TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Máster en Matemática Aplicada

Título: Medidas de poder para sistemas de votación con abstención: enfoque probabilístico y cálculo mediante funciones generatrices

Autor: Daniel Palacios Rodríguez

Director: Josep Freixas

Departamento: DMA3 / EPSEM

Convocatoria: Noviembre 2009

UPC

fMe Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Medidas de poder para sistemas de votación con abstención: enfoque probabilístico y cálculo mediante funciones generatrices

Daniel Palacios Rodríguez

Resumen

El presente documento persigue dos objetivos fundamentales: por un lado, extender, a la clase de los (3,2)-juegos simples o juegos con abstención, diversas medidas e índices de poder de uso recurrente en materia de juegos simples; y por otro lado, diseñar procedimientos computacionales que permitan su cálculo de manera más o menos eficiente. Las principales medidas de poder extendidas son entendidas como particularizaciones de una serie de conceptos probabilísticos que revisamos para juegos simples e introducimos para (3,2)-juegos. Por su parte, los algoritmos utilizados para su obtención se basan en el uso de funciones generatrices. Se cierra el trabajo con un ejemplo de aplicación a un sistema de votación real.

0. Introducción

Mucho se ha escrito ya, pese a ser una rama relativamente reciente de las matemáticas, acerca de los juegos simples, y de las herramientas para cuantificar, de algún modo, el poder de cada uno de los jugadores que en ellos intervienen. Muchos autores (Banzhaf, Coleman, Shapley, Shubik, Johnston, Rae, König, entre otros) han desarrollado índices y medidas de poder individual y colectivo basándose en dos posibles enfoques: mientras que unos dan más importancia al hecho de tener *éxito* en el juego (esto es, que el voto del jugador coincida con el output final), otros basan sus nociones de poder en la cualidad de ser *crítico* o *decisivo* en el mayor número posible de coaliciones (es decir, la capacidad de cambiar el output final cambiando el propio voto, manteniendo los demás jugadores el suyo).

Sin embargo, la introducción de nuevos niveles de input y output (los denominados "juegos con alternativas") no ha empezado a desarrollarse de una manera significativa hasta la última decada. Felsenthal y Machover abordaron en [13] la problemática de la abstención como tercer nivel de input dando lugar a los llamados *juegos simples con abstención*, que constituirán el objeto de estudio de este trabajo. Posteriormente, Freixas y Zwicker ([17]), Carreras, Magaña y Amer ([2], también [26]) y otros autores (ver [5], [25], [33] y [34]) trataron diferentes generalizaciones de los juegos simples, admitiendo cualquier número natural de inputs y outputs, en lo que los dos primeros bautizaron como (j, k)-*juegos*. Probablemente debido a esta etapa de "infancia" de los juegos con alternativas, la generalización natural de las diferentes medidas de poder existentes para juegos simples no ha sido digna de excesiva atención hasta el momento. En este trabajo ofreceremos una versión ampliada de las diferentes medidas introducidas anteriormente para (3,2)-juegos o juegos con abstención.

Por otro lado, dado que los casos reales de aplicación de esta clase de juegos (principalmente, sistemas de votación) involucran normalmente a un número elevado de jugadores (votantes), resulta interesante hallar métodos de cálculo de estas medidas de poder que comporten un coste computacional razonablemente pequeño. Con ese fin, Brams y Affuso propusieron en [7] el uso de funciones generatrices para obtener de manera rápida y sencilla el número de coaliciones para las que un jugador es crítico. En estas páginas veremos cómo aplicarlas al cálculo de algunos de los índices y medidas tratados a lo largo del texto.

La organización del trabajo es la siguiente: en la primera sección introduciremos las definiciones básicas relativas a juegos simples y juegos con abstención, y también algunas de las comentadas medidas de poder para juegos simples. En la segunda extenderemos dichas medidas a los (3,2)-juegos, haciendo hincapié en el concepto de poder en el que se basa cada una (éxito o decisividad). En el tercer apartado estudiaremos cómo las funciones generatrices pueden ayudarnos a calcularlas de un modo más eficiente, y finalizaremos ofreciendo un ejemplo de aplicación real de estas funciones al cálculo de poder de los votantes que intervienen en sistemas de votación de instituciones mundiales, concretamente la Organización de las Naciones Unidas (ONU).

1. Juegos simples: deficiones básicas, poder y abstención

Un *juego simple* es un par (N, v) donde $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores y $v : 2^N \longrightarrow \{0, 1\}$ es la *función característica*, que asocia a cada coalición S un valor de 0 o 1 según la coalición sea perdedora o ganadora, respectivamente[1], y que satisface las siguientes condiciones:

1. $v(\emptyset) = 0$ y $v(N) = 1$
2. $v(S) \leq v(T)$ si $S \subseteq T$

Definimos $W = \{S \subseteq N : v(S) = 1\}$ como el *conjunto de coaliciones ganadoras*, y $W^m = \{S \in W : T \subset S \Rightarrow T \notin W\}$ como el *conjunto de coaliciones ganadoras minimales.* Tanto W como W^m determinan la función característica y por tanto el juego, con lo que a partir de ahora nos referiremos a un juego simple como (N, W), o simplemente W si N está claro por el contexto.[2]

Un juego simple (N, W) se llama *juego de mayoría ponderada* si admite una representación $[q; w_1, ..., w_n]$ de manera que

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } w(S) \geq q \\ 0 & \text{si } w(S) < q \end{cases}, \quad \text{donde } w(S) = \sum_{i \in S} w_i \quad \forall S \subseteq N$$

El número $q \geq 0$ se llama *cuota* y $w_i \geq 0$ es el *peso* asociado al jugador i cuando vota *sí*. Todos los juegos simples que se considerarán en este trabajo son de mayoría ponderada.

1.1. Índices y medidas de poder para juegos simples

Una de las paradojas que presentan los juegos de mayoría ponderada es la de la no correspondencia entre la proporcionalidad de los pesos individuales y la proporcionalidad de poder real entre jugadores. Con el objetivo de medir este poder real, numerosos autores han desarrollado una serie de cuantificaciones en forma de índices y medidas de poder individual (puede verse un magnífico recopilatorio cronológico en [15]). Sin embargo, algunos de ellos han dado a sus medidas de poder un enfoque basado en el *éxito* del votante mientras que otros han otorgado más relevancia a la *crucialidad* del jugador. A continuación presentaremos algunas de las más importantes, indicando en cada caso la filosofía subyacente. Para ello, definamos antes qué se entiende por éxito y crucialidad[3]:

- Se dice que un jugador i *tiene éxito* si su voto coincide con el *output* final del juego: $(i \in S \in W)$ o bien $(i \notin S \notin W)$. En caso contrario, i *fracasa* (no tiene éxito).
- Se dice que un jugador i es *crucial* o *decisivo* si su supresión de una coalición ganadora genera una coalición perdedora: $(i \in S \in W$ pero $S \backslash \{i\} \notin W)$.[4]

[1] La principal aplicación de los juegos simples son los sistemas de votación que suelen utilizarse para la toma de decisiones (como la aprobación de una moción), en las cuales los posibles resultados finales o *outputs* son simplemente "sí" (se aprueba) y "no" (no se aprueba). Para ello, cada jugador o votante dispone de dos opciones de voto o *inputs*: *sí* y *no*; y se entiende que las coaliciones de las que hablamos están formadas por aquellos jugadores que han votado *sí*. Por lo tanto, una coalición S es ganadora cuando el resultado de la votación es positivo; es decir, cuando $v(S) = 1$.

[2] En el ámbito de los sistemas de elección, W también es conocido como *regla de votación*, en cuanto a que determina qué coaliciones ganan y cuáles no.

[3] La mayor parte de lo que se expone en este subapartado pertenece a [23].

[4] Nótese que también entra en la definición el caso inverso: $(i \notin T \notin W$ pero $T \cup \{i\} \in W)$. Sin embargo, es fácil ver que $\forall S \subseteq N$ que cumpla la 1^a condición, $\exists T = S \backslash \{i\}$ que cumple la 2^a, por lo que son equivalentes.

Estas definiciones son, a su vez, maneras de estudiar el papel de cada jugador *ex-post*; esto es, una vez ya se conoce la regla de decisión y las coaliciones formadas (S y $N\backslash S$). Por lo tanto se trata de nociones binarias: un jugador tiene éxito o no lo tiene, es crucial o no lo es. No obstante, resulta más interesante estudiar el poder de un jugador *a priori*, para lo cual debe asignarse a cada posible coalición una probabilidad de formación que modelice la incertidumbre acerca del comportamiento de cada jugador: $p : 2^N \longrightarrow [0,1]$, cumpliéndose $\sum_{S\subseteq N} p(S) = 1$.

Así, la probabilidad, por ejemplo, de que un jugador i vote *sí* sería:

$$\gamma_i(p) := Prob\ (i \text{ vota } sí) = \sum_{S:i\in S} p(S).$$

A nivel colectivo, la *facilidad de aceptación* de una propuesta regida por una regla de votación W y por una distribución de probabilidad coalicional p, (W,p), viene dada por:

$$\alpha(W,p) := Prob\ (\text{aceptación}) = \sum_{S:S\in W} p(S).$$

Para extender las definiciones de éxito y crucialidad anteriormente expuestas a una situación de incertidumbre (*ex-ante*), basta con sustituir la configuración conocida de voto S por la configuración aleatoria especificada por p. De este modo tendríamos:

$$\Omega_i(W,p) := Prob\ (i \text{ tenga éxito}) = \sum_{S:i\in S\in W} p(S) + \sum_{T:i\notin T\notin W} p(T).$$

$$\Phi_i(W,p) := Prob\ (i \text{ crucial}) = \sum_{\substack{S:i\in S\in W\\ S\backslash\{i\}\notin W}} p(S) + \sum_{\substack{T:i\notin T\notin W\\ T\cup\{i\}\in W}} p(T).$$

Por la nota al pie #4 de la página anterior, la última definición se puede reescribir como

$$\Phi_i(W,p) = \sum_{\substack{S:i\in S\in W\\ S\backslash\{i\}\notin W}} (p(S) + p(S\backslash i))$$

Escrita así, puede verse que la crucialidad de i no depende de su voto, sino del del resto de jugadores: $p(S)+p(S\backslash\{i\})$ es la probabilidad de que los jugadores en $S\backslash\{i\}$ voten *sí* y los de $N\backslash S$ voten *no*. $\Omega_i(W,p)$, en cambio, depende del comportamiento de todos los jugadores.

Estas dos definiciones de éxito y crucialidad *ex-ante* consideran como equivalente el hecho de ser exitoso/crucial tanto votando *sí* como votando *no*. En algunos casos puede ser interesante distinguir entre ambas situaciones, obteniendo:

$$\Omega_i^+(W,p) := Prob\ (i \text{ tiene éxito } \&\ i \text{ vota } sí) = \sum_{S:i\in S\in W} p(S)$$

$$\Omega_i^-(W,p) := Prob\ (i \text{ tiene éxito } \&\ i \text{ vota } no) = \sum_{T:i\notin T\notin W} p(T)$$

de modo que $\Omega_i(W,p) = \Omega_i^+(W,p) + \Omega_i^-(W,p)$. De forma análoga llegaríamos a $\Phi_i^+(W,p)$ y $\Phi_i^-(W,p)$.

Otro concepto significativo es el de las probabilidades *condicionadas* de éxito y crucialidad bajo diferentes condiciones. Recordemos que la probabilidad de un suceso A condicionada a que se cumpla un suceso B viene dada por la fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Para nuestros intereses, utilizaremos como A el suceso "el jugador i tiene éxito" o bien "el jugador i es crucial" y B será la condición. Algunas condiciones que podemos plantear son:

1. El jugador i vota *sí/no*.
2. El *output* final del juego es aceptación/rechazo.

Con estas cuatro condiciones y los dos enfoques de poder vistos (éxito y crucialidad), resultan hasta ocho posibles probabilidades condicionadas: Ω_i^{i+}, Ω_i^{i-}, Φ_i^{i+}, Φ_i^{i+}, Ω_i^{Acc}, Ω_i^{Rej}, Φ_i^{Acc}, Φ_i^{Rej}; donde '$i+$' ('$i-$') expresa la condición "dado que i vota *sí* (*no*)" y '*Acc*' ('*Rej*') expresa la condición "dado que el *output* final es de aceptación (rechazo)". Véase algún ejemplo a título ilustrativo:

$$\Phi_i^{i+}(W,p) = Prob\ (i \text{ es crucial} \mid i \text{ vota } \textit{sí}) = \frac{1}{\gamma_i(p)} \sum_{\substack{S:i\in S\in W \\ S\setminus\{i\}\notin W}} p(S)$$

$$\Omega_i^{Acc}(W,p) = Prob\ (i \text{ tiene éxito} \mid \text{aceptación}) = \frac{1}{\alpha(W,p)} \sum_{S:i\in S\in W} p(S)$$

La siguiente tabla resume las probabilidades individuales recién definidas:

Condición:	-	i vota *sí*	i vota *no*	aceptación	rechazo
Éxito	Ω_i	Ω_i^{i+}	Ω_i^{i-}	Ω_i^{Acc}	Ω_i^{Rej}
Crucialidad	Φ_i	Φ_i^{i+}	Φ_i^{i-}	Φ_i^{Acc}	Φ_i^{Rej}

Sea ahora $p^*(S) := \frac{1}{2^n} \quad \forall S \subseteq N$, distribución que considera equiprobables todas las posibles coaliciones. Algunos de los índices de poder que estudiaremos pueden verse como particularizaciones de algunas de las medidas de la tabla para $p = p^*$. A continuación introduciremos estos índices, relacionándolos con las medidas de poder pertinentes.

Rae El *índice de Rae* surge de otro índice que el propio autor introduce en [29], en el que pretende maximizar la correspondencia entre un voto anónimo individual y la decisión colectiva. Posteriormente, Dubey y Shapley ([12]) lo hacen extensible a cualquier regla de votación y a cualquier jugador:

$$Rae_i(W) := \frac{\#\{S : i \in S \in W\}}{2^n} + \frac{\#\{S : i \notin S \notin W\}}{2^n}$$

$$= \sum_{S:i\in S\in W} p^*(S) + \sum_{S:i\notin S\notin W} p^*(S) \ = \ \Omega_i(W,p^*)$$

Así, el índice de Rae del jugador i para una regla de votación dada es la probabilidad de éxito de i según esta distribución p^*.

Banzhaf Las medidas de Banzhaf utilizan la siguiente cantidad, definida por su autor en [3], que viene dada por el número de coaliciones ganadoras en las que i es crucial:

$$\eta_i(W) := \#\{S : i \in S \in W \ , \ S \backslash \{i\} \notin W\}$$

La normalización de esta cantidad por la suma de cantidades de todos los jugadores nos lleva al *índice normalizado de Banzhaf*:

$$\beta_i(W) := \frac{\eta_i(W)}{\sum_{i \in N} \eta_i(W)}$$

Con posterioridad, Dubey y Shapley ([12]) validaron la siguiente normalización, conocida como *medida de Banzhaf* (propuesta por él mismo en [4]):

$$\beta_i'(W) = \frac{\#\{S : i \in S \in W \ , \ S \backslash \{i\} \notin W\}}{\#\{S : i \in S\}} = \frac{\eta_i(W)}{2^{n-1}}$$

que fácilmente puede transformarse para llegar a un concepto conocido:

$$\beta_i'(W) = \frac{1}{1/2} \cdot \frac{\eta_i(W)}{2^n} \ = \ \frac{1}{\gamma_i(p^*)} \sum_{\substack{S : i \in S \in W \\ S \backslash \{i\} \notin W}} p^*(S) \ = \Phi_i^{i+}(W, p^*)$$

Pero cuando $p = p^*$, se cumple $\Phi_i(W, p^*) = \Phi_i^{i+}(W, p^*) = \Phi_i^{i-}(W, p^*)$; por lo tanto, la medida de Banzhaf β' equivale a tres de las medidas que hemos definido con anterioridad.

Nótese ahora la relación existente entre esta medida y el índice de Rae:

$$Rae_i(W) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ \beta_i'(W)$$

Dem. Demostrar esta igualdad equivale a comprobar que

$$\#\{S : i \in S \in W\} + \#\{S : i \notin S \notin W\} = 2^{n-1} + \eta_i(W)$$

Claramente, por cada una de las $\eta_i(W)$ coaliciones ganadoras S en las que i es crucial votando *sí*, hay otra coalición perdedora del tipo $S \backslash \{i\}$ en la que i es crucial votando *no*. En estas $2 \cdot \eta_i(W)$ coaliciones, i tiene éxito. Si consideramos ahora las otras $2^{n-1} - \eta_i(W)$ coaliciones en las que i vota *sí* pero no es crucial, aquellas que no sean ganadoras seguirán siendo perdedoras con la sustracción de i, de manera que i tendrá éxito en uno de los dos sentidos (bien votando *sí*, bien votando *no*). Por lo tanto, el nº de coaliciones en las que el voto de i coincide con el *output* final será $2^{n-1} - \eta_i(W) + 2\ \eta_i(W) = 2^{n-1} + \eta_i(W)$. □

Esta relación fue anticipada por Penrose, quien en uno de sus trabajos escribió que *"el poder individual puede ser medido como aquella cantidad en la que la probabilidad de estar en el bando ganador exceda la mitad"* ([28]). La medida de poder de Penrose sería, por lo tanto, $0{,}5 \cdot \beta_i'(W)$. Por esta razón, a la medida de Banzhaf se la conoce también como *índice de Banzhaf-Penrose*. Otros autores también han relacionado $\beta_i'(W)$ con otros índices de poder. En [8], por ejemplo, se la relaciona con un índice colectivo (*índice de decisividad*).

Coleman Este autor define, en [9], tres índices diferentes en términos de *ratios*:
El *poder de actuación del colectivo* mide la facilidad de toma de decisiones según la regla de votación W, algo que ya debería resultarnos familiar:

$$A(W) = \frac{\#\{S \in W\}}{\#\{S \subseteq N\}} = \frac{|W|}{2^n} = \alpha(W, p^*)$$

Índice de impedimento de la acción: proporción de coaliciones ganadoras que perderían su condición si perdieran el voto de i.

$$Col_i^P(W) = \frac{\#\{S : i \in S \in W \ , \ S \backslash \{i\} \notin W\}}{|W|}$$

Índice de iniciación de la acción: proporción de coaliciones perdedoras que pasarían a ganar con la contribución de i.

$$Col_i^I(W) = \frac{\#\{S : i \notin S \notin W \ , \ S \cup \{i\} \in W\}}{|L|}$$

Utilizando el índice colectivo ($|W| = 2^n \cdot \alpha(W, p^*)$) y su complementario[5], obtenemos dos de las medidas de poder de la tabla:

$$Col_i^P(W) = \frac{1}{\alpha(W,p^*)} \cdot \frac{\#\{S : i \in S \in W \ , \ S \backslash \{i\} \notin W\}}{2^n} = \Phi_i^{Acc}(W, p^*)$$

$$Col_i^I(W) = \frac{1}{1-\alpha(W,p^*)} \cdot \frac{\#\{S : i \notin S \notin W \ , \ S \cup \{i\} \in W\}}{2^n} = \Phi_i^{Rej}(W, p^*)$$

Pese a que las diferencias entre los índices individuales de Coleman y los de Banzhaf son evidentes, con frecuencia son confundidos. Esto es debido a que sus normalizaciones coindicen, dando lugar al conocido *índice de Banzhaf-Coleman* (ver [7]):

$$\frac{\beta_i'(W)}{\sum_{j \in N} \beta_j'(W)} = \frac{Col_i^P(W)}{\sum_{j \in N} Col_j^P(W)} = \frac{Col_i^I(W)}{\sum_{j \in N} Col_j^I(W)}$$

Esta coincidencia debería advertir de la pérdida de información en términos probabilísticos que supone la extendida costumbre de normalizar estos índices de esta manera.

König y Bräuninger Recientemente, estos dos autores definen la *inclusividad de un jugador i* como la proporción de coaliciones ganadoras que lo contienen ([22]):

$$KB_i(W) := \frac{\#\{S : i \in S \in W\}}{|W|} = \frac{|W_i|}{|W|}$$

Como se hizo con los índices individuales de Coleman, una sencilla transformación nos lleva a $KB_i(W) = \Omega_i^{Acc}(W, p^*)$.

Tras definir estos índices, la tabla anterior para $p = p^*$ quedaría como sigue:

Condición:	-	i vota *sí*	i vota *no*	aceptación	rechazo
Éxito	$Rae_i(W)$	Ω_i^{i+}	Ω_i^{i-}	$KB_i(W)$	Ω_i^{Rej}
Crucialidad	$\beta_i'(W)$	$\beta_i'(W)$	$\beta_i'(W)$	$Col_i^P(W)$	$Col_i^I(W)$

[5] $L = \{S \subseteq N : v(S) = 0\}$, conjunto de coaliciones perdedoras. Cumple $|L| = 2^n - |W| = 2^n(1 - \alpha(W, p^*))$

Además de las diferentes medidas de poder expuestas, en la literatura encontramos otros reconocidos índices de poder individual que pasamos a describir resumidamente a continuación.

Shapley-Shubik Se conoce como *índice de Shapley-Shubik* al índice definido por Shapley para juegos cooperativos ([30]) y adaptado posteriormente por Shubik para juegos simples ([31]), siendo axiomatizado años más tarde por Dubey ([11]). Se trata de un índice de naturaleza combinatoria, que hace uso de la noción de *pivote*: dada una ordenación (permutación) de N, $\sigma = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$, el pivote de σ es $\sigma_i \in N$ tal que $\{\sigma_1, ..., \sigma_i\} \in W$ pero $\{\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}\} \notin W$. Si definimos $\theta_i = \{\sigma \in Sym(N) : i = piv(\sigma)\}$, el índice de Shapley-Shubik se calcula como:

$$\Phi_i(W) := \frac{|\theta_i|}{n!} = \sum_{\substack{S: i \in S \in W \\ S \setminus \{i\} \notin W}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \qquad \text{(donde } s = |S|\text{)}$$

Johnston El *índice de Johnston* nace de la voluntad del autor de "modificar ligeramente el índice de Banzhaf" ([21]). También otorga importancia a la crucialidad de los jugadores, pero en este caso, no solamente a la del jugador que se está analizando, sino a la de todos los jugadores que le acompañan en aquellas coaliciones en las que él es crucial:

$$\gamma_i(W) = \sum_{\substack{S: i \in S \in W \\ S \setminus \{i\} \notin W}} \frac{1}{\#\{j \in S : S \setminus \{j\} \notin W\}}$$

También se suele considerar su versión normalizada: $\gamma_i' = \frac{\gamma_i}{\bar{\gamma}}$, donde $\bar{\gamma} = \sum_{j \in N} \gamma_j$.

Holler El *índice de Holler* (o *índice de los bienes públicos*, como lo denominó su autor en [20]) cuenta el número de coaliciones minimales en las que interviene un jugador i (conjunto que denotamos W_i^m). Se normaliza de la manera habitual:

$$H_i(W) = \frac{|W_i^m|}{\sum_{j \in N} |W_j^m|}$$

Deegan-Packel El *índice de Deegan-Packel*, cuya justificación por parte de su autor reside en un modelo específico de negociación ([10]), centra su importancia en el número de jugadores que conforman las coaliciones minimales en las que interviene el jugador a analizar:

$$DP_i(W) = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W_i^m} \frac{1}{|S|}$$

Todas las medidas individuales de poder que hemos visto hasta ahora presentan diferencias, basadas en la importancia que se le dé a unos u otros aspectos del juego: éxito, crucialidad individual, crucialidad coletiva, número y tamaño de las coaliciones minimales, etc. Al mismo tiempo, todas tienen en común su afán por medir la influencia de cada jugador sobre el *output* final, asignándoles a cada uno un valor comprendido entre 0 y 1. Como ya se ha comentado en la introducción, uno de los objetivos principales de este escrito es trasladar estas medidas de poder al terreno de los juegos con abstención o $(3,2)$-juegos. Esto se llevará a cabo en la sección 2. Antes, definiremos lo que se entiende por juegos simples con abstención.

1.2. Juegos simples con abstención

Un juego simple con abstención o (3,2)-juego no es más que un juego simple en el que los jugadores pueden optar por un tercer nivel de *input*, de valoración intermedia entre el *sí* y el *no*: la *abstención*. Para una descripción formal, necesitaremos introducir primero algunas definiciones preliminares (particularizaciones de las que aparecen en [17] para (j,k)-juegos). Una 3-partición o tripartición (ordenada) del conjunto N es $T = ({}_1T, {}_2T, {}_3T)$, donde los ${}_iT$ son subconjuntos de N, disjuntos entre ellos, cuya unión es N. En nuestro contexto, ${}_1T$ agrupa a los jugadores que optan por el *sí*, ${}_3T$ a los que optan por el *no* y ${}_2T$ a los que se abstienen[6]. Un (3,2)-juego es un par (N, v) donde la función característica es ahora $v : 3^N \longrightarrow \{0, 1\}$, siendo $v(T) = 1$ si T es ganadora, y $v(T) = 0$ si es perdedora. Para readaptar las dos condiciones satisfechas por v en todo juego simple, simplemente hay que tener en cuenta que la coalición $\emptyset$ se correspondería con la tripartición T tal que ${}_3T = N$ y la coalición N, con la tripartición T tal que ${}_1T = N$; mientras que la condición $S \subseteq T$ debe sustituirse ahora por $S \ {}^3\!\subseteq T$, según la notación empleada en [18] (pág.47)[7]. Por lo tanto, las condiciones a cumplir por parte de v serían:

1. $v(\emptyset/\emptyset/N) = 0$ y $v(N/\emptyset/\emptyset) = 1$
2. $v(S) \leq v(T)$ si $S \ {}^3\!\subseteq T$

Con estas convenciones, los conjuntos W, L y W^m se definen de la manera habitual.

Sea $i \in {}_kT$ $(k = 1, 2)$, denotamos por $T_{\downarrow i}$ a la 3-partición obtenida de T trasladando al jugador i al nivel de *input* inmediatamente inferior, manteniendo los demás su voto: $i \in {}_{k+1}(T_{\downarrow i})$ y $j \in {}_lT \Leftrightarrow j \in {}_l(T_{\downarrow i})$ $\forall j \neq i$ y $l \in \{1, 2, 3\}$.[8]

Si $i \in {}_1T$, $T_{\downarrow\downarrow i} = ({}_1T \backslash \{i\},\ {}_2T,\ {}_3T \cup \{i\})$. De forma simétrica se obtiene $T_{\uparrow\uparrow i}$ para $i \in {}_3T$.

Por otro lado, tal como hicimos para los juegos simples, definimos los *(3,2)-juegos de mayoría ponderada* como aquellos juegos con abstención que admiten una representación particular del tipo $[q; (w_1^Y, w_1^N), ..., (w_n^Y, w_n^N)]$, de manera que:

$$v(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } w(T) \geq q \\ 0 & \text{si } w(T) < q \end{cases}, \text{ donde } w(T) = \sum_{i \in {}_1T} w_i^Y + \sum_{j \in {}_3T} w_j^N \quad \forall T \subseteq N$$

Observemos que, en esta ocasión, otorgamos dos pesos distintos a cada jugador: un peso $w_i^Y \geq 0$ para aquellas triparticiones en las que i vota *sí*, y un peso $w_i^N \leq 0$ para aquellas en las que i vota *no*. A la abstención de cualquier jugador se le asigna un peso nulo.

En la siguiente sección extenderemos, a esta nueva clase de juegos, los índices y medidas de poder antes definidos.

[6] Nótese que ocurre lo mismo con los juegos simples, ya que toda coalición S es en realidad una 2-partición $({}_1S, {}_2S) = (S, N \backslash S)$. Sin embargo, al ser cada grupo el complementario del otro, basta con especificar quiénes conforman S para disponer de toda la información; de ahí el abuso de notación.
Por otro lado, utilizaremos indistintamente comas (,) o barras (/) para separar los subconjuntos de votantes de diferente *input*, según la situación lo requiera.

[7] $S \ {}^3\!\subseteq T \Leftrightarrow \forall i \in N,\ i \in {}_jS$ y $i \in {}_kT$ con $j \geq k$

[8] Simétricamente a $T_{\downarrow i}$, se puede definir $T_{\uparrow i}$ para $i \in {}_kT$ $(k = 2, 3)$. En adelante, daremos por hecho que $i \notin {}_3T$ cuando hablemos de $T_{\downarrow i}$ y que $i \notin {}_1T$ cuando lo hagamos de $T_{\uparrow i}$

2. Índices y medidas de poder para (3,2)-juegos

Todo lo expuesto hasta el momento corresponde a conceptos ya conocidos y debidamente referenciados en la bibliografía. El objetivo de esta sección es extender las medidas de poder presentadas en la sección anterior para adaptarlas a esta nueva clase de (3,2)-juegos de mayoría ponderada. Nuevamente, debemos concretar las nociones de éxito y crucialidad en esta novedosa situación. Como veremos, la aparición de la abstención como nuevo *input* amplía el abanico de posibilidades. Empecemos considerando la situación *ex-post*; esto es, una vez se conoce la tripartición conformada y su carácter ganador o perdedor:

- Se dice que un jugador i *tiene éxito* si su voto coincide con el *output* final del juego: $(i \in {}_1T,\ T \in W)$ o bien $(i \in {}_3T,\ T \notin W)$[9]. Si $i \in {}_2T$ (se abstiene), su *input* no coincide con ningún *output* y se dice que es *neutral* o indiferente respecto al *output*. En cualquier otro caso, i *fracasa*.

- Se dice que un jugador i es *exitosamente crucial* si tiene éxito y su voto es crucial para ello: $(i \in {}_1T,\ T \in W$ pero $T_{\downarrow\downarrow i} \notin W)$ o $(i \in {}_3T,\ T \notin W$ pero $T_{\uparrow\uparrow i} \in W)$[10].
Se dice que un jugador es *neutralmente crucial* si es neutral pero tiene capacidad para cambiar el resultado final de la votación con un cambio de voto: $(i \in {}_2T,\ T \in W$ pero $T_{\downarrow i} \notin W)$ o $(i \in {}_2T,\ T \notin W$ pero $T_{\uparrow i} \in W)$[11].

Es conveniente realizar un par de observaciones para recalcar las novedades que produce la entrada en escena de la abstención respecto a la situación existente en un contexto de juegos simples: por un lado, fracaso y ausencia de éxito ya no son equivalentes; por el otro, nótese que crucialidad ya no implica éxito, cosa que sí ocurría antes.

Como en la sección anterior, para estudiar el poder de un jugador *a priori* debe definirse el espacio de probabilidad $(3^N, p)$, con $p : 3^N \longrightarrow [0,1]$ asignando a cada tripartición una probabilidad de formación. Por supuesto, $\sum_{T\in 3^N} p(T) = 1$.

La probabilidad de que un jugador i vote *sí* vuelve a ser:

$$\gamma_i^+(p) = Prob\ (i \text{ vota } \textit{sí}) = \sum_{T:i\in_1 T} p(T)$$

De manera análoga:

$$\gamma_i^-(p) = Prob\ (i \text{ vota } \textit{no}) = \sum_{T:i\in_3 T} p(T)$$

$$\gamma_i^0(p) = Prob\ (i \text{ se abstiene}) = \sum_{T:i\in_2 T} p(T) = 1 - \gamma_i^+(p) - \gamma_i^-(p)$$

---

[9]Hablamos de *éxito positivo* en el primer caso, y de *éxito negativo* en el segundo.

[10]Cada una de las dos definiciones puede separarse a su vez en otras dos, según el cambio en el *output* se produzca "en un paso" (*crucialidad simple*: el cambio del sí/no a la abstención ya cambia el carácter ganador/perdedor de la tripartición) o "en dos pasos" (*crucialidad doble*: el cambio de *output* sólo se produce al pasar del sí al no o viceversa).

[11]Tanto para la crucialidad exitosa como la neutral, distinguimos entre jugador *positivamente crucial* cuando la tripartición pasa de ganadora a perdedora y *negativamente crucial* en caso contrario. Obsérvese también que *crucialidad neutral* en sentido positivo (negativo) y *crucialidad exitosa simple* en sentido negativo (positivo) son condiciones equivalentes, utilizando un argumento similar al de la nota al pie #4.

Igual que hicimos con los juegos simples, volvemos a introducir esta distribución de probabilidad p como acompañante de la regla de votación W para extender a los (3,2)-juegos las nociones de poder *ex-ante* introducidas en el apartado 1.2. En primer lugar, la medida colectiva que cuantifica la probabilidad de aceptación de una votación supeditada al par (W, p) se define como:

$$\alpha(W, p) := Prob \text{ (aceptación)} = \sum_{T:T\in W} p(T)$$

Procedamos ahora con las medidas de poder individuales *a priori*. Para adaptar las nociones *ex-post* de éxito y crucialidad, basta con sustituir la configuración de voto conocida S por la aleatoria dada por p. Así, obtenemos:

$$\Omega_i(W, p) := Prob \text{ (} i \text{ tenga éxito)} = \sum_{\substack{T:i\in_1 T\\ T\in W}} p(T) + \sum_{\substack{T:i\in_3 T\\ T\notin W}} p(T).$$

$$\Phi_i(W, p) := Prob \text{ (} i \text{ crucial)} = \Phi_i^{ECR}(W, p) + \Phi_i^{NCR}(W, p)$$

donde

$$\Phi_i^{ECR}(W, p) := Prob \text{ (} i \text{ exitosamente crucial)} = \sum_{\substack{T:i\in_1 T\\ T\in W\\ T_{\downarrow\downarrow i}\notin W}} p(T) + \sum_{\substack{T:i\in_3 T\\ T\notin W\\ T_{\uparrow\uparrow i}\in W}} p(T) =$$

$$= \left(\overbrace{\sum_{\substack{T:i\in_1 T\\ T\in W\\ T_{\downarrow i}\notin W}} p(T)}^{(1)} + \overbrace{\sum_{\substack{T:i\in_1 T\\ T_{\downarrow i}\in W\\ T_{\downarrow\downarrow i}\notin W}} p(T)}^{(2)} \right) + \left(\overbrace{\sum_{\substack{T:i\in_3 T\\ T\notin W\\ T_{\uparrow i}\in W}} p(T)}^{(3)} + \overbrace{\sum_{\substack{T:i\in_3 T\\ T_{\uparrow i}\notin W\\ T_{\uparrow\uparrow i}\in W}} p(T)}^{(4)} \right)$$

$$\Phi_i^{NCR}(W, p) := Prob \text{ (} i \text{ neutralmente crucial)} = \overbrace{\sum_{\substack{T:i\in_2 T\\ T\in W\\ T_{\downarrow i}\notin W}} p(T)}^{(5)} + \overbrace{\sum_{\substack{T:i\in_2 T\\ T\notin W\\ T_{\uparrow i}\in W}} p(T)}^{(6)}.$$

Esta descomposición de Φ_i^{ECR} en cuatro sumatorios responde a la observación efectuada en la nota al pie #10. Añadiendo los dos sumatorios correspondientes a la crucialidad neutral, reordenando los seis sumandos resultantes ((1),(6) y (4); (2), (3) y (5), respectivamente) y atendiendo a la nota al pie #11, podemos reescribir Φ_i como:

$$\Phi_i(W, p) = \sum_{\substack{T:i\in_1 T\\ T\in W\\ T_{\downarrow i}\notin W}} [p(T) + p(T_{\downarrow i}) + p(T_{\downarrow\downarrow i})] + \sum_{\substack{T:i\in_1 T\\ T_{\downarrow i}\in W\\ T_{\downarrow\downarrow i}\notin W}} [p(T) + p(T_{\downarrow i}) + p(T_{\downarrow\downarrow i})]$$

Por un razonamiento similar al utilizado en el caso de los juegos simples, puede verse de nuevo que la crucialidad de i depende del voto del resto de jugadores y no del suyo; mientras que su éxito sí depende de los votos de los n jugadores, incluido él.

Como ya hiciéramos con las nociones probabilísticas de éxito/crucialidad asociadas a juegos simples, puede ser interesante separarlas en función de cuál haya sido el voto del jugador. Con este fin, definimos:

$$\Omega_i^+(W,p) := Prob\ (i \text{ tiene éxito } \&\ i \text{ vota } \textit{sí}) = \sum_{\substack{T:i\in_1 T\\ T\in W}} p(T)$$

$$\Omega_i^-(W,p) := Prob\ (i \text{ tiene éxito } \&\ i \text{ vota } \textit{no}) = \sum_{\substack{T:i\in_3 T\\ T\notin W}} p(T)$$

de manera que $\Omega_i(W,p) = \Omega_i^+(W,p) + \Omega_i^-(W,p)$, tal como ocurría para juegos simples ($\Omega_i^0(W,p) = 0$ debido a la imposibilidad de tener éxito absteniéndose). De forma análoga llegaríamos a $\Phi_i^+(W,p)$ y $\Phi_i^-(W,p)$; y aunque en este caso la abstención sí juega un papel relevante, la medida resultante ($\Phi_i^0(W,p)$) no supone ninguna novedad:

$$\Phi_i^+(W,p) := Prob\ (i \text{ es crucial } \&\ i \text{ vota } \textit{sí}) = \sum_{\substack{T:i\in_1 T\\ T\in W\\ T_{\downarrow\downarrow i}\notin W}} p(T) = (1) + (2)$$

$$\Phi_i^-(W,p) := Prob\ (i \text{ es crucial } \&\ i \text{ vota } \textit{no}) = \sum_{\substack{T:i\in_3 T\\ T\notin W\\ T_{\uparrow\uparrow i}\in W}} p(T) = (3) + (4)$$

$$\Phi_i^0(W,p) := Prob\ (i \text{ es crucial } \&\ i \text{ se abstiene}) = \Phi_i^{NCR}(W,p)$$

En este caso, $\Phi_i(W,p) = \Phi_i^+(W,p) + \Phi_i^0(W,p) + \Phi_i^-(W,p)$.

Pero las medidas que van a llevarnos a la extensión de los índices de poder definidos en el apartado 1.2. son las probabilidades condicionadas. A la adaptación a (3,2)-juegos de las ocho ya conocidas para juegos simples, hay que añadir las condicionadas a que el jugador opte por la abstención: $\Omega_i^{i0}(W,p)$ (que será nula por razones obvias) y $\Phi_i^{i0}(W,p)$. Veamos algunos ejemplos:

$$\Omega_i^{i-}(W,p) = Prob\ (i \text{ tiene éxito} \mid i \text{ vota } \textit{no}) = \frac{1}{\gamma_i^-(p)} \sum_{\substack{T:i\in_3 T\\ T\notin W}} p(T)$$

$$\Phi_i^{i+}(W,p) = Prob\ (i \text{ es crucial} \mid i \text{ vota } \textit{sí}) = \frac{1}{\gamma_i^+(p)} \sum_{\substack{T:i\in_1 T\\ T\in W\\ T_{\downarrow\downarrow i}\notin W}} p(T) = \frac{1}{\gamma_i^+(p)}\ [(1) + (2)]$$

$$\Phi_i^{i0}(W,p) = Prob\ (i \text{ es crucial} \mid i \text{ se abstiene}) = \frac{1}{1-\gamma_i^+(p)-\gamma_i^-(p)}\ [(5) + (6)]$$

$$\Omega_i^{Acc}(W,p) = Prob\ (i \text{ tiene éxito} \mid \text{aceptación}) = \frac{1}{\alpha(W,p)} \sum_{\substack{T:i\in_1 T\\ T\in W}} p(T)$$

$$\Phi_i^{Acc}(W,p) = Prob\ (i \text{ es crucial} \mid \text{aceptación}) = \frac{1}{\alpha(W,p)}\ [(1)+(2)+(5)]$$

$$\Phi_i^{Rej}(W,p) = Prob\ (i \text{ es crucial} \mid \text{rechazo}) = \frac{1}{1-\alpha(W,p)}\ [(3)+(4)+(6)]$$

Resumamos nuevamente en una tabla todas las probabilidades recién consideradas:

Condición:	-	i vota *sí*	i se abstiene	i vota *no*	aceptación	rechazo
Éxito	Ω_i	Ω_i^{i+}	Ω_i^{i0}	Ω_i^{i-}	Ω_i^{Acc}	Ω_i^{Rej}
Crucialidad	Φ_i	Φ_i^{i+}	Φ_i^{i0}	Φ_i^{i-}	Φ_i^{Acc}	Φ_i^{Rej}

Volveremos a centrarnos en el caso $p = p^*$, donde ahora $p^*(T) := \frac{1}{3^n}$, $\forall T$.[12]

Rae El *índice de Rae* para (3,2)-juegos vuelve a centrarse en la probabilidad de éxito del jugador, que en este caso es sensiblemente inferior puesto que, como ya hemos visto, un jugador que se abstenga nunca será exitoso:

$$Rae_i(W) := \frac{\#\{T : i \in {}_1T,\ T \in W\}}{3^n} + \frac{\#\{T : i \in {}_3T,\ T \notin W\}}{3^n} = \Omega_i(W,p^*)$$

Nótese que $\Omega_i(W,p^*) \leq \frac{2}{3}$. Un posible arreglo para que el índice pueda alcanzar el valor 1 sería cambiar el denominador de manera que se tenga en cuenta sólo el total de triparticiones en las que i no se abstiene. Daríamos lugar así al *índice unitario de Rae*:

$$Rae'_i(W) := \frac{\#\{T : i \in {}_1T,\ T \in W\}}{2 \cdot 3^{n-1}} + \frac{\#\{T : i \in {}_3T,\ T \notin W\}}{2 \cdot 3^{n-1}}$$

[12] Como se apunta en [13], el hecho de considerar la abstención como una opción equiprobable al *sí* y al *no* resulta bastante más discutible que el reparto equitativo entre el *sí* y el *no* que realizamos al tratar los juegos simples, aunque nosotros lo haremos por comodidad. Una aproximación más cautelosa sería asignar a la abstención una probabilidad p, repartiendo entre las otras dos opciones de voto el $1-p$ restante. El valor de p podría determinarse sobre la base de argumentos específicos, incluyendo datos empíricos. La distribución que estamos considerando, p^*, utilizaría $p = \frac{1}{3}$. En cambio, $p = 0$ nos llevaría a la definición de una nueva distribución p^{**}, definida por:

$$p^{**}(T) := \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } |{}_2T| = 0 \\ 0 & \text{si } |{}_2T| > 0 \end{cases}$$

y que, a efectos prácticos, coincide con la p^* definida para juegos simples. Por otra parte, en [6] se considera una segunda opción de tratamiento de la abstención, como recuerda [25] en su introducción: en primer lugar los votantes deciden si votan o se abstienen, y una vez se decantan por lo primero es cuando eligen entre el *sí* y el *no*.

Banzhaf Para extender las medidas de poder de Banzhaf a los (3,2)-juegos debemos extender primero la definición de $\eta_i(W)$ que dimos para juegos simples. Si echamos un vistazo a la literatura, tanto en [13] como en [18] nos definen esta cantidad como el número de triparticiones ganadoras en las que un jugador es positivamente crucial descendiendo *un sólo nivel de input*:

$$\eta_i(W) := \#\{T : T \in W,\ T_{\downarrow i} \notin W\}$$

Valiéndonos de que $\#\{T : i \in {}_2T,\ T \in W,\ T_{\downarrow i} \notin W\} = \#\{T : i \in {}_1T,\ T_{\downarrow i} \in W,\ T_{\downarrow\downarrow i} \notin W\}$ (ver nota al pie #11), vemos que $\eta_i(W)$ se corresponde exactamente con el número de triparticiones cuya probabilidad de formación considerábamos en (1) + (2):

$$\eta_i(W) = \#\{T : i \in {}_1T,\ T \in W,\ T_{\downarrow\downarrow i} \notin W\}$$

El *índice normalizado de Banzhaf* para (3,2)-juegos vuelve a ser la normalización de $\eta_i(W)$ por la suma de las cantidades correspondientes a todos los jugadores:

$$\beta_i(W) := \frac{\eta_i(W)}{\sum_{i \in N} \eta_i(W)}$$

Más interesante en términos probabilísticos es la extensión de la *medida de Banzhaf* a los (3,2)-juegos:

$$\beta'_i(W) = \frac{3 \cdot \eta_i(W)}{3^n} = \frac{\eta_i(W)}{3^{n-1}}$$

Este cociente mide la probabilidad de que, dada una tripartición cualquiera, el jugador i esté en posición de alterar la naturaleza (ganadora o perdedora) de la misma con un simple cambio de su voto: el 3 del numerador en el segundo término de la igualdad se refiere a que, dada una tripartición en la que i es positivamente crucial y replicándola 2 veces pero cambiando el voto de i para contemplar sus tres posibilidades de voto manteniendo fijas las de los demás, en todas ellas i podrá cambiar la naturaleza de la tripartición cambiando simplemente al nivel de *input* apropiado.

Puede realizarse la misma transformación que en la sección 1.2. para llegar a una de las medidas introducidas con anterioridad:

$$\beta'_i(W) = \frac{1}{1/3} \cdot \frac{\eta_i(W)}{3^n} = \frac{1}{\gamma_i^+(p^*)} \sum_{\substack{T : i \in {}_1T \\ T \in W \\ T_{\downarrow\downarrow i} \notin W}} p^*(T) = \Phi_i^{i+}(W, p^*)$$

Como ya ocurriese con los juegos simples, al utilizar la distribución $p = p^*$ se cumple que $\Phi_i^{i+}(W, p^*) = \Phi_i^{i-}(W, p^*) = \Phi_i^{i0}(W, p^*) = \Phi_i(W, p^*)$; por lo tanto, $\beta'_i(W)$ equivale ahora a cuatro de las medidas probabilísticas definidas[13].

Fijémonos ahora en la relación de Penrose anticipada en la sección de juegos simples. Su extensión natural sería:

$$Rae_i(W) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\ \beta'_i(W)$$

[13]Esto se debe a que $\gamma_i^+(p^*) = \gamma_i^-(p^*) = \gamma_i^0(p^*) = 1/3$, y a que (1) + (2) = (3) + (4) = (5) + (6) cuando $p = p^*$, ya que el número de triparticiones que intervienen en cada pareja de sumandos es el mismo. De hecho, las que aparecen en (1), (4) y (6) son triparticiones idénticas, en las que se pasa de una a otra simplemente moviendo al jugador i por sus tres diferentes opciones de voto (ídem para (2), (3) y (5)). Como corolario inmediato, tenemos que $\Phi_i^{ECR}(W, p^*) = 2 \cdot \Phi_i^{NCR}(W, p^*)$. Todo lo anterior no se cumple para $p \neq p^*$.

Dem. Basta comprobar que $\#\{T : i \in {}_1T,\ T \in W\} + \#\{T : i \in {}_3T,\ T \notin W\} = 3^{n-1} + \eta_i(W)$, y dividiendo entre 3^n obtendremos la igualdad. Para verlo, consideremos cualquiera de las $\eta_i(W)$ triparticiones en las que i es positivamente crucial, y cambiemos (si es necesario) su voto a la abstención. Sea T una de estas $\eta_i(W)$ triparticiones en las que i se abstiene; por el hecho de ser crucial, el voto de i coincidirá con el *output* final tanto en $T_{\uparrow i}$ como en $T_{\downarrow i}$. Por lo tanto, i será exitoso en $2 \cdot \eta_i(W)$ triparticiones. Consideremos ahora una de las restantes $3^{n-1} - \eta_i(W)$ triparticiones en las que i se abstiene. En este caso, i tendrá éxito sólo en una de las 2 siguientes: $T_{\uparrow i}$ o $T_{\downarrow i}$, ya que su voto es indiferente para el resultado final. En suma, i será exitoso en $2 \cdot \eta_i(W) + 3^{n-1} - \eta_i(W) = 3^{n-1} + \eta_i(W)$.$\square$

Si, en cambio, consideramos el alternativo índice *unitario* de Rae, que expresado en términos del estándar sería $Rae'_i(W) = \frac{3}{2} Rae_i(W)$, la relación anterior pasaría a ser exactamente la misma que para juegos simples:

$$Rae'_i(W) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \beta'_i(W)$$

Hasta aquí hemos utilizado la extensión de $\eta_i(W)$ dada por otros autores. Si consideramos una nueva extensión, basada tanto en la crucialidad doble como en la neutral (ver nota al pie #10), y definida por:

$$\eta^*_i(W) := \#\{i \in {}_1T,\ T \in W,\ T_{\downarrow\downarrow i} \notin W\} + \#\{i \in {}_2T,\ T \in W,\ T_{\downarrow i} \notin W\},$$

obtenemos dos nuevas medidas análogas a las anteriores: *el índice normalizado de Banzhaf según* η^*,

$$\beta^*_i(W) := \frac{\eta^*_i(W)}{\sum_{i \in N} \eta^*_i(W)}$$

y la *medida de Banzhaf según* η^*,

$$(\beta'_i)^*(W) := \frac{\eta^*_i(W)}{2 \cdot 3^{n-1}}$$

Esta última medida sería la extensión natural del índice de Banzhaf $Bz_i(W)$ definido en [23]: proporción de coaliciones en las que i es crucial sin votar *no.*

Coleman Procedamos ahora a la extensión de los diferentes índices de Coleman a los (3,2)-juegos. El índice colectivo es inmediato; con los individuales hay que andar con algo más de cuidado, ya que los numeradores no coinciden ya con $\eta_i(W)$, quebrando parcialmente la analogía con juegos simples:

- *Poder de actuación del colectivo*: extensión natural del índice utilizado en juegos simples.

$$A(W) = \frac{\#\{T \in W\}}{\#\{T \in 3^N\}} = \frac{|W|}{3^n} = \alpha(W, p^*)$$

- *Índice de impedimento de la acción*: capacidad del jugador i de alterar la naturaleza ganadora de una tripartición con un simple cambio de voto hacia un nivel inferior de *input.*

$$Col^P_i(W) = \frac{\#\{T : i \in {}_1T, T \in W, T_{\downarrow\downarrow i} \notin W\} + \#\{T : i \in {}_2T, T \in W, T_{\downarrow i} \notin W\}}{|W|} = \frac{\eta^*_i(W)}{|W|}$$

- *Índice de iniciación de la acción*: capacidad del jugador i de convertir a ganadora una tripartición perdedora con un cambio de voto hacia un nivel superior de *input.*

$$Col_i^I(W) = \frac{\#\{T : i \in {}_3T,\ T \notin W\ ,\ T_{\uparrow\uparrow i} \in W\} + \#\{T : i \in {}_2T,\ T \notin W\ ,\ T_{\uparrow i} \in W\}}{|L|} =$$

$$= \frac{3 \cdot \eta_i(W) - \eta_i^*(W)}{|L|}$$

Una transformación análoga a las utilizadas en la sección destinada a los juegos simples nos permite equiparar estos índices individuales a las medidas probabilísticas recientemente extendidas, cuando $p = p^*$ (volvemos a servirnos de la igualdad dada por el índice colectivo, $|W| = \alpha(W, p^*) \cdot 3^n$, y de su "inversa", $|L| = (1 - \alpha(W, p^*)) \cdot 3^n$):

$$Col_i^P(W) = \frac{1}{\alpha(W, p^*)}\ [(1) + (2) + (5)] = \ \Phi_i^{Acc}(W, p^*)$$

$$Col_i^I(W) = \frac{1}{1 - \alpha(W, p^*)}\ [(3) + (4) + (6)] = \ \Phi_i^{Rej}(W, p^*)$$

König y Bräuninger La extensión del *índice de inclusividad* es también directa a partir de la de juegos simples, si tenemos en cuenta que su naturaleza es la de medir la proporción de éxito de un jugador respecto al éxito colectivo (positivos todos ellos):

$$KB_i(W) := \frac{\#\{T : i \in {}_1T,\ T \in W\}}{|W|}$$

Utilizando el mismo argumento del párrafo anterior, obtenemos:

$$KB_i(W) := \frac{1}{\alpha(W, p^*)} \frac{\#\{T : i \in {}_1T,\ T \in W\}}{3^n} = \Omega_i^{Acc}(W, p^*)$$

Reescribamos ahora la tabla anterior para la distribución $p = p^*$:

Condición:	-	i vota *sí*	i se abstiene	i vota *no*	aceptación	rechazo
Éxito	$Rae_i(W)$	Ω_i^{i+}	0	Ω_i^{i-}	$KB_i(W)$	Ω_i^{Rej}
Crucialidad	$\beta_i'(W)$	$\beta_i'(W)$	$\beta_i'(W)$	$\beta_i'(W)$	$Col_i^P(W)$	$Col_i^I(W)$

Tras dedicarnos a los índices que guardan una estrecha relación con las medidas de poder probabilísticas que hemos venido tratando, podemos proceder ahora a extender el resto de índices que introdujimos en la sección 1.2.[14]

[14] Hemos omitido la extensión del índice de Shapley-Shubik por dos razones. La primera es que este apartado pretende albergar un contenido íntegramente novedoso y este índice ya está más que tratado en otros trabajos (véase [13] para una extensión a (3,2)-juegos y [19] para una extensión generalizada a (j,k)-juegos), sin presentar una expresión que lo relacione con las medidas probabilísticas anteriores. La segunda razón es que esta extensión dificulta en gran medida la aplicación de funciones generatrices a su cálculo.

Johnston Nuevamente, el *índice de Johnston* recorre las diferentes triparticiones en las que i es simplemente crucial y suma las inversas del número de jugadores simplemente cruciales que contienen:

$$\gamma_i(W) = \sum_{\substack{T:T\in W\\ T_{\downarrow i}\notin W}} \frac{1}{\#\{j \in T : T_{\downarrow j} \notin W\}}$$

Su normalización se realiza de manera análoga a la ya vista para juegos simples: $\gamma_i' = \frac{\gamma_i}{\bar{\gamma}}$, donde $\bar{\gamma} = \sum_{j\in N} \gamma_j$. La filosofía subyacente en el denominador de $\gamma_i(W)$ es la misma que la presente en $\eta_i(W)$. Si enfocamos la crucialidad como lo hicimos para $\eta_i^*(W)$, podemos definir un segundo índice de Johnston. Para ello, dada una tripartición T, sean:

$$A := \#\{j \in {}_1T : T_{\downarrow\downarrow j} \notin W\} \quad \text{y} \quad B := \#\{j \in {}_2T : T_{\downarrow j} \notin W\}$$

Entonces, el *índice ponderado de Johnston* para (3,2)-juegos se define como:

$$\gamma_i^*(W) := \sum_{\substack{T:i\in{}_1T\\ T\in W\\ T_{\downarrow\downarrow i}\notin W}} \frac{2}{2A+B} + \sum_{\substack{T:i\in{}_2T\\ T\in W\\ T_{\downarrow i}\notin W}} \frac{1}{2A+B}$$

Holler La extensión del *índice de Holler* a (3,2)-juegos presenta una dificultad añadida respecto al resto de índices: extender el concepto de *coaliciones ganadoras minimales en las que interviene un jugador i* (W_i^m) al lenguaje de las triparticiones. Puesto que las coaliciones minimales (en juegos sin abstención) están formadas por jugadores que son todos ellos cruciales, y que los jugadores cruciales en las triparticiones minimales de los (3,2)-juegos son tanto los que votan *sí* como los que se abstienen, debemos considerar $W_{i+}^m := \{T \in W^m \ : \ i \in {}_1T\}$ y $W_{i0}^m := \{T \in W^m \ : \ i \in {}_2T\}$. Sea $W_i^m := W_{i+}^m \cup W_{i0}^m$. Con estas nuevas definiciones, el índice de Holler extendido a (3,2)-juegos puede escribirse de la misma manera que para juegos simples:

$$H_i(W) = \frac{|W_i^m|}{\sum_{j\in N} |W_j^m|}$$

Tal y como hemos hecho con Johnston, definimos también el *índice ponderado de Holler*:

$$H_i^*(W) := \frac{2|W_{i+}^m| + |W_{i0}^m|}{\sum_{j\in N}(2|W_{j+}^m| + |W_{j0}^m|)}$$

Deegan-Packel Con el *índice de Deegan-Packel* volvemos a tener un problema similar al que nos encontramos extendiendo el índice de Holler. Uno de los elementos clave en su definición para juegos simples es el *tamaño* de W_i^m. Por el razonamiento realizado en el índice anterior y utilizando la notación allí introducida, la extensión de DP_i a juegos con abstención queda de la siguiente manera:

$$DP_i(W) = \frac{1}{|W^m|} \sum_{T\in W_i^m} \frac{1}{|{}_1T| + |{}_2T|}$$

Por analogía al índice ponderado de Johnston, definimos el *índice ponderado de DP*:

$$DP_i^*(W) = \frac{1}{|W^m|} \left(\sum_{T\in W_{i+}^m} \frac{2}{2|{}_1T| + |{}_2T|} + \sum_{T\in W_{i0}^m} \frac{1}{2|{}_1T| + |{}_2T|} \right)$$

Consideremos ahora un ejemplo concreto de juego de mayoría ponderada con abstención de tres jugadores, definido por:

$$v(T) = 1 \Leftrightarrow \text{ ó} \begin{cases} |_1T| = 2, \ 1 \notin {}_3T \\ 1 \in {}_1T, \ 2 \notin {}_3T \\ 2 \in {}_1T, \ \{13\} \notin {}_3T \end{cases},$$

con su correspondiente traducción 'cuota-pesos': $[2; (3, -2), (2, -2), (1, -1)]$. En este caso, $W = \{_1N, \ 12/3/\emptyset, \ 12/\emptyset/3, \ 13/2/\emptyset, \ 13/\emptyset/2, \ 23/1/\emptyset, \ 1/23/\emptyset, \ 1/2/3, \ 2/13/\emptyset\}$[15].

Rae Teniendo en cuenta que $L = 3^N \setminus W$, los índices de Rae resultan:

$$Rae = \left(\frac{7+9}{3^3}, \frac{5+8}{3^3}, \frac{4+7}{3^3}\right) = \left(\frac{16}{27}, \frac{13}{27}, \frac{11}{27}\right)$$

$$Rae' = \left(\frac{7+9}{2 \cdot 3^3}, \frac{5+8}{2 \cdot 3^3}, \frac{4+7}{2 \cdot 3^3}\right) = \left(\frac{16}{18}, \frac{13}{18}, \frac{11}{18}\right)$$

Banzhaf Para obtener las diferentes medidas de Banzhaf, debemos comprobar las triparticiones en las que es crucial cada jugador (la doble barra separa crucialidad simple votando *sí* y crucialidad positiva absteniéndose):

1 es crucial en: $\{12/\emptyset/3, \ 13/2/\emptyset, \ 13/\emptyset/2, \ 1/23/\emptyset, \ 1/2/3 \ || \ 23/1/\emptyset, \ 2/13/\emptyset\}$
2 es crucial en: $\{23/1/\emptyset, \ 2/13/\emptyset \ || \ 1/23/\emptyset, \ 1/2/3\}$
3 es crucial en: $\{13/\emptyset/2 \ || \ 2/13/\emptyset\}$

De este modo: $\eta(W) = (7, 4, 2)$ y $\eta^*(W) = (9, 6, 3)$ (ver cálculo en los numeradores de $Col^P(W)$). Calculando los diferentes denominadores, obtenemos las medidas deseadas:

$$\beta(W) = \frac{\eta(W)}{\sum \eta_i(W)} = \left(\frac{7}{13}, \frac{4}{13}, \frac{2}{13}\right)$$

$$\beta'(W) = \frac{\eta(W)}{3^{3-1}} = \left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

$$\beta^*(W) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = (\beta')^*(W)$$

Coleman El índice colectivo, así como los denominadores de los índices individuales, son inmediatos conociendo W (tenemos $|W| = 9 \Rightarrow |L| = 18$). Los numeradores de los individuales, sin embargo, presentan una complicación añadida: a la hora de contar las triparticiones que entran en $\eta_i(W)$, debemos contar dos veces aquellas en las que i es crucial absteniéndose (positivamente para Col_i^P y negativamente para Col_i^I):

$$A(W) = \frac{|W|}{3^n} = \frac{9}{3^3} = \frac{1}{3}$$

$$Col^P(W) = \left(\frac{5+2\cdot 2}{9}, \frac{2+2\cdot 2}{9}, \frac{1+1\cdot 2}{9}\right) = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$Col^I(W) = \left(\frac{5\cdot 2+2}{18}, \frac{2\cdot 2+2}{18}, \frac{1\cdot 2+1}{18}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

[15] ${}_1N = \{N/\emptyset/\emptyset\}$. De manera análoga se definen ${}_2N$ y ${}_3N$.

König y Bräuninger Sus numeradores son el primer sumando de los numeradores de Rae; el denominador vuelve a ser $|W|$:

$$KB = \left(\frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

Johnston Para obtener el índice de Johnston de cada jugador, debemos recorrer cada una de las triparticiones en las que dicho jugador es crucial, y sumar las inversas del número de jugadores cruciales en cada una de ellas (los sumandos respetan el orden de triparticiones dado en el subapartado dedicado al cálculo de las medidas de Banzhaf para este ejemplo):

$$\gamma_1 = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{3}$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{6}$$

$$\gamma_3 = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}$$

Normalizando por la suma ($\bar{\gamma} = \frac{13}{3} + \frac{11}{6} + \frac{5}{6} = 7$), obtenemos $\gamma'(W) = (\frac{26}{42}, \frac{11}{42}, \frac{5}{42})$.

El índice ponderado se obtiene de manera muy similar pero ponderando cada sumando según la definición:

$$\gamma_1^* = \left(\frac{2}{2\cdot 1} + \frac{2}{2\cdot 1} + \frac{2}{2\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 1 + 2} + \frac{2}{2\cdot 1 + 1}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 2 + 1} + \frac{1}{2\cdot 1 + 2}\right) = \frac{247}{60}$$

$$\gamma_2^* = \left(\frac{2}{2\cdot 2 + 1} + \frac{2}{2\cdot 1 + 2}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 1 + 2} + \frac{1}{2\cdot 1 + 1}\right) = \frac{89}{60}$$

$$\gamma_3^* = \left(\frac{2}{2\cdot 2}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 1 + 2}\right) = \frac{3}{4}$$

Normalizando por la suma de nuevo: $(\gamma')^*(W) = (\frac{247}{381}, \frac{89}{381}, \frac{45}{381})$

Holler y Deegan-Packel Antes de computar estos índices, necesitamos conocer las triparticiones minimales del juego:

$$W^m = \{13/\emptyset/2,\ 1/2/3,\ 2/13/\emptyset\} \to |W^m| = 3$$

Y los correspondientes conjuntos individuales de triparticiones minimales:

$$W_1^m = W^m = \{13/\emptyset/2,\ 1/2/3\} \cup \{2/13/\emptyset\} \to |W_1^m| = |W_{1+}^m| + |W_{10}^m| = 2 + 1 = 3$$

$$W_2^m = \{1/2/3\} \cup \{2/13/\emptyset\} \to |W_2^m| = |W_{2+}^m| + |W_{20}^m| = 1 + 1 = 2$$

$$W_3^m = \{13/\emptyset/2\} \cup \{2/13/\emptyset\} \to |W_3^m| = |W_{3+}^m| + |W_{30}^m| = 1 + 1 = 2$$

Con estos datos, Holler es inmediato y su ponderado, sencillo:

$$H(W) = \left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{2}{7}, \tfrac{2}{7}\right) \parallel H^*(W) = \tfrac{1}{2(2+1+1)+(1+1+1)}\,(2\cdot 2+1, 1\cdot 2+1, 1\cdot 2+1) = \left(\tfrac{5}{11}, \tfrac{3}{11}, \tfrac{3}{11}\right)$$

Para hallar DP, sólo hay que fijarse en el tamaño de ${}_1T$ y ${}_2T$ en las diferentes triparticiones minimales individuales y ponderarlos para obtener DP^*:

$$\left.\begin{aligned} DP_1 &= \tfrac{1}{3}\,(\tfrac{1}{2+0}+\tfrac{1}{1+1}+\tfrac{1}{1+2}) = \tfrac{8}{18} \\ DP_2 &= \tfrac{1}{3}\,(\tfrac{1}{1+1}+\tfrac{1}{1+2}) = \tfrac{5}{18} \\ DP_3 &= \tfrac{1}{3}\,(\tfrac{1}{2+0}+\tfrac{1}{1+2}) = \tfrac{5}{18} \end{aligned}\right\} \Rightarrow DP(W) = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{18}, \frac{5}{18}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} DP_1^* &= \tfrac{1}{3}\,(\tfrac{2}{2\cdot 2}+\tfrac{2}{2\cdot 1+1}+\tfrac{1}{2\cdot 1+2}) = \tfrac{17}{36} \\ DP_2^* &= \tfrac{1}{3}\,(\tfrac{1}{2\cdot 1+1}+\tfrac{2}{2\cdot 1+2}) = \tfrac{10}{36} \\ DP_3^* &= \tfrac{1}{3}\,(\tfrac{2}{2\cdot 2}+\tfrac{1}{2\cdot 1+2}) = \tfrac{9}{36} \end{aligned}\right\} \Rightarrow DP^*(W) = \left(\frac{17}{36}, \frac{5}{18}, \frac{1}{4}\right)$$

Tal como ocurría para juegos simples, tanto $DP(W)$ como $DP^*(W)$ son índices de suma unitaria.

Con este ejemplo concluimos el apartado destinado a la extensión a (3,2)-juegos de los índices que habíamos introducido, en un contexto de juegos sin abstención, en la sección 1.2. En la siguiente sección, veremos cómo calcular la mayoría de ellos mediante el método de las funciones generatrices. Empezaremos dedicándonos a los juegos simples para luego intentar extender la técnica a algunos de los índices definidos para juegos con abstención.

3. Funciones generatrices

Las fórmulas que hemos visto en los apartados anteriores para el cálculo de los distintos índices de poder proporcionan una idea aproximada del reparto de poder individual en un juego simple, pero su cálculo puede llegar a ser tedioso. El simple cálculo del número de coaliciones en las que un jugador es crucial, $\eta_i(W)$, podría llevarnos a un sumatorio con tantos sumandos como coaliciones existan en total:

$$\eta_i(W) = \sum_S [v(S) - v(S_{\downarrow i})]$$

Recordemos que en un juego simple de n jugadores hay un total de hasta 2^n coaliciones posibles (3^n si introducimos la abstención como *input*), por lo cual el coste computacional del cálculo de los índices de poder crece considerablemente a medida que aumentamos n. Incluso con la ayuda de un ordenador, los cálculos empiezan a ser inmanejables para juegos de mayoría ponderada a partir de 20 jugadores.

Afortunadamente, existe un método para cuantificar $\eta_i(W)$ sin tener que comprobar cada coalición. Fue introducido por Brams y Affuso en [7], y está basado en el uso de *funciones generatrices*: se trata de funciones del tipo

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

tratadas de un modo formal; es decir, la variable x es irrelevante, no se evalúa, y no se estudia la convergencia de la serie resultante. Lo importante de estas funciones es que generan una sucesión $\{a_j\}$ de números reales asociados a los diferentes términos exponenciales de la variable, x^j. Como ejemplo a nivel ilustrativo,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ...$$

genera la sucesión infinita $(1, 1, 1, ...)$; esto es, $a_j = 1\ \forall j$.

En el siguiente subapartado mostraremos la idea original de Brams y Affuso para el cálculo de $\eta_i(W)$ en el ámbito de los juegos simples sin abstención y su consiguiente aplicación a los índices individuales de Coleman y Banzhaf. Posteriormente, diseñaremos un algoritmo para su cálculo mediante el cual podremos hallar también de manera sencilla los índices medidores de éxito (Rae y König-Bräuninger). La introducción de una segunda variable y en estas funciones generatrices nos servirá para el cálculo del índice de Shapley-Shubik, tal como apuntaron también Brams y Affuso en su trabajo. Finalmente, un nuevo algoritmo más elaborado nos servirá para calcular los índices de Johnston, Holler y Deegan-Packel, que involucran el uso de n variables adicionales con la correspondiente complicación computacional.

En el subapartado posterior veremos qué modificaciones hay que realizar sobre estas funciones generatrices (y sobre los diferentes algoritmos) para extender su uso al caso de los juegos con abstención.

3.1. Cálculo de índices de poder para juegos simples

3.1.1. Mediante funciones generatrices de una sola variable

Consideremos el juego de mayoría ponderada de n jugadores $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$, y sea $\bar{W} = \sum_{i=1}^{n} w_i$. Si pudiésemos encontrar una función generatriz $f(x)$ cuyos coeficientes a_j nos dieran el número de coaliciones cuyos miembros juntan j votos con la suma de sus pesos, bastaría con sumar los coeficientes correspondientes a aquellas coaliciones perdedoras que pasarían a ser ganadoras con la adición de w_i votos para conocer $\eta_i(W)$:

$$a_{q-w_i} + a_{q-w_i+1} + ... + a_{q-1} = \sum_{j=q-w_i}^{q-1} a_j = \sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S \backslash \{i\})] = \eta_i(W)$$

De este modo, el cálculo de los índices de Banzhaf y Coleman sería obtenido con facilidad.

El problema de encontrar estos coeficientes a_j es muy similar al de contar el número de particiones de un entero positivo j en n sumandos $w_i, ..., w_n$ con la restricción de que cada sumando puede ser utilizado como máximo una vez, y sin importar su orden. Este conocido problema combinatorio se soluciona formando el producto

$$f(x) = (1 + x^{w_1})(1 + x^{w_2}) \cdots (1 + x^{w_n}) = \prod_{j=1}^{n} (1 + x^{w_j}),$$

que expandido nos da una suma del tipo

$$f(x) = 1 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_{\bar{W}} x^{\bar{W}} = \sum_{j=0}^{\bar{W}} a_j x^j$$

Los coeficientes a_j nos indican el número de coaliciones formadas por miembros cuyo peso combinado es exactamente j. Esta $f(x)$ involucra a los n jugadores, por lo que la llamaremos *función generatriz global* del juego en cuestión.

Sin embargo, para nuestros propósitos es más conveniente obtener el número de coaliciones que suman un número determinado de votos *sin la colaboración del jugador i*, para poder saber en cuáles de ellas dicho votante es crucial. Para ello, basta con retirar su contribución al producto:

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} (1 + x^{w_j})$$

Llamaremos a $f_i(x)$ *función generatriz (individual) para el miembro i.*

Veamos un ejemplo aclaratorio: consideremos el juego de mayoría ponderada de 4 jugadores $[3; 3, 2, 1, 1]$, cuyo conjunto de coaliciones ganadoras minimales es $W^m = \{1, 23, 24\}$. Sea $a_i \equiv$ número de coaliciones de peso i, tenemos:

$$\begin{array}{ll} a_0 = 1\ (\emptyset) & a_4 = 3\ (13, 14, 234) \\ a_1 = 2\ (3, 4) & a_5 = 2\ (12, 134) \\ a_2 = 2\ (2, 34) & a_6 = 2\ (123, 124) \\ a_3 = 3\ (1, 23, 24) & a_7 = 1\ (N) \end{array}$$

Si calculamos la función generatriz global mediante el método expuesto,

$$f(x) = (1 + x^3)(1 + x^2)(1 + x)^2 = 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 2x^6 + x^7,$$

vemos que efectivamente los coeficientes del polinomio en x se corresponden con los a_i anteriores.

Fijémonos ahora en las coaliciones ganadoras en las que cada jugador es crucial:

- 1 es crucial en $\{1, 12, 13, 14, 134\} \Rightarrow \eta_1(W) = 5$
- 2 es crucial en $\{23, 24, 234\} \Rightarrow \eta_2(W) = 3$
- 3 es crucial en $\{23\} \Rightarrow \eta_3(W) = 1$
- 4 es crucial en $\{24\} \Rightarrow \eta_4(W) = 1$

Recordemos que $\eta_i(W) = \sum_{q-w_i}^{q-1} a_j$, donde a_j es el coeficiente de x^j en el desarrollo de la función generatriz individual para el jugador i. Calculemos estas funciones para los cuatro jugadores:

$$f_1(x) = (1 + x^2)(1 + x)^2 = 1 + 2x + 2x^2 + \cancel{2x^3 + x^4}$$
$$f_2(x) = (1 + x^3)(1 + x)^2 = 1 + 2x + 1x^2 + \cancel{x^3 + 2x^4 + x^5}$$
$$f_3(x) = f_4(x) = (1 + x^3)(1 + x^2)(1 + x) = 1 + x + 1x^2 + \cancel{2x^3 + x^4 + x^5 + x^6}$$

Hemos tachado los términos correspondientes a coaliciones que ya alcanzan la cuota sin necesidad del jugador i, y marcado en rojo los coeficientes que entran dentro del sumatorio $\sum_{q-w_i}^{q-1} a_j$. De este modo:

$$\left.\begin{array}{l} q - w_1 = 0 \\ q - 1 = 2 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \eta_1(W) = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + 2 + 2 = 5$$
$$\left.\begin{array}{l} q - w_2 = 1 \\ q - 1 = 2 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \eta_2(W) = a_1 + a_2 = 2 + 1 = 3$$
$$\left.\begin{array}{l} q - w_3 = q - w_4 = 2 \\ q - 1 = 2 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \eta_3(W) = \eta_4(W) = a_2 = 1$$

Y así hemos comprobado que el método funciona. Una vez hallado $\eta(W)$, calcular los índices de Banzhaf y Coleman es inmediato, así como el de Rae a partir del de Banzhaf mediante la fórmula de Penrose.

Para calcular el índice de König-Bräuninger, hay que realizar el mismo proceso pero extendiendo el sumatorio de coeficientes de las funciones generatrices individuales desde a_{q-w_i} hasta el de grado máximo ($a_{\bar{W}-w_i}$), obteniendo $|W_i|$. El denominador, $|W|$, se calcula operando exactamente del mismo modo pero utilizando la función global y sumando los coeficientes desde a_q.[16] En el ejemplo:

$$|W| = a_q + a_{q+1} + ... + a_{\bar{W}} = a_3 + ... + a_7 = 3 + 3 + 2 + 2 + 1 = 11$$
$$|W_1| = a_0 + ... + a_4 = 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8$$
$$|W_2| = a_1 + ... + a_5 = 2 + 1 + 1 + 2 + 1 = 7$$
$$|W_3| = |W_4| = a_2 + ... + a_6 = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6$$

[16] El valor de $|W|$ nos permitirá obtener también el índice de *poder de actuación del colectivo* de Coleman.

A continuación mostramos el algoritmo, implementado mediante el programa Maple, que nos permitirá calcular eficientemente los índices comentados gracias a los métodos recién expuestos. En primer lugar, el usuario debe introducir los diferentes pesos asociados a los jugadores y la cuota del juego de mayoría ponderada cuyos índices se desea obtener. Posteriormente, el programa calcula la FG global y se sirve de ella para obtener $|W|$ y $A(W)$ (*poder de actuación del colectivo*):

```
** Escriba los pesos correspondientes a cada jugador:
V := [8, 5, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1]

** Escriba la cuota del juego:
d := 19

El número de jugadores es... :
N := nops(V)

Cálculo de F:

F := 1 :
for i from 1 to N do
w[i] := V[i] :
F := F·(1 + x^(w[i])) :
end do:

Función generatriz global:
F := sort(expand(F), x, ascending) :

Cálculo de |W|:

W := 0 :
for k from 1 to nops(F) do
sumand := op(k, F) :
deg := degree(sumand, x) :
if (deg ≥ d) then
  W := W + coeffs(sumand) :
end if
end do:
W

Poder de actuación del colectivo (Coleman):
W/2^N
```

Acto seguido, se procede al cálculo de las FG individuales, se ordenan según su exponente en x de manera ascendente y se suman los coeficientes de los monomios de grado superior a $q - w_i$ de cada una para obtener los numeradores del índice de König (el denominador ya se calculó antes). Parando la suma al llegar a los de grado $q - 1$ (incluidos) obtenemos el índice de Banzhaf, mediante el cual pueden obtenerse rápidamente todos los demás utilizando las fórmulas pertinentes:

Cálculo de les funciones generatrices individuales:

```
for i from 1 to N do
f[i] := 1 :
end do:

for i from 1 to N do
 for j from 1 to N do
  if j ≠ i then
    f[j] := f[j]·(1 + x^w[i]) :
  end if
 end do
end do:

for i from 1 to N do
f[i] := sort(expand(f[i]), x, ascending) :
end do:
```

Algoritmo para calcular los índices de Rae, Coleman, Banzhaf i König-Bräuninger:

```
Banzhaf := [ ]:
Rae := [ ]:
KB := [ ]:
BSum := 0 :

 for i from 1 to N do
 if w[i] = w[i-1] then
   b[i] := b[i-1] : kb[i] := kb[i-1] :
 else
 b[i] := 0 : kb[i] := 0 : c := 1 :
while degree(op(c, f[i]), x) < d - w[i] do c := c + 1 end do:
for k from c to nops(f[i]) do
  sumand := op(k, f[i]);
  deg := degree(sumand, x);
  kb[i] := kb[i] + coeffs(sumand) :
  if (deg ≤ d - 1) then
     b[i] := b[i] + coeffs(sumand) :
  else break:
  end if
end do:
end if:
Banzhaf := [op(Banzhaf), b[i]] :
Rae := [op(Rae), 1/2 + 1/2^N · b[i]] :
KB := [op(KB), kb[i]] :
BSum := BSum + b[i] :
end do:
```

Índices individuales:

```
Rae

Banzhaf;
if BSum ≠ 0 then BanzhafNormIndex := 1/BSum · Banzhaf end if;
BanzhafMed := 1/2^(N-1) · Banzhaf;

ColP := 1/W · Banzhaf;
ColI := 1/(2^N - W) · Banzhaf;

KB := 1/W · KB
```

3.1.2. Mediante funciones generatrices de dos variables

En [7], Brams y Affuso nos muestran cómo utilizar las funciones generatrices (FG) para calcular los numeradores de los índices de Banzhaf y de Coleman, pero también ofrecen una indicación sobre cómo obtener el de Shapley-Shubik, basándose en un trabajo anterior de Mann y el mismo Shapley ([27]). Se trata de añadir una segunda variable y (sin exponenciar) multiplicando a cada variable x^{w_i}, y nos servirá para distinguir coaliciones que suman el mismo número de votos pero con distinto número de miembros. Las FG individuales pasarán a ser[17]:

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i}(1 + x^{w_j} y) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\bar{W}-w_i} a_{jk} x^j y^k$$

Nuevamente, escogeremos sólo los términos de grado en x comprendido entre $q - w_i$ y $q - 1$, pero agruparemos estos términos según su grado en y para obtener los diferentes coeficientes que acompañarán a los diferentes sumandos del tipo $\frac{1}{n!}(s-1)!(n-s)!$ en el cálculo del índice.[18] De este modo, y teniendo en cuenta que, en cada sumando, el número de integrantes de la coalición es $s = k + 1$ (el exponente k indica el número de jugadores que forman la coalición a la espera del jugador i, que la hace ganadora), el valor de Shapley-Shubik será:

$$\Phi_i(W) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!\ (n-(k+1))!}{n!} \cdot \left(\sum_{j=q-w_i}^{q-1} a_{jk} \right)$$

Veámoslo más claro con el mismo ejemplo del subapartado anterior:

$$f_1(x) = (1 + x^2 y)(1 + xy)^2 = 1 + 2xy + (1x^2y^2 + 1x^2y) + \cancel{2x^3y^2 + x^4y^3}$$

$$f_2(x) = (1 + x^3 y)(1 + xy)^2 = 1 + 2xy + 1x^2y^2 + \cancel{x^3y + 2x^4y^2 + x^5y^3}$$

$$f_3(x) = f_4(x) = (1+x^3y)(1+x^2y)(1+xy) = 1+xy+1x^2y+\cancel{(x^3y^2 + x^3y) + x^4y^2 + x^5y^2 + x^6y^3}$$

Hemos vuelto a tachar los términos de grado $\geq q$ por ser inservibles para nuestro propósito. Los paréntesis agrupan términos del mismo grado en x pero diferente en y. Por ejemplo, el paréntesis de la FG del jugador 1 nos indica que hay dos maneras de sumar 2 votos con el resto de jugadores: una coalición que agrupa a dos de ellos, y otra que utiliza un sólo jugador (concretamente, el jugador 2). Los colores nos sirven ahora para distinguir los coeficientes de los términos de diferente grado en y. Para la primera función, lo veremos mejor reordenando la parte que nos interesa como un polinomio en y:

$$g_1(x) = 1 + (2x + 1x^2)y + 1x^2y^2$$

Por lo tanto:

$$\Phi_1(W) = \tfrac{(1-1)!(4-1)!}{4!} \cdot 1 + \tfrac{(2-1)!(4-2)!}{4!} \cdot (2+1) + \tfrac{(3-1)!(4-3)!}{4!} \cdot 1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{12} \cdot 3 + \tfrac{1}{12} = \tfrac{7}{12}$$

$$\Phi_2(W) = \tfrac{(2-1)!(4-2)!}{4!} \cdot 2 + \tfrac{(3-1)!(4-3)!}{4!} \cdot 1 = \tfrac{1}{12} \cdot 2 + \tfrac{1}{12} = \tfrac{3}{12}$$

$$\Phi_3(W) = \Phi_4(W) = \tfrac{(2-1)!(4-2)!}{4!} \cdot 1 = \tfrac{1}{12}$$

[17] En lo sucesivo, omitiremos la función global ya que sólo nos era útil en el cálculo de KB(W) y A(W).

[18] Recordemos que el índice de S-S para el jugador i es $\Phi_i(W) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \backslash \{i\})]$, con $s = |S|$. Los coeficientes de los que hablamos son simplemente el número de veces que se repite cada sumando dado un mismo valor de s.

El programa de Maple que hemos implementado con el objetivo de calcular eficientemente el índice de Shapley-Shubik es prácticamente idéntico al mostrado en el apartado anterior para los índices medidores de éxito y crucialidad, teniendo en cuenta que ahora interviene una segunda variable y en la definición de las funciones generatrices. Dentro del algoritmo sólo hay que añadir la ponderación correspondiente a cada coeficiente:

Algoritmo para calcular el índice de Shapley-Subik:

$SS := [\ ]:$
for i **from** 1 **to** N **do**
if $w_i = w_{i-1}$ **then**
$s_i := s_{i-1}:$
else
$s_i := 0 : c := 1 :$
while $degree\left(op\left(c, f_i\right), x\right) < d - w_i$ **do** $c := c + 1$ **end do**:
for k **from** c **to** $nops\left(f_i\right)$ **do**
$sumand := op\left(k, f_i\right);$
$deg := degree(sumand, x);$
$degy := degree(sumand, y);$
if $deg \leq d - 1$ **then**
$s_i := s_i + \frac{degy! \cdot (N - degy - 1)!}{N!} \cdot coeffs(sumand) :$
else break:
end if;
end do:
end if:
$SS := \left[op(SS), s_i\right]:$
end do:

3.1.3. Mediante funciones generatrices de $n+1$ variables

Los índices de Johnston, Holler y Deegan-Packel presentan una formulación más compleja que los anteriores; es por ello que no basta con la información que nos proporcionan las dos variables utilizadas para obtener los elementos que intervienen en dichas formulaciones. El problema que presentan los tres índices está relacionado con la crucialidad no sólo del jugador que protagoniza cada FG individual, sino también con la del resto de jugadores que forman las coaliciones en las que él interviene. Concretamente, el de Johnston cuenta el número total de jugadores cruciales por coalición, el de Holler contabiliza el número de coaliciones en las que este número coincide con el tamaño de las mismas (es decir, las minimales), y el de Deegan-Packel es similar al de Johnston pero sólo considera las minimales.

Para almacenar toda esta información en funciones generatrices, no nos queda más remedio que conocer *quiénes* forman cada coalición, y para ello debemos introducir tantas variables adicionales como jugadores haya (una variable y_j multiplicando a la variable x en el factor correspondiente al jugador j), de modo que la FG individual para un jugador viene a ser:

$$f_i(x, y_1, ..., \hat{y_i}, ..., y_n) = \prod_{j \neq i}(1 + x^{w_j} y_j) = \sum_{j=0}^{\bar{W}-w_i} \left(\sum_{\substack{(i_1,...,i_k): \\ w_{i_1}+...+w_{i_k}=j}} y_{i_1} \cdots y_{i_k} \right) x^j \ ,$$

con $\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \{1, ..., \hat{i}, ..., n\}$. Como siempre, consideraremos tan sólo los sumandos con exponente en x comprendido entre $q - w_i$ y $q - 1$ y daremos a cada uno de ellos un tratamiento u otro según el índice que estemos calculando, pese a que todos comparten un elemento clave común: para cada coalición S, definimos

$$d(S) \equiv \text{n}^{\text{o}} \text{ de jugadores cruciales en S } \equiv \{i \in S : S \backslash \{i\} \notin W\}$$

Dado que, dentro de la FG individual del jugador i, cada uno de estos sumandos representa una coalición en la que no interviene i (y tras cuya adición éste se convierte en crucial), el número de jugadores cruciales de una coalición S de tamaño $k+1$ y peso j se obtiene como:

$$d(T) \equiv d(i_1, ..., i_k) = 1 + |\ l \in \{i_1, ..., i_k\} : j - w_l < q - w_i\ |,$$

donde $S = T \cup \{i\} = \{i_1 ... i_k\} \cup \{i\}$.[19]

Sirviéndonos de esta cantidad $d(T)$, los numeradores de estos tres índices se obtienen, a partir de las FG individuales, de la siguiente manera:

$$\gamma_i(W) = \sum_{j=q-w_i}^{q-1} \left(\sum_{\substack{(i_1,...,i_k): \\ w_{i_1}+...+w_{i_k}=j}} \frac{1}{d(i_1, ..., i_k)} \right)$$

[19] El 1 se refiere lógicamente al jugador i, que es crucial por construcción. De hecho, cuando el jugador i es *capaz* (su voto individual ya alcanza la cuota), el primer sumando de su FG individual será un 1 que implicará $k = 0$, $S = \emptyset \cup \{i\}$ y $d(T) = d(\emptyset) = 1$. Además, para el resto de sumandos, también $d(T) = 1$, ya que i será siempre el único jugador crucial.

$$num(H_i(W)) = \sum_{j=q-w_i}^{q-1} \left(\sum_{\substack{(i_1,...,i_k)\ :\ w_{i_1}+...+w_{i_k}=j \\ d(i_1,...,i_k)=k+1}} 1 \right) =$$

$$= \#\{(i_1, ...i_k) \mid (w_1 + ... + w_k) \in [q - w_i, q - 1],\ d(i_1, ..., i_k) = k + 1\}$$

$$num(DP_i(W)) = \sum_{j=q-w_i}^{q-1} \left(\sum_{\substack{(i_1,...,i_k)\ :\ w_{i_1}+...+w_{i_k}=j \\ d(i_1,...,i_k)=k+1}} \frac{1}{k+1} \right)$$

Los denominadores de Johnston y Holler se obtienen sumando los diferentes numeradores jugador por jugador, mientras que el de Deegan-Packel ($|W^m|$) lo obtendremos gracias a la FG global:

$$f(x, y_1, ..., y_n) = \prod_{j=1}^{n}(1 + x^{w_j} y_j) = \sum_{j=0}^{\bar{W}} \left(\sum_{(i_1,...,i_k)\ :\ w_{i_1}+...+w_{i_k}=j} y_{i_1} \cdots y_{i_k} \right) x^j \ ,$$

procediendo de modo similar al del cálculo de $num(H(W))$, pero con todos los sumandos a partir de x^q:

$$|W^m| = \sum_{j=q}^{\bar{W}} \left(\sum_{(i_1,...,i_k)\ :\ w_{i_1}+...+w_{i_k}=j} |\ |\ l \in \{i_1, ..., i_k\} : j - w_l < q\ |\ =\ k\ | \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\bar{W}-q} \left(\sum_{(i_1,...,i_k)\ :\ w_{i_1}+...+w_{i_k}=j} |\ |\ l \in \{i_1, ..., i_k\} : w_l > j\ |\ =\ k\ | \right)$$

Fijémonos en que, cuando $j = 0$ en la última expresión, el número de subíndices que cumplen la condición en cada uno de los sumandos (coaliciones) alcanzará siempre el valor k porque $w_l > 0$ por definición. Por lo tanto, $|W^m|$ siempre será, como mínimo, igual al número de sumandos de grado la cuota.

Recuperemos el ejemplo de los apartados anteriores para clarificar conceptos. Recordemos que $W^m = \{1, 23, 24\}$; con la FG global podemos hallar $|W^m| = 3$:

$$f(x, y_1, y_2, y_3, y_4) = (1 + x^3 y_1)(1 + x^2 y_2)(1 + x y_3)(1 + x y_4) =$$

$$= \cancel{1 + (y_3 + y_4)x + (y_2 + y_3 y_4)x^2} + (y_1 y_3 + y_1 y_4 + y_1)x^3 + (y_2 y_3 y_4 + y_2 y_3 + y_1 y_4)x^4 +$$
$$+ (y_1 y_3 y_4 + y_1 y_2)x^5 + (y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4)x^6 + y_1 y_2 y_3 y_4 x^7$$

Como hemos apuntado antes, los 3 términos de grado exactamente 3 se corresponden con coaliciones minimales, por lo que $|W^m| \geq 3$. Consideramos, por tanto, sólo los términos de grado en x a partir de $q > 3$. Si miramos el primer sumando de grado 4, $y_2y_3y_4$, tenemos que $j - w_2 = 4 - 2 = 2 > 3 = q$, por lo que el jugador 2 es crucial; pero $j - w_3 = 4 - 1 = 3 = q$, con lo que 3 no es crucial y la coalición no es minimal. Con el resto de sumandos de grado 4 y superiores ocurre lo mismo; en consecuencia, $|W^m| = 3$.

El siguiente paso es calcular las FG individuales para computar los numeradores de los tres índices en cuestión.

$$f_1(x, y_2, y_3, y_4) = \mathbf{1} + \boldsymbol{(y_3 + y_4)x} + \boldsymbol{(y_3y_4 + y_2)x^2} + (y_2y_4 + y_2y_3)x^3 + y_2y_3y_4x^4$$

$$f_2(x, y_1, y_3, y_4) = 1 + \boldsymbol{(y_3 + y_4)x} + \boldsymbol{y_3y_4x^2} + y_1x^3 + (y_1y_3 + y_1y_4)x^4 + y_1y_3y_4x^5$$

$$f_3(x, y_1, y_2, y_4) = 1 + y_4x + \boldsymbol{y_2x^2} + (y_1 + y_2y_4)x^3 + y_1y_4x^4 + y_1y_2x^5 + y_1y_2y_4x^6$$

$$f_4(x, y_1, y_2, y_3) = 1 + y_3x + \boldsymbol{y_2x^2} + (y_1 + y_2y_3)x^3 + y_1y_3x^4 + y_1y_2x^5 + y_1y_2y_3x^6$$

Los sumandos a tratar en cada FG son los remarcados en negrita. Analicemos jugador por jugador:

- Empezando por el jugador 1, el primer sumando (1) implica $d(T) = 1 = 0 + 1 = k + 1$ y, para el resto, $d(T) = 1 \neq k + 1$ (ver nota al pie #19). Por lo tanto, $\gamma_1(W) = 1 + (1 + 1) + (1 + 1) = 5$ y $num(H_1(W)) = 1 = num(DP_1(W))$.
- Por lo que se refiere al jugador 2, los dos primeros sumandos (coaliciones $T_1 = \{3\}$ y $T_2 = \{4\}$) cumplen $j - w_3 = j - w_4 = 1 - 1 = 0 < 1 = 3 - 2 = q - w_2$, por lo que $d(T_1) = d(T_2) = 2 = k + 1$; mientras que el tercero ($T_3 = \{34\}$) no cumple la condición para ninguno de sus 2 jugadores. Por lo tanto, $\gamma_2(W) = (1/2+1/2)+1 = 2$, $num(H_2(W)) = (1 + 1) + 0 = 2$ y $num(DP_2(W)) = (1/2 + 1/2) = 1$.
- En cuanto a los jugadores 3 y 4, su único sumando ($T = \{2\}$) cumple $j - w_2 = 2 - 2 = 0 < 2 = 3 - 1 = q - w_3 = q - w_4$, con lo que $\gamma_3(W) = 1/2$, $num(H_3(W)) = 1$ y $num(DP_3(W)) = 1/2$ (ídem para el jugador 4).

Los índices resultan, finalmente:

$$\gamma'(W) = (\frac{5}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})$$

$$H(W) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$$

$$DP(W) = \frac{1}{3}(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$$

En la página siguiente se muestra el programa que incluye el algoritmo utilizado para la obtención de estos índices. Debe recalcarse que, así como los algoritmos anteriores (Banzhaf y Shapley-Shubik) son eficientes en el sentido de que mejoran el coste computacional que supondría analizar las coaliciones una a una para decidir la crucialidad de los jugadores, este algoritmo trabaja en tiempo exponencial debido a que cada sumando de cada FG se corresponde con una coalición. Por lo tanto, lo que aquí ofrecemos no es una mejora en la eficiencia del cálculo sino simplemente un método de obtención de estos tres índices.

El encabezamiento del programa vuelve a pedir al usuario la lista de pesos y la cuota del juego, para luego calcular la FG global y, con ella, la cantidad $|W^m|$ (necesaria para el índice de Holler). El siguiente paso es calcular las FG individuales[20], y ya por último, se ejecuta el algoritmo que calcula los índices mediante el método detallado unas líneas antes. Como gran parte del programa es idéntico a los utilizados para Banzhaf y Shapley, especificaremos sólo las diferencias; esto es, las FG's y los algoritmos.

Cálculo de F:

```
F := 1 :
for i from 1 to N do
w[i] := V[i] :
F := F·(1 + x^(w[i])·y[i]^(w[i])) :
end do:
```

Función generatriz global:

```
F := sort(expand(F), x, ascending) :
```

Cálculo del número de coaliciones minimales del juego:

```
Wmin := 0 :
for k from 1 to nops(F) do
  sumand := op(k, F);
  n := nops(sumand);
  deg := degree(sumand, x);
  if (deg = d) then Wmin := Wmin + 1
  elif (deg > d) then
    S := 0 :
    for v from 1 to n − 1 do
      if deg − degree(op(v, sumand)) < d then
        S := S + 1
      else break;
    end if
    end do:
    if S = n − 1 then Wmin := Wmin + 1 end if
  end if;
end do:
Wmin
```

Cálculo de las funciones generatrices individuales:

```
for i from 1 to N do
f[i] := 1 :
end do:

for i from 1 to N do
for j from 1 to N do
if j ≠ i then
f[j] := f[j]·(1 + x^(w[i])·y[i]^(w[i])) :
end if
end do
end do:

for i from 1 to N do
f[i] := sort(expand(f[i]), x, ascending) :
end do:
```

Algoritmo para calcular los índices de Johnston, Holler y D-P:

```
Johnston := [ ] :
Wm := [ ] :
DP := [ ] :
JSum := 0 : HSum := 0 :

for i from 1 to N do
if w[i] = w[i−1] then
  j[i] := j[i−1]; W[i] := W[i−1]; dp[i] := dp[i−1] :
else
j[i] := 0 : W[i] := 0 : dp[i] := 0 : c := 1 :
while degree(op(c, f[i]), x) < d − w[i] do c := c + 1 end do:
for k from c to nops(f[i]) do
  sumand := op(k, f[i]);
  n := nops(sumand);
  deg := degree(sumand, x);
  if (deg ≤ d − 1) then
    S := 1;
    if n ≠ 1 then
      for v from 1 to n − 1 do
        if deg − degree(op(v, sumand)) < d − w[i] then
            S := S + 1
        end if
      end do
    end if:
    j[i] := j[i] + 1/S :
    if S = n then
      W[i] := W[i] + 1 :
      dp[i] := dp[i] + 1/S :
    end if :
  else break:
  end if;
end do:
end if:
Johnston := [op(Johnston), j[i]] :
Wm := [op(Wm), W[i]] :
DP := [op(DP), dp[i]] :
JSum := JSum + j[i] :
HSum := HSum + W[i] :
end do:


Johnston;
if JSum ≠ 0 then
    JohnstonNormIndex := 1/JSum · Johnston
end if;

Wm;
if HSum ≠ 0 then Holler := 1/HSum · Wm end if;

DPI := 1/Wmin · DP;
```

[20] En el exponente de cada variable y_i aparece el peso del jugador i, pese a que en la explicación teórica no constaban. Se hace por comodidad en el diseño del algoritmo, sin que su ejecución se vea ralentizada.

3.2. Cálculo de índices de poder en (3,2)-juegos

Consideremos ahora el (3,2)-juego de mayoría ponderada $[q;(w_1^Y,w_1^N),...,(w_n^Y,w_n^N)]$. Nuestro primer objetivo vuelve a ser poder hallar $\eta_i(W)=\#\{T:T\in W,\ T_{\downarrow i}\notin W\}$ usando funciones generatrices, para obtener eficientemente los índices de Banzhaf, Coleman y Rae[21]. Recordemos que ahora cada jugador posee dos pesos (uno positivo para cuando vota *sí* y otro negativo para el *no*; la abstención tiene peso 0), y que puede ser crucial de dos maneras: cambiando su voto del *sí* a la *abstención* (privando a la tripartición inicial de su antigua contribución en forma de peso positivo) y cambiando de la *abstención* al *no* (aportando a la tripartición resultante una contribución negativa). Por lo tanto, una vez calculada la FG (individual) que estamos buscando, los coeficientes relevantes serán:

$$\sum_{j=q-w_i^Y}^{q-w_i^N-1} a_j=(a_{q-w_i^Y}+...+a_{q-1})+(a_q+...+a_{q-w_i^N-1})=$$

$$=\#\{T:T\in W,\ T_{\downarrow i}\notin W,\ i\in {}_1T\}+\#\{T:T\in W,\ T_{\downarrow i}\notin W,\ i\in {}_2T\}=\eta_i(W),$$

teniendo en cuenta que los coeficientes a_j nos siguen indicando el número de triparticiones de peso total j que se pueden formar con todos los jugadores excepto i. Para obtener una FG cuyos coeficientes cumplan esta condición, hay que añadir a cada factor un sumando adicional que tenga como exponente el peso correspondiente al voto negativo del jugador, para así obtener todas las combinaciones posibles de voto entre jugadores y, por ende, todas las triparticiones. La función generatriz global sería, pues:

$$f(x)=\prod_{j=1}^{n}(1+x^{w_j^Y}+x^{w_j^N})=\sum_{j=\bar{W}^N}^{\bar{W}^Y}a_jx^j,\quad \text{siendo } \bar{W}^Y=\sum_{j=1}^{n}w_j^Y,\ \bar{W}^N=\sum_{j=1}^{n}w_j^N$$

Y las funciones generatrices individuales:

$$f_i(x)=\prod_{j\neq i}(1+x^{w_j^Y}+x^{w_j^N})=\sum_{j=\bar{W}^N-w_i^N}^{\bar{W}^Y-w_i^Y}a_jx^j$$

Veamos un nuevo ejemplo: sea el (3,2)-juego de mayoría ponderada $[2;(3,-1),(1,-2),(1,-1)]$, de tres jugadores. La función generatriz global del juego viene dada por:

$$f(x)=(1+x^3+x^{-1})(1+x+x^{-2})(1+x+x^{-1})=$$
$$x^{-4}+2x^{-3}+3x^{-2}+4x^{-1}+5+4x+3x^2+2x^3+2x^4+x^5$$

Comprobemos que sus coeficientes se corresponden con el número de triparticiones de peso igual al exponente de la variable a la que acompañan:

$a_{-4}=1\ ({}_3T=N)$	$a_1=4\ (23/\emptyset/1,\ 2/13/\emptyset,\ 3/12/\emptyset,\ 1/3/2)$
$a_{-3}=2\ (\emptyset/1/23,\ \emptyset/3/12)$	$a_2=3\ (23/1/\emptyset,\ 13/\emptyset/2,\ 1/2/3)$
$a_{-2}=3\ (3//12,\ \emptyset/13/2,\ \emptyset/2/13)$	$a_3=2\ (12/\emptyset/3,\ 1/23/\emptyset)$
$a_{-1}=4\ (3/1/2,\ 2/\emptyset/13,\ \emptyset/12/3,\ \emptyset/23/1)$	$a_4=2\ (12/3/\emptyset,\ 13/2/\emptyset)$
$a_0=5\ (2/1/3,\ 2/3/1,\ 3/2/1,\ 1/\emptyset/23,\ {}_2T=N)$	$a_5=1\ ({}_1T=N)$

[21] El lector quizá eche de menos durante esta sección el cálculo de los índices de Shapley-Shubik, Johnston, Holler y Deegan-Packel para (3,2)-juegos mediante FG's. Por lo que respecta al primero, la única referencia encontrada al respecto es [24]. Los otros tres pueden obtenerse mediante un algoritmo similar al utilizado en la sección anterior, que utilice FG's como las que presentaremos aquí pero con $n+1$ variables y cambiando el 1 de cada factor del productorio por una nueva variable A_i que indique la abstención del jugador i. Hemos decidido no incluirlo por lo engorroso de la notación y por su limitada eficiencia computacional.

Y, efectivamente, lo hacen. Miremos ahora en qué triparticiones es crucial cada jugador:

- 1 es crucial en $\{12/3/\emptyset,\ 12/\emptyset/3,\ 13/2/\emptyset,\ 13/\emptyset/2,\ 1/23/\emptyset,\ 1/2/3\ ||\ 23/1/\emptyset\} \Rightarrow \eta_1(W) = 6 + 1 = 7$
- 2 es crucial en $\{23/1/\emptyset\ ||\ 1/23/\emptyset,\ 1/2/3\} \Rightarrow \eta_2(W) = 1 + 2 = 3$
- 3 es crucial en $\{13/\emptyset/2,\ 23/1/\emptyset\} \Rightarrow \eta_3(W) = 2 + 0 = 2$

Hemos utilizado la doble barra para separar crucialidad votando *sí* y crucialidad absteniéndose. Las funciones generatrices individuales deberían ahora proporcionarnos los coeficientes que nos ayuden a calcular los diferentes $\eta_i(W)$:

$$f_1(x) = (1 + x + x^{-2})(1 + x + x^{-1}) = x^{-3} + x^{-2} + 2x^{-1} + 2 + 2x + 1x^2$$
$$f_2(x) = (1 + x^3 + x^{-1})(1 + x + x^{-1}) = x^{-2} + 2x^{-1} + 2 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + x^4$$
$$f_3(x) = (1 + x^3 + x^{-1})(1 + x + x^{-2}) = x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + 2 + 2x + x^3 + x^4$$

Hemos marcado en rojo los coeficientes que entran dentro del sumatorio $\sum_{q-w_i^Y}^{q-1} a_j$, cuyo valor es igual al número de triparticiones en las que i es crucial votando *sí*. En azul están los coeficientes de $\sum_{q}^{q-w_i^N-1} a_j$, que nos indica el número de triparticiones en las que i es crucial absteniéndose. La suma de todos ellos es $\eta_i(W)$:

$$\left.\begin{array}{l|l} q - w_1^Y = -1 & q = 2 \\ q - 1 = 1 & q - w_1^N - 1 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \eta_1(W) = (a_{-1} + a_0 + a_1) + a_2 = 6 + 1 = 7$$

$$\left.\begin{array}{l|l} q - w_2^Y = 1 & q = 2 \\ q - 1 = 1 & q - w_2^N - 1 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \eta_2(W) = a_1 + (a_2 + a_3) = 1 + 2 = 3$$

$$\left.\begin{array}{l|l} q - w_3^Y = 1 & q = 2 \\ q - 1 = 1 & q - w_3^N - 1 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \eta_3(W) = a_1 = 2$$

Hallar los índices de Banzhaf y Rae es ahora inmediato. Para calcular el numerador de los dos índices individuales de Coleman, necesitaremos duplicar una de las dos componentes que intervienen en la obtención de $\eta_i(W)$. Por ejemplo, para el jugador 1:

$$num(Col_1^P(W)) = \sum_{j=q-w_1^Y}^{q-1} a_j + 2 \cdot \sum_{j=q}^{q-w_1^N-1} a_j = 6 + 2 \cdot 1 = 8$$

$$num(Col_1^I(W)) = 2 \cdot \sum_{j=q-w_i^Y}^{q-1} a_j + \sum_{j=q}^{q-w_1^N-1} a_j = 2 \cdot 6 + 1 = 13$$

Con las funciones generatrices calculadas, el procedimiento de obtención del índice de König-Bräuninger es análogo al utilizado en los juegos sin abstención. El denominador, $|W|$, es la suma de los coeficientes de la FG global desde a_q; mientras que los numeradores se consiguen sumando los coeficientes de las respectivas FG individuales desde $a_{q-w_i^Y}$ hasta el coeficiente máximo $a_{\bar{W}^Y - w_i^Y}$:

$$|W| = a_q + a_{q+1} + ... + a_{\bar{W}^Y} = a_2 + ... + a_5 = 3 + 2 + 2 + 1 = 8$$
$$|W_1| = a_{-1} + ... + a_2 = 2 + 2 + 2 + 1 = 7$$
$$|W_2| = a_1 + ... + a_4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$
$$|W_3| = a_1 + ... + a_4 = 2 + 0 + 1 + 1 = 4$$

El algoritmo, programado en Maple, que hemos utilizado para obtener de manera eficiente estos índices mediante el uso de funciones generatrices se muestra a continuación. Del mismo modo que se hacía para juegos simples, hay que escribir en primer lugar los pesos asociados a cada jugador (tanto positivo como negativo) y la cuota del juego. El programa calcula la FG global, consigue $|W|$ a partir de ella y devuelve el índice colectivo de Coleman:

```
** Escriba los pesos correspondientes a cada jugador:
V := [[3,-2], [2,-2], [1,-1]]:

** Escriba la cuota del juego:
d := 2

El número de jugadores es... :
N := nops(V)

Cálculo de F:
F := 1:
for i from 1 to N do
wY[i] := V[i,1] : wN[i] := V[i,2] :
F := F·(1 + x^(wY[i]) + x^(wN[i])) :
end do:

Función generatriz global:
F := sort(expand(F), x, ascending) :

Cálculo de |W|:
W := 0 :
for k from 1 to nops(F) do
 sumand := op(k, F) :
 deg := degree(sumand, x) :
 if (deg ≥ d) then
   W := W + coeffs(sumand) :
 end if
 end do:
 W

Poder de actuación del colectivo (Coleman):
 W/3^N
```

El siguiente paso vuelve a ser calcular las FG individuales y poner en marcha, finalmente, el algoritmo que calcula los índices deseados. El método es muy similar al utilizado para juegos simples, con la salvedad de que ahora deben considerarse también los coeficientes de los monomios de grado comprendido entre q y $q - w_i^N - 1$ (indicadores de crucialidad positiva neutral), y que para calcular los índices de Coleman habrá que contabilizar doblemente estos coeficientes o bien los de grado entre $q - w_i^Y$ y $q - 1$, según se trate del de impedimento o del de iniciación.

Cálculo de las funciones generatrices individuales:

```
for i from 1 to N do
f[i] := 1 :
 end do:

for i from 1 to N do
 for j from 1 to N do
 if j ≠ i then
f[j] := f[j]·(1 + x^wY[i] + x^wN[i]) :
 end if
 end do
 end do:


for i from 1 to N do
f[i] := sort(expand(f[i]), x, ascending) :
 end do:
```

Algoritmo para calcular los índices de Rae, Coleman, Banzhaf y König-Bräuninger:

```
Banzhaf := [ ] :
ColemanP := [ ] : ColemanI := [ ] :
Rae := [ ] : Rae2 := [ ] :
KB := [ ] :
BSum := 0 :

 for i from 1 to N do
 if wY[i] = wY[i-1] and wN[i] = wN[i-1] then
     b[i] := b[i-1] : kb[i] := kb[i-1] :
     cP[i] := cP[i-1] : cI[i] := cI[i-1] :
 else
 b[i] := 0 : kb[i] := 0 :
 cP[i] := 0 : cI[i] := 0;
for k from 1 to nops(f[i]) do
   sumand := op(k, f[i]);
   deg := degree(sumand, x);
   if (deg ≥ d − wY[i]) then
       kb[i] := kb[i] + coeffs(sumand) :
       if (deg ≤ d − wN[i] − 1) then
           b[i] := b[i] + coeffs(sumand) :
           if (deg ≤ d − 1) then
               cI[i] := cI[i] + 2·coeffs(sumand) :
               cP[i] := cP[i] + coeffs(sumand) :
           else cI[i] := cI[i] + coeffs(sumand) :
                cP[i] := cP[i] + 2·coeffs(sumand) :
           end if:
       end if
   else break:
   end if
end do:
end if:
Banzhaf := [op(Banzhaf), b[i]] :
if b[i] ≠ 0 then Rae := [op(Rae), 1/3 + 1/3^N·b[i]] :
Rae2 := [op(Rae2), 1/2 + 1/(2·3^(N−1))·b[i]] : end if:
ColemanP := [op(ColemanP), cP[i]/W] :
ColemanI := [op(ColemanI), cI[i]/(3^N − W)] :
KB := [op(KB), kb[i]] :
BSum := BSum + b[i] :
end do:
```

4. Un sistema real de votación con abstención

Tal como ya apuntamos en la introducción, los juegos simples se han utilizado desde sus orígenes para la modelización, representación y tratamiento de múltiples sistemas de votación, y para el estudio del poder relativo de cada uno de los votantes que en ellos intervienen. Sin embargo, en la vida real, nos encontramos con que la mayoría de sistemas de votación utilizados ofrecen a sus integrantes la opción de mostrar su inconformidad con las opciones existentes o su simple indiferencia mediante el uso de la abstención: elecciones a nivel nacional, autonómico o local, consejos de organismos económicos internacionales o de organizaciones mundiales de cualquier ámbito, sistemas de toma de decisión en diversos parlamentos y senados, etc.; son algunas de las situaciones más evidentes.

Paradójicamente, en la literatura referente a las aplicaciones de la teoría de juegos, la mayoría de ejemplos reales considerados se modelizan usando juegos simples y, por lo tanto, ignorando la existencia de la abstención como posible *input*. En [32], los autores realizan un estudio pormenorizado de la capacidad decisoria de los diferentes bloques de países que podrían formarse en la toma de decisiones dentro del FMI, pero siempre en un contexto de votación binaria; cuando hay ejemplos de abstenciones como la de Canadá en 2007 y Suecia en 2004. Otros autores ([14] y [1], entre muchos otros) estudian detalladamente el Consejo de Ministros de la UE como un juego simple, pero no dejan claro el papel de la abstención en el seno del mismo.

Por fortuna, disponemos de algunos casos reales de sistemas de votación con abstención de notoria importancia y comúnmente nombrados en los artículos que tratan sobre juegos con alternativas. Se trata, especialmente, de la aceptación de enmiendas ordinarias en el Senado de los EEUU (representado como (3,2)-juego de mayoría ponderada en [33]) y el Consejo de Seguridad de la ONU (representado en [18]). Dedicaremos nuestra atención a este último ejemplo.

4.1. Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas (UNSC)

El Consejo de Seguridad es uno de los órganos principales de la ONU, encargado de mantener la paz y seguridad entre las naciones. A diferencia de otros órganos, puede tomar decisiones (conocidas como "resoluciones") y obligar a los países a cumplirlas. Está compuesto por cinco miembros permanentes (USA, China, Francia, UK y Rusia) y diez rotatorios. En los procesos de toma de decisiones (aprobación de resoluciones), se requiere que nueve de los quince países voten a favor, siempre que ninguno de los cinco permanentes lo haga en contra (éstos tienen lo que se conoce como "derecho de veto"). Considerado como un juego simple, este sistema se puede modelizar (véase [16]) como el juego de mayoría ponderada:

$$[39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Sin embargo, una visión más realista sugiere considerar la abstención como una posibilidad de voto (la simplificación anterior es criticada por Bolger en [5]: *"It should be noted that the U.N. Security Council game is often erroneously modeled as a 2-alternative game"*), teniendo en cuenta que la abstención de cualquier miembro permanente no veta la aprobación de una resolución. Desde este punto de vista, el sistema de votación del UNSC puede describirse ([18]) como el (3,2)-juego de mayoría ponderada siguiente:

$$[\ 9;\ \underbrace{[1,-6],...,[1,-6]}_{(5)}, \underbrace{[1,0],...,[1,0]}_{(10)}\ ]$$

Con esta nueva visión, podemos ver que los índices de poder asociados a cada país cambian ligeramente respecto a los correspondientes al caso sin abstención, y toman unos valores más cercanos al poder real que ostenta cada nación. A continuación ofrecemos una tabla comparativa de ambas situaciones[22]:

Índices	Sin abstención		Con abstención	
	M.Permanente	*M.Rotatorio*	*M.Permanente*	*M.Rotatorio*
$Rae(W)$	$0,5259$	$0,5026$	$0,3409$	$0,337$
$Rae'(W)$	–	–	$0,5113$	$0,5056$
$\beta(W)$	$0,1669$	$0,0165$	$0,1009$	$0,0495$
$\beta'(W)$	$0,0518$	$0,0051$	$0,0227$	$0,0111$
$Col^P(W)$	1	$0,0991$	1	$0,3621$
$Col^I(W)$	$0,0266$	$0,0026$	$0,0125$	$0,0075$
$KB(W)$	1	$0,5495$	$0,738$	$0,5747$

Un pequeño análisis de los resultados nos lleva a las siguientes conclusiones:

- Desde el punto de vista del éxito de los jugadores, tenemos dos índices a comparar. Por un lado, Rae muestra valores prácticamente idénticos entre su índice para juegos simples y su índice unitario para (3,2)-juegos: cada jugador interviene aproximadamente en la mitad de coaliciones/triparticiones ganadoras votando *sí* y en la mitad de perdedoras cuando vota *no*. El pequeño descenso, de un punto porcentual, observado en el índice de los miembros permanentes (de 0,5259 a 0,5113) se debe a que, cuando la abstención entra en juego y alguno/s de ellos la elige como voto, existe un pequeño número de agrupaciones que pueden ganar sin necesidad de su voto positivo (cosa que no ocurre en los juegos simples, donde toda coalición ganadora necesita de todos los miembros permanentes). Esta última observación justifica el valor máximo del índice de KB para este tipo de jugadores cuando no hay posibilidad de abstención, y el hecho de no llegar a serlo cuando sí la hay. Los miembros rotatorios no incrementan en demasía su proporción de éxito al pasar del juego simple al (3,2)-juego, ya que el número de triparticiones ganadoras "nuevas" (aquellas en las que ellos votan sí y algún o algunos permanentes se abstienen) es bastante pequeño respecto al total.
- Por lo que respecta a la crucialidad, debemos analizar los índices de Banzhaf y Coleman. En todos ellos se observa un cambio en la proporción de poder relativo entre miembros permanentes y rotatorios: mientras que, en el juego simple, los permanentes ostentan un poder hasta diez veces superior a los rotatorios, la aparición de la abstención reduce esta proporción a tan sólo el doble (es decir, se reduce 5 veces). La razón de este descenso radica en lo siguiente: sin abstención, un miembro permanente es crucial en <u>todas</u> las coaliciones ganadoras (en las que obviamente vota *sí*); con abstención, muchas de estas configuraciones continuarían siendo ganadoras si dicho miembro se abstuviese, con lo cual está perdiendo decisividad y transfiriéndosela (en menor medida) a los países rotatorios. El único índice que no refleja esta pérdida es Col^P, ya que en el segundo sistema, un miembro permanente sigue pudiendo vetar con un simple cambio de voto hacia el *no*, exactamente de la misma manera que ocurría en el primero (de ahí el valor máximo del índice en ambos casos). ¿A qué se debe entonces un descenso igual de drástico en los valores relativos de este índice? Se

[22] Cálculos realizados con los algoritmos presentados anteriormente.

debe, sin duda, al aumento, de hasta 4 veces, del poder correspondiente al miembro rotatorio, en contraposición a lo que pasa con Banzhaf, cuyo aumento es de sólo el doble. Las razones para esta diferencia se hallan en la mayor oportunidad de decisividad que ofrece el numerador de Col^P respecto a Banzhaf (este último no permite: o bien cambiar del sí al no, o bien de la abstención al no), y en que la proporción del primero se realice únicamente sobre el número de triparticiones ganadoras y no sobre el total de triparticiones en las que se vota sí (y en este ejemplo, el segundo número, 3^{n-1}, es muy superior al primero, $|W|$, ya que la proporción entre ellos no es más que $3 \cdot A(W) = 0,0307$).

Finalmente, y a modo de curiosidad, ofrecemos una captura de pantalla del programa Maple en la que aparecen calculados, mediante los algoritmos presentados en los apartados 3.1.2 y 3.1.3., los índices de Shapley-Shubik, Johnston, Holler y Deegan-Packel asociados al juego simple que acabamos de analizar:

SS;

$$\left[\frac{421}{2145}, \frac{421}{2145}, \frac{421}{2145}, \frac{421}{2145}, \frac{421}{2145}, \frac{4}{2145}, \frac{4}{2145}, \frac{4}{2145}, \frac{4}{2145}, \frac{4}{2145}, \frac{4}{2145}, \frac{4}{2145}, \frac{4}{2145}, \frac{4}{2145}, \frac{4}{2145}\right]$$

evalf(*SS*);

[0.1962703963, 0.1962703963, 0.1962703963, 0.1962703963, 0.1962703963, 0.001864801865, 0.001864801865, 0.001864801865, 0.001864801865, 0.001864801865, 0.001864801865, 0.001864801865, 0.001864801865, 0.001864801865, 0.001864801865]

Johnston;

if *JSum* $\neq 0$ **then** *JohnstonNormIndex* $:= \frac{1}{\text{JSum}} \cdot$ *Johnston* **end if**;

$$\left[\frac{2264}{15}, \frac{2264}{15}, \frac{2264}{15}, \frac{2264}{15}, \frac{2264}{15}, \frac{28}{3}, \frac{28}{3}, \frac{28}{3}, \frac{28}{3}, \frac{28}{3}, \frac{28}{3}, \frac{28}{3}, \frac{28}{3}, \frac{28}{3}, \frac{28}{3}\right]$$

$$\left[\frac{283}{1590}, \frac{283}{1590}, \frac{283}{1590}, \frac{283}{1590}, \frac{283}{1590}, \frac{7}{636}, \frac{7}{636}, \frac{7}{636}, \frac{7}{636}, \frac{7}{636}, \frac{7}{636}, \frac{7}{636}, \frac{7}{636}, \frac{7}{636}, \frac{7}{636}\right]$$

Wm;

if *HSum* $\neq 0$ **then** *Holler* $:= \frac{1}{HSum} \cdot$ *Wm* **end if**;

[210, 210, 210, 210, 210, 84, 84, 84, 84, 84, 84, 84, 84, 84, 84]

$$\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}\right]$$

$DPI := \frac{1}{Wmin} \cdot DP;$

$$\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}, \frac{2}{45}\right]$$

evalf(*JohnstonNormIndex*);

[0.1779874214, 0.1779874214, 0.1779874214, 0.1779874214, 0.1779874214, 0.01100628931, 0.01100628931, 0.01100628931, 0.01100628931, 0.01100628931, 0.01100628931, 0.01100628931, 0.01100628931, 0.01100628931, 0.01100628931]

evalf(*Holler*);

[0.1111111111, 0.1111111111, 0.1111111111, 0.1111111111, 0.1111111111, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444]

evalf(*DPI*);

[0.1111111111, 0.1111111111, 0.1111111111, 0.1111111111, 0.1111111111, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444, 0.04444444444]

Referencias

[1] Algaba, E.; Bilbao, J.M. y Fernández, J.R. (2007); *The distribution of power in the European Constitution.* European Journal of Operational Research 176, 1752–1766.

[2] Amer, R.; Carreras, F.; Magaña, A. (1995); *The Banzhaf–Coleman index for games with r alternatives.* Optimization 44, 175–198.

[3] Banzhaf, JF. (1965); *Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis.* Rutgers Law Rev 19, 317–343.

[4] Banzhaf, JF. (1968); *One man, 3.312 votes: a mathematical analysis of the Electoral College.* Villanova Law Rev 13, 304–332.

[5] Bolger, EM. (1993); *A value for games with n players and r alternatives.* Int J Game Theory 22, 319–334.

[6] Braham, M. y Steffen, F. (2003); *Voting power in games with abstentions.* Power and Fairness 20, 333–348.

[7] Brams, S.J. y Affuso, P.J. (1976); *Power and size: a new paradox.* Theory and Decision 7, 29–55.

[8] Carreras, F. (2005); *A decisiveness index for simple games.* European Journal of Operational Research 163, 370–387.

[9] Coleman, JS. (1971); *Control of collectivities and the power of a collectivity to act*, in: Lieberman, B. (ed), Social Choice. Gordon and Breach, New York, 269–300.

[10] Deegan, J. y Packel, EW. (1978); *A new index of power for simple n-person games.* Int J Game Theory 7, 113–123.

[11] Dubey, P. (1975); *On the uniqueness of the Shapley value.* Int J Game Theory 4, 131-140.

[12] Dubey, P. y Shapley, L.S. (1979); *Mathematical properties of the Banzhaf power index.* Math. Operations Res. 4, 99–131.

[13] Felsenthal, D.S. y Machover, M. (1998); *The measurement of voting power*, Edward Elgan Publishing, Cheltenham; 279–293.

[14] Felsenthal, D.S. y Machover, M. (2001); *The Treaty of Nice and qualified majority voting.* Social Choice and Welfare 18, 431–464.

[15] Felsenthal, D.S. y Machover, M. (2005); *Voting power measurement: a story of misreinvention.* Soc Choice Welfare 25, 485–506.

[16] Freixas, J. (1997); *Different ways to represent weighted majority games.* Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Vol.5, no. 2, 201–212.

[17] Freixas, J. y Zwicker, W.S (2003); *Weighted voting, abstention and multiple levels of approval.* Soc Choice Welfare 21, 399–431.

[18] Freixas, J. (2005); *Banzhaf Measures for Games with Several Levels of Approval in the Input and Output.* Annals of Operations Research 137, 45–66.

[19] Freixas, J. (2005); *The Shapley-Subik power index for games with several levels of approval in the input and output.* Decision Support Systems 39, 185–195.

[20] Holler, MJ. (1982); *Holler MJ (1982) Forming coalitions and measuring voting power.* Polit Stud 30, 262–271.

[21] Johnston, RJ. (1978); *On the measurement of power: some reactions to Laver.* Environ Plann A 10, 907–914.

[22] König, T. y Bräuninger, T. (1998); *The inclusiveness of European decision rules.* Journal of Theoretical Politics 10, 125–142.

[23] Laruelle, A. y Valenciano, F. (2008); *Voting and Collective Decision-Making*, Cambridge University Press, New York, 52–70.

[24] Lindner, I. (2002); *Voting power in weighted (j,k)-games: a limit theorem and a numerical method.* Mimeo.

[25] Lindner, I. (2005); *Voting Games with Abstention: A Probabilistic Characterization of Power and a Special Case of Penrose's Limit Theorem.*

[26] Magaña, A. (1996); *Formación de coaliciones en los juegos cooperativos y juegos con múltiples alternativas.* Tesis doctoral.

[27] Mann, I. y Shapley, LS. (1962); *Values of Large Games VI: Evaluating the Electoral College Exactly*, Memorandum RM-3156-PR, Santa Monica, California, RAND Corporation.

[28] Penrose, LS. (1946); *The elementary statistics of majority voting.* J Royal Stat Soc 109, 53–57.

[29] Rae, DW. (1969); *Decision rules and individual values in constitutional choice.* Am Polit Sci Rev 63, 40–56.

[30] Shapley, LS. (1953); *A value for n-person games*, in: Kuhn HW, Tucker AW (eds), *Contributions to the theory of games II* (Annals of Mathematics Studies, 28). Princeton University Press, Princeton, 307–317.

[31] Shapley, LS. y Shubik, M. (1954); *A method for evaluating the distribution of power in a committee system.* Am Polit Sci Rev 48, 787–792.

[32] Strand, J.R y Rapkin, D.P. (2005); *Regionalizing Multilateralism: estimating the power of potential regional voting blocs in the IMF.* International Interactions 31, 15–54.

[33] Tchantcho, B. (2008); *Voters' power in voting games with abstention: Influence relation and ordinal equivalence of power theories.* Games and Economic Behavior 64, 335–350.

[34] Tchantcho, B.; Diffo, L.; Pongou, R. y Moulen, J. (2009); *On the equilibrium of voting games with abstention and several levels of approval.* Social Choice and Welfare.