



Escola Tècnica Superior d'Enginyers
de Camins, Canals i Ports de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

PROJECTE O TESISINA D'ESPECIALITAT

Títol

Análisis del daño en problemas de impacto

Autor/a

Oriol Colomé Gené

Tutor/a

José Javier Muñoz Romero, José Luís Curiel Sosa

Departament

Matemàtica Aplicada III

Intensificació

Enginyeria Computacional

Data

28 de Juny de 2010



Escola Tècnica Superior d'Enginyers
de Camins, Canals i Ports de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Enginyeria de Camins, Canals i Ports
Universitat Politècnica de Catalunya

Análisis del daño en problemas de impacto

Autor: Oriol Colomé Gené
Tutor: José Javier Muñoz Romero
Tutor externo: José Luís Curiel Sosa

Barcelona, Junio de 2010

Resumen

Análisis del daño en problemas de impacto

Autor: Oriol Colomé Gené

Tutor: José Javier Muñoz Romero

Tutor externo: José Luís Curiel Sosa

En esta tesina se estudian distintos modelos de daño para problemas de impacto así como los métodos de resolución de estos mismos.

El problema de impacto es uno de los casos que requiere un estudio minucioso para poder evaluar la máxima sollicitación en ciertas aplicaciones, sobretodo en el caso de materiales compuestos. Para analizar este tipo de problemas se usan simulaciones numéricas obtenidas mediante el método de los elementos finitos (MEF).

Para ello se requiere la definición de un modelo de daño que nos permita describir el comportamiento del material. En primer lugar, pues, se describen dos modelos de daño definidos para distintos materiales, uno para materiales isótropos y otro para materiales compuestos (ortótropos). Basándose en el modelo de daño isótropo, se define un modelo de daño simple, con el fin de observar el comportamiento de los distintos métodos de resolución propuestos con más facilidad.

Uno de los objetivos de la tesina es verificar que el método de resolución de problemas dinámicos explícito puede causar errores debido a las inestabilidades a las que está condicionado. Este es el problema que aparece en el modelo de daño ortótropo para materiales compuestos. Dado que el método explícito es condicionalmente estable, los pasos de tiempo utilizados para analizar un problema dinámico deben ser muy pequeños. Esto implica que los test de impacto que se realizan se efectúan a pequeña velocidad y conllevan un coste computacional muy elevado.

También se pretende mostrar que el método de resolución implícito es incondicionalmente estable y que, a pesar de que en principio sea más caro porque se trata de un método iterativo, puede ser más eficiente. Esto se explica porque los métodos explícitos deben usar un incremento de tiempo pequeño para evitar inestabilidades, en cambio, los métodos implícitos pueden usar un incremento de tiempo mayor dado que son incondicionalmente estables.

Para verificar estas consideraciones se implementan los dos métodos de resolución en el problema de impacto para un modelo elástico lineal y para un modelo de daño isótropo. El primer caso nos sirve de comprobación del comportamiento de los distintos métodos. Al tratarse de un caso lineal, el método explícito da la solución correcta, con incrementos de tiempo suficientemente pequeños, y el método implícito solo necesita una iteración para llegar a la solución. El segundo caso nos permite ver las diferencias entre los dos métodos para el caso de un problema no lineal. Es importante destacar que para implementar un problema no lineal en un método de resolución implícito, lo primero que se debe hacer es linearizarlo.

Estos modelos de daño descritos tienen un inconveniente, y es que se trata de modelos locales. Es decir, dada una malla, se tiene en cuenta el daño en cada elemento a partir de los desplazamientos del mismo elemento. Esto hace que los modelos propuestos tengan una dependencia de la malla muy elevada. Para reducir esta dependencia se plantea un modelo de daño no local que tenga en cuenta los desplazamientos de un conjunto de elementos que interactúan entre sí. De esta forma, cambiando el tamaño de los elementos, no cambiamos la distribución del daño en la estructura.

El modelo de daño no local se implementa para una geometría sencilla en 2D, permitiendo evaluar la dependencia de la malla considerando distintas longitudes de interacción entre elementos y distintas mallas.

Abstract

Análisis del daño en problemas de impacto

Autor: Oriol Colomé Gené

Tutor: José Javier Muñoz Romero

Tutor externo: José Luís Curiel Sosa

In this thesis we talk about different models of damage on impact problems and the resolution methods for these.

The impact problem is one of the cases to be studied to assess the maximum solicitation in certain applications, especially in the case of composite materials. To analyze such problems numerical simulations are used through the finite element method (FEM).

This requires the definition of a damage model that allows us to describe the behavior of the material. First, therefore, we describe two damage models defined for different materials, one for isotropic materials and one for composites (orthotropic). Based on the isotropic damage model, we define a simple damage model, in order to observe the behavior of the proposed resolution methods easier.

One of the objectives of the thesis is to verify that the explicit solving method for dynamic problems may cause errors due to instabilities to which is conditioned. This is the problem that appears in the orthotropic damage model for composites. Since the explicit method is conditionally stable, time steps used to analyze a dynamic problem must be very small. This implies that the impact tests are performed with a low speed and very high computational cost.

It is also intended to show that the implicit solving method is unconditionally stable and, although initially more expensive because it is an iterative method, may be more efficient. This is because explicit methods must use a small time step to avoid instabilities, in contrast, implicit methods can use a larger time step since they are unconditionally stable.

To verify these considerations the two methods are implemented for solving the impact problem on a linear elastic model and for an isotropic damage model. The first case allows to check the behavior of the methods. Being a linear case, the explicit method gives the correct solution, with sufficiently small time steps, and the implicit method only needs one iteration to reach the solution. The second case allows us to see the differences between the two methods for a nonlinear problem. Importantly, to implement a nonlinear problem in an implicit solution method, the first thing to do is to linearize the problem.

Another problem with proposed damage models is that they are local models. I.e, given a mesh, the damage for each element is calculated taking into account the displacements of the same element. This makes that the proposed models have a very strong dependency on the mesh. To reduce this dependency we propose a non-local

damage model that takes into account the displacements of a set of elements which interact with each other. Thus, changing the size of the elements do not change the distribution of the damage in the structure.

The nonlocal damage model is implemented for a simple geometry in 2D, evaluating the dependence of the mesh considering different lengths of interaction between elements and different meshes.

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer el apoyo que me han brindado los tutores que he tenido en esta tesina. A José Muñoz por su paciencia con mis continuas dudas, su gran ayuda y por su gran predisposición. A José Luís Curiel por haberme iniciado en este mundo tan interesante, por la ayuda en las siempre difíciles primeras etapas y por su apoyo a pesar de la distancia.

También quiero agradecer a los miembros del grupo de investigación, José Luís, José, Sujith y Dani por sus aportaciones en las reuniones periódicas.

Quiero agradecer de una forma especial a mis padres Josep y Mercè, mi hermano Arnau, a Raquel y a toda la familia su apoyo incondicional, su paciencia y su ayuda en los momentos críticos.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1. Motivación | 2 |
| 2. Objetivos | 3 |
| 3. Metodología seguida | 3 |
| 4. Formulación del problema | 4 |
| 4.1. Introducción al método de los elementos finitos | 5 |
| 4.1.1. Definición de los campos a analizar | 5 |
| 4.1.2. Forma débil del problema | 6 |
| 4.2. Elasticidad lineal | 7 |
| 4.2.1. Ecuación constitutiva elástica lineal | 7 |
| 4.2.2. Ecuación de equilibrio | 7 |
| 2. MODELOS DE DAÑO | 9 |
| 1. Modelos de daño continuo basados en deformaciones. Formulación | 10 |
| 1.1. Conceptos básicos | 10 |
| 1.2. Modelo de daño isotrópico basado en deformaciones | 11 |
| 2. Modelo de daño direccional para composites | 14 |
| 2.1. Conceptos básicos | 15 |
| 2.2. Modelo de daño anisótropo | 15 |
| 3. Modelo de daño isotrópico | 19 |
| 3.1. Formulación del modelo de daño isotrópico | 20 |
| 3.2. Concepto de linearización de un problema no lineal | 21 |
| 3.3. Ecuación de equilibrio. Matriz de rigidez tangente | 21 |
| 4. Modelo de daño No-local | 24 |
| 4.1. Formulación integral | 25 |
| 3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA | 27 |
| 1. Método explícito | 28 |
| 2. Método implícito | 28 |
| 2.1. Discretización temporal | 29 |
| 2.2. Método de Euler hacia atrás | 29 |
| 2.2.1. Forma general | 29 |
| 2.2.2. Caso elástico lineal | 29 |
| 2.2.3. Caso de daño isotrópico | 30 |
| 2.3. Método de Crank-Nicolson | 30 |
| 2.3.1. Forma general | 30 |
| 2.3.2. Caso elástico lineal | 32 |
| 2.3.3. Caso de daño isotrópico | 32 |
| 2.4. Método de Newmark | 32 |
| 2.4.1. Forma general | 32 |
| 2.4.2. Caso elástico lineal | 33 |
| 2.4.3. Caso de daño isotrópico | 34 |
| 2.4.4. Propiedades. Conservación de la energía | 34 |
| 3. Implementación de los métodos de resolución | 37 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 3.1. | Rutina de partida | 37 |
| 3.1.1. | Descripción de las subrutinas | 38 |
| 3.2. | Algoritmos de los métodos utilizados | 45 |
| 4. | RESULTADOS | 49 |
| 1. | Problema analizado | 50 |
| 1.1. | Caso elemental 3D | 50 |
| 1.1.1. | Geometría del elemento | 50 |
| 1.1.2. | Condiciones de contorno y carga aplicada | 50 |
| 1.2. | Caso multielemental 2D | 50 |
| 1.2.1. | Definición de la geometría y condiciones de contorno | 50 |
| 2. | Caso elástico lineal | 51 |
| 2.1. | Test de fuerza incremental | 51 |
| 2.1.1. | Evolución de la deformación con el tiempo | 52 |
| 2.1.2. | Tensión-Deformación | 52 |
| 2.2. | Test de impacto | 53 |
| 3. | Caso de daño local isótropo | 57 |
| 3.1. | Test de fuerza incremental | 57 |
| 3.1.1. | Tensión-Deformación | 58 |
| 3.1.2. | Evolución de la variable de daño | 58 |
| 3.1.3. | Evolución del vector \mathbf{G} | 58 |
| 3.2. | Test de impacto | 60 |
| 3.2.1. | Fuerza distinta para cada caso de carga | 61 |
| 3.2.2. | Fuerza constante para todos los casos de carga | 67 |
| 3.2.3. | Análisis de convergencia | 70 |
| 3.2.4. | Conclusiones del test de impacto para el modelo de daño isótropo | 72 |
| 3.3. | Conservación de la energía | 72 |
| 4. | Caso de daño no local isótropo | 76 |
| 4.1. | Cálculo del daño en los nodos | 76 |
| 4.2. | Mallas utilizadas | 77 |
| 4.3. | Análisis de los resultados | 77 |
| 4.4. | Conclusiones de los resultados del caso multielemental | 83 |
| 5. | CONCLUSIONES | 85 |
| 1. | Conclusiones | 86 |
| 2. | Trabajos futuros | 86 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 1.1. Distintas estructuras y aparatos que utilizan los materiales compuestos como material principal | 2 |
| 3.1. Diagrama de las subrutinas que intervienen | 37 |
| 3.2. Elemento hexaédrico de 8 nodos con las condiciones de contorno y cargas aplicadas | 38 |
| 4.1. Geometría del elemento | 50 |
| 4.2. Condiciones de contorno y de carga consideradas para el análisis del elemento . . . | 50 |
| 4.3. Diagrama de las subrutinas que intervienen | 51 |
| 4.4. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo para los distintos métodos . . | 52 |
| 4.5. Gráfico tensión - deformación para el caso elástico lineal | 53 |
| 4.6. Fuerza externa aplicada al elemento en función del tiempo en el caso de impacto . | 54 |
| 4.7. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso elástico lineal 1 . . | 54 |
| 4.8. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso elástico lineal 2 . . | 55 |
| 4.9. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso elástico lineal 3 . . | 56 |
| 4.10. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso elástico lineal 4 . . | 56 |
| 4.11. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso elástico lineal 5 . . | 57 |
| 4.12. Gráfico tensión - deformación para el caso de danyo isótropo | 58 |
| 4.13. Evolución de la variable de daño d | 59 |
| 4.14. Evolución de la norma del vector \mathbf{G} inicial | 59 |
| 4.15. Evolución de la norma de \mathbf{G} para los pasos de tiempo determinados en el método de Euler hacia atrás y Newmark, respectivamente. Test incremental. | 60 |
| 4.16. Fuerza externa aplicada al elemento en función del tiempo en el caso de impacto . | 61 |
| 4.17. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 1 | 62 |
| 4.18. Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 1 | 62 |
| 4.19. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 2 | 62 |
| 4.20. Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 2 | 63 |
| 4.21. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 3 | 64 |
| 4.22. Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 3 | 64 |
| 4.23. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 4 | 65 |
| 4.24. Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 4 | 65 |
| 4.25. Número de iteraciones en cada paso de tiempo respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 4 | 66 |
| 4.26. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 5 . | 66 |
| 4.27. Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 5 | 66 |
| 4.28. Fuerza externa aplicada al elemento en función del tiempo en el caso de impacto con fuerza constante | 67 |
| 4.29. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo para el método de Euler hacia atrás | 68 |
| 4.30. Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo para el método de Euler hacia atrás | 69 |
| 4.31. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo para el método de Newmark . | 69 |
| 4.32. Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo para el método de Newmark | 69 |
| 4.33. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo para el método explícito . . . | 70 |

| | |
|--|----|
| 4.34. Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo para el método explícito . . | 70 |
| 4.35. Evolución de la norma de \mathbf{G} para los pasos de tiempo determinados en el método de Euler hacia atrás y Newmark, respectivamente | 71 |
| 4.36. Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo para un incremento de tiempo igual al crítico | 72 |
| 4.37. Evolución de la energía, variable de daño y fuerza aplicada para el método de Newmark | 73 |
| 4.38. Evolución de la energía, variable de daño y fuerza aplicada para el método de Euler hacia atrás | 74 |
| 4.39. Evolución de la energía, variable de daño y fuerza aplicada para el método explícito | 75 |
| 4.40. Mallas de 2, 3, 4 y 6 elementos respectivamente | 77 |
| 4.41. Distribución de la variable de daño d para $l_e = 0$ (caso1) | 79 |
| 4.42. Distribución de la variable de daño d en las distintas mallas para los tiempos $10\Delta t$ y $20\Delta t$ con $l_e = 0$ (caso1) | 80 |
| 4.43. Distribución de la variable de daño d para $l_e = 0,8m$ (caso2) | 81 |
| 4.44. Distribución de la variable de daño d en las distintas mallas para los tiempos $10\Delta t$ y $20\Delta t$ con $l_e = 0,8m$ (caso2) | 82 |
| 4.45. Distribución de la variable de daño d para $l_e = 2m$ (caso3) | 83 |
| 4.46. Distribución de la variable de daño d en las distintas mallas para los tiempos $10\Delta t$ y $20\Delta t$ con $l_e = 2m$ (caso3) | 84 |

Índice de cuadros

| | |
|--|----|
| 3.1. Algoritmo del método explícito para el caso de daño isotrópico | 45 |
| 3.2. Algoritmo del método de Euler hacia atrás para el caso de daño isotrópico | 46 |
| 3.3. Algoritmo del método de Newmark para el caso de daño isotrópico | 46 |
| 3.4. Algoritmo del método de Crank-Nicolson para el caso elástico lineal | 47 |
| 4.1. Análisis de convergencia para el test incremental en el caso de daño isotrópico | 60 |
| 4.2. Análisis de convergencia para el test de impacto en el caso de daño isotrópico | 71 |

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1. Motivación

La utilización de materiales compuestos ha ido aumentando durante los últimos años, como respuesta a la creciente demanda de estructuras cada vez más ligeras y con mayor resistencia. Especialmente en la industria aeronáutica, pero cada vez más en el campo de ingeniería civil, estos materiales sustituyen al metal, un material que históricamente ha sido utilizado en dichos campos.

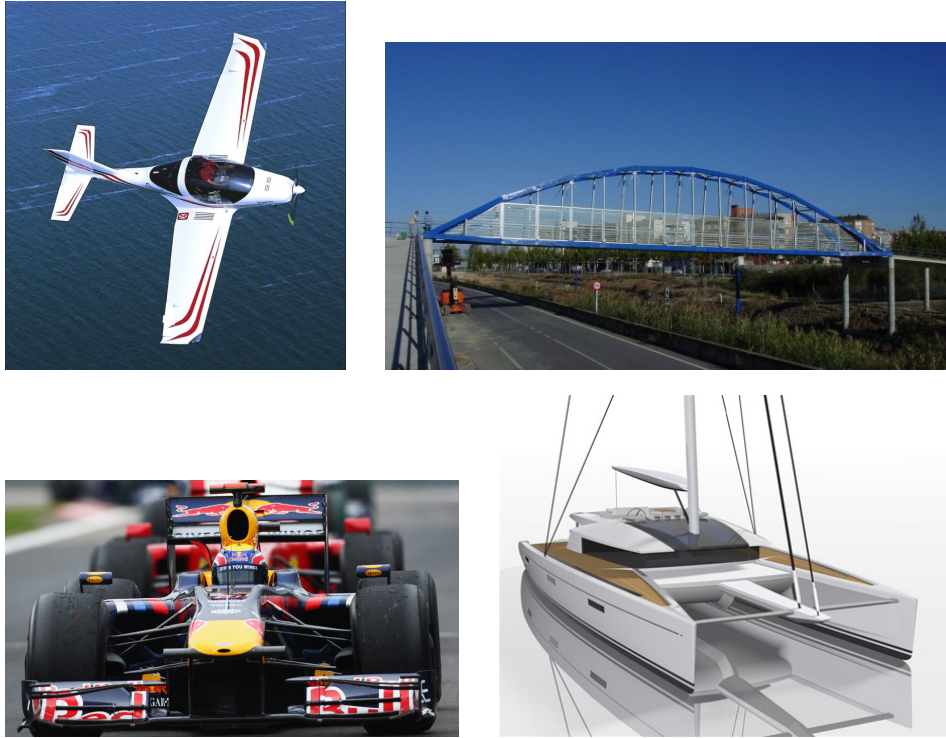


Figura 1.1: Distintas estructuras y aparatos que utilizan los materiales compuestos como material principal

En el pasado se despreciaba el uso de materiales compuestos debido a su elevado coste y al desconocimiento de su comportamiento. El avance tecnológico y la mejora en el conocimiento de estos materiales ha hecho que su uso sea cada vez mayor.

El aumento de su uso hace que sea más necesaria la utilización de herramientas como el Método de los Elementos Finitos, para el diseño y concepción de estructuras con materiales compuestos, permitiendo optimizar su rendimiento y seguridad.

En la mayoría de aplicaciones de estos materiales, el impacto es el caso que determina la mayor sollicitación. Por este motivo, a lo largo de la última década, se han ido describiendo modelos de impacto para simulaciones numéricas que permiten establecer el comportamiento de este material en el caso de impacto.

La implementación de estos modelos se hace con programas comerciales como ABAQUS [1], utilizado en el documento [2], o LS-DYNA [3], utilizado en [4] [5]. Estos programas comerciales tienen incorporadas las rutinas a seguir en el caso de impacto sobre materiales compuestos, las cuales utilizan métodos de resolución explícitos. La implementación de los modelos propuestos con las rutinas establecidas con métodos de resolución explícitos, plantea ciertas cuestiones que se deberían considerar.

Teniendo en cuenta que los métodos de resolución explícitos se ven afectados por inestabilidades que dependen directamente de la discretización temporal, ¿Debemos fiarnos de los resultados obtenidos? Si es así, ¿Qué coste computacional estamos dispuestos a aceptar para obtener unos

resultados correctos?

Para resolver estas cuestiones, en la presente tesina se plantea la utilización de métodos de resolución implícitos. Estos métodos de resolución son, en principio, más caros porque incorporan iteraciones en los pasos de tiempo, pero pueden resultar más eficaces porque no sufren inestabilidades. De esta forma se podría llegar a reducir el coste computacional necesario para obtener un resultado correcto.

Por otro lado, los modelos de impacto planteados para la simulación numérica, ya sea para materiales compuestos como en [4] [5] [6] o para otros materiales como en [7] [8], incorporan un modelo de daño local. Este tipo de modelo tiene en cuenta el daño en un único elemento del conjunto, creando una clara dependencia de la malla utilizada para el cálculo. El hecho de tener modelos de daño local hace que las mallas planteadas para la simulación deban ser muy finas. Si disminuimos el tamaño de los elementos, tenemos dos problemáticas asociadas. En primer lugar, un aumento del coste computacional debido a que las matrices serán más grandes. En segundo lugar, teniendo en cuenta que el tiempo crítico del método explícito es directamente proporcional al tamaño del elemento, tendremos un aumento adicional del coste computacional ya que el incremento de tiempo en cada paso se reducirá, aumentando a su vez el número de pasos necesarios para describir un intervalo de tiempo dado.

Para solventar los problemas asociados a la formulación local de los modelos de daño, en esta tesina también se plantea la utilización de un modelo de daño no local simple con el fin de reducir la dependencia de la malla.

2. Objetivos

Tal como se deduce de la motivación, el objetivo principal de esta tesina es la comparación de dos métodos de resolución en problemas de impacto, el explícito y el implícito. Se quiere mostrar que el método de resolución explícito puede llevar a errores porque es condicionalmente estable, mientras que el implícito da la solución correcta de forma incondicional. Si estas premisas se cumplen, podríamos llegar a la conclusión que el método implícito puede ser más barato computacionalmente que el explícito.

Por otro lado se pretende implementar un modelo de daño no local que reduzca la dependencia de la malla en la simulación de geometrías con más de un elemento. Este modelo puede hacer disminuir, a su vez, el coste computacional de los cálculos.

Para ello será necesaria la realización de diversas tareas que nos permitan alcanzar el objetivo final. Estas tareas se describen en los puntos siguientes.

- Implementación de los métodos de resolución implícitos en el programa de cálculo.
- Comprobación de resultados para el caso elástico lineal.
- Definición de un modelo de daño isótropo.
- Comparación de resultados para el modelo de daño isótropo.
- Definición de un modelo de daño no local isótropo.
- Comparación de resultados para el modelo de daño no local isótropo.

3. Metodología seguida

El contenido de la tesina se puede dividir en una parte de obtención de las ecuaciones y justificación teórica de los procedimientos y otra parte referente a los resultados. No obstante, entre la

obtención de ecuaciones y razonamiento teórico y la obtención del resultado, hay una fase tan importante como estas dos que no se ve reflejada en el documento. Esta fase es la de la implementación y programación de las rutinas en el programa de cálculo.

En primer lugar, para poder obtener una descripción teórica de los modelos de daño y de los métodos de resolución, necesitamos recoger información de las formulaciones existentes. Esta información se muestra resumida en los primeros apartados del Capítulo 2. A parte de los artículos resumidos en este apartado, también se han consultado otras fuentes de información, todas ellas referenciadas en la bibliografía.

Obtenida y analizada la información necesaria, se propone un modelo de daño isótropo (Capítulo 2). Este modelo de daño permitirá evaluar el comportamiento de los métodos de resolución para un problema no lineal. Para poder implementarlo a posteriori se lineariza el problema, obteniendo la matriz de rigidez tangente.

Al ser un modelo de daño local, los resultados de la implementación de este modelo de daño en una geometría con una malla multielemental tendrán una fuerte dependencia de la malla utilizada. Para reducir esta dependencia se plantea un modelo de daño no local simple (Capítulo 2).

Con el fin de poder implementar los modelos de daño y los métodos de resolución al programa de cálculo, se debe definir la formulación numérica que se va a seguir. Esto se hace en el Capítulo 3 de integración numérica.

Una vez definida la formulación numérica para los distintos modelos que se van a utilizar en el cálculo, deben implementarse en un programa de cálculo. En esta tesina se ha utilizado MATLAB [9]. Para la implementación de los distintos métodos de resolución y modelos de daño han sido de gran ayuda las referencias [10] [11].

Con la teoría implementada solo queda la obtención de resultados para los distintos casos planteados. Esto se hace en el Capítulo 4. Para distinguir los distintos objetivos planteados en el apartado anterior, este capítulo se divide en un primer apartado de planteamiento del problema a resolver, y otros tres con los resultados de los tres casos planteados. Así, tenemos en primer lugar una comprobación con el caso elástico lineal, seguida de la comparación de resultados para el caso de daño local isótropo y finalmente los resultados obtenidos con la implementación de un modelo de daño no local.

Para finalizar, en el Capítulo 5 se extraen las conclusiones finales de la tesina y se sugieren los trabajos futuros que se deberían realizar.

4. Formulación del problema

El problema al que nos enfrentamos en esta tesina es el del análisis del daño en casos de impacto. Este problema, de entrada, presenta ciertas complejidades. Una de ellas es el estudio de un caso dinámico. El problema de impacto resulta ser un problema donde tenemos una fuerza aplicada durante un cierto tiempo y luego dejamos la estructura libre, de forma que evoluciona de una cierta forma a lo largo del tiempo. Dado que tenemos un movimiento a lo largo del tiempo, decimos que se trata de un problema dinámico.

Por otro lado tenemos la complejidad del daño en la estructura. El daño se trata mediante los distintos modelos que se presentarán en los próximos capítulos.

Para plantear el problema de forma simple se define el caso elástico lineal, el cual no tiene en cuenta ningún tipo de daño y supone que los desplazamientos son muy pequeños.

Con el fin de introducir el problema, a continuación se describe el método de los elementos finitos de forma general. Este método nos permite solucionar problemas en los que intervienen ecuaciones con derivadas parciales, que es nuestro caso. También se introduce el planteamiento del problema elástico lineal que nos servirá de base para la obtención de la ecuación de equilibrio en los modelos de daño.

4.1. Introducción al método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos es un método numérico general usado para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales, muy utilizado en diversos problemas de ingeniería y física.

El MEF está pensado para ser usado en computadoras y permite resolver ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas. El MEF se usa en el diseño y mejora de productos y aplicaciones industriales, así como en la simulación de sistemas físicos y biológicos complejos. La variedad de problemas a los que puede aplicarse ha crecido enormemente, siendo el requisito básico que las ecuaciones constitutivas y ecuaciones de evolución temporal del problema a considerar sean conocidas de antemano.

En este apartado se va a presentar una introducción general a este método extraída del libro escrito por Eugenio Oñate “Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos” [12]. En concreto nos centraremos en el capítulo referente a la particularización para los sólidos tridimensionales.

En primer lugar se presenta un resumen de los conceptos de la teoría de la elasticidad tridimensional que se deben tener en cuenta para el análisis realizado por el método de los elementos finitos. Definidos los conceptos básicos, se detalla la obtención de la formulación matricial. Finalmente se presentan las funciones de forma utilizadas para el elemento hexaédrico de ocho nodos.

4.1.1. Definición de los campos a analizar

Campo de desplazamientos

En primer lugar se define el campo de desplazamientos. Este campo se puede definir según sus tres componentes de la forma:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Siendo $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ y $w(x, y, z)$ los desplazamientos en las tres direcciones según los ejes cartesianos x , y i z , respectivamente.

Campo de deformaciones

A partir del campo de desplazamientos, se pueden extraer las deformaciones según la teoría general de la elasticidad. Así se obtienen las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Siendo ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z las deformaciones normales y γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} las deformaciones tangenciales.

Con las expresiones anteriores se puede componer el vector de deformaciones como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \quad (1.3)$$

Campo de tensiones

Para el caso tridimensional, el vector de tensiones toma la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T \quad (1.4)$$

Con $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ las tensiones normales y $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ las tensiones tangenciales.

Relación tensión - deformación

A partir de las expresiones encontradas hasta el momento, se puede hacer uso de la ecuación constitutiva del material para encontrar la relación entre las tensiones i las deformaciones del sólido. Como en el estudio de la presente tesina no se considera la presencia de tensiones o deformaciones iniciales, ni de deformaciones debidas a fenómenos térmicos, la ecuación constitutiva del sólido quedará de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (1.5)$$

Con

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Donde los parámetros d_{ij} de la matriz \mathbf{D}^1 dependen del modelo utilizado para la descripción del comportamiento del material.

4.1.2. Forma débil del problema

Partiendo de la ecuación de equilibrio que rige el problema con sus condiciones de contorno, se aplica el procedimiento de los residuos ponderados e integración por partes. De esta forma obtenemos la forma débil del problema.

Hace falta destacar que la forma débil obtenida para el problema del sólido elástico coincide con la expresión del Principio del Trabajo virtual.

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (1.7)$$

$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{en } \Gamma_D$

Una vez obtenida la forma débil del problema se discretiza el campo de desplazamientos con las funciones de forma.

$$\mathbf{u}(x, y, z) \approx \mathbf{u}^h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{nnodes} N_i(x, y, z) \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\Psi}(x, y, z) \quad (1.8)$$

Sustituyendo las aproximaciones a la forma débil del problema y operando se obtiene un sistema lineal de ecuaciones, que toma la forma siguiente.

$$\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{f} = \mathbf{q} \quad (1.9)$$

¹En el cuerpo de la tesina el tensor constitutivo \mathbf{D} se define mediante la nomenclatura \mathbf{C} .

Donde,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad ; \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dN_i}{dz} \\ \frac{dN_i}{dy} & \frac{dN_i}{dx} & 0 \\ \frac{dN_i}{dz} & 0 & \frac{dN_i}{dx} \\ 0 & \frac{dN_i}{dz} & \frac{dN_i}{dy} \end{bmatrix}$$

$$a_i^{(e)} = u_i$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_N^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_N d\Gamma$$

$$\sum_e q_i^{(e)} = P_j$$

4.2. Elasticidad lineal

Tal como se desprende de [13] y [14], la elasticidad lineal se basa en una serie de hipótesis que nos permiten simplificar el problema al que nos enfrentamos. Estas hipótesis son:

- *Deformaciones infinitesimales.* Esto implica que los desplazamientos en el cuerpo y sus gradientes son pequeños.

- *Existencia de un estado neutro.* Se admite que existe un estado neutro en el cual las tensiones y deformaciones son nulas.

- *Proceso de deformación isotérmico y adiabático.* Un proceso isotérmico es aquel que se realiza a temperatura constante, un proceso adiabático es aquel que se produce sin generación de calor en todo punto y instante de tiempo.

4.2.1. Ecuación constitutiva elástica lineal

En la teoría d'elasticidad se supone una proporcionalidad entre el campo de tensiones y el de deformaciones. Se supone una linealidad entre componentes del los dos tensores, nombrada Ley de Hooke generalizada.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) \quad (1.10)$$

Donde \mathbf{C} es el tensor de constantes elásticas del problema.

4.2.2. Ecuación de equilibrio

Definida la relación entre tensiones y deformaciones para el caso lineal se plantea la obtención de la ecuación de equilibrio que será utilizada para la resolución del problema.

Si nos fijamos en la energía interna para el caso lineal, introduciendo la discretización propia del método de los elementos finitos, se puede definir como:

$$U = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega \quad (1.11)$$

Como nos interesa la forma débil del problema, encontramos la energía equivalente a un trabajo virtual de la siguiente forma.

$$\delta U := \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} U(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) d\Omega \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\delta \mathbf{u} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) + (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} \delta \mathbf{u}] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \mathbf{K} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Siendo

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} d\Omega \quad (1.14)$$

Entonces se puede establecer el equilibrio entre los trabajos virtuales que actúan sobre el cuerpo de la forma que se muestra a continuación.

$$\delta W_{din} + \delta W_e = \delta F_{ext} \quad (1.15)$$

Donde,

$$\delta W_{din} = \mathbf{f}_{din} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (1.16)$$

$$\delta W_e = \delta U = \mathbf{f}_{int} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (1.17)$$

$$\delta F_{ext} = \mathbf{f}_{ext} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (1.18)$$

Si operamos, se establece la ecuación de equilibrio definitiva.

$$\mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}_{ext} \quad (1.19)$$

Con \mathbf{M} la matriz de masa del cuerpo y \mathbf{a} su aceleración.

Capítulo 2

MODELOS DE DAÑO

1. Modelos de daño continuo basados en deformaciones. Formulación

El artículo [7] redactado por J. C. Simo trata sobre modelos de daño para materiales elasto-plásticos usando variables termodinámicas irreversibles y variables de estado internas para desarrollar dos alternativas de formulación. Una de ellas está basada en la formulación sobre el espacio de deformaciones, caracterizando el daño mediante el concepto de tensión efectiva. Por el otro lado tenemos la formulación en el espacio de tensiones, caracterizando el daño a partir del concepto de deformación efectiva.

dado que el estudio de esta tesina se basa en la formulación en el espacio de deformaciones, nos centramos en las partes del artículo que a ello se refieren.

En primer lugar se definen las siguientes tres características básicas para la formulación sobre el espacio de deformaciones:

- a) Para rotura dúctil, el concepto de deformación equivalente, usualmente definido mediante el invariante J_2^1 del tensor de deformaciones, se redefine como el modelo de energía (sin daño) del tensor de deformaciones. Para rotura frágil, se considera el modelo de energía asociado con la parte positiva del tensor de deformaciones.
- b) El daño es introducido en el modelo a través del concepto de tensión efectiva y la hipótesis de equivalencia de deformaciones.
- c) La respuesta plástica del material se formula en el espacio de tensiones efectivas mediante una separación aditiva del tensor de tensiones.

1.1. Conceptos básicos

Tensión efectiva y hipótesis de deformación equivalente

Una forma para tener en cuenta el crecimiento de las micro fracturas que se producen en el material cuando se degradan sus propiedades, es introducir una variable interna de daño. Se toma un tensor \mathbf{M}_d , de cuarto orden, que caracteriza el estado de daño del material y transforma el tensor homogeneizado de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ a un tensor de tensiones efectivas $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} := \mathbf{M}_d^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.1)$$

En el caso isotrópico, el comportamiento mecánico de las micro fracturas es independiente de su orientación y sólo depende de una variable escalar d . De esta forma, se puede reducir el tensor \mathbf{M}_d a $(1-d)\mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es el tensor identidad de rango cuatro. Con esta simplificación la ecuación 2.1 queda de la siguiente forma:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t) := \frac{\boldsymbol{\sigma}(t)}{1-d(t)} \quad (2.2)$$

Donde $d(t) \in [0, d_c]$ para $t \in \mathbb{R}_+$, es el parámetro de daño, $\boldsymbol{\sigma}(t)$ es el tensor de tensiones de Cauchy, y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ es el tensor de tensiones efectivas, ambos a tiempo t . El valor $d = d_c$ define la ruptura local completa.

Por otro lado se introduce la *hipótesis de equivalencia de deformaciones* con la definición:

¹Se define el invariante del tensor de tensiones J_2 tal como se propone en [14].

$$J_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}))^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^2) \right]$$

“la deformación asociada a un estado de daño causado por una tensión aplicada es equivalente a la deformación asociada con su estado intacto causado por la tensión efectiva”.

De forma análoga, trabajando en el espacio de tensiones, se obtiene el concepto de deformación efectiva e hipótesis de equivalencia de tensiones. Pero como se ha mencionado anteriormente nos centramos en la formulación sobre el espacio de deformaciones.

1.2. Modelo de daño isótropo basado en deformaciones

Base termodinámica: separación de la tensión

Para introducir los procesos de daño y deformación plástica, se considera un potencial de energía libre de la siguiente forma:

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}^p, \mathbf{q}, d) := (1 - d)\Psi^0(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^p + \Xi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}^p) \quad (2.3)$$

En esta ecuación nos aparece el término \mathbf{q} que son las variables internas (plásticas). El término $\boldsymbol{\sigma}^p$ es el tensor de tensiones plásticas. También aparece un potencial plástico ($\Xi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}^p)$). $\Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})$ es la función de energía elástica inicial de material no dañado.

Centrándonos en la teoría de la mecánica pura, la desigualdad de Clausius-Duhem coge la forma:

$$-\dot{\Psi} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \geq 0 \quad (2.4)$$

Operando con las ecuaciones (2.3) y (2.4) y asumiendo que tanto la ruptura como la descarga plástica son procesos elásticos, se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = (1 - d) \frac{\partial \Psi^0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{\sigma}^p \quad (2.5)$$

Y las desigualdades disipativas:

$$\Psi^0(\boldsymbol{\epsilon}) \dot{d} \geq 0 \quad (2.6)$$

$$-\frac{\partial \Xi}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{\partial \Xi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^p} \right) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^p \geq 0 \quad (2.7)$$

Nota 1.2.1 El potencial Ξ está relacionado con la disipación plástica. Cabe tener en cuenta que se asume Ξ independiente de la variable de daño d . Teniendo en cuenta estas ideas, a partir de la ecuación (2.3) se deduce:

$$-Y := -\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}^p, \mathbf{q}, d)}{\partial d} = \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.8)$$

Donde vemos que la energía de deformación elástica inicial Ψ^0 se corresponde con la fuerza termodinámica $-Y$.

Caracterización del daño basada en las deformaciones. Coeficiente de daño elástico

Se caracteriza la degradación progresiva de las propiedades mecánicas debidas al daño de la estructura mediante un mecanismo isotrópico de daño. Con este fin, se usa el concepto de deformación equivalente $\bar{\tau}$. Se propone definir $\bar{\tau}$ como el modelo de energía (sin daño) del tensor de deformaciones. De esta forma, se define:

$$\bar{\tau} := \sqrt{(2\Psi^0(\epsilon))} \quad (2.9)$$

Seguidamente se caracteriza el estado de daño en el material mediante un criterio de daño $g(\bar{\tau}_t, r_t) \leq 0$, formulado en el espacio de deformaciones, con la siguiente forma:

$$g(\bar{\tau}_t, r_t) := \bar{\tau}_t - r_t \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.10)$$

Para el caso isotrópico, se define la evolución de la variable de daño d con la ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{d}_t &= \dot{\mu} H(\bar{\tau}_t, d_t) \\ \dot{r}_t &= \dot{\mu} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Donde $\dot{\mu}$ es el parámetro de consistencia de daño que define las condiciones de *carga / descarga* del daño de acuerdo con las relaciones de kuhn-Tucker:

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad (2.12)$$

$$g(\bar{\tau}_t, r_t) \leq 0 \quad (2.13)$$

$$\dot{\mu} g(\bar{\tau}_t, r_t) = 0 \quad (2.14)$$

A partir de estas condiciones se pueden sacar dos conclusiones muy claras para entender el comportamiento del modelo.

1. Si $g(\bar{\tau}_t, r_t) < 0$, el criterio de daño no se satisface y por la condición (2.14) $\dot{\mu} = 0$. Este hecho significa que por la regla de daño expuesta en (2.11), la evolución de la variable de daño es nula $\dot{d} = 0$. Entonces el daño en el material no aumenta.
2. Por otro lado, si $\dot{\mu} > 0$, cuando el daño en el material aumenta (carga), la condición (2.14) nos dice que $g(\bar{\tau}_t, r_t) = 0$, por lo tanto, que se satisface el criterio de daño. En este caso, el valor de $\dot{\mu}$ viene determinado por la condición de consistencia del daño:

$$g(\bar{\tau}_t, r_t) = \dot{g}(\bar{\tau}_t, r_t) = 0 \Rightarrow \dot{\mu} = \dot{\bar{\tau}}_t \quad (2.15)$$

Es por este motivo que r_t puede expresarse como:

$$r_t = \max \left\{ r_0, \max_{s \in (-\infty, t]} \bar{\tau}_s \right\} \quad (2.16)$$

Módulo tangente de daño elástico

A partir de las expresiones expuestas arriba, queda definido el modelo de daño en la parte de deformación elástica del material. Para terminar de caracterizar el comportamiento del material en su dominio elástico, el artículo expone la formulación para la obtención del modulo tangente en la parte elástica.

En ausencia de deformación plástica del material, $\dot{\sigma}^p \equiv 0$. A partir de la derivación respecto del tiempo en la ecuación (2.5), teniendo en cuenta la ley de daño (2.11) y la condición de consistencia del daño (2.15) se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}, d) = (1 - d) \frac{\partial^2 \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - H(\bar{\tau}, d) \dot{\bar{\tau}} \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (2.17)$$

Para simplificar la notación se define $\boldsymbol{\sigma}^0 := \frac{\partial \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}$ que se refiere a la tensión elástica inicial.

Cogiendo la derivada temporal de la ecuación (2.9) y sustituyendo en la ecuación (2.17) se da el valor del modulo tangente de daño elástico:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}, d) := \left[(1 - d) \frac{\partial^2 \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} - \frac{H}{\bar{\tau}} \boldsymbol{\sigma}^0 \otimes \boldsymbol{\sigma}^0 \right] \quad (2.18)$$

Se puede observar que $\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}, d)$ es un tensor de cuarto orden simétrico. Cabe destacar que se asume el modulo inicial (sin daño) $\mathbf{C}^0 := \frac{\partial^2 \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2}$ como constante.

Caracterización de la respuesta plástica. Módulo tangente

Teniendo en cuenta el concepto de tensión efectiva, la caracterización de la respuesta plástica se tiene que formular en el espacio de tensiones efectivas en términos de tensiones efectivas $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^p$. Así pues, en la formulación reemplazamos el tensor homogeneizado de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ por el tensor de tensiones efectivas $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, de esta forma el dominio de daño elástico se define como $f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{q}) \leq 0$.

La respuesta plástica se caracteriza en el espacio de deformaciones con las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \left(\frac{\partial \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^p, \mathbf{q} \right) \quad (2.19)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{h} \left(\frac{\partial \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^p, \mathbf{q} \right) \quad (2.20)$$

$$f \left(\frac{\partial \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^p, \mathbf{q} \right) \leq 0 \quad (2.21)$$

Donde $\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^p$ es el tensor de tensiones efectivas que se refiere a la relajación plástica. $\dot{\lambda}$ es el parámetro de consistencia plástica y \mathbf{h} se refiere a la ley de endurecimiento.

Las condiciones de carga y descarga son las siguientes:

$$f \left(\frac{\partial \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^p, \mathbf{q} \right) \leq 0 \quad (2.22)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.23)$$

$$\dot{\lambda} f \left(\frac{\partial \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^p, \mathbf{q} \right) = 0 \quad (2.24)$$

Igual que en el caso elástico podemos sacar dos conclusiones:

1. Si $f < 0$ entonces $\dot{\lambda} = 0$ y el proceso es de daño elástico.
2. Por otro lado, para carga, $\dot{\lambda} > 0$ y $f = 0$. Este es el caso de la condición de consistencia plástica, obteniendo la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^p + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2.25)$$

A partir de la ecuación (2.5) obtenemos la expresión:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial^2 \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^p = \frac{\partial^2 \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} : \left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \quad (2.26)$$

Operando con las ecuaciones (2.25) y (2.26) junto con $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ obtenemos el valor del módulo tangente elastoplástico efectivo, dado por:

$$\hat{\mathbf{C}}^{ep} = \frac{\partial^2 \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} - \frac{\left[\frac{\partial^2 \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} : \frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right] \otimes \left[\frac{\partial^2 \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} : \frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right]}{\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} : \frac{\partial^2 \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} : \frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h}} \quad (2.27)$$

Y el módulo tangente elastoplástico viene dado por:

$$\mathbf{C}^{ep} = (1 - d) \hat{\mathbf{C}}^{ep} - \frac{H}{\bar{\gamma}} [\hat{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{\sigma}^0] \quad (2.28)$$

Observamos que \mathbf{C}^{ep} es un tensor no simétrico.

2. Modelo de daño direccional para composites

El modelo de daño isótropo definido en el apartado 1.2, sobre el que se basa la posterior formulación del modelo de daño isótropo (definido en el apartado 3), no es válido para materiales que presentan una clara constitución ortótropa como es el caso de los materiales compuestos.

Como el objetivo a largo plazo del trabajo es la implementación de métodos de resolución implícitos para la simulación de este tipo de materiales, se introduce este modelo de daño para tener en mente su definición para una posterior aplicación al caso implícito. Hay que tener presente que la rutina base sobre la que se ha trabajado para la implementación del daño isótropo, era la que contenía este modelo implementado con el método de resolución explícito.

El modelo de daño anisótropo se caracteriza principalmente por tener distintas variables de daño según las direcciones y tipologías de daño producido en el material. Otra variación respecto al daño isótropo es la evolución del daño. Pues en el modelo anisótropo se define un criterio de daño para la detección del mismo y otro para su evolución.

Por otro lado, teniendo en cuenta que no está implementado para la resolución mediante métodos explícitos porque no incumbe al objetivo principal de la tesina, no se deduce la matriz de rigidez tangente.

De todas formas, en el apartado de implementación de los distintos casos se da un pequeño resumen de la implementación de este modelo para el método de resolución explícito.

Esta formulación está basada en la formulación dada por J.L. Curiel, en su artículo [6]. También se han tenido en cuenta los otros artículos, libros y referencias mencionadas en la bibliografía [7] [13] [15].

El modelo de daño que se trata en este documento, es un modelo en 3D para composites. Las particularidades de este material hacen que la formulación tenga relación con la parte anisotrópica de la formulación descrita por J.C. Simo. Por otro lado, este modelo se basa en la ley de deformaciones para obtener la caracterización del daño en la estructura.

En primer lugar se dan unos conceptos básicos que se tendrán en cuenta para realizar la formulación del modelo de daño. En estos conceptos básicos se incluye el concepto de tensión

efectiva y la hipótesis de deformación equivalente, que nos permiten obtener una descripción del comportamiento del material una vez ha empezado la rotura. A partir de estos conceptos se dan las bases termodinámicas que permiten describir el proceso de daño de la estructura. Una vez definido el comportamiento, se introduce un criterio que nos permite identificar el daño en la estructura.

2.1. Conceptos básicos

Tensión efectiva

El concepto de tensión efectiva está relacionado con la degradación del material y su consecuente pérdida de propiedades resistentes. Para tener en cuenta el crecimiento de las micro fracturas de la estructura, se introducen unas variables internas de daño. Estas variables están definidas en un tensor, llamado tensor de daño, que transforma el tensor de tensiones homogeneizado en un tensor de tensiones efectivas.

$$\hat{\sigma} := \mathbf{M}_w : \sigma \quad (2.29)$$

Para definir el tensor de daño \mathbf{M}_w ² J.L. Curiel propone utilizar unas variables internas w_{ij} , parámetros de daño, que identifican la degradación de las propiedades del material.

$$\text{diag}[\mathbf{M}_w] = \left[\frac{1}{1-w_{11}}, \frac{1}{1-w_{22}}, \frac{1}{1-w_{33}}, \frac{1}{1-w_{12}}, \frac{1}{1-w_{23}}, \frac{1}{1-w_{13}} \right] \quad (2.30)$$

Para simplificar las operaciones y aprovechando la simetría del tensor de tensiones y del tensor de deformaciones, se trabajará con el vector de deformaciones y el vector de deformaciones.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13}] \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad \epsilon_{12} \quad \epsilon_{23} \quad \epsilon_{13}] \end{aligned}$$

Utilizando esta notación, las ecuaciones definidas anteriormente se pueden simplificar de la siguiente forma:

$$\hat{\sigma}^T = [\mathbf{M}_w \cdot \boldsymbol{\sigma}]^T = \left[\frac{\sigma_{11}}{1-w_{11}}, \frac{\sigma_{22}}{1-w_{22}}, \frac{\sigma_{33}}{1-w_{33}}, \frac{\sigma_{12}}{1-w_{12}}, \frac{\sigma_{23}}{1-w_{23}}, \frac{\sigma_{13}}{1-w_{13}} \right] \quad (2.31)$$

Hipótesis de deformación equivalente

La hipótesis de deformación equivalente refleja la interpretación física de la definición de tensión efectiva expuesta en la ecuación 2.29. Esta hipótesis es la que formula J.C. Simo y que se refleja en los conceptos básicos del apartado anterior (1.1)

2.2. Modelo de daño anisótropo

Base termodinámica. Potencial de energía libre

Siguiendo las líneas expuestas por J.C. Simo, se considera un potencial de energía libre que permite describir los procesos de daño y deformación plástica en el material.

²Se puede observar que la notación que utilizamos es distinta a la notación utilizada por J.C. Simo. El tensor de daño utilizado es equivalente al inverso del descrito por J.C. Simo. $\mathbf{M}_w \rightarrow \mathbf{M}_d^{-1}$.

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}^p, \mathbf{q}, d) := (1 - d)\Psi^0(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^p + \Xi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}^p) \quad (2.32)$$

En esta ecuación nos vuelve a aparecer el término \mathbf{q} que son las variables internas (plásticas). El término $\boldsymbol{\sigma}^p$ es el tensor de tensiones plásticas. También aparece el potencial plástico ($\Xi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}^p)$). $\Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})$ es la función de energía elástica inicial de material no dañado.

En nuestro estudio se considera que no hay deformación plástica en el material sino que sólo existe un comportamiento elástico en su fase inicial, seguido de un comportamiento inelástico con la consiguiente pérdida de propiedades resistentes. Es por este motivo que no se considera la parte plástica en el potencial de energía libre. Así pues, teniendo en cuenta estas condiciones y considerando el caso anisótropo, el potencial se define con la siguiente expresión:

$$\Psi := \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.33)$$

Donde \mathbf{C} es el tensor de cuarto orden que define el módulo tangente de daño.

Se obtiene la relación entre tensión y deformación de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.34)$$

Expresión que en términos de tensión efectiva nos da la ecuación:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.35)$$

Como podemos observar, en ausencia de tensión plástica, la tensión efectiva $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ coincide con la tensión elástica inicial $\boldsymbol{\sigma}^0$. De esta relación obtenemos la definición del módulo tangente inicial o tensor de rigidez inicial $\mathbf{C}^0 := \frac{\partial^2 \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2}$, supuesto como constante.

Tensor de rigidez

A partir del concepto de tensión efectiva expuesto en la ecuación 2.29 y combinando las ecuaciones 2.34 y 2.35 se puede obtener la expresión del tensor constitutivo o de rigidez \mathbf{C} .

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M}^{-1} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}^{-1} : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.36)$$

Tomando la notación vectorial del tensor de tensiones y del tensor de deformaciones la expresión anterior se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} C_{1i} &= (1 - w_{11})C_{1i}^0 \\ C_{2i} &= (1 - w_{22})C_{2i}^0 \\ C_{3i} &= (1 - w_{33})C_{3i}^0 \\ C_{4i} &= (1 - w_{12})C_{4i}^0 \\ C_{5i} &= (1 - w_{23})C_{5i}^0 \\ C_{6i} &= (1 - w_{13})C_{6i}^0 \end{aligned}$$

Con $i = 1, \dots, 6$

Se puede demostrar a partir de la expresión (2.33) que el tensor de rigidez \mathbf{C} es simétrico, es decir, $C_{ij} = C_{ji}$.

Cabe destacar que las 36 constantes que definen el tensor de rigidez están asociadas a un sistema de referencia, al igual que los tensores de deformación y tensión o sus vectores derivados. Estas 36 constantes se pueden reducir aprovechando las simetrías existentes en la constitución del material.

Teniendo en cuenta estas consideraciones el tensor de rigidez queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el caso ortótropo, la matriz \mathbf{C} toma la forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & \frac{\nu_{12}-\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_3\Delta} & \frac{\nu_{13}-\nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}-\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_3\Delta} & \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & \frac{\nu_{23}-\nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}-\nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta} & \frac{\nu_{23}-\nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{S_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{S_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{S_{31}} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Siendo $\Delta = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3}$.

Criterio de daño. Detección

Para la caracterización de la degradación progresiva de las propiedades del material se utiliza un mecanismo isotrópico de daño. Este mecanismo es el concepto de deformación equivalente $\bar{\tau}$. Siguiendo el artículo de J.C. Simo [7], vemos que $\bar{\tau}$ se define como el modelo de energía del tensor de deformaciones, cogiendo la forma:

$$\bar{\tau} := \sqrt{(2\Psi^0(\epsilon))} \quad (2.39)$$

A continuación se caracteriza el estado de daño en el material mediante un criterio de daño $g_i(\bar{\tau}_t, c_{i_t}) \leq 0$, que lo definimos como:

$$g_i(\bar{\tau}_t, c_{i_t}) := \bar{\tau}_t - c_{i_t} \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.40)$$

Usando las particularidades del material anisotrópico, el criterio toma la siguiente expresión:

$$g_i(\boldsymbol{\epsilon} \otimes \boldsymbol{\epsilon}, c_{i_t}) := H_i(\boldsymbol{\epsilon} \otimes \boldsymbol{\epsilon}) - c_{i_t} \quad (2.41)$$

Donde $\bar{\tau} := \sqrt{(\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon})}$, c_{i_t} ³ es una variable interna que se puede interpretar como el radio de la superficie de daño $g(\boldsymbol{\epsilon} \otimes \boldsymbol{\epsilon}, c_{i_t}) = 0$ en un tiempo dado y la función H_i ⁴, que denota la evolución del comportamiento del material en el espacio de deformaciones.

Vemos que las variables dependen del tiempo. Esta dependencia es debida a que su valor se va modificando a medida que se modifican las condiciones de carga.

Criterio de daño. Evolución

Una vez definido el criterio de daño falta definir la evolución del mismo. Para ello se definen dos alternativas. La primera es la que se propone en esta tesina como modelo de daño isótropo. La segunda es la propuesta por J.L. Curiel en [6] y [16].

Alternativa 1

Esta alternativa define de la misma forma la evolución que la detección del daño. Se supone que el daño empieza cuando aparecen deformaciones en el material y evoluciona a medida que va aumentando la deformación.

En este caso, la variable c_{i_t} es igual al máximo valor del daño.

Por otro lado, el daño se considera como un escalar, tal como define J.C. Simo en [7]. De esta forma, las variables de daño definidas en este apartado serian todas iguales.

$$w_{11} = w_{22} = w_{33} = w_{12} = w_{23} = w_{13} = d = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}}$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la evolución del daño (\dot{d} ⁵) para la alternativa 1 se puede definir como se muestra en la siguiente expresión.

$$\dot{d} = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \dot{\mathbf{C}}^0 : \boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.42)$$

Con $0 \leq d \leq 1$

Alternativa 2

Para el caso de daño anisótropo, tal como propone J.L. Curiel, la regla de evolución de daño viene dada por:

$$\dot{\omega} = \sum_{i=1}^{n\text{modes}} \Theta_i v_i \quad (2.43)$$

Donde i representa el modo de daño que sufre el material, variando de 1 hasta $n\text{modes}$ que es el número total de modos de fallo modelados. La función Θ_i es una función de crecimiento para cada modo de daño que viene dada por la expresión:

$$\Theta_i = \left\langle \frac{\nabla_{\boldsymbol{\epsilon}} g_i}{\|\nabla_{\boldsymbol{\epsilon}} g_i\|}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right\rangle_+ \quad (2.44)$$

³En este caso la notación utilizada en [7] describe esta variable como una variable escalar r_t .

⁴En el artículo [7] esta función se define como G .

⁵Notación: $\dot{d} = \frac{d(d)}{dt}$

$\langle \cdot \rangle_+$ es el producto escalar no negativo, se anula para valores negativos. Este producto asegura que no hay crecimiento del daño si no se alcanza o traspasa la superficie de daño. ∇_ϵ es el gradiente respecto la deformación $(\frac{\partial}{\partial \epsilon})$ y $\dot{\epsilon}$ es la derivada temporal de la deformación.

En las funciones de crecimiento aparece el criterio de daño definido anteriormente, caracterizando la función (H) como:

$$H_i(\epsilon \otimes \epsilon) := \epsilon^T \cdot \mathbf{G}_i \cdot \epsilon \quad (2.45)$$

Así pues, la superficie de daño queda de la siguiente forma:

$$g_i = \epsilon^T \cdot \mathbf{G}_i \cdot \epsilon - c_i \quad (2.46)$$

Operando con esta expresión obtenemos el gradiente de la función de crecimiento respecto la deformación.

$$\nabla_\epsilon g_i = \frac{\partial g_i}{\partial \epsilon} = \epsilon^T \cdot (\mathbf{G}_i^T + \mathbf{G}_i) \quad (2.47)$$

Para obtener el tensor de segundo orden \mathbf{G}_i se considera la ley constitutiva del material (??) junto a la equivalencia entre las formas cuadráticas en el espacio de tensiones y en el espacio de deformaciones.

$$\begin{aligned} \sigma^T \cdot \mathbf{F}_i \cdot \sigma &= \epsilon^T \cdot \mathbf{G}_i \cdot \epsilon \\ [\mathbf{C} \cdot \epsilon]^T \cdot \mathbf{F}_i \cdot [\mathbf{C} \cdot \epsilon] &= \epsilon^T \cdot \mathbf{G}_i \cdot \epsilon \\ \epsilon^T \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \epsilon &= \epsilon^T \cdot \mathbf{G}_i \cdot \epsilon \\ \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{G}_i \end{aligned} \quad (2.48)$$

\mathbf{F}_i es un tensor de segundo orden obtenido a partir de un criterio de fallo basado en el espacio de tensiones que también depende de las variables de daño w_{ij} .

Para terminar de caracterizar la evolución del daño se definen unos vectores directores unitarios v_i . La dirección de estos vectores define los componentes de la rigidez del material que se degradan según el modo de daño. Las componentes degradadas y sus pesos se escogen teniendo en cuenta los resultados experimentales realizados para cada modo de fallo.

3. Modelo de daño isótopo

Para poder hacer un análisis simple de un modelo de daño y poder implementar de forma relativamente sencilla los métodos de resolución implícitos, es necesario definir un modelo de daño isótopo. Este tipo de modelo permite tratar el daño de forma escalar, reduciendo considerablemente la dificultad de linearización del problema.

El modelo de daño isótopo propuesto para la implementación de los métodos de resolución implícitos se basa en la formulación de J.C. Simo [7] descrita en el apartado 1⁶. Pero en este caso no se considera ningún criterio de inicio, sino que, tal como se describe en la alternativa 1 del apartado 2.2, el daño aparece cuando el material sufre deformaciones.

Para recordar la formulación descrita en el apartado 1, a continuación se presenta un breve resumen con las ecuaciones y conceptos más importantes.

⁶Para la formulación del modelo de daño isótopo nos fijaremos únicamente en la parte elástica de lo definido en el apartado 1.2. No se considera evolución plástica porque nos basamos en un modelo de daño para materiales compuestos, los cuales tienen una rotura frágil.

3.1. Formulación del modelo de daño isótropo

En primer lugar se define el concepto de tensión efectiva como aquella tensión que viene definida por la hipótesis de equivalencia de deformaciones.

“la deformación asociada a un estado de daño causado por una tensión aplicada es equivalente a la deformación asociada con su estado intacto causado por la tensión efectiva”

Con esta definición i definiendo el tensor de daño como $\mathbf{M}_d = (1 - d)\mathbf{I}$, donde d es la variable de daño isótropo, las tensiones efectivas se escriben:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} := \mathbf{M}_d^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.49)$$

Introduciendo este concepto en las bases termodinámicas del problema se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi(d, \boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = (1 - d) \frac{\partial \Psi^0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.50)$$

Donde Ψ es el potencial de energía y Ψ^0 es el potencial de energía elástica inicial.

Para caracterizar la degradación progresiva de las propiedades del material con la evolución del daño, se define el concepto de tensión equivalente ($\bar{\tau}$).

$$\bar{\tau} := \sqrt{(2\Psi^0(\boldsymbol{\epsilon}))} = \sqrt{(\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon})} \quad (2.51)$$

Con el concepto de deformación equivalente podemos caracterizar la evolución del daño con un criterio de daño definido como:

$$g(\bar{\tau}_t, r_t) := \bar{\tau}_t - r_t \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.52)$$

Para el caso isótropo, se define la evolución de la variable de daño d con la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{d}_t &= \dot{\mu} H(\bar{\tau}_t, d_t) \\ \dot{r} &= \dot{\mu} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Donde $\dot{\mu}$ es el parámetro de consistencia de daño que define las condiciones de carga / descarga del daño de acuerdo con las relaciones de kuhn-Tucker

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad (2.54)$$

$$g(\bar{\tau}_t, r_t) \leq 0 \quad (2.55)$$

$$\dot{\mu} g(\bar{\tau}_t, r_t) = 0 \quad (2.56)$$

A partir de estas condiciones sacan dos condiciones que nos permiten entender el comportamiento del modelo.

1. Si $g(\bar{\tau}_t, r_t) < 0$, el criterio de daño no se satisface y por la condición (2.56) $\dot{\mu} = 0$. Este echo significa que por la regla de daño expuesta en (2.53) la evolución de la variable de daño es nula $\dot{d} = 0$. Entonces el daño en el material no aumenta.
2. Por otro lado, si $\dot{\mu} > 0$, cuando el daño en el material aumenta (carga), la condición (2.56) nos dice que $g(\bar{\tau}_t, r_t) = 0$, por lo tanto, que se satisface el criterio de daño. En este caso, el valor de $\dot{\mu}$ viene determinado por la condición de consistencia del daño:

3.2. Concepto de linearización de un problema no lineal

Seguindo el apartado que a ello se refiere en [13], en la teoría de mecánica de medios continuos, el concepto de linearización es esencial en la obtención de aproximaciones lineales de teorías generales no lineales, como es el caso que nos ocupa. Por otro lado, en mecánica computacional, el interés en la linearización de los problemas recae sobre el hecho que las soluciones numéricas de problemas no lineales normalmente se obtienen mediante algoritmos que requieren la solución de una secuencia de problemas linearizados. Este es el caso del método de resolución implícito utilizado, Newton-Raphson.

Esta linearización se puede definir mediante el siguiente razonamiento:

Sea $\mathbf{Y} : D \subset X \rightarrow Y$ una función no lineal cualquiera. Entonces, nuestro problema no lineal consisten en encontrar $\chi \in D$ que cumpla la condición de equilibrio

$$\mathbf{Y} = 0$$

La linearización del problema en un punto arbitrario $\chi_0 \in D$ donde \mathbf{Y} es diferenciable consiste en encontrar $\mathbf{U} \in D$ tal que

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{Y}(\chi_0) + D\mathbf{Y}(\chi_0)[\mathbf{U}] = 0$$

Donde $\mathbf{L}(\mathbf{U})$ es la linearización de \mathbf{Y} en χ_0 .

3.3. Ecuación de equilibrio. Matriz de rigidez tangente

Con el fin de introducir el modelo definido en este apartado en el algoritmo de resolución del problema, se debe obtener la matriz de rigidez tangente del problema. La matriz de rigidez se obtiene a partir del concepto de linearización del problema no lineal presentado en el subapartado anterior y nos permitirá usar los métodos implícitos en el caso de daño isótropo.

Para la obtención de esta matriz se parte de la base termodinámica del problema, con la definición de la energía interna del material, la energía debida a las fuerzas externas y la debida a las fuerzas dinámicas.

Así, para el caso no lineal la energía interna del cuerpo (U) se puede definir según la siguiente expresión.

$$U = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}_d : \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega \quad (2.57)$$

Tal como se desprende de la formulación de J.C. Simo resumida anteriormente, utilizando el concepto de tensión y deformación efectiva, el tensor constitutivo del material dañado (\mathbf{C}_d) se puede escribir como:

$$\mathbf{C}_d = (1 - d) \mathbf{C}^0 \quad (2.58)$$

Siendo \mathbf{C}^0 el tensor constitutivo para el caso lineal elástico. Hay que tener en cuenta que \mathbf{C}^0 es constante para cualquier instante de tiempo y que \mathbf{C}_d dependerá de la evolución del daño. Para simplificar el problema se define la variable de evolución de daño igual a la deformación equivalente ($d = \bar{\tau}_t$ ⁷).

⁷Con esta simplificación, en el criterio de evolución del daño (g), se toma:

$$r_t = \max\{d(t)\}$$

Con $d(t) \in [0, 1]$. De esta forma hay evolución del daño siempre que la deformación aumente.

$$d = \bar{\tau}_t = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.59)$$

Des este modo, el daño empieza cuando hay deformación en el material.

Este modelo de daño no es el que se corresponde al planteado por J.C. Simo, pero nos permite implementar el método implícito de forma sencilla para un caso no lineal y poder, posteriormente, adaptar-lo al caso de modelo de daño anisótropo planteado inicialmente.

Como para el método de los elementos finitos se trabaja con la forma débil del problema o, lo que es lo mismo, con el principio de los trabajos virtuales, debemos obtener la expresión de la energía equivalente a un trabajo virtual. De esta forma, partiendo de la ecuación de la energía para el caso no lineal, se opera como sigue.

$$\delta U := \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} U(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) d\Omega \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} [\delta \mathbf{u} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) + (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} \delta \mathbf{u}] d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{\epsilon} : \left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{C}_d (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0} : \boldsymbol{\epsilon} \right] d\Omega \right] \quad (2.61) \end{aligned}$$

En caso de tener daño, como el que nos ocupa en este apartado, la variación de la energía interna del material se descompone en dos partes. Una parte que se debe a la variación de energía elástica del elemento y otra debida a la variación del daño en el elemento. La primera es la misma que la que tenemos para el caso lineal elástica y la segunda se puede asociar a la energía de disipación por efecto del aumento de daño en el elemento.

$$\delta U = \delta W_e + \delta W_d \quad (2.62)$$

Si nos centramos en el primer sumando de la ecuación (2.61), utilizando la propiedad de simetría del tensor \mathbf{C}_d , se puede simplificar, quedando de la forma:

$$\left[\int_{\Omega} [\delta \mathbf{u} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) + (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} \delta \mathbf{u}] d\Omega \right]_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} 2 \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} \mathbf{u} \delta \mathbf{u} d\Omega \quad (2.63)$$

Para encontrar la expresión del segundo sumando, en primer lugar se obtiene el resultado intermedio referente a la derivada $\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{C}_d (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0}$.

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{C}_d (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (1 - d(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}))) \mathbf{C}^0 \right|_{\varepsilon=0} = - \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} d(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})) \mathbf{C}^0 \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} d(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})) \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sqrt{(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})} \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}}} 2 \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \delta \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \delta \mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}}} \quad (2.65) \end{aligned}$$

Introduciendo todos los resultados intermedios obtenidos hasta el momento en la ecuación (2.61), la ecuación de la energía queda como se expresa a continuación.

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon} : \left(-\frac{\mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}}} \right) \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega \cdot \delta \mathbf{u} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega \cdot \delta \mathbf{u} = \\
&= \mathbf{K}_d \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_{int} \cdot \delta \mathbf{u} - \mathbf{f}_{dis} \cdot \delta \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Siendo \mathbf{f}_{int} las fuerzas internas del elemento y \mathbf{f}_{dis} las fuerzas correspondientes a la disipación de energía por efecto del daño. Con:

$$\mathbf{K}_d = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} d\Omega \tag{2.67}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} d\Omega \tag{2.68}$$

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{K}_d \mathbf{u} \quad ; \quad \mathbf{f}_{dis} = \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u} \tag{2.69}$$

Con estos resultados podemos establecer la ecuación de equilibrio como se muestra. Para este caso, se tiene en cuenta que en la ecuación de equilibrio solo interviene la variación de energía elástica.

$$\delta W_{din} + \delta W_e = \delta F_{ext} \tag{2.70}$$

Donde:

$$\delta W_{din} = \mathbf{f}_{din} \cdot \delta \mathbf{u} \tag{2.71}$$

$$\delta W_e = \mathbf{f}_{int} \cdot \delta \mathbf{u} \tag{2.72}$$

$$\delta F_{ext} = \mathbf{f}_{ext} \cdot \delta \mathbf{u} \tag{2.73}$$

Operando con las ecuaciones anteriores se obtiene una nueva ecuación de equilibrio, la cual utilizaremos para la resolución del problema. En este caso tenemos en cuenta la expresión (2.70) y que $\mathbf{f}_{din} = \mathbf{M} \mathbf{a}$ ⁸.

$$\mathbf{f}_{din} + \mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_{ext} \tag{2.74}$$

O lo que es lo mismo:

$$\mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{K}_d \mathbf{u} = \mathbf{f}_{ext} \tag{2.75}$$

Una vez definidas todas las componentes que intervienen en la ecuación de equilibrio para el caso del modelo de daño isótropico, se obtiene la matriz de rigidez tangente correspondiente al vector

⁸ \mathbf{M} es la matriz de masa del cuerpo. Se calcula a partir de las funciones de forma como: $M_{ij} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_j d\Omega$

de fuerzas internas. Ésta, pues, será el resultado de la derivación del vector de fuerzas internas del elemento respecto de los desplazamientos.

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} [\mathbf{K}_d \mathbf{u}] = \mathbf{K}_d + \frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} = \mathbf{K}_d + \bar{\mathbf{K}}_d \quad (2.76)$$

Donde la segunda componente se resuelve como se muestra a continuación.

$$\bar{\mathbf{K}}_d = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{K}_d \mathbf{u}) \Big|_{\mathbf{u}=cte} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_d \mathbf{B} d\Omega \right) \Big|_{\mathbf{u}=cte} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{C}_d) \Big|_{\mathbf{u}=cte} \right] \mathbf{B} d\Omega \quad (2.77)$$

Introduciendo la expresión (2.58) en la anterior y siguiendo los mismos pasos que los que se han seguido para la obtención de \mathbf{K}_d , se tiene que:

$$\bar{\mathbf{K}}_d = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \frac{\partial(1-d)}{\partial \mathbf{u}} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u} \otimes \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega \quad (2.78)$$

Resumiendo, la matriz de rigidez tangente del problema se escribe como:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_d + \bar{\mathbf{K}}_d = \mathbf{K} + \bar{\mathbf{K}} \quad (2.79)$$

Donde

$$\mathbf{K} := \mathbf{K}_d = \int_{\Omega} (1-d) \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} d\Omega \quad (2.80)$$

y

$$\bar{\mathbf{K}} := \bar{\mathbf{K}}_d = - \int_{\Omega} \frac{1}{d} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u} \otimes \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega \quad (2.81)$$

Siendo $d = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}}$.

4. Modelo de daño No-local

La evolución del daño en un material se debe a la acumulación microscópica y fusión de huecos, pequeñas roturas o pequeñas dislocaciones. Estos fenómenos se pueden producir por un exceso de tensión o de deformación en el material. La evolución progresiva del daño en las fracturas localizadas siempre va acompañado de un reblandecimiento del material. La descripción local de la evolución del daño normalmente no permite establecer una descripción aceptable de este fenómeno. En consecuencia, los modelos de daño local para el método de los elementos finitos sufren una dependencia de la malla.

Para resolver este problema se han planteado diversas soluciones que establecen una objetividad en el modelado numérico y unos resultados físicamente creíbles. Tal como se desprende de [17] hay dos formulaciones principales que tratan de resolver este inconveniente. En primer lugar hay la formulación de daño no local (integral). Esta formulación tiene en cuenta el efecto no local mediante el acoplamiento directo de la variable de daño referente a la deformación no local equivalente, que es una media ponderada de la deformación local equivalente. La otra formulación incluye el parámetro de gradiente del daño para predecir el reblandecimiento del material. Esta última formulación puede ser considerada como la formulación diferencial de la aproximación integral del

daño no local. Aunque existen diferencias significativas en la derivación del modelo matemático así como en la implementación numérica asociada.

En el presente trabajo se va a tratar el daño no local mediante la formulación integral. Esta formulación es más sencilla de implementar porque no se debe incluir otra ecuación en el problema inicial, permitiendo trabajar directamente con las deformaciones obtenidas en cada iteración.

4.1. Formulación integral

Partiendo de la definición de daño local utilizado para el caso de un elemento $d = \sqrt{\epsilon : \mathbf{C}^0 : \epsilon}$, se define el daño global en cada punto de evaluación mediante la formulación integral como la integral del daño local en un dominio predefinido, ponderada con el area del dominio

$$d_g = \frac{\int_{\Omega_e} \sqrt{\epsilon : \mathbf{C}^0 : \epsilon} d\Omega}{\int_{\Omega_e} d\Omega} \quad (2.82)$$

Donde el dominio Ω_e está predefinido según la afectación por el reblandecimiento de cada material.

A la práctica, para implementar el daño global, se sumará en cada punto de Gauss, el daño de los puntos de Gauss que estén dentro del dominio de influencia (Ω_e)

$$d_g = \frac{\sum_{i \in \Omega_e} \sqrt{\epsilon_i : \mathbf{C}^0 : \epsilon_i} \cdot wp_\xi \cdot wp_\eta |J|}{\sum_{i \in \Omega_e} wp_\xi \cdot wp_\eta |J|} \quad (2.83)$$

El dominio Ω_e se define como el espacio que encierra una circunferencia de radio $l_e = \alpha L_x$. Con L_x la longitud horizontal de la placa y α una constante que dependerá del material. wp_j son los pesos del punto de Gauss y $|J|$ el determinante del jacobiano.

Una vez definido el daño global se introduce a la matriz de rigidez tangente obtenida para el caso de un elemento y se resuelve el problema mediante los distintos métodos planteados.

$$\mathbf{K}_t = \int_{\Omega} (1 - d_g) \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{d_g} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} u \otimes \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} u d\Omega \quad (2.84)$$

En un principio se considera que la matriz de rigidez tangente no varía con la nueva definición de daño global. Este planteamiento no es correcto, pues la linealización de las fuerzas internas no es completa⁹, pero por lo menos nos permite obtener una variable de daño (d_g) independiente de la malla utilizada.

⁹La convergencia a la solución dejará de ser cuadrática y será menor cuanto mayor sea la longitud l_e .

Capítulo 3

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

1. Método explícito

Siguiendo la formulación expuesta en [18], el método explícito se basa en definir las derivadas que aparecen con las ecuaciones de equilibrio como incrementos finitos $\Delta \mathbf{f}_{ext}$, $\Delta \mathbf{u}$ y Δt .

A partir de estas definiciones, la ley de carga se describe mediante incrementos sucesivos, igual que la ley de desplazamientos.

Considerando que el equilibrio se define con la siguiente expresión,

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \quad (3.1)$$

con \mathbf{M} la matriz de masa, \mathbf{a} la aceleración, \mathbf{f}_{ext} las fuerzas externas aplicadas y \mathbf{f}_{int} las fuerzas internas del dominio, podemos discretizarla en el espacio temporal; obteniendo, en el instante de tiempo n , la ecuación que sigue.

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_n = \mathbf{f}_{ext,n} - \mathbf{f}_{int,n} \quad (3.2)$$

Las fuerzas internas $\mathbf{f}_{int,n}$ se obtienen a partir de la matriz de rigidez y los desplazamientos en el instante de tiempo n .

$$\mathbf{f}_{int,n} = \mathbf{K}_n \cdot \mathbf{u}_n \quad (3.3)$$

Con estas fuerzas internas se calcula el vector de fuerzas residuales \mathbf{R} que será usado para calcular el desplazamiento para el paso de tiempo en el que estamos trabajando.

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{f}_{ext,n} - \mathbf{f}_{int,n} \quad (3.4)$$

Llegado este punto, solo resta actualizar los desplazamientos. Para ello, en primer lugar se encuentra el valor de la aceleración en el instante n . A partir de la aceleración podemos saber las velocidades en el instante de tiempo $n + \frac{1}{2}$ y los desplazamientos en el instante $n + 1$ mediante las aproximaciones siguientes.

$$\begin{cases} \mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \\ \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} \end{cases} \quad (3.5)$$

Operando se puede extraer que:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}_{n-\frac{1}{2}} + \mathbf{a}_n t s \\ \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} t s \end{cases} \quad (3.6)$$

2. Método implícito

La principal diferencia entre el método explícito y el implícito, es que en el implícito se reconoce que la solución obtenida para cada paso de tiempo utilizando el método explícito no es la real. A partir de esta hipótesis se realizan pasos intermedios para poder encontrar la solución exacta en cada paso de tiempo. Estos pasos intermedios consisten simplemente en añadir un esquema iterativo en cada paso de tiempo, de tal forma que se encuentre una solución que satisfazca la condición de convergencia impuesta.

Si partimos de una condición de equilibrio definida por la función \mathbf{G} que depende de los desplazamientos en los nodos \mathbf{u} y de las fuerzas externas \mathbf{f}_{ext} , podemos establecer una ecuación de equilibrio que toma la siguiente forma:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_{ext}) = g(\mathbf{u}) - f(\mathbf{f}_{ext}) = 0 \quad (3.7)$$

Para encontrar las funciones $g(\mathbf{u})$ y $f(\mathbf{f}_{ext})$ se utilizan las ecuaciones de equilibrio de la dinámica. Así, la función de equilibrio se escribe como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_{ext}) = \mathbf{f}_{din} - \hat{\mathbf{R}} = 0 \quad (3.8)$$

Dónde $\mathbf{f}_{din} = \mathbf{M}\mathbf{a}$ es la fuerza dinámica del elemento. \mathbf{M} es la matriz de masa del elemento, \mathbf{a} representa la aceleración del elemento y $\hat{\mathbf{R}}$ la resultante de las fuerzas aplicadas en los nodos. Esta resultante vendrá definida por la diferencia entre las fuerzas externas aplicadas a los nodos y las internas debidas a los desplazamientos.

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \quad (3.9)$$

2.1. Discretización temporal

Con la ecuación de equilibrio, se procede a discretizar el espacio temporal del problema. De esta forma se evalúan los distintos campos en los instantes de tiempo $n + \theta$.

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+\theta}, \mathbf{f}_{ext,n+\theta}) = \mathbf{f}_{din,n+\theta} + \mathbf{f}_{int,n+\theta} - \mathbf{f}_{ext,n+\theta} = 0 \quad (3.10)$$

Los distintos esquemas implícitos vendrán dados por los valores de θ que se definen a continuación.

$$\begin{aligned} \theta = 1 & \quad \text{Euler hacia atrás (orden 1)} \\ \theta = \frac{1}{2} & \quad \text{Crank-Nicolson (orden 2)} \end{aligned}$$

2.2. Método de Euler hacia atrás

2.2.1. Forma general

Aplicando el método de discretización del campo de desplazamientos, Backward Euler (Euler hacia atrás), se obtiene la discretización del vector aceleración en el instante n como se muestra.

$$\mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} - \mathbf{v}_{n-\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

Dónde $\mathbf{v}_{n-\frac{1}{2}}$ es la velocidad en el instante de tiempo $n - \frac{1}{2}$, función de \mathbf{u}_n y \mathbf{u}_{n-1} conocidos. Δt es el intervalo de tiempo entre pasos.

Como estamos trabajando con un método implícito, la función de equilibrio se evalúa en el instante $n + 1$. Así, suponiendo que tenemos equilibrio en este instante, se obtiene la ecuación de equilibrio (3.12).

$$\mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{a}_n + \mathbf{f}_{int,n+1} - \mathbf{f}_{ext,n+1} = 0 \quad (3.12)$$

2.2.2. Caso elástico lineal

Si se considera que el material es elástico lineal y que no hay efecto del daño, el problema se simplifica considerablemente, pues las fuerzas internas en los nodos son función lineal de los

desplazamientos. Así, conocida la matriz de rigidez para el caso elástico lineal (\mathbf{K}), podemos escribir las fuerzas internas en el instante de tiempo $n + 1$ como.

$$\mathbf{f}_{int,n+1} = \mathbf{K}_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} \quad (3.13)$$

Si introducimos la expresión (3.13) en la ecuación de equilibrio (3.12), se obtiene una nueva expresión de la función de equilibrio para el método de Euler hacia atrás.

$$\mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{D}_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1} = 0 \quad (3.14)$$

Donde:

$$\mathbf{D}_{n+1} = \left[\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{n+1} \right] \quad (3.15)$$

$$\mathbf{R}_{n+1} = \left[\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \left(\frac{\mathbf{u}_n}{\Delta t} + \mathbf{v}_{n-\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{f}_{ext,n+1} \right] \quad (3.16)$$

2.2.3. Caso de daño isótropo

Si seguimos con la notación del caso elástico lineal, tenemos que se debe satisfacer la ecuación de equilibrio en cada incremento de tiempo, que para este caso se escribiría como:

$$\mathbf{G}_{n+1}^k = \mathbf{D}_{n+1}^k\mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{R}_{n+1} = 0 \quad (3.17)$$

con

$$\mathbf{D}_{n+1}^k = \left[\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{l,n+1}^k \right] \quad (3.18)$$

$$\mathbf{R}_{n+1} = \left[\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \left(\frac{\mathbf{u}_n}{\Delta t} + \mathbf{v}_{n-\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{f}_{ext,n+1} \right] \quad (3.19)$$

Podemos apreciar que las matrices que intervienen en el problema varían en cada iteración implícita, con lo que debemos introducir su cálculo dentro del bucle de iteraciones implícitas. Esta variación supone un aumento considerable del coste computacional del problema, pero este inconveniente se compensa con la posibilidad de hacer pasos de tiempo más grandes sin que aparezcan inestabilidades.

2.3. Método de Crank-Nicolson

2.3.1. Forma general

En este caso la función de equilibrio se puede escribir como:

$$\mathbf{G}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{M}\mathbf{a}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{f}_{int,n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{ext,n+\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.20)$$

Esta ecuación de equilibrio se puede interpretar como un sistema de ecuaciones con derivadas de primer orden. Así, tomando como variables el desplazamiento y la velocidad, la ecuación de equilibrio equivaldría al siguiente sistema.

$$\begin{cases} M\dot{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{R}} = 0 \\ \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

A partir de este sistema se definen las variables \mathbf{f} y \mathbf{b} como:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} M\mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{R}} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Tales que $\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{b}$.

Entonces, evaluando los desplazamientos en el instante de tiempo $n + \theta$, se tiene que $\dot{\mathbf{f}}_{n+\theta} = \mathbf{b}_{n+\theta}$. Si definimos:

$$\dot{\mathbf{f}}_{n+\theta} = \frac{\mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{f}_n}{\Delta t} \quad (3.23)$$

Se obtiene la expresión del desplazamiento en el instante $n + 1$ para el caso de $\theta = \frac{1}{2}$ que tendrá la forma siguiente.

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_{n+\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

Otra forma de deducir la expresión del desplazamiento en el instante $n + 1$ es discretizando la aceleración. La aceleración en el instante de tiempo $n + \frac{1}{2}$ puede estar definida por las aceleraciones en los instantes de tiempo concomitantes o por las velocidades en estos mismos instantes. De esta forma podemos definir el valor de la aceleración $\mathbf{a}_{n+\frac{1}{2}}$ con dos expresiones distintas.

$$\mathbf{a}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n}{2} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{a}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n}{\Delta t} \quad (3.26)$$

Si igualamos las expresiones anteriores y aislamos la velocidad en el instante $n + 1$, se obtiene:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n) \quad (3.27)$$

Aplicando el mismo procedimiento a la velocidad en el instante $n + \frac{1}{2}$ se obtiene el valor del desplazamiento en el instante $n + 1$ como:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n) \quad (3.28)$$

Finalmente, introduciendo la expresión (3.25) en la anterior, se obtiene el desplazamiento en función de la aceleración en el instante $n + \frac{1}{2}$.

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_{n+\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

2.3.2. Caso elástico lineal

De la misma forma que para el método de Euler hacia atrás, para el método de Crank-Nicolson se obtiene una nueva expresión de la ecuación de equilibrio. A partir de las expresiones (3.26 y 3.27), introduciéndolas a la ecuación de equilibrio (3.13), se define la ecuación de equilibrio para el método de Crank-Nicolson.

$$\mathbf{G}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{D}_{n+\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.30)$$

Donde:

$$\mathbf{D}_{n+\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{4} (\mathbf{K}_{n+1} + \mathbf{K}_n) \right] \quad (3.31)$$

$$\mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{M} \left[\frac{2}{\Delta t} \left(\frac{\mathbf{u}_n}{\Delta t} + \mathbf{v}_n \right) \right] - \frac{1}{4} (\mathbf{K}_{n+1} + \mathbf{K}_n) \mathbf{u}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{f}_{ext,n+1} + \mathbf{f}_{ext,n}) \quad (3.32)$$

Para la obtención de la matriz $\mathbf{D}_{n+\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}$ en este caso, se ha considerado que el desarrollo de las fuerzas internas y externas en el instante $n+\theta = n+\frac{1}{2}$ se define como se muestra a continuación.

$$\mathbf{f}_{int,n+\theta} = \mathbf{f}_{int,n+\theta}(\mathbf{u}_{n+\theta}) = \mathbf{K}_{n+\theta} \mathbf{u}_{n+\theta} \approx \frac{\mathbf{K}_{n+1} + \mathbf{K}_n}{2} \cdot \frac{\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n}{2} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{f}_{ext,n+\theta} \approx \frac{\mathbf{f}_{ext,n+\frac{1}{2}} + \mathbf{f}_{ext,n}}{2} \quad (3.34)$$

2.3.3. Caso de daño isótropo

Para el caso de elasticidad lineal, los resultados obtenidos para este método son los mismos que los obtenidos con el método de Newmark. Esto se debe a que la formulación del método de resolución de Crank-Nicolson es la misma que para el método de Newmark con los parámetros $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$.

Teniendo en cuenta esta consideración, para el caso de daño isótropo solo se define e implementa el método de Newmark.

2.4. Método de Newmark

2.4.1. Forma general

Newmark, a diferencia del método de Crank-Nicolson, propone que el equilibrio se obtenga en el instante de tiempo $n+1$.

$$\mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{f}_{int,n+1} - \mathbf{f}_{ext,1} = 0 \quad (3.35)$$

Pero la principal diferencia que existe respecto los dos métodos comentados anteriormente es que se propone una discretización del campo de deformaciones y de velocidades con la aparición de ciertos parámetros de ponderación de los valores de los campos en los instantes contiguos. Es decir, el campo de desplazamientos en el instante $n+1$ depende de la velocidad en el instante n y de la aceleración ponderada en el instante n y $n+1$ según se muestra en la siguiente ecuación.

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta) \mathbf{a}_n + 2\beta \mathbf{a}_{n+1}] \quad (3.36)$$

De la misma forma, la velocidad en el instante $n+1$ depende de otro parámetro.

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1}] \quad (3.37)$$

Es importante destacar que las expresiones (3.20) y (3.21) resultantes del método de Crank-Nicolson son equivalentes a las del método de Newmark, tomando $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$. Por este motivo, en la implementación del método se tomarán estos valores.

Con estos valores, la expresión de la aceleración en el instante $n + 1$ (\mathbf{a}_{n+1}) se escribe como:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \frac{\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} - \mathbf{v}_n}{\frac{\Delta t}{4}} - \mathbf{a}_n \quad (3.38)$$

2.4.2. Caso elástico lineal

Para el método de Newmark con parámetros $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$ se sigue el mismo procedimiento, obteniendo la ecuación de equilibrio siguiente.

$$\mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{D}_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1} = 0 \quad (3.39)$$

En este caso,

$$\mathbf{D}_{n+1} = \left[\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{n+1} \right] \quad (3.40)$$

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{M} \left[\frac{4}{\Delta t} \left(\frac{\mathbf{u}_n}{\Delta t} + \mathbf{v}_n \right) + \mathbf{a}_n \right] + \mathbf{f}_{ext, n+1} \quad (3.41)$$

Es importante percatarse de que el vector \mathbf{R} es distinto a $\hat{\mathbf{R}}$. Pues $\hat{\mathbf{R}}$ es el vector de fuerzas resultantes y \mathbf{R} es el vector de fuerzas residuales, el cual sólo depende de la fuerza externa en el instante $(n + 1)$ y de los desplazamientos en los instantes de tiempo previos.

Cuando tenemos definida la función de equilibrio, aplicamos la hipótesis que asume el método implícito. Suponemos que no se cumple el equilibrio para el valor del desplazamiento en el instante $(n + 1)$ ($\mathbf{G}_{(n+1)} \neq 0$) y buscamos mediante iteraciones el valor del desplazamiento en la iteración k ($\mathbf{u}_{(n+1)}^k$) tal que cumpla:

$$\mathbf{G}_{(n+1)}^k = \mathbf{D}_{(n+1)} \mathbf{u}_{(n+1)}^k - \mathbf{R}_{(n+1)} = 0 \quad (3.42)$$

En el caso del método de Crank-Nicolson la matriz $\mathbf{D}_{(n+1)}$ y el vector $\mathbf{R}_{(n+1)}$ serían la descrita con la notación $\mathbf{D}_{(n+\frac{1}{2})}$ y $\mathbf{R}_{(n+\frac{1}{2})}$.

Se puede observar que la matriz \mathbf{D} es la misma en cada iteración del mismo paso de tiempo. Esto se cumple en este caso porque se supone elasticidad lineal y se desprecia el efecto de la variación del desplazamiento en cada iteración sobre la matriz de rigidez.

Si aproximamos la función $\mathbf{G}_{(n+1)}^k$, podemos escribirla en función de las iteraciones precedentes.

$$\mathbf{G}_{(n+1)}^k = \mathbf{G}_{(n+1)}^{k-1} + \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{(n+1)}^{k-1} \delta \mathbf{u}_{(n+1)}^k \quad (3.43)$$

Donde

$$\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{(n+1)}^{k-1} = \mathbf{D}_{(n+1)} \quad (3.44)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{G}_{(n+1)}^k = \mathbf{G}_{(n+1)}^{k-1} + \mathbf{D}_{(n+1)} \delta \mathbf{u}_{(n+1)}^k \quad (3.45)$$

A partir de esta expresión, si suponemos que se llega al equilibrio en la iteración k , podemos obtener la variación del desplazamiento en cada iteración como

$$\delta \mathbf{u}_{(n+1)}^k = -(\mathbf{D}_{(n+1)})^{-1} \mathbf{G}_{(n+1)}^{k-1} \quad (3.46)$$

Así, el desplazamiento en la iteración k será:

$$\mathbf{u}_{(n+1)}^k = \mathbf{u}_{(n+1)}^{k-1} + \delta \mathbf{u}_{(n+1)}^k \quad (3.47)$$

Con este procedimiento se itera hasta que la función $\mathbf{G}_{(n+1)}^k$ cumple con la condición de equilibrio, es decir, su módulo es menor que una cierta tolerancia ($\epsilon |\mathbf{f}_{ext,n+1}|$).

$$\|\mathbf{G}_{(n+1)}^k\| < \epsilon \|\mathbf{f}_{ext,n+1}\| \quad (3.48)$$

2.4.3. Caso de daño isótropo

Siguiendo los mismos pasos que en el método Euler hacia atrás, se describe la ecuación de equilibrio del problema como:

$$\mathbf{G}_{n+1}^k = \mathbf{D}_{n+1}^k \mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{R}_{n+1} = 0 \quad (3.49)$$

En este caso,

$$\mathbf{D}_{n+1}^k = \left[\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{t,n+1}^k \right] \quad (3.50)$$

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{M} \left[\frac{4}{\Delta t} \left(\frac{\mathbf{u}_n}{\Delta t} + \mathbf{v}_n \right) + \mathbf{a}_n \right] + \mathbf{f}_{ext,n+1} \quad (3.51)$$

2.4.4. Propiedades. Conservación de la energía

Una vez obtenidos los resultados del test de impacto para los distintos métodos, se deben validar y comprobar que se ciñen a las hipótesis formuladas inicialmente. Esto lo hacemos mediante la comprobación de la conservación de la energía, siguiendo los pasos establecidos en [19].

En el planteamiento del problema se parte de la premisa de que para el caso elástico lineal, la energía se conserva y con esta hipótesis se extrae la ecuación de equilibrio que gobierna el problema. Así, si demostramos que durante la resolución del problema dinámico la energía se conserva, y los resultados así lo muestran, podemos decir que el método utilizado es correcto.

Este análisis se hace para el método implícito de Newmark. Este método es el que no presenta inestabilidades ni variaciones a lo largo del tiempo. De esta forma, si logramos verificar sus resultados y su estabilidad de forma incondicional, podemos comparar los otros métodos con el resultado correcto.

En primer lugar se define un potencial de energía (W) que tiene en cuenta la energía dinámica del elemento (W_{din}) y la energía elástica interna del elemento (W_e).

$$W = W_{din} + W_e \quad (3.52)$$

Con

$$W_{din} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \|\mathbf{v}\|^2 d\Omega$$

y

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} d\Omega$$

El principio de conservación de la energía se puede establecer con la siguiente relación.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_{din}}{dt} + \frac{dW_e}{dt} := -\left|\frac{dW_{dis}}{dt}\right| + \frac{dW_{ext}}{dt} \quad (3.53)$$

Donde W_{dis} es el trabajo realizado por las fuerzas de disipación que aparecen con el daño (\mathbf{f}_{dis}) y W_{ext} es el trabajo realizado por las fuerzas externas aplicadas (\mathbf{f}_{ext}).

Definido el potencial de energía, se discretiza en el espacio temporal y se integra en un incremento de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$, quedando de la forma:

$$\Delta W = [W]_n^{n+1} = [W_{din} + W_e]_n^{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(-|W_{dis}^{\dot{}}| + W_{ext}^{\dot{}}\right) dt \quad (3.54)$$

Si consideramos que nos encontramos en el tramo elástico del problema, es decir, que la variable de daño no crece; podemos afirmar que $[W]_n^{n+1} = 0$.

La integral del potencial en el incremento de tiempo se puede reescribir como:

$$\Delta W = W^{n+1} - W^n = (W_{din}^{n+1} + W_e^{n+1}) - (W_{din}^n + W_e^n) = (W_{din}^{n+1} - W_{din}^n) + (W_e^{n+1} - W_e^n) \quad (3.55)$$

Con

$$W_{din}^{n+1} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \|\mathbf{v}_{n+1}\|^2 d\Omega ; \quad W_e^{n+1} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} d\Omega$$

$$W_{din}^n = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \|\mathbf{v}_n\|^2 d\Omega ; \quad W_e^n = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_n : \boldsymbol{\epsilon}_n d\Omega$$

Llegados a este punto, si discretizamos el espacio y integramos numéricamente los campos podemos escribir las variables anteriores de forma matricial, quedando de la forma siguiente.

$$W_{din}^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{n+1})^T \mathbf{M} \mathbf{v}_{n+1} ; \quad W_e^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{n+1})^T \mathbf{K} \mathbf{u}_{n+1}$$

$$W_{din}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_n)^T \mathbf{M} \mathbf{v}_n ; \quad W_e^n = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_n)^T \mathbf{K} \mathbf{u}_n$$

Siendo \mathbf{M} y \mathbf{K} las matrices de masa y de rigidez respectivamente.

Aplicando la formulación matricial a las variaciones de energía interna y de energía dinámica se pueden escribir con las siguientes ecuaciones.

$$\Delta W_{din} = (W_{din}^{n+1} - W_{din}^n) = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n)^T \mathbf{M} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) \quad (3.56)$$

$$\Delta W_e = (W_e^{n+1} - W_e^n) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)^T \mathbf{K} (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n) \quad (3.57)$$

Tal como se ha mencionado, se asume que la integración temporal se hace mediante el método de Newmark con los parámetros $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$. Este método relaciona los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en los distintos pasos de tiempo como:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \\ \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \end{cases}$$

De lo que se puede deducir que:

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) = \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) \\ (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) = \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \end{cases}$$

Entonces, introduciendo las ecuaciones anteriores a las (3.56) y (3.57) se obtiene que las variaciones de energía se expresan como se muestra.

$$\Delta W_{din} = \frac{\Delta t}{4} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n)^T \mathbf{M} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \quad (3.58)$$

$$\Delta W_e = \frac{\Delta t}{4} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n)^T \mathbf{K} (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n) \quad (3.59)$$

De esta forma, la variación del potencial de energía viene dada por la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{\Delta t}{4} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n)^T [\mathbf{M} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) + \mathbf{K} (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)] = \\ &= \frac{\Delta t}{4} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n)^T [\mathbf{f}_{din,n} + \mathbf{f}_{din,n+1} + \mathbf{f}_{int,n} + \mathbf{f}_{int,n+1}] = \\ &= \frac{\Delta t}{4} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n)^T [(\mathbf{f}_{din} + \mathbf{f}_{int})_n + (\mathbf{f}_{din} + \mathbf{f}_{int})_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.60)$$

Por otro lado, tal como se define en la ecuación de equilibrio:

$$\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_{din} + \mathbf{f}_{int}$$

Introduciendo la ecuación anterior en (3.60) se obtiene la expresión final de la variación de energía.

$$\Delta W = \frac{\Delta t}{4} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n)^T [\mathbf{f}_{ext,n} + \mathbf{f}_{ext,n+1}] \quad (3.61)$$

Si particularizamos el resultado anterior para el caso elástico sin carga, es decir, no hay fuerzas exteriores aplicadas sobre el elemento ($\mathbf{f}_{ext} = 0$); la variación del potencial de energía es nula.

$$\Delta W = 0$$

3. Implementación de los métodos de resolución

Una vez justificados los métodos de resolución que se pretenden analizar, en este apartado se procede a describir la implementación de cada uno de los métodos para los distintos modelos de daño definidos en el capítulo anterior.

Al tratar con distintas aproximaciones temporales de los distintos campos, la implementación para cada modelo será distinta según el método de resolución. Así, es necesaria una descripción específica del método de resolución en el modelo de daño analizado.

En primer lugar se realizará una descripción de la rutina implementada por J. L. Curiel, sobre la cual se trabaja en la implementación del resto de casos.

3.1. Rutina de partida

Se hace un análisis de la rutina existente, describiendo las subrutinas que intervienen y refiriendo a la formulación del modelo de daño para composites. Debe destacarse que esta rutina está pensada para la implementación del caso de daño anisótropo con un método de resolución explícito.

Para realizar este análisis se presenta, en primer lugar, un diagrama que muestra la secuencia que sigue el programa para llegar a la solución.

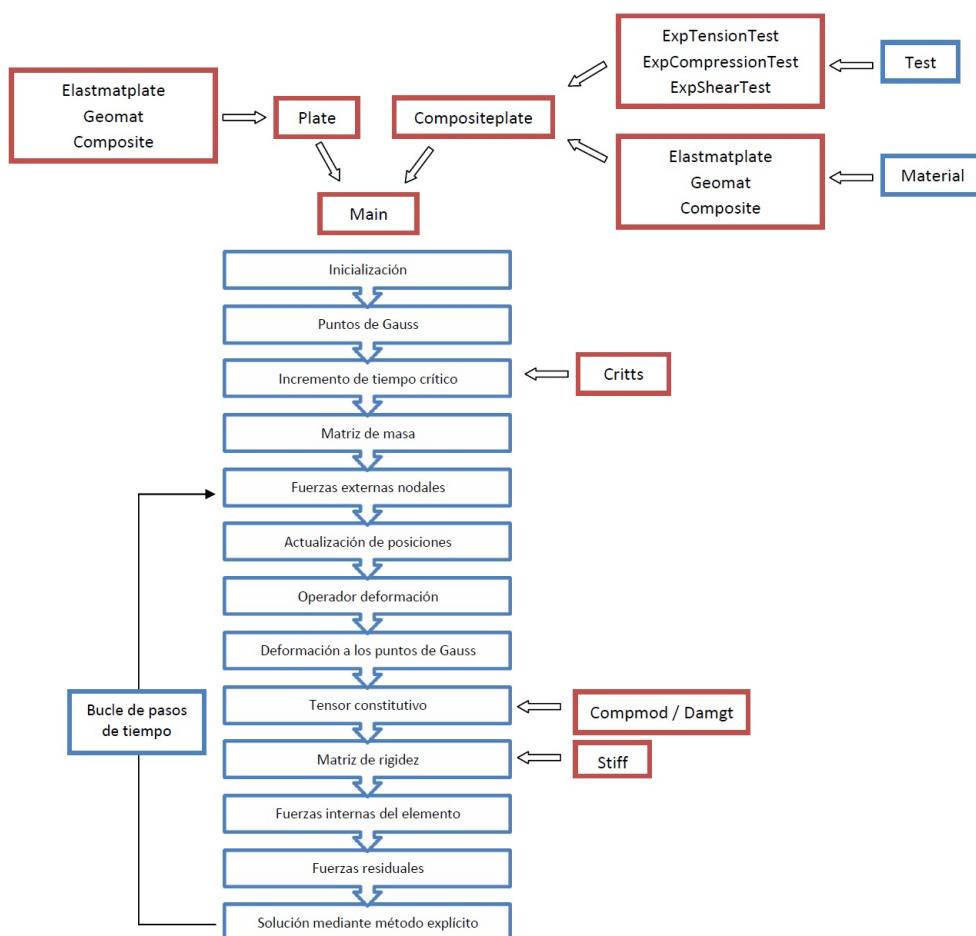


Figura 3.1: Diagrama de las subrutinas que intervienen

3.1.1. Descripción de las subrutinas

Una vez presentado el diagrama que sigue el programa, se procede a describir las subrutinas que intervienen en el cálculo. En la descripción de las subrutinas se hablará de las variables que intervienen, las entradas que necesita, los procesos que sigue y los resultados o salidas que proporciona. Todos los procesos y variables se referenciarán en la formulación del modelo de daño propuesto por J.L. Curiel [6].

Compositeplate Esta es la subrutina que se debe llamar para correr el programa. Partiendo de esta se van utilizando todas las demás para llegar al resultado final. Por este motivo, en esta rutina se describe el elemento que se va a utilizar, así como se obtienen todos los datos para poder realizar el análisis.

En primer lugar se define el tipo de esfuerzo al que está sometido el elemento, determinando si se trata de un test de compresión o de tracción. Es importante determinar el tipo de esfuerzo porque de él dependen las variables de daño que van a intervenir en el problema. Definido el tipo de esfuerzo se llaman las subrutinas referentes a los test reales, que contienen todos los datos para el caso de compresión, tracción o cortante definidos en el artículo de P.D. Soden [20]. Las rutinas a las que nos referimos son:

- *ExpTensionTest*
- *ExpCompressionTest*
- *ExpShearTest*

Una vez tenemos los datos del test introducidos, la subrutina define el elemento con toda su topología. Se trata de un elemento hexaédrico de 8 nodos, con los movimientos restringidos en una cara y las fuerzas externas aplicadas a la opuesta. Para clarificar la geometría, condiciones de contorno y fuerzas externas se presenta la siguiente imagen (Figura 3.2).

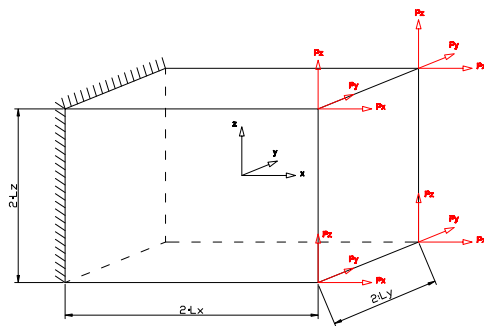


Figura 3.2: Elemento hexaédrico de 8 nodos con las condiciones de contorno y cargas aplicadas

Cuando tenemos definida la geometría, las condiciones de contorno y las cargas aplicadas, se debe definir el material del elemento. Para esta elección, la rutina incorpora tres posibles subrutinas que debe elegir el usuario. Estas subrutinas, que incorporan los datos referentes al material del que está compuesto el elemento, son:

- *Elastmatplate*
- *Geomat*
- *Composite*

Después de la definición del material, se debe elegir el método de resolución que se va a utilizar.

Por último, la subrutina *compositeplate* da paso a la subrutina *main* para que siga con el cálculo.

Main Tal como indica el nombre, esta es la subrutina principal. Una vez introducidos los datos del problema por la subrutina precedente, *main* se encarga de resolverlo, haciendo uso de otras rutinas necesarias para la realización de los pasos intermedios.

Así pues, en primer lugar se inicializa el proceso, poniendo a cero todas las variables que van a ser utilizadas.

A continuación se definen los puntos de Gauss, junto a sus pesos correspondientes, que se utilizarán para el cálculo de las integrales. Al ser un elemento con análisis lineal, sólo será necesario un punto de Gauss. Éste punto coincidirá con el origen de coordenadas del elemento. En la rutina se define el punto de Gauss (*poi*) y su peso (*wp*) como

$$poi = (0, 0, 0)$$

$$wp = (2, 2, 2)$$

Para el cálculo de la matriz de masa se utilizarán 4 puntos de Gauss definidos en las matrices *poi* y *wp* como:

$$poi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$wp = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Una vez definidos los puntos de Gauss, se define el incremento de tiempo crítico. Debemos recordar que el método de resolución es explícito, por lo que puede presentar ciertas inestabilidades para pasos de tiempo demasiado grandes. Para la determinación del paso de tiempo crítico (*ts*) se utiliza la subrutina *critts*.

Al tratar-se de un problema temporal, en el cálculo interviene la matriz de masa. Así, después de haber definido el paso de tiempo crítico, se define esta matriz mediante la expresión:

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_j d\Omega \quad (3.62)$$

Con N_i y N_j las funciones de forma del nodo i y j , respectivamente.

Después de la definición de la matriz de masa, se asignan las fuerzas externas a los nodos. Como se trata de un modelo de daño, la fuerza aplicada a los nodos será incremental, es decir, a cada paso de tiempo ésta se incrementará hasta llegar al estado último. En este caso el incremento será lineal, es decir, el incremento de carga entre cada paso de tiempo será igual y será proporcional a la carga

total final. En esta subrutina también se da la opción de aplicar la carga de un solo golpe, es decir, toda la carga final se aplica en una única iteración. De esta forma la carga total y incremental se pueden describir como:

$$\begin{aligned} f_{ext} &= f_{ext_{Final}} \quad \text{para } t_0 \\ f_{ext} &= \frac{i-1}{n-1} f_{ext_{Final}} \quad \text{para } t > t_0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Donde n es el número de pasos de tiempos totales definido por el usuario y i es el paso en que nos encontramos, siendo $i = 1, 2, \dots, n$. Con $f_{ext_{Final}} = 50 \text{ MN}$.

Es importante actualizar la posición de los nodos en cada paso de tiempo porque el efecto de las cargas externas no será el mismo si los nodos se desplazan significativamente. De esta forma, las posiciones actualizadas se obtendrán de la forma

$$\mathbf{X}_{upd} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (3.64)$$

Para la resolución del problema mediante el método de los elementos finitos, es necesario definir las funciones de forma del elemento, así como sus derivadas respecto los distintos ejes. Estas funciones se definen sobre el elemento paramétrico de lado unidad, así que también será necesario el Jacobiano para hacer la transformación. Este conjunto se define en la subrutina *bmatrix*. Esta subrutina está incluida en el bucle de pasos de tiempo porque se considera que los desplazamientos de los nodos pueden influir en el comportamiento del elemento. Si se considerara un problema estático, es decir, que los desplazamientos en los nodos fueran despreciables, esta subrutina podría excluirse del bucle, reduciendo el coste computacional.

Obtenida la matriz \mathbf{B} , podemos determinar la deformación en cada nodo. Este paso se realiza en la subrutina *strainnod*. Para obtener el tensor constitutivo del modelo de daño propuesto, será necesario obtener el valor de la deformación en el punto de Gauss. Esta deformación se obtiene en otra subrutina, *strainpoi*, que depende de los valores de la deformación en los nodos obtenidos anteriormente.

Para hallar el tensor constitutivo del material se utilizan dos subrutinas. Una si se considera que el material tiene un comportamiento elástico lineal y otra considerando un estado inelástico con la aparición de daño. En el primer caso (caso elástico) se activa la subrutina *compmod*, si se considera el efecto del daño en el material se usa la subrutina *damgt*.

Una vez tenemos el tensor constitutivo del material, la matriz de derivadas de las funciones de forma, su jacobiano y el conjunto de pesos de los puntos de Gauss podemos calcular la matriz de rigidez. Este cálculo se realiza en la subrutina *stiff*.

A partir de la matriz de rigidez y de los desplazamientos obtenidos en el paso de tiempo previo se obtienen las fuerzas internas en los nodos.

$$\mathbf{f}_{int,n} = \mathbf{K}_n \cdot \mathbf{u}_n \quad (3.65)$$

Con estas fuerzas internas se calcula el vector de fuerzas residuales $\hat{\mathbf{R}}$ que será usado para calcular el desplazamiento para el paso de tiempo sobre el que estamos trabajando.

$$\hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{f}_{ext,n} - \mathbf{f}_{int,n} \quad (3.66)$$

Llegado este punto, solo queda actualizar los desplazamientos en los nodos. Esta acción se realiza mediante un método explícito. Es decir, se utiliza el vector de fuerzas residuales, encontrado a partir de los desplazamientos en los nodos del paso de tiempo previo, para determinar el campo de desplazamientos en el paso de tiempo corriente.

En la subrutina se definen dos algoritmos para encontrar el nuevo campo de desplazamientos. Uno según el método Europlexus y otro mediante el CDM. El usuario puede elegir cuál es el que quiere utilizar.

En el siguiente esquema se detalla el algoritmo para el método Europlexus.

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}_n = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{R}_n \\ \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}_{n-\frac{1}{2}} + \mathbf{a}_n ts \\ \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} ts \end{array} \quad (3.67)$$

El proceso iterativo sigue hasta que se llega al número de pasos de tiempo indicados por el usuario al ejecutar la rutina.

Una vez obtenidos los valores para cada paso de tiempo, solo queda el postproceso de los resultados, en el cual se obtienen las diferentes gráficas que nos servirán para interpretar el comportamiento, tanto del programa como del material.

Subrutinas auxiliares

La subrutina *elastmatplate* contiene los valores del módulo de deformación, coeficiente de Poisson y densidad referentes a un material elástico isótropo. Los valores introducidos son:

$$\begin{array}{l} E = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ MPa} \\ \nu = 0,0 \\ \rho = 1000 \text{ Kg/m}^3 \end{array}$$

Es importante destacar que estos valores serán los utilizados en el análisis del caso lineal elástico y de daño isótropo.

La subrutina *Geomat* contiene las mismas variables referentes al material que la anterior, pero para el caso de material elástico ortótropo. Esto implica que habrá un parámetro diferente para cada una de las tres direcciones. También contiene los valores de los parámetros referentes a la resistencia del material, el número de modos de fallo, parámetros de fallo y variables de daño iniciales.

La subrutina *Composite* contiene los valores de los parámetros de un material compuesto anisótropo.

En la subrutina *critts* se define el paso de tiempo crítico que no debe ser superado si se quieren evitar los posibles inestabilidades en la resolución por el método explícito.

Para obtener el tiempo crítico, esta rutina, necesita unos datos. A continuación se mencionan los inputs que necesita y los outputs que obtiene.

| |
|--|
| Inputs: E, ρ , \mathbf{X} (Matriz de coordenadas de los nodos) |
| Outputs: ts |

En primer lugar se determinan las longitudes de cada arista. Obtenidos estos valores se escoge el valor de la arista más corta (Le). Así, se determina el paso de tiempo crítico (ts) como:

$$ts = \frac{Le}{\sqrt{E/\rho}} \quad (3.68)$$

Compmod Una vez tenemos las deformaciones, necesitamos saber la expresión del tensor constitutivo del material para poder obtener los desplazamientos actualizados. Este tensor constitutivo, en este programa, toma dos formas distintas dependiendo de si se considera el efecto del daño en el material o no. En el caso de que consideremos un material isótropo o ortótropo, pero sin daño; la subrutina a utilizar para determinar el tensor constitutivo será *compmod*. En el caso que el material considerado sea el material compuesto con efecto del daño, la subrutina a utilizar será *damgt*.

Así pues, en la subrutina *compmo*, se obtiene el tensor constitutivo constante tanto para el caso isótropo como ortótropo.

Para el problema de material isótropo, el tensor constitutivo se expresa según la matriz \mathbf{C} calculada como se indica.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(2G) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/(2G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/(2G) \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Donde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1} \quad (3.70)$$

Damgt La subrutina *damgt*, como ya se ha comentado anteriormente, proporciona el tensor constitutivo en el caso del efecto del daño. Esta subrutina incorpora la formulación referente al modelo de daño propuesto. Por este motivo, será una subrutina muy importante en el proceso de cálculo.

En la tabla¹ que se muestra a continuación aparecen los inputs que necesita y los outputs que obtiene.

| | |
|----------|--|
| Inputs: | $eps, n, timestep, w$ |
| Outputs: | $\mathbf{C}_w, w, \phi, \boldsymbol{\sigma}$ |

En primer lugar se inicializa el proceso definiendo unas nuevas variables (*epsb4* y *sigb4*) donde se guardará el valor de la deformación y tensión en el paso de tiempo previo, permitiendo calcular la derivada temporal discretizando mediante diferencias hacia atrás.

A continuación se introducen los datos referentes a la curva tensión-deformación para el experimento de tensión de corte AS4/3501-6.

A partir de estos parámetros se obtiene la expresión del tensor constitutivo del material no dañado (\mathbf{C}) que, expresado en forma matricial, queda de la forma siguiente.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E2E3\Delta} & \frac{\nu_{12}-\nu_{32}\nu_{13}}{E1E3\Delta} & \frac{\nu_{13}-\nu_{12}\nu_{23}}{E1E2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}-\nu_{32}\nu_{13}}{E1E3\Delta} & \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E1E3\Delta} & \frac{\nu_{23}-\nu_{21}\nu_{13}}{E1E2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}-\nu_{12}\nu_{23}}{E1E2\Delta} & \frac{\nu_{23}-\nu_{21}\nu_{13}}{E1E2\Delta} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E1E2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Gs_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Gs_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Gs_{31} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Con $\Delta = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E1E2E3}$.

Definido el tensor constitutivo no dañado, entra en juego la formulación del modelo de daño. Para ello debemos definir en primer lugar los vectores directores de la evolución del daño.

Una vez definidos los vectores directores se obtiene la derivada temporal de la deformación en el instante de tiempo corriente de la forma:

¹Notación según lo definido en el apartado 2 del capítulo 2.

$$e_rate = \dot{\epsilon} = \frac{\epsilon_n - \epsilon_{n-1}}{ts} \quad (3.72)$$

El siguiente paso es escribir la matriz de daño M_w . Véase que, aunque se defina con la misma notación, esta matriz es distinta que la matriz de masa definida en la subrutina *main*.

$$M_w = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-w_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-w_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-w_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-w_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-w_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-w_6} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Entonces, siguiendo el modelo de daño, se puede escribir el tensor constitutivo del material dañado usando la matriz de daño y el tensor constitutivo no dañado descrito anteriormente.

$$C_w = M_w^{-1} C \quad (3.74)$$

Aplicando la ley constitutiva del material y usando la deformación en el punto de Gauss obtenida en la subrutina *strainpoi*, se determina el campo de tensiones en el elemento.

$$\sigma = C_w \epsilon \quad (3.75)$$

Una vez obtenidas las tensiones del elemento se introduce el criterio de fallo. En primer lugar se definen las funciones F_{ij} para cada modo de fallo basadas en el campo de tensiones. Así pues, para los distintos modos de fallo, las funciones que intervienen son:

1. Rotura de fibras (tracción):

$$F_{11,1} = \frac{1}{(1-w_1)^2 X^2 22^2}; \quad F_{44,1} = \frac{1}{(1-w_4)^2 S^2 12^2}; \quad F_{66,1} = \frac{1}{(1-w_6)^2 S^2 31^2}; \quad (3.76)$$

$$f_1 = \sigma_1^2 F_{11,1} + \sigma_4^2 F_{44,1} + \sigma_6^2 F_{66,1}$$

2. Pandeo de fibras (compresión):

$$F_{11,2} = \frac{1}{(1-w_1)^2 X^2 22^2}; \quad F_{44,2} = \frac{1}{(1-w_4)^2 S^2 12^2}; \quad F_{66,2} = \frac{1}{(1-w_6)^2 S^2 31^2}; \quad (3.77)$$

$$f_2 = \sigma_1^2 F_{11,2} + \sigma_4^2 F_{44,2} + \sigma_6^2 F_{66,2}$$

3. Quebradura de la matriz en la primera dirección transversal (tracción):

$$F_{22,3} = \frac{1}{(1-w_2)^2 X^2 22^2}; \quad F_{44,3} = \frac{1}{(1-w_4)^2 S^2 12^2}; \quad F_{55,3} = \frac{1}{(1-w_5)^2 S^2 23^2}; \quad (3.78)$$

$$f_3 = \sigma_2^2 F_{22,3} + \sigma_4^2 F_{44,3} + \sigma_5^2 F_{55,3}$$

4. Aplastamiento de la matriz en la primera dirección transversal (compresión):

$$F_{22,4} = \frac{1}{(1-w_2)^2 X^2 22^2}; \quad F_{44,4} = \frac{1}{(1-w_4)^2 S^2 12^2}; \quad F_{55,4} = \frac{1}{(1-w_5)^2 S^2 23^2}; \quad (3.79)$$

$$f_4 = \sigma_2^2 F_{22,4} + \sigma_4^2 F_{44,4} + \sigma_5^2 F_{55,4}$$

5. Quebradura de la matriz en la segunda dirección transversal (tracción):

$$\begin{aligned}
F_{33,5} &= \frac{1}{(1-w_3)^2 X_{33}^2}; & F_{55,5} &= \frac{1}{(1-w_5)^2 S_{23}^2}; & F_{66,5} &= \frac{1}{(1-w_6)^2 S_{31}^2}; \\
f_5 &= \sigma_3^2 F_{33,5} + \sigma_5^2 F_{55,5} + \sigma_6^2 F_{66,5}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

6. Aplastamiento de la matriz en la segunda dirección transversal (compresión):

$$\begin{aligned}
F_{33,6} &= \frac{1}{(1-w_3)^2 X_{33}^2}; & F_{55,6} &= \frac{1}{(1-w_5)^2 S_{23}^2}; & F_{66,6} &= \frac{1}{(1-w_6)^2 S_{31}^2}; \\
f_6 &= \sigma_3^2 F_{33,6} + \sigma_5^2 F_{55,6} + \sigma_6^2 F_{66,6}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Como la formulación del modelo de daño se basa en el espacio de deformaciones y no el de tensiones, se definen las funciones G_{ij} como criterio de fallo en el espacio de deformaciones a partir de las funciones F_{ij} .

$$\mathbf{G}_j = \mathbf{C}_w^T \mathbf{F}_j \mathbf{C}_w \tag{3.82}$$

Para cada modo de daño $j = 1, \dots, 6$.

Para definir las funciones de crecimiento del daño se utiliza el vector gradiente de las funciones g_j , que se define como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\nabla \mathbf{g}_j = \boldsymbol{\epsilon}^T (\mathbf{G}_j + \mathbf{G}_j^T) \tag{3.83}$$

Para cada modo de daño $j = 1, \dots, 6$.

A partir de este resultado se obtienen las funciones de crecimiento (φ) como el producto escalar del gradiente de las funciones g_j y la derivada temporal de la deformación. También se debe destacar que las funciones de crecimiento no pueden ser negativas, así que si sale un valor negativo para estas funciones se tomará $\varphi = 0$.

$$\varphi_j = \langle \nabla \mathbf{g}_j, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_+ \tag{3.84}$$

Para finalizar con la formulación del modelo se define la regla de daño que será introducida en la matriz de daño \mathbf{M}_w definida al principio de la subrutina. Para definir la evolución del daño, pues, se aplican las funciones de crecimiento obtenidas sobre los vectores directores definidos también con anterioridad. De esta forma se cierra el proceso, volviéndose a calcular en el paso de tiempo siguiente el nuevo tensor constitutivo con el parámetro de daño obtenido en el paso corriente.

$$w_rate = \dot{w} = \sum_j \varphi_j \mathbf{q}_j \tag{3.85}$$

$$w_n = w_{(n-1)} + \dot{w} \cdot ts \tag{3.86}$$

Stiff Una vez obtenido el tensor constitutivo del material (\mathbf{C}) para cada tipo de problema, se debe obtener la matriz de rigidez del problema. Esta matriz se obtiene a partir de las matrices \mathbf{B}_i , la matriz constitutiva del material y los pesos correspondientes para la integración numérica.

Cuando tenemos las matrices para cada nodo $i = 1, \dots, 8$ y $j = 1, \dots, 8$; solo resta hacer el ensamblaje para obtener la matriz de rigidez total \mathbf{K} .

3.2. Algoritmos de los métodos utilizados

Una vez descritas las formulaciones, se puede establecer un algoritmo que describe los pasos que sigue la rutina con la implementación de un método de resolución. Los algoritmos que se usan para el caso de daño isotropo, se muestra en los siguientes diagramas de flujo.

Para el caso elástico lineal, los algoritmos serían muy similares. En este caso, solo se diferencian en que no hay cálculo de la variable de daño y que para los casos implícitos, la matriz tangente se puede sacar fuera del bucle de las iteraciones para cada paso de tiempo.

Para el método de Crank-Nicolson solo se muestra el algoritmo del caso elástico lineal ya que en el caso de daño isotropo no se ha utilizado.

| |
|--|
| <p>Inicialización: $t_0, poi, wp, ts, M, f_{extFinal}$</p> <p>$\{N_i, \frac{\partial N_i}{\partial x_j}, Jacob, B, C\}$</p> <p>Pasos de carga: $n = 1, 2, \dots, n_{Final}$</p> $f_{ext,n} = \frac{n-1}{n_{Final}-1} f_{extFinal}$ $K_{t,n+1} = \int_V (1-d) B^T C^0 B dV - \int_V \frac{1}{d} B^T C^0 B u_{n+1} \otimes B^T C^0 B u_{n+1} dV$ $f_{int,n} = K_n u_n$ $\hat{R}_n = f_{ext,n} - f_{int,n}$ <p>Método Europlexus:</p> $a_n = M^{-1} \hat{R}_n$ $v_{n+\frac{1}{2}} = v_{n-\frac{1}{2}} + a_n ts$ $u_{n+1} = u_n + v_{n+\frac{1}{2}}$ $u_{n+1D} = u_{n+1}^*$ $d = \sqrt{(u_{n+1})^T B^T C^0 B u_{n+1}}$ <p>Final del paso de carga: $n = n + 1$</p> |
|--|

Cuadro 3.1: Algoritmo del método explícito para el caso de daño isotropo

| |
|--|
| <p>Inicialización: $t_0, poi, wp, \Delta t, \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{f}_{extFinal}$</p> <p>$\{N_i, \frac{\partial N_i}{\partial x_j}, \mathbf{Jacob}, \mathbf{B}\}$</p> <p>Pasos de carga: $n = 0, 1, 2, \dots, (n_{Final} - 1)$</p> $\mathbf{f}_{ext,n+1} = \frac{n}{n_{Final}} \mathbf{f}_{extFinal}$ $\mathbf{K}_{t,n+1} = \int_V (1-d) \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} dV - \int_V \frac{1}{d} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1} \otimes \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1} dV$ $\mathbf{D}_{n+1} = \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{t,n+1} \right)$ $\mathbf{R}_{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \left(\frac{\mathbf{u}_n}{\Delta t} + \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{f}_{ext,n+1}$ $\mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{D}_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1}$ <p>Iteraciones: $k = 1, 2, \dots$</p> $\delta \mathbf{u}_{n+1}^k = - \left(\mathbf{D}_{n+1}^k \right)^{-1} \mathbf{G}_{n+1}^{k-1}$ $\mathbf{u}_{n+1}^k = \mathbf{u}_{n+1}^{k-1} + \delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ $d^k = \sqrt{(\mathbf{u}_{n+1}^k)^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1}^k}$ <p>Si $\ \mathbf{G}_{n+1}^{k-1}\ < \epsilon_f \ \mathbf{f}_{ext,n+1}\$ y $\ \delta \mathbf{u}_{n+1}^k\ < \epsilon_u \ \mathbf{u}_{n+1}^k\$:</p> $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k$ <p>Fin bucle de iteraciones</p> $\mathbf{K}_{t,n+1}^k = \int_V (1-d^k) \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} dV - \int_V \frac{1}{d^k} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1}^k \otimes \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1}^k dV$ $\mathbf{D}_{n+1}^k = \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{t,n+1}^k \right)$ $\mathbf{G}_{n+1}^k = \mathbf{D}_{n+1}^k \mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{R}_{n+1}$ $k = k + 1$ <p>Fin de la iteración</p> $\mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t}$ $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{(n+1)}$ <p>Final del paso de carga: $n = n + 1$</p> |
|--|

Cuadro 3.2: Algoritmo del método de Euler hacia atrás para el caso de daño isótropo

| |
|---|
| <p>Inicialización: $t_0, poi, wp, \Delta t, \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{f}_{extFinal}$</p> <p>$\{N_i, \frac{\partial N_i}{\partial x_j}, \mathbf{Jacob}, \mathbf{B}\}$</p> <p>Pasos de carga: $n = 0, 1, 2, \dots, (n_{Final} - 1)$</p> $\mathbf{f}_{ext,n+1} = \frac{n}{n_{Final}} \mathbf{f}_{extFinal}$ $\mathbf{K}_{t,n+1} = \int_V (1-d) \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} dV - \int_V \frac{1}{d} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1} \otimes \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1} dV$ $\mathbf{D}_{n+1} = \left(\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{t,n+1} \right)$ $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{M} \left[\frac{4}{\Delta t} \left(\frac{\mathbf{u}_n}{\Delta t} + \mathbf{v}_n \right) + \mathbf{a}_n \right] + \mathbf{f}_{ext,n+1}$ $\mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{D}_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1}$ <p>Iteraciones: $k = 1, 2, \dots$</p> $\delta \mathbf{u}_{n+1}^k = - \left(\mathbf{D}_{n+1}^k \right)^{-1} \mathbf{G}_{n+1}^{k-1}$ $\mathbf{u}_{n+1}^k = \mathbf{u}_{n+1}^{k-1} + \delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ $d^k = \sqrt{(\mathbf{u}_{n+1}^k)^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1}^k}$ <p>Si $\ \mathbf{G}_{n+1}^{k-1}\ < \epsilon_f \ \mathbf{f}_{ext,n+1}\$ y $\ \delta \mathbf{u}_{n+1}^k\ < \epsilon_u \ \mathbf{u}_{n+1}^k\$:</p> $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k$ <p>Fin bucle de iteraciones</p> $\mathbf{K}_{t,n+1}^k = \int_V (1-d^k) \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} dV - \int_V \frac{1}{d^k} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1}^k \otimes \mathbf{B}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1}^k dV$ $\mathbf{D}_{n+1}^k = \left(\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{t,n+1}^k \right)$ $\mathbf{G}_{n+1}^k = \mathbf{D}_{n+1}^k \mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{R}_{n+1}$ $k = k + 1$ <p>Fin de la iteración</p> $\mathbf{a}_{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} - \mathbf{v}_n - \mathbf{a}_n$ $\mathbf{v}_{n+1} = \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n) + \mathbf{v}_n$ $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{(n+1)}$ <p>Final del paso de carga: $n = n + 1$</p> |
|---|

Cuadro 3.3: Algoritmo del método de Newmark para el caso de daño isótropo

| |
|---|
| <p>Inicialización: $t_0, poi, wp, \Delta t, \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{f}_{extFinal}$</p> <p>Pasos de carga: $n = 0, 1, 2, \dots, (n_{Final} - 1)$</p> $\mathbf{f}_{ext,n+1} = \frac{n}{n_{Final}} \mathbf{f}_{extFinal}$ $\{N_i, \frac{\partial N_i}{\partial x_j}, \mathbf{Jacob}, \mathbf{B}\}_{n+1}$ $\mathbf{K}_{n+1} = \int_V (\mathbf{B}_{n+1})^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{n+1} dV$ $\mathbf{D}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{4} (\mathbf{K}_{n+1} + \mathbf{K}_n)$ <p>Iteraciones: $k = 1, 2, \dots$</p> $\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n$ $\mathbf{v}_{n+1}^0 = \mathbf{v}_n$ $\mathbf{a}_{n+\frac{1}{2}}^0 = \frac{\mathbf{u}_{n+1}^0 - \mathbf{u}_n^0}{\frac{\Delta t}{2}} - \mathbf{v}_n^0$ $\mathbf{G}_{n+1}^0 = \mathbf{M} \mathbf{a}_{n+\frac{1}{2}}^0 + \frac{1}{2} (\mathbf{K}_{n+1} + \mathbf{K}_n) \mathbf{u}_{n+1}^0 - \frac{1}{2} (\mathbf{f}_{ext,n+1} + \mathbf{f}_{ext,n})$ $\mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{M} \left[\frac{2}{\Delta t} (\mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n) \right] - \frac{1}{4} (\mathbf{K}_{n+1} + \mathbf{K}_n) \mathbf{u}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{f}_{ext,n+1} + \mathbf{f}_{ext,n})$ $\mathbf{G}_{n+1}^{k-1} = \mathbf{D}_{n+\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}$ <p>Si $\ \mathbf{G}_{n+1}^{k-1}\ \geq \epsilon \ \mathbf{f}_{ext,n+1}\$:</p> $\delta \mathbf{u}_{n+1}^k = - \left(\mathbf{D}_{n+\frac{1}{2}} \right)^{-1} \mathbf{G}_{n+1}^{k-1}$ $\mathbf{u}_{n+1}^k = \mathbf{u}_{n+1}^{k-1} + \delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ <p>Final de la iteración: $k - 1 = k$</p> <p>Si $\ \mathbf{G}_{n+1}^{k-1}\ < \epsilon \ \mathbf{f}_{ext,n+1}\$:</p> $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{k-1}$ $\mathbf{a}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\frac{\Delta t}{2}} - \mathbf{v}_n$ $\mathbf{v}_{n+1} = \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n) + \mathbf{v}_n$ <p>Final del paso de carga: $n = n + 1$</p> |
|---|

Cuadro 3.4: Algoritmo del método de Crank-Nicolson para el caso elástico lineal

Capítulo 4

RESULTADOS

1. Problema analizado

1.1. Caso elemental 3D

Una vez obtenidos los distintos algoritmos, éstos se aplican a la resolución del problema para un elemento las características del cual se dan en este apartado.

1.1.1. Geometría del elemento

Siguiendo en la línea del análisis del programa piloto descrito anteriormente, se define la misma geometría del elemento. En este caso se trata de un elemento hexaédrico no regular de dimensiones iguales a las que se muestran en la siguiente figura (Figura 4.1).

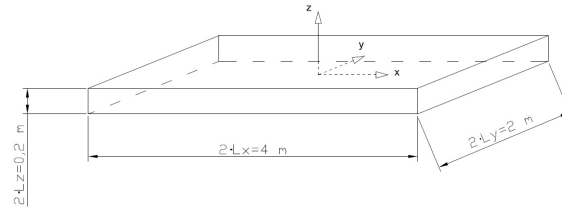


Figura 4.1: Geometría del elemento

1.1.2. Condiciones de contorno y carga aplicada

Las condiciones de contorno a considerar también son iguales que las definidas en el programa piloto. De esta forma, el elemento está empotrado en una cara y tiene el resto de caras libres.

Por lo que se refiere a las cargas externas aplicadas se sigue el mismo razonamiento. Se aplica una carga en dirección del eje x y de valor $50MN$ en la cara opuesta al empotramiento.

$$F_{ext} = 50MN$$

En la figura siguiente se muestra un resumen de la geometría, condiciones de contorno y cargas aplicadas, teniendo en cuenta que la fuerza aplicada se divide en 4 fuerzas de valor $P_x = \frac{F_{ext}}{4}$ aplicadas a cada uno de los nodos de la cara donde se aplica la carga.

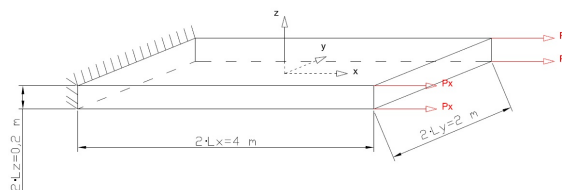


Figura 4.2: Condiciones de contorno y de carga consideradas para el análisis del elemento

1.2. Caso multielemental 2D

1.2.1. Definición de la geometría y condiciones de contorno

Para realizar el análisis multidimensional con daño no local se define una geometría sencilla que nos permita analizar fácilmente los resultados obtenidos con la formulación implementada. Esta geometría también debe ser comparable con alguna estructura real para poder ver si los resultados

obtenidos son físicamente creíbles. Por otro lado, se debe tener en cuenta que no se pretende estudiar el comportamiento de una estructura real, sino el comportamiento de la formulación. Por este motivo es importante que el conjunto analizado no tenga complejidades geométricas y que se pueda discretizar con un número pequeño de elementos, evitando de esta forma que el coste computacional del análisis sea excesivo.

Cumpliendo con estas condiciones, la geometría escogida para el problema es la de una placa rectangular, las dimensiones de la cual se definen en la siguiente imagen.

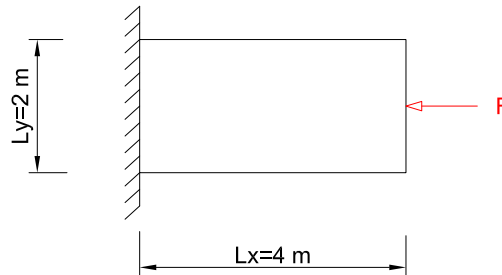


Figura 4.3: Diagrama de las subrutinas que intervienen

Como podemos ver, las condiciones de contorno utilizadas son parecidas a las que teníamos para el caso de un único elemento. De esta forma podemos comparar en cierta medida el comportamiento de ambos modelos.

De igual forma que las condiciones de contorno, las fuerzas externas aplicadas a la placa son en la misma dirección que en el caso anterior.

2. Caso elástico lineal

Una vez tenemos definido el problema y los distintos algoritmos para los métodos implícitos propuestos, se analizan los resultados y se comparan con el método explícito. Esta comprobación es importante porque nos permite ver la fiabilidad de los métodos, así poder establecer cual es el más idóneo para la implementación en el caso no lineal.

Es importante puntualizar que la implementación de los métodos implícitos en el caso lineal no aporta ventajas significativas, ya que estos métodos convergen al equilibrio en la primera iteración. Pese a que las ventajas de la implementación para el caso lineal no sean evidentes, si lo serán, o se espera que lo sean, para el caso no lineal. Así pues, antes de la implementación para el caso no lineal es importante hacer una buena puesta a punto de los métodos, es decir, implementarlos para el caso lineal y comparar los resultados, que deberían ser similares.

Para realizar este análisis se trabaja con una malla de un único elemento 3D. Este elemento es el definido anteriormente en el apartado 1.1.

2.1. Test de fuerza incremental

Para realizar este análisis consideramos un test de compresión, con las fuerzas actuando únicamente sobre la dirección x del elemento. El paso de tiempo (Δt), que es el mismo para todos los

métodos, es el definido como crítico en la subrutina *critts* (ts^1). El número de pasos será de 20 ($n_{Final} = 20$).

2.1.1. Evolución de la deformación con el tiempo

En primer lugar se muestra una gráfica con la evolución de la deformación respecto los pasos de tiempo. En este caso, se trabaja con la componente de la deformación ϵ_{xx} ya que es la única que se ve modificada por la actuación de las fuerzas externas, recordemos que solo tienen la componente x distinta a cero (Figura 4.4).

Se espera que la evolución de la deformación con el tiempo siga un comportamiento parabólico. Al tratarse de un problema dinámico (intervienen fuerzas dinámicas en la ecuación de equilibrio), este comportamiento viene dado por la dependencia cuadrática de los desplazamientos respecto del tiempo.

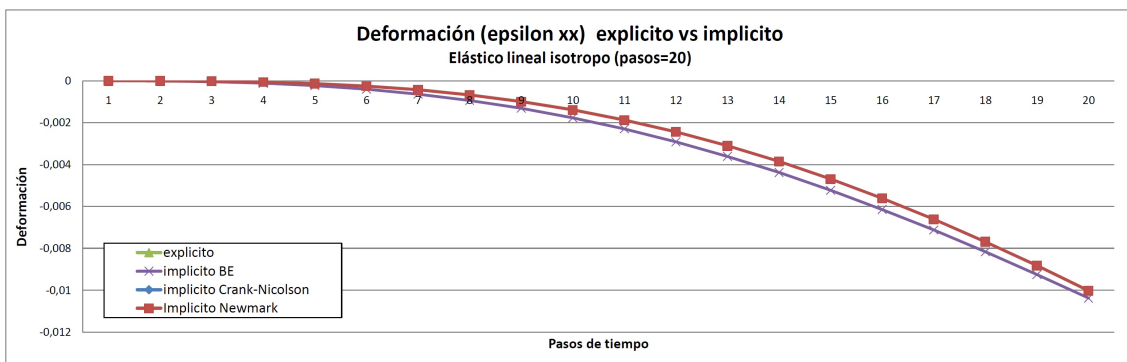


Figura 4.4: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo para los distintos métodos

Podemos observar que hay cierta diferencia entre los distintos métodos. Se observa que el método implícito de Euler hacia atrás (Backward Euler) da unos resultados ligeramente distintos a los del resto de métodos. Este comportamiento es debido a que la aceleración se calcula en el instante de tiempo n , pero la fuerza aplicada es la del instante $n + 1$.

Para el caso de Newmark, las fuerzas externas serán las del instante $n + 1$, igual que la aceleración. Así pues, se puede ver que la deformación del paso n del método de Newmark es inferior a la deformación del paso n del método BE porque la fuerza aplicada es menor.

Una cosa similar pasa con el método de Crank-Nicolson. En este caso la fuerza externa es la del instante $n + \frac{1}{2}$, pero los desplazamientos se evalúan en $n + 1$. De esta forma puede observarse que la deformación del método de Crank-Nicolson sigue la misma evolución que para el método de Newmark.

2.1.2. Tensión-Deformación

Para poder demostrar que el comportamiento de los métodos es elástico lineal se muestra el gráfico de tensión-deformación (Figura 4.5). En este gráfico se representa la tensión σ_{xx} respecto la deformación ϵ_{xx} .

Podemos ver que para todos los métodos se sigue una ley lineal con el mismo módulo de elasticidad. Este comportamiento es correcto, ya que la tensión depende de la deformación según el

¹Tal como se define en el apartado 3.1.1 del Capítulo 3:

$$ts = \frac{Le}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

Con Le la longitud de la arista más corta, E el módulo de elasticidad y ρ la densidad.

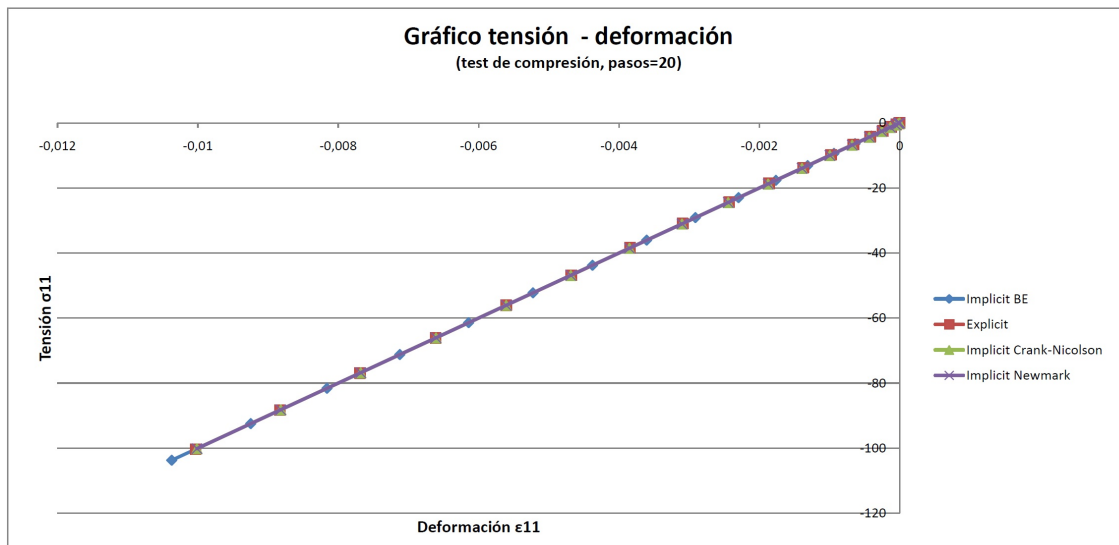


Figura 4.5: Gráfico tensión - deformación para el caso elástico lineal

tensor constitutivo del material. Al estar analizando un caso elástico lineal, este tensor constitutivo es constante para cada instante de tiempo.

Los valores de las tensiones y deformaciones en cada paso de tiempo son muy similares para los cuatro métodos. La pequeña diferencia entre los valores para los distintos métodos se debe a que para cada instante de tiempo, la deformación calculada es distinta para cada método.

También se puede observar que el método implícito Backward Euler llega más lejos en la evolución lineal del gráfico tensión-deformación. Este comportamiento se debe a que, como ya se ha comentado anteriormente, en este método las fuerzas externas se evalúan en el instante $n + 1$ y la aceleración al instante n , mientras que para los métodos implícitos Crank-Nicolson y Newmark y para el método explícito esta evaluación se hace en el instante $n + \frac{1}{2}$ y $n + 1$, respectivamente. Así pues, en el instante de tiempo 20 para los casos de Crank-Nicolson, Newmark y explícito los valores de la deformación y la tensión serán los equivalentes al instante 19 para el caso de Backward Euler.

2.2. Test de impacto

Para verificar el comportamiento de los métodos implícitos y comprobar que son más eficaces que el método explícito, se realiza un test de impacto. En este test se pretende comprobar que para un intervalo de tiempo superior al crítico, el método explícito es inestable y los métodos implícitos estables.

El test de impacto consiste en aplicar una fuerza en el primer instante de tiempo y después retirarla.

El comportamiento esperado del elemento frente a esta acción y considerando el caso elástico lineal sin amortiguamiento, es que la deformación siga un movimiento oscilatorio a lo largo del tiempo.

En el caso del método explícito, si el paso de tiempo es superior al crítico, se espera que la deformación siga un movimiento oscilatorio, pero con un aumento de la amplitud en cada ciclo. De esta forma, el método se vuelve inestable, dando resultados claramente distintos a la realidad.

En cambio, para un método implícito, la amplitud del movimiento oscilatorio de la deformación se debería mantener constante a lo largo del tiempo.

En este test se realizará el análisis para cuatro casos con distinto paso de tiempo. Estos pasos

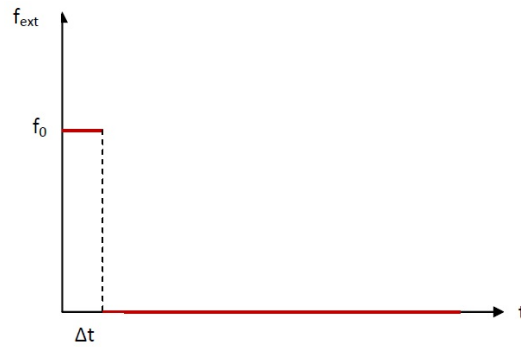


Figura 4.6: Fuerza externa aplicada al elemento en función del tiempo en el caso de impacto

de definen con las siguientes prescripciones.

1. Paso de tiempo igual al definido en la subrutina *critts* ($\Delta t = ts$).
2. Paso de tiempo igual al crítico obtenido con el valor propio de la matriz de rigidez máximo:

$$\Delta t = \Delta t_{crit} = \frac{2}{\lambda_{max}}$$

3. Paso de tiempo diez veces superior al crítico ($\Delta t = 10\Delta t_{crit}$).
4. Paso de tiempo cincuenta veces superior al crítico ($\Delta t = 50\Delta t_{crit}$).
5. Paso de tiempo en el que se inicia la inestabilidad

Para todos los casos se considera que el numero de pasos es 500.

Caso1 ($\Delta t = ts$)

En el gráfico que se puede ver a continuación (Figura 4.7) se muestra la evolución de la deformación con los distintos métodos, en función del tiempo.

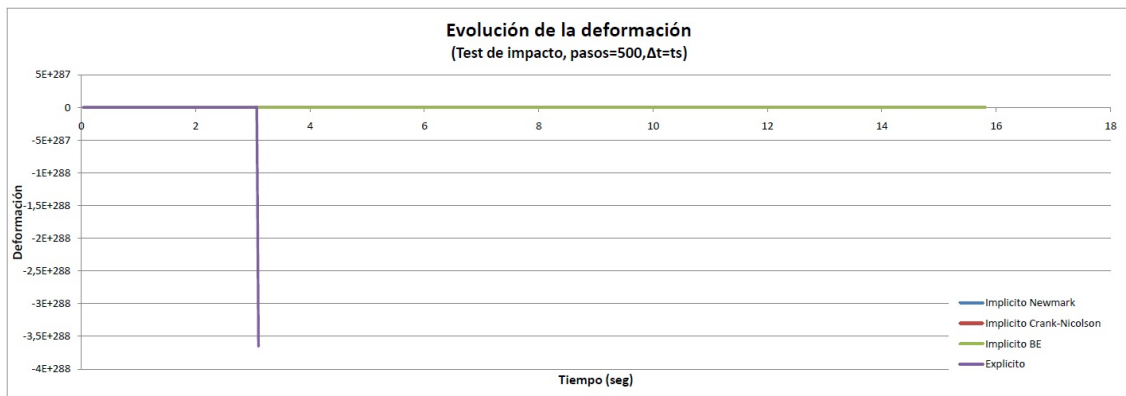


Figura 4.7: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso elástico lineal 1

En la figura anterior nos percatamos claramente de la presencia de una inestabilidad en el método explícito. Ésta no es la respuesta esperada, pues la deformación para todos los métodos debería seguir un movimiento oscilatorio constante.

Vemos pues, que el incremento de tiempo definido con la subrutina *critts* es superior al crítico para el método explícito. Hay que tener en cuenta que en esta subrutina se define el incremento de tiempo a partir de las dimensiones del elemento y no se tiene en cuenta los valores propios de la matriz de rigidez del problema.

En este caso el incremento utilizado, teniendo en cuenta la descripción hecha de la rutina inicial, toma un valor de:

$$\Delta t = 0,0316s$$

Para poder ver la evolución de todos los métodos y compararlos entre ellos se debe definir un incremento de tiempo mucho más pequeño. Como máximo, lo suficientemente pequeño para que el método explícito no tenga ninguna inestabilidad.

Caso 2 ($\Delta t = \Delta t_{crit}$)

En la Figura 4.8 se presenta la evolución de la deformación para el caso 2, es decir, con un incremento de tiempo igual al definido como crítico según los valores propios de la matriz de rigidez del problema.

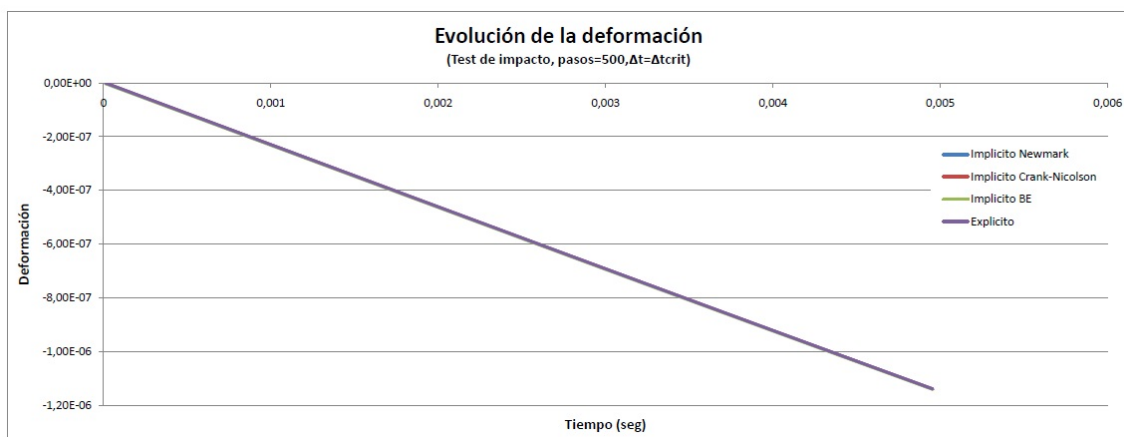


Figura 4.8: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso elástico lineal 2

Al tratarse de un incremento de tiempo tan pequeño, con 500 pasos de tiempo no se llega a describir ni una cuarta parte de una oscilación. Por este motivo, en los resultados presentados no se puede apreciar diferencia alguna entre los distintos métodos.

Para este caso, el incremento de tiempo toma un valor de:

$$\Delta t = 9,901 \cdot 10^{-6}s$$

Si lo comparamos con el incremento de tiempo del caso anterior, podemos ver que es mucho más pequeño con lo que el comportamiento será el mismo para todos los métodos, sin la aparición de inestabilidades para el caso explícito.

Caso 3 ($\Delta t = 10\Delta t_{crit}$)

La deformación para este caso se muestra en la Figura 4.9. En este caso se espera que el resultado sea parecido al obtenido en el caso anterior ya que el incremento de tiempo sigue siendo muy pequeño.

$$\Delta t = 9,901 \cdot 10^{-5}s$$

Para este caso se aprecia el máximo de la primera oscilación. Se puede ver que todos los métodos siguen la misma línea. Este comportamiento es normal, pues el incremento de tiempo es tan pequeño que las diferencias entre los métodos son inapreciables.

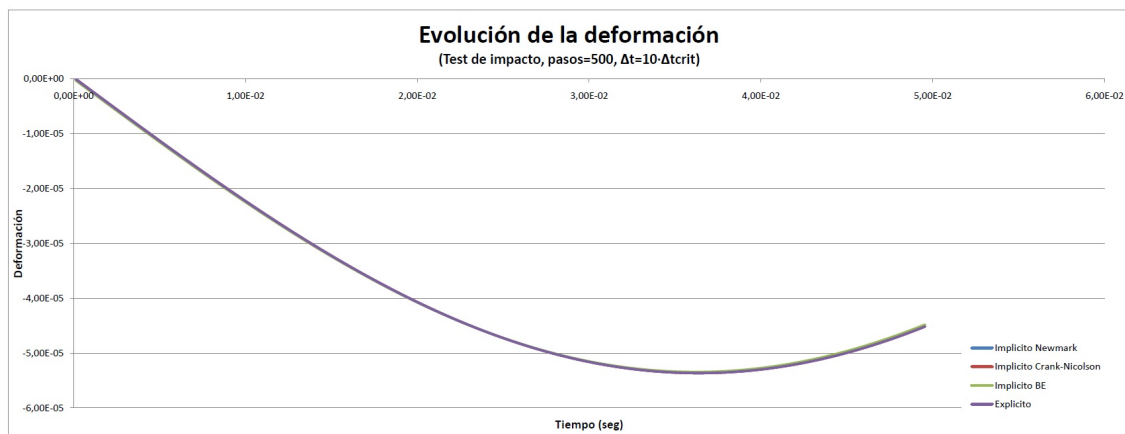


Figura 4.9: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso elástico lineal 3

Caso 4 ($\Delta t = 50\Delta t_{crit}$)

Siguiendo con los casos planteados, en este se pretende poder mostrar la evolución de la deformación con un incremento de tiempo 50 veces superior al definido como crítico.

Este incremento de tiempo toma el valor de:

$$\Delta t = 4,955 \cdot 10^{-4} s$$

La evolución de la deformación se muestra en la siguiente imagen (Figura 4.10).

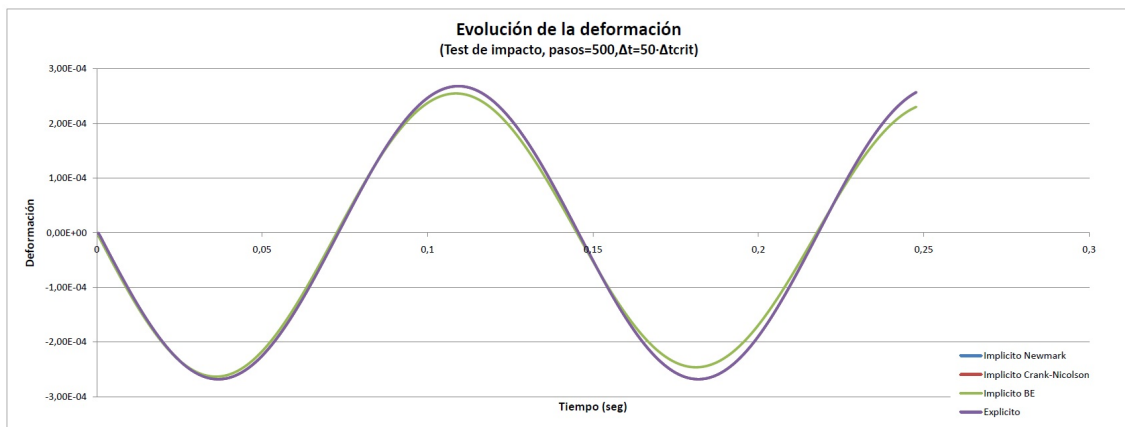


Figura 4.10: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso elástico lineal 4

Si nos fijamos en la figura anterior, podemos ver que, tal como sucede en el caso 1, el método de Euler hacia atrás sufre una ligera amortiguación.

Por lo que se refiere al método explícito, vemos que sigue una ley oscilatoria con periodo y amplitud constante, de la misma forma que los métodos implícitos de Newmark y Crank-Nicolson. En este caso, pero, se puede apreciar con más precisión la evolución de una oscilación y se puede ver que el método explícito difiere ligeramente de los métodos de Newmark y Crank-Nicolson, los cuales siguen una misma línea.

Caso 5 ($\Delta t = 134,4\Delta t_{crit}$)

Finalmente, para el caso 5, la evolución de la deformación es la que se muestra en la figura 4.11.

En este caso, el incremento de tiempo es más de 2 veces superior al anterior, pero será inferior al considerado en el primer caso. Para este caso se busca el punto en el que aparece la inestabilidad² para el método explícito.

$$\Delta t = 0,0013s$$

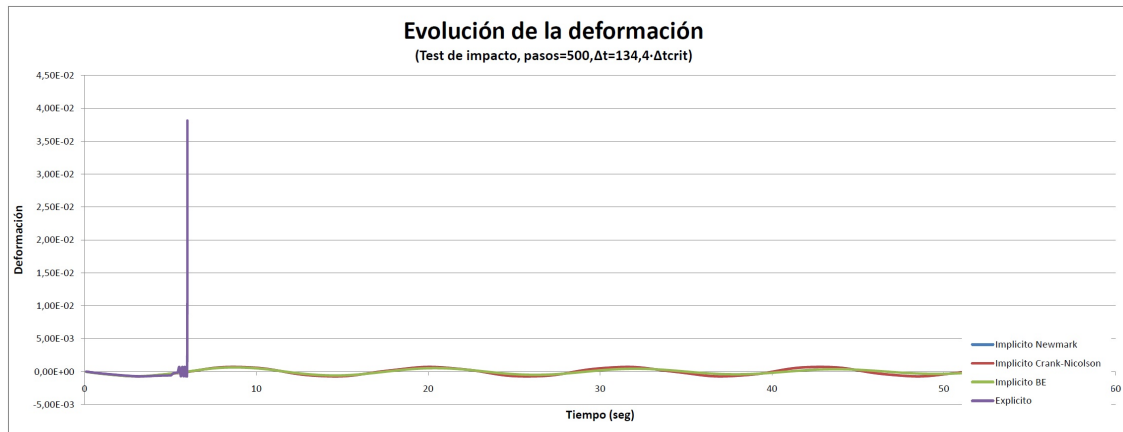


Figura 4.11: Evolución de la deformación $\epsilon_{x,x}$ respecto del tiempo en el caso elástico lineal 5

Efectivamente, si nos fijamos en la Figura 4.11 podemos apreciar una inestabilidad clara para el método explícito. En este caso, el incremento de tiempo es inferior al definido por la subrutina *critts*, por lo tanto queda claro que esta inestabilidad viene dada por las restricciones de los métodos explícitos, en cuanto a incrementos de tiempo se refiere, con la definición de la matriz de rigidez del problema.

En cuanto al resto de métodos, siguen el mismo comportamiento que el obtenido para los casos anteriores. El método de Euler hacia atrás tiene un amortiguamiento que hace que su amplitud de oscilación vaya disminuyendo a lo largo del tiempo. Los métodos implícitos de Newmark y Crank-Nicolson siguen el mismo movimiento oscilatorio con amplitud y periodo constante.

Teniendo en cuenta los resultados presentados para este caso, podemos afirmar que los métodos implícitos de Newmark y Crank-Nicolson son los más eficaces y los que no presentan ninguna alteración.

Hace falta añadir que estos dos métodos presentan los mismos resultados, por lo que en análisis posteriores solo se va a analizar el método implícito de Newmark y Euler hacia atrás.

3. Caso de daño local isótropo

Una vez implementados los algoritmos para el caso de daño isótropo en el programa solo resta hacer el análisis de los resultados obtenidos para este modelo.

Igual que en el caso elástico lineal, este análisis se realiza con un único elemento 3D.

3.1. Test de fuerza incremental

Para realizar el análisis se hace el mismo test que se ha descrito para el caso elástico lineal. Así pues, se somete el cuerpo a una fuerza de compresión progresiva, es decir, para cada paso de

²El tiempo donde se inicia la inestabilidad no se calcula de forma exacta, sino que se va aumentando el incremento de tiempo (Δt) hasta que se distingue gráficamente.

tiempo, la fuerza aplicada se incrementa de forma proporcional. De este modo, en el instante inicial tenemos una fuerza nula que va creciendo según aumentan los pasos de tiempo.

Para obtener un resultado exhaustivo de la solución los pasos de tiempo se definen como el incremento crítico definido en el test de impacto del caso lineal.

$$\Delta t = \Delta t_{crit}$$

3.1.1. Tensión-Deformación

Uno de los posibles problemas que puede aparecer en la resolución es que los desplazamientos dependen de los incrementos de fuerza. Con la aplicación de un modelo de daño, hay un instante donde la tensión en el material para de crecer y empieza a disminuir. En este punto la tangente de la curva tensión - deformación es horizontal y para un incremento de fuerza, la ecuación de equilibrio no converge o converge muy lentamente. Para evitar este problema se impone una condición adicional a los incrementos de desplazamiento de cada iteración.

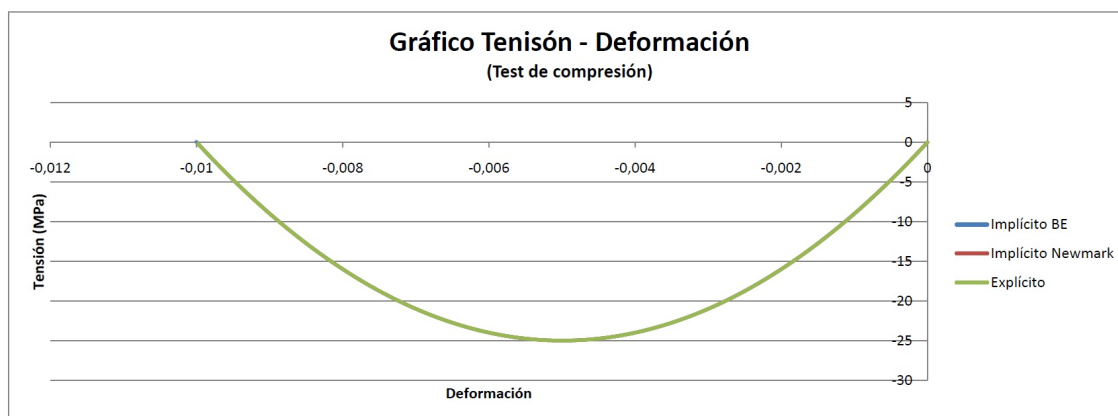


Figura 4.12: Gráfico tensión - deformación para el caso de danyo isótropo

En el gráfico anterior (Figura 4.12) podemos ver la evolución de la tensión en función de la deformación del elemento. Se aprecia claramente el carácter no lineal del problema, pues la gráfica sigue una ley parabólica. Ésta parábola viene dada por la dependencia cuadrática de la tensión respecto la deformación.

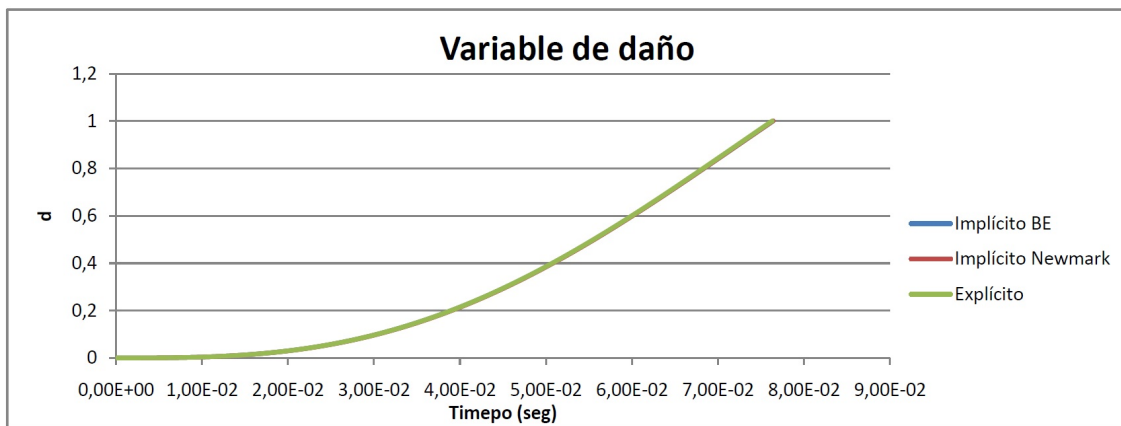
3.1.2. Evolución de la variable de daño

Si nos fijamos en la evolución de la variable de daño d respecto el número de iteraciones vemos que sigue la siguiente forma (Figura 4.13).

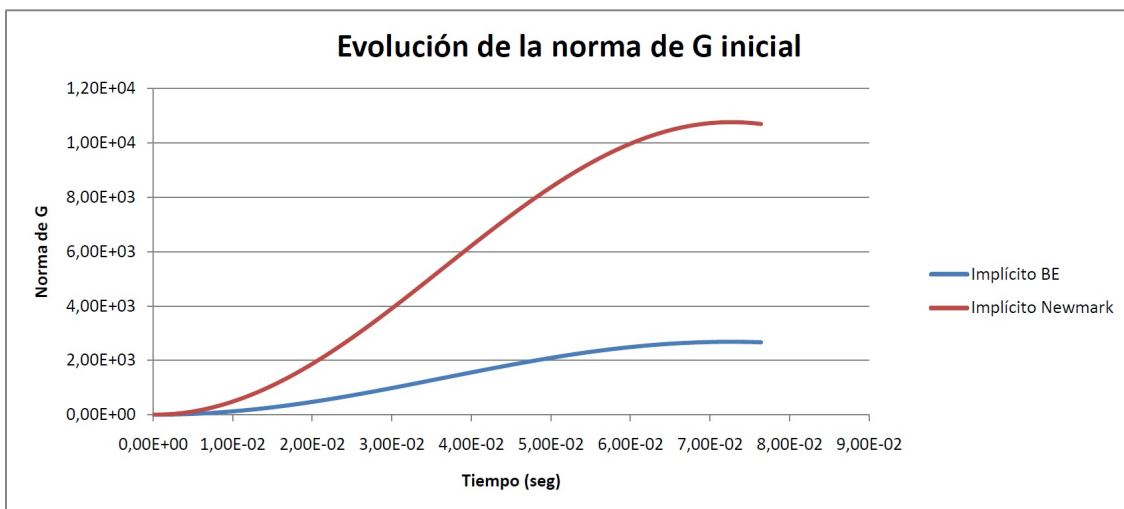
Vemos que la variable de daño no sigue una ley lineal en el tiempo, sino que va creciendo de forma cuadrática cuando crecen los pasos de tiempo. Este comportamiento se puede explicar teniendo en cuenta la relación entre la variable de daño y la deformación. Esta relación es lineal, entonces, si la deformación varía cuadráticamente con el tiempo, la variable de daño también lo hará.

3.1.3. Evolución del vector G

Otra variable que debe ser analizada para este caso es el vector G , que es igual a cero cuando se cumple el equilibrio. La no linealidad del problema se refleja en el número de iteraciones que se deben efectuar en cada paso de tiempo para que este vector sea igual a cero.

Figura 4.13: Evolución de la variable de daño d

A continuación se muestra la evolución de la norma del vector \mathbf{G} ($\|\mathbf{G}\|$) a lo largo de las iteraciones y pasos de tiempo. Como es lógico, al final de las iteraciones de cada paso de tiempo, la norma de este vector será nula, cumpliendo el criterio de convergencia. Por este motivo, en la figura sólo se representa la norma del vector \mathbf{G} de la primera iteración de cada paso de tiempo (\mathbf{G}^0).

Figura 4.14: Evolución de la norma del vector \mathbf{G} inicial

Esta variable sigue dos evoluciones en el tiempo, una de general y otra de particular. La general muestra el valor inicial de la variable en cada incremento de tiempo. En cambio, la evolución particular, que está bien definida en la imagen anterior, depende de las iteraciones que se efectúan dentro del paso de tiempo.

Si nos fijamos en la evolución general de la norma de \mathbf{G}^0 podemos ver que sigue un comportamiento cuadrático respecto del tiempo. Este comportamiento se podría relacionar con el comportamiento de la variable d respecto del tiempo, puesto que el vector \mathbf{G} depende de la variable de daño.

Para analizar el comportamiento particular en cada incremento de tiempo se muestran los siguientes gráficos correspondientes a distintos instantes de tiempo con la variable de daño fijada. En este caso se ha optado por una escala logarítmica para poder ver el grado de convergencia a la solución para cada paso de tiempo representado.

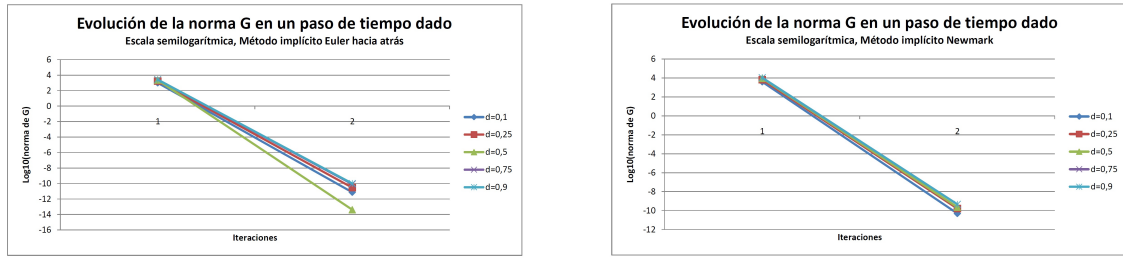


Figura 4.15: Evolución de la norma de \mathbf{G} para los pasos de tiempo determinados en el método de Euler hacia atrás y Newmark, respectivamente. Test incremental.

En este gráfico queda claro que la convergencia de las distintas iteraciones sigue más o menos el mismo grado. Podemos ver que las rectas son casi paralelas entre sí, por lo que los grados de convergencia variarán poco.

Para definir el grado de convergencia de las iteraciones se muestra la tabla siguiente con los distintos valores para cada método.

| d | Método de Euler hacia atrás | | | Método de Newmark | | |
|------|-----------------------------|-------------|-------|-----------------------------|-------------|-------|
| | $\log_{10}(\ \mathbf{G}\)$ | | Grado | $\log_{10}(\ \mathbf{G}\)$ | | Grado |
| | Iteración 1 | Iteración 2 | | Iteración 1 | Iteración 2 | |
| 0,10 | 3,00 | -11,14 | -3,71 | 3,60 | -10,30 | -2,86 |
| 0,25 | 3,23 | -10,54 | -3,26 | 3,83 | -9,78 | -2,56 |
| 0,50 | 3,37 | -13,38 | -3,97 | 3,97 | -9,63 | -2,43 |
| 0,75 | 3,42 | -10,08 | -2,95 | 4,02 | -9,33 | -2,32 |
| 0,90 | 3,43 | -10,00 | -2,92 | 4,03 | -9,33 | -2,31 |

Cuadro 4.1: Análisis de convergencia para el test incremental en el caso de daño isótropo

En la tabla anterior podemos ver que el grado de convergencia de la función \mathbf{G} es mayor que 2. Vemos que para valores más grandes de daño, la convergencia también es mayor.

El problema que observamos en estos datos es que solo tenemos dos iteraciones antes de la convergencia, con lo que la determinación del grado de convergencia a la solución es poco preciso.

Al tratarse de incrementos de tiempo muy pequeños y con una fuerza incremental, los dos métodos convergen de forma más que cuadrática. Para apreciar mejor el carácter cuadrático de la convergencia a la solución de los dos métodos implícitos, se realizará el análisis de convergencia para el test de impacto. En este caso, al tener una evolución de la deformación mucho más variable, serán necesarias más iteraciones en cada paso de tiempo.

3.2. Test de impacto

Una vez implementados los distintos métodos de resolución para el modelo de daño isótropo y analizados los resultados para el caso de carga creciente, se realiza un test de impacto de la misma forma que en el caso elástico lineal.

Como se ha descrito en el caso elástico lineal, el test de impacto consiste en aplicar una fuerza externa en el primer paso de tiempo y después quitarla, permitiendo que el cuerpo se deforme siguiendo una ley oscilatoria (Figura 4.16).

En este caso, pero, al tener daño en el material, el comportamiento será distinto, ya que el daño crece con la deformación del elemento, de forma que a medida que la deformación crezca también lo hará el daño en el material. Si la deformación llega a la amplitud máxima del caso de carga sin que la variable de daño haya llegado a su valor máximo ($d = 1$), el elemento seguirá un movimiento oscilatorio. En cambio, si la variable de daño llega a su valor máximo antes de que la deformación

alcanza su máxima amplitud, el material alcanza la rotura total por lo que no se dará ningún tipo de movimiento del elemento.

3.2.1. Fuerza distinta para cada caso de carga

Dado que nos interesa ver el comportamiento oscilatorio para cada método, las fuerzas externas aplicadas al elemento variarán de forma que no se alcance la rotura del material, pudiendo analizar el estado permanente después del daño máximo para distintos incrementos de tiempo. Es lógico pensar que para incrementos de tiempo más grande tendremos que aplicar una fuerza más pequeña si queremos que el material no llegue a la rotura. Esto se justifica teniendo en cuenta que el tiempo durante el cual se aplica la fuerza es igual al de un incremento de tiempo, por lo que para un incremento más grande las deformaciones inducidas también serán mayores. También se explica por el impulso ejercido por la fuerza sobre el cuerpo.

A grandes rasgos, el impulso se define como la fuerza multiplicada por el tiempo que esta está actuando. Así para una misma fuerza, si aumentamos el incremento de tiempo, el impulso será mayor.

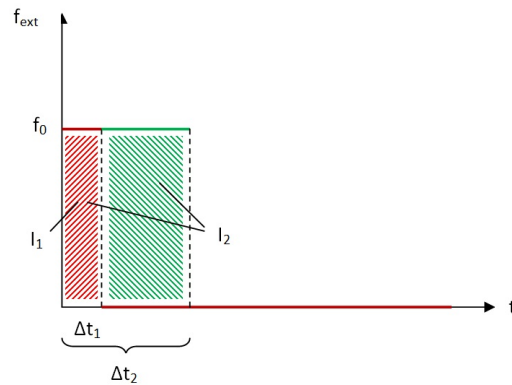


Figura 4.16: Fuerza externa aplicada al elemento en función del tiempo en el caso de impacto

De la misma forma que en el caso elástico lineal, se tratarán distintos casos de carga, variando los incrementos de tiempo y la fuerza aplicada. Por otro lado, el test se realizará con los mismos parámetros con los que se ha contado en el caso elástico lineal, es decir, test de compresión, con 500 pasos de tiempo.

Caso 1 ($\Delta t = \Delta t_{crit}$, $F_0 = F_{ext_{final}}$)

En este caso el incremento de tiempo utilizado es el tiempo crítico que se define según el criterio utilizado en el test de impacto para el caso elástico lineal. Este incremento de tiempo es muy pequeño, por lo que, con 500 pasos de tiempo, el intervalo descrito de la evolución del elemento será muy pequeño.

A continuación se puede ver la evolución de la deformación del elemento respecto del tiempo para los distintos métodos en este caso de carga.

Como se puede observar, se sigue el mismo comportamiento en todos los métodos implementados. Para ver qué estado de daño se ha alcanzado en esta evolución de la deformación, se muestra la siguiente imagen (Figura 4.18), donde aparece la variable de daño d en función del tiempo.

Se ve que transcurren los 500 pasos sin que se alcance la rotura del material, llegando la variable d a un valor de $1,15 \cdot 10^{-4}$ de un máximo de 1.

En este caso se ve claro que los incrementos de tiempo son suficientemente pequeños para que las deformaciones y el daño para los distintos métodos de resolución sean iguales. Así pues, si

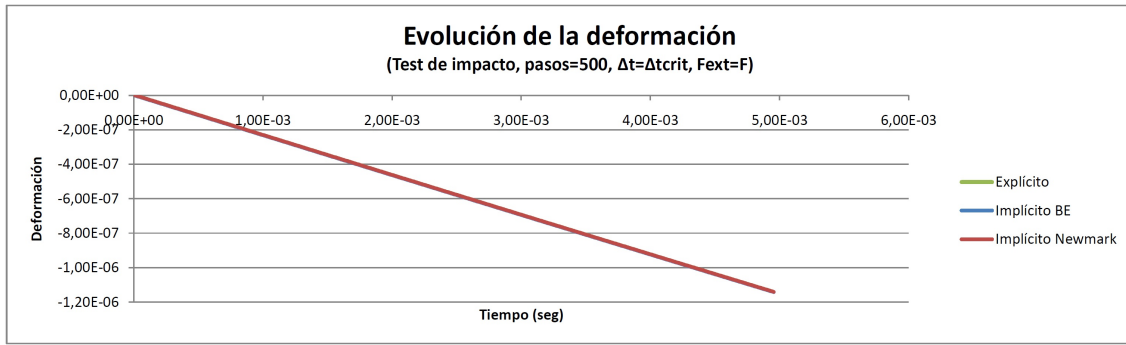


Figura 4.17: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 1

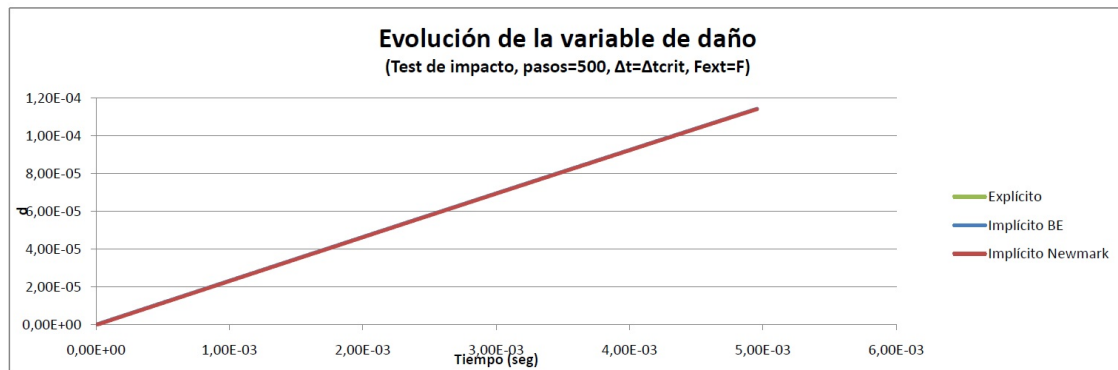


Figura 4.18: Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 1

queremos ver diferencias entre los distintos métodos tendremos que aumentar el incremento de tiempo Δt .

Caso 2 ($\Delta t = 10\Delta t_{crit}$, $F_0 = F_{extFinal}$)

Visto que en el caso anterior no se apreciaban diferencias entre los distintos métodos, para este caso se ha aumentado el incremento de tiempo diez veces ($\Delta t = 10\Delta t_{crit}$), manteniendo la fuerza inicial ($F_0 = F_{extFinal}$).

Si nos fijamos en la evolución de la deformación con el tiempo, se obtiene la siguiente gráfica.

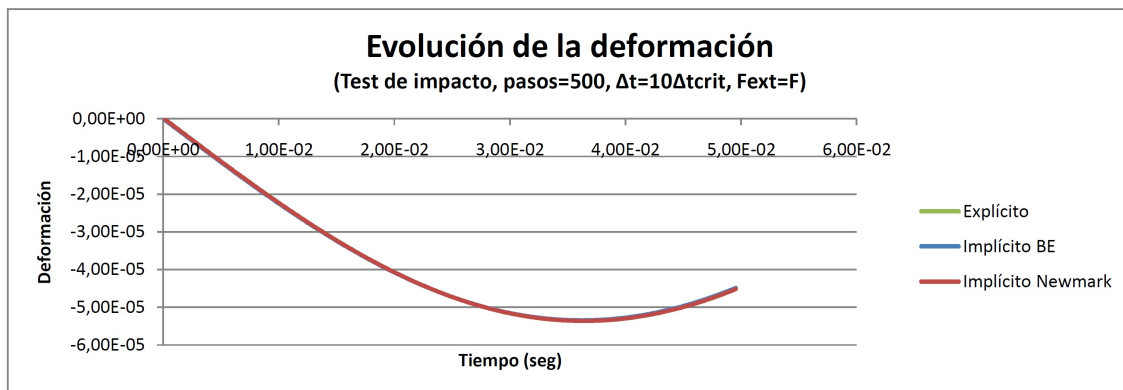


Figura 4.19: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 2

Para este caso, con 500 pasos se describe un tramo mayor de la evolución de la deformación

en función del tiempo. Podemos ver en la Figura 4.19 como la evolución alcanza un máximo y empieza a disminuir. Se puede intuir, pues, que la deformación seguirá una ley sinusoidal a partir de este punto.

Cuando la deformación alcanza el máximo, la variable de daño también lo hace; manteniéndose constante a partir de este punto.

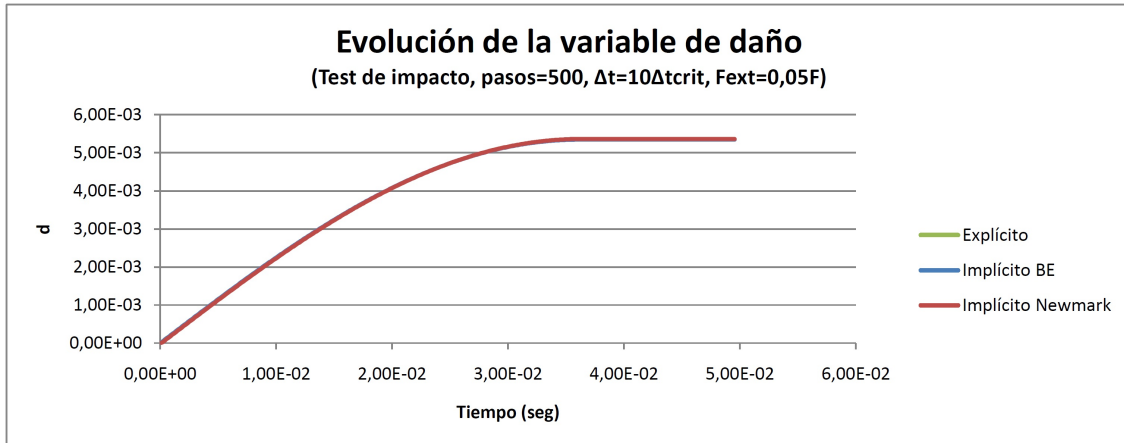


Figura 4.20: Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 2

Para verificar este comportamiento se muestra la evolución de la variable de daño d en función del tiempo (Figura 4.20). En efecto, a partir del momento en que la deformación alcanza el máximo, el daño permanece constante.

Podemos destacar también, que tanto la deformación como la variable de daño presentan valores más elevados que en el caso anterior. Esto es debido al efecto de un mayor impulso, comentado en el inicio del apartado.

Puesto que lo que nos interesa ver es el comportamiento de los distintos métodos con una evolución más prolongada de la deformación, en el próximo caso se aumentará el incremento de tiempo utilizado para el cálculo.

Caso 3 ($\Delta t = 50\Delta t_{crit}$, $F_0 = F_{extFinal}$)

Como en los casos anteriores la variable de daño alcanzaba un máximo muy pequeño, podemos aumentar el incremento de tiempo sin que el material llegue a la rotura. De esta forma observaremos una mayor evolución de la deformación.

Para este caso se utiliza un incremento de tiempo 5 veces superior al caso anterior ($\Delta t = 50\Delta t_{crit}$), lo que nos permitirá ver más de una oscilación de la deformación en 500 pasos de tiempo. La fuerza se mantiene constante ($F_0 = F_{extFinal}$).

Este comportamiento se muestra en la siguiente figura.

Podemos ver que en este caso la deformación sigue una ley oscilatoria una vez aplicada la fuerza inicial. Se aprecian ciertas diferencias entre los tres métodos implementados. El método implícito de Euler hacia atrás presenta una amortiguación de las oscilaciones, mientras que los otros dos métodos se mantienen con amplitud y periodo constante. Pese a que los métodos de Newmark y explícito tienen el mismo periodo y amplitud, se puede apreciar una leve disminución del periodo para el método de Euler hacia atrás. Esta disminución de periodo esta asociada al amortiguamiento numérico del método.

Es importante destacar en este caso las condiciones de carga y descarga del modelo de daño, ya que el modelo implementado considera que hay daño siempre que se produzca un movimiento en los nodos del elemento. Pero la evolución del daño se debe parar cuando este movimiento disminuye,

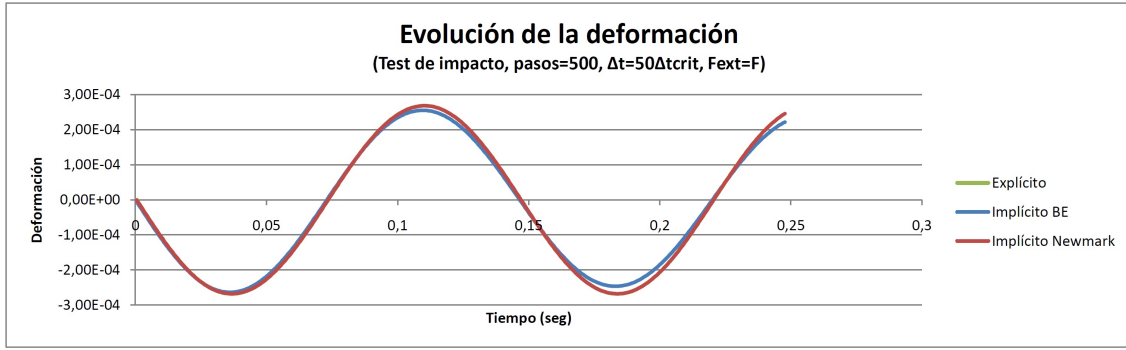


Figura 4.21: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 3

es decir, dado el daño en un paso de tiempo, no es posible que el posterior sea menor ni que el anterior sea mayor.

$$\begin{aligned} d_{n+1} \geq d_n &\Rightarrow d_{n+1} = d_{n+1} \\ d_{n+1} < d_n &\Rightarrow d_{n+1} = d_n \end{aligned} \quad (4.1)$$

El mismo criterio se utiliza para las distintas iteraciones en un paso de tiempo dado en los métodos implícitos.

$$\begin{aligned} d_{n+1}^k \geq d_n &\Rightarrow d^k = d^k \\ d_{n+1}^k < d_n &\Rightarrow d_{n+1}^k = d_n \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para ver el comportamiento de la variable de daño en una evolución oscilatoria de los desplazamientos se muestra la siguiente imagen.

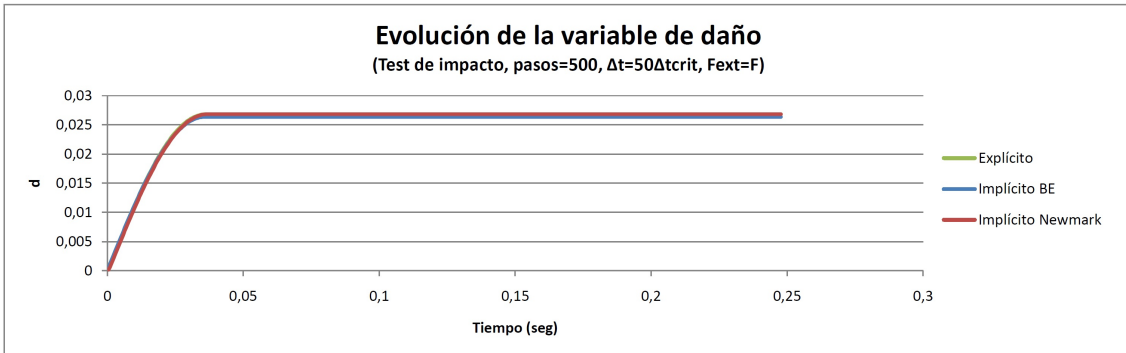


Figura 4.22: Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 3

En la figura 4.22 se ve como la variable de daño se incrementa hasta que la deformación llega a su máximo. A partir de este punto se mantiene constante.

Cuando el daño no evoluciona, es decir, ya se ha llegado a un desplazamiento máximo (respecto al estado de equilibrio inicial) que no se supera, el comportamiento del material es elástico lineal pero con las propiedades cambiadas (el tensor constitutivo se ve modificado por la variable de daño). En este caso no tiene sentido utilizar la matriz de rigidez tangente encontrada para este modelo de daño. Así, cuando se cumpla la condición de no evolución de daño se utilizará la matriz de rigidez derivada de la energía del material.

$$\begin{aligned} d_{n+1} \geq d_n &, \quad d_{n+1}^k \geq d_n \Rightarrow \mathbf{K}_t = \mathbf{K} + \bar{\mathbf{K}} \\ d_{n+1} < d_n &, \quad d_{n+1}^k < d_n \Rightarrow \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Caso 4 ($\Delta t = 140\Delta t_{crit}$, $F_0 = F_{extFinal}$)

Una vez visto el comportamiento de los distintos métodos para un incremento de tiempo suficientemente grande, en el caso 4 se pretende ver en que punto el método explícito empieza a tener inestabilidades.

Este incremento de tiempo es $\Delta t = 140\Delta t_{crit}$. De la misma forma que se ha argumentado en el caso anterior, la fuerza aplicada es suficientemente pequeña para que el material no alcance el estado de rotura total, por lo que se mantendrá la misma fuerza externa que en los casos anteriores.

Con este incremento de tiempo tan grande el método explícito se vuelve inestable después de 177 pasos de tiempo. Si representamos la evolución de la deformación para este caso de carga, observamos que hay un instante de tiempo a partir del cual las oscilaciones del método explícito cambian ligeramente de amplitud y periodo.

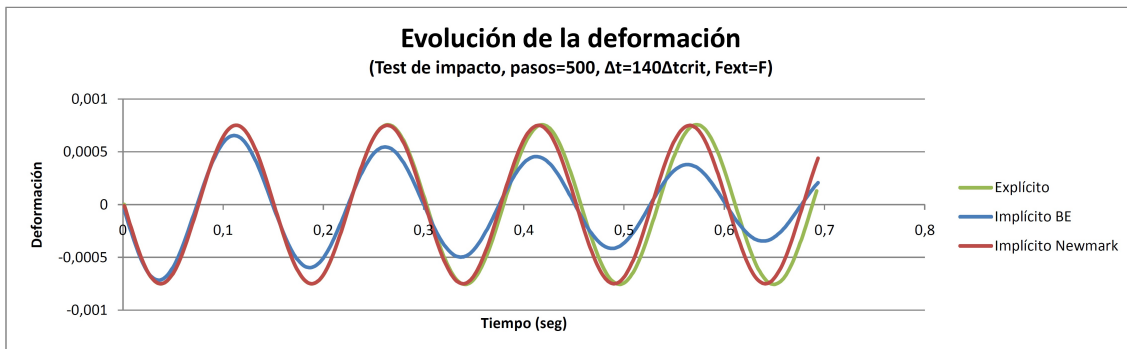


Figura 4.23: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 4

En este caso, como es el instante en que aparecen las primeras inestabilidades para el método explícito, no se aprecian diferencias demasiado significativas respecto a los casos anteriores.

Donde sí observamos claramente una inestabilidad, es en la evolución de la variable de daño. En la Figura 4.24 se advierte que en el incremento de tiempo donde se produce la inestabilidad hay un salto considerable del valor de la variable de daño.

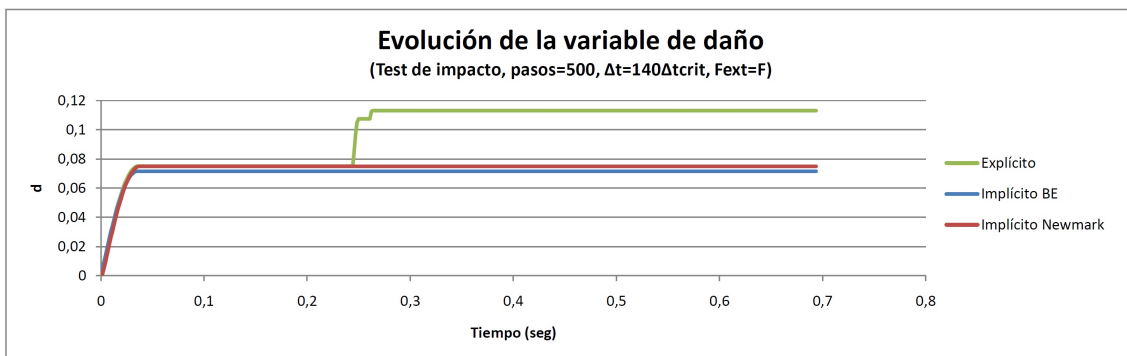


Figura 4.24: Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 4

En este caso aparece el problema de la no convergencia de la ecuación de equilibrio para los métodos implícitos. Hay ciertas iteraciones en las que la ecuación de equilibrio no se cumple porque no se puede llegar a la convergencia. En estas iteraciones se tiene resultado porque se limita el número máximo de iteraciones para cada paso de tiempo, en este caso 20.

Para observar mejor los resultados una vez se alcanzan inestabilidades en el método explícito, aumentamos el valor de los incrementos de tiempo.

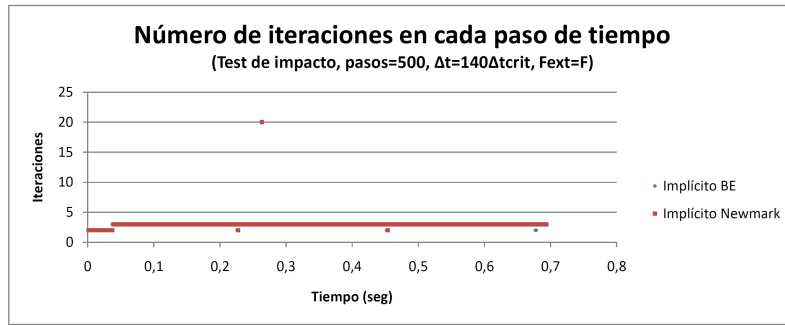


Figura 4.25: Número de iteraciones en cada paso de tiempo respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 4

Caso 5 ($\Delta t = 180\Delta t_{crit}$, $F_0 = F_{ext_{Final}}$)

Para este caso se considera la misma fuerza aplicada, pero los incrementos de tiempo toman un valor de $\Delta t = 180\Delta t_{crit}$.

Dadas estas variables, podemos observar la evolución de la deformación respecto del tiempo en la siguiente figura (Figura 4.26).

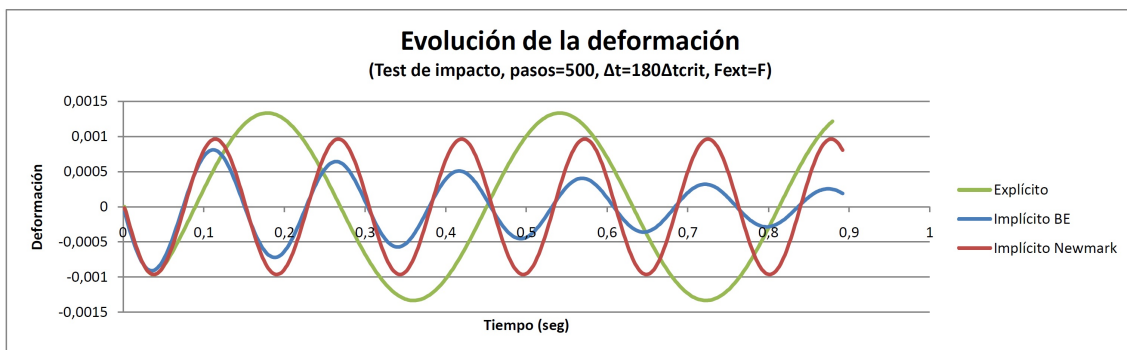


Figura 4.26: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 5

Se observa como hay dos puntos a partir de los cuales el periodo y amplitud de la evolución de la deformación para el método explícito varían. Este hecho es debido a que aparece una variación brusca de la variable de daño causada por las inestabilidades del problema.

Para observar estas alteraciones de la variable de daño se presenta su evolución en la siguiente figura, donde se aprecia claramente el instante en que se producen.

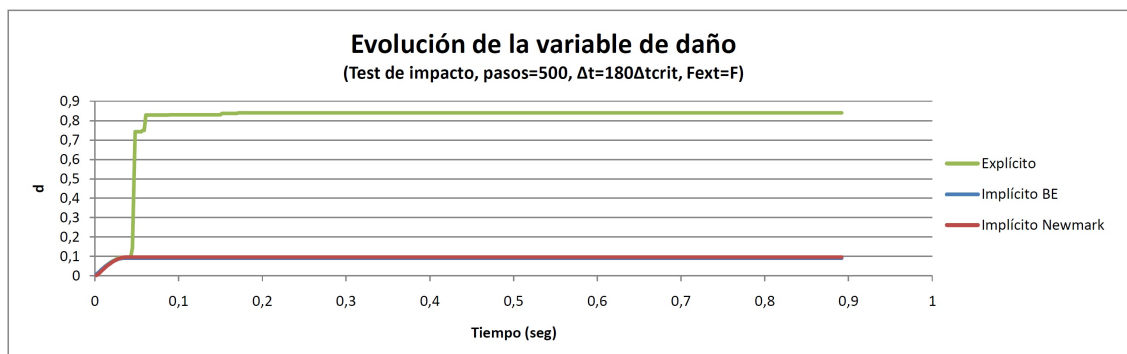


Figura 4.27: Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo en el caso de daño isótropo 5

Al no tener una amplitud de deformación constante, la variable de daño tampoco lo será. Este hecho provocará que el tensor constitutivo del material también varíe una vez superado el pico de la primera oscilación. Cuando el tensor constitutivo del material es variable, la amplitud y el periodo de la deformación también lo serán. Este proceso inestable se irá repitiendo hasta que la deformación en el elemento sea tan grande que cause la rotura del material.

3.2.2. Fuerza constante para todos los casos de carga

Para poder comparar la evolución de la deformación para distintos incrementos de tiempo, es necesario que la fuerza aplicada sea la misma y durante el mismo tiempo. Así, el elemento está sometido a la misma carga y podemos comparar los distintos resultados.

Seguidamente continuaremos el test de impacto, pero con una carga aplicada durante un tiempo constante para todos los casos. La carga aplicada en este segundo test será la menor utilizada en los casos anteriores, pues se quiere evaluar la evolución del comportamiento del material con daño, pero sin rotura total. Como en todos los casos anteriores, no se ha tenido que reducir la carga externa por efecto del aumento del incremento, la carga en este apartado será la misma ($F_0 = F_{ext\,Final}$).

De esta forma se partirá de un esquema de carga como el que se muestra a continuación.

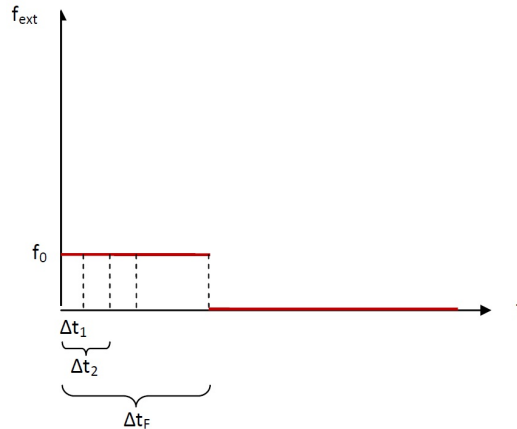


Figura 4.28: Fuerza externa aplicada al elemento en función del tiempo en el caso de impacto con fuerza constante

Donde Δt_i son los incrementos de tiempo para cada caso y Δt_F es el tiempo durante el cual la fuerza está actuando sobre el elemento. En este caso, se toma Δt_F igual al incremento máximo considerado en el apartado anterior.

$$\Delta t_F = 180\Delta t_{crit}$$

En este test, los resultados para cada caso de carga deberían ser los mismos. Es decir, variando el incremento de tiempo utilizado para la resolución del problema y manteniendo constante el tiempo durante el cual la fuerza externa está actuando, la evolución de la deformación debería seguir la misma ley.

En este apartado, pues, los incrementos utilizados deben ser divisores del tiempo de aplicación de la carga. Es decir, si el incremento no fuera un divisor del tiempo total de aplicación de la fuerza, el impulso total aplicado sobre el elemento no sería el mismo, dando resultados distintos. Así pues, los incrementos de tiempo elegidos son: Δt_{crit} , $10\Delta t_{crit}$, $20\Delta t_{crit}$, $30\Delta t_{crit}$, $60\Delta t_{crit}$, $90\Delta t_{crit}$ y $180\Delta t_{crit}$, tomando Δt_{crit} como un valor constante.

$$\Delta t_{crit} = 9,901 \cdot 10^{-6} \text{ seg}$$

El número de iteraciones dependerá del incremento de tiempo utilizado. Dado que se quiere comparar los resultados entre los distintos incrementos de tiempo, el tiempo total debe ser el mismo. Tomaremos como tiempo total el que nos permita ver una parte suficientemente significativa de la evolución de la deformación. Así, si nos fijamos en el último caso del apartado anterior, para un tiempo de 1 segundo la evolución descrita es suficiente. De esta forma, el número máximo de iteraciones para cada caso será:

$$n_{incr_i} = \frac{1}{\Delta t_i}$$

Los resultados obtenidos en este test se muestran teniendo en cuenta el método de resolución utilizado. De esta forma podemos comparar el funcionamiento de cada método en función del paso de tiempo utilizado.

Método de Euler hacia atrás

Para el método de Euler, la evolución de la deformación según el incremento de tiempo es la que se puede ver en el gráfico siguiente.

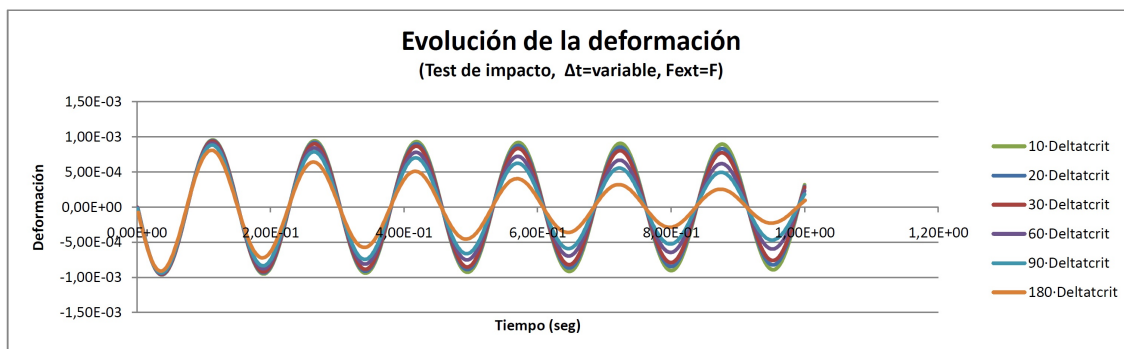


Figura 4.29: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo para el método de Euler hacia atrás

En la figura anterior podemos ver como a medida que el incremento de tiempo aumenta, hay una mayor amortiguación del resultado. Debemos recordar que esta amortiguación viene dada por problemas internos del propio método, puesto que el problema matemático a resolver no incorpora ninguna variable de amortiguamiento físico.

Este comportamiento hace que la evolución del daño también sea distinta según el incremento de tiempo que escojamos. De esta forma, tal i como se muestra a la siguiente figura, como la amplitud de deformación para la primera oscilación va disminuyendo por el efecto de la amortiguación, la variable de daño también irá disminuyendo en su valor máximo.

Viendo estos resultados, podemos sacar la conclusión de que el método de Euler hacia atrás no da unos resultados aceptables para incrementos de tiempo grandes, pues la amortiguación implícita en el método hace que los resultados no sean los realmente esperados.

Método de Newmark

Tal como se ha procedido con el método de Euler hacia atrás, a continuación se presenta la evolución de la deformación en función del tiempo para distintos incrementos de tiempo utilizando el método de Newmark.

Si nos fijamos en la figura 4.31, podemos ver que solamente se distingue una trayectoria de la evolución de la deformación con el tiempo.

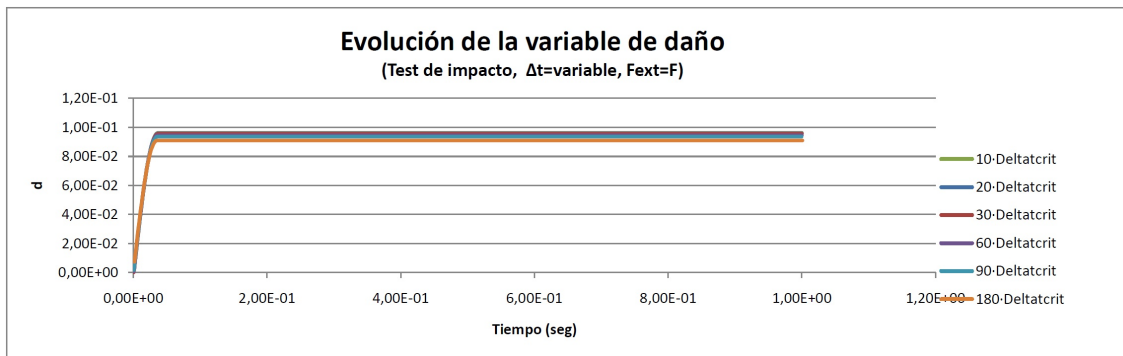


Figura 4.30: Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo para el método de Euler hacia atrás

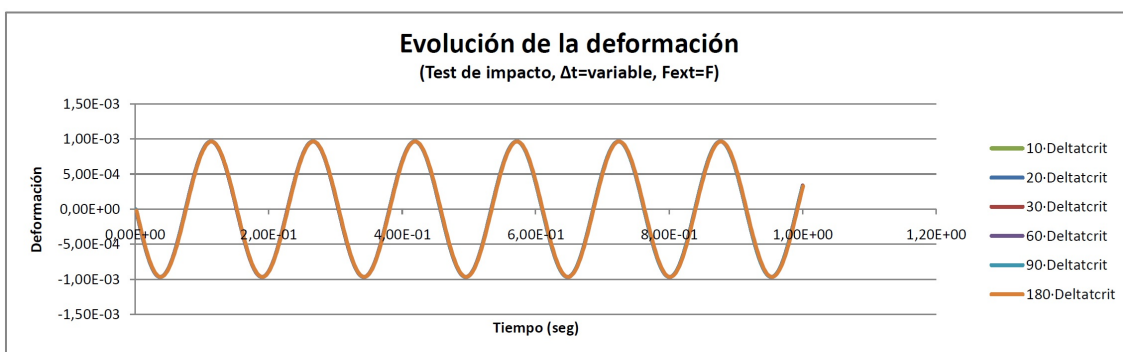


Figura 4.31: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo para el método de Newmark

Todos los incrementos de tiempo analizados Δt_{crit} , $10\Delta t_{crit}$, $20\Delta t_{crit}$, $30\Delta t_{crit}$, $60\Delta t_{crit}$, $90\Delta t_{crit}$ y $180\Delta t_{crit}$ siguen una única trayectoria (color ocre).

Es importante destacar que, para este método, todos los incrementos dan el mismo resultado. Tal como vamos viendo hasta el momento, el método de Newmark no presenta ningún comportamiento de amortiguamiento, de inestabilidad o de alteración de la solución.

Para comprobar la uniformidad de la solución en todos los incrementos de tiempo, se muestra la evolución de la variable de daño.

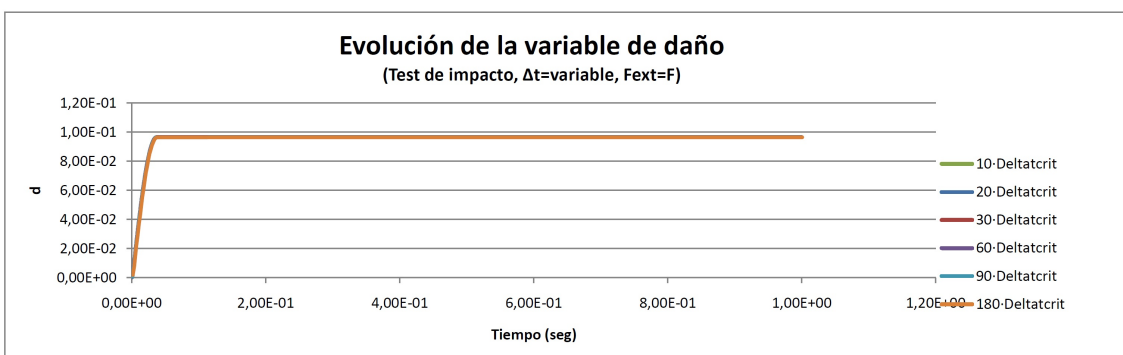


Figura 4.32: Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo para el método de Newmark

Así, podemos afirmar que el método de Newmark presenta un buen comportamiento frente a incrementos de tiempo grandes, ya sean superiores o muy superiores al crítico.

Método Explícito

Para este método, los resultados obtenidos para la evolución de la deformación con el tiempo son los que se muestran en la Figura 4.33.

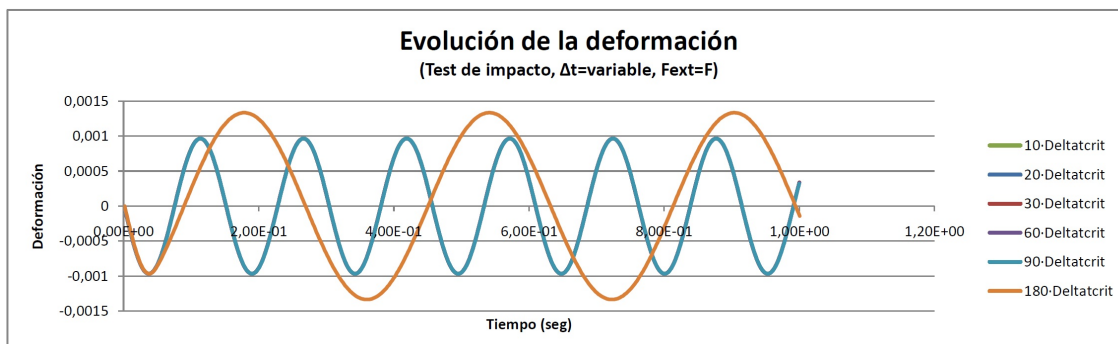


Figura 4.33: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo para el método explícito

En el gráfico anterior se distinguen dos trayectorias distintas. En primer lugar tenemos una trayectoria para el incremento de tiempo $\Delta t = \Delta t_{crit}$, $10\Delta t_{crit}$, $20\Delta t_{crit}$, $30\Delta t_{crit}$, $60\Delta t_{crit}$ y $90\Delta t_{crit}$ (azul). A parte de esta, el incremento de tiempo $180\Delta t_{crit}$, sigue otra trayectoria distinta a la anterior (ocre).

La trayectoria azul es la esperada y la que sigue el método de Newmark, por lo que consideramos que para un incremento de tiempo inferior a 140 veces el crítico, el método explícito se comporta correctamente.

Cuando el incremento de tiempo llega a 140 veces el crítico, aparecen inestabilidades en el método explícito y la evolución de la deformación y de la variable de daño son completamente distintas a las obtenidas con pasos de tiempo menores.

Para ver esta inestabilidad, mostramos la evolución de la variable de daño (Figura 4.34), donde se aprecia claramente el instante en el cual empieza a aumentar la deformación sin que haya una fuerza externa aplicada.

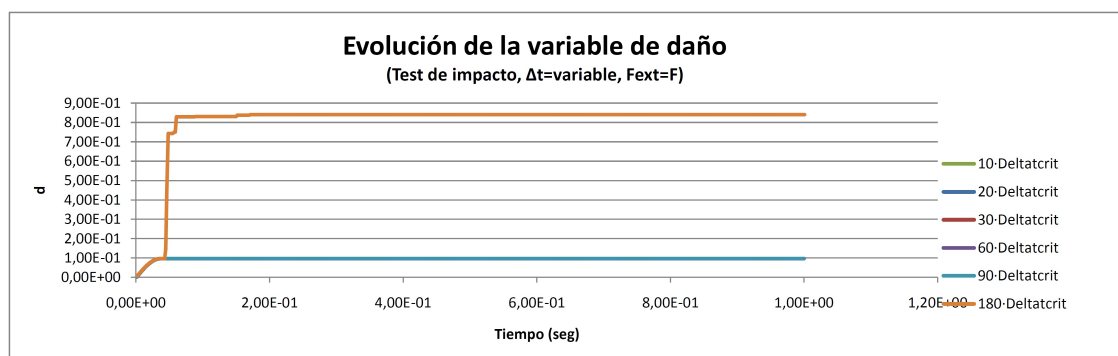


Figura 4.34: Evolución de la variable de daño d respecto del tiempo para el método explícito

Para este método podemos concluir, que, tal y como se predecía, para incrementos de tiempo grandes los resultados no son fiables, ya que cuando aumentamos el tiempo de cada paso podemos incurrir en una inestabilidad propia de los métodos explícitos.

3.2.3. Análisis de convergencia

Tal como se ha hecho para el caso de una fuerza incremental, se realiza el análisis de convergencia a la solución de los dos métodos implícitos para el test de impacto.

Para el caso de carga incremental los resultados obtenidos no eran suficientemente significativos porque la solución convergía en dos iteraciones para todos los pasos de tiempo. En el test de impacto, pero, son necesarias más iteraciones porque la variación de los desplazamientos y, por lo tanto, de la deformación es más pronunciada.

Procediendo de la misma forma que en el análisis de convergencia anterior, nos fijaremos en el valor de la norma del vector \mathbf{G} para cinco instantes de tiempo, fijando el paso de tiempo. De esta forma nos aseguramos que los pasos de tiempo que estamos analizando son equivalentes para los dos métodos tratados.

Dado que para el método de Euler hacia atrás los resultados más fiables son los que se obtienen con un incremento de tiempo pequeño, el incremento de tiempo utilizado para obtener la evolución del vector \mathbf{G} será el definido como crítico Δt_{crit} . La fuerza aplicada para este análisis será la misma que se ha utilizado en el test de impacto con fuerza constante para todos los incrementos de tiempo.

Por otro lado, si nos fijamos en los resultados obtenidos en el apartado anterior, la variable de daño no alcanza el valor de 0,1. Teniendo en cuenta este dato y que la norma de \mathbf{G} en la primera iteración aumenta cuando no hay evolución de daño y la deformación oscila, se fijarán los pasos de tiempo en $t = 0,1$, $t = 0,25$, $t = 0,5$, $t = 0,75$ y $t = 1,0$ segundos.

Los valores obtenidos para los distintos métodos, son los que se muestran en la siguiente tabla.

| t (s) | Método de Euler hacia atrás | | | Método de Newmark | | |
|---------|-----------------------------|-------------|-------------|-------------------|-------------|-------------|
| | $\ \mathbf{G}\ $ | | | $\ \mathbf{G}\ $ | | |
| | Iteración 1 | Iteración 2 | Iteración 3 | Iteración 1 | Iteración 2 | Iteración 3 |
| 0,10 | 222,813 | 0,112 | 7,28E-12 | 901,816 | 0,114 | 2,91E-11 |
| 0,25 | 256,747 | 0,086 | 1,78E-11 | 1057,345 | 0,090 | 2,91E-11 |
| 0,50 | 83,0171 | 0,155 | 1,03E-11 | 334,7675 | 0,176 | 4,12E-11 |
| 0,75 | 348,507 | 0,019 | 5,14E-12 | 1494,674 | 0,022 | 2,06E-11 |
| 1,00 | 366,757 | 0,007 | 5,14E-12 | 1601,864 | 0,008 | 2,91E-11 |

Cuadro 4.2: Análisis de convergencia para el test de impacto en el caso de daño isótropo

Expresando los resultados mostrados en la tabla anterior en escala logarítmica de base 10 y representándolos en un gráfico, obtenemos las figuras que se muestran a continuación.

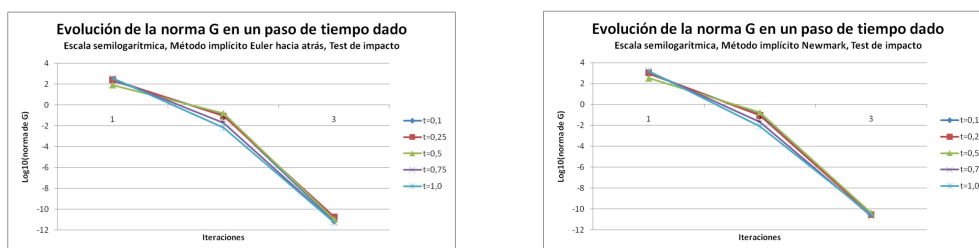


Figura 4.35: Evolución de la norma de \mathbf{G} para los pasos de tiempo determinados en el método de Euler hacia atrás y Newmark, respectivamente

En ambas imágenes presentadas en la figura anterior podemos ver un comportamiento cuadrático en la convergencia a la solución. Esta tendencia no se podía apreciar en el análisis con carga incremental porque solo teníamos 2 iteraciones para cada paso de tiempo. En el caso que nos ocupa, el hecho de que la evolución de la deformación no sea tan monótona hace que tengamos más iteraciones y que quede más claro la relación cuadrática de la convergencia.

Este resultado es el esperado, ya que en cada paso de tiempo estamos resolviendo el problema con el método de Newton-Rapson, el cual debe tener una convergencia cuadrática.

3.2.4. Conclusiones del test de impacto para el modelo de daño isótropo

Una vez analizados todos los casos mediante todos los métodos, se pueden sacar algunas conclusiones muy claras.

En primer lugar podemos decir que todos los métodos dan la misma solución para incrementos de tiempo muy pequeños.

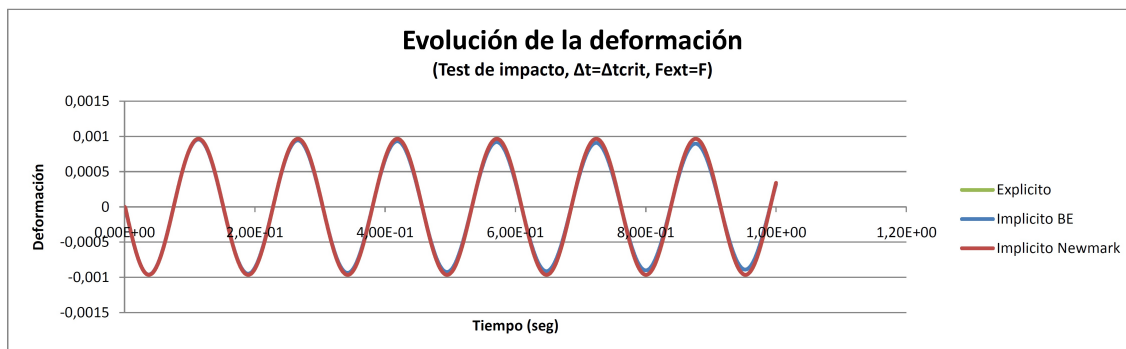


Figura 4.36: Evolución de la deformación ϵ_{xx} respecto del tiempo para un incremento de tiempo igual al crítico

En efecto, si nos fijamos en la figura (Figura 4.36), podemos ver que para un incremento de tiempo igual al definido como crítico, las evoluciones de la deformación siguen la misma trayectoria para los tres métodos.

A medida que vamos aumentando el incremento de tiempo de los métodos, los resultados ya no son los mismos. El método de Euler hacia atrás tiene un cierto amortiguamiento que hace que la solución encontrada mediante este método no sea fiable. Entonces, podemos decir que para incrementos de tiempo ligeramente superiores al definido como crítico, solo son fiables el método explícito Europlexus y el método implícito de Newmark.

Esta afirmación es cierta hasta que el método explícito empieza a tener inestabilidades. Ello ocurre cuando el incremento de tiempo se encuentra alrededor de 180 veces al definido como crítico. A partir de este punto el método explícito deja de ser válido y solo nos podemos fiar de la solución del método implícito de Newmark.

Como se puede comprobar, se cumplen parcialmente las predicciones hechas en el inicio del test de impacto, donde se decía que los métodos implícitos, a diferencia de los explícitos, deberían mostrar el mismo comportamiento con incrementos de tiempo tanto pequeños como grandes.

Vistos los resultados y extraídas las conclusiones solo falta añadir que, en los análisis de los apartados que siguen, solo se tendrán en cuenta los métodos explícito y implícito de Newmark. Se descarta la verificación de resultados por el método de Euler hacia atrás porque tiene problemas de amortiguamiento de la solución para incrementos de tiempo grandes. También se descarta la verificación por el método de Crank-Nicolson, que ya no hemos utilizado debido a que da los mismos valores que el método de Newmark.

3.3. Conservación de la energía

Una vez justificada la conservación de la energía en el algoritmo planteado para el método de resolución, se deben verificar los resultados. Para hacerlo se plantea el test de impacto con el incremento de tiempo que nos permita ver más diferencias entre los distintos métodos. Por ello, se analizarán los resultados correspondientes al último caso del test de impacto planteado en el apartado anterior ($\Delta t = 180\Delta t_{crit}$).

De este modo, podemos mostrar la estabilidad incondicional del método de Newmark y la

inestabilidad de los métodos explícito y implícito de Euler hacia atrás. Para ello, a continuación se muestra la evolución de la energía, la evolución de la variable de daño y la evolución de la fuerza externa aplicada al elemento para cada uno de los métodos.

El intervalo de tiempo analizado es de 0 a 0,1 segundos ya que a partir de $t = 0,1$ la evolución tanto de la energía como de la variable de daño y la fuerza, no tiene variaciones.

Método de Newmark

Para este método, se espera que la energía sufra variaciones mientras hay evolución del daño y que cuando este se mantenga constante también lo haga la energía. Para comprobarlo se muestra la siguiente figura (Figura 4.37) donde se puede ver la evolución de la energía, la variable de daño y la fuerza externa aplicada.

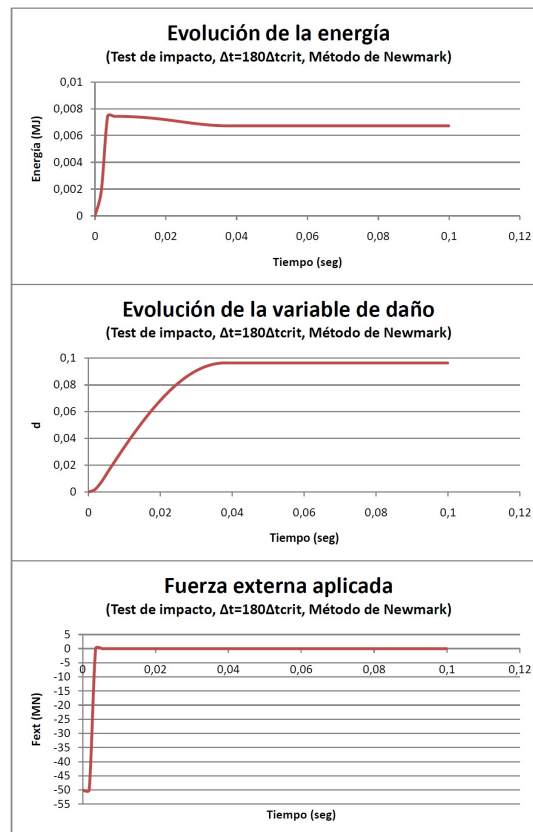


Figura 4.37: Evolución de la energía, variable de daño y fuerza aplicada para el método de Newmark

Como podemos ver en la Figura 4.37, la evolución de la energía sigue el comportamiento esperado. Comprobamos que hay una primera fase donde la energía aumenta de forma pronunciada. Esta fase coincide con el tiempo de aplicación de la carga externa. En esta misma fase también hay variación de daño pero el trabajo disipado por las fuerzas de disipación es mucho menor que el trabajo aportado por las fuerzas externas. Entonces podemos decir que para $t \leq 180\Delta t_{crit}$ (tiempo de aplicación de la carga externa):

$$\frac{dW}{dt} = -|\dot{W}_{dis}| + \dot{W}_{ext}$$

Con $|\dot{W}_{dis}| < \dot{W}_{ext}$.

A partir del instante en el que dejamos de aplicar la fuerza vemos que la energía va disminuyendo progresivamente. En este tramo no tenemos fuerzas exteriores, pero si que tenemos una evolución

del daño. Entonces para $180\Delta t_{crit} < t \leq 20 \cdot 180\Delta t_{crit}$ (tiempo a partir del cual el daño se mantiene constante):

$$\frac{dW}{dt} = -|W_{dis}|$$

Con $|W_{dis}| > 0$.

Una vez alcanzado el máximo daño la energía se mantiene constante porque no hay ni fuerzas externas ni fuerzas de disipación actuando sobre el elemento. Entonces para $t > 20 \cdot 180\Delta t_{crit}$:

$$\frac{dW}{dt} = 0$$

Método de Euler hacia atrás

A continuación se muestran los resultados de las mismas variables para el caso del método de Euler hacia atrás. Vistos los resultados obtenidos en el test de impacto, para este método se espera un comportamiento similar al del método de Newmark, pero con una disminución de la energía a partir del punto donde el daño es constante.

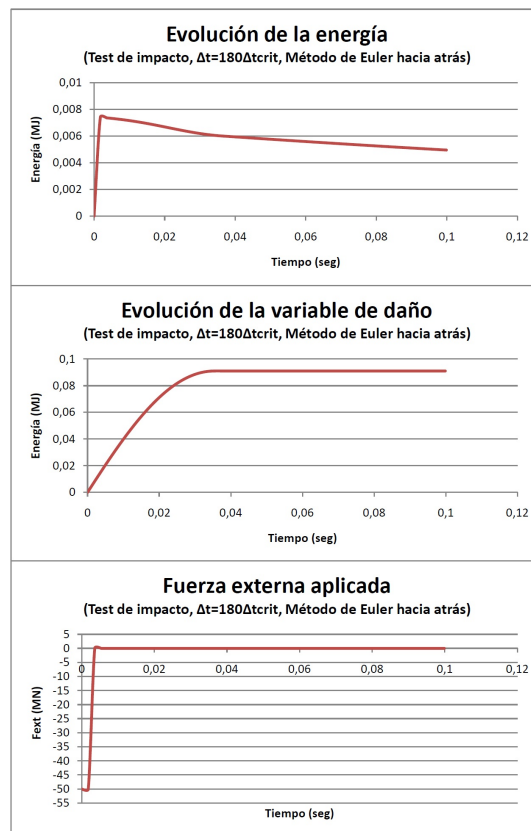


Figura 4.38: Evolución de la energía, variable de daño y fuerza aplicada para el método de Euler hacia atrás

En efecto, la figura anterior muestra una ligera disminución de la energía a partir del punto donde el daño se mantiene constante. Esta disminución progresiva de la energía para este caso explica el amortiguamiento progresivo de la evolución de la deformación en el test de impacto presentado anteriormente.

Por lo que se refiere a la parte inicial de la evolución de la energía, en este caso se sigue el mismo razonamiento comentado para el caso del método de Newmark.

Hay que tener en cuenta que estos resultados son referentes al caso más crítico. Entonces, para un incremento de tiempo menor, la pendiente de la energía después del instante en el que se alcanza el daño máximo también será menor.

Método explícito

Para el caso del método explícito, se espera que la energía aumente de forma repentina en el momento de la aparición de la inestabilidad. Para comprobarlo, se muestran los resultados de las variables analizadas (Figura 4.39).

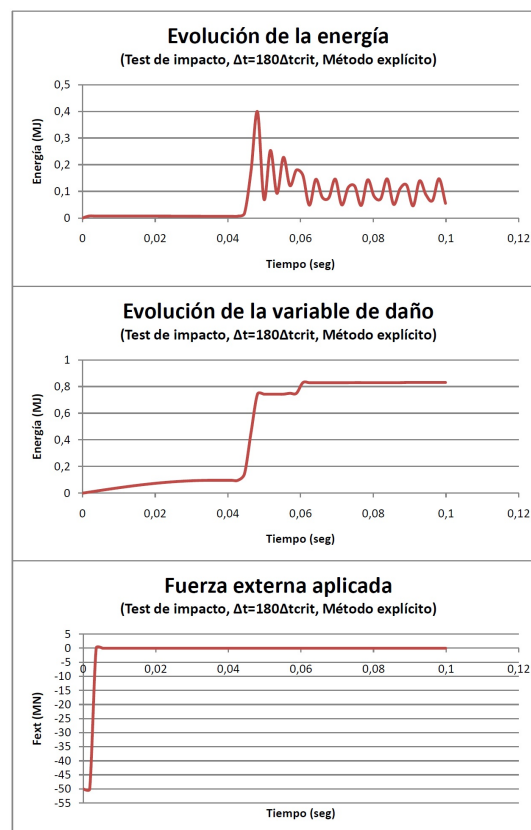


Figura 4.39: Evolución de la energía, variable de daño y fuerza aplicada para el método explícito

Tal como se predecía y teniendo en cuenta los resultados obtenidos con el test de impacto, para el incremento de tiempo con el que trabajamos en este apartado, el método explícito presenta una alteración brusca de la energía en el momento que aparece la inestabilidad.

A partir de este punto, el método es inestable y los resultados no son reales. La energía, una vez superada la inestabilidad, sigue una trayectoria oscilatoria. Estas oscilaciones vienen dadas por el fenómeno ya descrito en el test de impacto. Cuando aparece la inestabilidad, el tensor constitutivo del material se ve modificado por el aumento del daño. Entonces, cuando el tensor constitutivo del material es variable, la amplitud y el periodo de la evolución de la deformación también lo serán. Si varía la deformación, también lo hace la energía y este proceso inestable se irá repitiendo hasta que la deformación en el elemento sea tan grande que cause la rotura del material.

4. Caso de daño no local isótropo

Una vez implementado y analizado el modelo de daño isótropo para un elemento, el siguiente paso es analizar el comportamiento del mismo para un conjunto de elementos trabajando conjuntamente. La implementación del modelo de daño para el caso de más de un elemento permite obtener resultados para situaciones reales. Así pues, podríamos comparar los resultados obtenidos mediante la simulación con los resultados de un test real.

No obstante, como el presente documento se ciñe al análisis y implementación del modelo de daño, nos centraremos en la parte numérica y computacional del problema, dejando aparte la comparación y/o simulación de estructuras reales.

Es importante destacar que para el análisis de la rutina en el caso multielemental, se transforma el problema al caso 2D para poder estudiar mejor el comportamiento. Al trabajar con Matlab, la visualización de resultados es más fácil y más comprensible para el caso 2D que para el análisis 3D.

4.1. Cálculo del daño en los nodos

Con el fin de visualizar los resultados obtenidos de la variable de daño, se deben trasladar los valores obtenidos en los puntos de Gauss, a los nodos de la malla. Para ello se extrapolan a los nodos los resultados que tenemos en los puntos de Gauss. De esta forma se obtiene directamente una solución alisada en toda la malla.

Sea \mathbf{d}^3 la variable de daño obtenida en los puntos de Gauss y \mathbf{d}_n la variable de daño alisada en toda la malla. Los valores de \mathbf{d}_n dentro de cada elemento se pueden expresar en función de las variables de daño elementales $\mathbf{d}_i^{(e)}$ en los puntos de Gauss.

$$\mathbf{d}_n = \sum_{i=1}^{ngaus} N_i \mathbf{d}_i^{(e)} \quad (4.4)$$

El error entre la solución alisada y la original en cada punto es

$$\mathbf{e} = \mathbf{d}_n - \mathbf{d} = \sum_{i=1}^{ngaus} N_i \mathbf{d}_i^{(e)} - \mathbf{d} \quad (4.5)$$

El problema puede transformarse en un problema de mínimos cuadrados, de forma que los valores alisados minimicen el error medio expresado con el funcional siguiente.

$$F = \int_{\Omega} \mathbf{e}^2 d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{d}_n - \mathbf{d})^2 d\Omega \quad (4.6)$$

Es decir,

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{d}_i^{(e)}} = 0 \Rightarrow \mathbf{M} \mathbf{d}_n = \mathbf{r} \quad (4.7)$$

Con

$$\mathbf{M}_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_j d\Omega \quad (4.8)$$

³ \mathbf{d} es un vector con las variables escalares d correspondientes a todos los puntos de Gauss.

$$\mathbf{r}_i^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^T \mathbf{d}_i d\Omega \quad (4.9)$$

4.2. Mallas utilizadas

Para comprobar que el daño no depende de la malla utilizada, se realiza el análisis con diferentes mallas, analizando el resultado de la variable de daño sobre cada malla.

Se analizará el problema utilizando 4 mallas distintas. Una con 2 elementos del mismo tamaño cada uno, otra con 3 elementos del mismo tamaño, otra con 4 y otra con 6 elementos también del mismo tamaño.

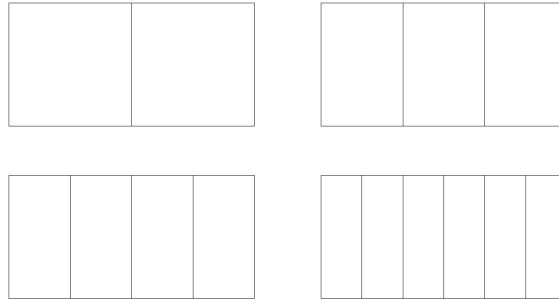


Figura 4.40: Mallas de 2, 3, 4 y 6 elementos respectivamente

También se analizará cada malla variando la distancia de interacción entre elementos siendo los casos analizados los que tienen una longitud de referencia:

- $l_e = 0$
- $l_e = 0,2 \cdot L_x = 0,8m$
- $l_e = 0,5 \cdot L_x = 2m$

4.3. Análisis de los resultados

Definidas las mallas a utilizar y las distancias relativas de influencia que se consideran, se plantea la resolución del problema con la geometría detallada en el primer punto del apartado.

Para el caso multielemental nos vamos a fijar en la distribución de la variable de daño a lo largo de la geometría, pues los resultados que interesan en este análisis son los referentes a la implementación y validación del modelo de daño no local. El caso de un único elemento nos ha servido para validar el comportamiento de los distintos métodos de resolución planteados. Así, para el caso de más de un elemento se considera que los resultados del caso elemental se conservan, permitiéndonos que el estudio se centre en la aplicación y validación del modelo no-local propuesto. Estos tres casos serán los descritos anteriormente.

- Caso 1: $l_e = 0$
- Caso 2: $l_e = 0,8m$
- Caso 3: $l_e = 2m$

Para cada caso se va a evaluar la distribución de la variable de daño a lo largo del eje horizontal (x) de la placa con las distintas mallas planteadas.

Como nos interesa ver la evolución del daño, la fuerza aplicada debe ser suficientemente grande como para producir la rotura en alguna de las partes de la geometría. De esta forma, la fuerza aplicada será incremental y con un valor máximo de:

$$F_{ext} = 100F_{ext_0}$$

Por otro lado, tenemos que asegurar que el tiempo total sea el suficiente para poder apreciar una evolución clara del daño. Así, como el caso multielemental se implementa con el método de resolución implícito de Newmark, que carece de inestabilidades; podemos realizar el análisis con 50 pasos de tiempo y con un incremento de tiempo en cada paso 100 veces mayor al definido como crítico en el caso elemental.

$$\Delta t = 100\Delta t_{crit} = 9,901 \cdot 10^{-4}s$$

Sin más preámbulos, a continuación se describen los resultados obtenidos para los distintos casos analizados.

Caso 1 ($l_e = 0$)

En este caso se espera ver una dependencia clara de la solución respecto de la malla utilizada. Esto se debe a que con una distancia de influencia nula, estamos resolviendo el problema como si el modelo fuera local. De esta forma el daño no aparece en el elemento hasta que el elemento adyacente ha alcanzado la rotura total.

En la figura siguiente se puede apreciar los resultados de la variable de daño en función de la coordenada x de la placa. Hay que recordar que los resultados no variarán en la dirección y ya que las fuerzas aplicadas se aplican por igual en ambos nodos extremos y en dirección x .

Como se ve en la figura anterior, hay una dependencia clara de la solución respecto del número de elementos considerados. En el caso de 2 elementos vemos que para el tiempo igual a $10\Delta t$ el daño no alcanza el valor de 1 en el extremo donde se aplica la carga y sigue una distribución con una pendiente poco pronunciada. Esta pendiente va aumentando a medida que aumentamos el número de elementos considerados.

Este comportamiento es el esperado para el caso de daño local, pues la pendiente es más pronunciada cuantos más elementos tengamos porque el daño se transmite más lentamente.

Para ver más claramente la dependencia de la malla se presenta en la siguiente figura (Figura 4,42) una serie de imágenes con la variable de daño representada en distintos instantes de tiempo y número de elementos. En la columna de la izquierda se aprecian los resultados para las mallas de 2, 3, 4 y 6 elementos, respectivamente, y tiempo igual a $10\Delta t$. En la columna de la derecha se muestran los resultados de la variable de daño para las mismas mallas, pero en el tiempo igual a $20\Delta t$.

Vemos en la Figura 4,42 que para 2 elementos y tiempo igual a $10\Delta t$, el daño alcanza un máximo de 0,7; mientras que para el resto de mallas, se alcanza el valor máximo de 1 en el extremo derecho. Esto ocurre porque el tamaño de elemento es más grande para la malla de 2 elementos.

Por el contrario, en el tiempo igual a $20\Delta t$, en la malla de 2 elementos se alcanza el valor máximo de 1 en toda la geometría; mientras que para el resto de mallas no se llega a la rotura total. Esto es debido a que al tener solamente 2 elementos el daño se transmite más rápidamente que en las otras mallas, aunque para llegar al valor máximo tarde más por ser el elemento de mayor tamaño.

Caso 2 ($l_e = 0,8m$)

Para este caso el radio de influencia considerado es de $0,2 \cdot L_x$. Para esta distancia de influencia se espera que las mallas de más elementos se vean más afectadas que las mallas de pocos elementos, pues con más elementos, las distancias entre los distintos puntos de Gauss se reducen. Con distancias entre puntos de Gauss más pequeñas tenemos interacción del daño entre los distintos puntos, hecho que producirá un aumento del valor de la variable de daño y de su velocidad de propagación.

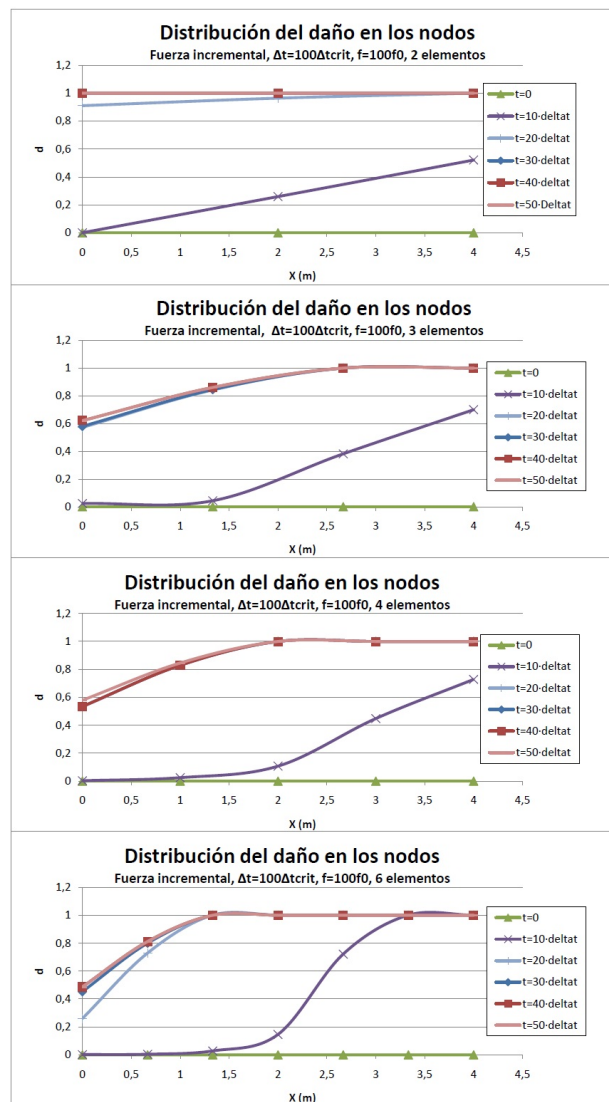


Figura 4.41: Distribución de la variable de daño d para $l_e = 0$ (caso1)

Para comprobarlo, se muestra en la figura siguiente la distribución de la variable de daño a lo largo de la geometría en distintos tiempos y para las mallas consideradas.

Tal como se había previsto, podemos ver que para la malla de 2 elementos los resultados son similares a los obtenidos en el caso anterior. En cambio, para las mallas de 3, 4 y 6 elementos vemos que la pendiente de la recta de distribución del daño se vuelve más pronunciada y tiende a tener el mismo valor para todas ellas.

De todas formas, las distintas distribuciones en los tiempos dados siguen estando más separadas entre ellas cuanto más grande es el tamaño del elemento. Esto indica que, aun habiendo equiparado las pendientes de la distribución, sigue habiendo una dependencia de la malla.

Igual que en el caso anterior, a continuación se muestran las imágenes con la distribución de la variable de daño en dos instantes de tiempo y para las distintas mallas propuestas (Figura 4.44).

Como se puede ver, las distribuciones en las mallas de 2 elementos son muy similares a las del caso anterior. Por otro lado, vemos que para las otras mallas, las distribuciones se parecen más entre ellas.

Para el tiempo igual a $10\Delta t$, al ser pequeño, las distribuciones son semejantes porque la pen-

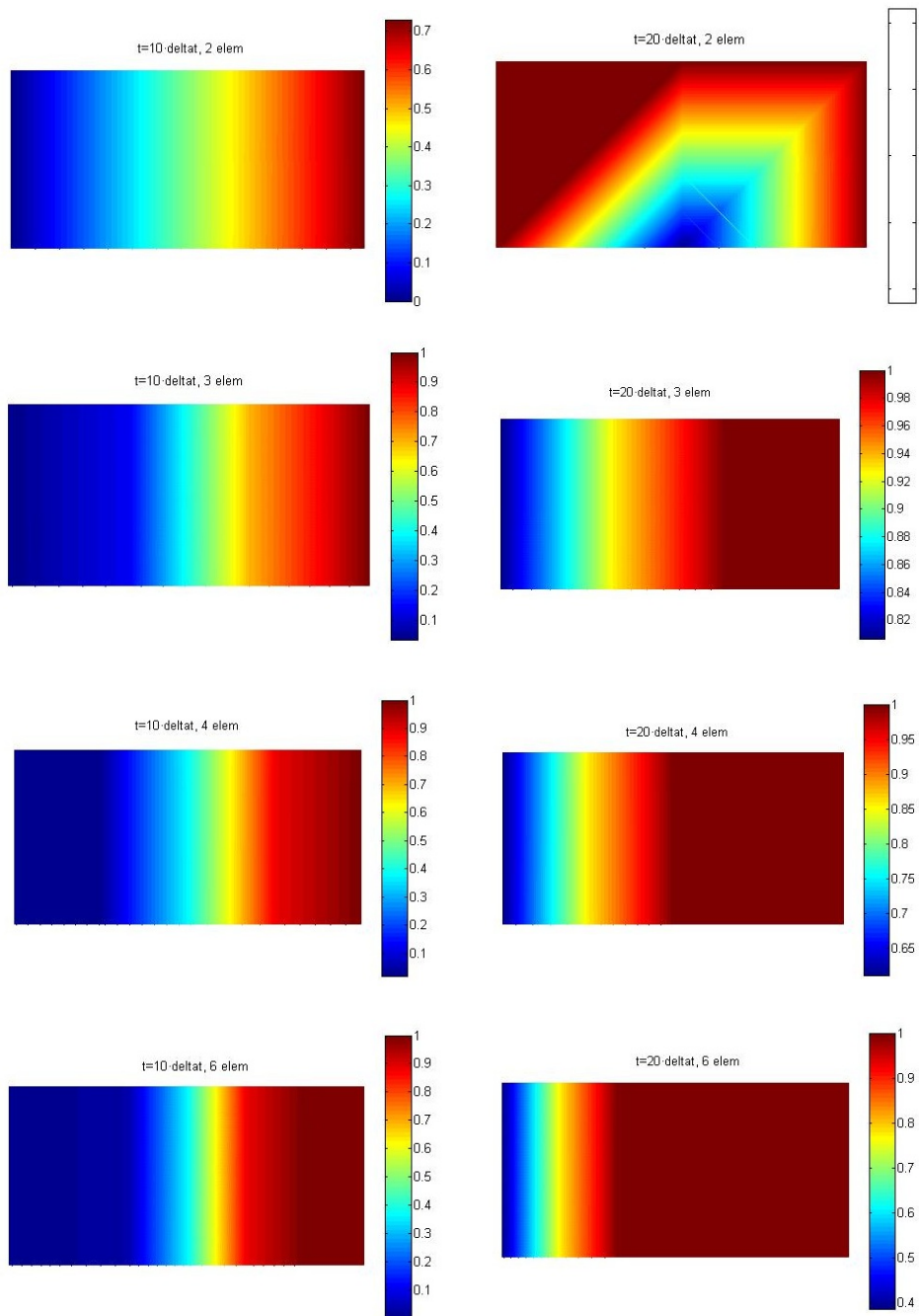


Figura 4.42: Distribución de la variable de daño d en las distintas mallas para los tiempos $10\Delta t$ y $20\Delta t$ con $l_e = 0$ (caso1)

diente de la distribución se equipara entre mallas. Para el tiempo igual a $20\Delta t$, vemos que para las mallas de 2 y 3 elementos, a diferencia de las de 4 y 6, el daño alcanza el máximo en toda la geometría. Este comportamiento, igual que en el caso anterior, es debido a que en las mallas con más elementos el daño que se transmite evoluciona más lentamente.

Caso 3 ($l_e = 2m$)

En este caso se aumenta la distancia de influencia hasta $0,5 \cdot L_x$. Con esta distancia todas las mallas propuestas se ven afectadas, en cuanto al cálculo de la variable de daño se refiere. Así, se

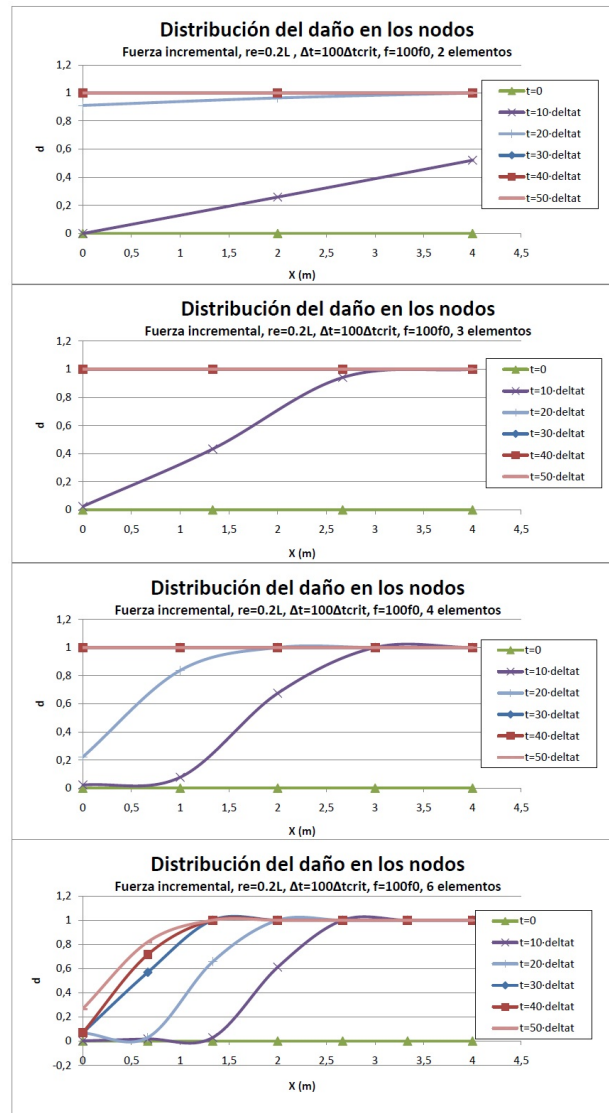


Figura 4.43: Distribución de la variable de daño d para $l_e = 0,8m$ (caso2)

espera que la dependencia de la malla en el cálculo del daño disminuya.

Tal como vamos haciendo en el análisis de los casos multielementales, en primer lugar se muestra la figura con las distribuciones de la variable de daño en toda la longitud de la geometría para distintos instantes de tiempo (Figura 4.45).

Para este caso, pero, al tener más puntos influenciados, el daño aumentará más rápidamente. Por ello, los instantes de tiempo en los que se muestran las distribuciones deberán ser más pequeños.

Si nos fijamos en el instante de tiempo igual a $10\Delta t$, se puede ver como las pendientes de la distribución del daño son más similares entre las distintas mallas que en los casos anteriores. Aunque para la malla de 2 elementos no sea del todo igual, para el resto de mallas consideradas, tenemos una misma distribución del daño en la geometría.

Para instantes de tiempo mayores, vemos que las distribuciones entre las distintas mallas siguen estando desplazadas. Es decir, para mallas con más elementos, las distribuciones de la variable de daño para los distintos instantes de tiempo considerados están más juntas que para mallas con un número inferior de elementos. Esto nos indica que sigue habiendo una cierta dependencia de la malla en cuanto a velocidad de evolución del daño se refiere.

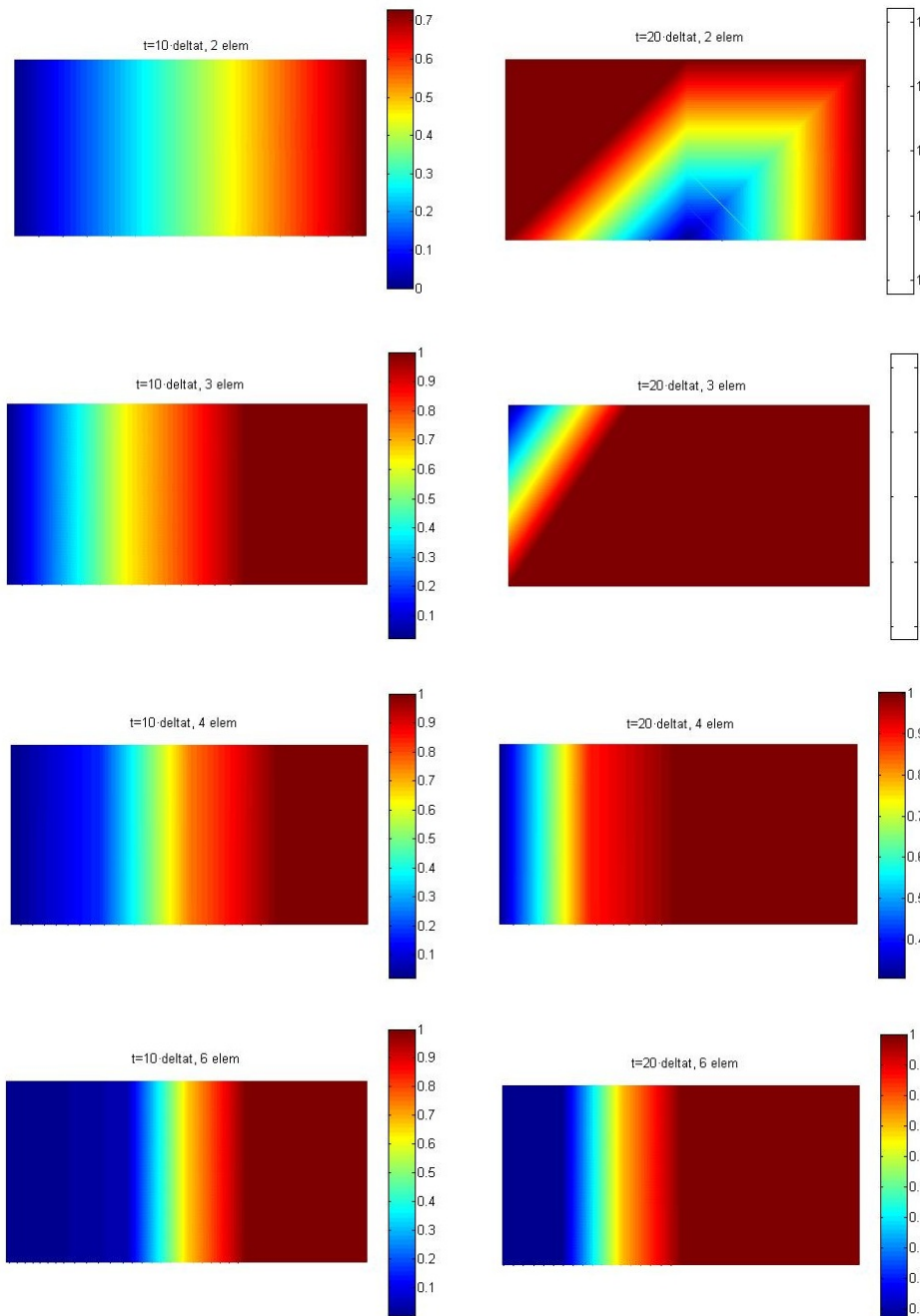


Figura 4.44: Distribución de la variable de daño d en las distintas mallas para los tiempos $10\Delta t$ y $20\Delta t$ con $l_e = 0,8m$ (caso2)

En la siguiente figura se muestran las imágenes de la distribución de la variable de daño para las distintas mallas en los instantes de tiempo de $10\Delta t$ y $20\Delta t$.

En la imagen anterior podemos ver que para el instante de tiempo igual a $10\Delta t$, las distribuciones para las distintas mallas son casi iguales. En cambio, para el instante de tiempo de $20\Delta t$, todas las mallas excepto la de 6 elementos han llegado a la rotura total. Como se ha mencionado anteriormente, con una malla de más elementos, la velocidad de evolución del daño disminuye, por lo que se tarda más en alcanzar el valor máximo de la variable de daño en toda la geometría.

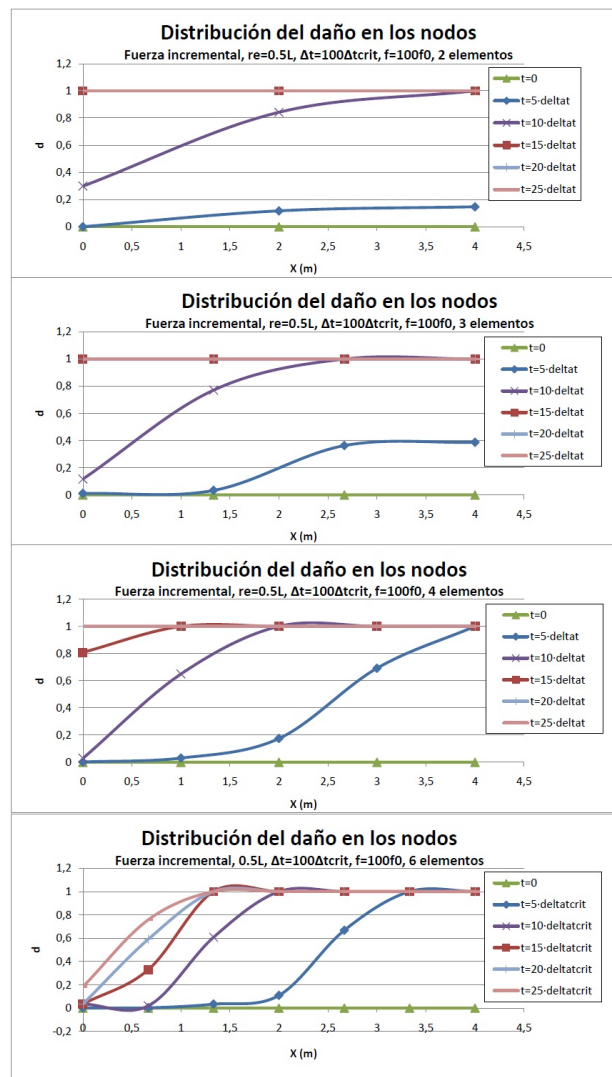


Figura 4.45: Distribución de la variable de daño d para $l_e = 2m$ (caso3)

4.4. Conclusiones de los resultados del caso multielemental

Vistos los resultados para los distintos casos analizados con un modelo de daño no local en un dominio con más de un elemento, podemos sacar algunas conclusiones claras.

En primer lugar podemos decir que el modelo no local propuesto reduce la dependencia de la malla en los instantes iniciales de la evolución del daño. Este comportamiento queda claro observando los resultados de los casos considerados en los instantes de tiempo inferiores o iguales a $10\Delta t$.

Pese a tener una reducción de la dependencia de la malla en los instantes iniciales, cuando aumenta el tiempo, la diferencia entre mallas se hace más evidente, pues la evolución del daño se ralentiza cuando tenemos un mayor número de elementos.

Este problema podría solventarse introduciendo el modelo de daño propuesto en [17]. Este modelo de daño tiene en cuenta la derivada de la deformación respecto del tiempo para la determinar el daño en una geometría con más de un elemento.

Por otro lado, otra medida para resolver el problema podría ser introducir una ponderación en la suma de los daños de los puntos que influyen en un punto determinado. Así, un punto más

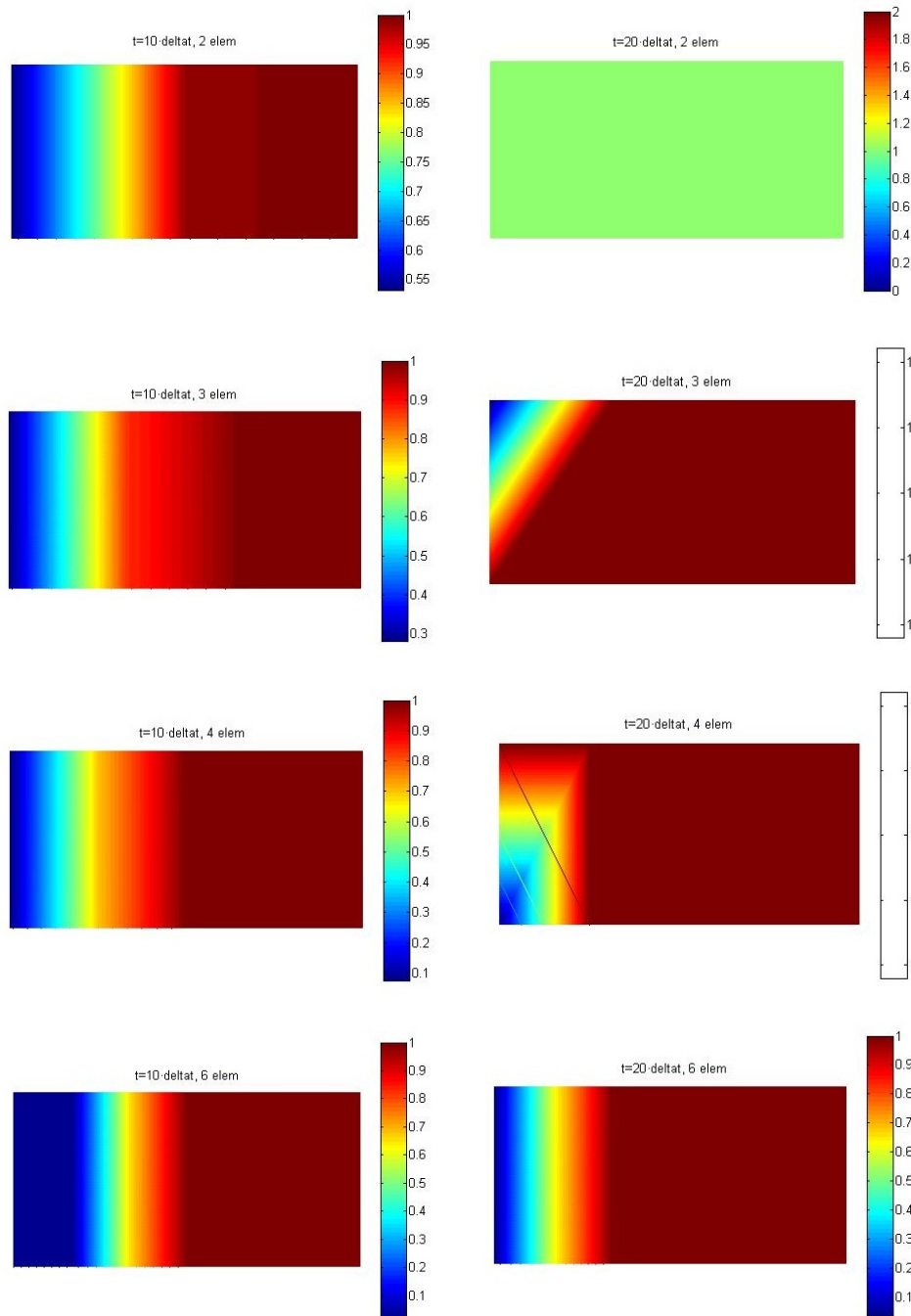


Figura 4.46: Distribución de la variable de daño d en las distintas mallas para los tiempos $10\Delta t$ y $20\Delta t$ con $l_e = 2m$ (caso3)

alejado influiría en menor medida que un punto cercano. De esta forma, la evolución del daño se equipararía para mallas con distinto número de elementos.

Otro hecho a remarcar es la convergencia a la solución del método implícito de Newmark en este análisis. Se ha visto que para el caso de daño local isótropo la convergencia era cuadrática. En este caso, en cambio, tiende a ser lineal. Esto se debe a que la matriz tangente no está linearizada para el caso de daño no local, por lo que la convergencia tenderá a la linealidad de forma proporcional a la longitud de influencia l_e .

Capítulo 5

CONCLUSIONES

1. Conclusiones

Una vez presentados todos los resultados para los distintos análisis realizados con los métodos y modelos planteados, solo nos queda plantear las conclusiones generales que pueden extraerse del trabajo realizado en esta tesina.

Dado que las conclusiones particulares referentes a los distintos resultados obtenidos ya se han descrito en el apartado correspondiente, en este capítulo solo se describirán las conclusiones de carácter general.

En cuanto a los métodos de resolución planteados, podemos concluir que, como ya se sabía en el inicio, el método explícito puede producir errores. Como se ha visto en los resultados referentes a la conservación de la energía, a partir de un cierto incremento de tiempo el método se vuelve crítico; dando resultados completamente erróneos.

Tal como se ha comentado en la motivación, la utilización de métodos de resolución explícitos en programas de cálculo como Abaqus es muy corriente. Por ello, si queremos que no aparezcan inestabilidades, se deben utilizar incrementos de tiempo muy pequeños. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos para el método implícito de Newmark, este contratiempo puede solventarse.

Siguiendo en esta línea, podemos afirmar que, teniendo en cuenta que el método de Newmark necesita entre 2 y 3 iteraciones para cada paso de tiempo en el caso de daño isótropo, hay un ahorro importante en el coste computacional. Con el método implícito podemos aumentar el incremento de tiempo de cada paso, disminuyendo así el número total de pasos necesarios para describir un intervalo de tiempo determinado. Aunque tengamos 2 o 3 iteraciones en cada paso, el aumento del incremento de tiempo lo compensa. De esta forma, considerando que el coste final está relacionado con el número de veces que se resuelve el sistema de ecuaciones, con el método implícito observamos los mismos resultados con un coste menor.

Por otro lado, en cuanto a los modelos de daño analizados, sabemos que el modelo local isótropo no se ajusta a la realidad de los materiales compuestos, pero nos permite ver de forma clara el efecto de la no linealidad del problema sobre los métodos de resolución. En cuanto al modelo de daño no local, vemos que se puede reducir la dependencia de la malla. Este hecho es muy relevante, ya que por el momento, en Abaqus solo está implementado el caso local. Al tener que resolver el problema multielemental con un modelo de daño local, tenemos una dependencia de la malla importante. Esta dependencia se podría reducir considerablemente introduciendo un modelo de daño no local como el propuesto en esta tesina.

A pesar de que no se considera el test de impacto para el modelo de daño no local, los resultados obtenidos mediante el test incremental son igualmente relevantes en lo que se refiere a dependencia de la malla.

2. Trabajos futuros

Para finalizar, se presentan algunos puntos que contienen los trabajos relacionados directamente con lo realizado en esta tesina y que comportarían una mejora y ampliación del estudio y análisis del daño en problemas de impacto.

- Un punto a realizar es la implementación del modelo de daño anisótropo propuesto por J.L. Curiel en los métodos de resolución implícitos. Para ello se debe encontrar la matriz de rigidez tangente proveniente de la linearización del problema.
- Otra mejora que puede complementar lo realizado en la presente tesina es la linearización del modelo de daño no local. Con la linearización de este modelo de daño se aumentaría el grado de convergencia de los métodos implícitos, reduciendo a la vez el coste computacional que supone este modelo.
- En cuanto al test de impacto realizado, se podría proponer un test de impacto más realista.

Esto supondría la implementación de los puntos mencionados anteriormente y además, la introducción de una geometría y condiciones de contorno equivalentes a un test de impacto real.

- Relacionado con el punto anterior, sería muy útil la implementación del modelo de daño no local con el análisis multielemental en 3D.

Bibliografía

- [1] Abaqus 6.10
- [2] Phaneendra, S. Three dimensional modelling of fibre reinforced composite materials for aerospace applications. Master's Thesis, UPC, 2009.
- [3] LS-DYNA3D Version 940
- [4] Hou, J.P., Petrinic, N., Ruiz, C., Hallett, S.R. Prediction of impact damage in composite plates. Composites Science and Technology, 2000.
- [5] Wiegand, J. Constitutive modelling of composite materials under impact loading. D. Phl thesis, Oxford University, 2008.
- [6] Curiel, J.L. A Novel Directional Damage Model for Composites. Civil-Comp Press, 2008.
- [7] Simo, J.C., Ju, J.W. Strain- and stress-based continuum damage models - I. Formulation. Int. J. Solids Structures, 1987.
- [8] Simo, J.C., Ju, J.W. Strain- and stress-based continuum damage models - II. Computational aspects. Int. J. Solids Structures, 1987.
- [9] MATLAB R2009b
- [10] Smith, I.M., Griffiths, D.V. Programming the Finite Element Method, 4th ed. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2004.
- [11] MATLAB Documentation.
- [12] Oñate, E. Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. CIMNE, 1995.
- [13] Souza, E. Perić, D. Owen, DRJ. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. John Wiley & Sons, 2008.
- [14] Oliver, X., Agelet, C. Mecànica de medis continus per a enginyers. EDICIONS UPC, 2003.
- [15] París, F., Cañas, J., Marín, J.C. Introducción al análisis y diseño con materiales compuestos. Universidad de Sevilla, 2002.
- [16] Curiel, J.L., Petrinic, N., Wiegand, J. A three-dimensional progressive damage model for fibre-composite materials. Mechanics Research Communications, 2008.
- [17] Geers, M.G.D., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., Peerlings, R.H.J. Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1998.
- [18] Krenk, S. Non-linear analysis with finite elements. Aalborg University, 1993.
- [19] Rixen, D., Gradin, M. Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics, 2nd ed. John Wiley & Sons, 1997.
- [20] Soden, P. D. Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. Composites Science and Technology, 1998.

