

# Máster en Matemática Aplicada

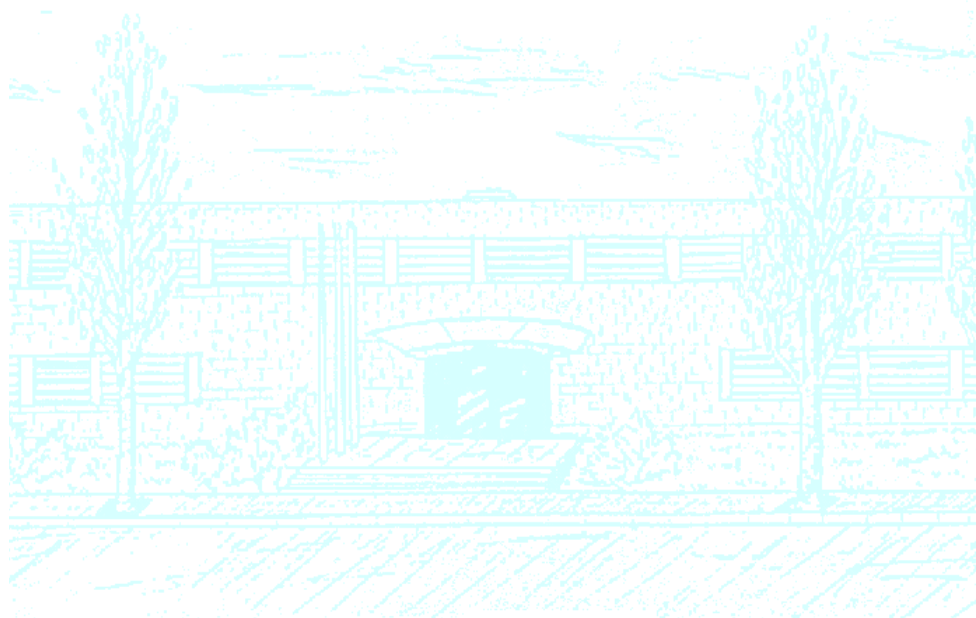
**Título:** Índice de Kirchhoff de redes compuestas

**Autor:** Cristina Araúz

**Directores:** Ángeles Carmona y Andrés M. Encinas

**Departamento:** Matemàtica Aplicada III

**Convocatoria:** Octubre/Noviembre de 2010



Facultat de Matemàtiques  
i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Universitat Politècnica de Catalunya  
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Trabajo Final de Máster

# Índice de Kirchhoff de redes compuestas

Cristina Araúz

Director: Ángeles Carmona y Andrés M. Encinas

Departament de Matemàtica Aplicada III



# Resumen

**Palabras clave:** red, peso, conductancia, potencial, operador de Schrödinger, operador de Green, resistencia efectiva, Índice de Kirchhoff, suma, corona, cluster

El cálculo de la resistencia efectiva entre cualquier par de vértices de una red, así como el Índice de Kirchhoff, tiene gran interés en la Teoría de circuitos eléctricos y en cadenas de Markov. En la última década estos parámetros han sido aplicados al ámbito de la Química Orgánica como descriptores estructurales alternativos a los utilizados habitualmente para discriminar entre diferentes moléculas con formas y estructuras similares. Esta nueva aplicación ha generado una importante y fructífera línea de trabajo que ha dado como resultado la evaluación del Índice de Kirchhoff en redes con estructuras simétricas como por ejemplo grafos distancia regulares, grafos circulantes, cadenas lineales y algunos fullerenos. Asimismo, recientemente se ha introducido una amplia gama de Índices de Kirchhoff generalizados que han sido calculados para algunas redes. El objetivo del trabajo es obtener expresiones del Índice de Kirchhoff en redes compuestas, como por ejemplo la suma, la corona y el cluster.

# Abstract

**Keywords:** network, weight, conductance, potential, Schrödinger operator, Green operator, effective resistance, Kirchhoff Index, join, corona, cluster

In electric circuit theory and Markov chains, it is of great interest to compute the effective resistance between any pair of vertices of a network, as well as the Kirchhoff Index. During the last decade these parameters have been applied in Organic Chemistry as natural structural indexes different from the usual ones in order to achieve an improvement in the discrimination between different molecules which have similar structural behaviors. This new application has started an important and fruitful path which has carried the computation of the Kirchhoff Index in symmetrical networks such as distance-regular graphs, circulant graphs, lineal chains and some fullerenes. Moreover, a wide range of generalized Kirchhoff Indexes for some networks have been introduced. The objective of the present work is to obtain the Kirchhoff Index for composite networks such as join, corona or cluster networks.

# Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Preliminares	3
1.1. Conceptos básicos	3
1.2. Redes	4
1.3. Autovalores y autofunciones	6
1.4. Operadores de Schrödinger y transformación de Doob	7
1.5. Autovalores y autofunciones de $\mathcal{L}_q$	11
1.6. Ecuaciones de Poisson y función de Green	12
Capítulo 2. Resistencia efectiva e Índice de Kirchhoff	15
2.1. Formulación variacional de la ecuación $\mathcal{L}_q u = f$	15
2.2. Resistencia efectiva y resistencia total clásicas	16
2.3. Resistencia efectiva y resistencia total generalizadas	18
2.4. Índice de Kirchhoff	21
2.5. Resultados generales	21
2.6. Ejemplos	26
Capítulo 3. Redes compuestas	29
3.1. Suma	29
3.2. Cluster	38
3.3. Corona	43
Índice alfabético	53
Bibliografía	55



# Introducción

El Índice de Kirchhoff fue introducido en el campo de la Química Orgánica como una alternativa mejor a otros parámetros usados para discriminar entre diferentes moléculas con formas y estructuras similares (ver [17]). Desde entonces, se ha desarrollado una nueva línea de investigación con una cantidad de producción considerable y se ha computado el Índice de Kirchhoff para algunas clases de grafos con simetrías; ver, por ejemplo, [4, 5, 1, 10, 19] y las referencias que en ellos se indican.

También resulta de sumo interés calcular este parámetro para redes compuestas y encontrar posibles relaciones entre los Índices de Kirchhoff de las redes de origen y los de sus composiciones. Recientemente se ha resuelto este problema en algunos tipos de grafos compuestos como el producto, unión, corona, cluster; ver [20], donde la técnica empleada se basa en la relación entre la resistencia efectiva y el Índice de Kirchhoff con los autovalores de la red o grafo, ver por ejemplo [5].

En [3] y en [6], los autores introdujeron el concepto de resistencia efectiva respecto de un peso sobre los vértices de la red, con el objetivo de caracterizar qué matrices positivas son inversas de  $M$ -matrices simétricas y en [8] llevaron a cabo un estudio sistemático de estos nuevos parámetros, calcularon los Índices de Kirchhoff correspondientes y establecieron su relación con los autovalores y autofunciones de operadores de Schrödinger semidefinidos positivos.

En este trabajo determinaremos las resistencias efectivas generalizadas respecto de un peso y el Índice de Kirchhoff correspondiente de tres tipos de redes compuestas: *suma*, *corona* y *cluster* (de hecho, trabajaremos sobre generalizaciones de éstas para una mayor completitud de los resultados). A diferencia de [8], donde las técnicas se basaron en la Teoría del Potencial asociada a los operadores de Schrödinger, nuestros razonamientos se basarán aquí en las relaciones entre las funciones de Green asociadas a tales operadores y la resistencia efectiva establecidas en [6]. Por tanto, después de la introducción de las principales definiciones de los operadores involucrados y sus propiedades, obtenemos la expresión de la función de Green de cada red compuesta en términos de las funciones de Green de los factores y, como consecuencia, la expresión del Índice de Kirchhoff y de las resistencias efectivas, todo ello en función de los parámetros análogos de los factores. Finalmente, daremos un ejemplo de aplicación de dichos resultados.

Las técnicas, nomenclaturas y notaciones que se usan a lo largo de este trabajo, pese a tener lugar en el campo discreto, tienen su origen en el continuo: se usan técnicas similares a las usadas en el análisis de ecuaciones en derivadas parciales. La adaptación de estas herramientas



al campo discreto se muestra adecuada y, por esta razón, se habla de funciones y no de vectores, de operadores y no de matrices, a modo de ejemplo. A lo largo del texto se detallarán más explícitamente estas conexiones con la teoría existente en el continuo.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Conceptos básicos

Un *grafo* es un par  $G = (V, E)$  de conjuntos finitos  $V = V(G)$  y  $E = E(G)$ . El primero,  $V(G)$ , es una colección no vacía de puntos a los que se llama *vértices* de  $G$  y el segundo,  $E(G)$ , es una colección de parejas de elementos de  $V(G)$ , llamadas *ramas* de  $G$ . En adelante y salvo que se indique lo contrario,  $n = |V(G)|$  representará el *orden de  $G$* , esto es, su número de vértices, y diremos que  $|E|$  es el *tamaño de  $G$* . Se dice que dos vértices  $x, y \in V$  son *adyacentes* y se expresa con  $x \sim y$  si están unidos por una rama, generalmente representada por  $\{x, y\}$ , y se dice que estos vértices son los *extremos* de dicha rama o, dicho de otra manera, esta rama es *incidente* en  $x$  e  $y$ . Si dos vértices están unidos por más de una rama, se dice que éstas son ramas *múltiples* y una rama que tiene como extremos a un mismo vértice se denomina *lazo*.

Un *camino de longitud  $k$*  en un grafo  $G$  es una sucesión alternada de  $k + 1$  vértices y  $k$  ramas denotado por  $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ , donde  $v_i$  son los vértices y  $e_j$  son las ramas, tal que los extremos de  $e_i$  son  $v_{i-1}$  y  $v_i$  para  $1 \leq i \leq k$ . En los grafos sin lazos ni ramas múltiples los caminos se suelen denotar con una expresión más simple:  $v_0 v_1 \dots v_k$ . Se dice que un *camino corto* entre dos vértices es el camino con el menor número posible de ramas entre ellos.

Como en Topología, cuando se trabaja con grafos también se necesita hablar de conectividad y/o de componentes conexas. Un grafo  $G$  es *conexo* si todo par de vértices  $x, y \in V$  están unidos por un camino. Una consecuencia automática de esta definición es que todo grafo es la unión disjunta de grafos conexos, a los que llamaremos *componentes conexas*.

Se define la *distancia*  $d(x, y)$  entre dos vértices  $x$  e  $y$  de un grafo  $G$  como la longitud menor de todos los caminos que los unen. Así, la distancia entre dos vértices viene dada por el número de ramas de los caminos cortos que los unen. Si  $x$  e  $y$  no se encuentran en la misma componente conexa, se dice que  $d(x, y) = \infty$ .

PROPOSICIÓN 1.1.1. *En un grafo conexo, la distancia define una métrica.*

**Demostración.** Sea  $G$  un grafo conexo. Para todo  $x, y, z \in V$  se tiene:

1.  $d(x, y) \geq 0$ ;  $d(x, y) = 0$  si, y sólo si,  $x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ . Basta tomar el camino inverso (esto es, el camino recorrido en dirección contraria) a un camino corto entre  $x$  y  $y$ .

3. Si  $W_1$  es un camino corto entre  $x$  e  $y$  y  $W_2$  es un camino elemental con  $d(y, z)$  ramas entre  $y$  y  $z$ , entonces  $W = W_1 \cup W_2$  es un camino elemental que une  $x$  y  $z$  y tiene longitud menor o igual que  $d(x, y) + d(y, z)$ .  $W$  puede no ser el camino elemental con menor distancia entre  $x$  y  $z$ ; esta longitud simplemente da una cota superior para esta distancia. Así,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Es decir, para todo grafo conexo la distancia es una métrica. ■

Por lo tanto, la distancia dota al conjunto  $V$  de estructura métrica y la topología de este espacio es precisamente la dada por la topología discreta: todos los vértices de  $V$  son conjuntos cerrados y, además, son abiertos pues siempre existe una bola abierta con centro el vértice en cuestión y radio suficientemente pequeño tal que sólo contenga al vértice. En general, todo subconjunto de  $V$  es abierto y cerrado de  $V$ .

## 1.2. Redes

Una *red* es la generalización de un grafo conexo sin lazos ni ramas múltiples al que a cada rama se le ha asignado un número real positivo, llamado *conductancia*. Denotaremos por la tríada  $\Gamma = (V, E, c)$  a una red, donde  $V$  es el conjunto de vértices,  $E$  el conjunto de ramas y  $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ , que es la función de conductancias, cumple:

1.  $c(x, y) = c(y, x) > 0$  si  $x$  es adyacente a  $y$ ,
2.  $c(x, y) = 0$  en otro caso.

Denotaremos por  $\mathcal{C}(V)$  al conjunto de funciones de  $V$  en  $\mathbb{R}$ . En particular, para cada  $x \in V$ ,  $\varepsilon_x$  denota la *delta de Dirac en  $x \in V$*  y  $\mathbf{1}$  es la función definida como  $\mathbf{1}(x) = 1$  para cada  $x \in V$ . El producto interno estándar en  $\mathcal{C}(V)$  se denota por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , donde si  $u, v \in \mathcal{C}(V)$  entonces  $\langle u, v \rangle = \sum_{x \in V} u(x)v(x)$ . Por otro lado,  $\omega \in \mathcal{C}(V)$  se denomina un *peso* si satisface  $\omega(x) > 0$  para cada  $x \in V$  y además  $\langle \omega, \omega \rangle = 1$ . El conjunto de pesos sobre  $V$  será denotado por  $\Omega(V)$ .

Tal como se hace para los grafos, se puede desarrollar toda una teoría matricial para las redes de una manera análoga. Se define el *grado de un vértice  $x \in V$*  como la suma de las conductancias de las ramas incidentes en éste,  $k(x) = \sum_{y \sim x} c(x, y)$ . Como las conductancias son nulas en las ramas no existentes, esta definición es equivalente a  $k(x) = \sum_{y \in V} c(x, y)$ .

Fijado un etiquetado de  $V$ ,  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ , se define la *matriz de adyacencias de la red  $\Gamma$*  como  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , donde  $a_{ij} = c(x_i, x_j)$  para todo  $x_i, x_j \in V$ . Así, podemos identificar el espacio de funciones sobre  $V$  con  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{C}(V) \cong \mathbb{R}^n$ , y con ello estamos identificando funciones con vectores, matrices con operadores, etc. Por ejemplo, dada  $u \in \mathcal{C}(V)$ , podemos entenderla como el vector  $(u(x_1), \dots, u(x_n))$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  la matriz diagonal de grados, donde  $D = (d_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  y  $d_{ii} = k(i)$  para todo  $i \in V$ ,  $d_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . Se define la *matriz laplaciana de la red  $\Gamma$*  como  $L = D - A$ . Por las propiedades matriciales de  $L$  y la simetría de la función de conductancias,  $L$  es simétrica.

El laplaciano de una red se puede contemplar también como un operador lineal sobre funciones en el conjunto de vértices y será ésta la interpretación que usaremos de ahora en adelante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{C}(V) &\longrightarrow \mathcal{C}(V) \\ u &\longmapsto \mathcal{L}u. \end{aligned}$$

Denominamos *operador laplaciano* o *laplaciano combinatorio* de la red  $\Gamma$  a  $\mathcal{L}$ , el cual también se puede expresar mediante la siguiente fórmula

$$\mathcal{L}u(x) = k(x)u(x) - \sum_{y \in V} c(x, y)u(y) = \sum_{y \in V} c(x, y)(u(x) - u(y))$$

para toda  $u \in \mathcal{C}(V)$  y para todo  $x \in V$ .

PROPOSICIÓN 1.2.1. *Para toda  $u, v \in \mathcal{C}(V)$  se tiene*

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} c(x, y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) \quad \text{Primera Identidad de Green}$$

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}v \rangle \quad \text{Segunda Identidad de Green}$$

**Demostración.** Para obtener la Primera Identidad de Green basta calcular

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u, v \rangle &= \sum_{x \in V} \mathcal{L}u(x)v(x) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} c(x, y)(u(x) - u(y))v(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} c(x, y)(u(x) - u(y))v(x) + \frac{1}{2} \sum_{y \in V} \sum_{x \in V} c(y, x)(u(y) - u(x))v(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} c(x, y)(u(x) - u(y))v(x) - \frac{1}{2} \sum_{y \in V} \sum_{x \in V} c(x, y)(u(x) - u(y))v(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} c(x, y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)). \end{aligned}$$

Como consecuencia de esta fórmula, resulta que  $\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}v \rangle$ , obteniendo la Segunda Identidad de Green. ■

COROLARIO 1.2.2.  *$\mathcal{L}$  es autoadjunto y semi-definido positivo. Además, dada  $u \in \mathcal{C}(V)$ ,  $\mathcal{L}u = 0$  si, y sólo si,  $\langle \mathcal{L}u, u \rangle = 0$  si, y sólo si,  $u$  es una función constante.*

**Demostración.**  $\mathcal{L}$  es autoadjunto como consecuencia de la Segunda Identidad de Green. Además, es un operador semi-definido positivo, pues

$$\langle \mathcal{L}u, u \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} c(x, y)(u(x) - u(y))^2 \geq 0.$$

Ahora, dada  $u \in \mathcal{C}(V)$ , si  $\mathcal{L}u = 0$  entonces  $\langle \mathcal{L}u, u \rangle = 0$ . Recíprocamente, si  $\langle \mathcal{L}u, u \rangle = 0$  entonces, como por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que  $0 \leq \langle \mathcal{L}u, v \rangle^2 \leq \langle \mathcal{L}u, u \rangle \langle \mathcal{L}v, v \rangle = 0$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ , entonces  $\langle \mathcal{L}u, v \rangle = 0$  y, tomando  $v = \varepsilon_x$ ,  $\mathcal{L}u(x) = 0$  para todo  $x \in V$ , es decir,  $\mathcal{L}u = 0$ . Finalmente,  $\langle \mathcal{L}u, u \rangle = 0$  si y sólo si  $u$  es una función constante, pues  $(u(x) - u(y))^2 = 0$  pasa si y sólo si  $u$  es constante. ■

### 1.3. Autovalores y autofunciones

En esta sección trabajaremos con los autovalores del operador laplaciano de una red, pues estos resultados nos serán útiles en lo sucesivo en este trabajo.

Un *autovalor* de una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es un valor  $\gamma$  tal que  $Au = \gamma u$  para algún vector  $u \neq 0$ . Dicho vector se llama *autovector* de autovalor  $\gamma$ . Análogamente, un *autovalor* de un operador  $\mathcal{A}$  es un valor  $\gamma$  tal que  $\mathcal{A}u = \gamma u$  para alguna función  $u \neq 0$ . Dicha función se llama *autofunción* de autovalor  $\gamma$ . Observemos que si  $A$  es la matriz asociada a  $\mathcal{A}$  entonces ambos tienen los mismos autovalores.

**TEOREMA 1.3.1** (Teorema espectral). *Si un operador  $\mathcal{A}$  tiene como matriz asociada a una matriz simétrica, entonces todos sus autovalores son reales. Si, además, es semi-definido positivo, entonces no tiene ningún autovalor negativo. Aún más,  $\mathcal{A}$  diagonaliza en una base ortonormal de funciones, la cual viene dada por las autofunciones correspondientes a sus autovalores. Por tanto,  $\mathcal{A}$  se puede escribir como*

$$\mathcal{A}(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle u, v_i \rangle v_i \quad \text{para toda } u \in \mathcal{C}(V),$$

donde la matriz asociada a  $\mathcal{A}$  es de  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los autovalores y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  la base ortonormal de autofunciones correspondientes.

En términos matriciales, este teorema es el *Teorema de diagonalización de matrices en una base ortonormal*, el cual dice que si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los autovalores de una matriz  $A$  simétrica y semi-definida positiva, entonces  $A$  se puede escribir como

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

en una base ortonormal adecuada, es decir,  $Av_j = \lambda_j v_j$  donde  $\{v_j\}_{j=1}^n$  es una base ortonormal de autovectores de  $A$  y  $v_j$  es autovector de autovalor  $\lambda_j$ .

Recordemos que el operador laplaciano de una red conexa  $\Gamma = (V, E, c)$ ,  $\mathcal{L}$ , tiene asociada la matriz laplaciana  $L$ , que es simétrica. Por lo tanto, todos sus autovalores y, en consecuencia, los de  $\mathcal{L}$ , son reales. Además, como  $\mathcal{L}$  es semi-definido positivo, todos sus autovalores serán no negativos.

**COROLARIO 1.3.2.** *El valor 0 es el menor autovalor de  $\mathcal{L}$  y sus autofunciones asociadas son las constantes. El resto de autovalores de  $\mathcal{L}$  son estrictamente positivos.*

**Demostración.** El primer autovalor de  $\mathcal{L}$ , esto es, el autovalor más pequeño, es un autovalor simple. Esto se debe a que la red  $\Gamma$  es conexa y por tanto su matriz laplaciana es irreducible. Nuestro objetivo inmediato es encontrar este primer autovalor y sus autofunciones. Uno de los autovalores de  $\mathcal{L}$  es 0, pues como ya hemos visto  $\mathcal{L}$  se anula sobre las constantes. Por tanto, una autofunción asociada a 0 es 1. Como todos los autovalores son no negativos, entonces 0 es el autovalor más pequeño de  $\mathcal{L}$ . Como éste es simple, entonces 0 es el menor autovalor de  $\mathcal{L}$  y el resto de sus autovalores son estrictamente positivos:  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , donde  $\lambda_i$  son los autovalores de  $\mathcal{L}$ . ■

## 1.4. Operadores de Schrödinger y transformación de Doob

En esta sección introduciremos una generalización del operador laplaciano. Dada una red  $\Gamma = (V, E, c)$ , un *operador de Schrödinger sobre  $\Gamma$*  con *potencial  $q$*  es un operador lineal  $\mathcal{L}_q : \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma  $\mathcal{L}_q = \mathcal{L} + q$  que asigna a cada  $u \in \mathcal{C}(V)$  la función  $\mathcal{L}_q(u) = \mathcal{L}(u) + qu$ , donde  $qu \in \mathcal{C}(V)$  está definida como  $(qu)(x) = q(x)u(x)$ ,  $\mathcal{L}$  es el operador laplaciano de la red y  $q$  es una función de  $\mathcal{C}(V)$  llamada *potencial de la red*; ver por ejemplo [3, 11]. Esto es, para toda  $u \in \mathcal{C}(V)$  y para todo  $x \in V$ ,  $\mathcal{L}_q(u)(x) = \mathcal{L}u(x) + q(x)u(x)$ . Diremos, para toda  $u \in \mathcal{C}(V)$ , que  $\mathcal{L}u$  es el *término o operador de segundo orden* y que  $qu$  es el *término de orden 0*. Desde el punto de vista matricial, al añadir el potencial a la matriz laplaciana lo que se ha hecho ha sido añadir elementos solamente en la diagonal y, por tanto, en los casos en que  $q$  es una función positiva, podemos pensar esta modificación como la adición de un autolazo en cada  $x \in V$  con conductancia  $q(x)$ .

La analogía con el continuo en este punto es evidente: los llamados operadores de Schrödinger tan ampliamente usados en el campo continuo de las ecuaciones en derivadas parciales son, dada una matriz simétrica  $K = (k_{ij})_{i,j=1}^n$ , los operadores autoadjuntos de la forma

$$\mathcal{L}(u) + qu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + qu.$$

Volviendo al campo discreto, observemos que el operador de Schrödinger es también un operador autoadjunto:

$$\langle \mathcal{L}_q(u), v \rangle = \langle \mathcal{L}u, v \rangle + \langle qu, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}v \rangle + \langle u, qv \rangle = \langle u, \mathcal{L}_q(v) \rangle$$

para toda  $u, v \in \mathcal{C}(V)$ . Por tanto, este nuevo operador se puede ver como una ampliación del operador laplaciano de una red.

No obstante,  $\mathcal{L}_q$  no es semi-definido positivo en general y esta propiedad depende totalmente de  $q$ , pues como ya se ha visto  $\mathcal{L}$  sí que la cumple. En [3] se dio una caracterización de los potenciales que aseguran esta propiedad para los operadores de Schrödinger, y en este trabajo nos restringiremos a trabajar con esta clase particular.

Para ello, consideremos una red  $\Gamma = (V, E, c)$  y un peso sobre sus vértices  $\omega \in \Omega(V)$ . Definimos un potencial sobre  $\Gamma$  determinado por  $\omega$  como  $q_\omega = -\frac{\mathcal{L}\omega}{\omega}$ . Este potencial se conoce como el *potencial asociado al peso  $\omega$*  y viene dado por la expresión

$$q_\omega(x) = -\frac{1}{\omega(x)} \sum_{y \in V} c(x, y) (\omega(x) - \omega(y))$$

para cada  $x \in V$ . Así, el operador de Schrödinger dado por el potencial asociado a  $\omega$  se expresa como

$$\mathcal{L}_{q_\omega}(u)(x) = (\mathcal{L} + q_\omega)(u)(x) = \frac{1}{\omega(x)} \sum_{y \in V} c(x, y) \omega(x) \omega(y) \left( \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)} \right)$$

para cada  $u \in \mathcal{C}(V)$  y para cada  $x \in V$ . Este operador se conoce como la *transformación de Doob de la red*  $\Gamma$ . En particular,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{q_\omega}(u), v \rangle &= \sum_{x,y \in V} \frac{v(x)}{\omega(x)} c(x,y) \omega(x) \omega(y) \left( \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} \frac{v(x)}{\omega(x)} c(x,y) \omega(x) \omega(y) \left( \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} \frac{v(y)}{\omega(y)} c(y,x) \omega(y) \omega(x) \left( \frac{u(y)}{\omega(y)} - \frac{u(x)}{\omega(x)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} c(x,y) \omega(x) \omega(y) \left( \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)} \right) \left( \frac{v(x)}{\omega(x)} - \frac{v(y)}{\omega(y)} \right). \end{aligned}$$

La fórmula  $\mathcal{L}_{q_\omega}(u)(x) = \frac{1}{\omega(x)} \sum_{y \in V} c(x,y) \omega(x) \omega(y) \left( \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)} \right)$  nos muestra que podemos establecer una equivalencia entre la transformación de Doob de la red  $\Gamma = (V, E, c)$  aplicada a una función  $u \in \mathcal{C}(V)$  y el operador laplaciano de una nueva red  $\Gamma' = (V, E, \bar{c})$  con nuevas conductancias  $\bar{c}(x,y) = c(x,y) \omega(y)$  aplicado a la función  $\bar{u} = \frac{u}{\omega}$ . Por tanto:

**OBSERVACIÓN 1.4.1.** *Como el laplaciano de una red es semi-definido positivo, tenemos que toda transformación de Doob  $\mathcal{L}_{q_\omega}$  es también semi-definida positiva.*

Es importante en este punto hacer un pequeño hincapié en que estas últimas fórmulas que hemos obtenido son la versión pesada discreta de la Primera Identidad de Green en el continuo para el operador  $\mathcal{L}_{q_\omega}$ . Recordemos que, dadas dos funciones  $\omega, u$  suficientemente regulares, la Primera Identidad de Green afirma que

$$\operatorname{div}(\omega \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \omega \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) = \omega \Delta(u) + \langle \nabla u, \nabla \omega \rangle.$$

Este referente en el continuo es el que da sentido a la construcción discreta que se está llevando a cabo en estas líneas, como se ha podido ver hasta ahora.

Volviendo al caso discreto que nos ocupa, es de importancia saber que el concepto de transformación de Doob aquí definido contiene otros operadores discretos ampliamente usados en la literatura, como por ejemplo el *laplaciano normalizado* introducido por Chung y Langlands en [14], que se define como

$$\Delta(u)(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \sum_{y \in V} c(x,y) \left( \frac{u(x)}{\sqrt{k(x)}} - \frac{u(y)}{\sqrt{k(y)}} \right);$$

ver también [11, 15]. Así, el laplaciano normalizado no es más que un operador de Schrödinger asociado a una nueva red. En particular, si denotamos por  $\hat{\mathcal{L}}$  al laplaciano combinatorio de la red  $\hat{\Gamma} = (V, E, \hat{c})$ , donde  $\hat{c}(x,y) = \frac{c(x,y)}{\sqrt{k(x)}\sqrt{k(y)}}$ , entonces  $\Delta = \hat{\mathcal{L}}_{q_\omega}$ , donde  $\omega = \frac{\sqrt{k}}{2n}$ .

Veamos ahora una cota para el potencial asociado al peso de una red:

**PROPOSICIÓN 1.4.2.** *Para todo  $x \in V$ ,*

$$k(x) \left( \frac{\omega_m}{\omega_M} - 1 \right) \leq q_\omega(x) \leq k(x) \left( \frac{\omega_M}{\omega_m} - 1 \right),$$

donde  $\omega_m = \min_{y \in V} \{\omega(y)\}$  y  $\omega_M = \max_{y \in V} \{\omega(y)\}$ .

**Demostración.** Basta observar que  $q_\omega(x) = -k(x) + \frac{1}{\omega(x)} \sum_{y \in V} c(x, y)\omega(y)$  y aplicar las desigualdades  $\omega_m \leq \omega(x) \leq \omega_M$ . ■

LEMA 1.4.3. Si  $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega(V)$ , entonces  $q_\omega \geq q_{\tilde{\omega}}$  si, y sólo si,  $q_\omega = q_{\tilde{\omega}}$  y esto ocurre si, y sólo si,  $\omega = \tilde{\omega}$ .

**Demostración.** Observemos que

$$\langle q_\omega - q_{\tilde{\omega}}, \omega \tilde{\omega} \rangle = \langle \omega, \mathcal{L}\tilde{\omega} \rangle - \langle \tilde{\omega}, \mathcal{L}\omega \rangle = 0.$$

Así, como por hipótesis  $q_\omega - q_{\tilde{\omega}} \geq 0$  y  $\omega, \tilde{\omega} > 0$ , lo anterior pasa si, y sólo si,  $q_\omega(x) = q_{\tilde{\omega}}(x)$  para todo  $x \in V$ , es decir, si y sólo si  $q_\omega = q_{\tilde{\omega}}$ . Recíprocamente, si  $q_\omega = q_{\tilde{\omega}}$  entonces  $q_\omega \geq q_{\tilde{\omega}}$ .

Además,  $q_\omega = q_{\tilde{\omega}}$  si, y sólo si, para todo  $x \in V$

$$0 = \omega(x)\tilde{\omega}(x)(q_\omega(x) - q_{\tilde{\omega}}(x)) = \sum_{y \in V} c(x, y)\tilde{\omega}(x)\tilde{\omega}(y) \left( \frac{\omega(y)}{\tilde{\omega}(y)} - \frac{\omega(x)}{\tilde{\omega}(x)} \right).$$

Así, si consideramos la nueva red  $\bar{\Gamma} = (V, E, \bar{c})$  con  $\bar{c}(x, y) = c(x, y)\tilde{\omega}(x)\tilde{\omega}(y)$  entonces, si  $\bar{\mathcal{L}}$  denota el operador laplaciano asociado a  $\bar{\Gamma}$ , se tiene que  $\bar{\mathcal{L}}(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}) = 0$  y, como el laplaciano sólo se anula sobre las constantes,  $\omega = a\tilde{\omega}$  con  $a > 0$ , pues las funciones de  $\Omega(V)$  son siempre positivas. Pero como  $\omega, \tilde{\omega}$  son dos pesos,  $1 = \langle \omega, \omega \rangle = a^2 \langle \tilde{\omega}, \tilde{\omega} \rangle = a^2$  y por tanto  $a = 1$  y  $\omega = \tilde{\omega}$ . ■

En particular,  $q_\omega = 0$  si, y sólo si,  $\omega$  es una constante positiva. Esto es debido a que  $q_\omega(x) = 0$  para toda  $x \in V$  si, y sólo si,  $\sum_{y \in V} c(x, y)(\omega(x) - \omega(y)) = 0$ , es decir, si y sólo si  $\omega(x) - \omega(y) = 0$  para todo  $x \sim y$ , lo que es equivalente a decir que  $\omega$  es constante. Además, esta constante ha de ser positiva porque  $\omega$  es una función positiva.

Más en general,  $\langle \omega, q_\omega \rangle = -\langle \mathcal{L}\omega, 1 \rangle = -\langle \omega, \mathcal{L}1 \rangle = 0$ . Esto nos indica que  $q_\omega$  toma valores positivos y negativos excepto cuando  $\omega$  es constante. Como hemos visto en las desigualdades de la Proposición 1.4.2, esta positividad y negatividad están acotadas, lo que siempre permite conservar la semidefinición positiva de la transformada de Doob  $\mathcal{L}_{q_\omega}$ .

Definimos la *forma bilineal asociada a un operador de Schrödinger*  $\mathcal{L}_q$ , también conocida como *energía interna*, como  $\mathcal{E}_q(u, v) = \langle \mathcal{L}_q u, v \rangle$  para toda  $u, v \in \mathcal{C}(V)$ . Recordemos que

$$\mathcal{E}_q(u, v) = \sum_{x, y \in V} c(x, y)\omega(x)\omega(y) \left( \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)} \right) \left( \frac{v(x)}{\omega(x)} - \frac{v(y)}{\omega(y)} \right).$$

Las propiedades más importantes de esta forma cuadrática vienen dadas en el siguiente resultado. Para una interpretación en términos de formas de Dirichlet, ver [3].

PROPOSICIÓN 1.4.4. Sea  $\mathcal{E}_q(u, v)$  la forma bilineal asociada al operador de Schrödinger  $\mathcal{L}_q$ . Entonces, son equivalentes:

1.  $\mathcal{E}_q$  es semi-definida positiva.
2. Existe un peso  $\omega \in \Omega(V)$  y un valor  $\lambda \geq 0$  tales que  $q = q_\omega + \lambda$ .



3. Existe un peso  $\sigma \in \Omega(V)$  tal que  $q \geq q_\sigma$ .

Además,  $\omega$  y  $\lambda$  están unívocamente determinados.

**Demostración.**

■ 1.  $\Rightarrow$  2.

Si  $\mathcal{E}_q$  es semi-definida positiva, entonces la matriz asociada a  $\mathcal{E}_q$  es una matriz simétrica semi-definida positiva con todos los elementos que no están en la diagonal no positivos. Además, como  $\Gamma$  es una red conexa, entonces la matriz asociada a  $\mathcal{E}_q$  es irreducible. Entonces, su menor autovalor,  $\lambda$ , es no negativo y tiene un autovector,  $\tilde{\omega}$ , cuyas entradas son estrictamente positivas, ver [12, Th. 4.16]. Por tanto,  $\mathcal{L}\tilde{\omega} + q\tilde{\omega} = \lambda\tilde{\omega}$ . Normalizando el autovector, se tiene que existe un peso  $\omega = \frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\langle \tilde{\omega}, \tilde{\omega} \rangle}} \in \Omega(V)$  tal que  $\mathcal{L}\omega + q\omega = \lambda\omega$ , lo que implica que  $q = q_\omega + \lambda$ .

■ 2.  $\Rightarrow$  3.

Claramente, si existe un peso  $\omega \in \Omega(V)$  y un valor  $\lambda \geq 0$  tales que  $q = q_\omega + \lambda$  entonces  $q \geq q_\omega$ .

■ 3.  $\Rightarrow$  1.

Supongamos que existe un peso  $\omega \in \Omega(V)$  tal que  $q \geq q_\sigma$ . Si observamos que para todo potencial  $q$  se tiene que  $\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_{q_\sigma} + (q - q_\sigma)$ , entonces tenemos que

$$\langle \mathcal{L}_q u, u \rangle = \langle \mathcal{L}_{q_\sigma}(u), u \rangle + \langle (q - q_\sigma)u, u \rangle = \langle \mathcal{L}_{q_\sigma}(u), u \rangle + \sum_{x \in V} (q(x) - q_\sigma(x)) u^2(x).$$

Como  $\mathcal{L}_{q_\sigma}$  es semi-definido positivo,  $\langle \mathcal{L}_{q_\sigma}(u), u \rangle \geq 0$ . Además, como  $q \geq q_\sigma$  por hipótesis, se tiene que  $\langle \mathcal{L}_q u, u \rangle \geq 0$ , como queríamos demostrar.

Además, si existen  $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega(V)$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , con  $\lambda \geq \mu$ , tales que  $q = q_\omega + \lambda = q_{\tilde{\omega}} + \mu$ , entonces  $q_\mu - q_\omega \geq 0$ . Por el Lema 1.4.3,  $q_\mu = q_\omega$  y por tanto  $\lambda = \mu$ , lo que demuestra que  $\omega$  y  $\lambda$  están unívocamente determinados. ■

**COROLARIO 1.4.5.** *Un operador de Schrödinger  $\mathcal{L}_q$  es semi-definido positivo si, y sólo si, existe un peso  $\omega \in \Omega(V)$  y un parámetro  $\lambda \geq 0$  tal que  $q = q_\omega + \lambda$ . Además,  $\omega$  y  $\lambda$  están unívocamente determinados.*

**Demostración.** Basta observar que  $\mathcal{L}_q$  es semi-definido positivo si, y sólo si, para toda  $u \in \mathcal{C}(V)$   $\langle \mathcal{L}_q(u), u \rangle \geq 0$ , es decir, si y sólo si su forma bilineal asociada  $\mathcal{E}_q$  es una forma semi-definida positiva. ■

**COROLARIO 1.4.6.** *Supongamos que  $\mathcal{L}_q$  es semi-definido positivo. Entonces,  $\mathcal{L}_q$ , con  $q = q_\omega + \lambda$ , no es definido positivo si y sólo si  $\lambda = 0$ , en cuyo caso  $\langle \mathcal{L}_{q_\omega} v, v \rangle = 0$  si, y sólo si,  $v = a\omega$  con  $a \in \mathbb{R}$ .*

**Demostración.** Como  $q = q_\omega + \lambda$  es equivalente a  $q \geq q_\sigma$  para algún peso  $\sigma \in \Omega(V)$ , trabajaremos con esta notación.

$\mathcal{L}_q$  no es definido positivo si, y sólo si, existe alguna  $u \in \mathcal{C}(V)$  con  $u \neq 0$  tal que  $\langle \mathcal{L}_q u, u \rangle = 0$ . Como  $\langle \mathcal{L}_q u, u \rangle = \langle \mathcal{L}_{q_\sigma} u, u \rangle + \sum_{x \in V} (q(x) - q_\sigma(x)) u^2(x)$  y

$$\langle \mathcal{L}_{q_\sigma} u, u \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} c(x, y) \omega(x) \omega(y) \left( \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)} \right)^2,$$

esto ocurre si, y sólo si,  $\frac{u(x)}{\omega(x)} = \frac{u(y)}{\omega(y)}$   $q(x) = q_\sigma(x)$  para todo par  $x, y \in V$ , es decir, si y sólo si  $q = q_\sigma$  y  $u = a\omega$  para alguna  $a \in \mathbb{R}$ , como queríamos ver. ■

En conclusión, hemos demostrado que el operador de Schrödinger  $\mathcal{L}_q$  es semi-definido positivo si, y sólo si, existen un peso  $\omega \in \Omega(V)$  y un valor  $\lambda \geq 0$  tales que  $q = q_\omega + \lambda$ . Además, si  $\lambda > 0$ , entonces  $\mathcal{L}_q$  es invertible; por el contrario, si  $\lambda = 0$ , entonces  $\mathcal{L}_q$  es singular.

Consideremos ahora  $\mathcal{V} = \text{Ker}(\mathcal{L}_q) = \{u \in \mathcal{C}(V) \mid \mathcal{L}_q(u) = 0\}$  y  $\Pi(f)$  la *proyección ortogonal* de  $f \in \mathcal{C}(V)$  sobre  $\mathcal{V}$ . Claramente,  $\mathcal{V} = \{0\}$  cuando  $\lambda > 0$  y, por tanto,  $\Pi \equiv 0$ . Si  $\lambda = 0$ , por el contrario,  $\mathcal{V}$  es el subespacio generado por  $\omega$  y  $\Pi(f) = \langle f, \omega \rangle \omega$  es la proyección ortogonal para toda  $f \in \mathcal{C}(V)$ .

Observemos que, en cualquier caso, para toda  $f \in \mathcal{C}(V)$  existe  $u \in \mathcal{C}(V)$  tal que  $\mathcal{L}_q(u) = f - \Pi(f)$  y entonces  $u + \mathcal{V}$  es el conjunto de todas las funciones  $v$  tales que  $\mathcal{L}_q(v) = f - \Pi(f)$ .

**TEOREMA 1.4.7** (Alternativa de Fredholm). *Dada  $f \in \mathcal{C}(V)$ ,  $\mathcal{L}_q(u) = f$  tiene solución si, y sólo si,  $\Pi(f) = 0$ . Además, existe una única solución tal que  $\Pi(u) = 0$ .*

## 1.5. Autovalores y autofunciones de $\mathcal{L}_q$

Dado un peso  $\omega \in \Omega(V)$ , un valor  $\lambda \geq 0$  y un potencial  $q = q_\omega + \lambda$ , ahora centramos nuestro interés en conocer los autovalores y autofunciones asociadas al operador de Schrödinger  $\mathcal{L}_q$ .

**PROPOSICIÓN 1.5.1.** *El valor  $\lambda$  es el menor autovalor de  $\mathcal{L}_q$  y sus autofunciones asociadas son múltiplos de  $\omega$ .*

**Demostración.** Como  $\mathcal{L}_q(\omega) = \mathcal{L}(\omega) + q_\omega \omega + \lambda \omega = \lambda \omega$ , entonces  $\lambda$  es autovalor de  $\mathcal{L}_q$ . Como  $\mathcal{L}_q$  es semi-definido positivo, con matriz asociada simétrica, y además  $\Gamma$  es conexas, entonces todos los autovalores son reales y no negativos y el menor autovalor es simple.  $\lambda$  es el menor autovalor. Si esto último no fuera cierto entonces existiría un autovalor no negativo  $\mu < \lambda$  tal que  $\mathcal{L}_q(u) = \mu u$  para alguna función  $u \neq 0$ , esto es,  $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = (\mu - \lambda)u$ . Pero esto implicaría que

$$\langle \mathcal{L}_{q_\omega}(u), u \rangle = \langle (\mu - \lambda)u, u \rangle = (\mu - \lambda) \langle u, u \rangle < 0,$$

contradiendo que  $\mathcal{L}_{q_\omega}$  es semi-definido positivo. Así,  $\lambda$  es el menor autovalor de  $\mathcal{L}_q$  y es simple.

Como  $\mathcal{L}_q(\omega) = \lambda \omega$ ,  $\omega$  es una autofunción asociada a  $\lambda$ . Más aún, todo múltiplo de  $\omega$  es autofunción de este autovalor, pues para toda constante  $a \in \mathbb{R}$  se tiene que  $\mathcal{L}_q(a\omega) = \lambda a\omega$ . Veamos ahora que sólo este tipo de funciones pueden ser autofunciones de  $\lambda$ : dada  $u \in \mathcal{C}(V)$  con  $u \neq 0$ ,  $\mathcal{L}_q(u) = \lambda u$  si, y sólo si,  $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = 0$  y esto implica que  $\langle \mathcal{L}_{q_\omega}(u), u \rangle = 0$ . Por el Corolario 1.4.6, esto ocurre si, y sólo si,  $u = a\omega$  para alguna constante  $a \in \mathbb{R}$ . ■

Como consecuencia del Teorema espectral y de esta última proposición tenemos que

LEMA 1.5.2.

$$\mathcal{L}_q(u) = \lambda \langle u, \omega \rangle \omega + \sum_{j=2}^n \lambda_j \langle u, v_j \rangle v_j,$$

donde  $\lambda_1 = \lambda < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  son los autovalores de  $\mathcal{L}_q$  y  $v_1 = \omega, v_2, \dots, v_n$  son una base ortonormal de autofunciones asociadas a estos autovalores.

## 1.6. Ecuaciones de Poisson y función de Green

Dado un operador  $\mathcal{K} : \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathcal{C}(V)$  denotamos el *operador adjunto* de  $\mathcal{K}$  como  $\mathcal{K}^*$ , donde  $\mathcal{K}^*$  viene dado por

$$\langle \mathcal{K}^*(u), v \rangle = \langle u, \mathcal{K}(v) \rangle$$

para todo  $u, v \in \mathcal{C}(V)$ . Se dice que  $\mathcal{K}$  es autoadjunto si  $\langle \mathcal{K}(u), v \rangle = \langle u, \mathcal{K}(v) \rangle$ .

Un *núcleo* en  $V$  es una función de la forma  $K : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Un núcleo en  $V$  determina un endomorfismo de  $\mathcal{C}(V)$  asignando a cada  $u \in \mathcal{C}(V)$  el operador  $\mathcal{K}(u) = \sum_{y \in V} K(\cdot, y)u(y)$ .

Recíprocamente, todo núcleo en  $V$  viene determinado por un endomorfismo en  $\mathcal{C}(V)$  dado por  $K(x, y) = \mathcal{K}(\varepsilon_y)(x)$  para todo  $x, y \in V$ . Este último resultado es la versión discreta del teorema de los núcleos de L. Schwarz.

PROPOSICIÓN 1.6.1. *Dado un operador  $\mathcal{K} : \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathcal{C}(V)$ , el núcleo de  $\mathcal{K}^*$  viene dado por  $K^*(x, y) = K(y, x)$  para todo  $x, y \in V$ .*

PROPOSICIÓN 1.6.2.  *$\mathcal{K}$  es autoadjunto si, y sólo si, su núcleo es una función simétrica.*

**Demostración.** Si  $\mathcal{K}$  es autoadjunto, entonces para toda  $u, v \in \mathcal{C}(V)$  se tiene que  $\langle \mathcal{K}(u), v \rangle = \langle u, \mathcal{K}(v) \rangle$ . En particular,

$$\sum_{x \in V} K(x, y)u(x) = \sum_{x, z \in V} K(x, z)\varepsilon_y(z)u(x) = \langle u, \mathcal{K}(\varepsilon_y) \rangle = \langle \mathcal{K}(u), \varepsilon_y \rangle = \mathcal{K}(u)(y) = \sum_{x \in V} K(y, x)u(x),$$

es decir,

$$\sum_{x \in V} (K(y, x) - K(x, y))u(x) = 0 \text{ para toda } y \in V \text{ y } u \in \mathcal{C}(V).$$

Si tomamos  $u = \varepsilon_x$  para  $x \in V$ , entonces  $K(y, x) - K(x, y) = 0$  para todo  $x, y \in V$ . Por tanto,  $K$  es simétrica.

Recíprocamente, si  $K$  es simétrica, entonces

$$\langle \mathcal{K}(u), v \rangle = \sum_{x, y \in V} K(y, x)u(x)v(y) = \sum_{x, y \in V} K(x, y)u(x)v(y) = \langle u, \mathcal{K}(v) \rangle,$$

como queríamos demostrar. ■

En esta sección nuestro objetivo es construir los núcleos asociados a los inversos de los operadores de Schrödinger  $\mathcal{L}_q$  que se corresponden con la *ecuación de Poisson*  $\mathcal{L}_q(u) = f$  en  $V$ , donde  $f \in \mathcal{C}(V)$  es una función conocida llamada *dato* y  $V$  es el conjunto de vértices de una red  $\Gamma = (V, E, c)$  a la que se ha asignado un peso  $\omega \in \Omega(V)$ .

Si  $\mathcal{L}_q$  es definido positivo, ya hemos visto que existen un peso  $\omega \in \Omega(V)$  y un valor  $\lambda > 0$  tales que  $q = q_\omega + \lambda$ . En este caso,  $\mathcal{L}_q$  es invertible y llamaremos *operador de Green* a su inversa. Por otro lado, cuando  $\mathcal{L}_q$  es semi-definido positivo y singular quiere decir que existe un peso  $\omega \in \Omega(V)$  tal que  $q = q_\omega$ . En este caso, el operador que asigna a cada función  $f \in \mathcal{C}(V)$  la única  $u \in \mathcal{C}(V)$  tal que  $\mathcal{L}_q(u) = f - \Pi(f)$  y  $\langle u, \omega \rangle = 0$  se denomina *operador de Green*. En cualquier caso, el operador de Green se denota por  $\mathcal{G}_q$  y la función  $G_q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $G_q(x, y) = \mathcal{G}_q(\varepsilon_y)(x)$  para todo  $x, y \in V$  se llama *función o núcleo de Green*.

PROPOSICIÓN 1.6.3.  $\mathcal{G}_q$  es un operador autoadjunto.

**Demostración.** Sean  $f, g \in \mathcal{C}(V)$  y sean  $u = \mathcal{G}_q(f)$ ,  $v = \mathcal{G}_q(g)$ . Entonces,  $u, v \in \mathcal{V}^\perp$  como consecuencia de la Alternativa de Fredholm. Además,  $\mathcal{L}_q(u) = \mathcal{L}_q(\mathcal{G}_q(f)) = f - \langle f, \omega \rangle \omega = f - \Pi(f)$ . Análogamente,  $\mathcal{L}_q(v) = g - \Pi(g)$ . Así, como  $\mathcal{G}_q(g) = v \in \mathcal{V}^\perp$  nos indica que  $\Pi(g) = 0$ , se tiene que

$$\langle \mathcal{G}_q(f), g \rangle = \langle u, g - \Pi(g) \rangle = \langle u, \mathcal{L}_q(v) \rangle = \langle \mathcal{L}_q(u), v \rangle = \langle f - \Pi(f), v \rangle = \langle f, \mathcal{G}_q(g) \rangle. \blacksquare$$

COROLARIO 1.6.4.  $G_q$  es una función simétrica.

Así, si  $f \in \mathcal{C}(V)$  entonces la función dada por

$$\mathcal{G}_q(f)(x) = \sum_{y \in V} G_q(x, y) f(y)$$

para todo  $x \in V$  es una solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_q(u) = f - \Pi(f)$ . Además, existe una única solución  $u$  de esta ecuación tal que  $\langle u, \omega \rangle = 0$ .

PROPOSICIÓN 1.6.5. Para todo  $y \in V$ , la función  $u = G_q(\cdot, y)$  se caracteriza por ser la única solución del problema  $\mathcal{L}_q(u) = \varepsilon_y - \omega(y)\omega$  tal que  $\langle u, \omega \rangle = 0$  cuando  $\lambda = 0$  y del problema  $\mathcal{L}_q(u) = \varepsilon_y$  cuando  $\lambda > 0$ .

**Demostración.** En cualquiera de los dos casos, para todo  $y \in V$  se tiene que  $G_q(\cdot, y) = \mathcal{G}_q(\varepsilon_y)$  y, por tanto,  $\mathcal{G}_q(\mathcal{L}_q(\varepsilon_y)) = \mathcal{L}_q(\mathcal{G}_q(\varepsilon_y)) = \varepsilon_y - \Pi(\varepsilon_y)$ . Cuando  $\lambda = 0$ , entonces  $\Pi(\varepsilon_y) = \langle \omega, \varepsilon_y \rangle \omega = \omega(y)\omega$  y cuando  $\lambda > 0$ ,  $\Pi(\varepsilon_y) = 0$ .  $\blacksquare$

En definitiva, si  $\lambda > 0$  entonces  $\mathcal{G}_q(\mathcal{L}_q(u)) = \mathcal{L}_q(\mathcal{G}_q(u)) = u$  para cada  $u \in \mathcal{C}(V)$  y, por otro lado, si  $\lambda = 0$ , entonces  $q = q_\omega$  y

$$(1) \quad \mathcal{G}_{q_\omega}(\mathcal{L}_{q_\omega}(u)) = \mathcal{L}_{q_\omega}(\mathcal{G}_{q_\omega}(u)) = u - \omega \langle u, \omega \rangle$$

para cada  $u \in \mathcal{C}(V)$ . La ecuación (1) se denomina *inversa generalizada de Green*.

PROPOSICIÓN 1.6.6.  $\mathcal{G}_q(\omega) = \lambda^{-1}\omega$  si  $\lambda > 0$  y  $\mathcal{G}_q(\omega) = 0$  si  $\lambda = 0$ .

**Demostración.** Si  $\lambda > 0$ , entonces  $\lambda \mathcal{G}_q(\omega) = \mathcal{G}_q(\lambda\omega) = \mathcal{G}_q(\mathcal{L}_q(\omega)) = \omega$ . Si  $\lambda = 0$ , entonces se tiene que  $\mathcal{L}_{q_\omega}(\mathcal{G}_{q_\omega}(\omega)) = \omega - \langle \omega, \omega \rangle \omega = 0$ . Como consecuencia,  $\langle \mathcal{L}_{q_\omega}(\mathcal{G}_{q_\omega}(\omega)), \mathcal{G}_{q_\omega}(\omega) \rangle = 0$  y, por el Corolario 1.4.6, esto ocurre si, y sólo si,  $\mathcal{G}_{q_\omega}(\omega) = a\omega$  para alguna constante  $a \in \mathbb{R}$ . Por otro lado, como  $a \mathcal{G}_{q_\omega}(\omega) = \mathcal{G}_{q_\omega}(a\omega) = \mathcal{G}_{q_\omega}(\mathcal{L}_{q_\omega}(\omega)) = 0$  entonces  $a = 0$  o  $\mathcal{G}_{q_\omega}(\omega) = 0$ . Como  $\mathcal{G}_{q_\omega}(\omega) = a\omega$ , ambos casos implican que  $\mathcal{G}_{q_\omega}(\omega) = 0$ .  $\blacksquare$

PROPOSICIÓN 1.6.7. *El espectro del operador de Green  $\mathcal{G}_q$  son los inversos del espectro del operador de Schrödinger  $\mathcal{L}_q$  si  $\lambda > 0$ . Si  $\lambda = 0$ , entonces son los inversos de todos los autovalores no nulos del operador de Schrödinger  $y$ , además, el 0. Las autofunciones son las mismas.*

**Demostración.** Supongamos que  $\mathcal{L}_q(u) = \gamma u$ . Si  $\gamma \neq 0$ , entonces  $\mathcal{G}_q(u) = \frac{\mathcal{G}_q(\mathcal{L}_q(u))}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}u$ . Si, por el contrario,  $\gamma = 0$ , entonces como  $\lambda = 0$  es el menor autovalor de  $\mathcal{L}_q$  (ver 1.5.2) se tiene que  $\gamma \geq 0$ . Como  $\gamma = 0$ , necesariamente  $\gamma = \lambda = 0$  y sus autofunciones asociadas son múltiplos de  $\omega$ :  $u = a\omega$ , con  $a \in \mathbb{R}$ . Por la proposición anterior, se concluye que  $\mathcal{G}_q(a\omega) = 0$ . ■

LEMA 1.6.8. *Para toda  $u \in V$ ,*

$$\mathcal{G}_q(u) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \langle u, v_j \rangle v_j + \Lambda(\lambda) \Pi(u),$$

donde  $\Lambda(\lambda) = 0$  si  $\lambda = 0$  y  $\Lambda(\lambda) = \lambda^{-1}$  si  $\lambda > 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  es el espectro de  $\mathcal{L}_q$  y  $v_1 = \omega, v_2, \dots, v_n$  las autofunciones asociadas.

**Demostración.** Por la Observación 1.5.2,  $\mathcal{L}_q(u) = \lambda \langle u, \omega \rangle \omega + \sum_{j=2}^n \lambda_j \langle u, v_j \rangle v_j$ .

Cuando  $\lambda \neq 0$  se tiene que  $u = \mathcal{G}_q(\mathcal{L}_q(u)) = \langle u, \omega \rangle \omega + \sum_{j=2}^n \langle u, v_j \rangle v_j$ . Así, aplicando el operador de Green,  $\mathcal{G}_q(u) = \frac{1}{\lambda} \langle u, \omega \rangle \omega + \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \langle u, v_j \rangle v_j$ .

Por otro lado, cuando  $\lambda = 0$ ,  $u - \langle u, \omega \rangle \omega = \mathcal{G}_q(\mathcal{L}_q(u)) = \langle u, \omega \rangle \omega + \sum_{j=2}^n \langle u, v_j \rangle v_j$ . Aplicando el operador de Green,  $\mathcal{G}_q(u) - 0 = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \langle u, v_j \rangle v_j$ . ■

La Alternativa de Fredholm establece que, dada  $f \in \mathcal{C}(V)$ , cuando  $\lambda = 0$  la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_{q\omega}(u) = f$  tiene solución si, y sólo si,  $\langle f, \omega \rangle = 0$  (pues cuando  $\lambda$  es nulo se tiene que  $\Pi(f) = \langle \omega, f \rangle \omega$ ). En este caso, existe una única solución verificando  $\langle u, \omega \rangle = 0$ .

En lo sucesivo, cuando  $\lambda = 0$  omitiremos el subíndice o valor  $\lambda$  en las expresiones.

## Capítulo 2

# Resistencia efectiva e Índice de Kirchhoff

### 2.1. Formulación variacional de la ecuación $\mathcal{L}_q u = f$

Dada una red conexa  $\Gamma = (V, E, c)$ , un peso  $\omega \in \Omega(V)$ , un valor  $\lambda \geq 0$  y el operador de Schrödinger  $\mathcal{L}_q$  con potencial  $q = q_\omega + \lambda$ , queremos resolver la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_q u = f$  en  $V$ , donde  $f \in \mathcal{C}(V)$ . La *formulación variacional o débil* de este problema consiste en encontrar  $u \in \mathcal{C}(V)$  tal que para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ ,

$$\langle \mathcal{L}_q u, v \rangle = \langle f, v \rangle.$$

Esta ecuación también se conoce como *formulación débil* del problema de Poisson y en esta sección trabajaremos con este problema. Observemos que toda solución del problema original o fuerte será, en particular, solución del problema débil. El recíproco también es cierto. Además, el problema sólo tiene sentido si  $\langle f, \omega \rangle = \lambda \langle u, \omega \rangle$ , pues  $\langle f, \omega \rangle = \langle \mathcal{L}_q u, \omega \rangle = \langle \mathcal{L}_q \omega, u \rangle = \lambda \langle u, \omega \rangle$ . No obstante, si  $\lambda = 0$ , no podemos asegurar unicidad de solución para este problema débil:

**PROPOSICIÓN 2.1.1.** *Si  $\lambda = 0$  y  $u$  es solución de  $\mathcal{L}_{q_\omega} u = f$ , entonces el conjunto de soluciones del problema débil es  $\{u + k\omega, k \in \mathbb{R}\}$ .*

**Demostración.** Si  $u, w$  son dos soluciones diferentes de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_{q_\omega} u = f$ , entonces para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$  se tiene que  $\langle \mathcal{L}_{q_\omega} w, v \rangle = \langle f, v \rangle$ . Como  $w = u + (w - u)$ , esto ocurre si, y sólo si,  $\langle \mathcal{L}_{q_\omega} (w - u), v \rangle = \langle f, v \rangle - \langle \mathcal{L}_{q_\omega} u, v \rangle = \langle f, v \rangle - \langle f, v \rangle = 0$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ , esto es, si y sólo si  $w - u = a\omega$ , donde  $a \in \mathbb{R}$  es constante. ■

Debido a la simetría de  $\mathcal{L}_q$  y a su definición positiva, caracterizaremos la solución del problema fuerte (o, equivalentemente, del débil) mediante la minimización de un funcional: definimos

$$\mathcal{J}(u) = 2\langle f, u \rangle - \langle \mathcal{L}_q u, u \rangle.$$

**PROPOSICIÓN 2.1.2.** *Si  $u$  es solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_q u = f$ , entonces  $u$  maximiza el funcional  $\mathcal{J}$ .*

**Demostración.** Ver que  $u$  maximiza el funcional  $\mathcal{J}$  es lo mismo que ver que  $u$  minimiza el funcional  $-\mathcal{J}$ . Suponemos que el funcional  $\min_{w \in \mathcal{C}(V)} \{-\mathcal{J}(w)\}$  tiene solución  $v$ . Entonces,  $-\mathcal{J}(v)$  es mínimo, es decir,  $-\mathcal{J}(v) \leq -\mathcal{J}(v + th)$  para toda  $h \in \mathcal{C}(V)$  y  $t \in \mathbb{R}$ .

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto -\mathcal{J}(v + th). \end{aligned}$$

Esta aplicación es derivable. Además, tiene un mínimo en  $t = 0$  porque por hipótesis  $-\mathcal{J}(v)$  es mínimo. Por tanto,  $\frac{d}{dt}\varphi_h|_{t=0} = 0$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} -\mathcal{J}(v + th) &= \langle \mathcal{L}_q(v + th), v + th \rangle - 2\langle f, v + th \rangle = \\ &= -\mathcal{J}(v) + \left(2\langle \mathcal{L}_q v, h \rangle - 2\langle f, h \rangle\right)t + \left(\langle \mathcal{L}_q h, h \rangle\right)t^2. \end{aligned}$$

Derivando respecto de  $t$  e imponiendo  $\frac{d}{dt}\varphi_h|_{t=0} = 0$ , se obtiene la ecuación

$$\langle \mathcal{L}_q v, h \rangle = \langle f, h \rangle \quad \text{para toda } h \in \mathcal{C}(V),$$

donde  $v$  minimiza el funcional  $-\mathcal{J}$ . Por lo tanto, la función  $u$ , que es solución de  $\mathcal{L}_q u = f$ , es en particular solución del problema débil  $\langle \mathcal{L}_q u, v \rangle = \langle f, v \rangle$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ . En consecuencia, acabamos de demostrar que  $u$  minimiza el funcional  $-\mathcal{J}$ :

$$-\mathcal{J}(u) = \min_{v \in \mathcal{C}(V)} -\mathcal{J}(v),$$

donde  $u$  solución de  $\mathcal{L}u = f$ . ■

**TEOREMA 2.1.3 (Euler-Lagrange).**  $\langle \mathcal{L}_q u, v \rangle = \langle f, v \rangle$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$  si, y sólo si  $\mathcal{L}_q u = f$ . Además,  $u$  maximiza el funcional  $\mathcal{J}(u) = 2\langle f, u \rangle - \langle \mathcal{L}_q u, u \rangle$  si, y sólo si,  $u$  verifica la ecuación  $\langle \mathcal{L}_q u, v \rangle = \langle f, v \rangle$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ .

**Demostración.** Si  $\langle \mathcal{L}_q u, v \rangle = \langle f, v \rangle$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$  entonces, tomando  $v = \varepsilon_x$ ,  $\mathcal{L}_q u(x) = f(x)$  para todo  $x \in V$ , es decir,  $\mathcal{L}u = f$ . El recíproco es inmediato. Si  $u$  verifica la ecuación de Euler, entonces  $-\mathcal{J}(u + v) = \langle \mathcal{L}_q u, u \rangle + \langle \mathcal{L}_q v, v \rangle - 2\langle f, u \rangle = -\mathcal{J}(u) - \langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq -\mathcal{J}(u)$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ . Por tanto,  $u$  es mínimo de  $-\mathcal{J}$ . El recíproco es consecuencia de la proposición anterior. ■

La ecuación  $\langle \mathcal{L}_q u, v \rangle = \langle f, v \rangle$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$  se denomina *ecuación de Euler*, donde  $u$  maximiza a  $\mathcal{J}(u)$ . La ecuación  $\mathcal{L}_q(u) = f$  se denomina *ecuación de Euler-Lagrange*.

Como consecuencia de todos estos resultados,

**TEOREMA 2.1.4.**  $\mathcal{L}_q u = f$  si, y sólo si,  $u$  maximiza el funcional  $\mathcal{J}(v) = 2\langle f, v \rangle - \langle \mathcal{L}_q v, v \rangle$ .

## 2.2. Resistencia efectiva y resistencia total clásicas

Uno de los problemas fundamentales en la Teoría de Redes es el cálculo de la resistencia entre dos puntos cualesquiera de la red. En la literatura, si las ramas de una red constituyen las resistencias de un circuito donde el valor de la resistencia entre dos nodos adyacentes viene representada por el inverso de la conductancia de la rama entre ellos, entonces para cada  $x, y \in V$  la resistencia efectiva entre  $x$  e  $y$ ,  $R(x, y)$ , es la diferencia de potencial medida entre los vértices  $x$  e  $y$  cuando entre ellos se aplica una corriente unitaria. Estas definiciones son naturales, pues la resistencia es el valor que indica lo que se opone a la circulación en una red o circuito y la conductancia es justamente lo contrario: es el valor que indica cuánto fluye la circulación.

Dada una red  $\Gamma = (V, E, c)$ , un peso constante  $\omega \equiv \frac{1}{|V|}$  y tomando el valor  $\lambda = 0$ , observamos que  $\mathcal{L}_q = \mathcal{L} + q\omega + \lambda = \mathcal{L}$ , es decir, estamos considerando una red en el sentido clásico.

Dados dos vértices  $x, y \in V$ , decimos que  $\varepsilon_x - \varepsilon_y$  es la *función dipolo* entre  $x$  e  $y$ . Si consideramos la formulación variacional de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}u = \varepsilon_x - \varepsilon_y$  en  $V$ , sabemos que  $u$  es solución del problema si, y sólo si,  $u$  maximiza el funcional  $\mathcal{J}_{x,y}(u) = 2(u(x) - u(y)) - \langle \mathcal{L}u, u \rangle$ , es decir, si y sólo si

$$(2) \quad \mathcal{J}_{x,y}(u) = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \{2(v(x) - v(y)) - \langle \mathcal{L}v, v \rangle\}.$$

Recordemos que si  $u$  maximiza  $\mathcal{J}_{x,y}$  entonces  $u$  verifica la ecuación de Euler  $\langle \mathcal{L}u, v \rangle = v(x) - v(y)$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ . En particular,  $\langle \mathcal{L}u, u \rangle = u(x) - u(y)$  y, por tanto,  $\mathcal{J}_{x,y} = 2(u(x) - u(y)) - \langle \mathcal{L}u, u \rangle = u(x) - u(y)$ .

Retomando (2),  $u$  es solución de  $\mathcal{L}u = \varepsilon_x - \varepsilon_y$  si, y sólo si,

$$u(x) - u(y) = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \{\mathcal{J}_{x,y}(v)\}.$$

Así, dada una red  $\Gamma = (V, E, c)$  y dos vértices  $x, y \in V$ , se define la *resistencia efectiva* entre  $x$  e  $y$  como

$$R(x, y) = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \{\mathcal{J}_{x,y}(v)\},$$

donde  $\mathcal{J}_{x,y}(v) = 2(v(x) - v(y)) - \langle \mathcal{L}v, v \rangle$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ . Con los cálculos anteriores hemos demostrado el siguiente resultado:

**PROPOSICIÓN 2.2.1.** *Si  $u$  es solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}u = \varepsilon_x - \varepsilon_y$  en  $V$ , con  $x, y \in V$  dados, entonces*

$$R(x, y) = u(x) - u(y).$$

Como dos soluciones de la ecuación anterior se diferencian sólo en una constante, resulta que el valor de  $R(x, y)$  no depende de la solución escogida. Además,  $R(x, y) = R(y, x)$ ,  $R(x, x) = 0$  y  $R(x, y) > 0$  cuando  $x \neq y$ . De hecho,  $R$  define una distancia sobre la red, que suele denominarse *distancia resistiva*. El conocimiento de las resistencias efectivas de una red se puede usar para deducir propiedades importantes de las redes eléctricas, ver por ejemplo [10].

Ahora, de la misma manera, dada una red  $\Gamma = (V, E, c)$  y un vértice  $x \in V$  estudiamos la ecuación de Poisson

$$\mathcal{L}u = \sqrt{n}\varepsilon_x - \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ en } V.$$

Si consideramos de nuevo la formulación variacional, sabemos que  $u$  es solución del problema si, y sólo si,  $u$  maximiza el funcional  $\mathcal{J}_x(u) = 2\left(\sqrt{n}u(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\langle \mathbf{1}, u \rangle\right) - \langle \mathcal{L}u, u \rangle$ , es decir, si y sólo si

$$(3) \quad \mathcal{J}_x(u) = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \left\{ 2\left(\sqrt{n}v(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\langle \mathbf{1}, v \rangle\right) - \langle \mathcal{L}v, v \rangle \right\}.$$



En consecuencia,  $u$  verifica la ecuación de Euler  $\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \sqrt{n}v(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\langle \mathbf{1}, v \rangle$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ . En particular,  $\langle \mathcal{L}u, u \rangle = \sqrt{n}u(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\langle \mathbf{1}, u \rangle$  y, por tanto,

$$\mathcal{J}_x(u) = \sqrt{n}u(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\langle \mathbf{1}, u \rangle.$$

Retomando (3),  $u$  es solución de  $\mathcal{L}u = \sqrt{n}\varepsilon_x - \frac{1}{\sqrt{n}}$  si, y sólo si,

$$\sqrt{n}u(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\langle \mathbf{1}, u \rangle = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \{\mathcal{J}_x(v)\}.$$

Así, dada una red  $\Gamma = (V, E, c)$  y un vértice  $x \in V$  se define la *resistencia total* sobre el vértice  $x$  como

$$r(x) = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \{\mathcal{J}_x(v)\},$$

donde  $\mathcal{J}_x(v) = \sqrt{n}v(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\langle \mathbf{1}, v \rangle - \langle \mathcal{L}v, v \rangle$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ . Con lo calculado hasta ahora hemos demostrado lo siguiente:

PROPOSICIÓN 2.2.2. *Si  $u$  es solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}u = \sqrt{n}\varepsilon_x - \frac{1}{\sqrt{n}}$  en  $V$ , con  $x \in V$  dado, entonces  $r(x) = \sqrt{n}u(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\langle \mathbf{1}, u \rangle$ .*

### 2.3. Resistencia efectiva y resistencia total generalizadas

En esta sección introduciremos una generalización del concepto de resistencia efectiva: una resistencia efectiva generalizada. En lo sucesivo consideraremos fijada una red  $\Gamma = (V, E, c)$ , un valor  $\lambda \geq 0$ , un peso  $\omega \in \Omega(V)$  y un operador de Schrödinger  $\mathcal{L}_q$  con potencial  $q = q_\omega + \lambda$ . Dados  $x, y \in V$ , en primer lugar definimos el  $\omega$ -dipolo entre  $x$  e  $y$  como la función

$$f_{xy} = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \frac{\varepsilon_y}{\omega(y)}.$$

Observemos que  $f_{xx} = 0$  para todo  $x \in V$  y que cuando  $\omega$  es constante entonces el  $\omega$ -dipolo es simplemente el dipolo estándar.

Si consideramos la formulación variacional de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_q u = f_{xy}$  en  $V$ , entonces  $u$  es solución del problema si, y sólo si,

$$(4) \quad \mathcal{J}_{x,y}(u) = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \left\{ 2 \left( \frac{v(x)}{\omega(x)} - \frac{v(y)}{\omega(y)} \right) - \langle \mathcal{L}_q v, v \rangle \right\}.$$

Además,  $u$  verifica la ecuación de Euler  $\langle \mathcal{L}_q u, v \rangle = \frac{v(x)}{\omega(x)} - \frac{v(y)}{\omega(y)}$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ . En particular,  $\langle \mathcal{L}_q u, u \rangle = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}$  y, por tanto,

$$\mathcal{J}_{x,y}(u) = 2 \left( \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)} \right) - \langle \mathcal{L}_q u, u \rangle = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}.$$

Retomando (4),  $u$  es solución de  $\mathcal{L}_q u = f_{xy}$  si, y sólo si,

$$\frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)} = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \{\mathcal{J}_{x,y}(v)\}.$$

Así, dados dos vértices  $x, y \in V$ , se define la resistencia efectiva generalizada, conocida como la *resistencia efectiva respecto de  $\omega$  y  $\lambda$*  entre  $x$  e  $y$  como

$$R_{\lambda,\omega}(x, y) = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \{\mathcal{J}_{x,y}(v)\},$$

donde  $\mathcal{J}_{x,y}(v) = 2 \left( \frac{v(x)}{\omega(x)} - \frac{v(y)}{\omega(y)} \right) - \langle \mathcal{L}_q v, v \rangle$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ .

La resistencia efectiva generalizada es, en el fondo, una distancia en la red que depende de un peso  $\omega$  en los vértices y un valor no negativo  $\lambda$ . Ésta se conoce como *distancia resistiva respecto de  $\omega$  y  $\lambda$*  y, pese a tener el mismo origen, es diferente de la distancia resistiva usual en tal grado que es de mayor utilidad en el campo de la química, pues recupera mayor información de la molécula. El punto con más dificultad para demostrar que la distancia resistiva es, efectivamente, una distancia, es demostrar que verifica la desigualdad triangular. Para ello se necesitan las relaciones entre las resistencias efectivas y las funciones de green en términos de medidas de equilibrio, ver [6].

**PROPOSICIÓN 2.3.1.** *La resistencia efectiva generalizada,  $R_{\lambda,\omega}$ , es una distancia. Esto es, para todo par  $x, y \in V$*

1.  $R_{\lambda,\omega}(x, y) \geq 0$  y  $R_{\lambda,\omega}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
2.  $R_{\lambda,\omega}(x, y) = R_{\lambda,\omega}(y, x)$
3.  $R_{\lambda,\omega}(x, y) \leq R_{\lambda,\omega}(x, z) + R_{\lambda,\omega}(z, y)$  para todo  $z \in V$ .

**Demostración.** La resistencia efectiva es siempre positiva, pues

$$R_{\lambda,\omega}(x, y) = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \{\mathcal{J}_{x,y}(v)\}$$

y  $\mathcal{J}_{x,y}(0) = 0$ . Además, de aquí se deduce que sólo es nula cuando  $x = y$ . Para ver que es simétrica basta observar que  $\mathcal{J}_{x,y}(v) = \mathcal{J}_{y,x}(-v)$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ . El punto 3., como ya se ha dicho, tiene una demostración un poco más complicada. En [6] se da la demostración usando el hecho de que la función de Green sobre  $V$  excepto un vértice arbitrario es siempre no negativa por ser la inversa de un determinado tipo de matrices, llamadas  $M$ -matrices, y a su vez ésta es igual a un término positivo que multiplica a  $R_{\omega,\lambda}(x, z) + R_{\omega,\lambda}(z, y) - R_{\omega,\lambda}(x, y)$  para todo  $z \in V$ , lo que demuestra la desigualdad triangular. ■

**PROPOSICIÓN 2.3.2.** *Si  $u$  es solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_q u = f_{xy}$  en  $V$ , con  $x, y \in V$  dados, entonces*

$$R_{\lambda,\omega}(x, y) = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}.$$

Como dos soluciones de la ecuación anterior se diferencian sólo en un múltiplo de  $\omega$ , el valor de  $R_{\lambda,\omega}(x, y)$  no depende de la solución escogida. Además,  $R_{\lambda,\omega}$  es simétrica,  $R_{\lambda,\omega}(x, x) = 0$  y  $R_{\lambda,\omega}(x, y) > 0$  cuando  $x \neq y$ . De hecho,  $R_{\lambda,\omega}$  define también una distancia sobre la red, que suele denominarse *distancia resistiva respecto de  $\omega$  y  $\lambda$* .

Ahora, bajo las mismas hipótesis, dado un vértice  $x \in V$  definimos  $f_x$  como  $f_x = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \omega$  y estudiamos la ecuación de Poisson

$$\mathcal{L}_q u = f_x \text{ en } V.$$

Considerando la formulación variacional del mismo,  $u$  es solución del problema si, y sólo si,  $u$  maximiza el funcional  $\mathcal{J}_x(u) = 2 \left( \frac{u(x)}{\omega(x)} - \langle \omega, u \rangle \right) - \langle \mathcal{L}_q u, u \rangle$ , es decir, si y sólo si

$$(5) \quad \mathcal{J}_x(u) = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \left\{ 2 \left( \frac{v(x)}{\omega(x)} - \langle \omega, v \rangle \right) - \langle \mathcal{L}_q v, v \rangle \right\}.$$

En consecuencia,  $u$  verifica la ecuación de Euler  $\langle \mathcal{L}_q u, v \rangle = \frac{v(x)}{\omega(x)} - \langle \omega, v \rangle$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ .

En particular,  $\langle \mathcal{L}_q u, u \rangle = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \langle \omega, u \rangle$  y, por tanto,

$$\mathcal{J}_x(u) = 2 \left( \frac{u(x)}{\omega(x)} - \langle \omega, u \rangle \right) - \langle \mathcal{L}_q u, u \rangle = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \langle \omega, u \rangle.$$

Retomando (5),  $u$  es solución de  $\mathcal{L}_q u = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \omega$  si, y sólo si,

$$\frac{u(x)}{\omega(x)} - \langle \omega, u \rangle = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \{ \mathcal{J}_x(v) \}.$$

Así, dado un vértice  $x \in V$  se define la *resistencia total respecto de  $\omega$  y  $\lambda$*  sobre el vértice  $x$  como

$$r_{\lambda, \omega}(x) = \max_{v \in \mathcal{C}(V)} \{ \mathcal{J}_x(v) \},$$

donde  $\mathcal{J}_x(v) = 2 \left( \frac{v(x)}{\omega(x)} - \langle \omega, v \rangle \right) - \langle \mathcal{L}_q v, v \rangle$  para toda  $v \in \mathcal{C}(V)$ . Además, se cumple lo siguiente:

**PROPOSICIÓN 2.3.3.** *Si  $u$  es solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_q u = f_x$  en  $V$ , con  $x \in V$  dado, entonces  $r_{\lambda, \omega}(x) = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \langle \omega, u \rangle$ .*

Es importante indicar en este punto la relación entre la resistencia efectiva clásica y su generalización cuando el peso es constante. Para ello, recordemos que la noción clásica trabaja sobre un grafo y por tanto las conductancias sobre las ramas las consideraremos como la función constante 1. Además, el parámetro  $\lambda$  será nulo y el peso será una cantidad constante sobre todos los nodos.

Sea  $G$  un grafo y  $\omega \in \Omega(V)$ . Como  $\omega$  debe ser constante, si  $n = |V(G)|$  entonces  $\omega = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Dados dos vértices  $x, y \in V$ , si  $u \in \mathcal{C}(V)$  es la solución de la ecuación  $\mathcal{L}_q(u) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \frac{\varepsilon_y}{\omega(y)} = \sqrt{n}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)$  entonces la resistencia efectiva generalizada respecto de  $\lambda = 0$  y  $\omega = \frac{1}{\sqrt{n}}$  entre  $x$  e  $y$  viene dada por

$$R_{0, \omega}(x, y) = \sqrt{n}(u(x) - u(y)).$$

Por otro lado, si  $v \in \mathcal{C}(V)$  es la solución de la ecuación  $\mathcal{L}(v) = \varepsilon_x - \varepsilon_y$ , entonces la resistencia efectiva clásica entre  $x$  e  $y$  viene dada por

$$R(x, y) = v(x) - v(y).$$

Observando que la función  $\sqrt{n}v$  es solución de la ecuación que da la resistencia efectiva generalizada, esto es,

$$\mathcal{L}_q(\sqrt{n}v) = \sqrt{n}\mathcal{L}_q(v) = \sqrt{n}\mathcal{L}(v) = \sqrt{n}(\varepsilon_x - \varepsilon_y),$$

se deduce por unicidad de solución de esta ecuación que  $u = \sqrt{n}v$  y, en consecuencia, si obviamos la notación de  $\lambda$  cuando éste es nulo,

$$R_\omega = nR.$$

## 2.4. Índice de Kirchhoff

El *Índice de Kirchhoff* estándar de una red conexa  $\Gamma = (V, E, c)$  se suele denotar por  $k = k(\Gamma)$  y se define como

$$k = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} R(x, y).$$

Este índice representa una medida de la conexión de la red o de cómo es su tamaño en términos de la distancia resistiva.

En este trabajo estamos interesados en tratar una versión generalizada de este concepto. Sea  $\Gamma = (V, E, c)$  una red conexa,  $\omega \in \Omega(V)$  un peso y consideremos el parámetro  $\lambda \geq 0$ . Definimos el *Índice de Kirchhoff respecto de  $\omega$  y  $\lambda$*  de la red  $\Gamma$  como

$$k(\lambda, \omega) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} R_{\lambda, \omega}(x, y) \omega^2(x) \omega^2(y).$$

Siguiendo con las comparaciones de la sección anterior entre las nociones clásicas y las generalizadas, ahora estudiamos brevemente la relación entre el índice de Kirchhoff clásico y el generalizado cuando el peso  $\omega$  es constante (obviando la expresión del parámetro  $\lambda$ , pues es nulo):

$$k(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \sqrt{n}(u(x) - u(y)) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \frac{1}{n}(v(x) - v(y)) = \frac{1}{n}k.$$

En lo sucesivo se darán importantes relaciones de este índice con el resto de parámetros generalizados de una red.

De ahora en adelante, omitiremos la expresión respecto de  $\lambda$  cuando  $\lambda = 0$  y, además, si  $\omega$  es constante también omitiremos su expresión.

## 2.5. Resultados generales

**2.5.1. Relación con la función de Green.** Sea  $\Gamma = (V, E, c)$  una red conexa con peso  $\omega \in \Omega(V)$  y un parámetro  $\lambda \geq 0$ . Consideremos el potencial  $q = q_\omega + \lambda$ .

Las relaciones entre las resistencias efectivas, las totales y las ecuaciones de Poisson nos llevan a las siguientes relaciones entre estos parámetros y el operador de Green  $\mathcal{G}_q$  de la red. De hecho,

no son más que una generalización de la conocida caracterización de la llamada *Campbell-Youla inverse*, ver [18]. Es más, estas relaciones proporcionan la caracterización de la resistencia efectiva generalizada en términos de la traza de la matriz asociada al operador de Green.

PROPOSICIÓN 2.5.1. *Para todo par de vértices  $x, y \in V$ , se cumplen las siguientes igualdades*

$$r_{\lambda, \omega}(x) = \frac{G_q(x, x)}{\omega^2(x)} - \Lambda(\lambda)$$

y

$$R_{\lambda, \omega}(x, y) = \frac{G_q(x, x)}{\omega^2(x)} + \frac{G_q(y, y)}{\omega^2(y)} - 2 \frac{G_q(x, y)}{\omega(x)\omega(y)},$$

donde  $\Lambda(\lambda) = 0$  si  $\lambda = 0$  y  $\Lambda(\lambda) = \lambda^{-1}$  si  $\lambda > 0$ .

**Demostración.** Recordemos que  $f_x = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \omega$ . Si  $v = \mathcal{G}_q(f_x)$ , entonces

$$\mathcal{L}_q(v) = \left\{ \begin{array}{ll} f_x & \text{si } \lambda > 0 \\ f_x - \langle f_x, \omega \rangle \omega & \text{si } \lambda = 0 \end{array} \right\} = f_x$$

debido a que  $\langle f_x, \omega \rangle = \frac{\omega(x)}{\omega(x)} - \langle \omega, \omega \rangle = 0$ . Por tanto,  $v$  es solución de  $\mathcal{L}_q v = f_x$ . Por la Proposición 2.3.3,

$$r_{\lambda, \omega}(x) = \frac{v(x)}{\omega(x)} - \langle v, \omega \rangle = \frac{v(x)}{\omega(x)} - \langle \mathcal{G}_q(f_x), \omega \rangle = \frac{v(x)}{\omega(x)} - \langle f_x, \omega \rangle \Lambda(\lambda) = \frac{v(x)}{\omega(x)}$$

y observando que  $v = \mathcal{G}_q(f_x) = \mathcal{G}_q\left(\frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \omega\right) = \frac{\mathcal{G}_q(\varepsilon_x)}{\omega(x)} - \Lambda(\lambda)\omega$  se tiene que

$$r_{\lambda, \omega}(x) = \frac{G_q(x, x)}{\omega^2(x)} - \Lambda(\lambda).$$

Por otro lado, dados  $x, y \in V$  y  $u = \mathcal{G}_q(f_{xy})$  entonces

$$\mathcal{L}_q(u) = \mathcal{L}_q(\mathcal{G}_q(f_{xy})) = \left\{ \begin{array}{ll} f_{xy} & \text{si } \lambda = 0 \\ f_{xy} - \langle f_{xy}, \omega \rangle \omega & \text{si } \lambda > 0 \end{array} \right\} = f_{xy}$$

debido a que  $\langle f_{xy}, \omega \rangle = \frac{\omega(x)}{\omega(x)} - \frac{\omega(y)}{\omega(y)} = 0$ . Por tanto,  $u$  es solución de  $\mathcal{L}_q u = f_{xy}$ . Por la Proposición 2.3.2,

$$R_{\lambda, \omega}(x, y) = \frac{u(x)}{\omega(y)} - \frac{u(y)}{\omega(x)}$$

y observando que  $u = \mathcal{G}_q(f_{xy}) = \frac{\mathcal{G}_q(\varepsilon_x)}{\omega(x)} - \frac{\mathcal{G}_q(\varepsilon_y)}{\omega(y)}$  se tiene que

$$R_{\lambda, \omega}(x, y) = \frac{G_q(x, x)}{\omega^2(x)} + \frac{G_q(y, y)}{\omega^2(y)} - 2 \frac{G_q(x, y)}{\omega(x)\omega(y)},$$

como consecuencia de que  $G$  es una función simétrica. ■

Observemos que una consecuencia inmediata de esta proposición es la igualdad

$$R_{\lambda, \omega}(x, y) = r_{\lambda, \omega}(x) + r_{\lambda, \omega}(y) + 2\Lambda(\lambda) - 2 \frac{G_q(x, y)}{\omega(x)\omega(y)}.$$

PROPOSICIÓN 2.5.2. *Se cumplen las siguientes igualdades:*

$$k(\lambda, \omega) = \sum_{x \in V} G_q(x, x) - \Lambda(\lambda)$$

*y*

$$k(\lambda, \omega) = \sum_{x \in V} r_{\lambda, \omega}(x) \omega^2(x).$$

**Demostración.** En primer lugar, hagamos un cálculo previo que nos será útil en esta demostración y también en la siguiente.

$$\langle \mathcal{G}_q(\varepsilon_x), \omega \rangle = \langle \varepsilon_x, \mathcal{G}_q(\omega) \rangle = \langle \varepsilon_x, \Lambda(\lambda) \omega \rangle = \omega(x) \Lambda(\lambda).$$

Ahora ya podemos proceder al cálculo de la igualdad del enunciado.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} R_{\lambda, \omega}(x, y) \omega^2(x) \omega^2(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} \left( \left[ r_{\lambda, \omega}(x) + r_{\lambda, \omega}(y) + 2\Lambda(\lambda) - 2 \frac{G_q(x, y)}{\omega(x)\omega(y)} \right] \omega^2(x) \omega^2(y) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V} r_{\lambda, \omega}(x) \omega^2(x) + \frac{1}{2} \sum_{y \in V} r_{\lambda, \omega}(y) \omega^2(y) + \Lambda(\lambda) - \sum_{x \in V} \omega(x) \langle \mathcal{G}_q(\varepsilon_x), \omega \rangle \\ &= \sum_{x \in V} \left( \frac{G_q(x, x)}{\omega^2(x)} - \Lambda(\lambda) \right) \omega^2(x) - \sum_{x \in V} \omega^2(x) \Lambda(\lambda) + \Lambda(\lambda) \\ &= \sum_{x \in V} G_q(x, x) - \Lambda(\lambda). \end{aligned}$$

La segunda igualdad viene dada de manera automática a partir de ésta, pues

$$k(\lambda, \omega) = \sum_{x \in V} G_q(x, x) + \Lambda(\lambda) = \sum_{x \in V} r_{\lambda, \omega}(x) \omega^2(x) + \Lambda(\lambda) - \Lambda(\lambda) = \sum_{x \in V} r_{\lambda, \omega}(x) \omega^2(x). \blacksquare$$

COROLARIO 2.5.3. *Para todo  $x \in V$ ,*

$$r_{\lambda, \omega}(x) = \sum_{y \in V} (R_{\lambda, \omega}(x, y) - k(\lambda, \omega)) \omega^2(y).$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} & \sum_{y \in V} \left( R_{\lambda, \omega}(x, y) - k(\lambda, \omega) \right) \omega^2(y) \\ &= \sum_{y \in V} \left( r_{\lambda, \omega}(x) + r_{\lambda, \omega}(y) + 3\Lambda(\lambda) - 2 \frac{G_q(x, y)}{\omega(x)\omega(y)} - \sum_{z \in V} G_q(z, z) \right) \omega^2(y) \\ &= r_{\lambda, \omega}(x) + \sum_{y \in V} G_q(y, y) - \Lambda(\lambda) + 3\Lambda(\lambda) - \frac{2}{\omega(x)} \langle \mathcal{G}_q(\varepsilon_x), \omega \rangle - \sum_{y \in V} G_q(y, y) \\ &= r_{\lambda, \omega}(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Los siguientes resultados son meros cálculos usando las fórmulas anteriores, pero que pueden resultar de gran utilidad:

COROLARIO 2.5.4. *Para todo par de vértices  $x, y \in V$  se tiene*

$$G_q(x, y) = \frac{1}{2}\omega(x)\omega(y)\left(r_{\lambda,\omega}(x) + r_{\lambda,\omega}(y) + 2\Lambda(\lambda) - R_{\lambda,\omega}(x, y)\right).$$

COROLARIO 2.5.5. *Para todo vértice  $x \in V$ ,*

$$\Lambda(\lambda) = \frac{1}{\omega(x)} \sum_{y \in V} G_q(x, y)\omega(y).$$

Este último corolario es una consecuencia directa del hecho de que  $\omega$  es autofunción del operador de Green con autovalor  $\lambda$ , tanto cuando  $\lambda$  es positivo como cuando es nulo, tal como se ha explicado en la Proposición 1.6.6.

**2.5.2. Relación con los autovalores y las autofunciones de  $\mathcal{L}_q$ .** Las resistencias efectivas, las resistencias totales y el Índice de Kirchhoff también se pueden expresar en función de los autovalores del operador de Schrödinger  $\mathcal{L}_q$  y de sus correspondientes autofunciones.

Si  $\lambda_1 = \lambda < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  son los autovalores de  $\mathcal{L}_q$  y  $\{v_j\}_{j=1}^n$ , donde  $v_1 = \omega$ , es la correspondiente base ortonormal de autofunciones, entonces se tienen los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN 2.5.6. [8, Prop. 3.4] *Para todo  $x, y \in V$ ,*

$$r_{\lambda,\omega}(x) = \frac{1}{\omega^2(x)} \sum_{j=2}^n \frac{v_j^2(x)}{\lambda_j}$$

y

$$R_{\lambda,\omega}(x, y) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{v_j(x)}{\omega(x)} - \frac{v_j(y)}{\omega(y)} \right)^2.$$

**Demostración.** Recordemos que  $r_{\lambda,\omega}(x) = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \langle \omega, u \rangle$ , donde  $\mathcal{L}_q(u) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \omega = f_x$ . Si  $\lambda \neq 0$ , teniendo en cuenta que la base de autofunciones la hemos escogido ortonormal, se tiene que  $u = \mathcal{G}_q(\mathcal{L}_q(u)) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{v_j(x)}{\omega(x)} - \langle v_j, \omega \rangle \right) v_j = \sum_{j=2}^n \frac{v_j(x)v_j}{\lambda_j\omega(x)}$ . Así,  $r_{\lambda,\omega}(x) = \frac{u(x)}{\omega(x)} - 0 = \frac{1}{\omega^2(x)} \sum_{j=2}^n \frac{v_j^2(x)}{\lambda_j}$ . Si  $\lambda = 0$ , se tiene que  $u - \langle u, \omega \rangle \omega = \mathcal{G}_q(\mathcal{L}_q(u)) = \sum_{j=2}^n \frac{v_j(x)v_j}{\lambda_j\omega(x)}$  y por tanto  $r_{\lambda,\omega}(x) = \frac{1}{\omega^2(x)} \sum_{j=2}^n \frac{v_j^2(x)}{\lambda_j} + \langle u, \omega \rangle - \langle u, \omega \rangle = \frac{1}{\omega^2(x)} \sum_{j=2}^n \frac{v_j^2(x)}{\lambda_j}$ .

Análogamente, como  $R_{\lambda,\omega}(x, y) = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}$ , donde  $\mathcal{L}_q(u) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \frac{\varepsilon_y}{\omega(y)} = f_{xy}$ . Si  $\lambda \neq 0$ ,  $u = \mathcal{G}_q(\mathcal{L}_q(u)) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{v_j(x)}{\omega(x)} - \frac{v_j(y)}{\omega(y)} \right) v_j$ . Por tanto,  $R_{\lambda,\omega}(x, y) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{v_j(x)}{\omega(x)} - \frac{v_j(y)}{\omega(y)} \right)^2$ . Si  $\lambda = 0$ , entonces  $u - \langle u, \omega \rangle \omega = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{v_j(x)}{\omega(x)} - \frac{v_j(y)}{\omega(y)} \right) v_j$  y así

$$R_{\lambda,\omega}(x, y) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{v_j(x)}{\omega(x)} - \frac{v_j(y)}{\omega(y)} \right)^2 + \langle u, \omega \rangle - \langle u, \omega \rangle = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{v_j(x)}{\omega(x)} - \frac{v_j(y)}{\omega(y)} \right)^2,$$

como queríamos demostrar. ■

**COROLARIO 2.5.7.** *El Índice de Kirchhoff viene dado en función de los autovalores por la fórmula*

$$k(\lambda, \omega) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j}$$

**Demostración.** Este resultado en consecuencia directa de los anteriores si se tiene en cuenta que la base de autofunciones es ortonormal. ■

**2.5.3. Cotas para la resistencia y para el Índice de Kirchhoff.** En ocasiones es necesario saber acotar el valor del Índice de Kirchhoff cuando no es posible conocer su valor exacto. Los siguientes resultados proporcionan una cota elemental para la resistencia efectiva y el Índice de Kirchhoff generalizados en términos exclusivamente de parámetros combinatorios.

Primero conozcamos unas cotas para la resistencia efectiva en función del peso y el segundo y último autovalor solamente.

**PROPOSICIÓN 2.5.8.** [8, Cor. 3.5] *Para todo par  $x, y \in V$ , con  $x \neq y$  se tiene que*

$$\frac{1}{\lambda_n} \left( \frac{1}{\omega^2(x)} + \frac{1}{\omega^2(y)} \right) \leq R_{\lambda, \omega}(x, y) \leq \frac{1}{\lambda_2} \left( \frac{1}{\omega^2(x)} + \frac{1}{\omega^2(y)} \right),$$

donde  $\lambda < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  son los autovalores de  $\mathcal{L}_q$ .

**Demostración.** Recordemos que  $R_{\lambda, \omega}(x, y) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{v_j(x)}{\omega(x)} - \frac{v_j(y)}{\omega(y)} \right)^2$ , donde  $v_1 = \omega, v_2 < \dots < v_n$  es una base ortonormal de autovalores de  $\mathcal{L}_q$ . Como es una base ortonormal, la transpuesta de la matriz de la base también lo es y, por tanto, se cumplen las mismas propiedades de ortonormalidad por filas que por columnas. Esto es, que  $\langle v_j, v_j \rangle = 1$  para toda  $j = 1, \dots, n$  implica que  $\sum_{j=1}^n v_j^2(x) = 1$  para todo  $x \in V$  y que  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  con  $i \neq j$  implica que  $\sum_{j=1}^n v_j(x)v_j(y) = 0$  para todo  $x \neq y$ .

Así,

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n \left( \frac{v_j(x)}{\omega(x)} - \frac{v_j(y)}{\omega(y)} \right)^2 &= \frac{1}{\omega^2(x)} \left( \sum_{j=1}^n v_j^2(x) - \omega^2(x) \right) + \frac{1}{\omega^2(y)} \left( \sum_{j=1}^n v_j^2(y) - \omega^2(y) \right) \\ &\quad - \frac{2}{\omega(x)\omega(y)} \left( \sum_{j=1}^n v_j(x)v_j(y) - \omega(x)\omega(y) \right) = \frac{1}{\omega^2(x)} + \frac{1}{\omega^2(y)}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\lambda_2 \leq \lambda_j \leq \lambda_n$  para toda  $j = 1, \dots, m$ , se siguen las desigualdades del enunciado. ■

Ahora conozcamos las cotas para el Índice de Kirchhoff en función solamente del número de vértices de la red y del segundo y último autovalor.



PROPOSICIÓN 2.5.9. [8, Cor. 3.5]

$$\frac{n-1}{\lambda_2} \leq k(\lambda, \omega) \leq \frac{n-1}{\lambda_n},$$

donde  $\lambda < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$  son los autovalores de  $\mathcal{L}_q$ .

**Demostración.** Como  $k(\lambda, \omega) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j}$  y teniendo en cuenta que  $\lambda_2 \leq \lambda_j \leq \lambda_n$  para toda  $j = 1, \dots, m$ , se tiene que

$$k(\lambda, \omega) \leq \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_n} = \frac{n-1}{\lambda_n}$$

y

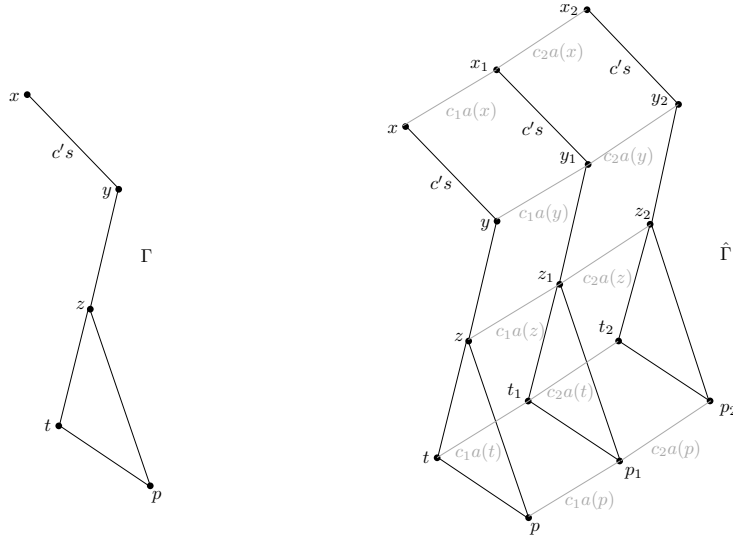
$$k(\lambda, \omega) \geq \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_2} = \frac{n-1}{\lambda_2}. \blacksquare$$

## 2.6. Ejemplos

Ahora es el momento de mostrar la aplicación de esta herramienta que se ha ido construyendo a lo largo de este trabajo al análisis de dos tipos de redes concretas: las redes *barbell* y las redes *ladder*. Con ello lo que se pretende es mostrar la utilidad y aplicabilidad del trabajo antes de proceder al análisis de las redes compuestas, que es el objetivo del mismo.

**2.6.1. Redes ladder.** Dada una red  $\Gamma = (V, c)$ , una función positiva  $a \in \mathcal{C}(V)$  no nula y los valores  $c_1, \dots, c_n > 0$ , la *red ladder de  $n$  capas, base  $(\Gamma, a)$  y parámetros  $c_1, \dots, c_n$*  es la red  $\widehat{\Gamma} = (\widehat{V}, \widehat{c})$ , donde  $\widehat{V} = \bigcup_{i=1}^n \{x_j \mid x \in V\}$  y

$$\begin{cases} \widehat{c}(x_j, y_j) = c(x, y), & x, y \in V, \quad j = 1, \dots, n \\ \widehat{c}(x_j, x_{j+1}) = c_j a(x), & x \in V, \quad j = 1, \dots, n-1 \\ \widehat{c}(x_j, y_{j+1}) = 0, & x, y \in V, \quad x \neq y, \quad j = 1, \dots, n-1 \\ \widehat{c}(x_j, y_i) = 0, & x, y \in V, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad |i-j| > 1. \end{cases}$$

FIGURA 1. Ejemplo de ladder para  $n = 2$ .

En [7] se calculó, para  $n = 1$  y tomando la notación  $\hat{x} = x_1$ , el Índice de Kirchoff de este tipo de redes:

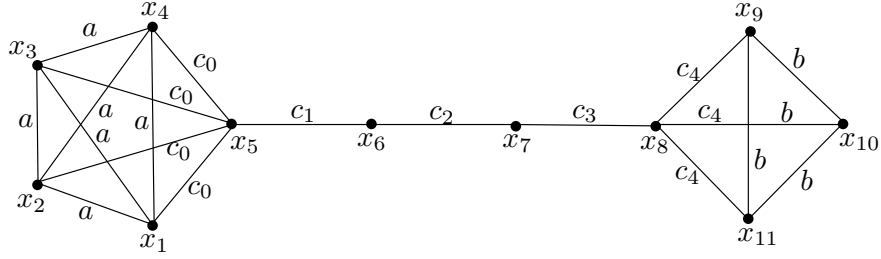
PROPOSICIÓN 2.6.1. Dado  $\hat{\omega} \in \hat{V}$  y  $\lambda \geq 0$ , si  $q = q_{\hat{\omega}} + \lambda$ ,  $\mu = \left( \sum_{x \in V} \omega^2(x) \right)^{\frac{1}{2}}$  y  $\omega = \mu \hat{\omega}$  entonces

$$k(\lambda, \hat{\omega}) = k(\lambda, \omega) + k(\gamma, \sigma) + \frac{1}{\gamma},$$

donde  $\sigma \in \Omega(V)$  y  $\gamma \geq \max_{x \in V} \{q(x) - q_{\sigma}(x)\}$  son tales que  $2a = \gamma + q_{\sigma} - q$ .

**2.6.2. Redes barbell.** Las redes barbell  $\Gamma_{k,m,r}$  con  $n = k + m + r$  vértices y parámetros  $c_0, \dots, c_m > 0$ ,  $a, b > 0$ , donde  $m \geq 2$  y  $k, r \geq 1$ , son un camino (pesado) de  $m$  vértices  $\{x_{k+1}, \dots, x_{k+m}\}$  al que se le une una red completa de  $k + 1$  vértices en el vértice  $x_{k+1}$  y una red completa de  $r + 1$  vértices al vértice  $x_{k+m}$ . Se denota por  $\{x_1, \dots, x_k\}$  al conjunto de nuevos vértices de la primera red completa y por  $\{x_{k+m+1}, \dots, x_{k+m+r}\}$  al conjunto de nuevos vértices de la segunda. Sus conductancias vienen dadas por

$$\begin{cases} c(x_i, x_j) = a, & 1 \leq i < j \leq k \\ c(x_i, x_{k+1}) = c_0, & 1 \leq i \leq k \\ c(x_{k+i}, x_{k+i+1}) = c_i, & 1 \leq i \leq m-1 \\ c(x_{k+m}, x_{k+m+i}) = c_m, & 1 \leq i \leq r \\ c(x_{k+m+i}, x_{k+m+j}) = b, & 1 \leq i < j \leq r. \end{cases}$$

FIGURA 2. Ejemplo de barbell para  $k = m = 4$  y  $r = 3$ .

En [4], ver también [13], se ha calculado el Índice de Kirchhoff clásico de este tipo de redes, así como las resistencias efectivas:

PROPOSICIÓN 2.6.2. *El Índice de Kirchhoff clásico de las redes barbell viene dado por*

$$k(\Gamma_{k,m,r}) = \frac{n(k-1)}{ka + c_0} + \frac{n(r-1)}{rb + c_m} + \frac{m+r}{c_0} + \frac{m+k}{c_m} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(k+i)(m+r-i)}{c_i}$$

y las resistencias efectivas vienen dadas por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} R(x_i, x_j) &= \frac{2}{ka + c_0}, & 1 \leq i < j \leq k, \\ R(x_i, x_{k+j}) &= \frac{(1-k)a}{c_0(ka + c_0)} + \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{c_l}, & 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m, \\ R(x_i, x_{k+m+j}) &= \frac{(1-k)a}{c_0(ka + c_0)} + \frac{(1-r)b}{c_m(rb + c_m)} + \sum_{l=0}^m \frac{1}{c_l}, & 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r, \\ R(x_{k+i}, x_{k+j}) &= \sum_{l=i}^{j-1} \frac{1}{c_l}, & 1 \leq i < j \leq m, \\ R(x_{k+i}, x_{k+m+j}) &= \frac{(1-r)b}{c_m(rb + c_m)} + \sum_{l=i}^m \frac{1}{c_l}, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r, \\ R(x_{k+m+i}, x_{k+m+j}) &= \frac{2}{rb + c_m}, & 1 \leq i < j \leq r. \end{aligned}$$

# Capítulo 3

## Redes compuestas

Con toda esta herramienta teórica como fondo estudiamos ahora el comportamiento de las resistencias efectivas y el Índice de Kirchhoff generalizados de las redes compuestas suma, corona y cluster respecto de los de sus factores. Cabe remarcar aquí que, aunque se han mantenido los nombres originales, estas redes compuestas no son las tradicionales: en este trabajo se han tratado generalizaciones de las mismas, las cuales permiten dar resultados más amplios.

### 3.1. Suma

La suma  $\Gamma_0 + \Gamma_1$  de dos grafos  $\Gamma_0 = (V_0, E_0)$  y  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ , tales que  $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ , es el grafo unión de  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$  al que se han añadido, además, todas las ramas con un extremo en  $V_0$  y el otro en  $V_1$ .

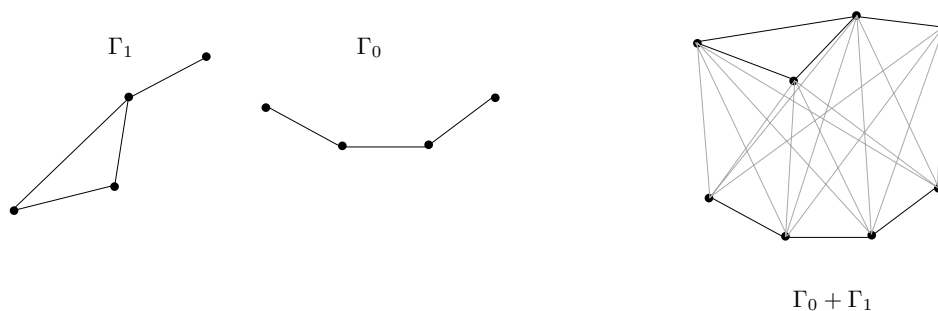


FIGURA 1. Ejemplo de suma clásica.

En este trabajo consideraremos la siguiente generalización, introducida en [9]. Consideremos la red conexa  $\Gamma_0 = (V_0, E_0, c_0)$ , con  $V_0 = \{x_1, \dots, x_n\}$ , y dado  $m \in \mathbb{N}$ , para cada  $i = 1, \dots, m$  consideremos las redes conexas  $\Gamma_i = (V_i, E_i, c_i)$ . Llamamos *red suma con base  $\Gamma_0$ , peso  $\omega$  y conductancias  $\{a_i\}_{i=1}^m$*  a la red  $\Gamma$ , también denotada por  $\Gamma_0 + (\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)$ , cuyo conjunto de vértices es  $V = \coprod_{i=0}^m V_i$  la unión disjunta de todos los conjuntos de vértices y cuya conductancia está dada por  $c(x, y) = c_i(x, y)$ , para todo par  $x, y \in V_i$ , por  $c(x_j, y) = a_i \omega(x_j) \omega(y)$  para todo

par  $x_j \in V_0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) e  $y \in V_i$ ,  $i = 0, \dots, m$ , y por  $c(x, y) = 0$  en otro caso. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $a_1 \leq \dots \leq a_m$ .

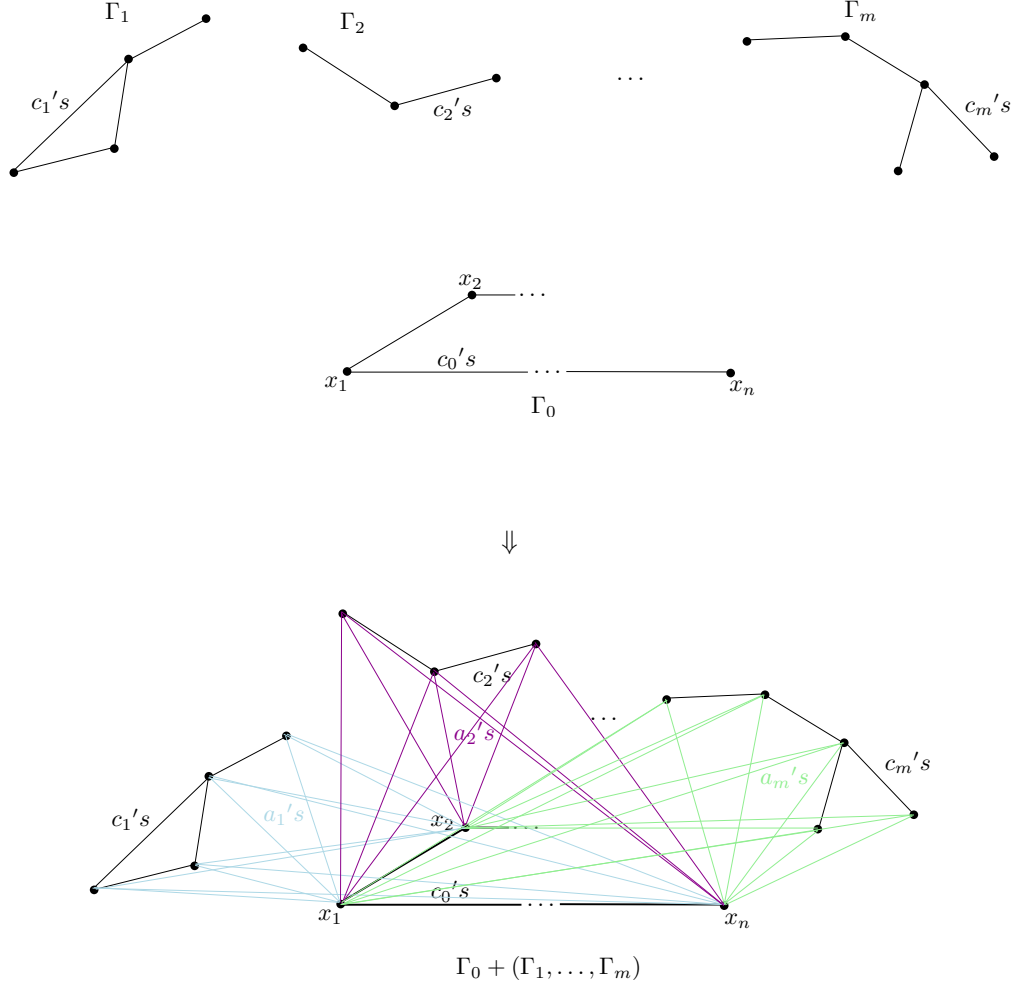


FIGURA 2. Ejemplo de suma generalizada.

Por otro lado, dado el peso  $\omega \in \Omega(V)$  en  $V$ , para cada  $i = 0, \dots, m$  se define el valor  $\sigma_i = \left( \sum_{x \in V_i} \omega(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Entonces, dado  $i = 0, \dots, m$  si para cada  $x \in V_i$  definimos  $\omega_i(x) = \sigma_i^{-1} \omega(x)$ , es claro que  $\omega_i \in \Omega(V_i)$ ; es decir, hemos restringido el peso  $\omega$  para obtener pesos derivados de éste en cada factor de la red suma.

Para cada  $i = 0, \dots, m$  identificamos  $\mathcal{C}(V_i)$  con el subespacio de  $\mathcal{C}(V)$  formado por las funciones que son nulas en  $V \setminus V_i$ . Por otro lado, si  $u \in \mathcal{C}(V)$ , la restricción de  $u$  a  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, m$  se denota también por  $u$ . Observamos que si  $u \in \mathcal{C}(V_i)$  y  $v \in \mathcal{C}(V)$ , entonces  $\langle u, v \rangle = \sum_{x \in V_i} u(x)v(x)$ .

En particular, si  $u \in \mathcal{C}(V_i)$  y  $v \in \mathcal{C}(V_j)$  con  $i \neq j$  entonces  $\langle u, v \rangle = 0$ .

Denotamos por  $\mathcal{L}$  al Laplaciano combinatorio de la red suma  $\Gamma$  y para cada  $i = 0, \dots, m$  por  $\mathcal{L}^i$  al Laplaciano combinatorio de la red  $\Gamma_i$ .

LEMA 3.1.1. *Para toda  $u \in \mathcal{C}(V)$ , se verifica:*

$$\mathcal{L}(u)(x_i) = \mathcal{L}^0(u)(x_i) + \omega_0(x_i) \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \sigma_0 \left( u(x_i) \langle \omega_j, \mathbf{1} \rangle - \langle \omega_j, u \rangle \right), \quad x_i \in V_0, i = 1, \dots, m$$

$$\mathcal{L}(u)(x) = \mathcal{L}^i(u)(x) + \omega_i(x) a_i \sigma_i \sigma_0 \left( u(x) \langle \omega_0, \mathbf{1} \rangle - \langle \omega_0, u \rangle \right), \quad x \in V_i, i = 1, \dots, m$$

LEMA 3.1.2. *Consideremos el potencial  $q_\omega = -\omega^{-1} \mathcal{L}(\omega)$  definido en  $V$  y los potenciales  $q_{\omega_i} = -\omega_i^{-1} \mathcal{L}^i(\omega_i)$  definido en  $V_i$ , para  $i = 0, \dots, m$ . Entonces,*

$$q_\omega = q_{\omega_0} + \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \left( \sigma_j - \sigma_0 \langle \omega_j, \mathbf{1} \rangle \omega_0 \right) \quad \text{en } V_0,$$

$$q_\omega = q_{\omega_i} + a_i \sigma_0 \left( \sigma_0 - \sigma_i \langle \omega_0, \mathbf{1} \rangle \omega_i \right) \quad \text{en } V_i, \quad i = 0, \dots, m.$$

En lo sucesivo en esta sección consideraremos un parámetro  $\lambda \geq 0$  fijado y el potencial en la red suma dado por  $q = q_\omega + \lambda$ . Además, definimos los valores positivos  $\gamma_0 = \lambda + \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j^2$ ,  $\gamma_i = \lambda + a_i \sigma_0^2$  y los potenciales  $p_i = q_{\omega_i} + \gamma_i$  en  $\Gamma_i$ , con  $i = 0, \dots, m$ .

PROPOSICIÓN 3.1.3. *Para toda  $u \in \mathcal{C}(V)$ , se verifica:*

$$\mathcal{L}_q(u) = \mathcal{L}_{p_0}^0(u) - \left( \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \sigma_0 \langle \omega_j, u \rangle \right) \omega_0 \quad \text{en } V_0,$$

$$\mathcal{L}_q(u) = \mathcal{L}_{p_i}^i(u) - a_i \sigma_i \sigma_0 \langle \omega_0, u \rangle \omega_i \quad \text{en } V_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

**3.1.1. Función de Green, resistencias efectivas e Índice de Kirchhoff.** El principal objetivo de esta sección es obtener la función de Green de la red suma en términos de las funciones de Green de sus factores. Como consecuencia, obtendremos también los Índices de Kirchhoff y las resistencias efectivas respecto del peso dado en términos de los parámetros análogos de los factores, simplemente aplicando las identidades de la Proposición 2.5.1. A lo largo de esta sección,  $\mathcal{G}_{q_{\omega_i}}^i$  y  $G_{q_{\omega_i}}^i$  denotarán el operador y la función de Green asociados al operador de Schrödinger  $\mathcal{L}_{q_{\omega_i}}^i$  en  $\Gamma_i$ , donde  $i = 0, \dots, m$ .

Definimos el valor  $\alpha = \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} \sigma_j^2$  dado que aparece en muchas de las igualdades que se muestran en los siguientes resultados.

LEMA 3.1.4. *Dada  $f \in \mathcal{C}(V)$ , se tiene que*

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} a_j \sigma_j \langle \omega_j, f \rangle = \frac{1}{\sigma_0^2} \left( \langle \omega, f \rangle - \sigma_0 \langle \omega_0, f \rangle - \lambda \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} \sigma_j \langle \omega_j, f \rangle \right).$$

En particular,  $\sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} a_j \sigma_j^2 = \frac{1 - \lambda \alpha}{\sigma_0^2}$  y  $\sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} a_j^2 \sigma_j^2 = \frac{\gamma_0}{\sigma_0^2} - \frac{\lambda(1 - \lambda \alpha)}{\sigma_0^4}$ .

**Demostración.** La primera parte es consecuencia directa de la identidad  $a_j = \frac{\gamma_j - \lambda}{\sigma_0^2}$  y el resto de igualdades se siguen de la reexpresión de la suma como

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} a_j^2 \sigma_j^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{j=1}^m (1 - \lambda \gamma_j^{-1}) a_j \sigma_j^2. \quad \blacksquare$$

Se definen ahora las siguientes funciones sobre  $\mathcal{C}(V)$ : sea  $\mathcal{P}$  el proyector definido para cualquier  $f \in \mathcal{C}(V)$  como

$$\mathcal{P}(f) = \left[ \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} \sigma_j \langle \omega_j, f \rangle \right] \omega$$

y, cuando  $\lambda > 0$ , definimos los proyectores

$$\mathcal{P}_0(f) = \frac{1}{\lambda(1 - \lambda\alpha)} \left( \langle \omega, f \rangle \omega - \lambda \mathcal{P}(f) \right) - \frac{\langle \omega_0, f \rangle}{\gamma_0 \sigma_0} \omega$$

$$\mathcal{P}_i(f) = \frac{\gamma_i - \lambda}{\gamma_i \lambda (1 - \lambda\alpha)} \left( \langle \omega, f \rangle \omega - \lambda \mathcal{P}(f) \right), \quad i = 1, \dots, m$$

**PROPOSICIÓN 3.1.5.** *Sea  $f \in \mathcal{C}(V)$ . Si  $\lambda > 0$  entonces la única solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_q(u) = f$  es*

$$u = \mathcal{G}_{p_i}(f) + \mathcal{P}_i(f) \quad \text{en } V_i, \quad i = 0, \dots, m.$$

*Si, por el contrario,  $\lambda = 0$ , entonces la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_q(u) = f$  es resoluble si y sólo si  $\langle \omega, f \rangle = 0$  y la única solución  $u$  tal que  $\langle \omega, u \rangle = 0$  es*

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{G}_{p_0}(f) - \mathcal{P}(f) - \frac{\langle \omega_0, f \rangle}{\gamma_0} \omega_0 && \text{en } V_0 \\ u &= \mathcal{G}_{p_i}(f) - \mathcal{P}(f) && \text{en } V_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

**Demostración.** De la Proposición 3.1.3 se obtiene que  $\mathcal{L}_q(u) = f$  en  $V$  si, y sólo si,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p_0}^0(u) &= f + \left( \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \sigma_0 \langle \omega_j, u \rangle \right) \omega_0 && \text{en } V_0, \\ \mathcal{L}_{p_i}^i(u) &= f + a_i \sigma_i \sigma_0 \langle \omega_0, u \rangle \omega_i && \text{en } V_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \gamma_0 \langle \omega_0, u \rangle &= \langle \omega_0, \mathcal{L}_{p_0}^0(u) \rangle = \langle \omega_0, f \rangle + \sigma_0 \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \langle \omega_j, u \rangle \\ \gamma_i \langle \omega_i, u \rangle &= \langle \omega_i, \mathcal{L}_{p_i}^i(u) \rangle = \langle \omega_i, f \rangle + a_i \sigma_i \sigma_0 \langle \omega_0, u \rangle, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Multiplicando por  $a_i \sigma_i$  la  $i$ -ésima ecuación y sumando para toda  $i = 1, \dots, m$  obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \gamma_0 \langle \omega_0, u \rangle - \sigma_0 \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \langle \omega_j, u \rangle &= \langle \omega_0, f \rangle, \\ -\sigma_0 \langle \omega_0, u \rangle \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} a_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \langle \omega_j, u \rangle &= \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} a_j \sigma_j \langle \omega_j, f \rangle. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.1.4,

$$\begin{aligned} \gamma_0 \sigma_0 \langle \omega_0, u \rangle - \sigma_0^2 \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \langle \omega_j, u \rangle &= \sigma_0 \langle \omega_0, f \rangle, \\ -\sigma_0 \langle \omega_0, u \rangle \left( \gamma_0 - \frac{\lambda(1-\lambda\alpha)}{\sigma_0^2} \right) + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \langle \omega_j, u \rangle &= \langle \omega, f \rangle - \sigma_0 \langle \omega_0, f \rangle - \lambda \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} \sigma_j \langle \omega_j, f \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\langle \omega_0, u \rangle \left( \frac{\lambda(1-\lambda\alpha)}{\sigma_0} \right) = \langle \omega, f \rangle - \lambda \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} \sigma_j \langle \omega_j, f \rangle.$$

Ahora distinguimos casos. Si  $\lambda > 0$ , esta ecuación implica que la solución del sistema viene dada por

$$\begin{aligned} \langle \omega_0, u \rangle &= \frac{\sigma_0}{\lambda(1-\lambda\alpha)} \left( \langle \omega, f \rangle - \lambda \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} \sigma_j \langle \omega_j, f \rangle \right), \\ \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \langle \omega_j, u \rangle &= \frac{\gamma_0}{\lambda(1-\lambda\alpha)} \left( \langle \omega, f \rangle - \lambda \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} \sigma_j \langle \omega_j, f \rangle \right) - \frac{\langle \omega_0, f \rangle}{\sigma_0}. \end{aligned}$$

Como consecuencia,  $\mathcal{L}_q(u) = f$  en  $V$  si, y sólo si,  $\mathcal{L}_{p_i}(u) = f + \gamma_i \mathcal{P}_i(f)$  en  $V_i$ , esto es, si y sólo si  $u = \mathcal{G}_{p_i}(f) + \mathcal{P}_i(f)$  en  $V_i$  para toda  $i = 0, \dots, m$ . Sin embargo, como cuando  $\lambda = 0$  la ecuación de Poisson tiene solución si y sólo si  $\langle \omega, f \rangle = 0$ , esta ecuación implica que la única solución tal que  $\langle \omega, u \rangle = 0$  debe verificar

$$\begin{aligned} \langle \omega_0, u \rangle &= -\sigma_0 \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} \sigma_j \langle \omega_j, f \rangle \\ \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \langle \omega_j, u \rangle &= -\gamma_0 \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-1} \sigma_j \langle \omega_j, f \rangle - \frac{\langle \omega_0, f \rangle}{\sigma_0}. \end{aligned}$$

Esto significa que debe verificar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p_0}(u) &= f - \gamma_0 \mathcal{P}(f) - \langle \omega_0, f \rangle \omega_0 && \text{en } V_0, \\ \mathcal{L}_{p_i}(u) &= f - \gamma_i \mathcal{P}(f) && \text{en } V_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Por tanto, la única solución  $u$  con  $\langle \omega, u \rangle = 0$  viene dada por

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{G}_{p_0}(f) - \mathcal{P}(f) - \frac{\langle \omega_0, f \rangle}{\gamma_0} && \text{en } V_0 \\ u &= \mathcal{G}_{p_i}(f) - \mathcal{P}(f) && \text{en } V_i, \quad i = 1, \dots, m \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**TEOREMA 3.1.6.** *La función de Green de la red suma  $\Gamma_0 + (\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)$  con peso  $\omega$  está determinada por las identidades*

$$\begin{aligned} G_q &= G_{p_i} + g_{ii}(\lambda) \omega \otimes \omega && \text{en } V_i \times V_i, \quad i = 0, \dots, m, \\ G_q &= g_{ij}(\lambda) \omega \otimes \omega && \text{en } V_i \times V_j, \quad i, j = 0, \dots, m, \quad i \neq j \end{aligned}$$



donde para cada  $i, j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} g_{00}(\lambda) &= \frac{\alpha}{1 - \lambda\alpha} + \Lambda(\lambda) - \frac{1}{\sigma_0^2 \gamma_0}, \\ g_{0i}(\lambda) = g_{i0}(\lambda) &= \frac{\alpha}{1 - \lambda\alpha} + \Lambda(\lambda) - \frac{1}{\gamma_i(1 - \lambda\alpha)}, \\ g_{ij}(\lambda) &= \frac{\alpha}{1 - \lambda\alpha} + \Lambda(\lambda) + \frac{\lambda - \gamma_i - \gamma_j}{\gamma_i \gamma_j (1 - \lambda\alpha)}. \end{aligned}$$

**Demostración.** De la identidad (1) se concluye que si  $y \in V$  y consideramos la función  $u = G_{q_\omega}(\cdot, y)$ , entonces  $u$  es la única solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = \varepsilon_y - \omega(y)\omega$  tal que  $\langle \omega, u \rangle = 0$  si  $\lambda = 0$  y de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = \varepsilon_y$  si  $\lambda > 0$ . Por tanto, la expresión de  $u$  se deduce de aplicar la expresión de tal solución dada en la proposición anterior cuando  $f = \varepsilon_y - \omega(y)\omega$  para el caso  $\lambda = 0$  y  $f = \varepsilon_y$  para el caso  $\lambda > 0$ . Se deja al lector la substitución de  $f$  en las ecuaciones anteriores para obtener el resultado. ■

**COROLARIO 3.1.7.** *El índice de Kirchhoff de la red suma  $\Gamma = \Gamma_0 + (\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)$  respecto del peso  $\omega$  viene dado en función del índice de Kirchhoff respecto del peso  $\omega_i$  de cada subred  $\Gamma_i$  que la compone según la siguiente fórmula:*

$$k(\lambda, \omega) = \sum_{j=0}^m k_j(\gamma_j, \omega_j) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\gamma_j} + \frac{\lambda\beta - \alpha}{1 - \lambda\alpha},$$

donde  $\beta = \sum_{j=1}^m \gamma_j^{-2} \sigma_j^2$ . Además, las resistencias totales y efectivas para la red suma respecto del peso  $\omega$  vienen dadas para todo  $x, y \in V$  por:

$$\begin{aligned} r_{\lambda, \omega}(x) &= \sigma_i^{-2} r_{\gamma_i, \omega_i}(x) + \frac{\alpha}{1 - \lambda\alpha} + t_i(\lambda) && \text{para } x \in V_i, \\ R_{\lambda, \omega}(x, y) &= \sigma_i^{-2} R_{\gamma_i, \omega_i}(x, y) && \text{para } x, y \in V_i, \\ R_{\lambda, \omega}(x, y) &= \sigma_i^{-2} r_{\gamma_i, \omega_i}(x) + \sigma_j^{-2} r_{\gamma_j, \omega_j}(y) + \frac{1}{\gamma_j \sigma_j^2} + \frac{1}{\gamma_i \sigma_i^2} + s_{ij}(\lambda) && \text{para } x \in V_i, y \in V_j, i \neq j. \end{aligned}$$

donde para cada  $i, j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} t_0(\lambda) &= 0, \\ t_i(\lambda) &= \frac{1}{\gamma_i \sigma_i^2} + \frac{\lambda - 2\gamma_i}{\gamma_i^2 (1 - \lambda\alpha)}, \\ s_{0j}(\lambda) &= \frac{\lambda}{\gamma_j^2 (1 - \lambda\alpha)} - \frac{1}{\gamma_0 \sigma_0^2}, \\ s_{ij}(\lambda) &= \frac{\lambda(\gamma_i - \gamma_j)^2}{\gamma_i^2 \gamma_j^2 (1 - \lambda\alpha)} - \frac{1}{\gamma_0 \sigma_0^2}. \end{aligned}$$

**3.1.2. Autovalores y autofunciones.** Ya se conocen los autovalores de la suma de dos grafos en términos de los autovalores de sus factores en el caso clásico (ver [11, Prop. 4.11]). En este apartado estudiaremos el caso general que nos ocupa. Primero, usaremos las identidades de la Proposición 3.1.3 para obtener de manera sencilla la mayoría de los autovalores y autofunciones de  $\mathcal{L}_q$  en función de los autovalores y autofunciones de  $\mathcal{L}_{p_i}$ , con  $i = 0, \dots, m$ .

**LEMA 3.1.8.** *Dado  $i = 0, \dots, m$  y  $\gamma > \gamma_i$ , si  $u \in \mathcal{C}(V_i)$  verifica que  $\mathcal{L}_{p_i}(u) = \gamma u$  entonces  $\mathcal{L}_q(u) = \gamma u$ .*

**Demostración.** Basta ver que  $\langle u, \omega_i \rangle = 0$  como consecuencia de que  $\gamma > \gamma_i$  y, en particular,  $\gamma_i \neq \gamma$ . Además,  $\langle u, \omega_j \rangle = 0$  para cualquier  $j \neq i$  porque  $\omega_j \in \mathcal{C}(V_j)$  y  $V_i \cap V_j = \emptyset$ . ■

Por otro lado, como ya se ha visto en los preliminares de este trabajo,  $\lambda$  es el menor autovalor y su correspondiente autofunción es  $\omega$ . Llamaremos a  $\lambda$  y a cualquiera de los autovalores de  $\mathcal{L}_q$  dados por el lema anterior *autovalores elementales* de la red suma. Sus autofunciones correspondientes se llamarán *autofunciones elementales*. Así, los autovalores elementales de una red suma son  $\lambda$  y los autovalores de cada una de las redes que la componen. Asimismo, las autofunciones elementales son  $\omega$  y las obtenidas extendiendo por cero las autofunciones de cada subred  $\Gamma_i$ , exceptuando los múltiplos de cada peso  $\omega_i$ .

Para obtener el resto de autovalores de la red suma, que llamaremos *no elementales*, necesitamos introducir el polinomio

$$P_\Gamma(x) = \prod_{j=1}^m (\gamma_j - x) + \sum_{i=1}^m a_i \sigma_i^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\gamma_j - x),$$

conocido como el *Polinomio suma de la red*  $\Gamma = \Gamma_0 + (\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)$ .

LEMA 3.1.9. *Todas las raíces de  $P_\Gamma$  son reales. Además, si  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$  son las raíces de  $P_\Gamma$ , con sus multiplicidades, se cumple lo siguiente:*

- $\gamma_1 \leq \lambda_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \lambda_{m-1} \leq \gamma_m \leq \lambda_m \leq \lambda + a_m$ .
- $\lambda_m = \lambda + a_m$  si, y sólo si,  $a_1 = \dots = a_m$ , en cuyo caso las raíces de  $P_\Gamma$  son  $\lambda + a_m \sigma_0^2$  y  $\lambda + a_m$ .
- Si para cualquier  $i = 1, \dots, m$  se considera  $I(i) = \{j = 1, \dots, m \mid a_j = a_i\}$  y  $m_i = |I(i)|$ , entonces  $\gamma_i$  es una raíz de orden  $m_i - 1$  de  $P_\Gamma$ .
- Si  $\lambda_j \neq \gamma_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ , entonces  $\lambda_j$  es una raíz simple de  $P_\Gamma$ .

**Demostración.** El polinomio característico de la matriz simétrica

$$M_\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -a_1 \sigma_0 \sigma_1 & \cdots & -a_m \sigma_0 \sigma_m \\ -a_1 \sigma_0 \sigma_1 & \gamma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_m \sigma_0 \sigma_m & 0 & \cdots & \gamma_m \end{pmatrix}$$

es  $Q(x) = \prod_{j=0}^m (\gamma_j - x) - \sigma_0^2 \sum_{i=1}^m a_i^2 \sigma_i^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\gamma_j - x)$ . Observando que  $a_i \sigma_0^2 = (\gamma_i - x) + (x - \lambda)$

tenemos que

$$Q(x) = \left( \gamma_0 - x - \sum_{i=1}^m a_i \sigma_i^2 \right) \prod_{j=1}^m (\gamma_j - x) + (\lambda - x) \sum_{i=1}^m a_i \sigma_i^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\gamma_j - x) = (\lambda - x) P_\Gamma(x).$$

Así,  $P_\Gamma(x)$  tiene  $m$  raíces reales. Además,  $P_\Gamma(x) > 0$  cuando  $x < \gamma_1$  y, por tanto, si tenemos en cuenta que  $\lambda < \gamma_1$ , del Interlacing Theorem de Cauchy (ver [16]) se deduce que

$$\lambda < \gamma_1 \leq \lambda_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \lambda_{m-1} \leq \gamma_m \leq \lambda_m.$$

Si  $x \geq \lambda + a_m$ , entonces para cualquier  $i = 1, \dots, m$  se tiene que  $x > \gamma_i$  y

$$x - \gamma_i \geq \lambda + a_m - \gamma_i = a_m - a_i \sigma_0^2 \geq a_i (1 - \sigma_0^2),$$

con igualdad si y sólo si  $x = \lambda + a_m$  y  $a_i = a_m$ . Así, se tiene que

$$(-1)^m P_\Gamma(x) = \prod_{j=1}^m (x - \gamma_j) \left[ 1 - \sum_{i=1}^m \frac{a_i \sigma_i^2}{(x - \gamma_i)} \right] \geq \prod_{j=1}^m (x - \gamma_j) \left[ 1 - \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i^2}{(1 - \sigma_0^2)} \right] = 0,$$

con igualdad si y sólo si  $x = \lambda + a_m$  y  $a_1 = \dots = a_m$ . Como consecuencia,  $\lambda_m \leq \lambda + a_m$ , con igualdad si y sólo si  $a_1 = \dots = a_m$ . Además, esta última condición es equivalente a que  $\gamma_1 = \dots = \gamma_m$  y, entonces, el Teorema de Entrelazados de Cauchy implica que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{m-1} = \gamma_1 = \gamma_m < \lambda + a_m$ .

Por otro lado, para cualquier  $i = 1, \dots, m$  se tiene que  $\gamma_i$  es una raíz de orden  $m_i$  de  $\prod_{j=1}^m (\gamma_j - x)$  y por tanto es una raíz de orden  $m_i - 1$  de  $P_\Gamma$ , pues es una raíz de orden  $m_i - 1$  del polinomio  $\sum_{i=1}^m a_i \sigma_i^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (x - \gamma_j)$ . Para acabar, el punto 4 es una consecuencia inmediata del Interlacing Theorem de Cauchy. ■

**PROPOSICIÓN 3.1.10.** *Los autovalores no elementales de  $\mathcal{L}_q$  son las raíces del polinomio suma de  $\Gamma$ . Además, si  $P_\Gamma(\gamma) = 0$  entonces se cumple*

1. Si  $\gamma \neq \gamma_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ , entonces  $\gamma$  es simple y su autofunción unitaria correspondiente viene dada por

$$u = \left( 1 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^m \frac{a_j^2 \sigma_j^2}{(\gamma_j - \gamma)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \omega_0 + \sigma_0 \sum_{j=1}^m \frac{a_j \sigma_j \omega_j}{\gamma_j - \gamma} \right).$$

2. Si  $\gamma = \gamma_i$  para algún  $i = 1, \dots, m$  y  $\gamma \neq \gamma_{i-1}$ , entonces una base ortonormal del subespacio de autofunciones correspondientes a  $\gamma_i$  viene dada por

$$u_k = \left( \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_{i+j}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=0}^k \sigma_{i+j}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_{i+j} \left( \sigma_{i+j} \omega_{i+k} - \sigma_{i+k} \omega_{i+j} \right), \quad k = 1, \dots, m_i - 1.$$

**Demostración.** Si consideramos  $u = \sum_{j=0}^m \tau_j \omega_j$ , entonces  $\tau_j = \langle \omega_j, u \rangle$  para toda  $j = 0, \dots, m$ .

Así, de las igualdades de (3.1.5) tenemos que  $\mathcal{L}_q(u) = \gamma u$  si y sólo si

$$\begin{aligned} \gamma_0 \tau_0 \omega_0 - \left( \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \sigma_0 \tau_j \right) \omega_0 &= \gamma \tau_0 \omega_0, & \text{on } V_0, \\ \gamma_i \tau_i \omega_i - a_i \sigma_i \sigma_0 \tau_0 \omega_i &= \gamma \tau_i \omega_i, & \text{on } V_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

o, equivalentemente, si y sólo si

$$(\gamma_0 - \gamma) \tau_0 = \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j \sigma_0 \tau_j \quad \text{and} \quad (\gamma_i - \gamma) \tau_i = a_i \sigma_i \sigma_0 \tau_0, \quad i = 1, \dots, m. \quad [\text{E}]$$

Estas igualdades son el equivalente a decir que  $\gamma$  es un autovalor de la matriz  $M_\Gamma$  definida en la demostración del Lema 3.1.9. Así, si  $\gamma \neq \lambda$ , entonces  $\gamma$  es una raíz del polinomio suma de  $\Gamma$ . Además, los valores  $\tau_0, \dots, \tau_m$  deben ser justamente las componentes de un autovector de  $M_\Gamma$  correspondiente al autovalor  $\gamma$ . Aún más, si  $(\tau_0, \dots, \tau_m)^T$  y  $(\hat{\tau}_0, \dots, \hat{\tau}_m)^T$  son autovectores

linealmente independientes y ortogonales, respectivamente, de  $M_\Gamma$  entonces  $u = \sum_{j=0}^m \tau_j \omega_j$  y

$\hat{u} = \sum_{j=0}^m \hat{\tau}_j \omega_j$  son autofunciones lineales y ortogonales, respectivamente, de  $\mathcal{L}_q$ . Así, todas las raíces de  $P_\Gamma$ , contando multiplicidades, son autovalores no elementales de  $\mathcal{L}_q$ .

(1) Si  $P_\Gamma(\gamma) = 0$  y  $\gamma \neq \gamma_i$  para cualquier  $i = 1, \dots, m$ , entonces el Lema 3.1.9 implica que  $\gamma$  es un autovalor simple de  $\mathcal{L}_q$ . Las últimas ecuaciones en [E] implican que  $\tau_i = \frac{a_i \sigma_i \sigma_0 \tau_0}{\gamma_i - \gamma}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Además, como  $\langle u, u \rangle = \sum_{j=0}^m \tau_j^2$ , entonces  $u$  es unitaria si y sólo si

$$\tau_0^2 = \left( 1 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^m \frac{a_j^2 \sigma_j^2}{(\gamma_j - \gamma)^2} \right)^{-1}.$$

(2) Cuando  $\gamma = \gamma_i$  para alguna  $i = 1, \dots, m$  entonces la  $i$ -ésima ecuación en [E] implica que  $\tau_0 = 0$ , mientras que la  $j$ -ésima ecuación para  $j \notin I(i)$  implica que  $\tau_j = 0$ . Además, la primera ecuación en [E] implica que  $u$  es una autofunción correspondiente a  $\gamma$  si y sólo si  $\sum_{j \in I(i)} \sigma_j \tau_j = 0$ , since  $a_j = a_i$  for any  $j \in I(i)$ . Por último,  $I(i) = \{i, \dots, i + m_i\}$  since  $\gamma \neq \gamma_{i-1}$  y así

$$v_k = \sigma_i \omega_{i+k} - \sigma_{i+k} \omega_i, \quad k = 1, \dots, m_i - 1$$

es una base del subespacio de autofunciones correspondientes a  $\gamma_i$ . La base ortonormal se obtiene aplicando el proceso de Gram-Schmidt a este sistema. ■

**3.1.3. Aplicaciones: ejemplos concretos.** En el siguiente resultado se especifica el caso estándar, esto es, el caso de la suma de dos grafos  $\Gamma_0 = (V_0, E_0)$  y  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  con  $|V_0| = n_0$  y  $|V_1| = n_1$  (ver [9]). Esto se corresponde a tomar  $\lambda = 0$ ,  $m = 1$ ,  $\omega = \frac{1}{\sqrt{n_0 + n_1}}$  y  $a_1 = n_0 + n_1$ , de tal manera que  $c(x, y) = 1$  para cualquier  $x \in V_0$  y  $y \in V_1$ . Sean  $0 = \nu_1 < \nu_2 \leq \dots \leq \nu_{n_0}$  y  $0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n_1}$  los autovalores de los laplacianos combinatorios de  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$ , respectivamente. Además, sean  $\{n_0^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}, u_2, \dots, u_{n_0}\} \subset \mathcal{C}(V_0)$  y  $\{n_1^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}, v_2, \dots, v_{n_1}\} \subset \mathcal{C}(V_1)$  las bases ortonormales de autofunciones correspondientes.

**COROLARIO 3.1.11.** *Los autovalores del laplaciano combinatorio  $\mathcal{L}$  de la red suma son*

$$0, \nu_2 + n_1, \dots, \nu_{n_0} + n_1, \mu_2 + n_0, \dots, \mu_{n_1} + n_0, n_0 + n_1$$

*y su correspondiente base ortonormal de autofunciones es*

$$(n_0 + n_1)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}, u_2, \dots, u_{n_0}, v_2, \dots, v_{n_1}, u,$$

$$\text{donce } u(x) = \frac{n_1}{\sqrt{n_0 n_1 (n_0 + n_1)}} \text{ si } x \in V_0 \text{ y } u(x) = -\frac{n_0}{\sqrt{n_0 n_1 (n_0 + n_1)}} \text{ si } x \in V_1.$$

### 3.2. Cluster

En la literatura, el cluster  $\Gamma_0\{\Gamma_1\}$  de dos grafos  $\Gamma_0 = (V_0, E_0)$  y  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ , tales que  $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ , y un v3rtice distinguido de  $V_1$  consiste en crear  $|V_0|$  copias de  $\Gamma_1$  e identificar cada v3rtice de  $V_0$  con el v3rtice distinguido de una de las copias de  $\Gamma_1$ , manteniendo las ramas originales en cada factor, tal como se muestra en la Figura 3, ver [20].

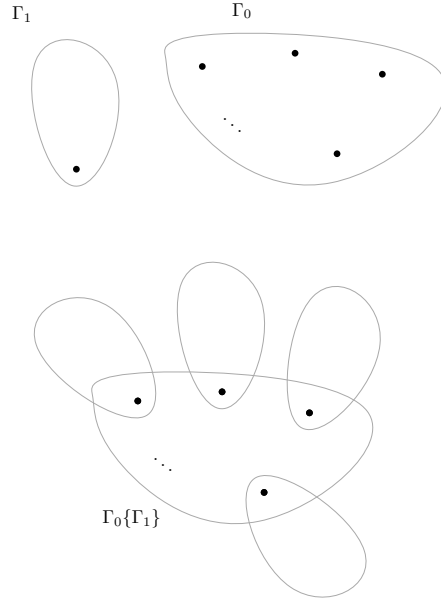
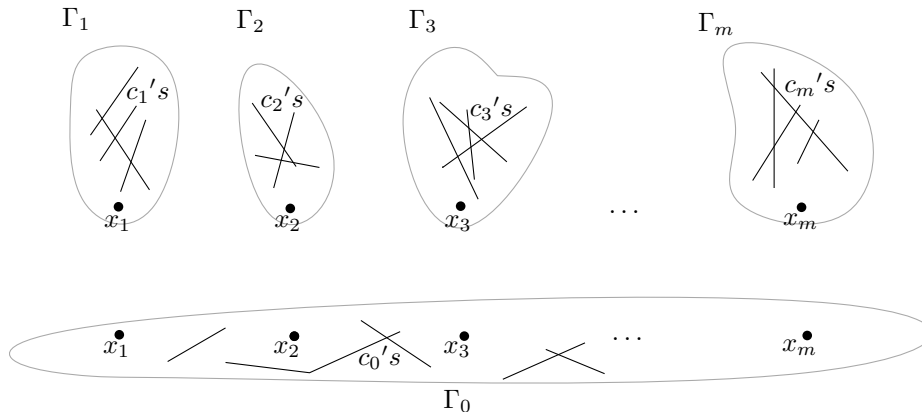


FIGURA 3. Ejemplo de cluster cl3sico.

En este trabajo consideraremos la siguiente generalizaci3n. Sea  $\Gamma_0 = (V_0, E_0, c_0)$ , con  $V_0 = \{x_1, \dots, x_m\}$ , una red conexa y para cada  $i = 1, \dots, m$  consideremos  $\Gamma_i = (V_i, E_i, c_i)$  una red conexa tal que  $x_i \in V_i$ . Llamamos *red cluster con base  $\Gamma_0$  y peso  $\omega$*  a la red  $\Gamma$ , tambi3n denotada por  $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$ , cuyo conjunto de v3rtices es  $V = \bigsqcup_{i=1}^m V_i$  la uni3n disjunta de todos los conjuntos de v3rtices y cuya conductancia est3 dada por  $c(x, y) = c_i(x, y)$ , para todo par  $x, y \in V_i$ ,  $i = 0, \dots, m$  y por  $c(x, y) = 0$  en caso contrario.



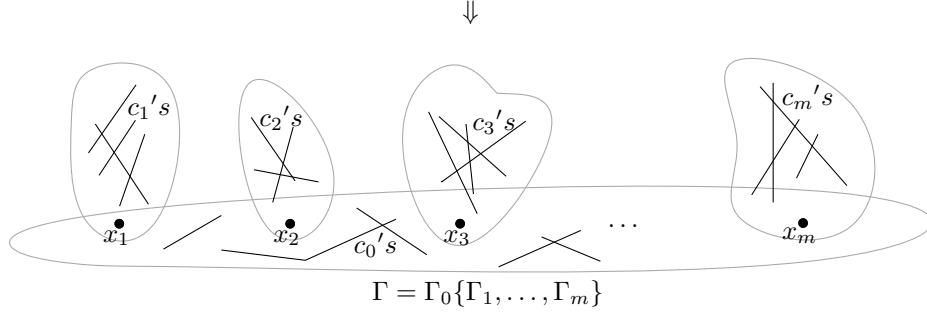


FIGURA 4. Ejemplo de cluster generalizado

Por otro lado, dado el peso  $\omega \in \Omega(V)$  en  $V$ , para cada  $i = 0, \dots, m$  se define el valor  $\sigma_i = \left( \sum_{x \in V_i} \omega(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Entonces, dado  $i = 0, \dots, m$  si para cada  $x \in V_i$  definimos  $\omega_i(x) = \sigma_i^{-1} \omega(x)$ , es claro que  $\omega_i \in \Omega(V_i)$ ; es decir, hemos restringido el peso  $\omega$  para obtener pesos derivados de éste en cada factor de la red cluster.

Para cada  $i = 0, \dots, m$  identificamos  $\mathcal{C}(V_i)$  con el subespacio de  $\mathcal{C}(V)$  formado por las funciones que son nulas en  $V \setminus V_i$ . Por otro lado, si  $u \in \mathcal{C}(V)$ , la restricción de  $u$  a  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, m$  se denota también por  $u$ . Observamos que si  $u \in \mathcal{C}(V_i)$  y  $v \in \mathcal{C}(V)$ , entonces  $\langle u, v \rangle = \sum_{x \in V_i} u(x)v(x)$ .

En particular, si  $u \in \mathcal{C}(V_i)$  y  $v \in \mathcal{C}(V_j)$  donde  $0 \leq i < j \leq m$ , entonces  $\langle u, v \rangle = 0$  cuando  $i \neq 0$ , mientras que  $\langle u, v \rangle = u(x_j)v(x_j)$  cuando  $i = 0$ .

Denotamos por  $\mathcal{L}$  al Laplaciano combinatorio de  $\Gamma$  y para cada  $i = 0, \dots, m$  por  $\mathcal{L}^i$  al Laplaciano combinatorio de la red  $\Gamma_i$ .

LEMA 3.2.1. *Para toda  $u \in \mathcal{C}(V)$ , se verifica:*

$$\mathcal{L}(u)(x) = \mathcal{L}^i(u)(x) + \mathcal{L}^0(u)(x_i)\varepsilon_{x_i}(x), \text{ para todo } i = 1, \dots, m, \quad x \in V_i.$$

LEMA 3.2.2. *Consideremos el potencial  $q_\omega = -\omega^{-1}\mathcal{L}(\omega)$  definido en  $V$  y consideremos los potenciales  $q_{\omega_i} = -\omega_i^{-1}\mathcal{L}^i(\omega_i)$  definido en  $V_i$ , para  $i = 0, \dots, m$ . Entonces,*

$$q_\omega = q_{\omega_i} + q_{\omega_0}(x_i)\varepsilon_{x_i} \quad \text{en } V_i, \quad i = 0, \dots, m.$$

En adelante, para las redes cluster, trabajaremos con la transformación de Doob  $\mathcal{L}_{q_\omega}$ .

PROPOSICIÓN 3.2.3. *Para toda  $u \in \mathcal{C}(V)$ , se verifica:*

$$\mathcal{L}_{q_\omega}(u)(x) = \mathcal{L}_{q_{\omega_i}}^i u(x) + \mathcal{L}_{q_{\omega_0}}^0 u(x_i)\varepsilon_{x_i}(x) \quad \text{para todo } x \in V_i, \quad i = 0, \dots, m.$$

**3.2.1. Función de Green, resistencias efectivas e Índice de Kirchhoff.** El principal objetivo de esta sección es obtener la función de Green de la red cluster en términos de las funciones de Green de sus factores. Como consecuencia, obtendremos también los Índices de Kirchhoff y las resistencias efectivas respecto del peso dado en términos de los parámetros análogos de los factores, simplemente aplicando las identidades de la Proposición 2.5.1. A lo largo de esta sección,  $\mathcal{G}_{q_{\omega_i}}^i$  y  $G_{q_{\omega_i}}^i$  denotarán el operador y la función de Green asociados al operador de Schrödinger  $\mathcal{L}_{q_{\omega_i}}^i$  en  $\Gamma_i$ , donde  $i = 0, \dots, m$ .

PROPOSICIÓN 3.2.4. Si  $f \in \mathcal{C}(V)$  es tal que  $\langle \omega, f \rangle = 0$ , entonces la única solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = f$  tal que  $\langle \omega, u \rangle = 0$  es:

$$u = \sum_{i=1}^m \left( \mathcal{G}_{q_{\omega_i}}^i(f) - h(x_i) \mathcal{G}_{q_{\omega_i}}^i(\varepsilon_{x_i}) + d_i \omega_i \right) - C \omega, \quad ,$$

donde para cada  $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} h(x_i) &= \frac{\langle f, \omega_i \rangle}{\omega_i(x_i)}, \\ d_i &= \frac{1}{\omega_i(x_i)} \left( \mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0(h)(x_i) - \mathcal{G}_{q_{\omega_i}}^i(f)(x_i) + h(x_i) \mathcal{G}_{q_{\omega_i}}^i(x_i, x_i) \right), \\ C &= \sum_{i=1}^m \sigma_i d_i. \end{aligned}$$

**Demostración.** Aplicando la Proposición 3.2.3 obtenemos que si  $u$  es solución de  $\mathcal{L}_q(u) = f$ , entonces  $u$  es solución de  $\mathcal{L}_{q_{\omega_j}}^j(u) + \mathcal{L}_{q_{\omega_0}}^0(u)(x_j) \varepsilon_{x_j} = f$  en  $V_j$  para cada  $j = 1, \dots, m$ . Por tanto, si consideramos la función  $h \in \mathcal{C}(V_0)$  definida como  $h = \mathcal{L}_{q_{\omega_0}}^0(u)$ , entonces  $u$  es solución de  $\mathcal{L}_q(u) = f$  sii para cada  $j = 1, \dots, m$

$$\mathcal{L}_{q_{\omega_j}}^j(u) = f - h(x_j) \varepsilon_{x_j}, \quad \text{en } V_j.$$

Teniendo en cuenta que  $\mathcal{L}_{q_{\omega_j}}^j(\omega_j) = 0$  para cada  $j = 1, \dots, m$ , de las identidades anteriores concluimos que

$$0 = \langle f, \omega_j \rangle - h(x_j) \omega_j(x_j)$$

y por tanto,  $h(x_j) = \frac{\langle f, \omega_j \rangle}{\omega_j(x_j)}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Por otra parte, como  $\langle f - h(x_j) \varepsilon_{x_j}, \omega_j \rangle = 0$  resulta que existe  $a_j \in \mathbb{R}$  tal que

$$u = \mathcal{G}_{q_{\omega_j}}^j(f) - h(x_j) \mathcal{G}_{q_{\omega_j}}^j(\varepsilon_{x_j}) + a_j \omega_j \quad \text{en } V_j.$$

Si para cada  $j = 1, \dots, m$  definimos  $u_j = \mathcal{G}_{q_{\omega_j}}^j(f) - h(x_j) \mathcal{G}_{q_{\omega_j}}^j(\varepsilon_{x_j}) + a_j \omega_j$ , entonces  $u_j \in \mathcal{C}(V_j)$

y  $u = \sum_{i=1}^m u_i$  es solución de la ecuación de Poisson. Además,

$$\langle \omega, u \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \omega, u_i \rangle = \sum_{i=1}^m \sigma_i \langle \omega_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^m \sigma_i \langle \omega_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^m \sigma_i a_i,$$

de manera que  $\langle u, \omega \rangle = 0$  sii  $\sum_{i=1}^m a_i \sigma_i = 0$ .

Por otro lado, si definimos las funciones  $v, z \in \mathcal{C}(V_0)$  como  $v(x_j) = a_j \omega_j(x_j)$  y como  $z(x_j) = \mathcal{G}_{q_{\omega_j}}^j(f)(x_j) - h(x_j) \mathcal{G}_{q_{\omega_j}}^j(x_j, x_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , entonces  $u = z + v$  en  $V_0$  y por tanto,  $\mathcal{L}_{q_{\omega_0}}^0(v) = h - \mathcal{L}_{q_{\omega_0}}^0(z)$  en  $V_0$ . Como  $\langle h - \mathcal{L}_{q_{\omega_0}}^0(z), \omega_0 \rangle = 0$ , podemos resolver la anterior ecuación usando el operador de Green, obteniendo

$$v = \mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0(h - \mathcal{L}_{q_{\omega_0}}^0(z)) + \alpha \omega_0 = \mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0(h) - z + \omega_0 \langle z, \omega_0 \rangle + \alpha \omega_0 = \mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0(h) - z + \beta \omega_0$$

en  $V_0$ , donde  $\beta = \alpha + \langle \omega_0, z \rangle$ .

Substituyendo en esta igualdad el valor de  $v(x_j)$  y teniendo en cuenta que  $\omega_j(x_j) = \frac{\omega(x_j)}{\sigma_j} = \frac{\sigma_0 \omega_0(x_j)}{\sigma_j}$ , obtenemos la siguiente expresión para los coeficientes  $a_j$

$$a_j = \frac{\mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0(h)(x_j)}{\omega_j(x_j)} - \frac{z(x_j)}{\omega_j(x_j)} + \beta \frac{\sigma_j}{\sigma_0}, \quad j = 1, \dots, m$$

lo que, a su vez, que, implica que  $\sum_{i=1}^m a_i \sigma_i = 0$  sii

$$\beta = \sigma_0 \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i}{\omega_i(x_i)} \left( z(x_i) - \mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0(h)(x_i) \right),$$

de donde finalmente se deduce la identidad del enunciado.  $\blacksquare$

**TEOREMA 3.2.5.** *La función de Green de la red cluster  $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$  con peso  $\omega$  está determinada por las identidades*

$$\begin{aligned} G_{q_\omega} &= G_{q_{\omega_j}}^j(\cdot, \cdot) + \frac{\sigma_j^2 - 1}{\omega_j(x_j)} G_{q_{\omega_j}}^j(x_j, \cdot) \otimes \omega_j + \frac{\sigma_j^2 - 1}{\omega_j(x_j)} \omega_j \otimes G_{q_{\omega_j}}^j(\cdot, x_j) + g_j \omega_j \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_j \times V_j, \quad j = 1, \dots, m, \\ G_{q_\omega} &= \frac{\sigma_i \sigma_j}{\omega_i(x_i)} G_{q_{\omega_i}}^i(\cdot, x_i) \otimes \omega_j + \frac{\sigma_i \sigma_j}{\omega_j(x_j)} \omega_i \otimes G_{q_{\omega_j}}^j(x_j, \cdot) + g_{ij} \omega_i \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_i \times V_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

donde para cada  $i, j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} g_j &= \frac{\mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0(x_j, x_j)}{\omega_j^2(x_j)} + \frac{1 - 2\sigma_j^2}{\omega_j^2(x_j)} G_{q_{\omega_j}}^j(x_j, x_j) + \sigma_j^2 \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i^2}{\omega_i(x_i)} G_{q_{\omega_i}}^i(x_i, x_i) \\ &\quad - \frac{2\sigma_j}{\omega_j(x_j)} \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i}{\omega_i(x_i)} G_{q_{\omega_0}}^0(x_i, x_j) + \sigma_j^2 \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i}{\omega_i(x_i)} \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_k}{\omega_k(x_k)} G_{q_{\omega_0}}^0(x_i, x_k), \\ g_{ij} &= \frac{\mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0(x_i, x_j)}{\omega_i(x_i) \omega_j(x_j)} - \frac{\sigma_i \sigma_j}{\omega_j^2(x_j)} G_{q_{\omega_j}}^j(x_j, x_j) - \frac{\sigma_i \sigma_j}{\omega_i^2(x_i)} G_{q_{\omega_i}}^i(x_i, x_i) \\ &\quad - \frac{\sigma_i}{\omega_j(x_j)} \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_k}{\omega_k(x_k)} G_{q_{\omega_0}}^0(x_k, x_j) - \frac{\sigma_j}{\omega_i(x_i)} \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_k}{\omega_k(x_k)} G_{q_{\omega_0}}^0(x_k, x_i) \\ &\quad + \sigma_i \sigma_j \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_k^2}{\omega_k^2(x_k)} G_{q_{\omega_k}}^k(x_k, x_k) + \sigma_i \sigma_j \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_k}{\omega_k(x_k)} \sum_{l=1}^m \frac{\sigma_l}{\omega_l(x_l)} G_{q_{\omega_0}}^0(x_k, x_l) \end{aligned}$$

**Demostración.** De la identidad (1) se concluye que si  $y \in V$  y consideramos la función  $u = G_{q_\omega}(\cdot, y)$ , entonces  $u$  es la única solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = \varepsilon_y - \omega(y)\omega$  tal que  $\langle \omega, u \rangle = 0$ . Por tanto la expresión de  $u$  se deduce de aplicar la expresión de tal solución dada en la proposición anterior cuando  $f = \varepsilon_y - \omega(y)\omega$ . Se deja al lector la substitución de  $f = \varepsilon_y - \omega(y)\omega$  en las ecuaciones anteriores para obtener el resultado.  $\blacksquare$

**COROLARIO 3.2.6.** *El índice de Kirchhoff del cluster  $\Gamma$  respecto del peso  $\omega$  viene dado en función del índice de Kirchhoff respecto del peso  $\omega_i$  de cada subred  $\Gamma_i$  que compone el cluster según la*



siguiente fórmula:

$$k(\omega) = \sum_{i=1}^m k_i(\omega_i) + \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma_i^2 \sigma_j^2 R_{\omega_0}(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^m (1 - \sigma_i^2) r_{\omega_i}(x_i),$$

donde

$$k_i(\omega_i) = \sum_{x \in V_i} G_{q_{\omega_i}}^i(x, x) \text{ es el índice de Kirchhoff de } \Gamma_i \text{ respecto del peso } \omega_i.$$

Además, las resistencias efectivas para la red cluster respecto del peso  $\omega$  vienen dadas para todo  $x, y \in V$  por:

$$\begin{aligned} R_\omega(x, y) &= \frac{R_{\omega_i}(x, y)}{\sigma_i^2} \quad \text{si } x, y \in V_i, \\ R_\omega(x, y) &= \frac{R_{\omega_j}(x, x_j)}{\sigma_j^2} + \frac{R_{\omega_i}(y, x_i)}{\sigma_i^2} + \frac{R_{\omega_0}(x_i, x_j)}{\sigma_0^2} + \frac{2\sigma_j^2 - 1}{\sigma_j^2} r_{\omega_j}(x_j) \\ &\quad + \frac{2\sigma_i^2 - 1}{\sigma_i^2} r_{\omega_i}(x_i) + 2t_{ij} \quad \text{si } x \in V_j, \quad y \in V_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

donde para cada  $i, j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} t_{ij} &= - \sum_{k=1}^m \sigma_k^2 r_{\omega_k}(x_k) - \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{k=1}^m \sigma_k^2 r_{\omega_0}(x_k) - \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{k=1}^m \sigma_k^2 R_{\omega_0}(x_k, x_i) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{k=1}^m \sigma_k^2 R_{\omega_0}(x_k, x_j) + \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sigma_k^2 \sigma_l^2 R_{\omega_0}(x_k, x_l). \end{aligned}$$

**Demostración.** Dejamos los cálculos, que son inmediatos a partir de las fórmulas dadas y por tanto no contiene ningún punto complicado, al lector. ■

**3.2.2. Aplicaciones: ejemplos concretos.** Para dar una aplicación práctica del cálculo de estos parámetros de una red cluster, supondremos ahora que tenemos un grafo  $\Gamma_0 = (V_0, E_0)$  con  $m = |V_0|$  y  $m$  grafos más  $\Gamma_i = (V_i, E_i)$ , no necesariamente iguales, con  $n_i = |V_i|$  para toda  $i = 1, \dots, m$ . El cluster  $\Gamma = (V, E)$  con peso constante  $\omega \equiv w \in \Omega(V)$ , grafo base  $\Gamma_0 = (V_0, E_0)$  con las notaciones anteriores y grafos satélite  $\Gamma_i = (V_i, E_i)$  representaría, en el campo de la Química Orgánica, una molécula a la que se han unido  $m$  moléculas distintas: lo que nos interesa saber es el Índice de Kirchhoff de la nueva molécula en función de los Índices de Kirchhoff de las moléculas originales.

Observemos primero que  $|V| = n_1 + \dots + n_m$ . Como  $\omega \in \Omega(V)$  y  $\omega \equiv w$  es constante, se tiene que  $\omega = w = \frac{1}{\sqrt{n_1 + \dots + n_m}}$ . Además,

$$\sigma_0 = w\sqrt{m}, \quad \sigma_i = w\sqrt{n_i} \quad \text{para toda } i = 1, \dots, m,$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \omega_i = \frac{1}{\sqrt{n_i}} \quad \text{para toda } i = 1, \dots, m.$$

Con las notaciones anteriores el Índice de Kirchhoff de la red cluster es:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\omega) &= w^2 \sum_{i=1}^m n_i \mathbf{k}_i(\omega_i) + \frac{w^2}{2m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_i n_j R_{\omega_0}(x_i, x_j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \left( \frac{1 - w^2 n_i}{n_i} \sum_{x \in V_i} R_{\omega_i}(x, x_i) \right). \end{aligned}$$

Ahora añadimos condiciones sobre el ejemplo anterior: supongamos ahora que todos los grafos satélite  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  son el mismo grafo  $\Gamma_1$  con el mismo vértice distinguido  $x_1$ . Entonces, si definimos  $n = n_1 = \dots = n_m$ , el peso es  $\omega = w = \frac{1}{\sqrt{mn}}$ . Cuando modificamos el peso para restringirlo a cada grafo que compone este cluster, se tiene que  $\sigma_0 = w\sqrt{m}$  y  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m}}$  y, para toda  $i = 1, \dots, m$ ,  $\sigma_i = w\sqrt{n}$  y  $\omega_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

El índice de Kirchhoff viene dado por la siguiente igualdad:

$$(6) \quad \mathbf{k}(\omega) = \mathbf{k}_1(\omega_1) + n\mathbf{k}_0(\omega_0) + \frac{m-1}{n} \sum_{x \in V_1} R_{\omega_1}(x, x_1).$$

En [20] los autores han calculado el Índice clásico de Kirchhoff para este caso particular de cluster. Queremos comparar los resultados que acabamos de obtener con los de este artículo para mostrar con ello que las generalizaciones de este trabajo son correctas y adecuadas. Para ello, recordemos que si  $\omega = w$  es constante y  $n = |V(G)|$ , entonces

$$R_w = nR \quad \text{y} \quad \mathbf{k}(w) = \frac{\mathbf{k}}{n}.$$

Aplicando estas correspondencias al índice de Kirchhoff (6) calculado en el ejemplo que se estaba tratando, si  $\mathbf{k}_i$  es el índice de Kirchhoff clásico del grafo  $\Gamma_i$ , con  $i = 0, 1$ , se tiene

$$\mathbf{k} = n^2 \mathbf{k}_0 + m\mathbf{k}_1 + nm(m-1) \sum_{x \in V_1} R(x, x_1),$$

que es exactamente la fórmula que se da en [20].

### 3.3. Corona

En la literatura, la corona  $\Gamma_0 \circ \Gamma_1$  de dos grafos  $\Gamma_0 = (V_0, E_0)$  y  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ , tales que  $V_0 \cap V_1 = \emptyset$  consiste en crear  $|V_0|$  copias de  $\Gamma_1$  y unir cada vértice de  $V_0$  con una de las copias de  $\Gamma_1$ , manteniendo además las ramas originales en cada factor, ver [20].

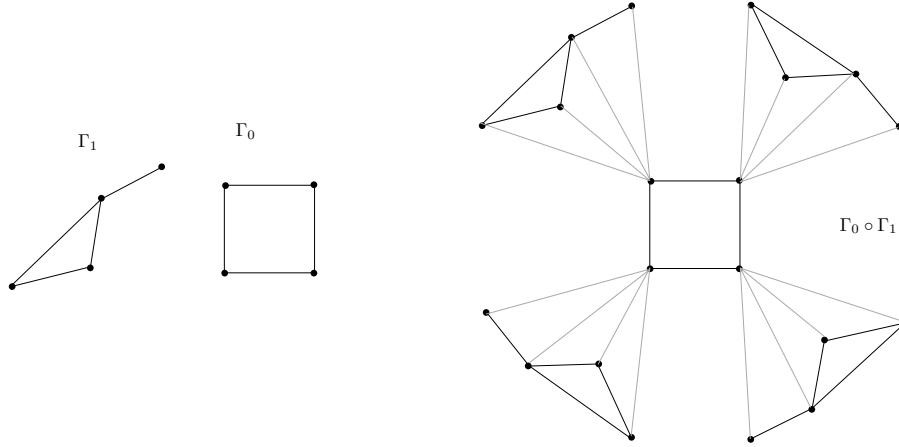
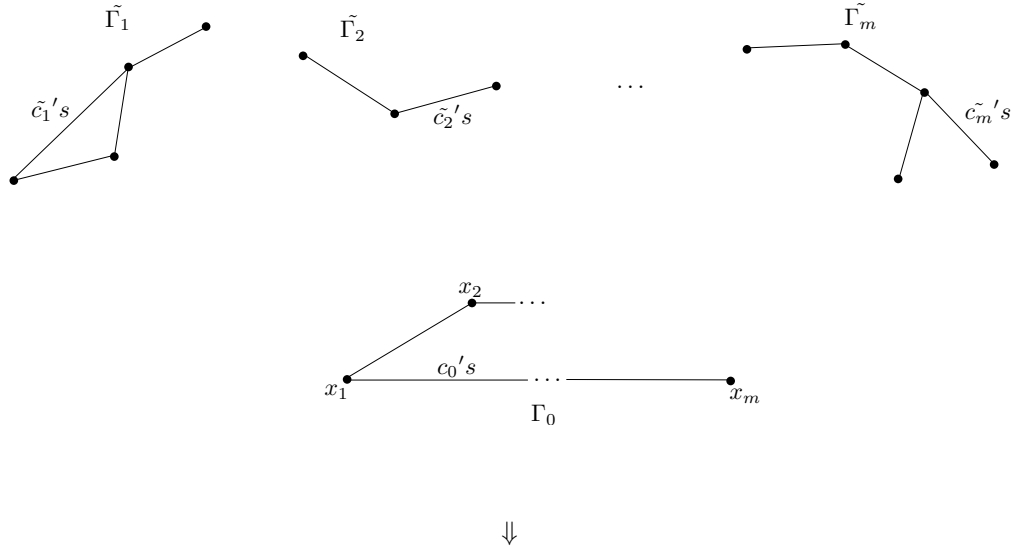


FIGURA 5. Ejemplo de corona clásica.

En este trabajo consideraremos la siguiente generalización. Sea  $\Gamma_0 = (V_0, E_0, c_0)$ , con  $V_0 = \{x_1, \dots, x_m\}$ , una red conexa y para cada  $i = 1, \dots, m$  consideremos  $\tilde{\Gamma}_i = (\tilde{V}_i, \tilde{E}_i, \tilde{c}_i)$  una red conexa. Llamamos *red corona con base*  $\Gamma_0$ , *conductancias*  $\{\tilde{a}_i\}_{i=1}^m$  y *peso*  $\omega$  a la red  $\Gamma$ , también denotada por  $\Gamma_0 \circ (\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_m)$ , cuyo conjunto de vértices es  $V = V_0 \cup \prod_{i=1}^m \tilde{V}_i$  la unión disjunta de todos los conjuntos de vértices y cuya conductancia está dada, para todo par para todo par  $x, y \in \tilde{V}_i \cup \{x_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$  por

$$c(x, y) = c_i(x, y) = \begin{cases} \tilde{c}_i(x, y), & x, y \in \tilde{V}_i \\ \tilde{a}_i \omega(x) \omega(x_i), & x \in \tilde{V}_i, y = x_i \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y por  $c(x, y) = 0$  en caso contrario. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\tilde{a}_1 \leq \dots \leq \tilde{a}_m$ .



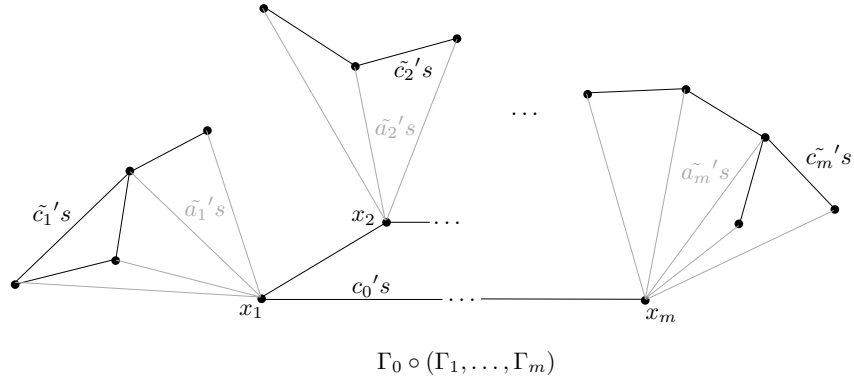


FIGURA 6. Ejemplo de corona generalizada.

La estrategia a seguir para estudiar la red corona viene determinada por la siguiente observación, que expresa cómo se puede crear una corona cualquiera a partir de la combinación de una suma y un cluster:

OBSERVACIÓN 3.3.1.  $\Gamma_0 \circ (\widetilde{\Gamma}_1, \dots, \widetilde{\Gamma}_m) = \Gamma_0 \left\{ (\widetilde{\Gamma}_1 + K_1), \dots, (\widetilde{\Gamma}_m + K_1) \right\}$ , donde  $K_1$  es el grafo de un sólo vértice y es precisamente el vértice distinguido de  $\widetilde{\Gamma}_i + K_1$  en el momento de hacer el cluster.

Por otro lado, dado el peso  $\omega \in \Omega(V)$  en  $V$ , para cada  $i = 1, \dots, m$  se definen los valores  $\sigma_i = \left( \sum_{x \in V_i} \omega(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\tilde{\sigma}_i = \left( \sum_{x \in \widetilde{V}_i} \omega_i(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  y  $\sigma_0 = \left( \sum_{i=1}^m \omega(x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  donde, dado  $i = 1, \dots, m$ , para cada  $x \in V_i$   $\omega_i(x) = \sigma_i^{-1} \omega(x)$ , para cada  $x \in \widetilde{V}_i$   $\tilde{\omega}_i(x) = \tilde{\sigma}_i^{-1} \omega(x)$  y  $\omega_0(x_i) = \sigma_0^{-1} \omega(x_i)$ . Es claro que  $\tilde{\omega}_i \in \Omega(\widetilde{V}_i)$  y  $\omega_0 \in \Omega(V_0)$ ; es decir, hemos restringido el peso para obtener pesos derivados de éste en cada factor de la red corona.

Para cada  $i = 1, \dots, m$  identificamos  $\mathcal{C}(\widetilde{V}_i)$  con el subespacio de  $\mathcal{C}(V)$  formado por las funciones que son nulas en  $V \setminus \widetilde{V}_i$  y  $\mathcal{C}(V_0)$  por el de las nulas en  $V \setminus V_0$ . Por otro lado, si  $u \in \mathcal{C}(V)$ , la restricción de  $u$  a  $\widetilde{V}_i$  o  $V_0$ , se denota también por  $u$ .

Denotamos por  $\mathcal{L}$  al Laplaciano combinatorio de  $\Gamma$  y para cada  $i = 1, \dots, m$  por  $\widetilde{\mathcal{L}}^i$  al laplaciano combinatorio de la red  $\widetilde{\Gamma}_i$  y por  $\mathcal{L}^0$  al laplaciano combinatorio de la red  $\Gamma_0$ .

LEMA 3.3.2. Para toda  $u \in \mathcal{C}(V)$ , se verifica:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u)(x_j) &= \mathcal{L}^0(u)(x_j) + a_j \sqrt{1 - \tilde{\sigma}_j^2} \tilde{\sigma}_j \left( u(x_j) \langle \tilde{\omega}_j, 1 \rangle - \langle \tilde{\omega}_j, u \rangle \right) \\ \mathcal{L}(u)(x) &= \widetilde{\mathcal{L}}^j(u)(x) + a_j \sqrt{1 - \tilde{\sigma}_j^2} \tilde{\sigma}_j \tilde{\omega}_j(x) \left( u(x) - u(x_j) \right), \text{ con } x \in \widetilde{V}_j \end{aligned}$$

para todo  $j = 1, \dots, m$ , donde  $a_j = \frac{\sigma_0^2 \omega_0^2(x_j)}{1 - \tilde{\sigma}_j^2} \tilde{a}_j$ .

**Demostración.** Por el Lema 3.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^j(u)(x_i) &= a_j \sqrt{1 - \tilde{\sigma}_j^2} \tilde{\sigma}_j \left( u(x_j) \langle \tilde{\omega}_j, \mathbf{1} \rangle - \langle \tilde{\omega}_j, u \rangle \right) \\ \mathcal{L}^j(u)(x) &= \tilde{\mathcal{L}}^j(u)(x) + a_j \sqrt{1 - \tilde{\sigma}_j^2} \tilde{\sigma}_j \tilde{\omega}_j(x) \left( u(x) - u(x_j) \right), \text{ con } x \in \tilde{V}_j.\end{aligned}$$

Aplicando ahora el Lema 3.2.1 se llega a la igualdad del enunciado.  $\blacksquare$

Como se ha visto en esta demostración, el cálculo de un determinado parámetro en una corona necesita el cálculo del mismo para la suma y para el cluster. Por ello, en adelante se omitirán las demostraciones que tan sólo consistan en este tipo de cálculos y se dejarán las comprobaciones al lector.

**LEMA 3.3.3.** *Consideremos el potencial  $q_\omega = -\omega^{-1} \mathcal{L}(\omega)$  definido en  $V$  y consideremos los potenciales  $q_{\tilde{\omega}_i} = -\tilde{\omega}_i^{-1} \tilde{\mathcal{L}}^i(\tilde{\omega}_i)$  definidos en  $\tilde{V}_i$ , para  $i = 1, \dots, m$ , y  $q_{\omega_0} = -\omega_0^{-1} \mathcal{L}^0(\omega_0)$  definido en  $V_0$ . Entonces,*

$$\begin{aligned}q_\omega(x_j) &= q_{\omega_0}(x_j) + a_j \tilde{\sigma}_j \left( \tilde{\sigma}_j - \sqrt{1 - \tilde{\sigma}_j^2} \langle \tilde{\omega}_j, \mathbf{1} \rangle \right), \\ q_\omega(x) &= q_{\tilde{\omega}_j}(x) + a_j \sqrt{1 - \tilde{\sigma}_j^2} \left( \sqrt{1 - \tilde{\sigma}_j^2} - \tilde{\sigma}_j \tilde{\omega}_j(x) \right), \text{ con } x \in \tilde{V}_j\end{aligned}$$

para todo  $j = 1, \dots, m$ .

En adelante, para las redes corona, trabajaremos con el operador de Schrödinger dado por la transformación de Doob  $\mathcal{L}_{q_\omega}$ . Denotamos por  $\mathcal{L}_{q_\omega}$  al operador de Schrödinger de  $\Gamma$ , para cada  $j = 1, \dots, m$  denotamos por  $\mathcal{L}_{\tilde{p}_j}^j$  al operador de Schrödinger de  $\tilde{\Gamma}_j$  y por  $\mathcal{L}_{q_{\omega_0}}^0$  al operador de Schrödinger de  $\Gamma_0$ .

**PROPOSICIÓN 3.3.4.** *Para toda  $u \in \mathcal{C}(V)$ , se verifica:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{q_\omega}(u)(x_j) &= \mathcal{L}_{q_{\omega_0}}^0 u(x_j) + a_j \tilde{\sigma}_j \left( \tilde{\sigma}_j u(x_j) - \sqrt{1 - \tilde{\sigma}_j^2} \langle \tilde{\omega}_j, u \rangle \right), \\ \mathcal{L}_{q_\omega}(u)(x) &= \mathcal{L}_{\tilde{p}_j}^j u(x) - a_j \tilde{\sigma}_j \sqrt{1 - \tilde{\sigma}_j^2} u(x_j) \tilde{\omega}_j(x), \text{ con } x \in \tilde{V}_j\end{aligned}$$

para todo  $j = 1, \dots, m$ , donde  $\tilde{p}_j = q_{\tilde{\omega}_j} + \tilde{\gamma}_j$  y  $\tilde{\gamma}_j = a_j(1 - \tilde{\sigma}_j^2)$ .

**3.3.1. Función de Green, resistencias efectivas e Índice de Kirchhoff.** El principal objetivo de esta sección es obtener la función de Green de la red corona en términos de las funciones de Green de sus factores. Como consecuencia, obtendremos también los Índices de Kirchhoff y las resistencias efectivas respecto del peso dado en términos de los parámetros análogos de los factores, simplemente aplicando las identidades de la Proposición 2.5.1. A lo largo de esta sección,  $\mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0$ ,  $\mathcal{G}_{\tilde{p}_i}^i$  y  $G_{q_{\omega_0}}^0$ ,  $G_{\tilde{p}_i}^i$  denotarán el operador y la función de Green asociados a los operadores de Schrödinger  $\mathcal{L}_{q_{\omega_0}}^0$  en  $\Gamma_0$  y  $\mathcal{L}_{\tilde{p}_i}^i$  en  $\tilde{\Gamma}_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ , respectivamente.

PROPOSICIÓN 3.3.5. Si  $f \in \mathcal{C}(V)$  es tal que  $\langle \omega, f \rangle = 0$ , entonces la única solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = f$  tal que  $\langle \omega, u \rangle = 0$  es:

$$\begin{aligned} u(x_j) &= \mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0(h)(x_j) - C\sigma_0\omega_0(x_j), \\ u(x) &= \mathcal{G}_{\tilde{p}_j}^j(f)(x) - \frac{\tilde{\sigma}_j(1-\tilde{\sigma}_j)\tilde{\omega}_j(x)}{a_j(1-\tilde{\sigma}_j^2)}\langle f, \tilde{\omega}_j \rangle - h(x_j)G_{\tilde{p}_j}^j + \frac{\tilde{\sigma}_j\tilde{\omega}_j(x)}{\sqrt{1-\tilde{\sigma}_j^2}}\mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0(h)(x_j) \\ &\quad - C\frac{\sigma_0\omega_0(x_j)\tilde{\sigma}_j\tilde{\omega}_j(x)}{\sqrt{1-\tilde{\sigma}_j^2}}, \text{ con } x \in \tilde{V}_j, \end{aligned}$$

donde para cada  $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} h(x_j) &= f(x_j) + \frac{\tilde{\sigma}_j\langle f, \tilde{\omega}_j \rangle}{\sqrt{1-\tilde{\sigma}_j^2}}, \\ C &= \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_0\omega_0(x_i)}{1-\tilde{\sigma}_i^2} \left( \mathcal{G}_{q_{\omega_0}}^0(h)(x_i) + \frac{\tilde{\sigma}_i\langle f, \tilde{\omega}_i \rangle}{a_i\sqrt{1-\tilde{\sigma}_i^2}} \right). \end{aligned}$$

TEOREMA 3.3.6. La función de Green de la red corona  $\Gamma_0 \circ (\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_m)$  con peso  $\omega$  está determinada por las identidades

$$\begin{aligned} G_{q_\omega}(x, y) &= G_{\tilde{p}_j}^j(x, y) + \left( \tilde{\sigma}_j^2 Q_{jj} - \frac{2\tilde{\sigma}_j^2\sigma_0^2\omega_0^2(x_j)}{a_j(1-\tilde{\sigma}_j^2)^2} \right) \tilde{\omega}_j(x)\tilde{\omega}_j(y) \quad x, y \in \tilde{V}_j \\ G_{q_\omega}(x_j, y) &= \tilde{\sigma}_j Q_{jj} \sqrt{1-\tilde{\sigma}_j^2} \tilde{\omega}_j(y) - \frac{\tilde{\sigma}_j\sigma_0^2\omega_0^2(x_j)}{a_j(1-\tilde{\sigma}_j^2)^{\frac{3}{2}}} \tilde{\omega}_j(y) \quad y \in \tilde{V}_j, x_j \in V_0 \\ G_{q_\omega}(x, y) &= T_{kj} \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_k \tilde{\omega}_k(x) \tilde{\omega}_j(y) \\ &\quad - \frac{\tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_k \sigma_0^2 \omega_0^2(x_k) \omega_0^2(x_j)}{\sqrt{1-\tilde{\sigma}_j^2} \sqrt{1-\tilde{\sigma}_k^2}} \tilde{\omega}_k(x) \tilde{\omega}_j(y) S_{kj} \quad y \in \tilde{V}_j, x \in \tilde{V}_k, j \neq k \\ G_{q_\omega}(x_k, y) &= T_{kj} \tilde{\sigma}_j \sqrt{1-\tilde{\sigma}_k^2} \tilde{\omega}_j(y) - \frac{\tilde{\sigma}_j \sigma_0^2 \omega_0^2(x_j) \omega_0^2(x_k)}{a_j(1-\tilde{\sigma}_j^2)^{\frac{3}{2}}} \tilde{\omega}_j(y) \quad y \in \tilde{V}_j, x_k \in V_0, j \neq k \\ G_{q_\omega}(x_j, x_j) &= G_{q_{\omega_0}}^0(x_j, x_j) + (1-\tilde{\sigma}_j^2) N_{jj} \quad x_j \in V_0 \\ G_{q_\omega}(x_j, x_k) &= T_{kj} \sqrt{1-\tilde{\sigma}_j^2} \sqrt{1-\tilde{\sigma}_k^2} \quad x_j, x_k \in V_0, j \neq k. \end{aligned}$$

donde para cada  $j, k = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} S_{kj} &= \left( \frac{1}{a_k \sqrt{1-\tilde{\sigma}_k^2}} + \frac{\tilde{\sigma}_k^2}{a_j \sqrt{1-\tilde{\sigma}_k^2}} + \frac{1}{a_k \sqrt{1-\tilde{\sigma}_j^2}} + \frac{\tilde{\sigma}_j^2}{a_j \sqrt{1-\tilde{\sigma}_j^2}} \right), \\ N_{kj} &= \frac{\sigma_0^4 \omega_0(x_j) \omega_0(x_k)}{\sqrt{1-\tilde{\sigma}_k^2} \sqrt{1-\tilde{\sigma}_j^2}} \left( \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{\sigma}_i^2 \omega_0^2(x_i)}{a_i(1-\tilde{\sigma}_i^2)} + \sum_{i,l=1}^m \frac{\omega_0(x_l) \omega_0(x_i)}{(1-\tilde{\sigma}_i^2)(1-\tilde{\sigma}_l^2)} G_{q_{\omega_0}}^0(x_i, x_l) \right) \\ &\quad - \frac{\sigma_0^2 \omega_0(x_k)}{\sqrt{1-\tilde{\sigma}_k^2} \sqrt{1-\tilde{\sigma}_j^2}} \sum_{i=1}^m \frac{\omega_0(x_i)}{1-\tilde{\sigma}_i^2} \left( G_{q_{\omega_0}}^0(x_i, x_j) + G_{q_{\omega_0}}^0(x_i, x_k) \right), \end{aligned}$$

$$T_{kj} = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\sigma}_k^2}\sqrt{1-\tilde{\sigma}_j^2}} G_{q_{\omega_0}}^0(x_k, x_j) + N_{kj}$$

**Demostración.** De la identidad (1) se concluye que si  $y \in V$  y consideramos la función  $u = G_{q_{\omega}}(\cdot, y)$ , entonces  $u$  es la única solución de la ecuación de Poisson  $\mathcal{L}_{q_{\omega}}(u) = \varepsilon_y - \omega(y)\omega$  tal que  $\langle \omega, u \rangle = 0$ . Por tanto la expresión de  $u$  se deduce de aplicar la expresión de tal solución dada en la proposición anterior cuando  $f = \varepsilon_y - \omega(y)\omega$ . Se deja al lector la substitución de  $f = \varepsilon_y - \omega(y)\omega$  en las ecuaciones anteriores para obtener el resultado. ■

**COROLARIO 3.3.7.** *El índice de Kirchhoff de la corona  $\Gamma = \Gamma_0 \circ (\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_m)$  respecto del peso  $\omega$  viene dado en función del índice de Kirchhoff respecto del peso  $\tilde{\omega}_i$  de cada subred  $\tilde{\Gamma}_i$  y del peso  $\omega_0$  de la re base  $\Gamma_0$  según la siguiente fórmula:*

$$\begin{aligned} k(\omega) &= \sum_{i=1}^m \tilde{k}_i(\tilde{\gamma}_i, \tilde{\omega}_i) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i(1-\tilde{\sigma}_i^2)} - \sigma_0^2 \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{\sigma}_i^2 \omega_0^2(x_i)}{a_i(1-\tilde{\sigma}_i^2)^2} \\ &\quad + \frac{\sigma_0^2}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\omega_0^2(x_j) \omega_0^2(x_i)}{(1-\tilde{\sigma}_i^2)(1-\tilde{\sigma}_j^2)} R_{\omega_0}(x_i, x_j), \end{aligned}$$

donde  $\tilde{k}_i(\tilde{\gamma}_i, \tilde{\omega}_i)$  es el índice de Kirchhoff de  $\tilde{\Gamma}_i$  respecto de  $\tilde{\gamma}_i$  y  $\tilde{\omega}_i$ .

Además, las resistencias efectivas para la red corona respecto del peso  $\omega$  vienen dadas para todo  $x, y \in V$  por:

$$\begin{aligned} R_{\omega}(x, y) &= \frac{1-\tilde{\sigma}_j^2}{\sigma_0^2 \tilde{\sigma}_j^2 \omega_0^2(x_j)} R_{\tilde{\gamma}_j, \tilde{\omega}_j}(x, y) && x, y \in \tilde{V}_j \\ R_{\omega}(x_j, x) &= \frac{1-\tilde{\sigma}_j^2}{\sigma_0^2 \tilde{\sigma}_j^2 \omega_0^2(x_j)} r_{\tilde{\gamma}_j, \tilde{\omega}_j}(x) + \frac{1}{a_j \sigma_0^2 \tilde{\sigma}_j^2 \omega_0^2(x_j)} && x \in \tilde{V}_j, x_j \in V_0 \\ R_{\omega}(x, y) &= \frac{1-\tilde{\sigma}_j^2}{\sigma_0^2 \tilde{\sigma}_j^2 \omega_0^2(x_j)} r_{\tilde{\gamma}_j, \tilde{\omega}_j}(x) + \frac{1-\tilde{\sigma}_k^2}{\sigma_0^2 \tilde{\sigma}_k^2 \omega_0^2(x_k)} r_{\tilde{\gamma}_k, \tilde{\omega}_k}(y) \\ &\quad + \frac{1}{\sigma_0^2} R_{\omega_0}(x_k, x_j) + M_{kj} && x \in \tilde{V}_j, y \in \tilde{V}_k, j \neq k \\ R_{\omega}(x_k, x) &= \frac{1-\tilde{\sigma}_j^2}{\sigma_0^2 \tilde{\sigma}_j^2 \omega_0^2(x_j)} r_{\tilde{\gamma}_j, \tilde{\omega}_j}(x) + \frac{1}{\sigma_0^2} R_{\omega_0}(x_k, x_j) + \frac{1-\tilde{\sigma}_j^4}{a_j \sigma_0^2 \tilde{\sigma}_j^2 \omega_0^2(x_j)} \\ &\quad + 2 \frac{\tilde{\sigma}_j^2}{a_j(1-\tilde{\sigma}_j^2)} + 2 \frac{\tilde{\sigma}_k^2}{a_k(1-\tilde{\sigma}_k^2)} - \frac{\tilde{\sigma}_k^2}{a_k \sigma_0^2 \omega_0^2(x_k)} + 2Z_{kj}, && x \in \tilde{V}_j, x_k \in V_0, j \neq k \\ R_{\omega}(x_j, x_j) &= 0 && x_j \in V_0 \\ R_{\omega}(x_j, x_k) &= \frac{1}{\sigma_0^2} R_{\omega_0}(x_k, x_j) - \frac{\tilde{\sigma}_j^2}{a_j \sigma_0^2 \omega_0^2(x_j)} \\ &\quad + 2 \frac{\tilde{\sigma}_j^2}{a_j(1-\tilde{\sigma}_j^2)} + 2 \frac{\tilde{\sigma}_k^2}{a_k(1-\tilde{\sigma}_k^2)} - \frac{\tilde{\sigma}_k^2}{a_k \sigma_0^2 \omega_0^2(x_k)} + 2Z_{kj}, && x_j, x_k \in V_0, j \neq k. \end{aligned}$$

donde para cada  $k, j = 1, \dots, m$

$$Z_{kj} = -\sigma_0^2 \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{\sigma}_i^2 \omega_0^2(x_i)}{a_i(1-\tilde{\sigma}_i^2)^2} - \sum_{i=1}^m \frac{\omega_0^2(x_i) r_{\omega_0}(x_i)}{1-\tilde{\sigma}_i^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\omega_0^2(x_i) (R_{\omega_0}(x_i, x_k) + R_{\omega_0}(x_i, x_j))}{1-\tilde{\sigma}_i^2}$$

$$+ \frac{\sigma_0^2}{2} \sum_{i,l=1}^m \frac{\omega_0^2(x_i) \omega_0^2(x_l) R_{\omega_0}(x_i, x_l)}{(1-\tilde{\sigma}_i^2)(1-\tilde{\sigma}_l^2)},$$

$$M_{kj} = \frac{1-\tilde{\sigma}_j^4}{a_j \sigma_0^2 \omega_0^2(x_j)} + \frac{1-\tilde{\sigma}_k^4}{a_k \sigma_0^2 \omega_0^2(x_k)} + 2 \frac{\tilde{\sigma}_j^2}{a_j(1-\tilde{\sigma}_j^2)} + 2 \frac{\tilde{\sigma}_k^2}{a_k(1-\tilde{\sigma}_k^2)} + 2Z_{kj}.$$

**3.3.2. Autovalores y autofunciones.** El cálculo general de los autovalores del operador de Schrödinger de una red corona generalizada no es un cálculo fácil. Tal como para el caso clásico de la corona de dos grafos existen resultados que los determinan, ver [2], el mero hecho de que las redes satélite no sean todas la misma eleva en gran medida en nivel de dificultad, incluso en el caso clásico en que el peso es constante y las conductancias de la red son la función unidad.

En el presente trabajo no hemos encontrado la mayoría de autovalores del operador de Schrödinger de la red corona, pero sí aquellos más simples relacionados con los autovalores de las redes satélite.

**PROPOSICIÓN 3.3.8.** Sean  $\{\delta_i\}_{i=1}^{n_j}$  los autovalores de  $\mathcal{L}_{\tilde{p}_j}^j$ , con  $n_j = |\tilde{V}_j|$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Sea  $\{v_1 = \tilde{\omega}_1, v_2, \dots, v_{n_j}\}$  una base ortonormal de las respectivas autofunciones asociadas. Entonces,  $\mathcal{L}_{q_\omega}(v_i) = \delta_i v_i$  para todo  $i = 2, \dots, m$ , es decir,  $\delta_i$  es autovalor de  $\mathcal{L}_{q_\omega}$  con autofunción  $v_i$  siempre que  $v_i \neq \tilde{\omega}_j$ .

**Demostración.** Consideremos  $j \in \{1, \dots, m\}$  y supongamos que  $i = 2, \dots, n_j$ . Entonces, se tiene que  $\langle \tilde{\omega}_j, v_i \rangle = 0$  por ser de una base ortonormal de autofunciones. Además,  $v_i(x_j) = 0$  para todo par  $i, j$ . Aplicando esto junto con las igualdades de 3.3.4 y distinguiendo casos:

- Si  $x \in \tilde{V}_j$ ,  $\mathcal{L}_{q_\omega}(v_i)(x) = \mathcal{L}_{\tilde{p}_j}^j + 0 = \delta_i v_i(x)$ .
- Si  $x = x_j \in V_0$ ,  $\mathcal{L}_{q_\omega}(v_i)(x_j) = 0 = \delta_i v_i(x_j)$ .
- Si  $x \in \tilde{V}_k$ , con  $k \neq j$ ,  $\mathcal{L}_{q_\omega}(v_i)(x) = 0 = \delta_i v_i(x)$ .
- Si  $x = x_k \in V_0$ , con  $k \neq j$ ,  $\mathcal{L}_{q_\omega}(v_i)(x_j) = 0 = \delta_i v_i(x_k)$ . ■

Este resultado determina  $\sum_{i=1}^m n_i - m$  de los  $m + \sum_{i=1}^m n_i$  autovalores de la corona generalizada. Por tanto, desconocemos  $2m$  autovalores. Por otro lado, ya se ha visto en los preliminares de este trabajo que necesariamente  $\lambda = 0$  es autovalor con autofunción  $\omega$ . Por tanto, nos quedan  $2m - 1$  autovalores por determinar, pues ninguno de los autovalores de la proposición anterior es el 0.

Como objetivos posteriores a este trabajo se intentará usar el *Interlacing Theorem* de Cauchy para dar luz sobre el cálculo de cotas para los autovalores de determinadas subredes y a partir de aquí intentar deducir el comportamiento de los mismos. Dado que toda corona es fruto de la acción de un cluster, debemos tener en cuenta que se ha hecho en algún momento una elección arbitraria de un vértice distinguido y por tanto, si las redes satélite no son simétricas, es razonable entender que los autovalores tendrán un comportamiento cuanto menos caótico



respecto de esta elección. Sin embargo, si restringimos nuestro estudio a redes corona tales que sus redes satélite son todas simétricas (redes circulantes o distancia-regulares), se prevee que el comportamiento podría ser predecible con la ayuda del *Interlacing Theorem* de Cauchy.

**3.3.3. Aplicaciones: ejemplos concretos.** Para dar una aplicación práctica del cálculo de estos parámetros de una red corona, supondremos ahora que tenemos un grafo  $\Gamma_0 = (V_0, E_0)$  con  $m = |V_0|$  y  $m$  grafos más  $\tilde{\Gamma}_i = (\tilde{V}_i, \tilde{E}_i)$ , no necesariamente iguales, con  $n_i = |\tilde{V}_i|$  para toda  $i = 1, \dots, m$ . El hecho de estar considerando grafos implica que las conductancias son todas 1 y el parámetro  $\lambda$  es nulo.

Observemos primero que  $|V| = m + n_1 + \dots + n_m$ . Como  $\omega \in \Omega(V)$  y  $\omega \equiv w$  es constante, se tiene que  $\omega = w = \frac{1}{\sqrt{m + n_1 + \dots + n_m}}$ . Además, como consecuencia de todas las suposiciones se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= w\sqrt{m}, & \tilde{\sigma}_i &= \frac{\sqrt{n_i}}{\sqrt{n_i + 1}}, \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{m}}, & \tilde{\omega}_i &= \frac{1}{\sqrt{n_i}}, \\ a_i &= n_i + 1, & \lambda_i &= 0, & \tilde{\gamma}_i &= 1, & \alpha_i &= \frac{n_i}{n_i + 1}\end{aligned}$$

para toda  $i = 1, \dots, m$ .

Con las notaciones anteriores el Índice de Kirchhoff de la red corona es:

$$\begin{aligned}k(\omega) &= \sum_{i=1}^m \tilde{k}_i(1, \tilde{\omega}_i) + m - w^2 \sum_{i=1}^m n_i \\ &\quad + \frac{w^2}{2m} \sum_{i,j=1}^m (n_i + 1)(n_j + 1) R_{\omega_0}(x_i, x_j).\end{aligned}$$

Ahora añadimos condiciones sobre el ejemplo anterior: supongamos ahora que todos los grafos satélite  $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_m$  son el mismo grafo  $\tilde{\Gamma}_1$ . Entonces, si definimos  $n = n_1 = \dots = n_m$ , el peso es  $\omega = w = \frac{1}{\sqrt{m(n+1)}}$ . Cuando modificamos el peso para restringirlo a cada grafo que compone

esta corona, se tiene que para toda  $i = 1, \dots, m$ ,  $\tilde{\sigma}_i = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$  y  $\tilde{\omega}_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

El índice de Kirchhoff viene dado por la siguiente igualdad:

$$(7) \quad k(\omega) = m\tilde{k}_1(1, \tilde{\omega}_1) + (n+1)k_0(\omega_0) + m - \frac{n}{n+1}$$

En [20] los autores han calculado el Índice clásico de Kirchhoff para este caso particular de corona, también mediante el uso de la suma y el cluster. Queremos comparar los resultados que acabamos de obtener con los de este artículo para mostrar con ello que las generalizaciones de este trabajo son correctas y adecuadas. Para ello, recordemos que si  $\omega = w$  es constante y  $s = |V(G)|$ , entonces

$$R_w = sR \quad \text{y} \quad k(w) = \frac{k}{s}.$$

Aplicando estas correspondencias al índice de Kirchhoff (6) calculado en el ejemplo que se estaba tratando, si  $k_0$  es el índice de Kirchhoff clásico del grafo  $\Gamma_0$  y  $\tilde{k}_i$  el de  $\tilde{\Gamma}_i$ , se tiene que

$$k = m^2(n+1)\tilde{k}_1(1, \tilde{\omega}_1) + (n+1)^2k_0 + m^2n + m^2 - nm,$$

que es exactamente la fórmula que se da en [20].



## Índice alfabético

- adjunto, 12
- autofunción, 6
- autovalor
  - de una matriz, 6
  - de un operador, 6
- autovector, 6
  
- barbell, 27
  
- camino, 3
  - corto, 3
- cluster, 38
  - Green, 41
  - Kirchhoff, 41
  - laplaciano, 39
  - potenciales, 39
  - resistencia
    - efectiva, 41
    - total, 41
  - Schrödinger, 39
- conductancia, 4
- conexo, 3
  - componente, 3
- corona, 44
  - autofunciones, 49
  - autovalores, 49
  - Green, 47
  - Kirchhoff, 48
  - laplaciano, 45
  - potenciales, 46
  - resistencia
    - efectiva, 48
    - total, 48
  - Schrödinger, 46
  
- dipolo, 17
  - $\omega$ -dipolo, 18
- Dirac
  - delta, 4
- distancia
  - resistiva, 17
  - respecto un peso y un valor, 19
- Doob
  - transformación, 8
  
- energía interna, 9
- espectral
  - Teorema, 6
- Euler
  - ecuación, 16
- Euler-Lagrange
  - ecuación, 16
  - Teorema, 16
  
- Fredholm
  - Alternativa, 11
  
- grafo, 3
  - orden, 3
  - tamaño, 3
- Green
  - función, 13
  - inversa generalizada, 13
  - núcleo, 13
  - operador, 13
  
- Kirchhoff
  - Índice, 21
  - respecto un peso y un valor, 21
  
- ladder, 26
- laplaciano
  - combinatorio, 5
  - matriz, 4
  - normalizado, 8
  - operador, 5
- lazo, 3
  
- matriz de adyacencias, 4
  
- núcleo, 12
  
- peso, 4
- Poisson
  - ecuación, 12
  - problema débil, 15
- potencial, 7
  - asociado a un peso, 7
- proyección ortogonal, 11
  
- rama, 3

- extremo, 3
- incidente, 3
- múltiple, 3
- red, 4
- resistencia
  - efectiva, 17
  - respecto un peso y un valor, 19
  - total, 18
  - respecto un peso y un valor, 20
- Schrödinger, 7
  - forma bilineal asociada, 9
- suma, 29
  - autofunciones, 34
  - autovalores, 34
  - Green, 33
  - Kirchhoff, 34
  - laplaciano, 31
  - potenciales, 31
  - resistencia
    - efectiva, 34
    - total, 34
  - Schrödinger, 31
- vértice, 3
  - adyacente, 3
  - grado, 4

## Bibliografía

- [1] R.B. Bapat y S. Gupta, Resistance distance in wheels and fans, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 41(1): 1–13, 2010.
- [2] S. Barik, S. Pati y B.K. Sarma. The Spectrum of the Corona of Two Graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 21(1): 47–56, 2007.
- [3] E. Bendito, A. Carmona y A. M. Encinas, Potential theory for Schrödinger operators on finite networks, *Rev. Mat. Iberoamericana* 21: 771–818, 2005.
- [4] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas y J.M. Gesto. A Formula for the Kirchhoff Index. *Int. J. Quantum Chem.*, 108: 1200–1206, 2008.
- [5] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas y J.M. Gesto. El Índice de Kirchhoff y la Capacidad de Wiener de una Red. *Libro de actas de las VI JMDA*, (J. Conde, J. Gimbert, J. M. Miret, R. Moreno, M. Valls, ed.), Lleida: 155–162, 2008.
- [6] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas y J.M. Gesto. Characterization of symmetric  $M$ -matrices as resistive inverses. *Linear Algebra Appl.*, 430: 1336–1349, 2009.
- [7] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas y M. Mitjana. Cálculo del Índice de Kirchhoff en redes Ladder-Wagon Wheel. *Comunicación personal*.
- [8] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas, J.M. Gesto y M. Mitjana. Kirchhoff Indexes of a network. *Linear Algebra Appl.*, 432: 2278–2292, 2010.
- [9] E. Bendito, A. Carmona y A.M. Encinas. The Kirchhoff Indexes of Join Networks.  *sometido a revisión*.
- [10] A. Ghosh, S. Boyd y A. Saberi, Minimizing Effective Resistance of a graph, *SIAM Rev.*, 50: 37–66, 2008.
- [11] T. Biyikoğlu, J. Leydold y P.F. Stadler, *Laplacian Eigenvectors of Graphs*, LNM 1915, Springer, Berlin, 2007.
- [12] A. Berman y R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the elemental sciences*, Classics in Applied Mathematics, 9, SIAM, 1994.
- [13] H. Chen, Random walks and the effective resistance sum rules, *Discrete Appl. Math.*, 158: 1691–1700, 2010.
- [14] F. Chung y R. P. Langlands, A combinatorial Laplacian with vertex weights, *J. Combin. Theory A*, 75: 316–327, 1996.
- [15] H. Chen y F. Zhang, Resistance distance and the normalized laplacian spectrum, *Discrete Appl. Math.*, 155: 654–661, 2007.
- [16] S. Hwang, *Cauchy's interlace theorem for eigenvalues of Hermitian matrices*, Amer. Math. Monthly 111: 157–159, 2004.
- [17] D.J. Klein y M. Randić. Resistance distance. *J. Math. Chem.*, 12: 81–95, 1993.
- [18] G. P. H. Styan y G.E. Subak-Sharpe. Inequalities and equalities associated with the Campbell-Youla generalized inverse of the indefinite admittance matrix of resistive networks. *Linear Algebra Appl.*, 250: 349–370, 1997.
- [19] Y. Yang y H. Zhang. Kirchhoff index of linear hexagonal chains. *Int. J. Quantum Chem.*, 108: 503–512, 2008.
- [20] C. Li, Y. Yang y H. Zhang. Kirchhoff index of composite graphs. *Discrete Appl. Math.*, 157: 2918–2927, 2009.