de Samos (582 aC - 496 aC) va ser un gran filòsof i matemàtic grec dels segles VI-V a.C., i una de les figures més importants de l'Antiga Grècia. Fou el fundador d'una escola de pensament, l'escola pitagòrica, que afirmava que l'estructura de l'Univers és aritmètica i geomètrica, és a dir, que tot l'Univers està constituït i basat en relacions matemàtiques. Considerat per molts el "pare dels nombres", Pitàgores va introduir els pesos i les mesures, va inventar la geometria i l'aritmètica teòrica, va ser el primer en sostenir que la Terra era esfèrica i el primer en postular el buit i considerar l'Univers com una obra només desxifrable per mitjans matemàtics.
Es diu que Pitàgores va encunyar la paraula matemàtiques, que significa "allò que és après". Ell descriu un sistema d'idees que té com a finalitat unificar els fenòmens del món físic i del món espiritual en termes de nombres, més concretament en termes de raó i proporció de sencers. Es creia, per exemple, que les òrbites dels cossos calestials que giraven al voltant de la Terra produien sons que harmonitzaven entre sí donant lloc a un so agradable al que van anomenar "la música de les esferes".

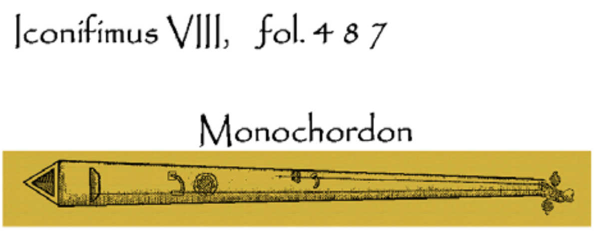
Va ser Pitàgores qui va descobrir que existia una relació numèrica entre els tons que sonaven bé i va ser el primer en adonar-se que la música, sent un dels mitjans essencials de comunicació i plaer, podia ser mesurada per mitjà de raons de sencers.

"Els pitagòrics van veure [...] que les relacions de l'escala musical podien ser expressades mitjançant nombres, i com totes les coses semblaven ser modelades pels nombres, i els nombres semblaven ser els primers elements de la vertadera natura, ells van suposar que els elements dels nombres eresn els elements de totes les coses, i que el cel era una escala musical i un nombre".

Aristòtil (384 aC -322 aC)

3.1.1. El monocordi i les proporcions

Es diu que en Pitàgores de Samos (582 aC - 496 aC) passava un dia per la ferreria i en sentir els sons que produïen els martells es va adonar que eren consonants. en arribar a casa, va experimentar amb pesos lligats a cordes, flautes, gots d'aigua, etc. per tal de trobar alguna relació matemàtica que li permetés explicar per mitjà de nombres el que havia percebut. Va ser amb el monocordi, un instruments de l'època, amb el què Pitàgores de Samos trobaria resposta al seu plantejament.



Monocordi, detall d'Iconifmus VIII foli 487 de Musurgia Universalis, un llibre d'Athanasius Kircher, publicat l'any 1650.

El monocordi era l'instrument d'un sola corda que Pitàgores va ser servir per al seu gran descobriment, estudiant la relació que existeix entre el so i la longitut de la corda que el produeix. El so que es produeix en tocar una corda és el resultat de les vibracions, i aquestes depenen de la longitut de la corda, el seu gruix i la tensió de la mateixa,ho podem comprovar amb les diferents cordes d'una guitarra, per exemple. A partir de la única corda del monocordi, Pitàgores va comparar els sons que es produïen si la feia sonar en tota la seva longitut, amb els sons que en resultaven de dividir aquesta corda i fer-ne sonar les parts que en resultaven. Amb aquest experiments es va adonar que:

- els sons que es produïen a mesura que la corda s'escurçava eren més aguts
- en dividir la corda per la meitat, el so que es produïa era una octava més agut que l'original o finamental, per tant es passava d'un Do al Do superior;
- quan feia sonar 2/3 parts de la corda original, el so que es produïa una cinquena més agut, per tant un Sol;
- quan feia sonar les 3/4 parts de la corda, el so que en resultava era una quarta més agut, o sigui un Fa;
- els intervals de 4ª, 5ª, i 8ª produien sons agradables, són els que coneixem com a consonants o harmònics;
- la resta de sons produïts mitjançant altres proporcions tenien com a resultat sons que no eren tan agradables a l'oïda, són els coneguts com a dissonants.

Pitàgores va poder comprovar, fent ús del monocordi, que hi havia alguns sons que combinats entre sí produïen un resultat agradable. És el que coneixem per sons harmònics i tenen una explicació física que es resumeix més endavant a l'apartat d'harmonia i divisibilitat.

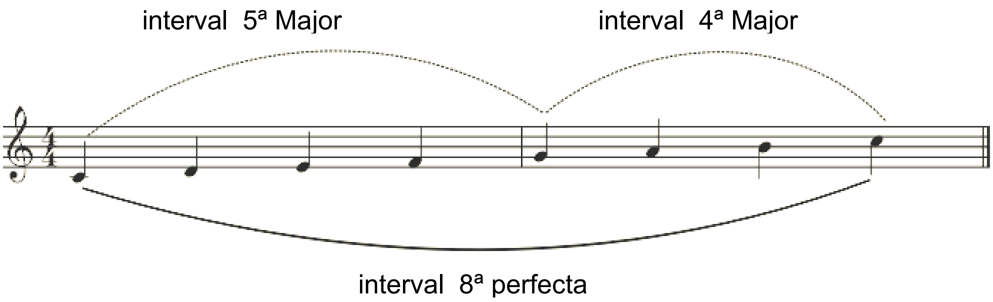
Les raons que s'estableixen entre els diferents sons depenen de les longituts de les seves cordes:

Interval	**Raó**	**Nomenclatura**
Fonamental – octava	1/2	Octava o *diapason*
Fonamental – cinquena	2/3	Quinta o *diapente*
Fonamental – quarta	3/4	Quarta o *diatessaron*

Amb aquestes raons podem operar de manera purament matemàtica. Observem que si multipliquem les raons de la quina i de la quarta entre sí, obtenim l'octava:

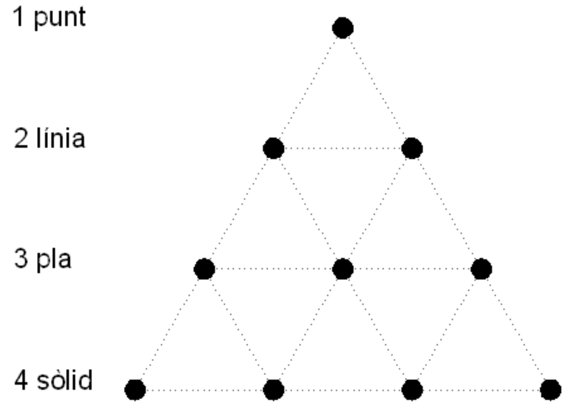
2/3 * 3/4 = 1/2

Si observem l'escala que tots coneixem, veurem com una octava està formada per la suma dels intervals de cinquena i de quarta.



Podem deduir doncs que sumar intervals vols dir multiplicar les seves raons i per restar-los les haurem de dividir.

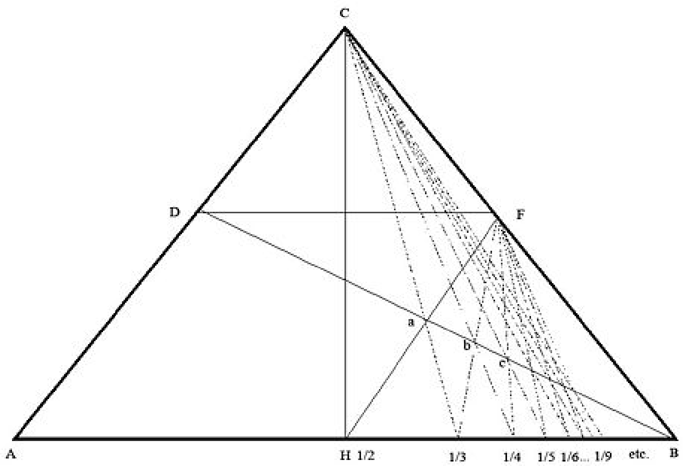
Els nombres descoberts en aquestes raons, 1, 2, 3 i 4, estaven presents en el tetractys, el símbol sagrat dels pitagòrics, un triangle de quatre fileres que representava les dimensions de l'experiència. És interessant també com la suma de tots els punts que componen els tetratcys 1+2+3+4=**10**, un nombre molt representatiu en les relacions que establien els pitagórics entre la mitologia i els nombres.



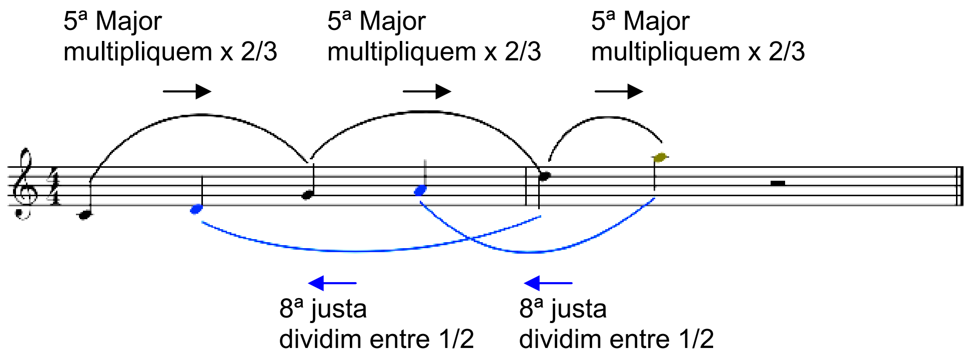
Hemenway, Priya – *Divine Proportion* pp.63, Sterling Publishing. Autor: Jossifresco

3.1.2. L'escala i la comma pitagòriques

A partir de l'análisi de les raons que s'estableixen entre els intervals de 4a, 5a i 8a respectivament, fent servir un model geomètric, Pitàgores va obtenir la resta d'intervals d'un instrument. El conjunt de tots els intervals que van sorgir de l'addició de les quintes, va donar lloc a l'escala pitagòrica o també anomenada diatònica, que va perdurar fins el Barroc, època en què va ser susbtituïda per l'escala temperada.



Mètode geomètric definit per Pitàgores per a obtenir els intervals d'un instrument. Autor: Gerardo Rosa-Grosasm, 22 Maig 2006 (UTC).



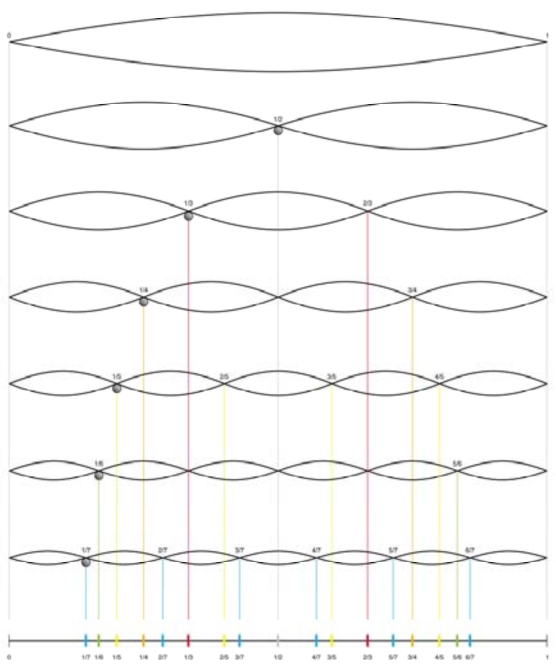
Tal com mostra la figura, per a obtenir la segona nota de l'escala Pitagòrica haurem de multiplicar 2 vegades x 2/3 i després haurem de dividir perquè ens passem d'octava:

1 x 2/3 x 2/3 = (2/3) 2 = 4/9, correspon al La una octava per damunt
4/9 / 1/2 = 8/9, interval de 2a, o sigui La

Si seguim repetim aquest procediment trobarem en primer lloc les notes de l'escala pitagòrica que no tenen alteracions i a continuació les 5 alterades.

Nota	**Do**	**Do#**	**Re**	**Mib**	**Mi**	**Fa**	**Fa#**	**Sol**	**Sol #**	**La**	**Sib**	**Si**
Fracció de corda	1	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{2^3}{3^2}$	$\frac{3^3}{2^5}$	$\frac{2^6}{3^4}$	$\frac{3}{2^2}$	$\frac{2^9}{3^6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2^{12}}{3^8}$	$\frac{2^4}{3^3}$	$\frac{3^2}{2^4}$	$\frac{2^7}{3^5}$

Hem pogut veure que entre el so que produeix la corda sencera del monocordi en vibrar i el so que produeix si prenem les seves 2/3 parts, hi ha un interval de 5a ascendent. Si tornem a fer el mateix procediment amb els 2/3 de corda, o sigui, la dividim en 3 parts i en fem sonar 2, obtindrem una segona 5a més aguda, i així succesivament.



Moodswingerscale
Y. Landman

Tenint en compte que els sons es mesuren segons la seva **freqüència (f)**, que són el nombre d'oscil·lacions per segon de l'ona que produeixen, en Herzis (Hz), i que la freqüència f és inversament proporcional a la longitud de la corda que la produeix, per a cada interval tenim doncs:

Nota	**Longitud de la corda**	Freqüència
Original o fonamental	L	f
Octava justa	1/2 L	2f
Quinta major	2/3 L	3/2 f
Quarta justa	3/4 L	4/3 f

Podem escriure doncs la relació entre les freqüències del diferents sons fent la inversa de les fraccions que corresponen a les proporcions de les cordes corresponents:

Nota	**Do**	**Do #**	**Re**	**Mib**	**Mi**	**Fa**	**Fa#**	**Sol**	**Sol #**	**La**	**Sib**	**Si**
La Fracció de corda	1	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{2^3}{3^2}$	$\frac{3^3}{2^5}$	$\frac{2^6}{3^4}$	$\frac{3}{2^2}$	$\frac{2^9}{3^6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2^{12}}{3^8}$	$\frac{2^4}{3^3}$	$\frac{3^2}{2^4}$	$\frac{2^7}{3^5}$
f Freqüèn-cia f=1/L	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^4}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$

La freqüència (f) augmenta a mesura que el so és més agut, ja que disminueix la longitud de la corda que la produeix.

Podem dir doncs que:

Entre dues notes de freqüència f_1 i f_2, de manera que $f_1 < f_2$ hi ha un interval de quinta si f2 = 3/2 f1.

A partir de la nota fonamental, que és el Do, podem obtenir les 12 notes de l'escala pitagòrica multiplicant i dividint pel valor de la quinta, que serà la inversa del valor de la fracció de corda corresponent. És interessant observar com el fet de multiplicar pel valor de la 5a ens porta a notes sostingudes i si per contra dividim, el que otenim són notes amb bemolls.

Multiplicant : fa# - do# – sol# – re# – la# – mi# – si#
Dividint: sib – mib – lab – reb – solb – dob – fab

multipliquem pel valor de la quinta

mib – sib – fa – **do** – sol – re – la – mi – si – fa# – do# – sol#

dividim pel valor de la quinta

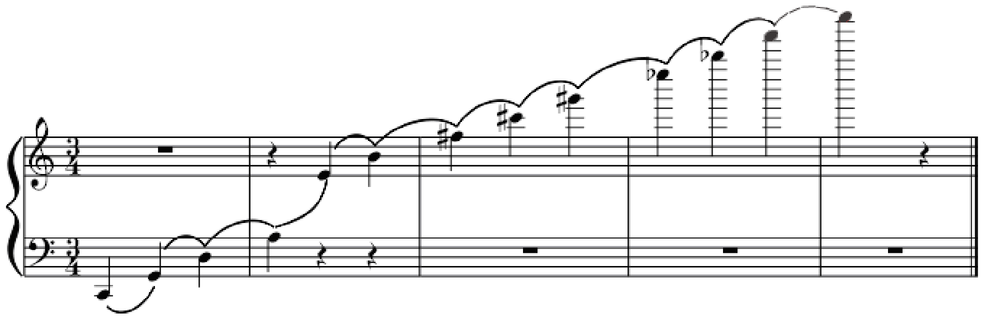
D'aquesta manera tenim per exemple que:

Sol = 3/2 Do
Re = 3/2 * 3/2 Do = $(3/2)^2$ Do
La = 3/2 * 3/2 * 3/2 Do = $(3/2)^3$ Do
i així succesivament fins arribar a la fonamental, que és el Do.

Afinació pitagòrica: donada una freqüència f, que considerem com a nota patró, estarà afinada qualsevol nota que s'obtingui pujant o baixant f qualsevol nombre de quintes justes, és a dir, que sigui de la forma f $(3/2)^n$, sent n un nombre sencer.

Si observem els 12 sons que formen l'escala pitagòrica, i contem els intervals de cinquena i les octaves que hi ha de diferència entre el do que considerem fonamental i el do que ens resulta d'anar pujant quintes, ens adonem que tenim un total de:

- 12 quintes
- 7 octaves



Si l'esquema anterior el plantegem sobre un cercle, anomenat cercle de quintes, comprovarem que **la suma de les 12 quintes** que s'obtenen **no coincideix amb la suma de les 7 octaves que hi correpondrien,** sinó que la sobrepassa lleugerament.

$2^7 = 128 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129{,}7463$

La diferència entre aquests dos valors s'anomena **comma pitagòrica**, i es calcula fent servir les regles per a restar intervals.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \langle - \rangle \, 2^7 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}0136$$

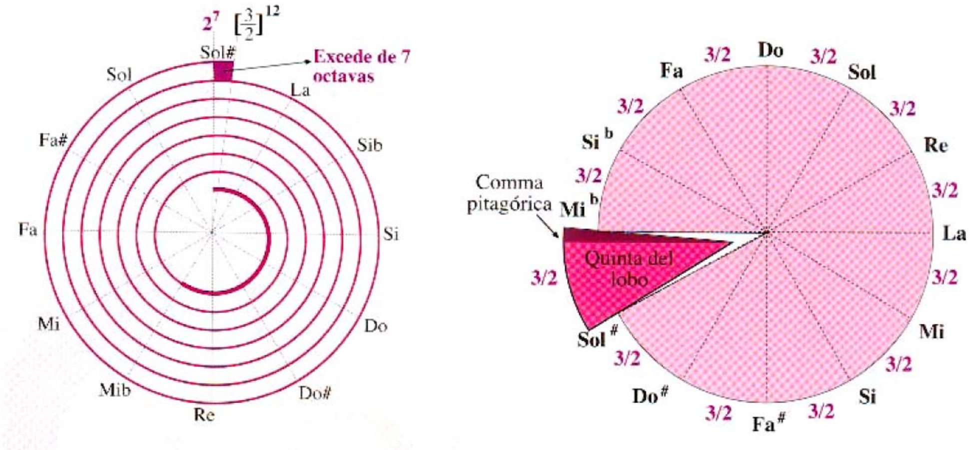
Com a conseqüència de comma pitagórica, les notes alterades amb sostinguts i bemolls, que s'obtenen multiplicant i dividint pel valor de la quinta, no coincideixen com passa a l'actualitat, el seu so s'assembla però és idèntic.

fa# ≠ solb
do# ≠ reb
sol# ≠ lab
re# ≠ mib

Les freqüències de les notes alterades														
Fab	**Dob**	**Solb**	**Reb**	**Lab**	**Mib**	**Sib**	**Do**	**Fa#**	**Do#**	**Sol#**	**Re#**	**La#**	**Mi#**	**Si#**
$\frac{3^8}{2^{13}}$	$\frac{3^7}{2^{12}}$	$\frac{3^6}{2^{10}}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{3^4}{2^7}$	$\frac{3^3}{2^5}$	$\frac{3^2}{2^4}$	1,0	$\frac{2^9}{3^6}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{2^{12}}{3^8}$	$\frac{2^{14}}{3^9}$	$\frac{2^{15}}{3^{10}}$	$\frac{2^{17}}{3^{10}}$	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$
0,801	0,534	0,712	0,949	0,633	0,844	0,563	1,0	0,702	0,936	0,624	0,832	0,555	2,220	1,480

Tal com es pot obervar al quadre anterior, els valors de les feqüències de les notes alterades s'assemblen però no coindeixen. La freqüència del si# no es correspon amb la del Do (una octava més amunt de la fonamental): 1,480 ≠ 1,50.

Per petita que sembli, aquest impresició ha estat un dels principals temes d'investigació dels musicòlegs durant més de vint segles, perquè en funció de la nota per la què es comenci, el desajustament es produeix en una nota o en una altra.



Imatge extreta de l'article Música y Matemáticas de Vicente Liern Carrión y Tomás Queralt Llopis

Per a poder tancar el cercle de quintes, les solucions que es van plantejar els teòrics del Barroc van ser diverses, i van anar evolucionant amb la finalitat de facilitar la feina dels músics i compositors, que havien de tancar el cercle ajustant els seus intruments.

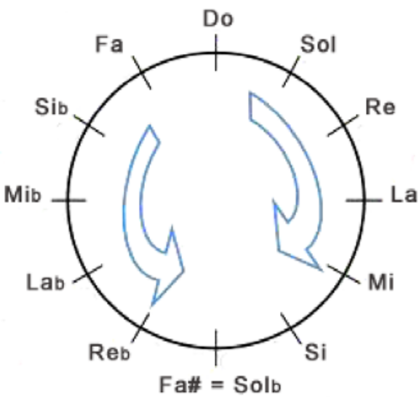
3.1.3. De l'escala pitagórica a l'escala temperada

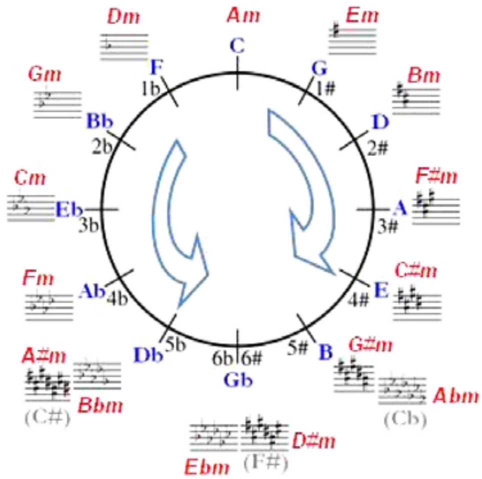
Tal com hem pogut comprovar, la suma de les 12 quintes proposades per Pitàgores no coincideix amb el total de 7 octaves que en resulten, de manera que la última quinta, anomenada "quinta del lobo" , perquè el seu so recordava a l'udol del llops, era realment desagradable. Aquest fet impossibilitava l'ús d'algunes tonalitats, la transposició o la convivència d'alguns instruments, però fins arribar al Barroc, el problema no preocupava en excés ja que la majoria de composicions tenien un nombre reduït de veus.
Amb Johan Sebastian Bach (1685-1750),compositor i organista alemany de música barroca, el problema es va agreujar, tant per l'augment del nombre de veus com per l'ús de les transposicions com a eina fonamental de la seva obra.
Malgrat que al S. XV els intèrprets tancaven el cercle "ajustant" (*temperant*) els seus instruments, el cert és que els teòrics no es posaven del tot d'acord. Grans matemàtics com Leibniz o Euler, van proposar mètodes diferents per tal de posar fi al problema.

Era evident que per a solucionar el problema del cercle de quintes la millor solució no era treure la comma de la última quinta, sinó distribuir aquesta diferència entre les 12 que el formen. Si restem 1/12 de comma pitagòrica a cada quinta, la nova quinta mesurarà:

$$\frac{3}{2} \langle - \rangle \frac{1}{12} \text{ de comma } = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[12]{\frac{3^{12}}{2^{19}}}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt[12]{2^7}}{2 \cdot 3} = \sqrt[12]{2^7} \approx 1{,}49831$$

Si comparem aquest valor amb el que va donar Pitàgores veurem que la diferència no sembla massa siginificativa, però per a l'afinació dels instruments i la composició de peces amb canvis de tonalitat, significava un avenç molt important.





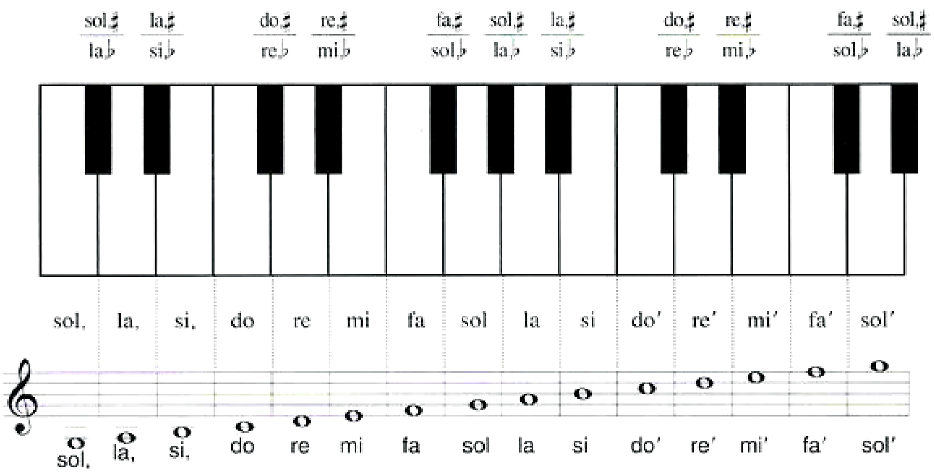
Cicle de quintes segons l'escala temperada, en nomenclatura espanyola i anglesa, i correspondència amb les diferents tonalitats que en resulten per a cada salt de 5a. Autor: Just plain Bill, 2008.

Cercle de quintes publicat l'any 1679 en la versió de Nikolay Diletsky de la "Idea grammatiki musikiyskoy."

El fet de "deformar" totes les quintes en la mateixa quantitat comporta que si iniciem el cicle de quintes des del Do, com ho feia Pitàgores, tant si ens movem cap a la dreta com a l'esquerra, sempre confluirem en la mateixa nota. És per aquest motiu que podem afirmar que en l'escala temperada, que és la que es fa servir en la major part de la música que escoltem tenim les següents equivalències:

do# = reb   re# = mib   fa# = solb   sol# = lab   la# = sib

Aquestes equivalències són fàcilment visibles si ens fixem en les tecles del piano:



Ubicació de les notes en el teclat del piano. Imatge extreta del blog: bemoles y sostenidos

Aquesta solució, que ens pot semblar tan evident, no era del tot acceptada pels teòrics de l'època, i cada temperament o ajustament del cicle de quintes que circulava a principis del S. XVII tenia els seus seguidors i detractors. Les diferents propostes passaven per reduir una part de la comma pitagòrica només en algunes quintes, podem imaginar doncs com la situació n'era de complicada.
Algunes de les propostes van ser:

Quinta	Werckmeister (1645-1706) 1/4 comma	Werckmeister (1645-1706) 1/3 comma	Neidhart (1685-1739) 1/12, 1/6 comma	Lambert (1728-1777) 1/7 comma
Sol#⇒Mi^b	3/2	3/2	3/2–1/12 de comma	3/2
Mib⇒Si^b	3/2	3/2	3/2–1/12 de comma	3/2
Sib⇒Fa	3/2	3/2	3/2	3/2
Fa⇒do	3/2	3/2	3/2	3/2–1/7 de comma
Do⇒sol	3/2–1/4 de comma	3/2–1/3 de comma	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
Sol⇒re	3/2–1/4 de comma	3/2–1/3 de comma	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
Re⇒la	3/2–1/4 de comma	3/2	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
La⇒mi	3/2	3/2	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
Mi⇒si	3/2	3/2	3/2–1/12 de comma	3/2–1/7 de comma
Si⇒fa#	3/2–1/4 de comma	3/2–1/3 de comma	3/2–1/12 de comma	3/2–1/7 de comma
Fa#⇒do#	3/2	3/2	3/2	3/2

Imatge extreta de l'article *Las matemáticas de Johan Sebastian Bach*, revista Suma n. 61, juny 2009

Aquestes noves afinacions plantejades per Werckmeister (1645-1706), o Lambert (1728-1777), tots 2 compositors i teòrics, o Neidhart (1685-1739), , matemàtic, físic, astrònom i filòfof , seguien utilitzant les matemàtiques per al càlcul dels intervals, però amb una finalitat pràctica.

Mentres els teòrics discutien i proposaven alternatives diverses per a solucionar el problema de la comma, per a Bach (1685-1750), contar amb solucions teòriques plausibles no era suficient, necessitava solucions que conjuguessin teoria i pràctica. Com un matemàtic, va fer una demostració constructiva de la seva teoria, i el resultat va ser *El clave bien temperado*.

Sembla ser que el sistema d'afinació al què es referia Bach, amb aquesta obra, era el de Werckmeister , que tanca el cercle de quintes escurçant ¼ de la comma pitagòrica a les 4 quintes següents:

Do – Sol   Sol – Re   Re – La   Si – Fa#

Per tant, el valor d'aquestes quatre quintes seria:

$$\frac{3}{2}\ \langle\text{-}\rangle\ \frac{1}{4}\ \text{de comma}\ =\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[4]{\frac{3^{12}}{2^{19}}}}=\frac{3\cdot 2^{4}\sqrt[4]{2^{3}}}{2\cdot 3^{3}}=\frac{8\sqrt[4]{2^{3}}}{9}\approx 1{,}49493$$

Per a la resta de quintes es mantindria el valor de 3/2 = 1,5 establert per Pitàgores.

La proposta de Bach va ser realment efectiva perquè no es va dedicar a defensar un temperament des del punt de vista teòric. Per tal de posar fi al problema, calia una "demostració constructiva", i *El clave bien temperado* en va ser el resultat. Aquesta obra, que no es va imprimir en vida de l'autor, consta de 2 volums amb preludis i fugues composades en totes les tonalitats majors i menors de la gama cromàtica i tenia com a principal objectiu demostrar que la seva proposta era viable i sonava bé.

Més endavant tractarem alguns dels aspectes més representatius de la seva obra, que manté forts lligams amb la geometria.

Si ens fixem en els instruments de què disposem, podem comprendre la seva dificultat d'afinació segons l'escala pitagòrica, possible encara que complexa en instruments de corda sense trastes o instruments de vent, i del tot impossible ens instruments de corda amb trastes o instruments de teclat.
La gama de tons que es fa servir avui en dia es va generalitzar a partir de 1630, quan el matemàtic Marsenne (1588-1648) va formular amb presició les regles per a afinar a la seva obra *"Armonía Universal".* Es tracta d'una escala uniformement temperada, amb 12 semitons consecutius que mantenen una relació constant de freqüències que veurem més endavant.

3.2. Harmonia i divisibilitat

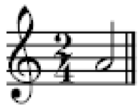
El motiu pel qual alguns intervals dels que va descobrir Pitàgores, sense coneixements d'harmonia, resultaven agradables i d'altres no, es troba en la física de la corda tocada. Quan es va sonar una corda de 36cm, no només es produeix una ona de 36cm, sinó que a més a més es formen 2 ones de 18cm, 3 ones de 12cm, 4 de 9cm i així succesivament. La corda vibra en meitats, terços, quarts, etc. de manera que quan sonen els intervals d'octava, cinquena i quarta, les longituts d'ona produeixen una seqüència d'harmònics que a l'oïda ens resulta agradable, ja que es van repetint per a cada interval.

L'altura d'un so depèn únicament de la freqüència de les vibracions del cos emissor, és el que anomenem altura, i determina si el so és greu o és agut. La unitat de mesura de l'altura, l'Herz (Hz), és el nombre d'oscil·lacions, cicles o vibracions per segon d'un so (cicle/segon). Si comparem la freqüència del Do que considerem com a fonamental i la seva octava alta, la freqüència es dobla per al so més agut. Per a la interpretació d'una melodia és més important la relació que existeix entre les freqüències dels diferents sons que no pas la freqüència absoluta de cada un d'ells. Un conjunt de notes que sonen alhora formen un acord, i en funció de les relacions de les seves freqüències pot sonar bé, és el que coneixem com a acord consonant o harmònic, o pot resultar desagradable a l'oïda, és el cas dels acords dissonants.
L'harmonia és l'encarregada de l'estudi de les relacions entre els sons simultanis, establint un conjunt de normes i regles que cal respectar per tal de conseguir un so coherent basat en

acords consonants, i per a conseguir-ho no en tenim prou escoltant la música, sinó que és necessari contar els intervals que es formen en cada acord i els salts que va fent la melodia.

L'oïda humà pot percebre l'interval de freqüències [15Hz, 20.000Hz], tot i que els sons més aguts arriben generalment als 5.000Hz. Fora d'aquest interval els sons s'anomenen:
< 15Hz → infrasons
> 20.000Hz → ultrasons

La referència que ens serveix per a mesurar el valor absolut dels tons és 440Hz, que és la freqüència que té un diapasó normal i que s'utilitza per a afinar la nota La, situada al segon espai del pentagrama si llegim en clau de Sol. Aquesta referència no sempre ha estat la mateixa i ha evolucionat des de valors més baixos de freqüència. Actualment, el criteri dels 440Hz no està completament unificat, ja que hi ha orquestres que afinen als 438, 440, 442 ó 444Hz.



A través de l'anàlisi de les freqüències dels sons, comprendrem el paper que hi juga l'aritmètica en l'harmonia, i el motiu pel qual hi ha sons que conjutament sonen bé, o sigui que són harmònics, i d'altres que ens resulten dissonants.

Tal com hem comentat anteriorment, Marsenne estableix l'any 1630 els 12 sons de l'escala temperada, iguals en cada octava, on la raó que hi ha entre la freqüència d'una nota i l'anterior és sempre constant.
Si anomemen r a aquesta raó, es cumpleix que les freqüències formen una progressió geomètrica del tipus:

$f, f\cdot r, f\cdot r^2, f\cdot r^4, \ldots, f\cdot r^{12} = 2\cdot f$

d'on es dedueix que:
$r^{12} = 2$
$r = \sqrt[12]{2}$
$r = 1{,}05946\ldots$

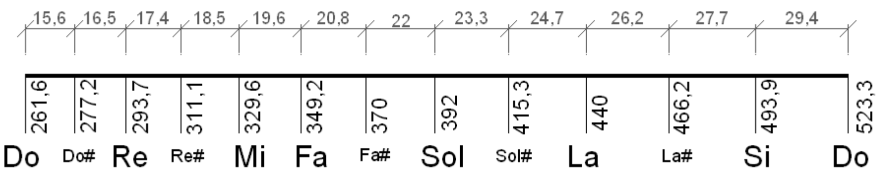
D'aquesta manera podem concloure que:

- entre semitons (st) consecutius es manté una relació constant de $\sqrt[12]{2}$
- entre tons (t) consecutius es manté una relació constant de $\sqrt[6]{2}$
- la relació que hi ha entre 2 notes a una distància d'8a és de $\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 2$
- aquestes relacions es mantenen invariables per a totes les octaves

Podem elaborar, ara que sabem la raó de la progressió geomètrica que dóna lloc els diferents sons, més aguts si multipliquem, més greus si dividim, els 12 sons que formen l'octava central del piano:

Quadre de freqüències (Hz)													
Nota	**Do**	**Do#**	**Re**	**Re #**	**Mi**	**Fa**	**Fa#**	**Sol**	**Sol#**	**La**	**La#**	**Si**	**Do**
Hz	261,6	277,2	293,7	311,1	329,6	349,2	370	392,0	415,3	**440**	466,2	493,9	523,3

Mitjançant la representació sobre una recta, veiem quines són les relacions que hi ha entre les diferents freqüències obtingudes.



La distància entre 2 tons o 2 semitons consecutius va augmentant a mesura que anem a la dreta, o sigui que les notes són més agudes. L'escala musical és una funció logarítmica que va en progressió geomètrica de raó $\sqrt[12]{2}$ i és en el valor dels logarimes on en mantenen les distàncies absolutes.

	Sol	**La**	**Si**
Freqüència	392	440	493,9
$\log_2$ de la freqüència	8,61	8,78	8,95

Diferència de les freqüències: 440 – 392 = 48
493,9 – 440 = 53,9

Diferència del logaritme de les freqüències: 8,78 – 8,61 = **0,17**
8,95 – 8,78 = **0,17**

Si escoltem simultàniament dues notes musicals, el resultat serà un so més o menys agradable. Els sons que es consideren més agradables de sentir conjuntament són els que estan a una distància de 8a, 5a i 4a justa. És interessant observar les raons que es donen entre els sons consonants o agradables i els sons dissonants:

Quadre de proporcions o raons													
Nota	**Do**	**Do#**	**Re**	**Re #**	**Mi**	**Fa**	**Fa#**	**Sol**	**Sol#**	**La**	**La#**	**Si**	**Do**
raó	1,00	1,06	1,12	1,19	1,26	1,33	1,41	1,50	1,59	1,68	1,78	1,89	2,00
suma de fraccions*	1	1 5/84	1 1/8	1 1/5	1 1/4	1 1/3	1 2/5	1 1/2	1 3/5	1 2/3	1 7/9	1 8/9	2
fracció resultant	1	89/84	9/8	6/5	5/4	4/3	7/5	3/2	8/5	5/3	16/9	17/9	2

*NOTA: el fet de treballar amb fraccions de 2 dígits fa que el resultat que en resulti sigui aproximat. Si augmentem en nombre de dígits, millorarem la presició.

Interval d'8a: 12 semitons (12 st = 6t) → Do – Do

Interval de 5a, o 5a justa: 7 sermitons (7 st = 3t + 1st) → Do – Sol

Interval de 4a o 4a justa: 5 semitons (5st = 2t + 1st) → Do – Fa

Els sons consonants o agradables d'escoltar conjuntament tenen freqüències relatives de 2/1, 3/2 i 4/3 i les freqüències absolutes d'aquests sons tenen molts divisors en comú (tots en el cas de l'octava i 2/3 parts per a la 4a i la 5a).

Els intervals de 3a i 6a, tant major com menor, encara es consideren agradables; la freqüència relativa de les seves notes estan en raons de 5/4 i 6/5 respectivament per a les 3es i en raons de 5/3 i 8/5 respectivament per a les 6es, i les seves freqüències absolutes tenen com a divisors comuns al voltant de la meitat dels seus divisors.

Interval de 3a Major (M): 4 semitons (4st = 2t) → Do – Mi

Interval de 3a menor (m): 3 semitons (3st = 1t + 1st) → Do – Mib

Interval de 6a Major (M): 9 semitons (9st = 4t + 1st) → Do – La

Interval de 6a menor (m): 8 semitons (8st = 4t) → Do – Lab

"Cuanto más simple es la relación de las frecuencias de dos sonidos, más consonante será el intervalo que forman".

John Tyndall (1820-1894)

Les consonàncies poden endreçar-se de la següent manera:

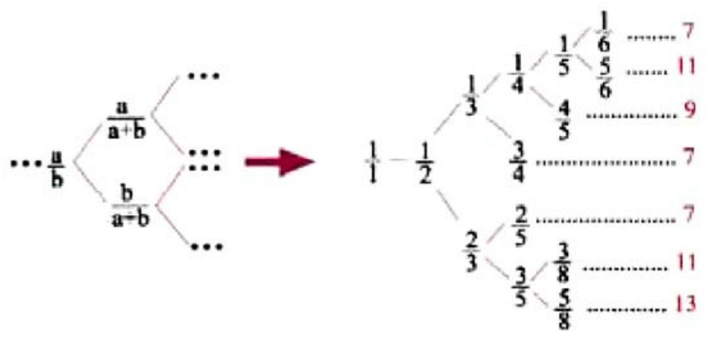
1/1 Uníson > 2/1 Octava > 3/2 Quinta > 4/3 Quarta > 5/4 Tercera Major > 5/3 Sisena Major > 6/5 Tercera menor > 8/5 Sisena menor > ...

Podem veure què passa si factoritzem els valors aproximats de les freqüències d'aquest sons que formen intervals consonants:

Uníson:	**260** = $2^2 \times 5 \times 13$
Octava:	**520** = $2^{(2+1)} \times 5 \times 13$
Cinquena:	**390** = $2 \times 3 \times 5 \times 13$
Quarta:	**350** = $2 \times 5^2 \times 7$

La demostració del perquè de la consonància ha estat difícil de trobar, i les interpretacions que se n'han fet han estat variades. Kepler (1571-1630), en *Harmonices mundi* (1619). Proporciona els raonaments més sòlids fins al moment, basant les proporcions harmòniques amb els polígons regulars, relacionant la condició de ser construible amb regle i compàs amb la capacitat de generar proporcions consonants.

Kepler va idear un mètode que consistia en generar un arbre de consonàncies en què cada fracció a/b, en cada pas n generés dues fraccions, a/(a+b) i b/(a+b) en el pas n+1. Es parteix de la fracció 1/1 i el procés es continua fins arribar a un denominador que representés els costats d'un polígon regular no construïble amb regle i compàs (polígons de 7, 9, 11 i 13 costats).



Arbre dels intervals consonants de Kepler (1619). Imatge extreta de l'article *La música y el número siete. Historia de una relación controvertida.* Revista Suma n. 58, juny 2008.

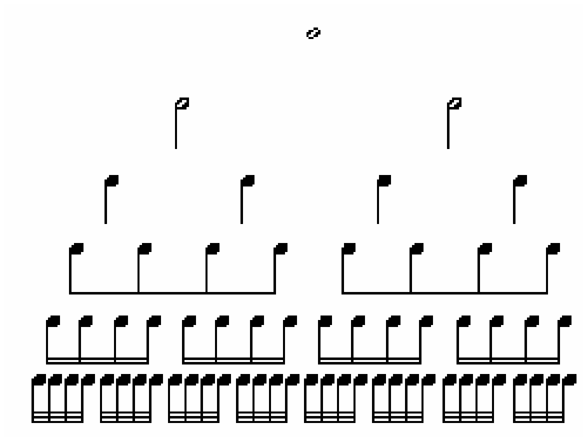
3.3. Ritme i nombres

Tota composició musical té una estructura interna formada per compassos, tots ells generalment de la mateixa durada, i organitzada en frases que acostumen a tenir el mateix nombre de compasos, 4 ó 8 generalment.
A l'inici d'una peça musical, després de la clau i l'armadura, apareix una fracció que ens indica el ritme que caldrà seguir durant tot la partitura. El numerador d'aquesta fracció indica el nombre de figures que trobarem en cada compàs, mentres que el denominador ens dóna informació sobre quina és aquesta figura rítmica.

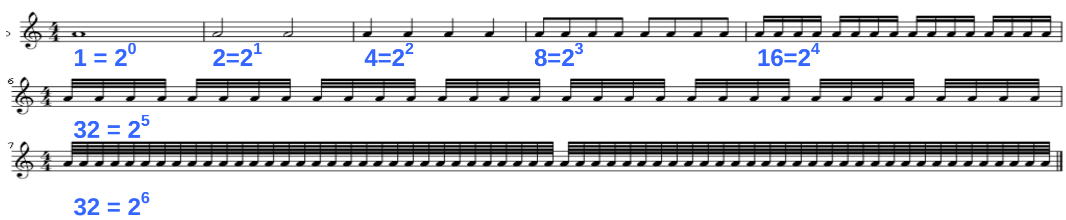
3.3.1. Les diferents figures i la seva relació

Una figura en música és cada una de les formes gràfiques o figuracions que s'utilitzen per anotar la durada d'una nota. En el sistema de notació occidental, cada nota conté dues informacions bàsiques: una relativa a l'altura segons la posició que ocupa en relació al pentagrama, i una altra relativa a la durada i al ritme, i que s'expressa segons el dibuix d'aquesta nota. La figura es refereix a aquest segon element.
En el sistema actual -resultat d'una evolució continuada des dels sistemes de notació medievals- les figures existents són les següents:

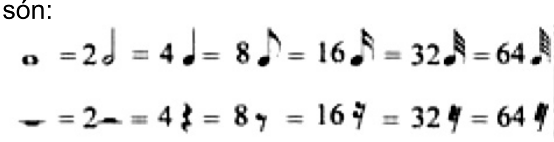
- rodona
- blanca
- negra
- corxera
- semicorxera
- fusa
- semifusa



La relació existent entre les seves durades respectives és sempre 1-2. Així, la durada d'una rodona és el doble que la d'una blanca, o- el que és el mateix- la durada d'una rodona equival a la de dues blanques. De vegades d'aquesta durada també se'n diu valor; així, el valor d'una negra és el mateix que el de dues corxeres.



Aquestes figures, així com també els silencis que les corresponen, guarden entre sí una relació que ve donada per potències de 2, de manera que la interpretació del pentagrama consisteix en un exercici insconscient d'aritmètica de fraccions. Les seves equivalències són:



Es pren com a unitat la rodona i la resta de figures són parts d'aquesta unitat. El total de figures de què disposa el compositor són:

$$N = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right\}$$

3.3.2. Organització del temps en una composició: el compàs i el tempo

La manera com es distribueixen les figures que ja coneixem en cada compàs dependrà de la fracció, anomenada compàs, que ens aparegui just després de la clau. Veiem-ne alguns exemples:

- **compàs 4/4** (també indicat amb la lletra C): la suma de figures d'un compàs ha de ser de 4 x ¼ rodona, per tant 4 negres/compàs
- **compàs 3/4**: la suma de figures d'un compàs ha de ser de 3 x 1/4 rodona, per tant 3 negres/compàs
- **compàs 2/4**: la suma de figures d'un compàs ha de ser de 2 x 1/4 rodona, per tant 2 negres/compàs
- **compàs 6/8**: la suma de figures d'un compàs ha de ser 6 x 1/8 rodona, per tant 6 corxeres/compàs
- **compàs 3/8**: la suma de figures d'un compàs ha de ser 3 x 1/8 rodona, per tant 3 corxeres/compàs.
- etc.

Cada compàs estarà format doncs per fraccions del conjunt *N*, que poden ser notes o silencis, de manera la seva suma es correspongui la fracció que ens apareix a l'inici de la composició.

Veiem-ne algun exemple:

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

Existeixen en música alguns recursos com el doset, el treset o el quartet, entre d'altres, que modifiquen la durada de les figures, escurçant-les o allargant-les segons el cas.
El treset i el quartet, per exemple, estan formats per un grup de 3 i 4 notes del mateix tipus, que cal interpretar en el temps ocupat per 2 i 3 notes respectivament. Aquestes modificacions s'indiquen mitjançant un nombre que indica l'efecte i un corxet que abarca les notes afectades:

$$\tfrac{2}{4}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}\right)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{4}{5}\left(\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}\right)=$$

$$=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}$$

Tot i que com hem vist, la composició de figures que formen un compàs consisteix en la suma de fraccions, la majoria de vegades els estudiants de música aprenen sense conéixer l'existència de les mateixes.

Un altre element que es pot trobar en una composició musical que serveix també per a mesurar el temps és el tempo. El tempo expressa la velocitat d'una obra i actualment s'indica amb un nombre de notes per minut. Per exemple:

♩= 90, significa que en un minut han d'executar-se 90 negres.

Existeixen també termes italians per a definir de forma aproximada les pulsacions per minut:

Nom	Pulsacions/minut	Nom	Pulsacions/minut
Largo	Fins a 50	Moderato	108-120
Larghetto	50-66	Allegro	120-168
Adagio	66-76	Presto	168-200
Andante	76-108	Prestissimo	200-207

Podem fàcilment trobar la durada d'una obra musical a partir del tempo, del tipus de compàs i del nombre de compassos que la conformen.
Els intèrprets disposen d'un aparell, el metrònom, que marca el tempo fixat per la partitura per tal de saber, sense necessitat de contar, si estan portant o no la velocitat correcta per a cada cas.

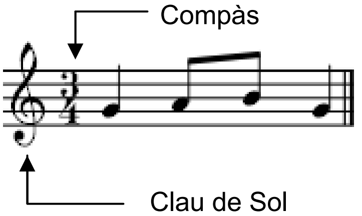
3.4. Notació musical i funcions

La notació musical es composa d'un seguit de signes que defineixen el so gràficament. Si observem una partitura qualsevol veurem com cadascun dels signes que apareixen al pentagrama tenen principalment 2 variables que ens permeten identificar-lo i interpretar-lo si és el cas. Aquestes dues variables són la **durada** i el **so**.
La durada ve determinada per la figura musical (rodona, blanca, negra, corxera, etc) i el so el determina la posició que ocupa aquest signe al pentagrama (do, re, mi, fa, etc).

Si una partitura musical depèn de 2 magnituts, aquestes es poden expressar sobre uns eixos cartesians on posaríem el temps (en segons) a l'eix de les abcisses i el so (en Hz) a l'eix de les ordenades.

Veiem-ne algun exemple:

♩ = 60 ← Tempo



El tempo ♩ = 60 ens indica que la durada de 60 ♩ és un minut → 1 ♩ / segon

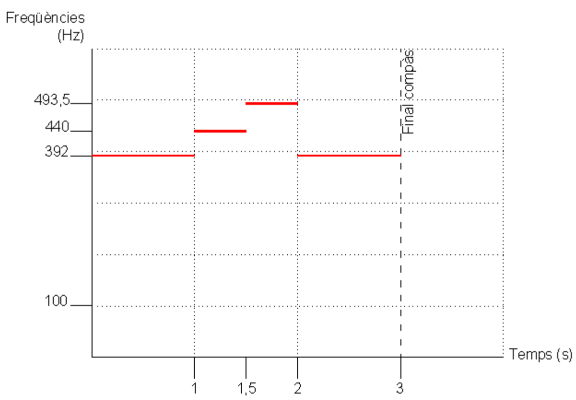
La clau de Sol ens indica que en la segona línia es troba el Sol, i a partir d'aquesta es troben la resta de notes, una en cada espai, i una en cada línia, tant en sentit ascendent com descendent.

El compàs 3/4 ens indica que en cada compàs hi ha d'haver 3 negres (1/4 de la rodona).

Taula de valors:

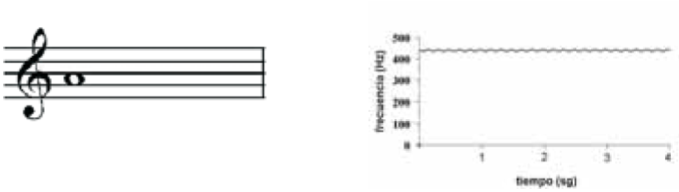
Nota	Durada (s)	Freqüència (Hz)
1 : Sol negra	1	392
2 : La corxera	0,5	440
3 : Si corxera	0,5	493,5
4 : Sol negra	1	392

Gràfic:



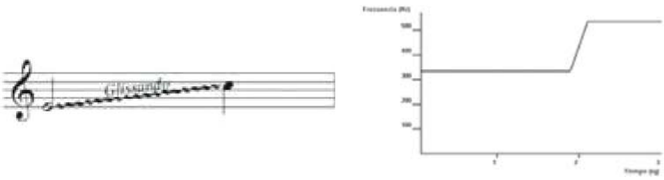
Una partitura musical es pot escriure doncs com una funció definida a troços on cada tros representa una figura diferents de la partitura. **La funció resultant és contínua per la dreta i discontínua de salt finit per l'esquerra coincidint amb el moment de canvi de nota de la partitura.** Cada tros de la funció és constant i el seu valor és la freqüència de la nota que ha de sonar en aquell moment.

Hi ha alguns recursos musicals, com el vibrato o el glissando, que fan que algun dels intervals continus de la funció no siguin constants.
El vibrato és un recurs que enriqueix la música fent que una nota no soni linial sinó que el seu so oscil·la lleugerament al voltant de la nota. Si apliquem un vibrato sobre el La, per exemple, la seva freqüència aniria oscil·lant aproximademant entre els 435 i els 445Hz.



Imatges extretes de l'article *Matemáticas en la Música* d'Ángel Pastor Martín

Un glissando consisteix en fer lliscar el dit sobre la corda o sobre el teclat des d'una nota incial fins a una altra nota final.



Imatges extretes de l'article *Matemáticas en la Música* d'Ángel Pastor Martín

3.5. La geometria de Bach

Johan Sebastian Bach (1685-1750) va pertànyer a una de les famílies més extraordinària de músics de la Història, amb més de 35compositors famosos i molts intèrprets destacats. Organista i clavecinista reconegut arret d'Europa, va ser el primer gran inprovitzador de renom en una època de gran revolució intel·lectual a la què va contribuir des de la Música.
Malgrat que Bach "no era amant del sec material matemàtic", segons afirmava el seu fill en una de les seves cartes, el cert és que la grandesa estructura la les seves obres, així com la solució que va donar al problema de la comma pitogòrica amb *El clave bin temperado* (1722, 1744) són formes brillants de fer Matemàtiques de les què Bach només fa ser conscient al final de la seva vida.

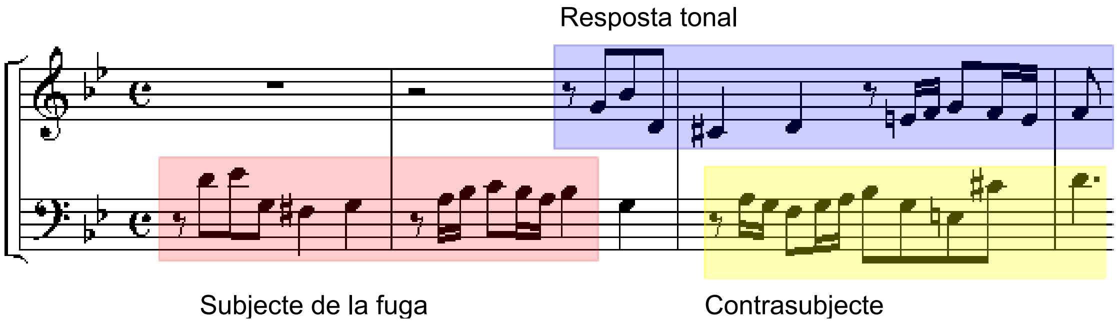
L'obra de Bach està plena de claus numèriques. Si sumem per exemple les xifres que corresponen a la posició en l'alfabet de les lletres B-a-c-h, s'obté el nombre 14 (2+1+3+8) i si sumem les corresponents a les lletres J-S-B-a-c-h obtenim el nombre 41, que és l'invers de 14. Aquesta observació, que podria sembla una simple anècdota, manifestava uan predisposició cap a les lleis de la simetria i l'harmonia universals que proporcionarien moltes sospreses en la seva obra. El manuscrit de coral per a orgue *Von deinen Thhron tret ich hermit* conté en la primera línia 14 notes, mentres que si contem el total en resulten 41 i aquest no és un fet casual, ja que aquests 2 nombres, 14 i 41, apareixen també en altres de les seves obres. Si analitzem la primera secció del *Credo de la Misa en Si menor*, veurem com la paraula Credo es repeteix 43 vegades, que és el nombre que resulta de sumar les posicions que ocupen en l'alfabet les lletres C-r-e-d-o . Les dues primeres seccions del mateix *Credo* sumen 129 compasos, o sigui 43 x 3, sent 3 el nombre que simbolitza la Trinitat.

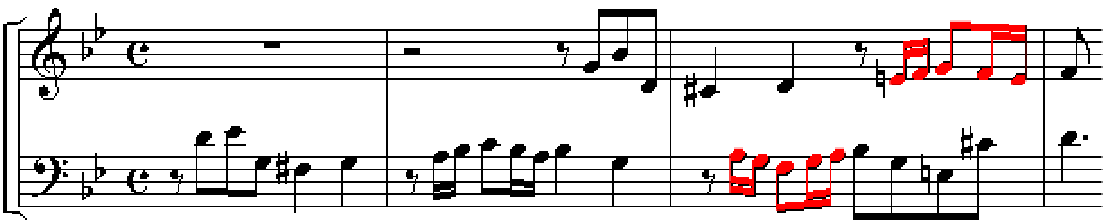
Però més enllà d'aquesta simbologia numèrica que poc aporta a les Matemàtiques, podem trobar en les seves obres gran quantitat de raonaments matemàtics relacionats principalment amb la geometria.
Durant molts anys, Bach no fou conscient del rigor científic de les seves obres perquè, segons paraules del seu fill, "no es deixava portar per profundes consideracions teòriques i dedicava,

en el seu lloc, les seves energies a la pràctica”. L’estiu de 1747, després de 9 anys de negativa, va accedir a ingressar en la *Sozietät der Musicalischen Wissenschaften* (Societat de les Ciències Musicals) amb la finalitat d’estudiar la relació entre Música i Matemàtiques, ja que s’havia adonat que en la seva manera de plantejar els cànons i les fugues s’amagaven raonaments matemàtics.

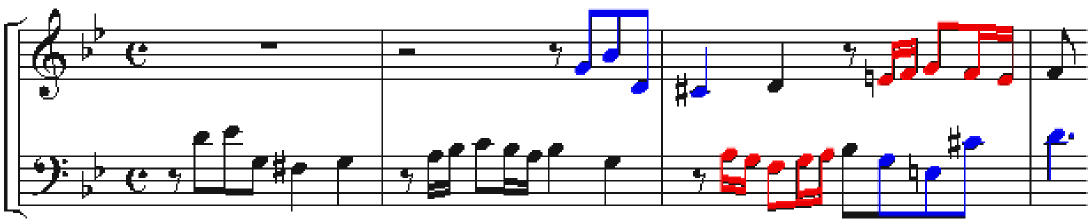
Bach feia servir un procediment per a dotar de cohesió les peces musicals que consistia en la reafirmació d’una seqüència de sons una vegada i una altra de forma variada per a evitar la monotonia i donar caràcter a la composició. Algunes de les tècniques utilitzades que feia servir habitualment estan basades en el pla geomètric, com són les translacions, els girs i la simetria.
Bach partia d’un o més temes i els sotmetia a transformacions geomètriques que mantenien en tot moment la seva forma original, i que malgrat la seva rigidesa, tenien com a resultat obres brillant i riques gràcies a la seva capacitat d’improvització.

A mode d’exposició, farem un breu anàlisi de de la Fuga #16 en sol menor BWV861 de Bach, per tal de veure algunes de les operacions matemàtiques que fa servir:





Les primeres notes del contrasubjecte són les últimes notes de la resposta, transformades per inversió.



Les últimes notes del contrasubjecte són les primeres notes de la resposta, també transformades per inversió.

I l’ordre d’aparició és el següent:

En aquest fragment el contrasubjecte apareix 3 vegades.

Podem fer un anàlisi gràfic també d’aquest fragment de la fuga de 7 compasos:

Subjecte (S)	Resposta (R)	Contrasubjecte (CS)
Ús parcial del S, R o CS	Contrapunt lliure	Episodi

El subjecte de la fuga apareix al primer compàs amb les notes:

RE – MI– SOL – FA# – SOL – LA – SI – DO – SI – LA – SI

I torna a aparéixer al 5è compàs una 8a més baixa:

(re – mi – sol – fa# – sol – la – si – do – si – la – si) = ½ x (RE – MI– SOL – FA# – SOL – LA – SI – DO – SI – LA – SI)

El mateix passa amb la resposta, que es repeteix al compàs 6 però una 8a més baixa que quan apareix per primer cop al 2n compàs.

Si observem les últimes notes del contrasubjecte que són les primeres notes de la resposta, transformades per inversió tenim que:

sol – sib – re – do# → sol x $(1, 2^{3/12}, 2^{-5/12}, 2^{-6/12})$

sol – mi – do# – re → Sol x $(1, 2^{-3/12}, 2^{5/12}, 2^{6/12})$

Podem veure com els exponents de les dues sèries són els mateixos però de signe contrari, ja que es mantenen els intervals però es canvia el sentit ascendente pel descandent i a l’inversa.

Si ens fixem en les primeres notes del contrasubjecte que són les últimes notes de la resposta, transformades per inversió, veurem que el fet d'anul·lar el bemoll que li correspondria per armadura al mi, fa que els exponents no es corresponguin per la diferència d'un semitó.

la – sol – fa – sol – la → la x $(1, 2^{-2/12}, 2^{-4/12}, 2^{-2/12}, 1)$

mi – fa – sol – fa – mi → mi x $(1, 2^{1/12}, 2^{3/12}, 2^{1/12}, 1)$

si s'hagués mantingut el mib els exponents coincidirien però amb els símbols canviats:

mib – fa – sol – fa – mib → mi x $(1, 2^{2/12}, 2^{4/12}, 2^{2/12}, 1)$

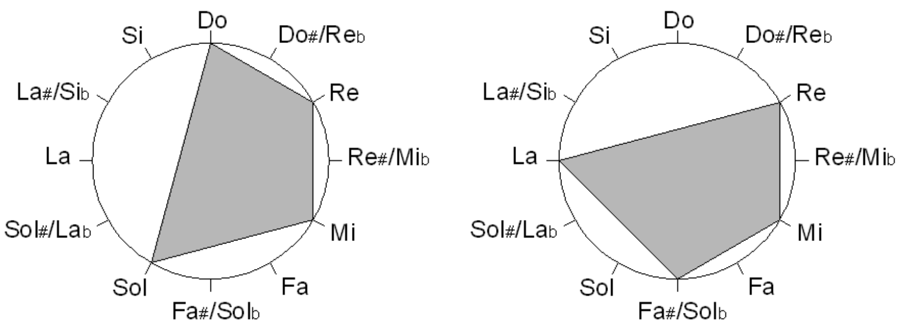
Com hem pogut veure, els motius melòdics es repeteixen amb sons més greus o més aguts, però mantenen els mateixos intervals originals, o amb moviments contraris o simetries.
Aquest és un dels recursos que fa servir Barh per a dotar d'homogeneïtat i coherència les seves obres, però en el rerafons de les seves fugues i preludis, hi ha altres operacions molt més complexes que fan que el resultat sigui un conjunt harmònic i agradable a l'oïda.

És interessant veure com es poden representar geomètricament alguns d'aquests recursos, com són el trasport i la inversió:

El transport: consisteix en la repetició dels mateixos intervals però partint de notes diferents i sense sobrepassar la octava corresponent. El transport pot donar-se en sentit ascendent o descendent. Quan transportem a una distància de 8a, podem dir que estem octavant. En geometria es correspon amb un gir.

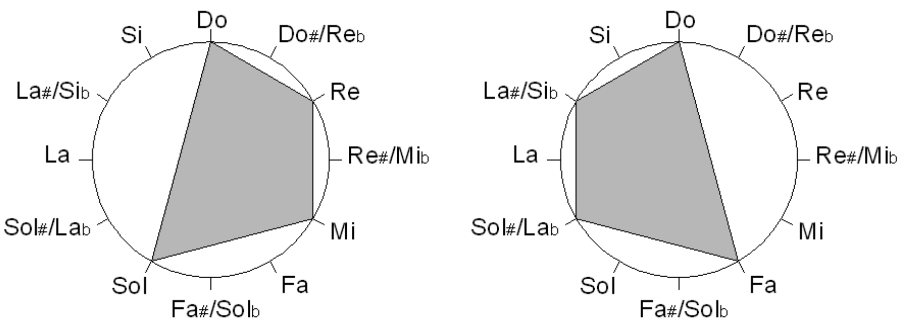
Exemple d'un transport de 2a ascendent:

do – re – mi – sol – do → re – mi – fa# – la – re



La inversió o moviment contrari: consisteix amb respectar el perfil melòdic però invertint la direcció dels intervals, demanera que els ascendents passaran a ser descendents i a l'inversa. En geometria es correspon amb una simetria.

do – re – mi – sol – do → do – sib – lab – fa – do



3.6. El nombre d'or Φ

Leonardo de Pisa (1170-1250), també conegut com a Fibonacci, va ser un matemàtic italià reconegut per la invenvió de la successió de Fibonacci, sorgida com a conseqüència de l'estudi del creixement de la població de conills. L'any 1202, als 32 anys d'edat, va publicar el Liber Abaci, un recull de tots els coneixements aritmètics i algebraics de l'època, amb nombrosos exemples com el del recompte de conills: suposem que els conills no es reprodueixen durant el seu primer mes de vida, però que a partir del segon mes cada parella de conills produeix un nou parell. Si suposem que cap d'ells mor i que hem començat amb un parell de conills, quantes parells de conills hi haurà als n mesos?
La successió de parells adultes és de la forma:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

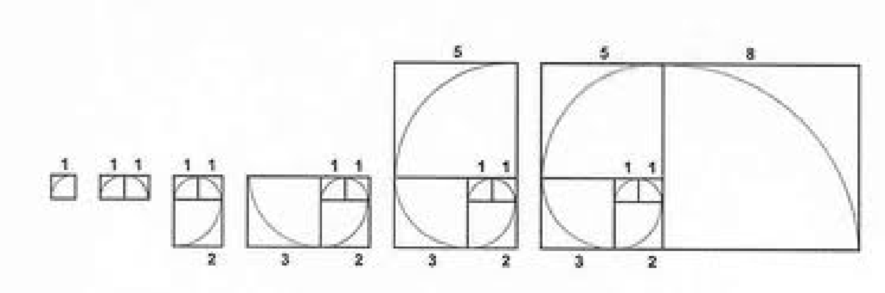
Si considerem $b_n = (u_n +1) / u_n$ com el quocient de creixement, obtindrem una succesió que té per límit el nombre d'or = 1,618034 quan $n \to \infty$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887...$$

Nombres de la sèrie	**Raons entre els nombres**	**Raons recíproques**
1	-	
1	1,000000	1,000000
2	0,500000	2,000000
3	0,666667	1,500000
5	0,600000	1,666667
8	0,625000	1,600000
13	0,615385	1,625000
21	0,619048	1,615385
34	0,617647	1,619048
55	0,618182	1,617647
89	0,617978	1,618182
144	0,618056	1,617978
233	0,618026	1,618056
377	0,618037	1,618026
610	0,618033	1,618037
987	**0,618034**	1,618033
1597	0,618034	**1,618034**
2584	0,618034	1,618034
4181	0,618034	1,618034
6765	0,618034	1,618034
10946	0,618034	1,618034
17711	0,618034	1,618034
28657	0,618034	1,618034
(…)	(…)	(...)

La raó entre 2 elements subjacents de la sèrie convergeix cap al decimal **0,618034...** i els seus recíprocs al decimal **1,618034...** La proporció entre aquestes raons, sigui fracció o en decimal és considerada per a molts atractiva a la vista, bella, equilibrada, tant per a la vista com per a l'oïda i s'anomena **proporció o secció àurea.**

Per la seva atractiva estètica, la proporció àurea es fa servir tant en l'art, com en l'arquitectura com en la música. Si observem la natura podrem veure aquesta proporció en les voltes del cargol, les formes con neixen les branques i fulles d'algunes plantes, etc.

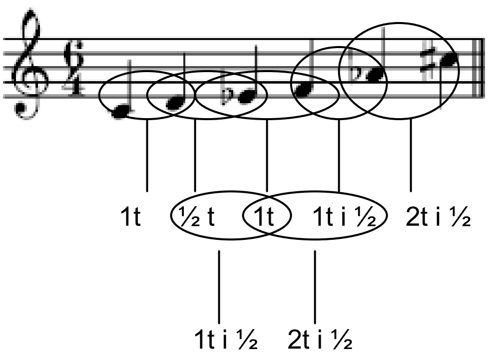


Golden spiral in rectangles. Wikipedia in French

Imatges extretes de la web: photoshop-designs.com

Els nombres de la sèrie de Fibonacci es fan servir perquè és una manera fàcil d'aconseguir la proporció àurea, i compositors com Beethoven (1770-1827) , no sabem si d'una manera intencional o intuitiva, l'ha feta servir en algunes de les seves obres, com és el cas de la *Quinta Simfonia.*
Si analitzem amb deteniment aquesta obra, veurem com la proporció àurea és present no només en el tema principal, sinó també en la forma com aquest tema és introduït en el transcurs de la composició, separat per un nombre de compasos que pertany a la sèrie.

Béla Bartók (1881-1945), compositor, organista i investigador de música folklòrica d'Europa de l'Est, va fer servir aquesta tècnica per a desenvolupar una escala anomenada escala Fibonacci, en què els intervals que es formen tenen el nombre de semitons de la sèrie:

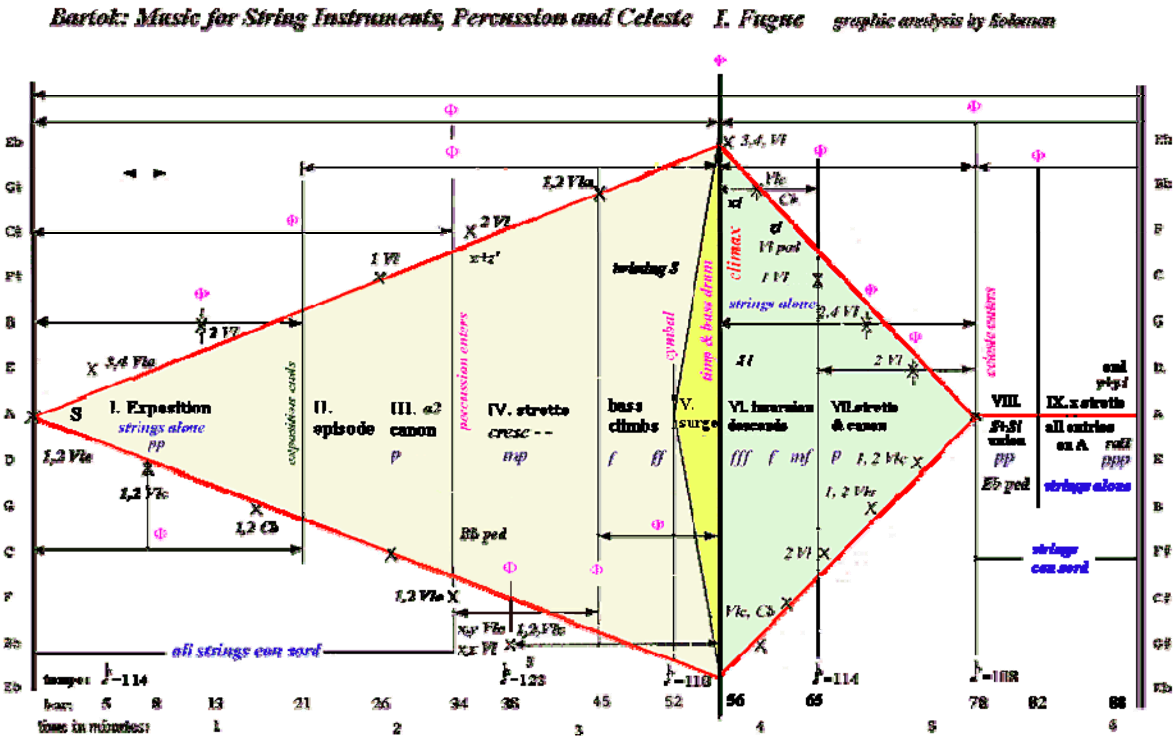


En l'obra de Bartók titulada *Música per a instruments de corda, percussió i celesta*, Bartók va servir la sèrie de Fibonacci, segons l'anàlisi del doctor Larry J. Solomon, un músic dels Estats Units que es va doctorar en Teoria de la Música als anys 70. Segons he pogut saber, per mitjà d'un treball realitzat per l'Anna Selga l'nay 2005, en un capítol de la seva tesi doctoral, L.J. Solomon parla de la simetria que hi ha present en l'obra de Bartók i del paper que hi juga la successió de Fibonacci.

Segons Solomon, existeix una relació **raó àurea-temps real** (mesurat en minuts i segons). L'obra original tenia una durada total de 6.13 minuts. El clímax arriba just als 3.79' fins a culminar al voltant dels 3.83'. Si multipliquem la durada total pel nombre d'or tenim:

6.13' x 0.618 = 3.79, coincidint amb el moment en què arribar el clímax.

L'esquema de la peça musical té diverses anotacions amb la lletra Φ que segons Solomon corresponen també a aquesta proporció en la durada, en temps real, dels diversos fragments assenyalats respecte a unes parts determinades del moviment.



Anàlisi gràfic segons Solomon de la fuga de Bartók: *Música per a instruments de corda, percussió i celesta* en el seu llibre *Symmetry as a Compositional Determinant.*

3.7. El joc de composar

L'any 1777, quan Mozart (1756-1791) tenia 21 anys, va realitzar una composició a partir d'un joc de daus, anomenada *Musikalisches Würfelspiel* (Joc de daus musical). Es tracta més d'un generador de valsos que no pas d'una composició musical. Mozart va escriure 176 compasos numerats de l'1 al 176 i els va agrupar en 2 taules diferents. Cada taula correspon a una part de la composició que en resultarà, i cada part estarà formada per 8 compasos. Aquests 16 compasos (8+8) són els que l'atzar determina, a través de la tirada de dos daus.

Zahlentafel

1. Walzerteil

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

2. Walzerteil

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Imatge extreta de l'article Música y matemáticas, de Susana Tiburcio

Els nombres romans que apareixen damunt de les columnes corresponen als 8 compasos de cada part, mentres que els nombres de les fileres corresponen a la suma dels resultats possibles. Els nombres de les matrius corresponen als 176 compasos que Mozart va composar. Tots els compasos que va composar Mozart de manera independent estan en la mateixa tonalitat i no tenen detalls de dinàmica, de manera que l'expressivitat de l'obra resultant depèn del/s intèrpret/s.

El procediment a seguir consisteix en tirar els daus, sumar el resultat i buscar el compàs corresponent a la teula respectiva. Sense entrar en detalls com la repetició d'algun compàs amb una numeració diferent, en principi el nombre de possibles partituras correspon 11^{16}, quasi bé 46 mil bilions. Aquest nombre és tan gran que s'ha calculat que si s'interpretessin de manera contínua i amb un ordre sistemàtic totes les partitures possibles, i per a cada una d'elles fessin falta uns 30 segons, farien falta més 728 milions d'anys per a interpretar tota l'obra ininterrompudament.

L'obra apareix publicada per primera vegada en l'Edició de J.J. Hummel, Berlín-Amsterdam, 1793.

És interessant observar quina és la distribució probabilística per a la suma de les cares dels daus, ja que hi ha resultats que tenen més probabilitat de sortir que d'altres:

1+1 = 2	2+1=3	3+1 = 4	4+1 = 5	5+1 = 6	6+1 = 7
1+2 = 3	2+2 = 4	3+2 = 5	4+2 = 6	5+2 = 7	6+2 = 8
1+3 = 4	2+3 = 5	3+3 = 6	4+3 = 7	5+3 = 8	6+3 = 9
1+4 = 5	2+4 = 6	3+4 = 7	4+4 = 8	5+4 = 9	6+4 = 10
1+5 = 6	2+5 = 7	3+5 = 8	4+5 = 9	5+5 = 10	6+5 = 11
1+6 =7	2+6 = 8	3+6 = 9	4+6 = 10	5+6 = 11	6+6 = 12

Prob (2) = 1/36 = Prob (12)

Prob (3) = 2/36 = Prob (11)

Prob (4) = 3/36 = Prob (10)

Prob (5) = 4/36 = Prob (9)

Prob (6) = 5/36 = Prob (8)

Prob (7) = 6/36

Els 16 llençaments de la parella de daus es fan de manera independent i tenen una probabilitat d'ocurrència associada que s'obté multiplicant les probabilitats de cada un dels nombres que surten de sumar els daus de cada tirada.

Per exemple si de les 16 tirades obtenim:

(3, 6, 10, 4, 9, 11, 8, 5, 6, 9, 11, 4, 2, 12, 7, 10),

La probabilitat d'ocurrència d'aquest vals que en resulta serà:

Prob = (2 x 5 x 3 x 3 x 4 x 2 x 5 x 4 x 5 x 4 x 2 x 3 x 1 x 1 x 6 x 3) x $(1/36)^{16}$.

De totes les combinacions possibles (11^{16}), moltes comparteixen el mateix nombre de probabilitats de repetir-se, però només una d'elles té la probabilitat d'ocurrència més alta, i és aquella en què per a tots els compasos els daus sumen 7, amb una probabilitat d' $(1/6)^{16}$.

Si es considera que per a cada peça resultant farien falta 30 segons per a interpretar-la, la realització més probable (7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7) tindria lloc cada 44.728 anys.

Segons he pogut saber a través de la seva web, El Departamento de Probabilidad y Estadística IIMAS ha desenvolupat un sofware que permet generar les variacions de Mozart en un temps mínim, tot i no estar disponible en aquest moment. Aquest fet ha permès que s'hagin dut a terme alguns concerts en què els intèrprets improvitzen amb una partitura acabada de generar per aquesta aplicació. Tot un repte si tenim en compte el gran nombre de variacions que en poden resultar i que els compasos no disposen de cap tipus d'espressió.

3.8. Composició digital

Iannis Xenakis (1922 - 2001), compositor i arquitecte d'ascendència grega i nacionalitzat francès, és aclamat com un dels compositors més importants de la música del segle XX.
Instal·lat a París, el 1948 va ingressar en l'estudi del famós arquitecte Le Corbusier com a enginyer calculista. Aviat va començar a col·laborar en els projectes de diverses obres importants com les unitats habitacionals de Nantes (1949), Briey-en-Forêt i Berlín-Charlottenburg (1954), els diferents edificis constitutius del plans d'urbanització de Chandigarh a l'Índia (1951), i el Centre Esportiu i Cultural de Bagdad (1957). En aquestes obres Xenakis va aplicar els mateixos processos compositius i estètics que en les seves obres musicals de l'època.
Xenakis va dissenyar a més dos importants obres de l'arquitectura del segle XX: el convent de Sainte-Marie-de-la-Tourette (1953), i el pavelló Philips de l'Exposició Internacional de Brussel·les de 1958, basat en les mateixes estructures que la seva obra orquestral *Metàstasi* de 1953-1954.
Durant aquests anys, Xenakis va començar paral·lelament els seus estudis de composició a París i l'any 1955, Hans Rosbaud va dirigir al Festival de Donaueschingen la seva primera obra important per a orquestra: *Metàstasi*. Aquesta peça i les que van seguir, notablement *Phitoprakta* de 1955-1956, i *Achorripsis* de 1956-1957, li van donar a Xenakis una notorietat que finalment li va permetre dedicar-se exclusivament a la composició.

Pioner de l'ús dels computadors en la composició musical algorísmica, Xenakis va fundar el 1966 l'EMAMu, conegut a partir de 1972 com CEMAMu (Centre d'Études de Mathématique et Automatique Musicales), institut dedicat a l'estudi d'aplicacions informàtiques en la música.

Xenakis va concebre i va desenvolupar el sistema UPIC, que permet la realització sonora directa de la notació gràfica que s'efectua sobre una targeta.

Xenakis és partidari d'una composició musical basada en la utilització de models matemàtics, per tal de crear:

"un món de masses sonores, vastos grups d'esdeveniments sonors, núvols i galàxies governades per noves característiques com la densitat, grau d'orde, nivell de canvi, les quals requereixen definicions i realitzacions usant la teoria de probabilitat".

"*Vers une métamusique*", La Nef, núm. 29, 1967.

Alguns dels procediments utilitzats en les seves composicions inclouen la teoria de probabilitats la teoria de jocs, la teoria de grups, i l'àlgebra booleana. D'acord amb el seu ús de teories probabilístiques, moltes de la peces de Xenakis són, en les seues pròpies paraules, *"una forma de composició que no és l'objecte en sí, sinó una idea en sí, això és, el començament d'una família de composicions"*.

Amb Xenakis neix el que es considera la Música estocàstica, basada en els principis matemàtics de l'aleatorietat.

4. La influència de la música en l'aprenentatge

"La música ha de ser para el alma lo que la gimnasia para el cuerpo"
Plató

Ja des de Pitàgores es creia en el vincle de la música amb la medicina, el seu poder màgic i curatiu. Si la medicina purificava el cos, la música purificava l'ànima.
Segons investigacions neurobiològiques, la música pot produir importants canvis en l'organisme:
- accelera o retarda les principals funcions orgàniques (ritme cerebral, circulació, respiració, digestió i metabolisme)
- incrementa o disminueix el to ienergia muscular
- modifica el sistema immunitari
- altera l'activitat neuronal en les zones del cervell implicades en l'emoció i incrementa la resistència per al treball i activitats d'alt rendiment.

Intel·lectualment la música desenvolupa la capacitat d'atenció i afavoreix la imaginació i capacitat creadora. Estimula la capacitat de concentració i la memòria a curt i a llarg termini, el sentit de l'ordre i l'anàlisi. Manté en actiu les neurones cerebrals, cosa que facilita l'aprenentatge, exercita la intel·ligència i afavoreix l'ús de diferents raonaments.

El Dr. Richard Franckowiat, de l'Institut de Neurologia de Londres, va comprovar en les seves investigacions que els hemisferis del cervell estan més desenvolupats en els músics. També va descobrir que el lòbul temporal en l'escorça cerebral és més pronunciat en els músics. Aquesta zona està relacionada amb els processos del llenguatge. La música pot desenvolupar, en els més petits, àrees cognitives, socials, emocionals, afectives, motrius, del llenguatge o capacitat de lectura i escriptura. Requereix operacions mentals. En la seva pràctica hi intervenen la vista, l'audició, la motricitat i els processos
cognitius i emocionals relacionats en la interpretació i apreciació. L'estudi neurocognitiu de les funcions musicals ens ajuda a entendre com s'organitza el cervell en aquestes operacions. Aquest art ens facilita l'aprenentatge de les matemàtiques i els idiomes i es manifesta millor si es comença l'aprenentatge dels sons als tres anys d'edat o fins i tot abans. Cantar o tocar algun instrument possibilita l'autorelació, augmenta l'autoestima i contribueix a la integració social. També mitjançant l'educació musical afavorim la sensibilitat estètica.
"L'efecte Mozart" , amb ritmes, melodies i freqüències altes, estimula i carrega les zones creatives i motivadores del cervell. El secret està en què tots els seus sons són molt purs i simples. I és precisament per aquest fet, que no qualsevol tipus de música contribueix a potenciar el cervell sent la música clàssica i barroca la més apropiada per a potenciar la fortalesa del cervell humà.

5. Proposta d'activitats

El present treball recull alguns dels conceptes més representatius sobre les relacions que existeixen entre les Matemàtiques i la Música, conceptes triats per a una possible aplicació a les aules tan d'ESO com de BAT del centre on he dut a terme les pràctiques.

Segons recomanacions del meu tutor de l'institut, podria donar lloc a una assignatura optativa del 1r curs de Batxillerat científic, amb una durada de 4 mesos i 2h/classe setmanals, ja que alguns conceptes matemàtics i musicals, bàsics per a una bona comprensió de la matèria, no estarien encara apresos.

Si bé em sembla molt interessant la idea de conformar un taller pitagòric on poder treballar com a bloc aquestes qüestions, penso que algunes de les activitats que a continuació es plantegen es poden fer servir per a explicar alguns conceptes matemàtics i les seves aplicacions en l'àmbit de la Música de manera puntual.

L'ordre de les activitats està plantejat d'acord amb l'ordre del temari plantejat.

Activitat 1: Construcció d'un monocordi i estudi de la relació entre les longituts de la corda i el so que emeten en vibrar. Introducció del concepte d'interval.

Activitat 2: Anàlisi del mètode geomètric definit per Pitàgores per a obtenir els intervals d'un instrument.

Activitat 3: En la recerca dels 12 sons de l'escala pitagòrica. Relació entre les seves longituds i les seves freqüències.

Activitat 4: La quinta del lobo. Proposta de solucions per al tancament del cercle de quintes pitagòric.

Activitat 5: Consonància vs dissonància. Experimentació amb diferents acords i anàlisi de l'arbre de Kepler.

Activitat 6: Elaboració de ritmes amb instruments de percussió, i transcripció al pentagrama, comprovant la correcta estructuració dels compassos.

Activitat 7: Del pentagrama a la funció, i de la funció al pentagrama. Altres visions de la notació musical.

Activitat 8: Audició d'algun preludi o fuga de Bach, reconeixent les veus que hi apareixen i els recursos geomètrics que es fan servir.

Activitat 9: Audició i anàlisi d'un fragment de la Quina Simfonia de Beethoven, per tal d'identificar la presència dels nombre de la sèrie de Fibonacci.

Activitat 10: Elaboració de valsos a partir de la tirada de dos daus. Estudi dels resultats obtinguts i les seves probabilitats.

6. Conclusions

“La especialización, aunque no deja de ser un rasgo necesario de nuestra civilización, debe complementarse con la integración a través del pensamiento interdisciplinario. Uno de los obstáculos que siguen oponiéndose a dicha integración es la línea divisoria entre los que se sienten cómodos con las matemáticas y los que no”.

Murray Gell-Mann (1929-), premi Nobel de Física 1969

Malgrat la meva poca experiència en l’àmbit de la docència, si una cosa tinc clara d’aquesta professió és el seu caràcter canviant i la necessitat d’innovació que requereix per part dels docent. Els estudiants estan en general poc motivats i els professors segueixen sovint fent servir les mateixes eines i recursos tradicionals, més propis d’un sistema conductivista que ha resultat poc efectiu.

El procés d’ensenyament-aprenentatge segueix fent-se d’una manera absolutament fragmentada i l’alumnat aprèn sense establir vincles que li poden ser molt útils per a tenir una visió més global de la realitat que ens envolta i, per tant, segueix sense adonar-se de la importància que tenen certs conceptes, en aquest cas matemàtics, en el nostre món quotidià.

Tal com he pogut comprovar fent aquest treball de recerca, hi ha una gran quantitat de relacions entre les Matemàtiques i la Música, moltes més de les que aquí he presentat, per què no fer-ne ressó? No ens hem de limitar a transmetre simplement els conceptes matemàtics tal i com apareixen als llibres de text, sinó que cal donar-los-hi una visió pràctica i una aplicació real.

La idea que es planteja en aquesta proposta didàctica es centra en demostrar les relacions que existeixen entre dues disciplines aparentment distants, però molt realcionades en la seva essència. La Música pot esdevenir per a les Matemàtiques, una eina molt potent per a motivar l’alumnat tot millorant-ne la seva capacitat de concentració.

La didàctica de les Matemàtiques, a través de la Música, pot servir per a passar de l’abstracció a la concreció, i de la raó pura al sentiment.

7. Bibliografia

LLIBRES

WRIGHT, David
Mathemathics and Music
AMS American Mathematical Society
Mathematical World Volume 28
United States 2009

HARKLEROAD, Leon
The Math behind the music
The Matematical Association of America
United States 2009

Gerard ASSAYAG, Hans Georg FEICHTINGER i José Francisco RODRIGUES
Mathematics and Music. A Diderot Mathematical Forum
Springer
Germany, 2002

ODIFREDDI, Piergiorgio
Pluma, pincel y batuta. Las tres envidias del matemático
Alianza Editorial
Madrid, 2007

John FAUVEL, Raymond FLOOD I Robin WILSON
Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals
Oxford
United States, 2003

ZAMACOIS, Joaquin
Temas de estética y de historia de la música
SpanPress Universitaria
Espanya, 1997

ARTICLES

LIERN CARRIÓN, Vicente
La música y el número siete. Historia de una relación controvertida..
SUMA+ 58

PASTOR MARTÍN, Ángel
Matemáticas en la música
Ángel Pastor Martín
SUMA+ 59

LIERN CARRIÓN, Vicente
Las fracciones de la música
SUMA+ 59

LIERN CARRIÓN, Vicente
Las matemáticas de Johan Sebastian Bach
SUMA+ 61

LIERN CARRIÓN, Vicente
Música y matemáticas en educación primaria
SUMA+ 66

LIERN CARRIÓN, Vicente i QUERALT LLOPIS, Tomàs
La armonía de los números
Con motivo del Día Escolar de las Matemáticas

MARTÍN GARCÍA, Víctor
Relaciones entre la Música y las Matemáticas

MEAVILLA SEGUÍ, Vicente
Las matemáticas del arte
Inspiración ma(r)temática

TUBURCIO, SUSANA
Música y matemáticas
http://www.elementos.buap.mx/num44/htm/21.htm

TREBALLS DE RECERCA

HERNÁNDEZ SÁNCHEZ, Irene
Música i Matemàtiques
IES de Terrassa

SELGA RUIZ, Anna
La matemàtica en la música
IES Serra de Marina

WEBGRAFIA

WIKIPÈDIA: Pitágoras de Samos
http://es.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras
20 de març de 2011

WIKIPÈDIA: Monocordio
http://es.wikipedia.org/wiki/Monocordio
20 de març de 2011

WIKIPÈDIA: Ludwin van Beethoven
http://es.wikipedia.org/wiki/Ludwig_van_Beethoven
2 de maig de 2011

WIKIPÈDIA: Wolfgang Amadeus Mozart
http://es.wikipedia.org/wiki/Mozart
2 de maig de 2011

WIKIPÈDIA: Iannis Xenakis
http://es.wikipedia.org/wiki/Iannis_Xenakis
30 de maig de 2011

WIKIPÈDIA: Johann Sebastian Bach
http://es.wikipedia.org/wiki/Bach
20 de març de 2011

La música y las matemáticas
http://www.musicaperuana.com/espanol/mm.htm
13 d'abril de 2011

Blog personal: Enchufa 2
http://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-la-afinacion-pitagorica-el-origen-de-la-escala-cromatica.html
13 d'abril de 2011

Departamento de probabilidad y estadística, México
http://www.dpye.iimas.unam.mx/mozart/
3 de juny de 2011

Larry J. Solomon
http://solomonsmusic.net/
3 de juny de 2011