

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA



ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE  
TELECOMUNICACIONS DE BARCELONA

# Funció no lineal òptima per una fotodetecció Gaussiana

**Autor**

Alejandro Jiménez Conesa

**Directors**

Josep J. Prat Gomà

Mireia Esther Omella Càncer



Grup de Comunicacions Òptiques



Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions



<b>Títol:</b>	Funció no lineal òptima per una fotodetecció Gaussiana
<b>Autor:</b>	Alejandro Jiménez Conesa
<b>Directors del projecte:</b>	Josep J. Prat Gomà Mireia Esther Omella Càncer
<b>Data:</b>	30 de Setembre de 2008

## Resum

En els sistemes de comunicacions òptiques amb amplificació òptica, l'estadística de les mostres sorolloses rebudes no és Gaussiana estacionària a l'entrada de l'equalitzador. Aquest fet és degut a l'efecte de la llei quadràtica del fotodetector sobre el senyal, que fa que es produeixin grans canvis en els equalitzadors en comparació amb els canals AWGN. En els equalitzadors que depenen de l'estadística d'entrada, com són els receptors MLSE, l'efecte de la llei quadràtica del fotodetector produeix un augment dràstic en la complexitat en funció de la distància de transmissió i/o velocitat.

La llei quadràtica del fotodetector, a més a més, causa que els efectes lineals que es produeixen al canal, com són part de la dispersió cromàtica (CD) i la dispersió per mode de polarització (PMD), es tornin no lineals en el domini elèctric i causin distorsions harmòniques. Aquestes distorsions harmòniques limiten la capacitat i abast dels sistemes digitals i analògics, i fan que les tècniques d'equalització tradicionals (FFE, DFE, MLSE amb mètrica simplificada) en aquests canals no lineals tinguin un pitjor rendiment que en un canal lineal. Aquestes distorsions harmòniques provoquen un augment de l'ISI (interferència intersimbòlica) en sistemes digitals i fan que la solució d'equalització electrònica (EE) sigui sub-òptima. En sistemes analògics com Radio over Fiber (RoF) l'efecte de la llei quadràtica provoca un augment de la distorsió d'intermodulació degut al mesclat dels harmònics.

Aplicar l'arrel quadrada sobre el senyal pot ser una solució eficient per compensar part del efectes no lineals que provoca el fotodetector. En altres treballs s'ha comprovat que utilitzant el dispositiu arrel quadrada s'aconsegueix transmetre a major velocitat i/o distància, ja que linealitzava el sistema aproximant el canal per un canal lineal AWGN (amb varianza pràcticament estacionària) i redueix l'ISI notablement. Aquest fet provoca que es pugui utilitzar la mètrica simplificada en els receptors MLSE i que l'equalització amb filtres FIR sigui pràcticament òptima (el diagrama d'ull en recepció és més simètric). La principal problemàtica del dispositiu arrel quadrada és que l'estadística de sortida és de Rice. Això fa que en sistemes IM/DD amb alfabet binari i relació d'extinció infinita, el símbol "0" no tingui una estadística Gaussiana.

En aquest document es desenvolupen un conjunt de tècniques matemàtiques per trobar la funció òptima que permeti linealitzar totalment el sistema i permeti aproximar el canal per un canal AWGN, és a dir amb soroll blanc i Gaussià estacionari. Es plantegen diferents solucions per trobar la funció òptima. En la major part del document s'analitza el cas en el que el soroll ASE és el predominat, i per tant es negligeix el soroll tèrmic i el soroll shot, tot i així també es dedica una part a l'anàlisi de la combinació de soroll ASE i soroll tèrmic. Finalment, a destacar que aquest tipus d'equalització no lineal és una solució de baix cost en comparació amb els compensadors de dispersió òptics.

<b>Title:</b>	Optimum non-linear function for a Gaussian photo-reception
<b>Author:</b>	Alejandro Jiménez Conesa
<b>Project Managers:</b>	Josep J. Prat Gomà Mireia Esther Omella Càncer
<b>Date:</b>	September 30 <sup>th</sup> , 2008

## Abstract

In the communications systems with optical amplification, the statistic of the received noisy samples is not stationary Gaussian at the input of the equalizer. It is due by the effect of the intrinsic non-linear square-law of the photodetector over the signal, which produces several changes in equalizers in comparison with AWGN channel, especially those dependents on input statistics, like MLSE receivers, where the complexity increases drastically versus the transmission distance and/or bit-rate.

Furthermore, the square-law of the photodetector causes that the linear effects generated at the channel, such as chromatic dispersion (CD) and polarization mode dispersion (PMD) become non-linear in electrical domain and for that reason produce harmonic distortions. These harmonic distortions limit the capacity and reach of the digital and analogical systems, therefore in the non-linear channels the traditional techniques of equalization (FFE, DFE, MLSE with simplified branch metric) perform much worse than in a linear channel. This fact causes an ISI increase in digital systems and also electronic equalization solution becomes sub-optimum. In analogical systems such as Radio over Fiber (RoF) the effect of square-law causes an intermodulation distortion increase due to the mixed of harmonics.

An efficient solution to make up for non-linear effects which have been caused by the photodetector could be to apply the square root function over the signal. In other works, the square root device has been proved and higher bit rate and/or distance was shown, since; the system is linearized, the ISI is reduced significantly and the channel is approximated by an AWGN channel. For this reason we can use the simplified branch metric in MLSE receivers and the equalization with FIR filters practically can be optimum. The output statistic of square root device is Rice type. This is the main problem of this device, because in IM/DD systems with binary alphabet and infinite extinction ratio, the space symbol "0" has not got Gaussian statistic.

To sum up, a set of mathematical techniques to find the optimum function which linearizes totally the system and approaches the channel for an AWGN channel have been developed in this document. Different solutions have been explained to find the optimum function. In almost all the document we have analyzed the case with only ASE noise, neglecting the thermal and shot noise. However, we have also analyzed the case of combination of Gaussian and ASE noise. Finally, it is remarkable that this sort of non-linear equalization is cheaper than optical dispersion compensation.

**“El geni és un u per cent d'inspiració,  
i un noranta-nou per cent de  
transpiració”**

Thomas Alva Edison



## Agraïments

*Tot aquest treball no hagués estat possible sense l'ajuda d'algunes persones que s'han involucrat en el projecte de forma desinteressada i que m'han ajudat en tot allò que estava al seu abast.*

*Especialment vull agrair i dedicar el projecte a l'Anna, per la seva paciència, sobretot per totes les hores que podríem haver estat junts i no ha pogut ser. També vull agrair la seva col·laboració en la revisió del text perquè em va resultar de gran utilitat.*

*Vull expressar el meu més profund agraïment als meus directors del projecte, en Josep Prat i la Mireia Omella, per tota l'ajuda i paciència prestada durant la realització del meu PFC. Agrair també la seva insistència i seguiment durant tots aquests mesos, i el seu esforç per oferir-me una ajuda econòmica mitjançant una beca. Finalment, vull premiar la generositat de la Mireia per la seva grandíssima ajuda en les traduccions de l'article.*

*També vull deixar constància del meu agraïment a tots els meus amics que m'han donat suport. En especial al meu amic i excompany de feina, Miki, per la seva ajuda inicial i recomanació per realitzar el projecte en el Grup de Comunicacions Òptiques (GCO).*

*A la resta de companys del GCO (interns i projectistes) que en algun moment donat m'han prestat la seva ajuda o simplement amb la seva presència m'han fet més agradable l'estada.*

*Per acabar, i no menys important, agrair l'esforç incondicional que ha dedicat la meua família per tal que pugui desenvolupar aquests estudis. Sense ells no seria qui sóc.*

**Alex Jiménez Conesa**

Barcelona, 30 de Setembre de 2008





# Índex

1	Introducció .....	13
1.1	Antecedents .....	13
1.2	Objectius.....	15
1.3	Organització del projecte .....	17
2	Model del sistema receptor .....	19
3	L'estimador de seqüència de màxima verosimilitud MLSE.....	23
3.1	Una introducció a les mètriques en comunicacions òptiques .....	23
4	Caracterització del soroll ASE.....	29
4.1	Expansió en sèrie Karhunen-Loève .....	30
4.1.1	Avaluació de la BER del sistema .....	34
4.2	Model de Marcuse. Expansió en sèrie de Fourier.....	37
4.2.1	Mitja i varianza pel bit "0" .....	43
4.2.2	Mitja i varianza pel bit "1" .....	44
5	Comunicacions amb amplificació òptica i aproximació Gaussiana.....	47
5.1	Soroll EDFA .....	47
5.2	Fluctuacions de corrent induïdes pel soroll ASE .....	49
5.3	Impacte del soroll ASE en la SNR i Figura de soroll .....	52
5.4	Sensibilitat del receptor i Factor Q.....	53
5.5	Relació entre el factor Q i la OSNR.....	55
6	Anàlisi de la llei quadràtica del fotodetector .....	57
6.1	Caracterització del senyal i soroll passa-banda. Modulació ASK .....	57
6.2	Representació passa-banda del senyal. Concepte envoltant i fase .....	61
6.3	Anàlisi de la llei quadràtica del fotodetector.....	63
7	Estadística No Gaussiana del senyal rebut.....	67
7.1	Estadística pel bit "0" .....	68
7.2	Estadística pel bit "1" .....	69
8	Anàlisi de la funció Arrel Quadrada.....	73
8.1	Linealització i Gaussianitat del sistema amb SQRT .....	73
8.2	Anàlisi de la distribució de Rice vers la Gaussiana.....	75
8.3	Tecnologies d'implementació de l'arrel quadrada.....	77
9	Relació entre la PDF d'entrada i la PDF de sortida.....	79
10	Conversió i generació de variables aleatòries.....	85

10.1	Mètode d'acceptació i refús.....	86
10.2	Mètode de composició.....	88
10.3	Mètode de convolució.....	88
10.4	Transformacions conegudes per una distribució Gaussiana.....	88
11	Mètode de la funció inversa .....	95
11.1	El principi de la inversió.....	95
12	Una primera aproximació de la funció òptima amb el mètode de la inversa .....	101
12.1	Tabulació i representació de la funció òptima .....	102
12.2	Funció òptima pel mètode de la inversió i sense cap aproximació.....	105
13	Mètode de la inversió per solució numèrica.....	107
13.1	Mètode de bisecció .....	107
13.2	Mètode de la secant i mètode de Newton-Raphson .....	109
13.3	Conclusions del mètodes numèrics.....	110
14	Funció òptima de Hasting-Dillard.....	113
14.1	Introducció .....	114
14.2	Aproximació recursiva de la funció Marcum Q.....	118
14.3	Aproximació de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions.....	120
14.3.1	Anàlisi de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions .....	126
14.3.2	Estudi dels moments de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions ....	133
14.3.3	Conclusions de la funció òptima de Hasting -Dillard amb zero iteracions .....	136
14.4	Aproximació de la funció òptima de Hasting-Dillard amb iteracions il·limitades .....	137
14.4.1	Moments de la funció òptima de Hasting-Dillard amb iteracions il·limitades.....	143
14.4.2	Anàlisi de les cues i computació de la BER .....	148
14.4.3	Estimació dels paràmetres del canal.....	156
14.4.4	Simulacions de la funció òptima de Hasting-Dillard amb VPI .....	159
14.4.5	Anàlisi receptor MLSE i funció òptima de Hasting-Dillard .....	171
14.5	Conclusions de la funció Hasting-Dillard .....	175
15	Aproximació de la funció òptima per interpolació de polinomis de Chebyshev .....	179
15.1	La funció error .....	179
15.2	Polinomis de Chebyshev.....	180
15.3	Càlcul de $\text{inverf}(x)$ per valors petits de $x$ .....	181
15.4	Formes asimptòtiques.....	183
15.5	Definició de la CDF inversa mitjançant interpolació de polinomis de Chebyshev .....	184
15.6	Funció òptima normalitzada per interpolació de polinomis de Chebyshev.....	187

15.7	Conclusions sobre l'aproximació de Chebyshev .....	193
16	Funció òptima pel mètode de la inversió i altres aproximacions de la CDF inversa Normal....	195
16.1	Primera aproximació .....	195
16.2	Segona aproximació .....	199
16.3	Conclusions sobre les aproximacions per calculadores de mà .....	203
17	Altres aproximacions polinòmiques.....	205
17.1	Aproximació de la funció òptima amb polinomis de radicals .....	205
17.2	Interpolació per trams i mínims quadrats.....	211
17.3	Teoria de l'aproximació.....	215
17.3.1	Aproximacions racionals de polinomis.....	216
18	Funció òptima considerant soroll ASE i soroll tèrmic .....	219
18.1	Càlcul de la PDF del senyal rebut .....	219
18.2	El mètode de la inversa i relació entre PDF's: Expressió genèrica de la PDF .....	222
18.3	Aproximació de la funció òptima en sistemes òptics IM/DD .....	223
18.4	Estimació dels paràmetres de canal.....	224
18.5	Conclusions sobre la funció òptima considerant soroll ASE i Gaussià .....	226
19	Conclusions .....	229
19.1	Futurs treballs i aplicacions alternatives .....	233
19.2	Valoració personal.....	233
Annexos	.....	235
Annex 1.	Tabulació de la funció òptima .....	235
Annex 2.	Comparació aprox. Dillard i funció Marcum Q.....	239
Annex 3.	Aproximació funció ERFINV. Taules de coeficients .....	241
Annex 4.	Codi MATLAB funció òptima Chebyshev-Dillard .....	249
Annex 5.	Tests d'Hipòtesis .....	253
Test de Kolmogorov-Smirnov (KS)	.....	253
Test de Lilliefors.....	.....	254
Test de Jarque-Bera (JB) .....	.....	255
Test de Shapiro-Wilks.....	.....	255
Annex 6.	Distribució de Rice.....	257
Annex 7.	Codi aproximació per trams .....	261
Annex 8.	Programa de test amb GUI desenvolupat en MATLAB .....	263
Referències i Bibliografia.....	.....	269
Índex de figures.....	.....	273

Índex de taules .....	279
Acrònims.....	281

# 1 Introducció

En aquest projecte fi de carrera es plantegen un conjunt d'anàlisis matemàtics per trobar la funció òptima no lineal de post-detecció amb la qual, en sistemes estàndards IM/DD amb predomini de soroll ASE (Amplified Spontaneous Emission), poder recuperar l'estadística Gaussiana que presenta el senyal en el domini òptic i que es modifica com a conseqüència de la llei quadràtica del fotodetector. Es tracta d'un tipus d'equalització no lineal que permet linealitzar el sistema i millorar el rendiment de l'equalitzador electrònic posterior, a més a més és un tipus de solució molt més econòmica que l'equalització mitjançant compensadors de dispersió òptics.

## 1.1 Antecedents

Les comunicacions òptiques de llarga distància han evolucionat molt en els últims temps, sobretot en la última dècada, principalment per la introducció de tecnologies de modulació de portadora com DWDM i l'amplificador òptic de fibra dopada EDFA. El futur més immediat passa per augmentar el màxim possible la capacitat de la fibra, i així aconseguir majors velocitats de transmissió i més usuaris simultanis. Una manera d'augmentar la velocitat de transmissió en sistemes digitals és utilitzar receptors capaços de minimitzar la BER mitjançant codificació de canal amb codis correctors d'errors (per exemple FEC) i tècniques complexes d'equalització de canal. L'objectiu principal de les tècniques d'equalització serà minimitzar l'efecte de la interferència intersimbòlica (ISI), originada pels efectes lineals i no-lineals que introdueix la fibra.

No només és important augmentar la velocitat de transmissió, sinó també augmentar la distància entre l'emissor i el receptor. En aquest cas, per causa de l'atenuació que introdueix la fibra òptica, es tindran que utilitzar amplificadors òptics de línia o preamplificadors per mantenir una mínima potència del senyal en el receptor i garantir una BER objectiu. Per augmentar la distància entre l'emissor i el receptor, ens interessen receptors capaços de minimitzar la sensibilitat de fotons/bit amb dispositius de baix soroll (amplificadors òptics amb baixa figura de soroll) i molt selectius en banda (minimitzar la relació entre els amplitud

de banda dels filtres òptic i elèctric). S'ha de tenir en compte que en una cadena d'amplificadors òptics la OSNR final disminuirà en cada tram d'amplificació. Aquesta cadena d'amplificadors òptics afegeix soroll ASE sobre el senyal, i serà la principal font de soroll que condicionarà la SNR elèctrica en recepció. Noteu que el soroll ASE es modela per un canal AWGN.

En general, disposar de major velocitat de transmissió i/o major distància entre l'emissor i el receptor implica més degradacions en el senyal. Aquestes degradacions es transformen en penalitzacions per interferència intersimbòlica (ISI). Varis efectes com la dispersió cromàtica (CD) o la dispersió per polarització (PMD) provoquen ISI, i com alguns d'ells són efectes lineals, l'equalització electrònica (EE) podria ser una bona elecció de baix cost. Desafortunadament, un sistema de comunicacions òptic és un sistema no-lineal i amb soroll depenent del senyal, degut a la llei quadràtica del fotodetector, i com a conseqüència l'equalització electrònica és una solució sub-òptima.

Encara que s'ha avançat molt en els últims anys dins del camp de les comunicacions amb amplificació òptica, el fotodetector és un element diferenciador entre les comunicacions per fibra òptica i les radiocomunicacions. El fotodetector presenta un comportament quadràtic amb l'amplitud del camp elèctric, i fa que els efectes lineals que es produeixen en la fibra (com per exemple part de la dispersió) es tornin no lineals en el domini elèctric. Això no passa en els sistemes radio, ja que el corrent detectat a l'antena es proporcional a l'amplitud del camp elèctric o del camp magnètic. A més a més, amb el fotodetector es perd tota la informació de fase i de polarització.

En sistemes on el soroll ASE és el dominant i considerant que els processos de filtrat són ideals, el fotodetector transforma el soroll Gaussià del senyal òptic en soroll elèctric chi quadrat, aquest últim depenent del senyal, és a dir la varianza depèn de l'energia del senyal. Això és un problema molt important que resta rendiment en la capacitat de decisió de símbol (augmenta la BER) si es pren l'aproximació Gaussiana per calcular el llindar de decisió i ens allunya del receptor òptim MAP (maximum a posteriori) d'un canal AWGN. El fet de no tenir una estadística Gaussiana en el senyal elèctric rebut, causa uns canvis importants en l'estructura dels receptors MLSE, ja que no permet l'aplicació de les tècniques estàndards per canals AWGN basades en mètriques Euclidianes o simplificades (mínima complexitat).

Fins ara el grup ha treballat en un dispositiu de post-detecció que aproxima la resposta de la funció arrel quadrada [1-3]. Resulta evident que si el fotodetector presenta una funció quadràtica, amb l'arrel quadrada el senyal es linealitzí en part. S'ha demostrat que aquest tipus d'equalització fa més lineal el sistema en el camp de Radio sobre Fibra [1] [3] i digitalment amb filtres FIR o MLSE [4-6], i com a conseqüència es pot transmetre a major distància i/o velocitat. Idealment, amb l'arrel quadrada es requereixen dos i tres vegades la distància de transmissió per tenir els mateixos nivells del segon i tercer harmònic respectivament, comparant amb el cas de no utilitzar equalització d'aquest tipus. En [2] s'ha comprovat que amb l'arrel quadrada el sistema presenta una millor tolerància al CD,

permetent augmentar la distància entre un 60% i un 100% segons la complexitat del EE (electronic equalizer). Existeixen dues possibilitats d'implementar l'arrel quadrada; una és analògicament, fent l'arrel quadrada del senyal RF, i l'altra és digitalment, aplicant-la després de la quantificació del senyal (exemple mètrica SQRT). Utilitzant equalitzadors MLSE amb mètrica SQRT s'han aconseguit distàncies de més de 1000 Km sense utilitzar compensadors de dispersió òptics, tal i com es demostra en [4]. Amb la mètrica SQRT, a més a més, s'aconsegueix reduir el cost computacional i la complexitat en els receptors MLSE en comparació de la mètrica chi-square. Noteu que és el mateix aplicar l'arrel quadrada sobre les mostres sorolloses rebudes, i després utilitzar un equalitzador MLSE amb mètrica euclidiana o simplificada.

L'estadística del senyal de sortida de la funció arrel quadrada és de tipus Rice. En sistemes IM/DD, la distribució de Rice s'aproxima a Gaussiana per símbols amb energies més grans que zero, principalment la que trobem pel bit '1' en un sistema amb alfabet binari. El problema està en símbols amb energies properes al zero (o el que és el mateix, amb relacions d'extinció infinites o molt grans), com en el cas del bit '0'. En aquest últim cas la distribució de Rice no es pot aproximar per Gaussiana.

Per solucionar els problemes que presenta la distribució de Rice, i per tant l'arrel quadrada, en alguns articles proposen utilitzar altres funcions còncaues basades en radicals (arrels enèsimes). En [7] afirmen que l'arrel cúbica millora lleugerament la OSNR requerida amb MLSE (en comparació amb l'arrel quadrada) per mantenir una BER objectiu de  $10^{-3}$  en específiques condicions de dispersió. En [8] suggereixen les mètriques MLSE  $m_m = (y_m^\alpha - \mu_m)^2$  amb  $0.3 \leq \alpha \leq 0.4$ , on  $y_m$  és la mostra sorollosa rebuda i  $\mu_m$  és la mostra lliure de soroll. Afirmen que minimitza la penalització en la OSNR amb respecte la mètrica SQRT ( $\alpha = 0.5$ ) en 0.1dB per una distància de 250 Km fent servir un equalitzador MLSE amb 64 estats de Trellis i BER =  $10^{-3}$ .

En [9-12] declaren que l'arrel quadrada és la funció òptima només quan tenim soroll ASE, amb densitat espectral  $N_0$  suficientment petita (és a dir  $N_0$  molt més petit que l'energia del senyal) i relació d'extinció més gran que zero ( $r_{01} = P_0/P_1 > 0$ ). En altres casos en que existeixi combinació de soroll ASE i soroll tèrmic i estem en les mateixes condicions d'abans, afirmen que la funció òptima serà del tipus  $g(y) = y^\nu$  amb  $0 < \nu \leq 1$ , on  $\nu$  es pot estimar pel mètode dels moments MoM.

## 1.2 Objectius

L'objectiu d'aquest projecte de fi de carrera és trobar la funció o transformació matemàtica òptima per linealitzar i reduir la distorsió harmònica del senyal (important pels sistemes analògics RoF), per reduir el cost computacional i la complexitat en els equalitzadors MLSE, i per convertir en òptima la solució d'equalització electrònica (EE) posterior basada en filtres FIR o DFE. L'objectiu principal d'aquesta funció òptima serà Gaussianitzar les fluctuacions del senyal elèctric de post-detecció i aproximar-les per un

canal lineal AWGN, tal i com presenta en el domini òptic. D'aquesta manera evitarem el problema de la distribució de Rice quan utilitzem la funció arrel quadrada, especialment per senyals amb relacions d'extinció infinites o molt grans.

Com hem comentat abans, un dels principals objectius que busca la funció òptima és reduir la complexitat i el cost computacional dels equalitzadors que implementen l'estratègia MLSE. L'estratègia MLSE pot ser eficientment implementada mitjançant l'algoritme de Viterbi. Aquest algoritme avalua les mètriques basades en la funció de densitat de probabilitat (PDF) del senyal rebut, i per tant implementa efectivament la detecció de seqüència MAP (maximum a posteriori). Si la PDF del senyal sorollós rebut és Gaussiana estacionària (canal AWGN) llavors l'algoritme de Viterbi ha d'avaluar la distància euclidiana entre la mostra sorollosa i la mostra lliure de soroll. En aquest tipus de canals, els requisits de memòria per les mètriques en les LUT (look-up table) són significativament reduïts. Un dels principals avantatges d'aquesta mètrica simplificada és que no necessita estimar cap paràmetre de canal i per tant és més ràpida d'avaluar computacionalment. L'objectiu de la funció òptima no lineal que busquem és permetre utilitzar aquesta mètrica simplificada o euclidiana en els receptors MLSE sense patir cap penalització ni pèrdua de capacitat de decisió de símbol, gràcies al fet de recuperar l'estadística Gaussiana estacionària.

Sabem que existeixen dues tècniques per compensar la dispersió que introdueix el canal; la solució electrònica (EDC) i la solució òptica (TDC basat en un grating de Fibra BGF). La compensació de dispersió electrònica EDC no és efectiva perquè; es perd la informació de la polarització després de la detecció, el soroll és dependent del senyal, cal un processat de senyal ultraràpid i el model del canal és no lineal. En canvi, un dels principals avantatges de l'equalització EDC és que és una solució de baix cost i de reduïdes dimensions respecte la solució d'equalització òptica amb fibra.

Un dels objectius que segueix la funció òptima no lineal és aconseguir solucionar alguns dels inconvenients que presenta la solució d'equalització electrònica EDC per si sola, com la no linealitat del canal o la dependència del soroll amb el senyal. Per tant, la funció òptima buscarà fer més lineal la relació entre la dispersió cromàtica CD i el senyal rebut, i com a resultat convertir en òptima la solució d'equalització electrònica posterior amb filtres FIR i DFE. Recordem que les tècniques d'equalització obtenen un major rendiment en canals lineals que en canals no lineals, ja que poden reproduir millor la funció de transferència del canal.

Finalment, cal destacar que la solució de compensació de dispersió electrònica EDC (FFE, DFE, MLSE) juntament amb la solució que es plantejarà en aquest projecte donada per la funció òptima, sempre constitueix una solució de menor cost en comparació amb els compensadors de dispersió òptics (TDC).



Resumint el que hem comentat, els objectius que ha d'assolir la funció òptima són:

- Linealitzar el sistema, això vol dir que el senyal elèctric sigui proporcional al camp elèctric del senyal òptic, enlloc de la potència òptica.
- Recuperar l'estadística Gaussiana que tenia el senyal en el domini òptic.
- Eliminar la dependència del soroll amb l'amplitud del senyal, és a dir variàncies iguals per tot valor del paràmetre de no centralitat (o per cada símbol de la modulació multinivell).

### 1.3 Organització del projecte

El present text s'estructura en 19 capítols, els quals segueixen un ordre cronològic tal i com he anat evolucionant en el projecte, especialment en aquells capítols que es corresponen a la recerca de la funció òptima. He decidit fer-ho així perquè vull mostrar el caire de memòria escrita científica, respectant l'ordre temporal dels esdeveniments, i redactant aquells experiments que han sigut satisfactoris i pròspers, però també deixant constància d'aquells que han donat un pitjor rendiment però que poden haver motivat a continuar en aquella línia de treball.

Els capítols de l'1 al 8 són introductoris, i són útils per dotar al lector dels coneixements necessaris, així com situar l'estat de l'art i els antecedents històrics sobre les comunicacions òptiques amb amplificació òptica. El **capítol 2** presenta al lector el model del sistema de comunicacions que s'utilitzarà durant tot el projecte, especialment enfocat a l'extrem del receptor i emfatitzant en aquells paràmetres rellevants. El **capítol 3** fa un resum sobre l'estat d'art dels equalitzadors MLSE, fent una breu descripció de les mètriques més utilitzades i especialment de la mètrica SQRT. El **capítol 4** tracta de forma teòrica els dos models matemàtics més comuns per modelar el soroll ASE; el model basat en l'expansió en sèrie de Karhunen-Loève i el model basat en l'expansió en sèrie de Fourier. El **capítol 5** presenta una petita descripció sobre el soroll d'amplificació òptic i la seva repercussió en la BER (computada fent servir l'aproximació Gaussiana), la sensibilitat del receptor, el factor de soroll, la SNR elèctrica, etc. En el **capítol 6** s'analitza, a partir de la teoria del senyal i el model passa-baix del senyal, la llei quadràtica del fotodetector fent més comprensible al lector el que succeeix en la transformació optoelectrònica del senyal. El **capítol 7** recull les expressions matemàtiques (PDF, CDF, MGF) i els moments estadístics més importants de la distribució Chi quadrada que ens trobem en els sistemes amb amplificació òptica, sempre i quan suposem que el soroll shot i el soroll tèrmic són negligibles, i que els processos de filtrat són totalment ideals. El **capítol 8** fa una referència especial al dispositiu electrònic que aproxima la resposta de l'arrel quadrada, fent una breu descripció sobre la tecnologia amb la que s'ha implementat, i un breu anàlisi de l'estadística de Rice i de la linealitat de la funció.

A partir del capítol 9 i fins el capítol 16 s'entra en el cos principal del projecte, que és l'anàlisi i la recerca de la funció òptima en sistemes amb soroll ASE com a soroll predominant. Les estratègies que s'han seguit per trobar la funció òptima són; a partir de la

relació entre les PDF's, com es parla en el **capítol 9**, i a partir del mètode de la inversa, com es parla en els **capítols 10** i en endavant. En el **capítol 10** es presenten les principals tècniques de conversió de variables aleatòries. El **capítol 11** recull la teoria matemàtica del mètode de la inversa i es fa una demostració convertint una v.a. Gaussiana a una v.a. exponencial mitjançant la transformació no lineal definida per aquest mètode. En el **capítol 12** es fa una primera presa de contacte amb el mètode de la inversa i el problema que volem tractar, és a dir convertir una v.a. Chi quadrada amb  $n$  graus a una v.a. Gaussiana. En aquest capítol es planteja una primera tabulació de la funció.

Entre els capítols que tracten sobre el mètode de la inversió, s'han desenvolupat diferents tècniques per trobar la funció òptima depenent de com es modela la CDF inversa d'una v.a. normal, com són; per solució numèrica (es parla en el **capítol 13**) i per aproximacions a partir d'expressions tancades, entre les quals les més destacades són la de Hasting-Dillard (**capítol 14**) i per interpolació de polinomis de Chebyshev (**capítol 15**). Com que es plantegen diferents funcions, i totes tenen un comportament similar, hem escollit la funció òptima de Hasting-Dillard (**capítol 14**) per desplegar tot el conjunt d'anàlisis i tests de funcionament. Queda clar que tots els anàlisis utilitzats en el **capítol 14** es podrien extrapol·lar a altres funcions proposades en aquest projecte, tot i així per extensió del text i com que totes les funcions són pràcticament idèntiques hem decidit aplicar aquests anàlisis només a la funció òptima de Hasting-Dillard. En el **capítol 17** s'introdueixen diferents tècniques d'interpolació de funcions per aproximar la funció òptima, donada per qualsevol de les tècniques vistes en capítols anteriors, per una expressió més senzilla. A partir d'aquí, el **capítol 18** fa una breu introducció sobre la recerca de la funció òptima quan es considera combinació de soroll ASE i soroll tèrmic (Gaussià). Finalment, en el **capítol 19**, es relaten les conclusions generals de tot el projecte.

## 2 Model del sistema receptor

El model del receptor de comunicacions òptiques que utilitzarem durant tot el text es basa en un sistema estàndard IM/DD (modulació d'intensitat - detecció directa). En la gran part del projecte considerarem que el soroll predominant és el soroll ASE (Amplified Spontaneous Emission), aquest últim degut a que es tracten comunicacions amb amplificació òptica. El soroll ASE serà molt més gran que el soroll tèrmic i el soroll shot, i per tant seran negligibles en comparació amb el primer. En el capítol 18, però, s'analitza el cas en que el soroll tèrmic no és negligible. L'esquema general que es tractarà en aquest text segueix la configuració de la figura 2.1.

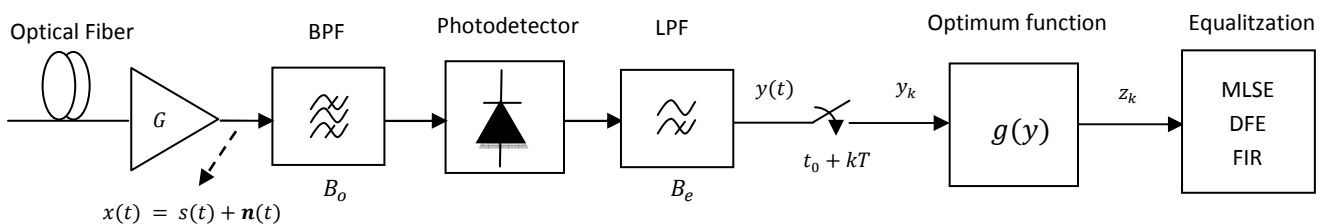


Figura 2.1. Model del receptor de comunicacions òptiques utilitzat

En la figura 2.1 hi trobem el senyal òptic amplificat  $x(t)$  fruit del sumatori entre la portadora modulada digitalment  $s(t)$  i el soroll òptic additiu  $n(t)$  introduït pel preamplificador òptic. La portadora  $s(t)$  està modulada en OOK (On-Off Keying) i conformada amb formes d'ona NRZ (NonReturn-to-Zero) o en el seu defecte en RZ (Return-to-Zero). El canal òptic en la figura 2.1 consisteix en una o més fibres monomodes amb unes específiques característiques dispersives. Si considerem que les distorsions no lineals que introdueix la fibra són negligibles i en el cas de potències petites, llavors la funció de transferència del canal pot ser modelada amb bastant exactitud per un filtre amb resposta freqüencial [13]:

$$H_f(\omega) = \exp\left(-\frac{\alpha L_f}{2}\right) \exp\left(j \frac{\beta_2 \omega^2 L_f}{2}\right) \exp\left(-j \frac{\beta_3 \omega^3 L_f}{6}\right) \quad (2.1)$$

On  $L_f$  és la longitud de la fibra,  $\alpha$  són les pèrdues de la fibra, i  $\beta_2, \beta_3$  són els coeficients de dispersió de primer i segon ordre respectivament. La fibra està seguida per un preamplificador de fibra dopada EDFA de guany  $G$  que introdueix soroll ASE, i que serà la principal font de soroll en el receptor. Aquest soroll pot ser aproximat per una densitat espectral de potència plana en la banda d'interès. Es pot modelar per un vector complex  $\mathbf{n}(t)$  que representa un soroll blanc i Gaussià, on la densitat espectral té dues bandes de valor  $N_0/2$ . El paràmetre  $N_0 = n_{sp} h\nu (G - 1)$ , on  $h$  és la constant de Planck,  $\nu$  és la freqüència d'interès i  $n_{sp}$  és el paràmetre d'emissió espontània. El producte de la constant de Planck i la freqüència,  $h\nu$ , és l'energia del fotó.

En el receptor que es mostra en la figura 2.1, el senyal  $x(t)$  és òpticament filtrat (mitjançant un filtre òptic amb ample de banda  $B_o$ ) amb l'objectiu de refusar les bandes espectrals que contenen soroll ASE fora del espectre del senyal  $s(t)$  i/o extreure'l sota la condició d'un sistema WDM. El fotodetector, que es descriu matemàticament com un dispositiu amb llei quadràtica ( $I(t) = |u(t)|^2$ ), converteix el senyal òptic a el seu equivalent elèctric. Per simplificar el model, aquest fotodetector serà un fotodíode ideal de tipus PIN amb responsivitat  $R = 1$ . Noteu que el fotodetector només es queda amb l'envoltant al quadrat del camp elèctric (és un detector de potència òptica), doncs es perdrà tota la informació de fase. Un altre problema important que ocasiona el fotodetector és la pèrdua d'informació per polarització després de la detecció. Finalment, un filtre elèctric passa-baix de post-detecció amb ample de banda  $B_e$  s'encarrega de filtrar el senyal abans de la detecció de les mostres rebudes, el que s'anomena projecció en el espai de senyal. Idealment, el filtre de post-detecció serà del tipus integrador.

Després del procés de filtrat òptic, fotodetecció i filtrat elèctric, s'obté un nivell de corrent  $y(t)$  proporcional a la potència òptica arribada al fotodetector, i un conjunt de termes de soroll corresponents a les batudes o mesclat entre *senyal x ASE* i *ASE x ASE*, degudes a la llei quadràtica del fotodetector. En el cas de considerar que el soroll tèrmic no és negligible, tal i com es parla en el capítol 18, llavors s'ha de tenir en compte aquest terme. Seguidament es mostreja el senyal  $y(t)$  en funció del temps de símbol i es quantifica idealment amb resolució infinita. Utilitzarem sobremostreig del senyal (més d'una mostra per bit) per garantir una mostra representativa de la distribució del soroll.

Tenint present que el soroll predominant és el soroll òptic ASE i que els processos de filtrat són ideals, el senyal discret  $y_k$  ja no tindrà una estadística del soroll Gaussiana, sinó que serà Chi quadrada  $\chi^2$  amb  $n$  graus de llibertat. El nombre de graus de llibertat dependrà de la relació entre els amplituds de banda dels filtres òptic  $B_o$  i elèctric  $B_e$ . Es pot veure una descripció detallada de l'estadística Chi quadrada del senyal rebut en el capítol 7. A més a més, en el capítol 4 s'introdueixen els dos models matemàtics que descriuen el soroll ASE; el

model de Marcuse, bàsicament descriu el model Chi quadrat fent servir un model amb sèries de Fourier, i el model de Karhunen Loève, molt més acurat ja que utilitza expansions en sèrie de Karhunen Loève i considera en els càlculs els processos de filtrat.

Immediatament després del procés de conversió A/D, hem ubicat la funció òptima  $g(y)$  que tindrà com a missió convertir les fluctuacions elèctriques Chi quadrades del senyal en fluctuacions normals o Gaussians. És a dir, l'objectiu principal de la funció  $g(y)$  serà transformar el canal no lineal i Chi quadrat per un canal lineal AWGN, on el soroll no depèn de l'amplitud del senyal. Amb aquest procés de linealització aconseguirem que l'equalització electrònica posterior sigui òptima.

Finalment, després d'aplicar l'equalització no lineal estadística amb la funció òptima, es realitzarà l'equalització electrònica per compensar la dispersió que introdueix el canal (EDC). L'equalització del canal es pot implementar amb diverses tècniques tal i com es resumeix en [14]. Totes aquestes tècniques tenen la missió de reduir l'efecte de l'ISI (interferència intersimbòlica) que introdueix la resposta impulsional del canal degut als efectes lineals i no lineals que introdueix la fibra, com ara la dispersió cromàtica. Tot i així, no totes les tècniques d'equalització tenen la mateixa eficiència. Un petit resum de les principals tècniques que ens podem trobar són:

- **Equalització Adaptativa:** S'utilitza l'equalització adaptativa per compensar els efectes de la distorsió en canals amb condicions canviants. L'algoritme més popular és el LMS que convergeix en la solució de Wiener.
- **Equalització basada en MAP (Maximum A Posteriori):** És l'equalitzador òptim en termes de minimitzar la BER. Utilitza l'algoritme BCJR que és similar a l'algoritme de Viterbi. La complexitat creix linealment enlloc d'exponencialment amb la dimensió de la seqüència, però creix exponencialment amb la memòria del canal.
- **Estimador de seqüència de Màxima Verosimilitud (MLSE):** El receptor MLSE pren la decisió de seleccionar la seqüència de símbols més probable de entre totes les seqüències que podrien ser transmises. L'algoritme de Viterbi és una eficient implementació del MLSE per un canal discret en el temps.
- **Equalització Lineal (LE):** La interferència intersimbòlica ISI es pot eliminar a través d'un filtre lineal que inverteix la resposta freqüencial del canal. Es basa en l'estructura d'un filtre transversal (TF), que no és més que un filtre FIR en processat digital del senyal.
- **Equalització no-lineal "Decision Feedback Equalizer" (DFE):** El DFE és un equalitzador no-lineal que té un rendiment superior que l'equalització LE en presència de bastant ISI. L'estructura típica és un equalitzador FFE (feed forward equalizer) seguit d'un equalitzador no-lineal realimentat.
- **Filtres terminals òptims:** Es basa en la idea d'un parell de filtres FIR situats; un en l'extrem emissor i l'altre en l'extrem receptor. Els coeficients d'aquests filtres s'optimitzen pel tal de tenir ISI nul·la i mínima probabilitat d'error de bit.



## 3 L'estimador de seqüència de màxima verosimilitud MLSE

### 3.1 Una introducció a les mètriques en comunicacions òptiques

El receptor ML (màxima verosimilitud) és el millor dels equalitzadors en presència d'ISI i d'un canal AWGN (Additive White Gaussian Noise). Està especialment preparat per combatre els efectes de dispersió cromàtica (CD), de la dispersió per polarització (PMD) i per les no-linealitats que introdueix la fibra [15]. Totes aquestes degradacions causen que la memòria del sistema s'hagi d'incrementar en funció de la distància i/o velocitat.

Els receptors MLSE poden ser implementats eficientment utilitzant l'algoritme de Viterbi (VA). Per detectar la seqüència de dades transmeses, el VA avalua les mètriques basades en la funció de densitat de probabilitat (PDF) del senyal rebut. Un aspecte crític de l'algoritme MLSE és el nombre de ramals que s'han d'avaluar pel processador ( $2N \cdot K$ ), on  $K$  és el nombre de mostres per bit, i  $N$  és el nombre d'estats de Trellis [5]. Aquest nombre d'avaluacions s'han de realitzar cada temps de bit; per exemple si utilitzem una memòria de  $L = 8$  bits, amb  $K = 2$  mostres/bit, el nombre de mètriques a avaluar són 1024, que s'han de portar a terme en un temps de bit de  $T_b = 100$  ps (en el cas de transmetre a 10Gb/s).

Un altre aspecte crític de l'algoritme MLSE és l'estimació de paràmetres del canal. El processador ha de ser capaç d'estimar els paràmetres necessaris per computar la mètrica correctament. Aquests paràmetres depenen de les característiques del canal. Si només està present la dispersió cromàtica (CD), els canvis en el canal són extremadament lents, i actualitzar-los és relativament senzill. En canvi, si hi ha presència de PMD, l'estimació de canal ha de ser capaç d'ajustar-se el més ràpid possible a la dinàmica del PMD. Això és una problemàtica si el nombre de paràmetres a estimar per cada rama és gran i/o la convergència és lenta.

L'estimador MLSE és una tècnica molt semblant al criteri MAP, però enlloc de decidir per cada símbol de la modulació (és a dir, un sistema sense memòria), decideix per una seqüència de símbols (estimador de seqüència de màxima verosimilitud), per tant el receptor ha de comptar amb memòria. S'ha de conèixer la funció de densitat de probabilitat condicionada per decidir la seqüència més probable  $\underline{s}_m$  si coneixem el vector rebut  $\underline{y}$ , de tal manera que s'ha de maximitzar [5][7][15]:

$$\hat{\underline{s}}_m = \max_{\underline{s}_m} f_y(\underline{y} | \underline{s}_m) \quad (3.1)$$

Si assumim que totes les mostres  $\{y_m\}$  són independents, aleshores la PDF condicionada depèn de la forma dels filtres òptic i de post-detecció (elèctric). Si tinguéssim un filtrat ideal la PDF seria Chi-Square, però a la pràctica això no succeeix. Degut a la independència estadística de les mostres, la PDF conjunta condicionada del vector de dades rebut es pot escriure com:

$$f_y(\underline{y} | \underline{s}_m) = \prod_m f_y(y_m | s_m) \quad (3.2)$$

I si assumim que el sistema és causal i amb memòria finita de longitud  $L$ , llavors,

$$f_y(y_m | \underline{s}_m) = f_y(y_m | s_m, s_{m-1}, s_{m-2}, \dots, s_{m-L}) \quad (3.3)$$

Per tant, l'estratègia òptima ML pot ser implementada mitjançant l'algoritme de Viterbi utilitzant mètriques:

$$\lambda_m(y_m; s_m, \mu_m) = -\ln(f_y(y_m | s_m, \mu_m)) = -\ln(f_{y_m}(y)) \quad (3.4)$$

On  $\mu_m = (s_{m-1}, s_{m-2}, \dots, s_{m-L})$  és l'estat de Trellis. Així, el nombre d'estats serà  $S = 2^L$ , i per tant, la complexitat del receptor augmentarà exponencialment amb la memòria del canal  $L$ . En el cas pràctic, una mostra per bit no és suficient estadísticament per tractar el problema, per aquest motiu, s'utilitza l'oversampling o sobremostreig. Si assumim que les mostres que difereixen en un interval de bit són independents podem posar:

$$\begin{aligned} f_y(\underline{y} | \underline{s}_m) &= \prod_m f_y(\underline{y}_m | \underline{y}_{m-1}, \underline{s}_m) \\ &= \prod_m \prod_{k=1}^K f_y(y_{m,k} | y_{m,k-1}, \dots, y_{m,0}, \underline{y}_{m-1}, \underline{s}_m) \end{aligned} \quad (3.5)$$

On  $m$  és l'índex que va des de l'1 fins al  $2N$  (sent  $N = 2^L$  el nombre d'estats) i  $K$  és el nombre de mostres per bit. Per tant, les mètriques de l'algoritme de Viterbi que implementen l'estratègia MLSE es poden expressar com:



$$\begin{aligned}\lambda_m(y_m; s_m, \mu_m) &= - \sum_{k=1}^K \ln \left\{ f_y \left( y_{m,k} | y_{m,k-1}, \dots, y_{m,0}, \underline{y_{m-1}}, s_m, \mu_m \right) \right\} \\ &= - \sum_{k=1}^K \ln \{ f_{y_{m,k}}(y) \}\end{aligned}\quad (3.6)$$

En les que  $y_{m,k}$  és la variable aleatòria associada a la mostra del senyal sorollós rebut, condicionada al senyal transmès de l'estat  $m$ -èssim i la mostra  $k$ -èssima. Aquestes mètriques s'interpretaran com a mesures de distància i òbviament s'hauran de minimitzar.

En comunicacions òptiques, la complexitat d'un processador MLSE augmenta exponencialment amb la dispersió acumulada. De forma resumida, la complexitat d'un processador MLSE depèn de:

- El nombre d'estats de Trellis MLSE.
- El cost de processat per estat.

Per reduir el nombre d'estats de Trellis per una dispersió acumulada existeixen diverses tècniques de reducció d'estats [16]. La minimització del cost de processat per estat, passa per dissenyar mètriques amb menor complexitat [15]. Ja hem parlat de la mètrica, com una funció que depèn de la mostra sorollosa actual i del estat Trellis en el que es troba ( $\lambda_m(y_m; s_m, \mu_m)$ ). La mètrica depèn de la distribució de probabilitat del soroll del senyal d'entrada. En comunicacions amb amplificació òptica no és possible escriure una expressió tancada d'aquesta distribució de probabilitat i per no haver de recórrer a utilitzar look-up tables (LUT's), s'utilitzen expressions simplificades per les mètriques, les quals són sub-òptimes. Un anàlisi sub-òptim de les mètriques es pot derivar d'assumir una aproximació de la distribució del soroll. Les aproximacions clàssiques que s'utilitzen són:

- Chi-square.
- Gaussiana.
- Gaussiana estacionaria.

En treballs anteriors del departament d'electrònica del *Politecnico di Torino* es va proposar un nova mètrica que assumeix una distribució del soroll Gaussià i estacionari a partir de realitzar l'arrel quadrada sobre el senyal [4][6]. Totes aquestes mètriques, tot i que no són exactes, són simples, amb el millor rendiment i fàcils d'implementar. Les expressions per cada una d'aquestes mètriques són [5]:

- **Mètrica Chi-square**

Sota la condició que la PDF  $f_{y_{m,k}}(y)$  de les mostres del soroll sigui non-central chi-square, amb  $\gamma$  graus de llibertat, aleshores la mètrica es pot escriure com:

$$m_m = \lambda_m(y_m; e_{m,k}, \sigma^2, \gamma) = - \sum_{k=1}^K \ln \left\{ \left( \frac{y_m}{e_{m,k}} \right)^{(\gamma-2)/4} e^{-(y_m+e_{m,k})/2\sigma^2} I_{\gamma/2-1} \left( \sqrt{\frac{y_m \cdot e_{m,k}}{\sigma^2}} \right) \right\} \quad (3.7)$$

On  $e_{m,k}$  és el valor de la mostra  $k$ -èsima lliure de soroll del senyal pel  $m$ -èssim estat de Trellis, i  $\sigma^2$  és un paràmetre dependent del soroll ASE com  $\sigma^2 = N_0 \cdot B_N/2$ , en el que  $B_N$  és l'ample de banda equivalent del soroll del filtre òptic. Si no estigues present el filtre elèctric de post-detecció, llavors la distribució del soroll seria exactament chi quadrada amb  $\gamma = 4$ , independentment de la forma i ample de banda del filtre òptic.

En el cas que existeixi un filtre elèctric de post-detecció, la distribució del soroll deixa de ser chi quadrada. Per tant, utilitzar la mètrica chi quadrada és una solució sub-òptima.

En [10] es proposa una aproximació de la mètrica chi quadrada i asseguren que els resultats de les simulacions són pràcticament indistingibles. L'aproximació és la següent:

$$m_m = \sum_{k=1}^K \left[ \left( \sqrt{y_m} - \sqrt{e_{m,k} + (2\gamma - 3)\sigma^2} \right)^2 + \sigma^2 \ln(e_{m,k} + (2\gamma - 3)\sigma^2) \right] \quad (3.8)$$

- **Mètrica Gaussiana**

Sota la condició que la PDF de les mostres del senyal sorollós  $f_{y_{m,k}}(y)$  sigui Gaussiana, la mètrica es pot escriure com:

$$m_m = \lambda_m(y_m; \mu_{m,k}, \sigma_{m,k}^2) = \sum_{k=1}^K \frac{(y_m - \mu_{m,k})^2}{\sigma_{m,k}^2} + \ln(\sigma_{m,k}^2) \quad (3.9)$$

On  $\mu_{m,k}$  i  $\sigma_{m,k}^2$  són la mitja i la varianza de la variable aleatòria  $y_{m,k}$ .

- **Mètrica Gaussiana estacionària**

En un esforç de buscar la màxima simplicitat de les mètriques, si assumim que la varianza és idèntica per tot  $y_{m,k}$ , llavors podem escriure que:

$$m_m = \lambda_m(y_m; \mu_{m,k}) = \sum_{k=1}^K (y_m - \mu_{m,k})^2 \quad (3.10)$$

També es pot anomenar mètrica Euclidiana o mètrica simplificada.

- **Mètrica SQRT**

La mètrica SQRT està basada en les següents consideracions (que no són del tot certes):

- Les variables aleatòries  $\sqrt{y_{m,k}}$ , obtingudes de realitzar l'arrel quadrada sobre les mostres del senyal rebut  $y_{m,k}$ , tenen PDF's Gaussians.
- La varianza és idèntica per totes les variables aleatòries  $\sqrt{y_{m,k}}$ .

Sota aquestes condicions, la mètrica resultant es pot escriure com:

$$m_m = \lambda_m(y_m; \mu'_{m,k}) = \sum_{k=1}^K (\sqrt{y_m} - \mu'_{m,k})^2 \quad (3.11)$$

On  $\mu'_{m,k}$  és  $E\{\sqrt{y_{m,k}}\}$ .

Una suposició equivalent a l'anterior que implementa mètrica SQRT, és pensar que l'arrel quadrada del senyal elèctric rebut  $\sqrt{y(t)}$ , es afectat per soroll Gaussià i estacionari.

En [6] i en la figura 3.1 es pot veure una comparació de les diferents mètriques per una BER objectiu de  $10^{-3}$  amb un receptor MLSE. En aquesta comparació es representa la OSNR necessària per mantenir la BER en funció de diferents valors de distància. Es pot observar que la mètrica SQRT s'aproxima molt bé a la mètrica Chi-Square i a la vegada redueix la complexitat.

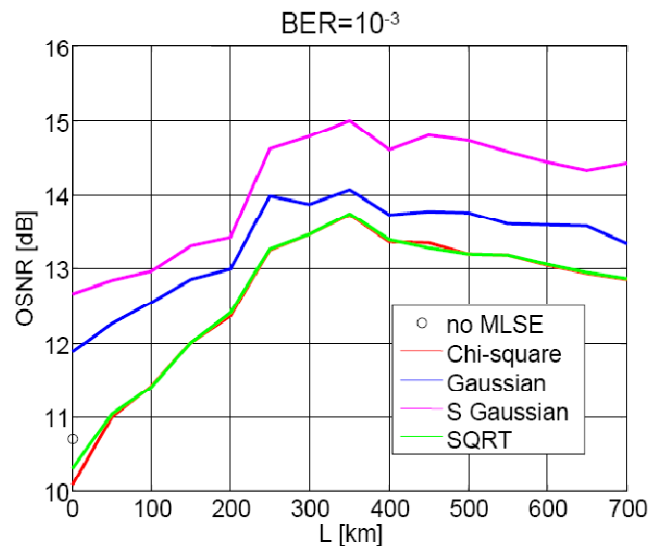


Figura 3.1. OSNR en funció de la distància per una BER =  $10^{-3}$  objectiu i diferents mètriques

Tot i que no s'hagi dit, en la figura 3.1, el nombre d'estats de Trellis va augmentant a mesura que augmenta la distància per mantenir la BER objectiu.

En el cas d'un canal AWGN aquest processador de Viterbi, està basat en el concepte de mínima distància en el espai de senyal (la distància Euclidiana s'utilitza com a mesura de distància). Això vol dir que la mètrica correspon al quadrat de la distància Euclidiana entre la mostra rebuda (contaminada amb soroll) i el valor hipotètic que esperem rebre en absència de soroll per cada seqüència de dades. Desafortunadament, el soroll després de la fotodetecció no té una distribució Gaussiana i, a més a més, és dependent amb el senyal, per tant ens allunyem del cas de mínima complexitat. Amb la funció òptima intentarem aconseguir utilitzar la mètrica simplificada, aproximant el soroll per Gaussià.

## 4 Caracterització del soroll ASE

La font principal de soroll additiu en els sistemes de comunicacions amb amplificació òptica és deguda al soroll ASE produït pels amplificadors òptics EDFA utilitzats com a repetidors de línia (in-line) o com a preamplificadors en el extrem del receptor per compensar l'atenuació que introdueixen les fibres. El soroll ASE es mescla amb el senyal i produeixen batudes, com a conseqüència de la llei quadràtica del fotodetector (*senyal x soroll* i *soroll x soroll*). El soroll ASE és de banda ampla (aprox. 40 nm) i necessita ser analitzat amb compte per avaluar l'efecte de la degradació en el rendiment del sistema. La figura 4.1 mostra l'espectre d'emissió i bombeig d'un amplificador òptic de fibra dopada EDFA, on es pot observar l'ample de banda d'un amplificador òptic d'aquest tipus.

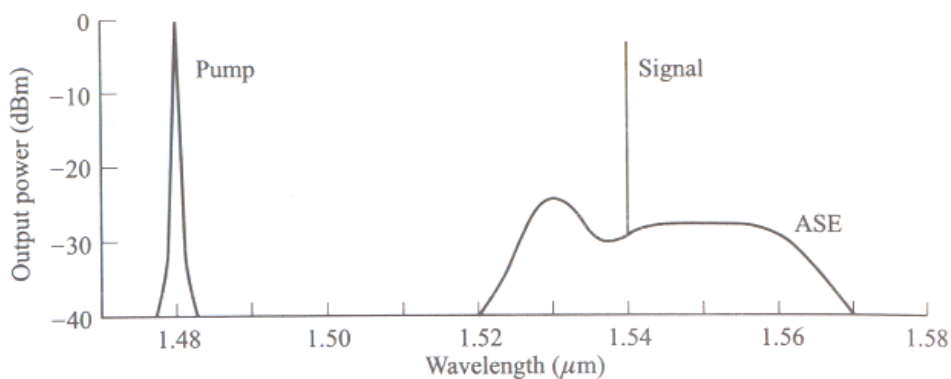


Figura 4.1. Espectre d'emissió i bombeig d'un amplificador EDFA

Les formes d'ona periòdiques es poden expressar en termes de sèrie de Fourier. Tot i així, ja que el soroll ASE és aleatori i no periòdic, no és possible utilitzar directament una representació convencional en sèrie de Fourier. En aquest cas, és essencial trobar una sèrie ortonormal on els coeficients siguin independents (inacorrelats), i variables aleatòries idènticament distribuïdes. Aquestes sèries, denominades expansió en sèrie de Karhunen-Loeve (KL), són una extensió de les sèries de Fourier, però amb les funcions base definides per satisfer la condició de coeficients incorrelats.

En els següents apartats (4.1 i 4.2) es modela l'estadística del senyal rebut de les dues maneres que hem parlat; a partir de l'expansió en sèrie de Karhunen-Loève (teoria KL, veure

[17]) i a partir de l'expansió en sèrie de Fourier (model de Marcuse). Evidentment, el model del soroll ASE basat en expansió en sèrie de Karhunen-Loève és molt més acurat que el model basat en expansió en sèrie de Fourier, ja que considera les respostes impulsional dels filtres per calcular els coeficients, és a dir considera els processos de filtrat no ideals, i utilitza la suposició que el soroll ASE no és periòdic. Tot i així, en aquest treball utilitzarem l'aproximació Chi quadrada, que es deriva directament de l'aproximació de Marcuse i Humblet, degut a la seva simplicitat d'anàlisi (veure [18-19]). En [13] es pot trobar una millora de l'aproximació clàssica de Marcuse i Humblet. Es justifica, mitjançant simulacions de Monte Carlo d'un sistema real i simulacions analítiques, que per computar la BER i el llinard òptim que minimitza aquesta, el bit '0' s'ajusta amb més exactitud a una distribució gamma generalitzada, degut als processos de filtrat no ideals. Els paràmetres que defineixen la distribució gamma generalitzada es fixen mitjançant el mètode de moments (MOM) i una seqüència d'entrenament. En aquest article també diuen que el bit '1' manté la distribució non-central chi-square.

## 4.1 Expansió en sèrie Karhunen-Loève

En [20] es realitza un anàlisi a fons per trobar la BER d'un sistema de comunicacions òptiques NRZ-OOK dominat per soroll ASE i amb una relació d'extinció infinita (la potència mitja pel bit "0" és zero) fent ús de l'expansió en sèrie de Karhunen Loève. En aquest apartat farem una breu introducció d'aquest model del soroll ASE i l'utilitzarem per computar la BER.

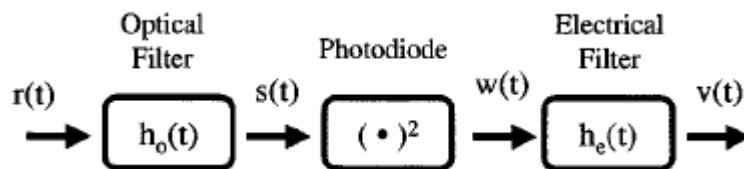


Figura 4.2. Model passa-baix sèrie Karhunen-Loève

Per simplificar els càlculs i les expressions només es considerarà un sol estat de polarització. La representació de l'envoltant complexa del senyal òptic rebut (veure figura 4.2) és:

$$r(t) = A + n_I(t) + jn_Q(t) \quad (4.1)$$

On  $A$  és el terme de senyal. Es considerarà que  $A = 0$  pel bit "0" i que  $A^2 = P_{peak}$  quan és transmet un "1", sent  $P_{peak}$  la potència de pic del senyal. Les components  $n_I(t)$  i  $n_Q(t)$  són respectivament la component en fase i quadratura del soroll ASE.

S'assumeix que les components del soroll rebut són estacionàries i que estan completament caracteritzades per la seva densitat espectral de potència  $S_n^I(f)$  pel cas del soroll en fase i  $S_n^Q(f)$  pel cas del soroll en quadratura, i les densitats espectrals creuades  $S_n^{I,Q}(f)$  i  $S_n^{Q,I}(f)$ . Les quatre densitats espectrals anteriors es poden agrupar en la següent matriu:

$$\underline{\underline{S_n}}(f) = \begin{bmatrix} S_n^I(f) & S_n^{I,Q}(f) \\ S_n^{Q,I}(f) & S_n^Q(f) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Es pot demostrar que  $S_n^{Q,I}(f) = S_n^{I,Q}(f)$ . Assumint que  $|H_o(0)|^2 = 1$ , on  $H_o(f) = TF\{h_o(t)\}$ , la portadora del senyal no s'altera al passar pel filtre òptic, i llavors el senyal complex  $s(t)$  es pot expressar de la forma següent

$$s(t) = A + m_I(t) + jm_Q(t) \quad (4.3)$$

On  $m_I(t)$  i  $m_Q(t)$  són les components del soroll filtrades òpticament. La matriu que representa la densitat espectral de potència  $\underline{\underline{S_m}}(f)$  una vegada s'ha realitzat el procés de filtrat òptic ve donada per:

$$\underline{\underline{S_m}}(f) = \underline{\underline{\mathcal{H}}}(f) \cdot \underline{\underline{S_n}}(f) \cdot \underline{\underline{\mathcal{H}^H}}(f) \quad (4.4)$$

On  $\underline{\underline{\mathcal{H}^H}}(f)$  és la matriu hermítica (transposada i conjugada) de  $\underline{\underline{\mathcal{H}}}(f)$ , i  $\underline{\underline{\mathcal{H}}}(f)$  és:

$$\underline{\underline{\mathcal{H}}}(f) = \begin{bmatrix} H_{o,I}(f) & -H_{o,Q}(f) \\ H_{o,Q}(f) & H_{o,I}(f) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

On  $H_{o,I}(f)$  i  $H_{o,Q}(f)$  són la part real i la part imaginària de la transformada de Fourier de la resposta impulsional del filtre òptic, respectivament. Després del fotodetector, assumim una detecció ideal amb llei quadràtica. Per tant el senyal  $\omega(t)$  té la forma

$$\omega(t) = (A + m_I(t))^2 + m_Q^2(t) \quad (4.6)$$

I després del filtrat elèctric amb resposta impulsional  $h_e(t)$ , la variable de decisió  $v(t)$  es pot escriure com

$$\begin{aligned} v(t) &= \omega(t) * h_e(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(\theta) [A + m_I(t - \theta)]^2 d\theta \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(\theta) m_Q^2(t - \theta) d\theta \end{aligned} \quad (4.7)$$

El següent pas consisteix a expandir  $m_I(t)$  i  $m_Q(t)$  en sèrie de Karhunen-Loève:

$$m_I(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i f_i(t) \quad (4.8)$$

$$m_Q(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} v_i g_i(t) \quad (4.9)$$

On les variables aleatòries  $\{u_i\}$  i  $\{v_i\}$  són els coeficients de les expansions, mentre que  $\{f_i(t)\}$  i  $\{g_i(t)\}$  són el conjunt de funcions deterministes, mútuament ortogonals amb respecte  $h_e(t)$ . La condició d'ortonormalitat es defineix en [20] com;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_e(t) f_i(t) f_j^*(t) dt = \delta_{ij} \quad (4.10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_e(t) g_i(t) g_j^*(t) dt = \delta_{ij} \quad (4.11)$$

I  $\delta_{ij}$  és la delta de Kronecker, definida com

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.12)$$

Aquesta condició d'ortonormalitat utilitzada es lleugerament diferent a la que es troba en la teoria de KL (veure [17]), degut a la presència de  $h_e(t)$ . Els coeficients de KL es podem expressar com;

$$u_i = \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(t) m_I(t) f_i^*(t) dt \quad (4.13)$$

$$v_i = \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(t) m_Q(t) g_i^*(t) dt \quad (4.14)$$

Si imposem la condició que els coeficients  $\{u_i\}$  i  $\{v_i\}$  ( $E\{u_i u_j^*\} = 0 \forall i \neq j$  i  $E\{v_i v_j^*\} = 0 \forall i \neq j$ ) són mútuament incorrelats, llavors el conjunt de funcions ortonormals  $\{f_i(t)\}$  i  $\{g_i(t)\}$  es poden avaluar com les autofuncions de les equacions integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_e(t) \rho_I(t - \tau) f_i(\tau) d\tau = \lambda_i f_i(t) \quad (4.15)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_e(t) \rho_Q(t - \tau) g_i(\tau) d\tau = \sigma_i g_i(t) \quad (4.16)$$

On  $\lambda_i$  és l'autovalor corresponent a l'autofunció  $f_i(t)$ , i  $\sigma_i$  és l'autovalor corresponent a l'autofunció  $g_i(t)$ .  $\rho_I(t)$  i  $\rho_Q(t)$  són les funcions d'autocorrelació dels processos aleatoris  $m_I(t)$  i  $m_Q(t)$ , donats per;



$$\rho_I(t) = TF^{-1}\{S_m^I(f)\} \quad (4.17)$$

$$\rho_Q(t) = TF^{-1}\{S_m^Q(f)\} \quad (4.18)$$

Quan les funcions ortonormals  $\{f_i(t)\}$  i  $\{g_i(t)\}$  compleixen l'equació integral anterior, es pot demostrar que;

$$E\{u_i u_j^*\} = \lambda_i \delta_{ij} \quad (4.19)$$

$$E\{v_i v_j^*\} = \sigma_i \delta_{ij} \quad (4.20)$$

Així, el conjunt de variables aleatòries  $\{u_i\}$  i  $\{v_i\}$  són estadísticament independents i variables aleatòries Gaussians amb mitja zero i varianza  $\lambda_i$  i  $\sigma_i$  respectivament.

Per simplificar els càlculs, sovint s'introdueix el següent canvi de variable:

$$m_I(t - \theta) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i' f_i(\theta) \quad (4.21)$$

$$m_Q(t - \theta) = \sum_{i=1}^{+\infty} v_i' g_i(\theta) \quad (4.22)$$

On  $u_i'$  i  $v_i'$  són variables aleatòries amb les mateixes propietats que  $u_i$  i  $v_i$  degut a la estacionarietat del procés aleatori del soroll d'entrada. També és necessari expandir la portadora  $A$  utilitzant les autofuncions  $\{f_i(\theta)\}$

$$A = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i f_i(\theta) \quad (4.23)$$

On

$$\alpha_i = A \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(\theta) f_i^*(\theta) d\theta \quad (4.24)$$

Substituint aquests desenvolupaments en sèrie de Karhunen-Loève en l'equació de la variable de decisió  $v(t)$  (4.7) és:

$$\begin{aligned}
 v(t) = & \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} (\alpha_i \alpha_j + 2\alpha_i u_j + u_i u_j) \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(\theta) f_i(\theta) f_j(\theta) d\theta \\
 & + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} v_i v_j \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(\theta) g_i(\theta) g_j(\theta) d\theta
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

On s'ha omès el signe asterisc per simplificar la notació. Utilitzant la condició d'ortonormalitat i ometent la dependència amb el temps degut a que els processos aleatoris  $m_I$  i  $m_Q$  són estacionaris, la variable de decisió  $v$  es pot escriure com

$$v = \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha_i + u_i)^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} v_i^2 \tag{4.26}$$

Encara que les dues sèries anteriors tinguin infinits termes, aquestes es poden truncar per un valor  $M$  adequat, sense perdre exactitud. En general,  $M$  és aproximadament el doble de la relació els amples de banda del filtre òptic i elèctric.

#### 4.1.1 Avaluació de la BER del sistema

En aquesta secció es proposa avaluar la BER del sistema a partir de la integració de la funció generadora de moments (MGF) de la variable de decisió  $v$ . En general,  $m_I(t)$  i  $m_Q(t)$  estan correlades, i per tant  $E\{u_i v_j^*\} \neq 0, \forall i, j$ . Encara no s'ha caracteritzat la correlació creuada  $E\{u_i v_j^*\}$ , aquesta vindrà definida per:

$$E\{u_i v_j^*\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(t) h_e(\tau) \rho_{IQ}(\tau - t) g_j(\tau) f_i^*(t) dt d\tau \tag{4.27}$$

On  $\rho_{IQ}(\tau) = TF^{-1}\{S_n^{I,Q}(f)\}$  és la correlació creuada entre  $m_I(t)$  i  $m_Q(t)$ . Simètricament  $E\{v_i u_j^*\}$  és:

$$E\{v_i u_j^*\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(t) h_e(\tau) \rho_{QI}(\tau - t) g_i^*(t) f_j(\tau) dt d\tau \tag{4.28}$$

Utilitzant aquestes correlacions creuades juntament amb la autocorrelació que vam veure en (4.19) i (4.20), es possible obtenir la matriu de correlació  $\underline{\underline{R}}$  del vector columna  $\underline{c}$  format per les variables aleatòries donades pels  $M$  coeficients  $u_i$  i  $v_i$  de l'expansió KL

$$\underline{c} = [u_1 \dots u_M \ v_1 \dots v_M]^T \tag{4.29}$$

La matriu de correlació  $\underline{\underline{R}}$  és la següent.

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & E[u_1 v_1^*] & E[u_2 v_1^*] & \dots & E[u_M v_1^*] \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & E[u_1 v_2^*] & E[u_2 v_2^*] & \dots & E[u_M v_2^*] \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \lambda_M & E[u_1 v_M^*] & E[u_2 v_M^*] & \dots & E[u_M v_M^*] \\ E[u_1^* v_1] & E[u_2^* v_1] & \dots & E[u_M^* v_1] & \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ E[u_1^* v_2] & E[u_2^* v_2] & \dots & E[u_M^* v_2] & 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ E[u_1^* v_M] & E[u_2^* v_M] & \dots & E[u_M^* v_M] & 0 & \vdots & \vdots & \sigma_M \end{bmatrix}$$

També és útil introduir el vector columna  $\underline{a}$

$$\underline{a} = [\alpha_1 \dots \alpha_M \ 0 \dots 0]^T \quad (4.30)$$

Que conté els coeficients de l'expansió KL del senyal. La variable de decisió vista en (4.26) es pot tornar a escriure com una forma quadràtica, o amb notació vectorial, de la següent manera;

$$v = \underline{x}^T \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^{2M} x_i^2 \quad (4.31)$$

On

$$\underline{x} = [x_1 \dots x_{2M}]^T = \underline{c} + \underline{a} \quad (4.32)$$

I

$$E\{\underline{x}\} = \underline{a} \quad (4.33)$$

$$E\{\underline{x} \cdot \underline{x}^T\} = \underline{\underline{R}} \quad (4.34)$$

Finalment, s'introdueix un nou vector de variables aleatòries  $\underline{y}$  definit com:

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{x} \quad (4.35)$$

I imposem que la seva matriu de correlació sigui una matriu diagonal. Aquesta condició es pot obtenir imposant que  $\underline{\underline{P}}$  sigui una matriu ortogonal, satisfent

$$\underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\psi}} \quad (4.36)$$

On  $\underline{\underline{\psi}}$  és una matriu diagonal la qual els elements diferents de zero  $\psi_i$  són autovalor de  $\underline{\underline{R}}$ . Es pot demostrar que  $\underline{\underline{y}}^T \cdot \underline{\underline{y}} = \underline{\underline{x}}^T \cdot \underline{\underline{x}}$ , i per tant la variable de decisió  $v$  alternativa es pot expressar com

$$v = \underline{\underline{y}}^T \cdot \underline{\underline{y}} = \sum_{i=1}^{2M} y_i^2 \quad (4.37)$$

On

$$E\{\underline{\underline{y}}\} = \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{a}} = [\beta_1 \dots \beta_{2M}] \quad (4.38)$$

$$E\{\underline{\underline{y}} \cdot \underline{\underline{y}}^T\} = \underline{\underline{\psi}} = \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{P}} \quad (4.39)$$

Les variables aleatòries  $y_i$  resulten ser mútuament incorrelades, ja que la seva matriu de correlació és diagonal. La funció generadora de moments (MGF) o funció característica  $\phi_v$  de la variable aleatòria  $v$  es pot escriure com;

$$\phi_v(z) = E\{e^{-zv}\} = \prod_{i=1}^{2M} \frac{\exp\left\{\frac{-\beta_i^2 z}{1 + 2\psi_i z}\right\}}{\sqrt{(1 + 2\psi_i z)}} \quad (4.40)$$

On  $\beta_i$  són els elements de  $\underline{\underline{b}}$  i  $\psi_i$  són els autovalors de  $\underline{\underline{\psi}}$ , que també són els autovalors de  $\underline{\underline{R}}$ .

Quan  $m_I(t)$  i  $m_Q(t)$  són incorrelats, llavors  $\underline{\underline{R}}$  és una matriu diagonal, la qual els elements diferents de zero són els autovalors  $\lambda_i$  i  $\sigma_i$ . Així,  $\underline{\underline{\psi}}$  és igual que  $\underline{\underline{R}}$ , i  $\underline{\underline{P}}$  és la matriu identitat. En aquest cas, ja que  $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{a}}$ , la funció generadora de moments es pot escriure com

$$\phi_v(z) = E\{e^{-zv}\} = \prod_{i=1}^M \frac{\exp\left\{\frac{-\alpha_i^2 z}{1 + 2\lambda_i z}\right\}}{\sqrt{(1 + 2\lambda_i z)}\sqrt{(1 + 2\sigma_i z)}} \quad (4.41)$$

Així que quan  $m_I(t)$  i  $m_Q(t)$  són incorrelats, l'avaluació de la funció generadora de moments es molt més simple, ja que no és necessari l'avaluació dels coeficients de la matriu  $\underline{\underline{R}}$  ni tampoc la resolució de cap problema d'autovalors per trobar la matriu  $\underline{\underline{\psi}}$ .

La BER del sistema es pot trobar a partir de

$$\begin{aligned}
P(e) &= \frac{1}{2}(P(e|0) + P(e|1)) \\
&= \frac{1}{2}\left(P(v > V_{th} | A^2 = 0) + P(v < V_{th} | A^2 = P_{peak})\right)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

On  $V_{th}$  és el llindar de decisió. Utilitzant la fórmula d'inversió de Riemann-Fourier en la MGF, aquestes probabilitats es poden avaluar com

$$P(v > V_{th} | A^2 = 0) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\phi_v(z | A = 0)}{z} e^{zV_{th}} dz, \quad c < 0 \tag{4.43}$$

$$P(v < V_{th} | A^2 = P_{peak}) = +\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\phi_v(z | A)}{z} e^{zV_{th}} dz, \quad c > 0 \tag{4.44}$$

On  $c$  és una constant determinada pel camí d'integració en el pla complex  $z$ . Per resoldre aquestes integral s'han d'utilitzar mètodes numèrics, com per exemple la regla de Simpson o el mètode d'integració de Saddlepoint. Es pot trobar més informació relacionada amb aquest tema en [20].

## 4.2 Model de Marcuse. Expansió en sèrie de Fourier

Un anàlisi similar al anterior el va realitzar Marcuse per senyals deterministes en [18][21]. En el seu cas, va estudiar l'efecte del soroll ASE i el va modelar com una sèrie de Fourier amb coeficients complexos (cada un d'ells, tant la part real com la imaginària, v.a. normals). Humblet i Azizoglu també van fer un estudi similar en [19]. Assumirem que el senyal òptic d'entrada està limitat en temps en l'interval  $[0, T]$ , i que pot ser expressat com la part real de la funció complexa [22]:

$$s(t) = \text{Re}\{E_s(t)e^{j\omega_0 t}\} \tag{4.45}$$

On  $\omega_0 = 2\pi f_0$  és la freqüència angular de la portadora, amb  $f_0$  la freqüència òptica. La funció  $E_s(t)$  és l'envoltant complexa de  $s(t)$ , on  $s(t)$  és una funció real. La figura 4.3 mostra el model equivalent passa-baix de Marcuse.

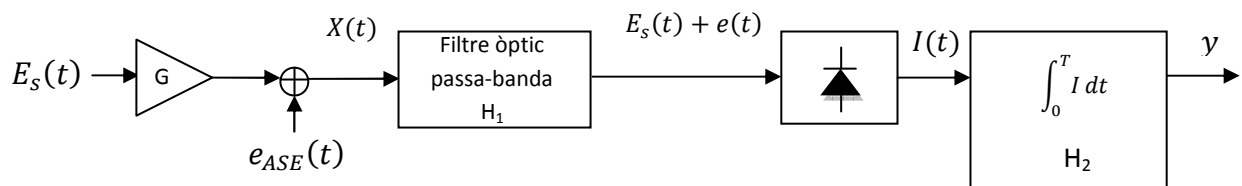


Figura 4.3. Model passa-baix de Marcuse

En la figura 4.3 es mostra un receptor totalment ideal per una modulació OOK (PAM unipolar-binari) amb un preamplificador òptic afectat pel model additiu de soroll blanc i

Gaussià (AWGN). L'efecte del soroll  $e_{ASE}(t)$  es redueix a partir d'un filtre òptic passa banda ideal de banda estreta  $H_1$ . El fotodetector es modela com un dispositiu amb llei quadràtica i sense memòria amb el senyal rebut filtrat com a entrada. Aquest model amb llei quadràtica és una aproximació que no introdueix el soroll shot. El senyal de sortida del dispositiu amb llei quadràtica (fotodetector) es filtra amb un filtre ideal integrador de post-detecció  $H_2$ .

El senyal òptic de sortida del preamplificador amb guany  $G$  és modela per  $X(t)$  en una representació del senyal complex com [22]:

$$X(t) = \sqrt{G}E_s(t) + e_{ASE}(t) \quad (4.46)$$

On  $e_{ASE}(t)$  és un procés estacionari blanc i Gaussià que representa el soroll ASE. La seva densitat espectral de potència està determinada per les propietats generals d'amplificació òptica de la llum en un medi atòmic.

Representarem l'estat del senyal òptic "1" (d'un senyal modulad en OOK i conformat amb polsos NRZ) en un interval de bit  $[0, T]$  i en el pla complex, com la sèrie de Fourier següent:

$$E_s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\nu} e^{j\omega_{\nu}t} \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.47)$$

On  $\omega_{\nu} = \frac{2\pi}{T}\nu$ , i  $\varepsilon_{\nu}$  són els coeficients de Fourier. L'estat de senyal òptic corresponent al bit "0" es representa com absència de senyal.

En l'expansió en sèrie de Fourier (4.47), que representa l'amplitud del camp elèctric pel bit "1", s'ha negligit el terme d'impedància intrínseca del medi que apareix en el vector camp magnètic i en el vector de Pointing, ja que no influeix en els càlculs. Aquesta constant depenent del medi hauria d'aparèixer en les expressions del corrent fotodetectat, ja que és directament proporcional a la potència òptica i aquesta no és més que la integral de superfície del vector de Pointing, però com s'ha dit anteriorment és una simple constant i no la tindrem en compte.

Podem modelar el soroll ASE, degut a l'amplificació de l'emissió espontània en els amplificadors òptics EDFA, com una sèrie de Fourier (en notació exponencial) definida en un interval de temps  $[0, T]$  com:

$$e_{ASE}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} e^{j\omega_{\nu}t} \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.48)$$

On  $\omega_{\nu} = \frac{2\pi}{T}\nu$  i  $c_{\nu}$  són els coeficients de Fourier de la sèrie.

La part real de les quantitats complexes vistes en (4.47) i (4.48),  $Re\{E_s(t)\}$  i  $Re\{e_{ASE}(t)\}$ , representen el senyal i el soroll físic. Els coeficients  $c_{\nu}$  del soroll s'interpreten com a

variables aleatòries Gaussians, independents i complexes, amb mitja  $\langle c_\nu \rangle = 0$  i amb varianza  $N_0/T$ . La varianza de  $c_\nu$  es considera la potència del soroll en la banda freqüencial  $1/T$  que ocupa el corresponent coeficient de Fourier. Per tant, podem assumir que el soroll ASE és aproximadament blanc en la banda  $B_{opt}$  del filtre òptic que segueix al preamplificador.

Abans de l'entrada al fotodetector, que recordem que té una llei quadràtica, el senyal i el soroll han de passar per un filtre òptic passa-banda  $H_1$ . Aquest filtre òptic té un ample de banda idoni per tal que el senyal pugui passar sense distorsionar-s'hi. Per l'avaluació de la probabilitat d'error, és convenient que  $H_1$  sigui un tipus especial de filtre especificat per una expansió en sèrie de Fourier. L'efecte sobre el soroll que ha de tenir aquest filtre és refusar totes aquelles freqüències que queden fora de la banda de pas  $B_{opt}$  que s'estén entre  $\nu = \nu_1$  i  $\nu = \nu_1 + M$ , d'acord amb la representació en sèrie de Fourier. Així, definim  $M$  com el producte entre el temps de bit  $T$  i l'ample de banda del filtre òptic  $B_{opt}$ , o d'una altra manera com:

$$B_{opt} = \frac{M}{T} \quad (4.49)$$

S'ha de comentar que l'aproximació Gaussiana que s'utilitza per calcular la probabilitat d'error en un fotodetector PIN, és bastant bona per a valors de  $M \gg 1$  (aproximadament comença a ser bona per un nombre de modes més gran que 10), però resulta inadequada per valors de  $M$  petits. Aquest comportament s'estudia amb detall en l'apartat 5.5.

La major part de l'espectre d'un senyal NRZ amb bit-rate  $R_b$  està confinat dins d'un ample de banda de  $2R_b$ , i l'ample de banda a -3dB és molt proper a  $R_b$ . Tenint present aquesta consideració, l'ample de banda a -3dB del filtre elèctric passa-baix ha de ser com a mínim:

$$B_e = \frac{1}{2T} = 0.5R_b \quad (4.50)$$

Així, segons aquesta consideració també podem definir  $M$  com:

$$M = \frac{B_{opt}}{2B_e} \quad (4.51)$$

Noteu que un filtre passa-banda operant a freqüències òptiques és extremadament de banda estreta i la resposta impulsional  $h_1(t)$  pot ser caracteritzada per una funció complexa equivalent passa-baixes  $f(t)$  [23];

$$h_1(t) = f(t)e^{j\omega ct} + f^*(t)e^{-j\omega ct} = 2\text{Re}\{f(t)e^{j\omega ct}\} \quad (4.52)$$

El senyal  $E_s(t)$  està confinat en l'interval de bit i la resposta impulsional  $f(t)$  s'assumeix que està limitada en el mateix interval, per tant es pot expressar també com una sèrie de Fourier.

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{\nu} e^{j\omega_{\nu}t} \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.53)$$

Un filtre passa-banda d'ample de banda  $B_{opt} = M/T = (2L + 1)/T$  amb una atenuació aproximadament igual en la banda de pas, s'obté fixant  $f_{\nu} = 0$  per  $|\nu| > L$  i  $f_{\nu} = 1$  per  $|\nu| \leq L$ .

$$f(t) = \sum_{\nu=v_1}^{v_1+M} e^{j\omega_{\nu}t} = \sum_{\nu=-L}^L e^{j\omega_{\nu}t} \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.54)$$

L'ample de banda  $B_{opt}$  del filtre òptic s'ha dissenyat de manera que el senyal òptic pot passar sense alterar-se, això significa que  $E_s(t)$  es pot expressar com la següent sèrie de Fourier (noteu que no hem modificat la nomenclatura del senyal, ja que està limitat en banda i el filtre ideal no modifica el comportament):

$$E_s(t) = \sum_{\nu=-L}^L \varepsilon_{\nu} e^{j\omega_{\nu}t} \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.55)$$

On s'han eliminat tots els coeficients de Fourier que cauen fora de la banda de pas.

Degut a la ortogonalitat de les funcions base  $e^{j\omega_{\nu}t}$ , es pot deduir fàcilment la següent relació:

$$\int_0^T E_s^2(t) dt = T \sum_{\nu=-L}^L \varepsilon_{\nu}^2 \quad (4.56)$$

El filtrat òptic en la sèrie de Fourier que representa el soroll ASE (expressió (4.48)) elimina tots els coeficients de Fourier amb índex  $|\nu| > L$ . Així el soroll ASE a la sortida del filtre òptic és (observeu que en aquest cas hem modificat la notació per diferenciar el soroll sense filtrar  $e_{ASE}(t)$  del soroll filtrat  $e(t)$ ):

$$e(t) = \sum_{\nu=-L}^L c_{\nu} e^{j\omega_{\nu}t} \quad (4.57)$$

On els coeficients  $c_{\nu}$  són v.a. complexes i Gaussians, independents i igualment distribuïdes, i venen definits com la transformada inversa de Fourier en la freqüència  $\omega_{\nu}$ :



$$c_\nu = \frac{1}{T} \int_0^T e_{ASE}(t) e^{-j\omega_\nu t} dt \quad (4.58)$$

La part real i imaginària, o el que és el mateix les components en fase i quadratura de  $c_\nu = c_{r\nu} + jc_{i\nu}$  són independents, i per simplificar els càlculs tenen la mateixa varianza per tot  $-L \leq \nu \leq L$

$$\langle c_{r\nu}^2 \rangle = \langle c_{i\nu}^2 \rangle = N_0/T \quad (4.59)$$

Els coeficients complexos de Fourier de  $E_s(t)$  i  $e(t)$  també els podem expressar en funció del seu mòdul i argument com:

$$c_\nu = c_{r\nu} + jc_{i\nu} = \bar{c}_\nu e^{j\phi_\nu} \quad (4.60)$$

$$e_\nu = \varepsilon_{r\nu} + j\varepsilon_{i\nu} = \bar{\varepsilon}_\nu e^{j\psi_\nu} \quad (4.61)$$

Continuant amb l'anàlisi, podem considerar que el soroll ASE està format pels dos termes de polarització ortogonal del camp [24]. Definim  $e_{cp}(t)$  com la part del soroll ASE copolaritzada amb el senyal, i  $e_{op}(t)$  com la part del soroll ASE ortogonalment polaritzada amb el senyal. Tant  $e_{cp}(t)$  com  $e_{op}(t)$  es defineixen de la mateixa manera que hem vist en l'expressió (4.57). Prenent aquesta consideració de la polarització, el nivell de corrent a la sortida del fotodetector es proporcional al valor absolut al quadrat de la suma del camp elèctric corresponent al senyal més el soroll ASE, i als termes de soroll deguts al soroll shot i al soroll tèrmic [24]. Considerarem que el soroll shot i el soroll tèrmic són negligibles vers el soroll ASE. Noteu que l'efecte de la llei quadràtica sobre el senyal i el soroll ASE fa que el corrent es pugui descompondre en tres batudes (senyal-senyal, senyal-ASE i ASE-ASE):

$$\begin{aligned} I(t) &= R \cdot P_{opt} + i_{th} + i_{sh} = R \cdot \left( |\sqrt{G}E_s(t) + e_{cp}(t)|^2 + |e_{op}(t)|^2 \right) + i_{th} + i_{sh} \approx \\ &\approx GRP_s + i_{s-ASE} + i_{ASE-ASE} \end{aligned} \quad (4.62)$$

On

- $GRP_s$ : corrent proporcional al senyal.
- $i_{s-ASE}$ : batuda entre senyal i soroll ASE.
- $i_{ASE-ASE}$ : batuda entre soroll ASE i soroll ASE.
- $i_{th}$ : fluctuacions de corrent degudes al soroll tèrmic.
- $i_{sh}$ : fluctuacions de corrent degudes al soroll shot.

Desenvolupant el quadrat de l'expressió (4.62) i fent servir (4.55), (4.57), (4.60) i (4.61), el nivell de corrent a la sortida del fotodetector (justament abans del filtrat elèctric) es justifica

seguidament, tenint present que l'enter  $p = 1$  indica que hi ha ubicat a l'entrada del receptor un filtre polaritzador, i  $p = 2$  indica que no hi ha cap polaritzador [24]. Per simplificar els càlculs hem suposat que  $|e_{cp}(t)|^2 = |e_{op}(t)|^2$ , i l'hem notat multiplicant per  $p$ .

$$\begin{aligned}
 I(t) &= R \left[ |\sqrt{G}E_s(t)|^2 + |e_{cp}(t)|^2 + \sqrt{G}E_s(t)e_{cp}^*(t) + \sqrt{G}E_s^*(t)e_{cp}(t) + |e_{op}(t)|^2 \right] \\
 &= RG \sum_{v=-L}^L \sum_{\eta=-L}^L (\bar{\varepsilon}_v \bar{\varepsilon}_\eta e^{j\psi_v} e^{-j\psi_\eta} e^{j\omega_v t} e^{-j\omega_\eta t}) \\
 &+ Rp \sum_{v=-L}^L \sum_{\eta=-L}^L [\bar{c}_v e^{j\varphi_v} \bar{c}_\eta e^{-j\varphi_\eta} e^{j\omega_v t} e^{-j\omega_\eta t}] \\
 &+ R\sqrt{G} \sum_{v=-L}^L \sum_{\eta=-L}^L [\bar{c}_v e^{-j\varphi_v} \bar{\varepsilon}_\eta e^{j\varphi_\eta} e^{-j\omega_v t} e^{j\omega_\eta t}] \\
 &+ R\sqrt{G} \sum_{v=-L}^L \sum_{\eta=-L}^L [\bar{c}_v e^{j\varphi_v} \bar{\varepsilon}_\eta e^{-j\varphi_\eta} e^{j\omega_v t} e^{-j\omega_\eta t}]
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

El filtre elèctric passa-baix  $h_2(t)$  no és res més que un promitjador temporal (un integrador en un període de símbol  $T$ ), o també anomenat filtre I&D (integrate-and-dump). El filtre I&D és el filtre de post-detecció més senzill en quant a l'anàlisi es refereix (per exemple que els filtres triangulars o d'altres més complexos com els de Bessel, etc.). La resposta impulsional d'un filtre I&D és rectangular de manera que [22]:

$$h_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases} \tag{4.64}$$

Això equival a integrar en un període de símbol  $T$  el senyal detectat, en efecte:

$$y(\tau) = I(\tau) * h_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau - t) I(t) dt \tag{4.65}$$

I si  $\tau = T$  (lògicament, ja que es mostreja cada  $1/T$ ):

$$y(\tau = T) = \int_0^T I(t) dt \tag{4.66}$$

Es correspon a un integrador. Realitzant la integral...

$$y = R \left[ TG \sum_{v=-L}^L \bar{\varepsilon}_v^2 + Tp \sum_{v=-L}^L [(c_{rv}^2 + c_{iv}^2)] + 2T\sqrt{G} \sum_{v=-L}^L c_{rv} \bar{\varepsilon}_v \right] \tag{4.67}$$

On noteu que les funcions base  $e^{j2\pi v t/T}$  són ortogonals, i per tant:

$$\int_0^T e^{j2\pi vt/T} e^{-j2\pi \eta t/T} dt = \begin{cases} T & \text{si } v = \eta \\ 0 & \text{si } v \neq \eta \end{cases} \quad (4.68)$$

I simplificant queda (on  $I_s = RGT \sum_{v=-L}^L \bar{\epsilon}_v^2$ )

$$y = I_s + RT \left[ pG \sum_{v=-L}^L [(c_{rv}^2 + c_{iv}^2)] + 2\sqrt{G} \sum_{v=-L}^L c_{rv} \bar{\epsilon}_v \right] \quad (4.69)$$

#### 4.2.1 Mitja i varianza pel bit "0"

Pel cas del nivell lògic "0" ("space"), podem fixar que  $\bar{\epsilon}_v = 0$  per tot  $v$ . El resultat és:

$$y = RpT \sum_{v=-L}^L (c_{rv}^2 + c_{iv}^2) \quad (4.70)$$

On s'han separat els coeficients  $c_v$  en la seva part real i imaginària  $\forall v$ . Cada un d'aquests coeficients de Fourier filtrats (tant la part real com la imaginària) són una variable aleatòria normal amb mitja  $\langle c_{rv} \rangle = \langle c_{iv} \rangle = 0$  i varianza constant  $\langle c_{rv}^2 \rangle = \langle c_{iv}^2 \rangle = 2\sigma^2/T$ .

Com que hem estat operant amb quantitats complexes, haurem de dividir la variable  $y$  entre 2. Així, definirem la variable de decisió  $U$  com:

$$U = \frac{RpT}{2} \sum_{v=-L}^L (c_{rv}^2 + c_{iv}^2) \quad (4.71)$$

Tenint en compte que pel bit zero tenim absència de senyal ("space"), degut a que es tracta d'una modulació unipolar de dos nivells, podem calcular la mitja com:

$$\bar{I}_0 = \langle U \rangle = 2R\sigma^2 pM \quad (4.72)$$

Per tant, substituint  $\sigma^2 = N_0/2...$

$$\bar{I}_0 = \langle U \rangle = pMRN_0 \quad (4.73)$$

I la varianza pel bit "0"

$$\sigma_0^2 = 4R^2 pM \sigma^4 \quad (4.74)$$

De manera que...

$$\sigma_0^2 = R^2 pMN_0^2 \quad (4.75)$$

On observant l'expressió (4.71) es pot veure que es tracta d'una distribució central chi-square, amb  $n = 2pM = 2p(2L + 1)$  graus de llibertat i varianza normal  $\sigma^2 = N_0/2$ . Es veurà més endavant, que per una distribució central chi-square, la mitja i la varianza són [23][25]:

$$E\{y\} = n \cdot \sigma^2 \quad (4.76)$$

$$\sigma_y^2 = 2 \cdot n \cdot \sigma^4 \quad (4.77)$$

#### 4.2.2 Mitja i varianza pel bit "1"

Per altre banda, el nivell lògic "1" ("mark") detecta un nivell de corrent proporcional a:

$$I_1(t) = R \left[ |\sqrt{G}E_s|^2 + \sqrt{G}E_s e_{cp}^* + \sqrt{G}E_s^* e_{cp} + |e_{cp}|^2 + |e_{op}|^2 \right] \quad (4.78)$$

Després de promitjar en un temps de símbol, la variable  $y$  queda:

$$y = I_s + RT \left[ p \cdot \sum_{v=-L}^L [(c_{rv}^2 + c_{iv}^2)] + 2\sqrt{G} \sum_{v=-L}^L c_{rv} \bar{\varepsilon}_v \right] \quad (4.79)$$

Com en el cas del símbol "0", definim la variable de decisió  $U$  com:

$$U = \frac{I_s}{2} + \frac{RT}{2} \left[ p \cdot \sum_{v=-L}^L [(c_{rv}^2 + c_{iv}^2)] + 2\sqrt{G} \sum_{v=-L}^L c_{rv} \bar{\varepsilon}_v \right] \quad (4.80)$$

Fent servir aquesta variable de decisió, la mitja pel bit "1" es pot escriure com:

$$\bar{I}_1 = \langle U \rangle = \frac{RGT}{2} \sum_{v=-L}^L \bar{\varepsilon}_v^2 + 2R\sigma^2 pM \quad (4.81)$$

Si definim l'energia del senyal com:

$$s^2 = \frac{1}{2} \int_0^T G |E_s(t)|^2 dt = \frac{T}{2} \sum_{v=-L}^L \bar{\varepsilon}_v^2 G = mG \quad (4.82)$$

Llavors...

$$\bar{I}_1 = \langle U \rangle = R G m + R p M N_0 \quad (4.83)$$

I la varianza pel bit "1" és:

$$\sigma_1^2 = 4R^2 p M \sigma^4 + 4R^2 G \sigma^2 \frac{T}{2} \sum_{v=-L}^L \bar{\varepsilon}_v^2 \quad (4.84)$$

Simplificant queda...

$$\sigma_1^2 = R^2 p M N_0^2 + 2R^2 G m N_0 \quad (4.85)$$

En aquest cas, observant l'expressió (4.80) es pot demostrar que la distribució de sortida és non-central chi-square amb  $n = 2pM = 2p(2L + 1)$  graus de llibertat, varianza normal  $\sigma^2 = N_0/2$  i paràmetre  $s^2 = \frac{T}{2} \sum_{v=-L}^L \bar{\varepsilon}_v^2 G$ . En efecte, la mitja i varianza per una distribució non-central chi-square és [23]:

$$E\{y\} = n \cdot \sigma^2 + s^2 \quad (4.86)$$

$$\sigma_y^2 = 2 \cdot n \cdot \sigma^4 + 4 \cdot \sigma^2 \cdot s^2 \quad (4.87)$$



# 5 Comunicacions amb amplifícató òptica i aproximació Gaussiana

## 5.1 Soroll EDFA

Els amplificadors òptics EDFA fan ús d'un element de la família de terres rares, l'erbi, que s'utilitza per dopar el nucli de la fibra durant el procés de fabricació. Quan l'erbi s'incorpora dins d'una estructura amorfa de sílica-glass (òxid de sílici), aquest s'ionitza triplement. La naturalesa amorfa de l'òxid de sílici amplia els nivells energètics dins de les bandes. La separació energètica entre les dues bandes inferiors, es corresponen al rang de longituds d'ona de 1.46 a 1.62  $\mu\text{m}$  que coincideixen amb la regió de menor pèrdua de les fibres d'òxid de sílici. Aquestes dos bandes s'utilitzen per amplificar un senyal WDM que ocupi les bandes C i L. La figura 5.1 mostra l'espectre de l'absorció i del guany per les transicions atòmiques en aquestes bandes. S'observa que al major guany el presenta entorn a 1.54  $\mu\text{m}$ . Per produir la inversió de població és necessari bombejar la fibra òptica dopada amb un làser operant constantment a una freqüència superior a la que s'amplifica. Per bombejar l'EDFA s'utilitza un làser semiconductor emetent en la regió espectral propera a 980 nm o 1480 nm (habitualment es bombeja combinant ambdues bandes).

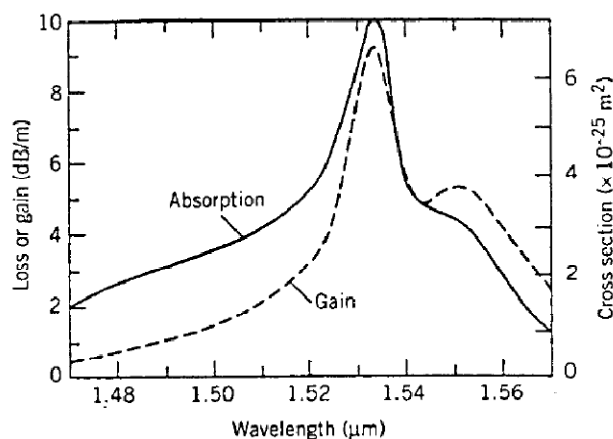


Figura 5.1. Espectre d'absorció i guany d'un EDFA

L'amplificació ocorre quan els ions de l'erbi en l'estat excitat emeten llum coherent a través de l'emissió estimulada. Ocasionalment, un ió excitat pot caure al nivell energètic inferior a través d'un procés conegut com emissió espontània i emetre un fotó de més o menys la mateixa energia que els fotons del senyal però amb fase arbitrària. En el cas de les fibres òptiques (que es tracta d'un medi guiat), l'emissió espontània ocorre en tots els modes suportats per la fibra (guiats i no guiats). Evidentment, alguns d'aquests fotons apareixerien de tant en quant en el mateix mode que ocupa el senyal. Això significa que un fotó emès espontàniament altera tant l'amplitud com la fase del camp òptic de forma aleatòria. Aquestes pertorbacions aleatòries del senyal són la font del soroll en els amplificadors òptics EDFAs. El soroll predominant que introdueix l'amplificador òptic EDFA s'anomena soroll ASE (amplified spontaneous emission). El soroll ASE es modela per un procés Gaussià i blanc de banda estreta, amb densitat espectral  $S_{ASE}$  d'una sola banda:

$$S_{ASE} = N_0 = n_{sp} h\nu(G - 1) \quad (5.1)$$

O també es pot definir com un procés Gaussià i blanc amb densitat espectral de doble banda (densitat espectral per freqüències positives i negatives) amb  $S_{ASE}$ :

$$S_{ASE} = N_0/2 = n_{sp} h\nu(G - 1)/2 \quad (5.2)$$

Sovint, s'utilitza un filtre òptic ubicat després de l'amplificador per reduir la potència del soroll. En aquest cas, el soroll afegit només afecta a la banda de pas del filtre passa banda, i la potència del soroll és:

$$P_{ASE} = 2n_{sp} h\nu(G - 1)B_o \quad (5.3)$$

On  $n_{sp}$  és el Factor d'emissió espontània ( $F_n = 2n_{sp}$  és la figura de soroll que quantifica el soroll ASE),  $B_o$  és l'ample de banda efectiu del filtre òptic i el factor 2 dins de  $P_{ASE}$  es degut a la naturalesa no polaritzada del soroll ASE. Aquest resultat prové de suposar que el soroll ASE es blanc i Gaussià amb densitat espectral de doble banda  $N_0/2$  al voltant de les freqüències on estem treballant, i per tant modela un canal AWGN. L'expressió (5.3) es pot demostrar molt fàcilment. Suposem que el filtre òptic és un filtre passa banda ideal, on en la banda de pas  $|H_{opt}(f)|^2 = 1$ , i fora d'aquesta és zero, llavors tindrem el que es representa en la figura 5.2.

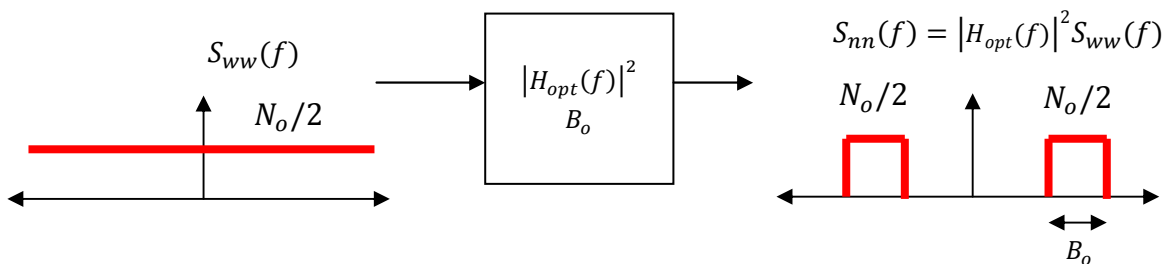


Figura 5.2. Procés de filtrat òptic passa banda del soroll blanc



Tenint en compte aquest procés, la potència del soroll ASE a l'entrada del fotodetector és:

$$P_{ASE} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(f) df = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{opt}(f)|^2 S_{ww}(f) df = 2 \frac{2B_o N_o}{2} = 2n_{sp} h\nu (G - 1) B_o \quad (5.4)$$

Com hem dit a dalt, el factor 2 s'ha de incloure ja que una fibra òptica monomode suporta dos possibles modes de polarització ortogonals. Només la meitat de potència apareix en el component de soroll que està copolaritzat amb el senyal òptic.

## 5.2 Fluctuacions de corrent induïdes pel soroll ASE

En capítols anteriors hem vist que el corrent detectat a la sortida del fotodetector està format pel senyal i pels corrents deguts a les batudes del soroll ASE, el soroll shot i el soroll tèrmic. Així el corrent fotodetectat és:

$$I = GRP_s + i_{s-ASE} + i_{ASE-ASE} + i_{th} + i_{sh} \quad (5.5)$$

On  $i_{s-ASE}$  i  $i_{ASE-ASE}$  representen les fluctuacions de corrent resultants de les batudes de senyal-ASE i de ASE-ASE respectivament, i venen donades per (veure [24] [26]):

$$i_{s-ASE} = 2R(GP_s S_{ASE}/T)^{1/2} \sum_{m=1}^M \cos[(\omega_0 - \omega_m)t + \phi_m - \phi_0] \quad (5.6)$$

$$i_{ASE-ASE} = 2R(S_{ASE}/T) \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \cos[(\omega_n - \omega_m)t + \phi_m - \phi_n] \quad (5.7)$$

On  $R$  és la responsivitat del fotodíode,  $P_s$  és la potència del senyal,  $M = TB_{opt}$  és el nombre de modes,  $\omega_0$  és la freqüència angular de la portadora del senyal,  $\phi_m$  són les fases de les components del soroll, i  $\phi_0$  és la fase del senyal. Ja que aquestes dues fluctuacions de corrent són ràpides en el temps, necessitem trobar les seves mitges i variàncies. És fàcil trobar que la mitja de la batuda *senyal x soroll* és  $\langle i_{s-ASE} \rangle = 0$ . En canvi, la mitja del component de corrent  $i_{ASE-ASE}$  és:

$$\langle i_{ASE-ASE} \rangle = 2RS_{ASE}B_{opt} = RP_{ASE} \quad (5.8)$$

Segons [24][27], les fluctuacions de corrent en un fotodetector es poden escriure com:

$$\sigma^2 = \sigma_{TH}^2 + \sigma_{shot}^2 + \sigma_{s-ASE}^2 + \sigma_{ASE-ASE}^2 \quad (5.9)$$

Quantificant cada una de les variàncies del corrent (per un sistema no polaritzat):

$$\sigma_{shot}^2 = 2q[R(P_s + P_{ASE})]B_e \quad (5.10)$$

$$\sigma_{s-ASE}^2 = 4R^2 P_s n_{sp} h\nu (G - 1) B_e \quad (5.11)$$

$$\sigma_{ASE-ASE}^2 = 4R^2 \left( n_{sp} h\nu (G - 1) \right)^2 B_{opt} B_e \quad (5.12)$$

En [22][27] i en l'aproximació de Marcuse [18][21] es va suposar que la densitat espectral del soroll corresponent a la batuda ASE-ASE tenia una forma rectangular. A la pràctica això no és així, i com s'explica en [24] [26], la densitat espectral del soroll corresponent a la batuda ASE-ASE és triangular. Aquesta consideració és fàcil de deduir. Sigui  $E_s$  el camp elèctric relacionat amb el senyal òptic i  $E_n$  és el camp elèctric relacionat amb el soroll ASE. El corrent a la sortida del fotodetector és  $i_{ph} \propto (E_s + E_n)^2$ , i si desenvolupem el quadrat  $i_{ph} \propto E_s^2 + E_n^2 + 2E_s E_n$ , on " $E_n^2$ " és la batuda *soroll x soroll* i " $2E_s E_n$ " és la batuda *senyal x soroll*. Això implica que si  $E_n$  és un procés estocàstic amb densitat espectral rectangular (degut al filtrat òptic), llavors  $E_n^2$ , que en el domini temporal és  $E_n \cdot E_n$ , en el domini freqüencial és la convolució de dos densitats espectrals rectangulars, que dona com a resultat una densitat espectral triangular.

La figura 5.3 mostra la densitat espectral del soroll per les batudes de corrent ASE-ASE (triangular) i senyal-ASE (rectangular) per estat de polarització. El soroll acceptat pel receptor s'aconsegueix integrant la densitat espectral de potència des del nivell de continua fins a  $B_e$ . S'ha de notar que el nivell absolut de soroll ASE-ASE pot ser reduït al reduir  $B_{opt}$  mentre que això no passa amb la batuda del soroll senyal-ASE.

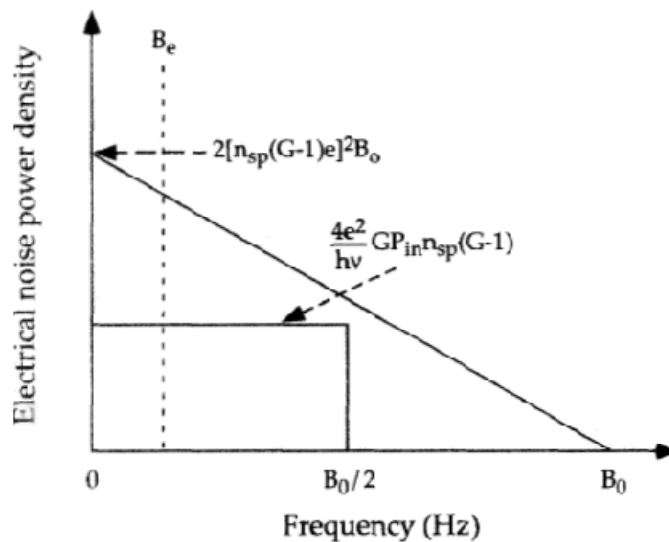


Figura 5.3. Densitats espectrals de les batudes del soroll ASE

Prenent la consideració de la densitat espectral ASE-ASE triangular, la varianza serà:

$$\sigma_{ASE-ASE}^2 = 4R^2 \left( n_{sp} h\nu (G - 1) \right)^2 B_e (B_{opt} - B_e/2) \quad (5.13)$$

Per relacionar aquestes variàncies amb les que vam veure en l'aproximació de Marcuse, prèviament hem de normalitzar les expressions o bé desnormalitzar els resultats de Marcuse. A més a més, les fluctuacions anteriors estan definides per un sistema sense polaritzador a l'entrada, per tant es tindran en compte els dos estats de polarització, això afectarà al nombre de graus de llibertat. Després d'aquests incisos, les variàncies del soroll ASE normalitzades per l'ample de banda del senyal queden:

$$\bar{\sigma}_{s-ASE}^2 = \frac{\sigma_{s-ASE}^2}{(2B_e)^2} = \frac{4R^2 P_s n_{sp} h\nu (G - 1) B_e}{(2B_e)^2} \quad (5.14)$$

$$\bar{\sigma}_{ASE-ASE}^2 = \frac{\sigma_{ASE-ASE}^2}{(2B_e)^2} = \frac{4R^2 \left( n_{sp} h\nu (G - 1) \right)^2 B_{opt} B_e}{(2B_e)^2} \quad (5.15)$$

I prenent les següents observacions (s'utilitza part de la notació del capítol 4):

- $P_s = \frac{1}{2} G \sum_{v=-L}^L \bar{\epsilon}_v^2$  (Potència del senyal)

$$P_s = \frac{1}{2T} \int_0^T G |E_s(t)|^2 dt = \frac{1}{2} G \sum_{v=-L}^L \bar{\epsilon}_v^2 = \frac{mG}{T} \quad (5.16)$$

El factor 1/2 que segueix l'integral apareix degut a la notació complexa [22-23].

- $n_{sp} h\nu (G - 1) = 2\sigma^2 = N_0$  (Densitat espectral del soroll ASE d'una sola banda)
- $B_e = \frac{1}{2T}$  ( $B_e = 0.5R_b$ )
- $B_{opt} = M/T$  (Relació entre l'ample de banda del filtre òptic i del filtre elèctric)
- $p = 2$  (Ja que es tracta d'un sistema sense polaritzador a l'entrada)

Fent servir aquestes premisses i substituint en (5.14) i (5.15):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{s-ASE}^2 &= \frac{4R^2 P_s n_{sp} h\nu (G - 1) B_e}{(2B_e)^2} = \frac{4R^2 \frac{1}{2} G \sum_{v=-L}^L \bar{\epsilon}_v^2 N_0 B_e}{(2B_e)^2} \\ &= 2R^2 mGN_0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ASE-ASE}^2 &= \frac{4R^2 \left( n_{sp} h\nu (G - 1) \right)^2 B_{opt} B_e}{(2B_e)^2} = \frac{4R^2 (N_0)^2 2MB_e^2}{(2B_e)^2} \\ &= 2MR^2 N_0^2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

On clarament es pot observar que les expressions coincideixen amb les que apareixen en 4.2.

En la figura 5.4 es representa l'espectre òptic del soroll ASE i del senyal determinista. El soroll ASE està format per sub-bandes amb densitat espectral pràcticament planes i d'ample de banda  $1/T$ .

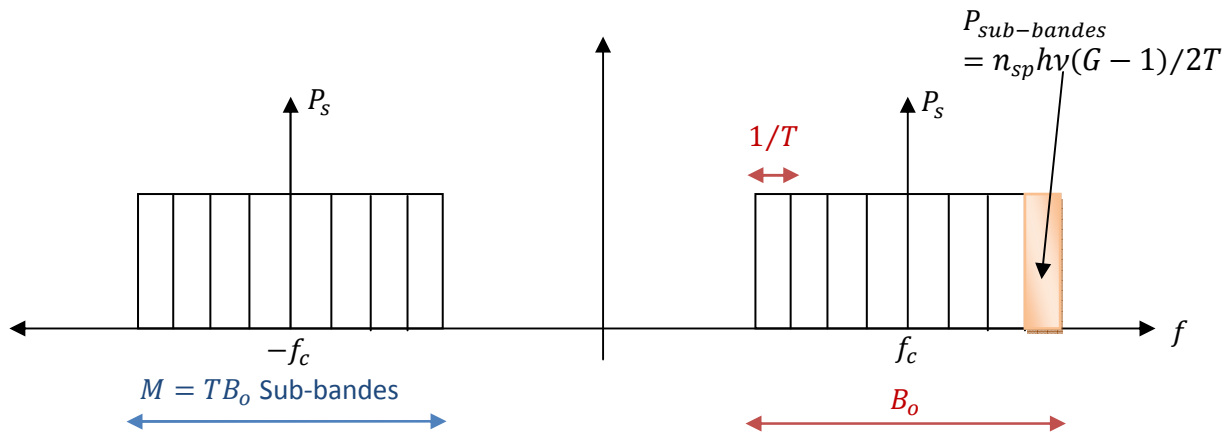


Figura 5.4. Discretització de l'espectre del soroll ASE del model de Marcuse

### 5.3 Impacte del soroll ASE en la SNR i Figura de soroll

És interessant calcular la SNR elèctrica en el receptor per poder quantificar la qualitat del senyal rebut. Prèviament, s'ha de notar que la mitja del corrent detectat és:

$$\langle I \rangle = R(GP_s + P_{ASE}) \quad (5.19)$$

Observeu que hem utilitzat l'expressió (5.8) de la mitja de la batuda ASE x ASE.

Per tant la SNR elèctrica ve donada per

$$SNR_e = \frac{\langle I \rangle^2}{\sigma^2} = \frac{R^2(GP_s + P_{ASE})^2}{\sigma_{TH}^2 + \sigma_{shot}^2 + \sigma_{s-ASE}^2 + \sigma_{ASE-ASE}^2} \quad (5.20)$$

És important observar si es millora o degrada la  $SNR_e$  a conseqüència de l'amplificació del senyal. Per resoldre aquesta qüestió, es compararà la  $SNR_e$  que hem vist en (5.20), amb la  $SNR$  en absència d'amplificador òptic. Fixant  $G = 1$  i  $P_{ASE} = 0$ , la  $SNR$  sense preamplificador a l'entrada ve donada per:

$$SNR'_e = \frac{R^2 P_s^2}{\sigma_{TH}^2 + \sigma_{shot}^2} \quad (5.21)$$

Considerarem primerament un receptor ideal amb absència de soroll tèrmic i 100% eficiència quàntica. En aquest cas, la  $SNR$  sense amplificació ve donada per  $SNR'_e = P_s / (2h\nu B_e)$ . Quan s'utilitza un amplificador, la fluctuació de corrent dominant és  $\sigma_{s-ASE}^2$ . Negligint  $\sigma_{ASE-ASE}^2$  i  $P_{ASE}$ , la  $SNR$  elèctrica amb preamplificador a l'entrada és:

$$SNR_e = \frac{GP_s}{(4S_{ASE} + 2h\nu)B_e} \quad (5.22)$$

Substituint  $S_{ASE}$  per  $n_{sp}h\nu(G-1)$ , trobem que l'amplificació òptica degrada la  $SNR$  elèctrica un factor de:

$$F_o = 2n_{sp} \left(1 - \frac{1}{G}\right) + \frac{1}{G} \quad (5.23)$$

$F_o$  es coneix com la figura de soroll d'un amplificador òptic. En el cas hipotètic d'un guany molt gran ( $G \gg 1$ ), la  $SNR$  es degradarà un factor  $F_o = 2n_{sp}$ .

A la pràctica, el soroll tèrmic excedeix al soroll shot. Negligint el soroll shot, i continuant utilitzant només el terme de soroll  $\sigma_{s-ASE}^2$ , es pot trobar que

$$\frac{SNR_e}{SNR'_e} = \frac{G\sigma_{TH}^2}{4R^2P_sS_{ASE}B_e} \quad (5.24)$$

Aquesta relació es pot fer bastant gran disminuint  $P_s$  i augmentant  $G$ . Per tant, la  $SNR$  elèctrica es pot millorar uns 20 dB o més comparant amb el valor obtingut sense amplificació.

## 5.4 Sensibilitat del receptor i Factor Q

El càlcul de la BER per un sistema de comunicacions òptic que utilitza amplificadors òptics fa servir la següent aproximació:

$$BER = \frac{1}{2} [P(0|1) + P(1|0)] \quad (5.25)$$

Tot i així, les probabilitats condicionades  $P(0|1)$  i  $P(1|0)$  requereixen conèixer la PDF pel corrent  $I$  corresponent als símbols 0 i 1. En un sistema de comunicacions òptiques amb amplificadors òptics la PDF no és Gaussiana (com ja s'ha vist al model de Marcuse o Karhunen-Loève) i s'hauria d'utilitzar una PDF més complicada per avaluar la BER (Chi-Square o altres obtingudes mitjançant la teoria de Karhunen-Loève). No obstant, els resultats són molt més simples si la PDF s'aproxima per una Gaussiana. En aquest apartat es farà servir aquesta aproximació Gaussiana, d'aquesta manera calcularem la BER amb la següent expressió:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{Q}{\sqrt{2}} \right) \quad (5.26)$$

On el paràmetre  $Q$  es calcula de la següent manera:

$$Q = \frac{I_1 - I_0}{\sigma_1 + \sigma_0} = \frac{RG(2\bar{P}_{rec})}{\sigma_1 + \sigma_0} \quad (5.27)$$

Aquesta fórmula s'ha obtingut suposant  $I_0 = 0$  i  $I_1 = RGP_1 = RG(2\bar{P}_{rec})$ , on  $\bar{P}_{rec}$  és la sensibilitat del receptor per un valor donat de BER ( $Q = 6$  per  $BER = 10^{-9}$ ).

Si substituïm  $R = \eta q/h\nu$  en (5.10), (5.11) i (5.12) i les deixem en termes de la figura de soroll  $F_o = 2n_{sp}$ , llavors:

$$\sigma_{shot}^2 = 2q^2\eta GP_s B_e/h\nu \quad (5.28)$$

$$\sigma_{s-ASE}^2 = 2(q\eta G)^2 F_o P_s B_e/h\nu \quad (5.29)$$

$$\sigma_{ASE-ASE}^2 = (q\eta G F_o)^2 B_o B_e \quad (5.30)$$

On el terme  $RP_{ASE}$  ha sigut despreciat del soroll shot ja que la seva contribució pot ser negligida. A més a més, el terme  $\sigma_{shot}^2$  també pot ser negligit en comparació amb  $\sigma_{ASE-ASE}^2$ . Per tant la desviació estàndar del corrent pel bit "1" i pel bit "0" són (no es té en compte el soroll tèrmic):

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_{s-ASE}^2 + \sigma_{ASE-ASE}^2} \quad (5.31)$$

$$\sigma_0 = \sigma_{ASE-ASE} \quad (5.32)$$

La sensibilitat del receptor es pot aconseguir utilitzant aquests resultats i tenint present que  $P_s = 2\bar{P}_{rec}$  [27]:

$$\bar{P}_{rec} = h\nu F_o B_e \left[ Q^2 + Q \sqrt{\frac{B_o}{B_e}} \right] \quad (5.33)$$

Si es fa servir l'aproximació triangular de la densitat espectral de la batuda del soroll ASE-ASE (sempre més acurada que la rectangular), llavors l'expressió de  $\bar{P}_{rec}$  és lleugerament diferent [24]. Per diferenciar-la del cas anterior, l'anomenarem  $\bar{P}'_{rec}$  i ve donada per:

$$\bar{P}'_{rec} = h\nu F_o B_e \left[ Q^2 + Q \sqrt{\frac{B_o}{B_e} - \frac{1}{2}} \right] \quad (5.34)$$

La sensibilitat del receptor es pot escriure en termes del nombre mig de fotons/bit,  $\bar{N}_p$ , utilitzant  $\bar{P}_{rec} = \bar{N}_p h\nu R_b$ . Prenent  $B_e = R_b/2$  com un valor típic de l'ample de banda del receptor:

$$\bar{N}_p = \frac{1}{2} F_o \left[ Q^2 + Q \sqrt{\frac{B_o}{B_e}} \right] \quad (5.35)$$

L'expressió de dalt és una expressió extraordinàriament simple de la sensibilitat del receptor. Mostra clarament el perquè s'han d'utilitzar amplificadors amb una baixa figura de soroll. També mostra com els filtres òptics poden millorar la sensibilitat del receptor reduint la relació  $B_o/B_e$ . El mínim valor de  $F_o$  és 2, i és per un amplificador ideal. Així, utilitzant  $Q = 6$ , la millor sensibilitat en el receptor és  $\bar{N}_p = 44.5$  fotons/bit. Finalment, si fem servir l'aproximació triangular de la densitat espectral de la batuda del soroll ASE-ASE [26], llavors la sensibilitat del receptor es pot expressar com:

$$\bar{N}'_p = \frac{1}{2} F_o \left[ Q^2 + Q \sqrt{\frac{B_o}{B_e} - \frac{1}{2}} \right] \quad (5.36)$$

La millor sensibilitat que s'aconsegueix fent servir aquesta expressió és  $\bar{N}'_p = 43.3$  fotons/bit, tenint present que el valor mínim de  $F_o$  és 2, que la relació mínima entre amplitud de banda és  $B_o/B_e = 2$  (ja que  $B_o$  ha de ser suficientment gran com per que pugui passar el senyal), i que  $Q = 6$ .

## 5.5 Relació entre el factor Q i la OSNR

En el sistema quadràtic que estem estudiant, és interessant analitzar la relació entre la OSNR rebuda i el paràmetre Q en funció dels modes espectrals. Considerarem un sistema de comunicacions òptiques dominat per soroll d'amplificació ASE i assumirem que el bit "0" no té energia (excepte el soroll ASE). Llavors, considerant  $I_0 \approx 0$  i  $I_1 = RP_1$ , on  $P_1$  és el pic de potència del bit "1" i utilitzant l'expressió (5.3) de  $P_{ASE}$ , juntament amb les expressions de les variàncies del corrent degudes a les batudes del soroll ASE-ASE (5.13) (fent servir l'aproximació de densitat espectral triangular) i senyal-ASE (5.11), aleshores:

$$\sigma_{s-ASE}^2 = 2R\sqrt{P_1 P_{ASE}}/M \quad (5.37)$$

$$\sigma_{ASE-ASE}^2 = P_{ASE}^2/M \quad (5.38)$$

On s'ha assumit que  $M = B_o/B_e \gg 1$ . Finalment si considerem que  $SNR_o = P_1/P_{ASE}$  és la Optical SNR, llavors l'expressió que relaciona la SNR òptica i el paràmetre Q amb el nombre de modes espectrals és:

$$SNR_o = \frac{2Q^2}{M} + \frac{2Q}{\sqrt{M}} \quad (5.39)$$

La figura 5.5 mostra la  $SNR_o$  exigida en funció de la relació entre l'ample de banda òptic i l'ample de banda elèctric, per mantenir un cert factor Q [24]. Com es pot veure en la gràfica, la OSNR augmenta ràpidament quan  $M$  disminueix per sota de 10.

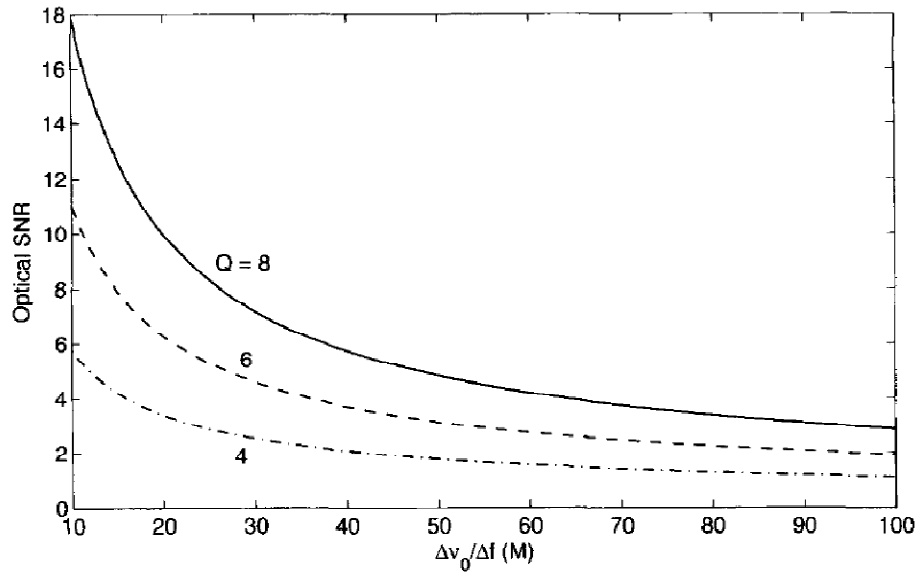


Figura 5.5. Relació entre la OSNR i el nombre de modes espectrals



## 6 Anàlisi de la llei quadràtica del fotodetector

### 6.1 Caracterització del senyal i soroll passa-banda. Modulació ASK

La figura 6.1 mostra el senyal òptic d'entrada  $\mathbf{d}(t)$  al filtre òptic. Aquest senyal està format per la informació modulada digitalment, per un soroll additiu blanc i Gaussià i pels dos components ortogonals del camp elèctric.

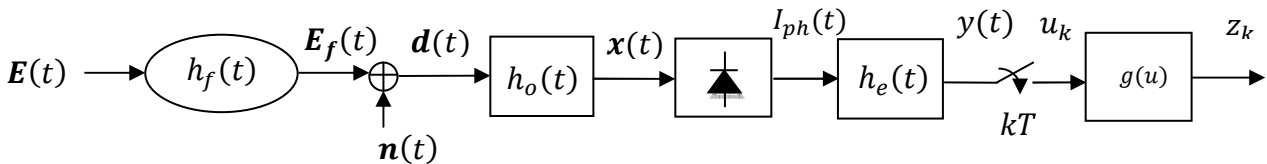


Figura 6.1. Esquema del sistema de comunicacions òptiques

Per tant, el vector  $\mathbf{d}(t)$  es pot escriure com:

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{E}(t) * h_f(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{E}_f(t) + \mathbf{n}(t) \quad (6.1)$$

On

$$\mathbf{E}_f(t) = [E_f(t) \quad 0]^T \quad (6.2)$$

$$\mathbf{n}(t) = [n_{cp}(t) \quad n_{op}(t)]^T \quad (6.3)$$

En (6.2) i (6.3),  $E_f(t)$  és la portadora modulada després de passar pel canal,  $n_{cp}(t)$  és el soroll passa-banda blanc i Gaussià corresponent a l'estat de polarització copolar del camp elèctric, i  $n_{op}(t)$  és el soroll passa-banda blanc i Gaussià corresponent a l'estat de polarització ortogonal del camp elèctric. Noteu que el vector del camp elèctric corresponent

a la portadora modulada (veure (6.2)) està polaritzat, mentre que el vector corresponent al soroll ASE (veure (6.3)) té una naturalesa no polaritzada.

El senyal òpticament filtrat  $\mathbf{x}(t)$  es pot escriure com el següent vector de dimensió 2:

$$\mathbf{x}(t) = [x_{cp}(t) \ x_{op}(t)]^T \quad (6.4)$$

On  $x_{cp}(t)$  és el camp elèctric copolar amb el senyal i  $x_{op}(t)$  és el camp elèctric ortogonal amb el senyal. El vector  $\mathbf{x}(t)$  es deriva de la convolució entre el vector de senyal  $\mathbf{d}(t)$  vist en (6.1) i la resposta impulsional del filtre òptic  $h_o(t)$ .

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{d}(t) * h_o(t) = (\mathbf{E}_f(t) + \mathbf{n}(t)) * h_o(t) \quad (6.5)$$

En el vector  $\mathbf{x}(t)$ , cada un dels dos estats ortogonals del camp elèctric es poden escriure com:

$$\begin{aligned} x_{cp}(t) &= (E(t) * h_f(t) + n_{cp}(t)) * h_o(t) = (E_f(t) + n_{cp}(t)) * h_o(t) \\ &= E_f(t) + m_{cp}(t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$x_{op}(t) = n_{op}(t) * h_o(t) = m_{op}(t) \quad (6.7)$$

On  $h_f(t)$  és la resposta impulsional del canal,  $m(t) = n(t) * h_o(t)$  pels dos casos possibles de polarització,  $h_o(t)$  és la resposta impulsional del filtre òptic i  $E(t)$  és el camp elèctric associat amb la portadora modulada en OOK (On-Off Keying) i conformada en NRZ [24]. Hem suposat que el filtre elèctric no altera ni distorsiona la portadora modulada  $E_f(t)$ , per això  $E_f(t) * h_o(t) = E_f(t)$ . Per una modulació digital passa-banda NRZ-OOK,  $E(t)$  es pot escriure com:

$$E(t) = \text{Re}\{A(t)e^{j\phi_0}e^{-j\omega_0 t}\} \quad (6.8)$$

On

$$A(t) = \sqrt{P_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \cdot p(t - nT) \quad (6.9)$$

$$p(t) = \prod \left( \frac{t - T/2}{T} \right) \quad (6.10)$$

I l'espai de senyal es correspon a una modulació ASK amb nombre de símbols  $M = 2$  [23] i dimensió 1, tal i com mostra la figura 6.2.

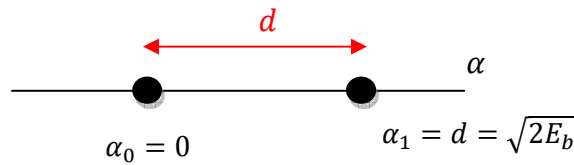


Figura 6.2. Espai de senyal d'una modulació ASK amb  $M=2$  nivells

El valor complex  $A(t)$  d'una modulació OOK, és [24]:

$$A(t) = \sqrt{P_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \cdot p(t - nT) = \sqrt{P_0} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t') p(t - t') dt' \quad (6.11)$$

On  $\alpha[n]$  representa el símbol transmès,  $p(t)$  representa la forma del pols,  $P_0$  és el pic de potència, i  $\alpha(t)$  és la següent funció:

$$\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \delta(t - nT) \quad (6.12)$$

On  $\delta(t)$  representa la delta de Dirac. Físicament, un pot interpretar  $\alpha(t)$  com la resposta impulsional d'un filtre.

Si assumim que  $A(t)$  representa un procés estocàstic estacionari, llavors la densitat espectral de potència  $S_A(\omega)$  es pot trobar fent servir el teorema de Wiener-Khintchine:

$$S_A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_A(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (6.13)$$

On  $\hat{R}_A(\tau)$  és la funció d'autocorrelació promitjada de  $A(t)$ . La densitat espectral de potència de  $A(t)$  es pot escriure com el producte de:

$$S_A(\omega) = P_0 |P(\omega)|^2 S_\alpha(\omega) \quad (6.14)$$

On  $P(\omega)$  és la transformada de Fourier del pols  $p(t)$  i  $S_\alpha(\omega)$  és la densitat espectral de potència de  $\alpha(t)$ . Per trobar  $S_\alpha(\omega)$ , abans de tot hem de calcular la funció d'autocorrelació de  $\alpha(t)$ , de manera que:

$$R_\alpha(\tau) = \sum_n \sum_k \langle \alpha[n], \alpha[k] \rangle \delta(t - kT) \delta(t + \tau - nT) \quad (6.15)$$

En [24] es troba tot el càlcul d'aquesta autocorrelació. Finalment, la densitat espectral de potència de  $A(t)$  es pot escriure com:

$$S_A(\omega) = P_0 \frac{|P(\omega)|^2}{4T} \left[ 1 + \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi m}{T}\right) \right] \quad (6.16)$$

Pel cas d'una modulació NRZ la densitat espectral de potència és:

$$S_A(\omega) = \frac{P_0 T}{4} \text{sinc}^2(\omega T/2) + \frac{\pi}{2} P_0 \delta(\omega) \quad (6.17)$$

Només sobreviu el cas  $m = 0$  del sumatori de deltes, ja que els zeros de la sinc s'encarreguen d'anul·lar la resta. La figura 6.3 mostra la densitat espectral de potència normalitzada per 2B (bit-rate) per una modulació NRZ-ASK.

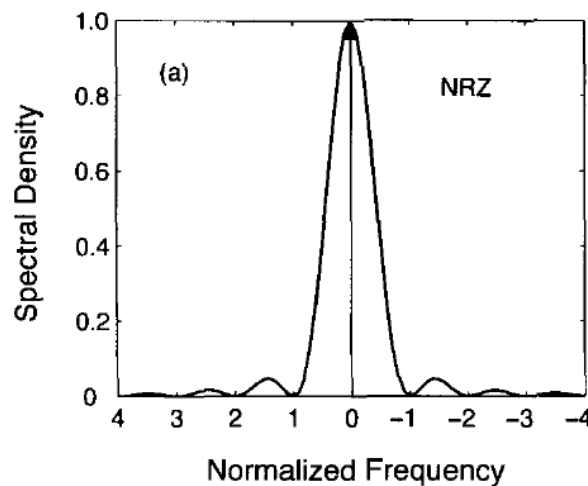


Figura 6.3. Densitat espectral de potència d'un senyal NRZ-ASK

Seguint amb la notació de la figura 6.1,  $n(t)$  representa el soroll ASE (indistintament pels dos estats de polarització del camp elèctric,  $n_{cp}(t)$  i  $n_{op}(t)$ ). Suposarem que la densitat espectral de potència de  $n(t)$  es pràcticament plana al voltant de la banda d'interès i s'aproxima per un canal AWGN. La funció d'autocorrelació i la densitat espectral de potència de  $n(t)$  són:

$$R_{nn}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (6.18)$$

$$S_{nn}(f) = N_0/2 \quad (6.19)$$

El senyal  $x(t)$  és correspon al senyal òptic filtrat (*portadora modulada + soroll additiu ASE*), per tant el soroll ASE filtrat òpticament el denotarem com  $m(t)$  com ja hem descrit en (6.6) i (6.7).

$$m(t) = n(t) * h_o(t) \quad (6.20)$$

El procés aleatori  $m(t)$  es pot descriure com un soroll passa-banda per cada un dels dos estats de polarització [28]:

$$m(t) = m_I(t)\cos(\omega_0 t + \phi) - m_q(t)\sin(\omega_0 t + \phi) \quad (6.21)$$

On  $\omega_0$  és la freqüència angular de referència, i  $m_I(t)$  i  $m_q(t)$  són, respectivament, les components de la modulació del soroll en fase i quadratura. Si  $m(t)$  està confinat en la banda freqüencial  $B_{opt}$ , llavors  $m_I(t)$  i  $m_q(t)$  són funcions passa-baixes les quals les seves densitats espectrals estan confinades en la regió  $|f| \leq B_{opt}/2$ . Si  $m(t)$  té una densitat espectral de potència plana (procés blanc) de valor  $N_o/2$ , llavors  $m_I(t)$  i  $m_q(t)$  també tindran una densitat espectral de potència plana, cada una igual a  $N_o$  en la banda  $|f| \leq B_{opt}/2$ . D'aquesta manera, cada una de les funcions passa-baixes  $m_I(t)$  i  $m_q(t)$  tindran  $T B_{opt}$  graus de llibertat i varianza igual a  $(N_o) \cdot B_{opt}$ . En efecte, sigui  $S_m(f)$  la densitat espectral del soroll ASE confinat en dos regions de l'espectre:

$$S_m(f) = N_o/2 \left[ \prod \left( \frac{f - f_0 - B_{opt}/2}{B_o} \right) + \prod \left( \frac{f + f_0 - B_{opt}/2}{B_o} \right) \right] \quad (6.22)$$

Sigui  $S_{m_i}(f) = S_{m_q}(f)$  les densitats espectrals dels processos passa-baixes:

$$S_{m_i}(f) = S_{m_q}(f) = N_o \prod \left( \frac{f - B_{opt}/2}{B_o} \right) \quad (6.23)$$

Per un procés passa banda estacionari amb densitat espectral plana (el propi d'un soroll blanc), les components en fase i quadratura estan incorrelades, per tant la densitat espectral es pot escriure com [23]:

$$S_m(f) = \frac{1}{4} \left( S_{m_i}(f - f_0) + S_{m_i}(f + f_0) + S_{m_q}(f - f_0) + S_{m_q}(f + f_0) \right) \quad (6.24)$$

Si substituïm per les densitats espectrals de les components en fase i quadratura vistes en (6.23), arribarem a l'expressió de la densitat espectral (6.22).

## 6.2 Representació passa-banda del senyal. Concepte envoltant i fase

Suposant un canal ideal ( $h_f(t) = \delta(t)$ ) i només el component de soroll igualment polaritzat amb el senyal, el senyal òptic  $x(t)$  es pot escriure en funció del seu equivalent passa-baix com [23];

$$x(t) = \text{Re} \left[ \left( A(t) + m_I(t) + jm_q(t) \right) e^{j(\omega_0 t + \phi_0)} \right] \quad (6.25)$$

On  $A(t)$  és l'equivalent passa-baix d'un senyal NRZ-ASK vist en (6.9), i  $m_I(t)$  i  $m_q(t)$  són respectivament les funcions passa-baixes en fase i quadratura del soroll després del filtrat òptic (descrites en l'apartat anterior). L'equivalent passa baix del senyal d'entrada al fotodetector és:

$$b_x(t) = A(t) + m_I(t) + jm_q(t) \quad (6.26)$$

També es pot escriure en funció de l'envoltant i la fase de  $x(t)$  com:

$$x(t) = \text{Re} \left[ \sqrt{(A(t) + m_I(t))^2 + m_q^2(t)} e^{j \arctg\left(\frac{m_q(t)}{m_I(t) + A(t)}\right)} e^{j(\omega_0 t + \phi_0)} \right] \quad (6.27)$$

I agafant la part real queda...

$$x(t) = \sqrt{(A(t) + m_I(t))^2 + m_q^2(t)} \cdot \cos\left(\arctg\left(\frac{m_q(t)}{m_I(t) + A(t)}\right) + \omega_0 t + \phi_0\right) \quad (6.28)$$

$$x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0 + \theta(t)) \quad (6.29)$$

On  $a(t)$  és l'envoltant i  $\theta(t)$  és la fase de  $x(t)$ , de manera que:

$$a(t) = \sqrt{(A(t) + m_I(t))^2 + m_q^2(t)} \quad (6.30)$$

$$\theta(t) = \arctg\left(\frac{m_q(t)}{m_I(t) + A(t)}\right) \quad (6.31)$$

Com es pot veure, el soroll afegeix una distorsió en amplitud i en fase. Finalment, fent servir les expressions anteriors, el senyal passa-banda  $x(t)$  es pot escriure com:

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}[x(t) + j \cdot \hat{x}(t)] = \text{Re}[b_x(t) e^{j(\omega_0 t + \phi)}] \\ &= \text{Re}[a(t) e^{j\theta(t)} e^{j(\omega_0 t + \phi)}] \end{aligned} \quad (6.32)$$

On  $\hat{x}(t)$  és el que s'anomena transformada de Hilbert [23]:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) \quad (6.33)$$

### 6.3 Anàlisi de la llei quadràtica del fotodetector

El fotodetector, és un sistema quadràtic que elimina tota informació de fase i de polarització. El corrent de sortida és proporcional al mòdul al quadrat de l'envoltant del senyal d'entrada. Així, en un pla complex de senyal, el fotodetector es queda amb l'àrea d'un quadrat de costat  $a(t)$ . Noteu que  $a(t)$  és l'envoltant del senyal, i està definida en (6.30). Es pot veure millor en la següent representació en el pla complex de la figura 6.4;

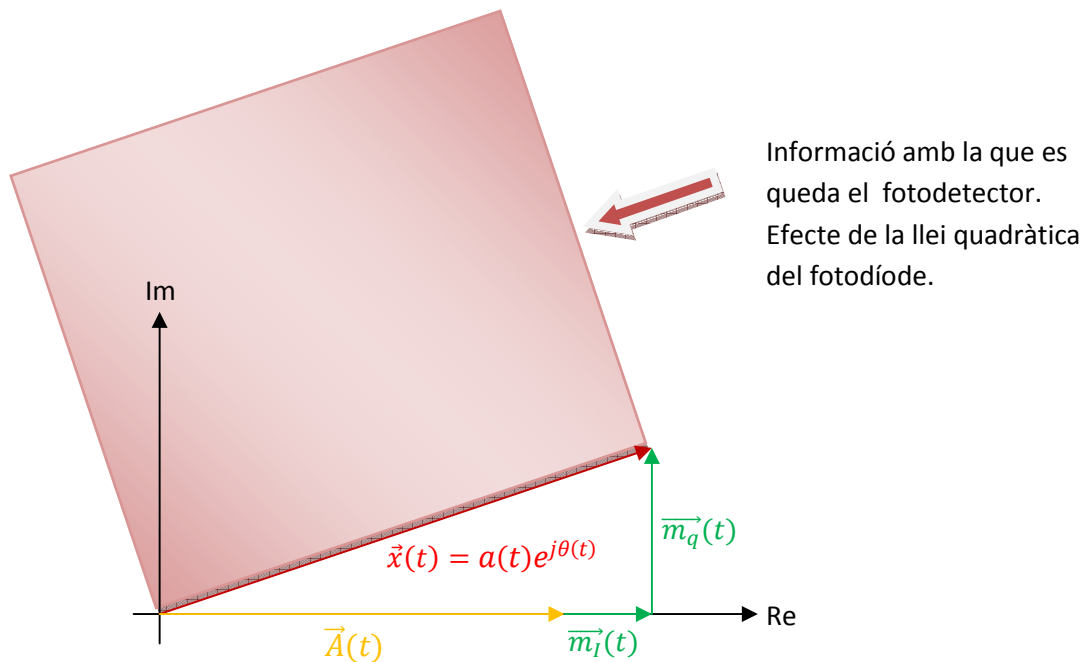


Figura 6.4. Representació en pla complex del senyal fotodetectat

En la figura 6.5 es mostra tot el procés de fotodetecció sobre el senyal òptic. A l'esquerra, es representa la portadora òptica modulada, juntament amb el soroll Gaussià passa-banda, a l'entrada del fotodetector. A la dreta, apareix el senyal elèctric fotodetectat (color vermell) i la funció passa-baixes corresponent al senyal òptic (color blau), és a dir la part real de la funció (6.26). Podem observar que el senyal elèctric fotodetectat té un soroll dependent del senyal, ja que si ens fixem en el bit "0" les fluctuacions aleatòries són molt més petites que les que apareixen en el bit "1". Això últim és un clar comportament del soroll Chi quadrat. A més a més, si comparem el senyal elèctric fotodetectat amb l'equivalent passa-baix del senyal òptic, ens adonem que es perd tota la informació de fase. Això últim es pot observar en el bit "0", on les fluctuacions del senyal elèctric mai es troben per sota del zero (requisit fonamental de l'estadística Chi quadrada). Per tant, observeu com les fluctuacions negatives de la funció passa-baixes del senyal òptic es tornen positives en el domini elèctric.

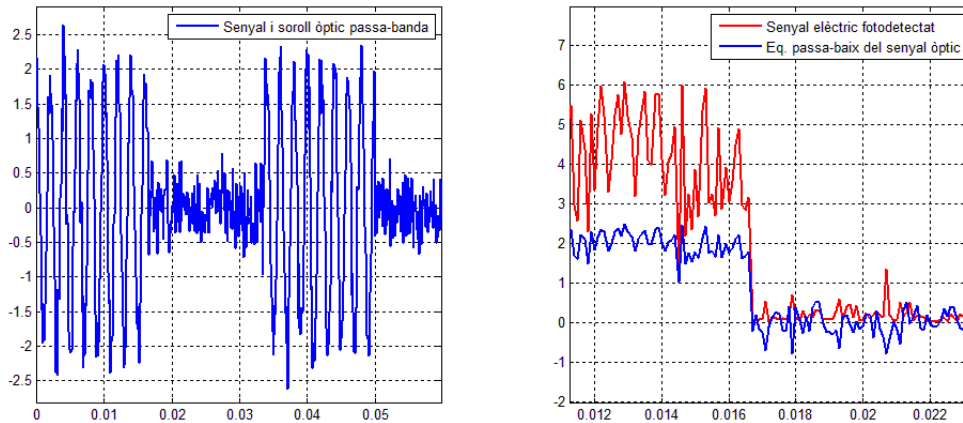


Figura 6.5. Procés de fotodetecció. A l'esquerra, senyal i soroll òptic d'entrada al fotodetector. A la dreta, senyal elèctric detectat i comparació amb l'envoltant òptica

Per entendre millor la funció que realitza el fotodetector, hem de pensar en la funció algebraica norma euclidiana al quadrat,  $\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ , on  $\mathbf{u}$  és un vector de dimensió 2 (degut a les dues components ortogonals del camp elèctric). La relació existent entre la potència del senyal òptic rebut i el foto-corrent generat és:

$$\begin{aligned} I_{ph}(t) &= R \cdot P_{opt} \approx R \cdot \|\mathbf{E}_f(t) + \mathbf{m}(t)\|^2 = \\ &= R \cdot \left[ |E_f(t) + m_{cp}(t)|^2 + |m_{op}(t)|^2 \right] \end{aligned} \quad (6.34)$$

On  $\mathbf{E}_f(t)$  es defineix com apareix en (6.2),  $R$  és la responsivitat de fotodíode i el soroll ASE òpticament filtrat  $\mathbf{m}(t)$  es pot escriure com:

$$\mathbf{m}(t) = \begin{bmatrix} m_{cp}(t) \\ m_{op}(t) \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

On els processos passa-banda estacionaris,  $m_{cp}(t)$  i  $m_{op}(t)$ , es corresponen al soroll ASE filtrat per l'estat copolar i ortogonal del camp elèctric, respectivament (expressió (6.20)).

En (6.34), la potència òptica  $P_{opt}$  és proporcional al mòdul al quadrat del camp elèctric format per la portadora modulada  $E_f(t)$  i el soroll ASE. Diem que  $P_{opt}$  és proporcional al quadrat del camp elèctric, i no igual ja que estrictament faltaria definir la impedància intrínseca del medi. En aquesta aproximació hem suposat que la portadora del camp elèctric modulada  $E_f(t)$  està polaritzada segons un vector unitari  $\hat{e}$  i que el soroll ASE presenta els dos estats de polarització del camp elèctric (copolar i ortogonal).

El corrent elèctric  $y(t)$  s'obté a partir de filtrar el corrent de sortida del fotodetector  $I_{ph}(t)$  amb un filtre passa-baix amb resposta impulsional  $h_e(t)$ , tal i com s'observa en la figura 6.1.



$$y(t) = R \left\| \left( \mathbf{E}_f(t) + \mathbf{n}(t) \right) * h_o(t) \right\|^2 * h_e(t) \quad (6.36)$$

$$y(t) = R \left\| \mathbf{E}_f(t) + \mathbf{m}(t) \right\|^2 * h_e(t) \quad (6.37)$$

Així, el senyal  $y(t)$  a la sortida del filtre de post-detecció resulta;

$$\begin{aligned} y(t) &= R \left( |E_f(t) + m_{cp}(t)|^2 + |m_{op}(t)|^2 \right) * h_e(t) \\ &= R \cdot \left( a_{cp}^2(t) + a_{op}^2(t) \right) * h_e(t) \end{aligned} \quad (6.38)$$

On clarament només tenim la influència del soroll en el mòdul del senyal, i no es té en compte el soroll de fase, ja que el fotodetector l'elimina. En l'expressió (6.38),  $a_{cp}(t)$  i  $a_{op}(t)$  són les envoltants de l'estat de polarització del camp elèctric copolar (*senyal + soroll*) i ortogonal (*soroll*), respectivament. En l'expressió (6.38), sigui la resposta impulsional del filtre elèctric  $h_e(t)$  un filtre integrador en un període de símbol  $T$ . Si mostregem cada  $kT$ , llavors ens estarem quedant amb l'energia del senyal per cada un dels estats ortogonals.

$$y_k = y(kT) = R \left[ \int_0^T a_{cp}^2(t) dt + \int_0^T a_{op}^2(t) dt \right] = 2R [\varepsilon_{cp} + \varepsilon_{op}] \quad (6.39)$$

On  $\varepsilon_{cp}$  i  $\varepsilon_{op}$  són els valors de l'energia del senyal per l'estat del camp copolar i ortogonal, respectivament. Com que estem treballant amb quantitats complexes, definirem la variable  $u_k$  com:

$$u_k = y_k/2 = R [\varepsilon_{cp} + \varepsilon_{op}] \quad (6.40)$$

Noteu que al utilitzar un filtre elèctric integrador (I&D) o un filtre adaptat, el que s'està realitzant és el càlcul de l'energia del senyal. En efecte, sigui  $w(t)$  un senyal real i de banda estreta, doncs, l'energia es calcula com [23]:

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} w^2(t) dt \quad (6.41)$$

I, en el cas d'un senyal passa-banda  $w(t)$ , l'energia es pot expressar en termes de l'equivalent passa-baix  $b_w(t)$ :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |b_w(t)|^2 dt \quad (6.42)$$

Que equival a integrar l'envoltant  $a(t)$  al quadrat del senyal  $w(t)$ :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} a^2(t) dt \quad (6.43)$$

Finalment, en el capítol 8 s'analitza el cas en que la funció  $g(u)$  (veure figura 6.1) sigui l'arrel quadrada. En aquest capítol s'estudia l'efecte d'aquesta funció sobre l'estadística Chi quadrada i sobre la linealitat del sistema.

## 7 Estadística No Gaussiana del senyal rebut

Com ja s'ha demostrat en els apartats anteriors (veure capítol 4), l'estadística de les mostres sorolloses  $y_k$  (referit a la figura 6.1) es pot modelar amb bastant exactitud per una distribució Chi quadrada amb  $n$  graus de llibertat. La distribució Chi quadrada està formada per la suma quadràtica de  $n$  v.a. Gaussianes, o el que és el mateix, per la suma de  $n$  v.a. chi quadrades  $\chi^2$ . El nombre de graus de llibertat  $n$  depèn de l'ample de banda del filtre òptic i elèctric (i també depèn de l'estat de polarització del camp elèctric). De tal forma que:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (7.1)$$

La v.a.  $Y$  és un sumatori de v.a.'s chi quadrades  $\chi^2$  amb  $n = 2pM$  graus de llibertat, on  $M = TB_o$  és el nombre de graus de llibertat dels components en fase o components en quadratura, i  $p$  és una variable que indica si s'utilitza un filtre polaritzador (si  $p = 1$  indica que estem utilitzant un filtre polaritzador, i si  $p = 2$  indica el contrari). El nombre de graus de llibertat dels components en fase o quadratura  $M$  també es pot expressar com  $M = B_o/2B_e$ . Aquesta última expressió de  $M$  és més general, ja que  $M = TB_o$  només és vàlida pel cas que  $B_e = 0.5R_b$ . Tot i així, en la majoria de les referències sempre utilitzen l'expressió  $M = TB_o$ .

Per una modulació digital en amplitud, com per exemple una modulació multinivell ASK, o com a cas particular d'aquesta, una modulació OOK clàssica, l'estadística del soroll és diferent pel símbol "0" que pel símbol "1", o en el cas de ASK és diferent pel símbol  $\underline{s}_0 = 0$ , que per la resta de símbols ( $\underline{s}_k = (N - 1)A_s/\sqrt{2} \quad \forall N \neq 1$ ). Pel símbol "0", i si suposem una relació d'extinció infinita, l'estadística és central chi-square i pel símbol "1" l'estadística és non-central chi-square. Tot i així, l'aproximació Chi quadrada no és suficientment acurada degut a que els processos de filtrat que tenen lloc al receptor no són ideals. D'aquesta manera s'haurien de tenir en compte les funcions de transferència dels filtres (tant del filtre òptic com de l'elèctric) per estimar una estadística del senyal detectat més acurada. Fent ús

d'una expansió en sèries de Karhunen-Loève, es podria incloure aquesta dependència dels coeficients amb la forma dels filtres. (veure [20])

## 7.1 Estadística pel bit "0"

El símbol "0", per culpa de la llei quadràtica del fotodetector, obeeix una distribució central chi-square  $\chi^2$  amb  $n$  graus de llibertat. La funció de densitat de probabilitat (PDF) de la qual és [23]:

$$f_{Y|0}(y) = \frac{1}{\sigma^n 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} y^{n/2-1} e^{-y/2\sigma^2} \quad y \geq 0 \quad (7.2)$$

On  $2\sigma^2$  és igual a la densitat espectral de potència  $N_0$  del soroll ASE, i  $n/2 = B_o/B_e$  és el nombre de modes per estat de polarització en l'espectre òptic rebut, amb  $B_o$  i  $B_e$  sent els amplex de banda òptic i elèctric en el receptor, respectivament [13]. A més a més,  $\Gamma(\cdot)$  denota la funció gamma. Aquesta mateixa PDF del bit "0" també es pot escriure en termes d'un canal AWGN, és a dir en funció de la densitat espectral de potència, tal i com es pot trobar en la majoria de la literatura [19][29-30] :

$$f_{Y|0}(y) = \frac{1}{N_0} \frac{(y/N_0)^{pM-1} e^{-y/N_0}}{(pM-1)!} \quad y \geq 0 \quad (7.3)$$

On  $N_0$  és la densitat espectral de potència del soroll ASE,  $M = B_o T$  i  $p$  és un enter que indica si s'utilitza filtre polaritzador. Observeu que la funció gamma s'ha substituït per una expressió més simple, però només per valors enters de  $pM$ .

La funció de distribució de probabilitat (CDF) pel bit "0" es pot escriure com:

$$F_{Y|0}(y) = 1 - e^{-y/N_0} \sum_{k=0}^{pM-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{y}{N_0}\right)^k, \quad y \geq 0 \quad (7.4)$$

Per una v.a. central chi-square amb  $n = 2pM$  graus de llibertat, la funció característica o la funció generadora de moments és [23]:

$$\psi_{Y|0}(s) = \frac{1}{(1 - N_0 s)^{pM}} \quad (7.5)$$

Els moments de primer i segon ordre, així com la varianza d'una v.a. central chi-square són [19][22] [29-30]:

- $\bar{I}_0 = \psi'_{Y|0}(0) = pMN_0$  (mitja)
- $\psi''_{Y|0}(0) = pMN_0^2 + (pMN_0)^2$  (moment de segon ordre)
- $\sigma_0^2 = \psi''_{Y|0}(0) - [\psi'_{Y|0}(0)]^2 = pMN_0^2$  (varianza)

Observeu que aquests resultats coincideixen amb els que vam obtenir en el model de Marcuse.

## 7.2 Estadística pel bit “1”

El símbol “1”, en canvi, obeeix una distribució non-central chi-square amb  $n$  graus de llibertat que té la següent funció de densitat de probabilitat [13] [23].

$$f_{Y|1}(y) = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{y}{s^2}\right)^{\frac{(n-2)}{4}} e^{-\frac{(s^2+y)}{2\sigma^2}} I_{n/2-1} \left(\sqrt{y} \frac{s}{\sigma^2}\right) \quad y \geq 0 \quad (7.6)$$

On  $I_\alpha$  denota la funció de Bessel modificada de primera espècie d'ordre  $\alpha$ . A més a més  $s^2$  indica l'energia del senyal rebut. La relació  $\lambda = s^2/\sigma^2$  és el que s'anomena “*non-centrality parameter*” i equival a la relació  $\lambda = 2E_s/N_0$  entre l'energia del senyal i la densitat espectral de potència del soroll ASE [28]. La PDF d'una distribució non-central chi-square amb  $n = 2pM$  graus de llibertat també es pot escriure en funció dels paràmetres  $E_s$  i  $N_0$  [19] [29-30]:

$$f_{Y|1}(y) = \frac{1}{N_0} \left(\frac{y}{E_s}\right)^{\frac{(pM-1)}{2}} e^{-\frac{(E_s+y)}{N_0}} I_{pM-1} \left(2\sqrt{\frac{y \cdot E_s}{N_0}}\right) \quad y \geq 0 \quad (7.7)$$

El “*non-centrality parameter*” també es pot expressar fent servir la relació entre potències. Noteu que per modulacions digitals es compleix que:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{C}{N} \cdot TW \quad (7.8)$$

On  $E_b$  és l'energia mitja de bit,  $C/N$  és la relació portadora a soroll,  $T$  és el temps de bit i  $W$  és l'ample de banda efectiu del soroll. La relació portadora a soroll  $C/N$  es defineix com la potència mitja de la portadora dividit per la potència mitja del soroll després del filtrat. En el cas de comunicacions òptiques, si suposem que no utilitzem filtre polaritzador, llavors la relació es defineix com:

$$\frac{E_b}{N_0} = 2 \cdot OSNR \cdot TB_o \quad (7.9)$$

On  $OSNR = P_b/P_{ASE}$  amb  $P_b = E_b/T$  és la potència mitja de bit (noteu que  $E_b = 0.5 \cdot E_s$ ) i  $P_{ASE} = 2B_o N_0$  és la potència mitja del soroll (incloent els dos estats ortogonals de polarització). Amb això, el paràmetre de no centralitat del bit “1” es pot escriure com (només pel cas d'una modulació OOK amb relació d'extinció infinita):

$$\lambda = \frac{2E_s}{N_0} = \frac{4E_b}{N_0} = 8 \cdot OSNR \cdot TB_o \quad (7.10)$$

Així per exemple, per una  $OSNR = 14$  dB, un ample de banda del filtre òptic  $B_o = 12.5$  GHz i una velocitat de transmissió  $R_b = 10$  Gb/s, el paràmetre de no centralitat pel bit "1" és  $\lambda = 24.02$  dB. O el que és el mateix, per una relació  $E_b/N_0 = 18$  dB, el paràmetre de no centralitat és  $\lambda = 24.02$  dB.

En el cas que el bit "0" tingui un paràmetre de no centralitat diferent de zero, llavors la relació d'extinció deixarà de ser infinita. En aquest cas, la relació d'extinció es pot expressar en funció dels paràmetres de no centralitat del bit "0"  $\lambda_0$  i del bit "1"  $\lambda_1$  com:

$$ER = \frac{P_1}{P_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \quad (7.11)$$

La funció de distribució de probabilitat d'una v.a. non-central chi-square amb  $n = 2pM$  graus de llibertat és:

$$F_{Y|1}(y) = 1 - Q_{pM} \left( \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}, \sqrt{\frac{2y}{N_0}} \right) \quad y \geq 0 \quad (7.12)$$

En la qual,  $Q_m(a, b)$  és la funció de Marcum Q. La funció característica o funció generadora de moments d'una v.a. non-central chi-square amb  $n = 2pM$  graus de llibertat es [23]:

$$\psi_{Y|1}(s) = \frac{1}{(1 - N_0 s)^{pM}} e^{\left(\frac{sE_s}{1 - N_0 s}\right)} \quad (7.13)$$

El moment de primer i la varianza pel bit "1" segons [22][29-30] són:

- $\bar{I}_1 = \psi'_{Y|1}(0) = pMN_0 + E_s$  (mitja)
- $\sigma_1^2 = \psi''_{Y|1}(0) - [\psi'_{Y|1}(0)]^2 = pMN_0^2 + 2E_s N_0$  (varianza)

**Conclusió important:**

**Nombre de graus de llibertat TOTALS** per un sistema de comunicacions òptiques amb amplificació òptica i **POLARITZAT** (amb filtre polaritzador,  $p = 1$ ):

$$n = 2M = B_o/B_e \quad (7.14)$$

**Nombre de graus de llibertat TOTALS** per un sistema de comunicacions òptiques amb amplificació òptica i **NO POLARITZAT** (sense filtre polaritzador,  $p = 2$ ):

$$n = 2pM = 2B_o/B_e \quad (7.15)$$

El nombre de graus de llibertat dels components en fase, o dels components en quadratura són:

$$M = B_o/2B_e \quad (7.16)$$

En el cas que l'ample de banda del filtre elèctric sigui  $B_e = 0.5R_b$ , llavors  $M$  es pot escriure com:

$$M = TB_o \quad (7.17)$$

Així, les relacions entre els paràmetres  $n$ ,  $p$  i  $M$  són:

$$n = 2pM \quad (7.18)$$

El valor mínim de graus de llibertat amb sentit físic és  $n = 4$  (sense utilitzar cap filtre polaritzador), i es correspon al cas en que la relació entre l'ample de banda del filtre òptic i del filtre elèctric és 2 [Agrawal05]. Això és així per què si  $B_o/B_e < 2$ , llavors el senyal amb bit-rate  $1/T$  podria no passar correctament pel filtre òptic.





## 8 Anàlisi de la funció Arrel Quadrada

Abans de començar a plantejar mètodes per trobar la funció òptima, és interessant estudiar a mode introductori el comportament de la funció arrel quadrada. En diferents articles ja s'han estudiat els efectes d'aplicar l'arrel quadrada sobre el senyal rebut i s'han obtingut uns resultats bastant satisfactoris tant en el camp de transmissions digitals amb filtres FIR i MLSE, com en el camp analògic en sistemes RoF (Radio over Fibre), veure [1-4] [6].

### 8.1 Linealització i Gaussianitat del sistema amb SQRT

Intuïtivament, es pot pensar en implementar l'arrel quadrada sobre el senyal per intentar eliminar la influència quadràtica del fotodetector. L'arrel quadrada, com es demostra en [1-6], és capaç de Gaussianitzar l'estadística del senyal i linealitzar parcialment el sistema. Aquesta funció, recupera correctament l'estadística Gaussiana quan el senyal té una energia diferent de zero, principalment pel nivell lògic "1", però presenta problemes quan el senyal té una energia propera al zero, bàsicament pel nivell lògic "0".

En la figura 8.1 es representa l'arrel quadrada del senyal fotodetectat (color vermell) en comparació amb l'equivalent passa-baix del senyal òptic (color blau). Fàcilment es pot comprovar que pel bit "1" l'arrel quadrada recupera l'estadística Gaussiana, en canvi pel bit "0" l'estadística presenta unes diferències evidents amb la ideal, degut a la pèrdua d'informació de fase causada pel fotodetector. Noteu que la figura 8.1 és la continuació de la figura 6.5.

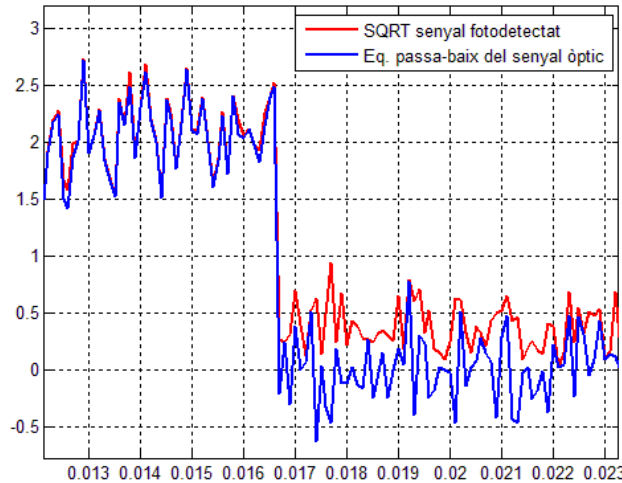


Figura 8.1. Arrel quadrada del senyal fotodetectat vers l'equivalent passa-baix del senyal òptic

Per estudiar la linealitat que guanyem al introduir l'arrel quadrada en el sistema que representa la figura 6.1, suposarem que; la responsivitat  $R = 1$ , la relació d'extinció és més gran que zero ( $r_{01} = P_0/P_1 > 0$ ), la densitat espectral de potència  $N_0$  és suficientment petita (amb això garantim que  $E\{u_k\} \approx s^2$ ) i les mostres  $u_k$  en l'expressió (6.40) tenen una estadística Chi quadrada. Llavors l'esperança de l'arrel quadrada de la variable  $u_k$  és aproximadament l'arrel quadrada de l'energia mitja del senyal  $s^2$  en el domini òptic.

$$\bar{z}_k = E\{z_k\} \approx \sqrt{E\{u_k\}} = \sqrt{E\{\varepsilon_{cp} + \varepsilon_{op}\}} \approx \sqrt{s^2} \approx s \quad (8.1)$$

Ja que  $E\{\varepsilon_{cp} + \varepsilon_{op}\} = s^2 + 2MN_0$ , i com que  $s^2 \gg 2MN_0$  perquè  $N_0$  és suficientment petit, llavors  $E\{\varepsilon_{cp} + \varepsilon_{op}\} \approx s^2$ . Noteu que  $M = B_o/2B_e$ .

La funció arrel quadrada,  $z_k = \sqrt{u_k}$ , com hem vist en la figura 8.1 i en l'expressió (8.1), es comporta bastant bé pel nivell alt del senyal ( $P_1$ ) deixant a la sortida una distribució molt semblant a la Gaussiana, i amb una mitja lineal amb el senyal ja que  $s^2 \gg 2MN_0$  i per tant  $\bar{z}_k \approx s$ . El problema apareix amb el nivell baix de senyal ( $P_0$ ) on la distribució de probabilitat de sortida no és Gaussiana (especialment per relacions d'extinció infinites), i on la mitja no és lineal amb el senyal perquè  $s^2 \cong 2MN_0$  i llavors  $\bar{z}_k \neq s$ . Per tant, l'arrel quadrada no és capaç de linealitzar totalment el sistema per a qualsevol relació d'extinció i/o per magnituds de  $N_0$  molt grans.

En la figura 8.2 es representa el diagrama d'ull multinivell (4-PAM) obtingut amb l'arrel quadrada. En aquesta figura es pot observar que el sistema és bastant lineal pels símbols amb energies diferents que zero (símbols  $s_1, s_2$  i  $s_3$ ), això es pot veure a partir d'observar la distància entre símbols ( $d(s_1, s_2) = d(s_2, s_3)$ ). En canvi, el símbol  $s_0$ , que hauria de tenir mitja zero per tenir un sistema totalment lineal i Gaussià, té una mitja més gran que zero i una varianza més petita que la resta de símbols. A més a més, la distància  $d(s_0, s_1) < d(s_1, s_2) = d(s_2, s_3)$ .

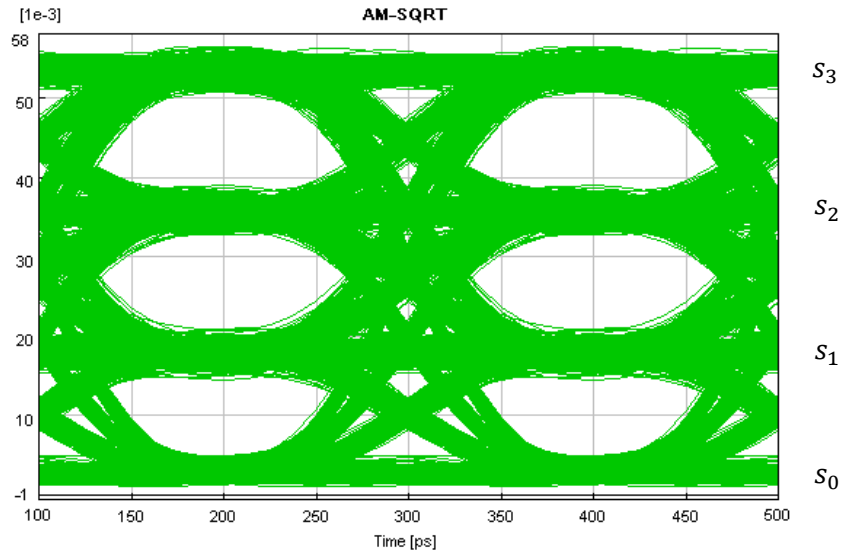


Figura 8.2. Diagrama multinivell 4-PAM amb arrel quadrada

## 8.2 Anàlisi de la distribució de Rice vers la Gaussiana

La funció arrel quadrada, com hem vist, aconseguix fer més lineal el sistema fent que part dels efectes lineals que es produeixen a la fibra, com la dispersió cromàtica, el PMD o el soroll ASE, tornin a ser aproximadament lineals després d'haver passat pel fotodetector (amb llei quadràtica). Aquesta linealització del sistema, ha permès grans avenços en el camp de RoF (Radio sobre Fibra) i en els sistemes digitals amb equalització amb filtres FIR i MLSE, fent possible transmetre a major velocitat i/o distància en les mateixes condicions comparant amb el cas sense utilitzar cap funció no lineal.

Com hem parlat en els capítols 4 i 7, les mostres del senyal digital rebut en l'extrem del receptor, una vegada s'han realitzat els processos de fotodetecció i filtrat, tenen una estadística molt semblant a la Chi quadrada. Si analitzem el comportament del dispositiu arrel quadrada sobre aquesta estadística Chi quadrada i sense fer cap simplificació, ens adonem que obtenim una distribució coneguda. Aquesta estadística coneguda s'anomena distribució de Rice, en el cas del bit '1', o distribució de Rayleigh, en el cas del símbol '0' amb relació d'extinció infinita. Per més informació sobre la distribució de Rice veure l'annex 6.

En la figura 8.3 es representa la relació que existeix entre la v.a. d'entrada  $Y$  (Chi quadrada), i la v.a. de sortida  $Z$  (Rice).

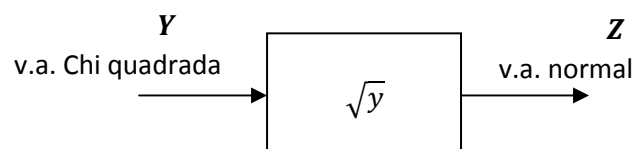


Figura 8.3. Model estadístic utilitzant l'arrel quadrada

Tenint present que  $Y = Z^2$ , llavors la relació entre les funcions de densitat de probabilitat serà;

$$f_z(z) = 2z \cdot f_Y(z^2) \quad (8.2)$$

ja que

$$\frac{d}{dy}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2z} \quad (8.3)$$

I gràficament, veure figura 8.4, comparant una Gaussiana amb mitja  $\mu = 0.1$  i varianza  $\sigma^2 = 1$  (color verd) amb la distribució de Rice obtinguda després del mòdul arrel quadrada (color vermell), amb 2 graus de llibertat i paràmetres  $s^2 = 0.01$  (noteu que  $\sqrt{s^2} = \mu$ ) i  $\sigma^2 = 1$ , es pot observar la gran diferència entre una distribució i l'altra per símbols amb una baixa energia.

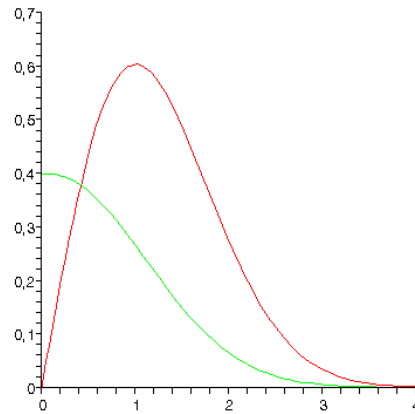


Figura 8.4. Comparació Gaussiana (color verd) & Rice (color vermell),  $s^2=0.01$  i  $\sigma^2=1$

En canvi, si fem el mateix estudi en un punt llunyà al zero (p.ex.  $s^2 = 20$  i  $\sigma^2 = 1$ ), obtenim el resultat de la figura 8.5:

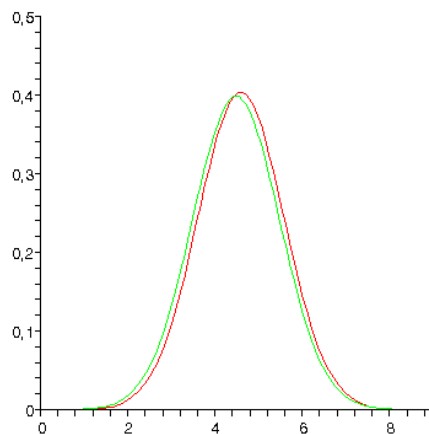


Figura 8.5. Comparació Gaussiana (color verd) & Rice (color vermell),  $s^2=20$  i  $\sigma^2=1$

Tot i que no es demostra rigorosament (caldríen realitzar tests d'hipòtesis i diagrames de probabilitat normal), es pot comprovar a simple vista que la funció de densitat de

probabilitat presenta una forma perfectament normal per relacions  $\lambda = s^2/\sigma^2 = 2E_s/N_0 \gg 1$ .

Suposem que ens arriba a un receptor de comunicacions òptiques sense filtre polaritzador amb  $B_o = 40$  GHz i  $B_e = 8$  GHz un senyal modulad en OOK-NRZ amb una relació  $E_b/N_0 = 14$  dB i una relació d'extinció infinita. A més a més, suposem també un sistema amb absència de dispersió i altres efectes deterministes que introdueix el canal. En la figura 8.6 es representa l'estadística del senyal detectat a la sortida del dispositiu arrel quadrada. Principalment, es pot comprovar que pel bit '1' l'estadística és pràcticament Gaussiana (veure PDF de color negre sobre una Gaussiana ideal de color vermell discontinu). En canvi, en el bit '0' s'observen grans diferències entre una Gaussiana ideal i l'arrel quadrada (veure PDF de color verd sobre una Gaussiana ideal de color blau discontinu). En aquest exemple, si fem servir l'aproximació Gaussiana per calcular el llindar de decisió, la BER mesurada a la sortida del dispositiu arrel quadrada és de  $1,91 \cdot 10^{-5}$ , mentre que si fossin Gaussians perfectes seria de  $5,61 \cdot 10^{-6}$ , per tant la BER augmenta un 340,4 %. Clarament es demostra que es resta rendiment en la capacitat de decisió si utilitzem l'arrel quadrada i l'aproximació Gaussiana per senyals amb relació d'extinció infinita.

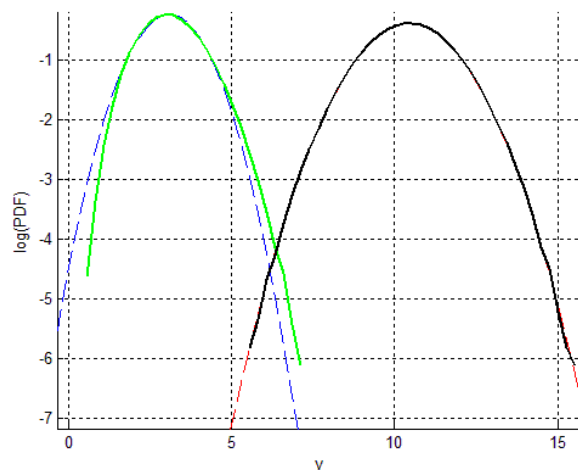


Figura 8.6. Comparació de les PDF's logarítmiques per SQRT amb  $E_b/N_0=14$ dB

Aquest comportament del dispositiu arrel quadrada és el que motiva el desenvolupament d'una funció unívoca que conservi part de les millores de l'arrel quadrada (sobretot per amplituds del senyal altes), i que modifiqui el senyal entorn al zero (sobretot en el cas de relacions d'extinció infinites), per tal que l'estadística sigui Gaussiana.

### 8.3 Tecnologies d'implementació de l'arrel quadrada

La funció arrel quadrada es pot aplicar en dos dominis diferents; analògicament aplicant-la al senyal RF, o digitalment aplicant la funció a les mostres immediatament després de la quantificació del senyal. En el camp digital, el major referent és la mètrica SQRT que vam veure en el capítol 3. En el camp analògic, la funció ha de ser aproximada fent servir components electrònics capaços d'operar a freqüències de GHz. En [1] es poden

trobar dues implementacions del circuit que realitza l'arrel quadrada. Una d'elles es basa en l'acoblament de 2 díodes schotkky aprofitant el comportament no lineal dels díodes. L'altra implementació és basa en un chip MMIC amb tecnologia GaAs de  $0.2\ \mu\text{m}$ , que pot arribar a treballar a 40GHz amb bons nivells d'exactitud per nivells de més de 14 dB de relació d'extinció. En la superfície del chip s'inclouen 3 circuits diferents. El primer d'ells està basat en 8 transistors tipus HEMT (transistors tipus FET) amb la porta G connectada a la línia d'entrada-sortida de RF, i el drenador D i el sortidor S connectats directament a massa. Pot treballar fins a 40GHz. El segon circuit està basat en 8 díodes schotkky, i també pot treballar a 40GHz. Per aprofitar tota l'àrea del chip, el tercer circuit està basat en només 2 díodes adaptats per treballar fins a 10GHz. El layout del chip MMIC es mostra en la figura 8.7.

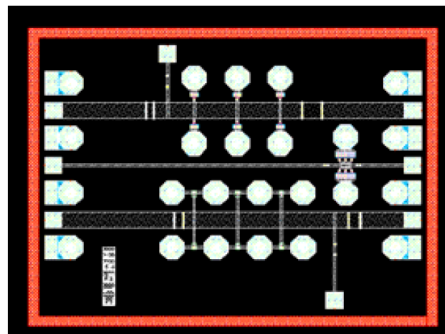


Figura 8.7. Layout del chip MMIC que implementa la funció SQRT

## 9 Relació entre la PDF d'entrada i la PDF de sortida.

Idealment volem aconseguir que les mostres  $z_k$  (mostres del senyal de sortida de la funció òptima, veure figura 6.1) tinguin una estadística del soroll Gaussià. Per aconseguir-ho, fixarem  $Z$  com una v.a. normal, mentre que  $Y$  és una v.a. fruit d'un sumatori de  $n$  v.a. chi quadrades  $\chi^2$  com a conseqüència del soroll ASE, tal i com s'ha descrit en els capítols 4 i 7. En la figura 9.1 es representa el model estadístic que volem analitzar, on  $g(y)$  és la funció òptima que relaciona les variables aleatòries  $Y$  i  $Z$ .

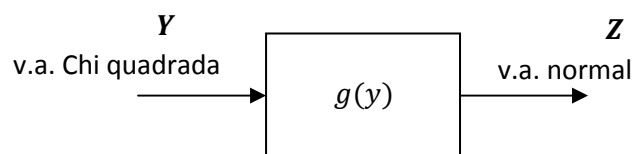


Figura 9.1. Model estadístic que relaciona la v.a. d'entrada  $Y$  amb la v.a. de sortida  $Z$

La v.a.  $Y$  es pot descomposar en:

$$y = E_s + r, \quad \forall s \quad (9.1)$$

En el que  $E_s$  són les mostres del senyal lliure de soroll en el domini elèctric, i  $r$  és la contribució del soroll ASE en el domini elèctric.

Quan definim una relació entre v.a.'s, en aquest cas  $Z = g(Y)$ , la relació existent entre les funcions de densitat de probabilitat és (considerant que  $g(y)$  és una funció monòtona creixent, ja que aquesta propietat es compleix en el cas de tenir soroll ASE)[25]:

$$f_{Z|S}(z|s) = \frac{f_{Y|S}(y|s)}{|g'(y)|} \quad (9.2)$$

on:

- $f_{Z|S}(z|s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-u_s)^2}{2\sigma^2}} \iff \text{PDF Gaussian}$
- $f_{Y|S}(y|s) = \frac{1}{N_0} \left(\frac{y}{E_s}\right)^{\frac{(M-1)}{2}} e^{-\frac{(E_s+y)}{N_0}} I_{M-1}\left(2\sqrt{\frac{y \cdot E_s}{N_0}}\right), \quad y \geq 0 \iff \text{PDF non-central chi-square}$

On  $f_{Z|S}(z|s)$  i  $f_{Y|S}(y|s)$  són les PDF's condicionades al senyal rebut de sortida i entrada a la funció òptima. Per poder simplificar els càlculs posteriors simplifiquem la PDF de la v.a. Chi quadrada  $Y$ . Per fer-ho, suposarem que la relació d'extinció és més gran que zero ( $r_{01} = P_0/P_1 > 0$ ) i que  $N_0$  és suficientment petit, llavors la PDF condicionada  $f_{Y|S}(y|s)$  es pot aproximar per:

$$f_{Y|S}(y|s) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi\tilde{s}N_0}} e^{-\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{\tilde{s}})^2}{N_0}}, \quad y > 0 \quad (9.3)$$

Amb

$$\tilde{s} = E\{y\} = E_s + I_{sp} \quad (9.4)$$

On  $I_{sp} = E\{r\} = N_0M$ . Aquesta aproximació de la PDF es deriva a partir de l'aproximació de la funció de Bessel modificada de primera espècie d'ordre  $m$ ,  $I_m(x)$  per  $x \gg m$ :

$$I_{M-1}\left(2\sqrt{\frac{y \cdot E_s}{N_0}}\right) \approx \frac{\sqrt{N_0}}{2\sqrt{\pi\sqrt{y \cdot E_s}}} e^{2\sqrt{\frac{y \cdot E_s}{N_0}}}, \quad E_s > 0 \quad (9.5)$$

Amb  $y > 0$ . A la pràctica, l'aproximació anterior es verifica quan  $r_{01} = P_0/P_1 > 0$  i  $I_{sp} = N_0M \ll \sqrt{E_s} \quad \forall s$ . Utilitzant l'aproximació (9.5) de la funció de Bessel modificada de primera espècie en l'expressió de la PDF d'una v.a. non-central chi-square:

$$f_{Y|S}(y|s) \approx \left(\frac{y}{E_s}\right)^{\frac{(M-1)}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\pi\sqrt{y \cdot E_s}N_0}} e^{-\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{E_s})^2}{N_0}} \quad (9.6)$$

Ja que  $r_{01} > 0$  i  $I_{sp} \ll \sqrt{E_s} \quad \forall s$ , podem verificar que  $Pr\{|y - E_s| < \xi\} \rightarrow 1$  amb  $\xi > 0$  i suficientment petit. Aleshores, es pot demostrar que:



$$f_{Y|S}(y|s) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi\tilde{s}N_0}} e^{-\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{\tilde{s}})^2}{N_0}} \quad (9.7)$$

Una forma possible de plantejar el problema es a partir de la resolució d'una equació diferencial que s'obté a partir de relacionar les funcions de densitat de probabilitat. En efecte, suposem que  $g(\cdot)$  és una funció diferenciable creixent. Aquesta propietat es verifica en molts casos d'interès, com en el cas de tenir només soroll ASE. Suposem també que la funció inversa  $g^{(-1)}(\cdot)$  de  $g(\cdot)$  existeix i és també una funció diferenciable creixent. Llavors, segons (9.2)...

$$f_{Z|S}(z|s) = f_{Y|S}(y|s)|g'(y)|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} e^{-\frac{(z-u_s)^2}{2\zeta}} \quad (9.8)$$

On  $u_s$  i  $\zeta$  són la mitja i varianza de  $z$  respectivament. Ja que  $g(\cdot)$  és una funció diferenciable creixent ( $g'(y) > 0, \forall y$ ), podem expressar la PDF condicionada al senyal rebut com (noteu que hem substituït  $z = g(y)$  en (9.8)):

$$f_{Y|S}(y|s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} e^{-\frac{(g(y)-u_s)^2}{2\zeta}} g'(y), \quad \forall y \quad (9.9)$$

Si suposem que  $y$  està concentrat prop de la seva mitja  $\tilde{s}$ , llavors  $f_{Y|S}(y|s)$  és negligible fora de l'interval  $(\tilde{s} - \epsilon, \tilde{s} + \epsilon)$  amb  $\epsilon > 0$  i en aquest interval  $g'(y) \approx g'(\tilde{s})$ . Per la desigualtat de Chebyshev, noteu que aquesta condició pot ser verificada quan la potència del soroll és suficientment baixa, això és quan  $Pr\{|y - \tilde{s}| \geq \epsilon\} \leq (\mathcal{M}_{2,s}/\epsilon^2)$  amb  $\mathcal{M}_{2,s}$  sent el moment central de segon ordre condicionat del senyal rebut  $y$ . Així, podem verificar que  $E_s\{y\} = \tilde{s} \approx E_s$  i per tant

$$u_s \approx g(\tilde{s}) \approx g(E_s) \quad (9.10)$$

$$\zeta \approx [g'(\tilde{s})]^2 \mathcal{M}_{2,s} \approx [g'(E_s)]^2 \mathcal{M}_{2,s} \quad (9.11)$$

$$g'(y) \approx g'(E_s) \quad (9.12)$$

Si fem servir aquestes aproximacions, és simple demostrar que la PDF genèrica es pot aproximar per:

$$f_{Y|S}(y|s) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{M}_{2,s}}} e^{-\frac{1}{2\zeta}[g(y)-g(E_s)]^2} \quad (9.13)$$

Comparant l'expressió de l'aproximació de la PDF  $f_{Y|S}(y|s)$  que hem vist en (9.3) amb (9.13), noteu que:

$$\frac{(\sqrt{y} - \sqrt{\bar{s}})^2}{N_0} \approx \frac{1}{2\zeta} [g(y) - g(E_s)]^2 \quad (9.14)$$

On fàcilment es pot comprovar que en el cas de tenir només soroll ASE, i en les condicions que hem descrit abans ( $r_{01} = P_0/P_1 > 0$ ) i  $N_0$  suficientment petit):

$$\zeta = \frac{N_0}{2}, \quad g(y) = \sqrt{y}, \quad y > 0 \quad (9.15)$$

Per tant l'arrel quadrada és la funció òptima per aquestes consideracions.

L'arrel quadrada no és la funció òptima per a tots els casos, ja que hem realitzat una aproximació de la PDF condicionada del senyal rebut  $f_{Y|S}(y|s)$  per unes característiques concretes de relació d'extinció i densitat espectral de potència del soroll ASE. Per trobar la funció òptima, que és l'objectiu d'aquest projecte, s'hauria de resoldre la següent equació diferencial:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} e^{-\frac{(z-u_s)^2}{2\zeta}} \\ &= \frac{1}{N_0} \left( \frac{g^{-1}(z)}{E_s} \right)^{\frac{(M-1)}{2}} e^{-\frac{(E_s+g^{-1}(z))}{N_0}} I_{M-1} \left( 2 \sqrt{\frac{g^{-1}(z) \cdot E_s}{N_0}} \right) |g'(g^{-1}(z))|^{-1} \end{aligned} \quad (9.16)$$

On  $y = g^{-1}(z)$  és la funció inversa de  $z = g(y)$ .

El que s'ha vist és que la solució d'aquesta equació diferencial s'aproxima bé per una arrel quadrada per potències mitges de símbol llunyanes al zero o relacions d'extinció  $r_{01} = P_0/P_1 > 0$ . Sabem que la distribució de Rice es pot aproximar per una Gaussiana per relacions de no centralitat  $\lambda = s^2/\sigma^2 \gg x$ . Conèixer quin és el valor  $x$  a partir del qual la funció òptima és exactament igual que l'arrel quadrada és complicat, ja que depèn del nombre de modes espectrals  $2M$ , de la densitat espectral del soroll ASE  $N_0$  i de la relació d'extinció.

Lamentablement, però, pensar en resoldre l'equació diferencial (9.16) és inviable. S'hauran d'utilitzar altres tècniques per intentar convertir la distribució Chi quadrada amb  $n$  graus de llibertat en una distribució Gaussiana (veure més endavant totes les tècniques de conversió de variables aleatòries). Si més no, el que ja sabem de forma segura és que la funció òptima convergirà en l'arrel quadrada.

De forma intuïtiva, la funció que busquem (aproximació funció verda en la figura 9.2) serà molt semblant a l'arrel quadrada (veure funció vermella) per valors alts d'abscissa, mentre que per valors petits d'abscissa tendirà cap a valors negatius d'ordenades, però mai cap al  $-\infty$ , això ho justificarem tot seguit. La distribució amb valors més propers a  $y = 0$  serà una chi quadrada amb  $2M = 2$  graus de llibertat i paràmetre de no centralitat  $\lambda = 0$ , en aquest cas si fem el límit de la PDF quan tendim a zero, obtindrem

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_{Y|S}(y|s) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{N_0} e^{\frac{-(E_s+y)}{N_0}} I_0 \left( 2 \frac{\sqrt{y \cdot E_s}}{N_0} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{N_0} e^{\frac{-y}{N_0}} I_0(0) = \frac{1}{N_0} \quad (9.17)$$

Això vol dir que la funció òptima que busquem no ha de presentar cap asímptota vertical en  $y = 0$ , ja que el valor més extrem que hem de transformar és un nombre real i positiu, i per tant la funció no hauria de convergir al  $-\infty$ . D'aquesta manera, la funció que busquem és del tipus  $g(y) = F(y) \cdot \sqrt{y}$ , on  $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 1$  i  $\lim_{y \rightarrow 0} F(y) = -c$ , on  $c$  és un nombre real i positiu.

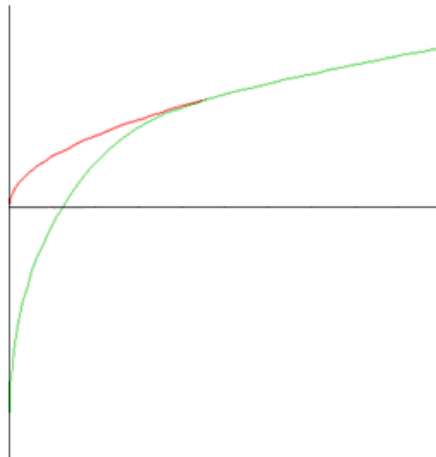


Figura 9.2. Comparació entre la funció arrel quadrada i una estimació de la funció òptima



# 10 Conversió i generació de variables aleatòries

En el capítol 9 hem vist que és pràcticament inviable resoldre l'equació diferencial que es dedueix entre les dues funcions de densitat de probabilitat si no es prenen aproximacions. Amb aquestes aproximacions hem trobat que la funció òptima és l'arrel quadrada, però sabem que no és òptima per tots els casos. Per tant, haurem de buscar un altre procediment per trobar la funció òptima. La teoria de conversió de variables aleatòries pot ser una bona estratègia per trobar l'expressió analítica que busquem.

Principalment, busquem mètodes que ens permetin obtenir valors de variables aleatòries que segueixin determinades distribucions de probabilitat a partir dels nombres generats, els quals tenen una distribució uniforme en l'interval  $(0,1)$ .

Existeixen quatre mètodes generals de generació de variables aleatòries i una sèrie de mètodes particulars de les diferents distribucions (en el nostre cas ens centrarem en la distribució Normal). Els mètodes generals més comuns per generar una variable aleatòria són els següents:

1. Mètode de la funció inversa o mètode de la inversió.
2. Mètode d'acceptació – refús.
3. Mètode de composició.
4. Mètode de la convolució.
5. Algunes transformacions conegudes per una distribució Gaussiana.

La facilitat d'aplicació d'aquests mètodes, així com el cost computacional associat, varia molt segons la família de variables aleatòries a les que s'apliquen. Normalment existeixen diferents algorismes que es poden utilitzar per generar valors d'una determinada distribució, i diferents factors que es poden considerar per determinar quin algorisme utilitzar en un cas

particular. Desafortunadament aquests factors solen entrar en conflicte els uns amb els altres i a vegades s'ha d'arribar a un compromís. Alguns d'aquests factors són els següents:

- **Exactitud:** S'han d'obtenir valors d'una variable amb una precisió donada. A vegades és suficient amb una aproximació i altres no.
- **Eficiència:** L'algoritme que implementa el mètode de generació té associat un temps d'execució i un cost de memòria. Escollirem un mètode que sigui eficient en quant al temps i quantitat de memòria requerida.
- **Complexitat:** Busquem mètodes que tinguin complexitat mínima, sempre i quan es garanteixi certa exactitud.
- **Robustesa:** El mètode ha de ser eficient per qualsevol valor que prenguin els paràmetres de la distribució que sigui la variable aleatòria.
- **Facilitat d'implementació.**

Seguidament descriurem cada un del mètodes de generació de variables aleatòries que hem parlat anteriorment. El mètode de la funció inversa o de la inversió es tractarà amb deteniment en el capítol 11, ja que serà el mètode escollit per estudiar el problema que ens ocupa.

## 10.1 Mètode d'acceptació i refús

Es tracta d'un mètode amb el qual no ens hem de preocupar de trobar la funció inversa de distribució de probabilitat (CDF inversa) com succeeix en el mètode de la inversió (veure capítol 11). El mètode proposat es basa en la interpretació relativa de la funció de densitat condicionada [25]:

$$f_X(x|M)dx = \frac{P\{x < X \leq x + dx, M\}}{P(M)} \quad (10.1)$$

Si les variables aleatòries  $X$  i  $U$  són independents i:

$$M = \{U \leq r(X)\} \quad (10.2)$$

$$\text{On } r(x) = a \frac{f_Y(x)}{f_X(x)} \leq 1$$

Llavors

$$f_X(x|M) = f_Y(x) \quad (10.3)$$

Per calcular la constant  $a$ : (l'exemple següent és per  $f_Y(x)$  Gaussiana i  $f_X(x)$  non-central chi square  $\chi^2$  amb 2 graus de llibertat)

$$\frac{f_Y(x)}{f_X(x)} = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} e^{\frac{-x^2+x}{2\sigma^2}} \leq \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} = a \quad (10.4)$$

L'algoritme és senzill, primerament generem una seqüència aleatòria  $\{x_i\}$ , on  $x_i$  és una v.a. Chi quadrada. A continuació generem una seqüència aleatòria  $\{u_i\}$  amb distribució uniforme  $U(0,1)$ . Finalment, avaluem l'expressió  $u_i \leq p(x_i) = a \cdot f_Y(x_i)/f_X(x_i)$ , i si es compleix fixem  $y_i = x_i$ . En cas contrari refusem el valor i fem una nova iteració.

A continuació es presenta el codi en MATLAB que implementa l'algoritme d'acceptació-refús per les funcions de densitat de probabilitat que hem parlat.

```
function rejection_method
u = rand(100000, 1);
y = ncx2rnd(2,0/1, 100000, 1); %v.a. non_central_chi_square
y = y.*1;
j = 1;
for i = 1:100000
    p = exp((-y(i,1).^2+y(i,1))./(2.*(1)))./sqrt(pi/2);
    if(u(i,1) <= p && u(i,1) > p/2)
        z(j, 1) = y(i,1);
        j = j+1;
    elseif(u(i,1) <= p/2)
        z(j, 1) = -y(i,1);
        j = j+1;
    end
end
end
```

El resultat d'aplicar aquest algoritme es mostra en la figura 10.1, on es representa la distribució de sortida de l'algoritme vers una Gaussiana ideal. Es pot comprovar que l'algoritme funciona correctament, ja que hem transformat la v.a. Chi quadrada amb  $n = 2$  graus de llibertat i paràmetre de no centralitat  $\lambda = 0$  en una v.a. Gaussiana.

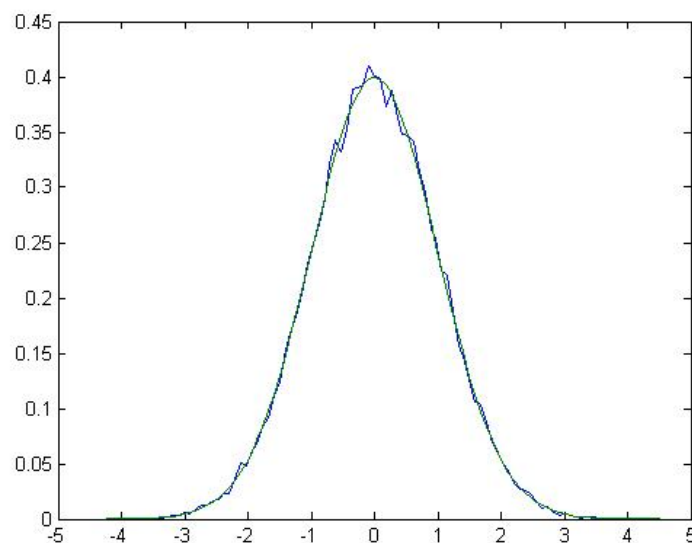


Figura 10.1. Mètode d'acceptació i refús.  
Obtenció d'una v.a. Gaussiana a partir d'una v.a. Chi-quadrada

## 10.2 Mètode de composició

Aquest mètode es pot utilitzar si la funció de distribució de probabilitat es pot expressar com un sumatori ponderat de  $m$  funcions de distribució de probabilitat [31]:

$$F(x) = p_1F_1(x) + \dots + p_mF_m(x) \quad p_k > 0 \quad (10.5)$$

El nombre de funcions  $m$  pot ser finit o infinit, i les  $m$  funcions de distribució de probabilitat són compostes per formar la funció de distribució de probabilitat desitjada; d'aquí el nom de la tècnica. La tècnica també es pot utilitzar si la funció de densitat de probabilitat pot ser descomposta com un sumatori ponderat de  $m$  densitats:

$$f(x) = p_1f_1(x) + \dots + p_mf_m(x) \quad p_k > 0 \quad (10.6)$$

## 10.3 Mètode de convolució

Moltes variables aleatòries, incloent-hi la normal, binomial, Poisson, gamma, erlang, etc., es poden expressar de forma exacta o aproximada mitjançant la suma lineal d'altres variables aleatòries. Es diu mètode de convolució perquè la suma de variables aleatòries és la convolució de les seves funcions de densitat de probabilitat. El mètode de convolució es pot utilitzar sempre i quan la variable aleatòria  $x$  es pugui expressar com una combinació lineal de  $k$  variables aleatòries:

$$x = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k \quad (10.7)$$

En aquest mètode es necessari generar  $k$  nombres aleatoris  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  per generar  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  variables aleatòries utilitzant algun dels mètodes anteriors i així poder obtenir un valor de la variable que es desitja obtenir per convolució.

## 10.4 Transformacions conegudes per una distribució Gaussiana

A part dels mètodes generals de generació de variables aleatòries, també existeixen mètodes particulars per cada tipus de variable aleatòria. En el cas que ens ocupa, mostrarem diferents tècniques per generar una seqüència de nombres aleatoris normals a partir d'altres variables aleatòries amb funció de distribució de probabilitat coneguda (generalment uniforme) fent servir transformacions conegudes [25] [31] [32] [33].



- **Mètode Polar**

S'utilitza per generar valors de la distribució  $N(0,1)$ . Existeixen dues aproximacions d'aquest mètode:

- **Proposta de Marsaglia**

S'inscriu un cercle de radi unitat en un quadrat de costat 2. Es generen nombres aleatoris acceptant com a sortida aquells que cauen dins del cercle i refusant els que cauen dins del quadrat però fora del cercle de radi unitat. En efecte, l'algoritme és el següent: Siguin  $U_1$  i  $U_2$  dos v.a.'s independents i uniformement distribuïdes entre  $U(0,1)$ . Amb aquestes dues variables aleatòries es realitzen les següents transformacions:

$$V_i = 2U_i - 1 \quad S = V_1^2 + V_2^2 \quad (10.8)$$

L'algoritme diu que si  $S > 1$  llavors tornem a escollir un parell de valors nous de  $U_1$  i  $U_2$  i recalculer  $S$ . Si no és així, llavors es calcula  $X$  i  $Y$  com:

$$X = V_1 \sqrt{\frac{-2\ln(S)}{S}} \quad (10.9)$$

$$Y = V_2 \sqrt{\frac{-2\ln(S)}{S}} \quad (10.10)$$

On,  $X$  i  $Y$  son v.a. normals i independents amb mitja 0 i varianza unitària.

- **Proposta de Box-Muller**

Siguin  $U_1$  i  $U_2$  dos v.a.'s independents i uniformement distribuïdes entre  $U(0,1)$ , llavors:

$$z_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln(u_1)} \cdot \sin(2\pi \cdot u_2) \quad (10.11)$$

$$z_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(u_1)} \cdot \cos(2\pi \cdot u_2) \quad (10.12)$$

On  $Z_1$  i  $Z_2$  són v.a.'s normals e independents.

Aquests dos mètodes funcionen molt bé, però no els podem fer servir perquè en la nostra aplicació només podem generar una v.a. uniforme, i en aquest cas es necessiten dues v.a. uniformes i independents.

- **Aproximació pel límit central:**

Es tracta d'una implementació del mètode de composició fent servir un sumatori de rectangles que poden ser realitzats de la forma  $a \cdot u_i + b$ . El teorema del límit central es basa en aquesta hipòtesis.

Donades  $m$  variables aleatòries independents  $u^k$ , es forma el sumatori

$$z = u^1 + \dots + u^m \quad (10.13)$$

Lavors  $z$ , si  $m$  es suficientment gran, és normal. Un exemple de l'aproximació pel límit central és:

$$Z = \frac{(\sum_{i=1}^{1200} U_i) - 600}{10} \quad (10.14)$$

On aquesta sèrie convergirà cap a una distribució normal sent cada  $U_i$  una v.a. uniforme distribuïda entre 0 i 1, i independent amb la resta. La distribució de sortida, per aquest exemple, es mostra a la figura 10.2.

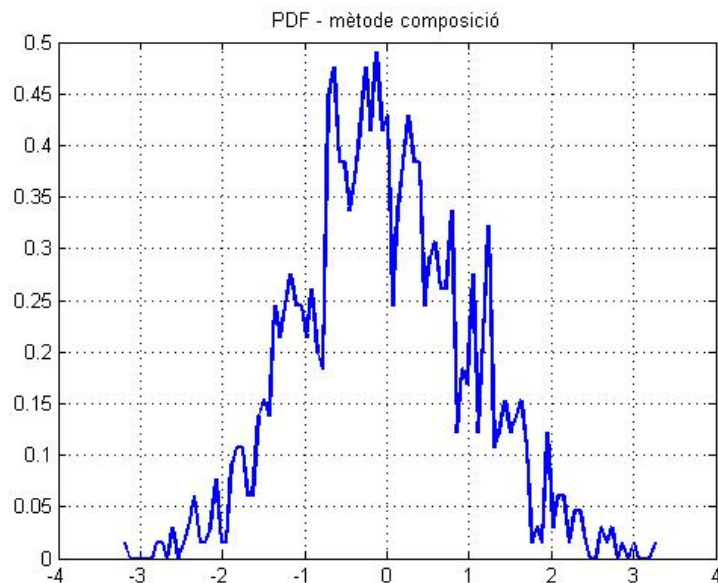


Figura 10.2. Aproximació Gaussiana pel límit central

Aquest mètode no és molt eficient, per tant són més recomanables uns altres mètodes. Per la nostra aplicació queda totalment descartat.

- **Aproximació de Hasting**

Es tracta de dues aproximacions de la funció de distribució inversa d'una v.a. normal, basades en els estudis de C. Hasting (1955) en *Approximations for Digital Computers*. També es poden trobar en [31]. Utilitzant aquestes aproximacions s'obté una v.a.  $X$  normal  $N(0,1)$  a partir d'una v.a.  $q$  uniformement distribuïda en l'interval  $(0, 1)$ . La

primera aproximació de Hasting té 6 constants i presenta un error menor que  $4.5 \cdot 10^{-4}$  i és:

$$X = X^*(q) = \eta - \left\{ \frac{a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2}{1 + b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3} \right\} + \epsilon(q) \quad (10.15)$$

$$\text{on } \eta = \sqrt{\ln(1/q^2)} \quad q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{X(q)}^{\infty} e^{-(1/2)t^2}, \quad 0 < q \leq 0,5$$

L'error és:  $|\epsilon(q)| < 4.5 \cdot 10^{-4}$

$a_0 = 2,515517$	$b_1 = 1,432788$
$a_1 = 0,802853$	$b_2 = 0,189269$
$a_2 = 0,010328$	$b_3 = 0,001308$

Taula 10.1. Coeficients de l'aproximació de Hasting amb sis constants

Quan  $q > 0.5$  es canvia l'argument de la funció per  $1 - q$  i el signe de la funció, és a dir  $-X^*(1 - q)$ .

La segona aproximació de la funció de distribució inversa basada en els estudis de C. Hasting per computadors digitals té 4 constants, a costa de patir un error més gran:

$$X = X^*(q) = \eta - \left\{ \frac{c_0 + c_1\eta}{1 + d_1\eta + d_2\eta^2} \right\} + \epsilon(q) \quad (10.16)$$

En aquest cas l'error és més gran i està acotat per:  $|\epsilon(q)| < 3 \cdot 10^{-3}$

$c_0 = 2,30753$	$d_1 = 0.99229$
$c_1 = 0,27061$	$d_2 = 0.04481$

Taula 10.2. Coeficients de l'aproximació de Hasting amb quatre constants

- **Aproximació de Odeh & Evans**

És molt semblant a l'aproximació de Hasting, tot i que resulta més acurada [33]. L'error màxim que comet aquesta aproximació és de  $5.4 \cdot 10^{-6}$ . Es tracta d'una aproximació de la funció inversa de distribució normal ( $x = F^{-1}(u)$ ), per valors de  $u \leq 1/2$ . Quan  $u > 1/2$ , es canvia l'argument per  $1 - u$ , i el signe de la funció:

$$g(u) = \sqrt{-2\log(u)} + \frac{A(\sqrt{-2\log(u)})}{B(\sqrt{-2\log(u)})}, \quad 1/2 \geq u \geq 10^{-20} \quad (10.17)$$

On  $A(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i$ , i  $B(x) = \sum_{i=0}^4 b_i x^i$ , on els coeficients venen definits per la taula 10.3.

$i$	$a_i$	$b_i$
0	-0.3222232431088	0.0993484626060
1	-1.0	0.588581570495
2	-0.342242088547	0.531103462366
3	-0.0204231210245	0.103537752850
4	-0.0000453642210148	0.0038560700634

Taula 10.3. Coeficients de l'aproximació d'Odeh & Evans

- **Aproximacions de la funció de distribució inversa normal per calculadores de mà**

Les calculadores de mà antigues no tenien una capacitat computacional com ara podia tenir un ordinador personal. Per aquest motiu, s'havia d'intentar sintetitzar el millor possible amb una exactitud raonable la funció de distribució inversa d'una v.a. normal. Algunes aproximacions es basen en els resultats anteriors de Hasting o Odeh & Evans. En aquest apartat presentarem algunes de les aproximacions que es proposen en [34-38].

L'aproximació (10.18) de la funció de distribució inversa d'una variable aleatòria normal, contempla una exactitud bastant bona i pot resultar una bona elecció per moltes aplicacions on es requereix un nivell d'aproximació bastant bo:

$$X = t - \left\{ \frac{1}{0.5 + 0.3t} \right\} \quad (10.18)$$

On  $t = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - P)}$ ,  $P \geq \frac{1}{2}$

De la mateixa manera que passava amb les aproximacions de Hasting i Odeh i Evans, l'aproximació (10.18) quedaria definida a trossos, ja que s'ha de diferenciar el cas  $P \geq \frac{1}{2}$  i el cas  $P < \frac{1}{2}$  canviant l'argument i el signe.

Una altra alternativa és utilitzar l'aproximació (10.19):

$$X = \text{sign}\left(P - \frac{1}{2}\right) \{1.238 \cdot t_2 \cdot (1 + 0.0262 \cdot t_2)\} \quad (10.19)$$

On en aquest cas  $t_2 = \sqrt{-\ln(4 \cdot P \cdot (1 - P))}$

Les aproximacions (10.18) i (10.19) s'ajusten bastant bé per a valors grans i petits de  $X$  (la primera molt millor que la segona), però existeixen unes altres funcions que només funcionen bé en determinats intervals, com per exemple l'aproximació (10.20):

$$X \approx \sqrt{-\frac{\pi}{2} \ln(4 \cdot P \cdot (1 - P))}, \quad P \geq 0.5 \quad (10.20)$$

L'aproximació (10.20) funciona bastant bé per valors de  $X$  compresos entre  $0 \leq X \leq 4.98$ . Per a valors de  $X \geq 4.98$  es pot utilitzar l'aproximació (10.21):

$$X \approx \sqrt{-2 \ln(1 - P) - \ln(2\pi(1 - P))} \quad (10.21)$$

També podem parlar de l'aproximació basada en els experiments de Ramberg i Schmeiser, que afirma que per qualsevol  $0 \leq P \leq 1$ :

$$X^* \cong \frac{\{P^{0.135} - (1 - P)^{0.135}\}}{0.1975} \quad (10.22)$$

L'aproximació (10.22) és bona per valors de  $X$  petits. Una aproximació més acurada per valors grans de  $X$  s'obté a partir de (10.23):

$$\hat{X} = 0.2 + \frac{\{P^{0.14} - (1 - P)^{0.09}\}}{0.1596} \quad (10.23)$$

L'elecció de qualsevol de les aproximacions que hem vist dependrà del marge de valors on ens movem, i de l'exactitud exigida.

- **Aproximació de Teichroew**

En [32] s'introdueix l'aproximació de Teichroew. Diu que a partir d'un sumatori de v.a. uniformes, i utilitzant una interpolació amb polinomis de Chebyshev s'obté una v.a. normal. Volem trobar  $y = m(\theta)$  on:

$$\int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \int_0^\theta \phi_\gamma(t) dt \quad (10.24)$$

I on  $\phi_\gamma$  és la funció de densitat de probabilitat del sumatori de  $\gamma$  v.a. uniformes. Aquesta aproximació requereix que el rang de  $\theta$  sigui restringit. Pel rang restringit  $\theta_L \leq \theta \leq \theta_U$ ,  $y = m(\theta)$  s'aproxima per interpolació polinòmica. Un polinomi de grau  $k - 1$  és apte, de tal manera que els seus valors coincideixen amb els valors de  $m(\theta)$  a les  $k$  arrels del polinomi de Chebyshev de grau  $k$ .

Teichroew va obtenir els coeficients del polinomi de Chebyshev per  $\gamma = 6, 8$  i  $12$ . Amb el cas de  $\gamma = 12$  s'obtenen uns resultats molt satisfactoris. Com abans,  $U_i$  denota una v.a. uniforme, llavors  $\theta = \sum_{i=1}^{12} U_i$  i per tant  $0 \leq \theta \leq 12$ . Tot i així,  $\theta$  ha de ser restringit. Teichroew va escollir  $\theta_L = 2$  i  $\theta_U = 10$ , on la  $Prob\{\theta_L \leq \theta \leq \theta_U\} \geq 1 - (2)10^{-5}$  i per tant la probabilitat de estar fora del rang és molt petita. Sigui  $r = (\theta - 6)/4$ , llavors l'aproximació d'una variable aleatòria normal  $X$  s'obté a partir de:

$$X = \sum_{j=0}^9 d_{2j+1} T_{2j+1}(r) \quad (10.25)$$

- **Aproximació de la CDF normal inversa per interpolació de polinomis de Chebyshev**

Es veurà en el capítol 15, però a diferència de l'aproximació de Teichroew, aquesta aproximació utilitza una única variable aleatòria uniforme, a costa d'utilitzar un major nombre de constants. L'aproximació es pot trobar en [39-40].

Com a conclusió, entre totes aquestes aproximacions i mètodes que hem vist, pensem que les úniques aproximacions que poden servir són la de Hasting, la d' Odeh & Evans, algunes aproximacions per calculadores de mà i l'aproximació per interpolació de polinomis de Chebyshev, ja que són les úniques que utilitzen una sola v.a. uniforme per aconseguir una v.a. normal (requisit indispensable per aplicar el mètode de la inversió). La resta de mètodes poden ser molt útils per altres aplicacions.

# 11 Mètode de la funció inversa

## 11.1 El principi de la inversió

El mètode de la inversa es basa en la següent propietat (veure [33]):

*Sigui  $F$  una funció de distribució continua en  $\mathbb{R}$  amb funció inversa  $F^{-1}$  definida per:*

$$F^{-1}(u) = \inf\{x: F(x) = u, 0 < u < 1\} \quad (11.1)$$

*Si  $U$  és una v.a. definida entre  $[0,1]$ , llavors  $F^{-1}(U)$  té funció de distribució  $F$ . També, si  $X$  té funció de distribució  $F$ , llavors  $F(X)$  està uniformement distribuït entre  $[0,1]$ .*

*Demostració:*

*La primera afirmació nota que per  $x \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(U) \leq x) &= P(\inf\{y: F(y) = U\} \leq x) = P(U \leq F(x)) \\ &= F(x) \end{aligned} \quad (11.2)$$

*La segona afirmació segueix que per tot  $0 < u < 1$*

$$P(F(x) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u \quad (11.3)$$

Aquest mètode es pot utilitzar per generar variables aleatòries amb una funció de distribució  $F$  arbitrària sempre que per aquesta existeixi la seva funció inversa  $F^{-1}$  implícita. La figura 11.1 mostra exemples de funcions inverses per a distribucions conegudes. S'ha de notar que a vegades  $F^{-1}(U)$  es pot simplificar, notant que  $1 - U$  es distribuït com  $U$ .

Density $f(x)$	$F(x)$	$X=F^{-1}(U)$	Simplified form
Exponential( $\lambda$ ) $\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$1 - e^{-\lambda x}$	$-\frac{1}{\lambda} \log(1-U)$	$-\frac{1}{\lambda} \log(U)$
Cauchy( $\sigma$ ) $\frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	$\sigma \tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)$	$\sigma \tan(\pi U)$
Rayleigh( $\sigma$ ) $\frac{x}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x \geq 0$	$1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma \sqrt{-\log(1-U)}$	$\sigma \sqrt{-\log(U)}$
Triangular on $(0, a)$ $\frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right), 0 \leq x \leq a$	$\frac{2}{a}\left(x - \frac{x^2}{2a}\right)$	$a(1 - \sqrt{1-U})$	$a(1 - \sqrt{U})$
Tail of Rayleigh $x e^{-\frac{a^2 - x^2}{2}}, x \geq a > 0$	$1 - e^{-\frac{a^2 - x^2}{2}}$	$\sqrt{a^2 - 2\log(1-U)}$	$\sqrt{a^2 - 2\log U}$
Pareto( $a, b$ ) $\frac{ab^a}{x^{a+1}}, x \geq b > 0$	$1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a$	$\frac{b}{(1-U)^{1/a}}$	$\frac{b}{U^{1/a}}$

Figura 11.1. Funcions de distribució inverses d'algunes distribucions conegudes

Una forma analítica de tractar el problema que ens ocupa és a partir de la transformació de variables aleatòries fent servir el principi d'inversió que hem introduït abans. Es pot trobar més informació en [25]. D'aquesta manera, amb el mètode de la inversió podem transformar la v.a. "origen" a una v.a. intermèdia uniformement distribuïda entre  $U(0,1)$ , i després transformar aquesta v.a. uniforme en la variable aleatòria "destí". En la figura 11.2 es mostra de forma esquemàtica el procés que realitza el mètode de la inversió, on  $F_{Y|S}(\cdot)$  i  $F_{Z|S}(\cdot)$  són les funcions de distribució de probabilitat condicionades al senyal rebut de les v.a's  $y$  i  $z$ , respectivament. A més a més,  $z = F_{Z|S}^{-1}(u)$  és la funció inversa de distribució de probabilitat de la v.a.  $z$ , on  $u$  és una v.a. uniforme distribuïda en l'interval  $(0,1)$ .

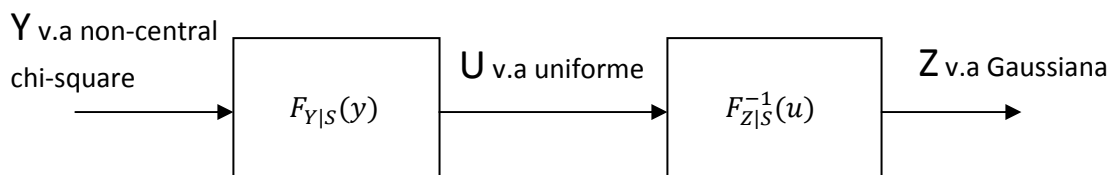


Figura 11.2. Procés de conversió d'una v.a. chi quadrada en una v.a. Gaussiana amb el mètode de la inversa



D'aquesta manera, la funció que relaciona les variables aleatòries d'entrada i sortida s'aconsegueix a través de la concatenació de les funcions de distribució de probabilitat fent servir la següent transformació no lineal:

$$g(y) = F_{Z|S}^{-1}(F_{Y|S}(y)) \quad (11.4)$$

Aquesta funció  $g(y)$  serà una funció no lineal i sense memòria, molt útil per la nostra aplicació. En el cas que ens ocupa, amb presència de soroll ASE, soroll Gaussià o la combinació de soroll ASE i Gaussià, es verifica que la monotonia de les funcions de distribució de probabilitat és creixent, per tant la transformació no lineal  $g(y)$  també serà una funció monòtona creixent. Assumirem també que  $g(y)$  és una funció diferenciable creixent en aquests casos d'interès, noteu que en altres casos pot no complir-se aquesta propietat.

El principal problema d'aquest procediment és la sintetització de la funció inversa de distribució normal  $F_{Z|S}^{-1}(\cdot)$ , ja que no existeix. Per aquest motiu, s'haurà d'utilitzar alguna tècnica d'aproximació de les que hem vist en el capítol anterior (Veure [31] [33-40]).

Per demostrar que el mètode d'inversió funciona correctament, realitzarem un exemple generant una v.a. exponencial a partir d'una v.a. Gaussiana (conversió de Gaussiana a exponencial). En aquest cas podem trobar una expressió tancada de la funció de distribució inversa d'una v.a. exponencial perquè té inversa implícita. En efecte:

Sigui  $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$  la funció de distribució de probabilitat d'una v.a. exponencial amb paràmetre  $\mu$ . La seva funció inversa, es pot trobar fàcilment de manera que:

$$F_X^{-1}(u) = -\mu \cdot \ln(1 - u) \quad (11.5)$$

On " $u$ " és una v.a. uniforme entre  $U(0,1)$ . D'aquesta manera, vam programar un script en MATLAB i vam aconseguir els resultats de la figura 11.3 (a l'esquerra es mostra la distribució d'entrada, on clarament es pot observar l'aspecte uniforme, i a la dreta s'observa la distribució exponencial amb paràmetre  $\mu = 0.1$ ):

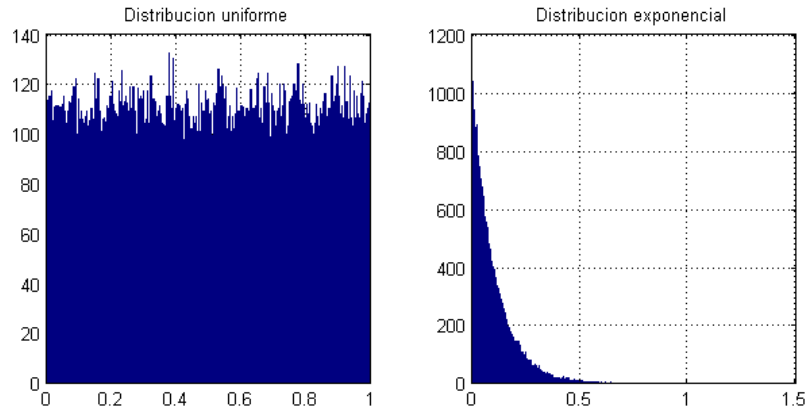


Figura 11.3. Mètode de la funció inversa. Conversió d'una v.a. uniforme a v.a. exponencial

En la figura 11.3 s'observa com a partir d'una v.a. uniforme  $U(0,1)$ , s'obté una v.a. exponencial amb paràmetre  $\mu = 0.1$ . Ara anem a simular tot un sistema sencer, on convertirem una v.a. normal o Gaussiana en una v.a. exponencial. Partirem d'una v.a. Gaussiana  $N(0,1)$ , que transformarem a uniforme  $U(0,1)$ , i seguidament a exponencial amb paràmetre  $\mu = 0.1$ , aplicant el mètode de la inversa. Per fer això utilitzem un simple script en MATLAB, i els resultats es mostren en la figura 11.4:

```
function gaussian_to_exponencial
g=randn(100000,1);
u = 1/2.*(erf(g./sqrt(2))+1);
x = -0.1.*log(1-u);
s = (0:0.01:1)';
expo = (1./0.1).*exp(-s./0.1);
subplot(1,4,1)
hist(g, 1000), grid on
title('Distribucion Gaussiana')
subplot(1,4,2)
hist(u, 1000), grid on
title('Distribucion uniforme')
subplot(1,4,3)
hist(x, 1000), grid on
title('Distribucion exponencial')
subplot(1,4,4)
plot(s,expo), grid on
title('Distribucion exponencial ideal')
```

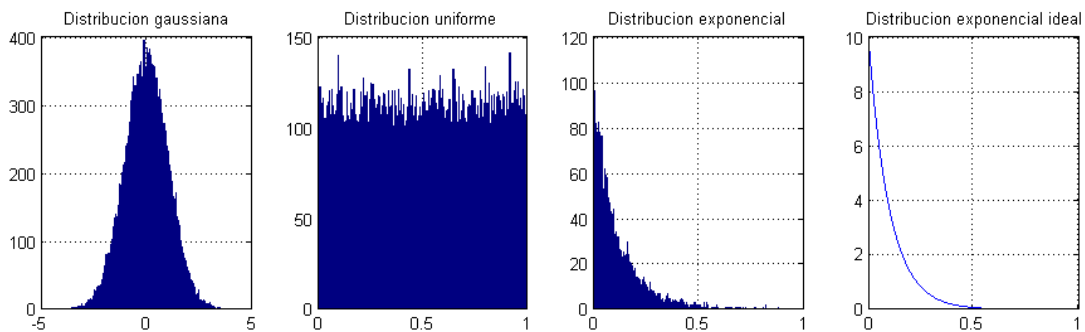


Figura 11.4. Mètode de la funció inversa. Conversió d'una v.a. Gaussiana a v.a. exponencial

Tal i com es pot veure en la figura 11.4, a la sortida del sistema tenim una funció de densitat de probabilitat molt semblant a la ideal. Per tant, queda demostrat que el mètode de la inversió ens pot resultar de gran utilitat per trobar la funció òptima. En aquest exemple, la funció no lineal que defineix la relació entre una v.a. Gaussiana  $N(m_y, \sigma)$  i una v.a. exponencial amb paràmetre  $\mu$ , es pot trobar fàcilment aplicant el mètode de la inversió a partir de la transformació no lineal:

$$g(y) = F_Z^{-1}(F_Y(y)) = -\mu \cdot \ln \left( 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{y - m_y}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \right) \quad (11.6)$$

I pel cas d'una v.a. Gaussiana d'entrada al sistema  $N(0,1)$  i una v.a. exponencial de sortida amb paràmetre amb  $\mu = 0.1$ , la funció que relaciona ambdues variables aleatòries es representa en la figura 11.5.

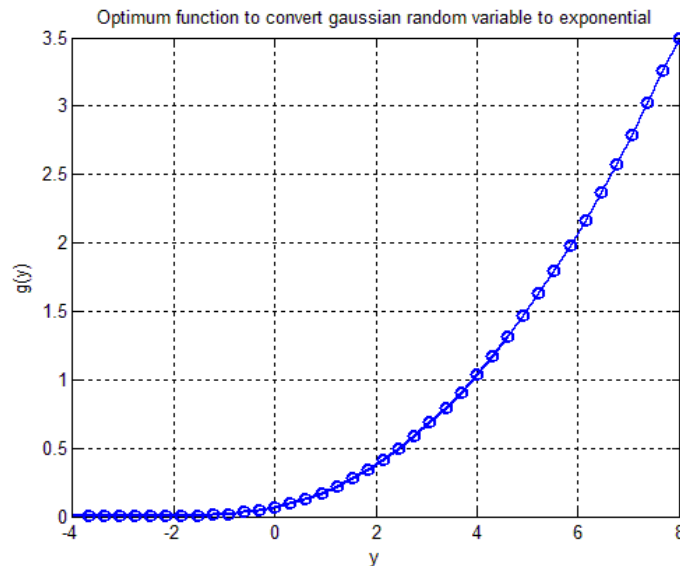


Figura 11.5. Funció no lineal que relaciona una v.a. normal amb una v.a. exponencial



## 12 Una primera aproximació de la funció òptima amb el mètode de la inversa

Al pensar en la funció òptima ens sorgeixen moltes qüestions relacionades amb la forma i característiques d'aquesta, per exemple: ¿És una funció monòtona creixent? ¿És decreixent? ¿O és monòtona a trossos? ¿S'aproxima a la funció arrel quadrada quan tendim cap a l'infinit? ¿Què passa a prop del zero? ¿A prop de l'origen s'aproxima per l'arrel cúbica? ¿Quants màxims o mínims té? ¿I punts d'inflexió? ¿És continua i derivable en tots els punts del seu domini? ¿Té alguna asímptota vertical, horitzontal o obliqua? ¿És una funció definida a trossos? ¿On creua amb l'eix de les abscisses? ¿Quin és el domini i el recorregut de la funció?

Algunes d'aquestes qüestions ja es poden contestar a priori sense haver trobat cap funció òptima. Sabem del tot cert que la funció ha de ser monòtona creixent, així com contínua i derivable en tot el seu domini. A més a més, observant la distribució chi quadrada, podem garantir que el domini seran tots els nombres reals positius  $\mathbb{R}^+$ , ja que  $Pr\{Y < 0\} = 0$ . També s'ha demostrat en els capítols 6, 8 i 9 que la funció òptima ha de convergir en l'arrel quadrada, la velocitat de convergència de moment la desconeixem, però dependrà de la densitat espectral del soroll ASE  $N_0$  i del nombre de modes espectrals  $n$ . En quant a les asímptotes, es pot assegurar que la funció òptima no presentarà una asímptota vertical en l'origen de coordenades, les raons es justifiquen en el capítol 9. La funció òptima tampoc presentarà extrems relatius, per tant la pendent mai s'anul·la i sempre serà positiva, ja que hem dit que es tracta d'una funció creixent. També podem dir que la funció òptima serà còncaua en tot el seu domini.

En aquest capítol farem servir el mètode de la inversa, vist en el capítol anterior, per trobar una primera aproximació de la funció òptima. Realitzarem dues tècniques per representar

en uns eixos la funció que busquem: La primera tècnica és una simple tabulació de la funció i la segona tècnica fa servir un petit codi en MATLAB que implementa el mètode de la inversa sense utilitzar cap aproximació en el procediment.

## 12.1 Tabulació i representació de la funció òptima

Per contestar la resta de qüestions que hem plantejat abans és necessari realitzar una primera estimació numèrica de la funció. Per fer-ho, utilitzarem el mètode de la inversió com a punt de referència fonamental, amb el qual convertirem una variable aleatòria chi quadrada  $\chi^2$  amb  $n$  graus de llibertat a una v.a. normal. Si analitzem amb més detall les dues distribucions que tractarem en aquest projecte, veurem que en els dos casos es tracten de distribucions dependents d'un conjunt de paràmetres. Per tant, degut a aquesta dependència de les distribucions d'entrada i sortida amb aquest conjunt de paràmetres (nombre de modes  $n$ , paràmetre de no centralitat  $\lambda$ , mitja de la Gaussiana  $m_z$  i desviació estàndard  $\sigma$ ), podem assegurar que la funció òptima NO serà única, sinó que apareixerà una família de funcions òptimes.

Com es va comentar en el capítol 11, el principal problema d'utilitzar el mètode de la inversa recau en sintetitzar la funció inversa  $z = F_{Z|S}^{-1}(u)$ , ja que la funció de distribució d'una v.a. normal no té inversa a nivell d'expressió tancada. Per fer-ho es poden utilitzar tabulacions numèriques de la funció inversa a partir de tècniques de resolució numèrica estadística de Monte Carlo o tècniques de resolució numèrica com el mètode de bisecció, mètode de la secant, mètode de Newton-Raphson, etc. També es poden utilitzar aproximacions per series de potències o polinòmiques (aprox. d'Odeh & Evans, aprox. de Hasting, interpolació de Chebyshev o d'altres menys acurades).

Les funcions de distribució de probabilitat que ens trobem en el nostre estudi són les següents (veure capítol 7):

- Distribució Non-Central Chi-Square (INPUT) pel bit "1":

$$F_{Y|S}(y) = \int_0^y \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{u}{s^2}\right)^{(n-2)/4} e^{-(s^2+u)/2\sigma^2} I_{n/2-1}\left(\sqrt{u}\frac{s}{\sigma^2}\right) du \quad (12.1)$$

$$F_{Y|S}(y) = 1 - Q_m\left(\frac{s}{\sigma}, \frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) \quad (12.2)$$

on  $Q_m(a, b)$  és la funció Marcum Q, i  $m = \frac{n}{2}$

- Distribució Central Chi-Square (INPUT) pel bit "0" si suposem ER infinita:

$$F_{Y|S}(y) = P(Y \leq y) = 1 - e^{-y/2\sigma^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{y}{2\sigma^2}\right)^k \quad (12.3)$$

- Distribució Gaussiana o Normal (OUTPUT):

$$F_{Z|S}(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{z - m_z}{\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (12.4)$$

Per prendre un primer contacte amb la funció òptima, vam realitzar una tabulació de la funció fent servir el mètode de la inversa (capítol 11). Més endavant es veuran aproximacions més precises de la funció de distribució inversa (CDF inversa) d'una v.a. normal fent servir les tècniques abans descrites. Totes aquestes tècniques prendran com a teoria fonamental el mètode de la inversa.

Per trobar una primera aproximació de la funció vam realitzar una taula donant valors. Per fer-ho més senzill, vam fixar els valors intermedis (els valors que pren la v.a. uniforme). D'aquesta manera, vam definir "y" com els valors a la entrada del sistema, "u" com els valors intermedis del sistema ( $0 \leq u \leq 1$ ), i "z" com els valors de sortida del sistema. Segons (12.2) i (12.4):

$$u = 1 - Q_m \left( \frac{s}{\sigma}, \frac{\sqrt{y}}{\sigma} \right) \quad u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{z - m_z}{\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (12.5)$$

Donant valors, vam obtenir la taula que relaciona els valors que pren una v.a. chi quadrada amb una v.a. normal pels paràmetres  $s = 0$ ,  $m_z = 0$ ,  $\sigma = 1$  i  $n = 2$  graus de llibertat. Aquesta taula es pot trobar en l'annex 1.

En la figura 12.1 es representa en color blau l'estimació de la funció òptima pels paràmetres abans descrits ( $z$  en funció de  $y$ ), en color vermell la funció arrel quadrada i en color verd la funció arrel cúbica. Es poden observar diferències evidents a prop del zero, ja que l'arrel quadrada i l'arrel cúbica convergeixen en zero, mentre que l'estimació de la funció òptima tendeix cap a valors d'ordenada negatius. En el capítol 9 vam discutir que la funció òptima no podia tenir una asímptota vertical en  $y = 0$ . Amb el mètode de la inversa, però, hem trobat que la funció òptima convergeix al  $-\infty$  quan  $y \rightarrow 0$ . Això últim és fàcil de demostrar si fem el límit quan  $y \rightarrow 0$  de (12.2), ja que comprovarem que aquest límit és 0 per qualsevol valor del paràmetre de no centralitat  $\lambda$  i nombre de graus de llibertat  $n$ . Per tant l'únic valor de  $z$  que fa que  $u = 0$  és quan  $z \rightarrow -\infty$  ( $z = \sigma\sqrt{2} \cdot \operatorname{erf}^{-1}(2u - 1)$ ). Evidentment, ja es comencen a veure característiques de la funció, algunes d'elles serien:

- La funció òptima no serà única, ja que dependrà de 1, 2, 3 o fins i tot 4 graus de llibertat.
- Aquests graus de llibertat seran; la relació de no centralitat  $\lambda = s^2/\sigma^2 = 2E_s/N_0$ , la densitat espectral de potència del soroll ASE  $2\sigma^2$ , i el nivell mig de corrent a la sortida de la funció  $m_z$ .
- La funció òptima també depèn del nombre de graus de llibertat  $n$  que té la distribució chi quadrada. Aquesta relació depèn de l'ample de banda del filtre òptic i del filtre elèctric. Es pot trobar més informació en el capítol 7.

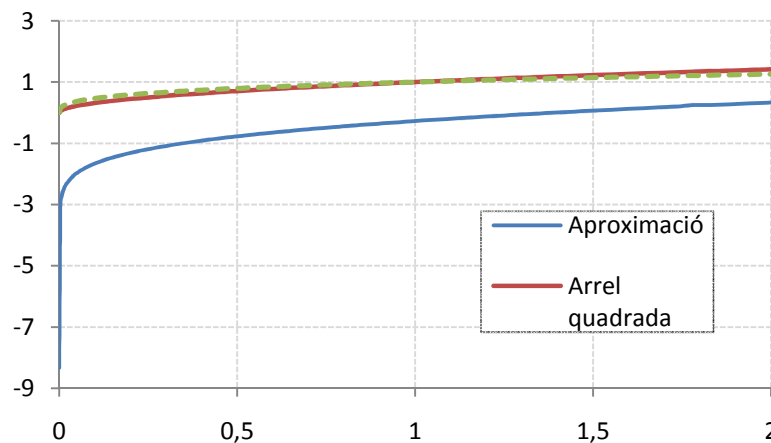


Figura 12.1. Comparació entre l'estimació de la funció òptima per  $n=2$ ,  $\lambda=0$  i  $\sigma=1$ , l'arrel quadrada i l'arrel cúbica

En aquesta primera aproximació, també s'aprecia que per a valors grans, les funcions arrel quadrada i l'aproximació de la funció òptima són molt semblants (mirar figura 12.2). En canvi, les diferències entre l'arrel cúbica i l'aproximació de la funció es comencen a fer evidents. L'arrel cúbica és una mala aproximació de la funció òptima quan només tenim presència de soroll ASE.

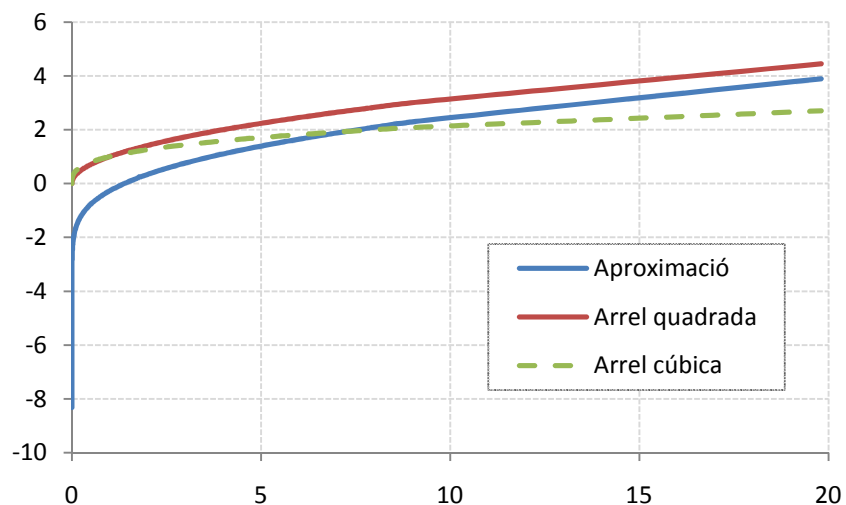


Figura 12.2. Comparació entre l'estimació de la funció òptima per  $n=2$ ,  $\lambda=0$  i  $\sigma=1$ , l'arrel quadrada i l'arrel cúbica



## 12.2 Funció òptima pel mètode de la inversió i sense cap aproximació

Una manera encara més senzilla que aquesta per trobar una primera aproximació de la funció òptima, pot consistir en utilitzar un parell de funcions definides en MATLAB. La primera funció s'encarrega de generar la funció de distribució de probabilitat d'una v.a. chi quadrada amb  $V$  graus de llibertat i paràmetre de no centralitat  $DELTA$ :

$$P = \text{NCX2CDF}(X, V, DELTA)$$

Aquesta funció retorna un valor  $P \in [0,1]$ . La segona funció no és més que la funció inversa de distribució de probabilitat d'una v.a. Gaussiana:

$$X = \text{NORMINV}(P, MU, SIGMA)$$

On la variable  $P$  és la mateixa que hem vist abans, i  $MU$  i  $SIGMA$  són la mitja i la desviació estàndard respectivament. Així, aplicant aquestes dues funcions podem aconseguir els mateixos resultats que en la tabulació, però de forma més directa i senzilla. El codi en MATLAB següent mostra un exemple d'implementació del mètode de la inversa fent servir aquestes dues funcions:

```
t = linspace(0.001, 100, 10000)';
modes = 2;
delta = 0;
sigma = 1;
t = t./(sigma.^2);
u = ncx2cdf(t, modes, delta);
x = norminv(u, sqrt(delta), 1);
plot(t, x, 'r', t, sqrt(t), 'b--', 'Linewidth', 2), grid on
xlabel('y'), ylabel('g(y)'), title('First optimum function
approximation')
legend('Optimum function', 'SQRT')
```

Fent servir aquest script podem representar en un marge més extens la funció òptima del que teníem tabulat. La figura 12.3. representa la funció òptima pels paràmetres  $n = 2$  (nombre de modes),  $\lambda = 0$  (paràmetre de no centralitat) i  $\sigma = 1$  (desviació estàndard) vers l'arrel quadrada (color blau discontinu). Si ens fixem amb detall en la funció òptima, ens adonem que a partir d'un cert valor d'abscissa (aproximadament  $y = 75$  en aquest cas) la funció no convergeix i el MATLAB ens retorna el valor `inf`. En el capítol 14 i 15 es veurà com solucionar aquest problema de convergència. En el punt d'abscissa  $y = 0$ , observem que la funció òptima té una asímptota vertical ja que en aquest punt el MATLAB retorna el valor `-inf`.

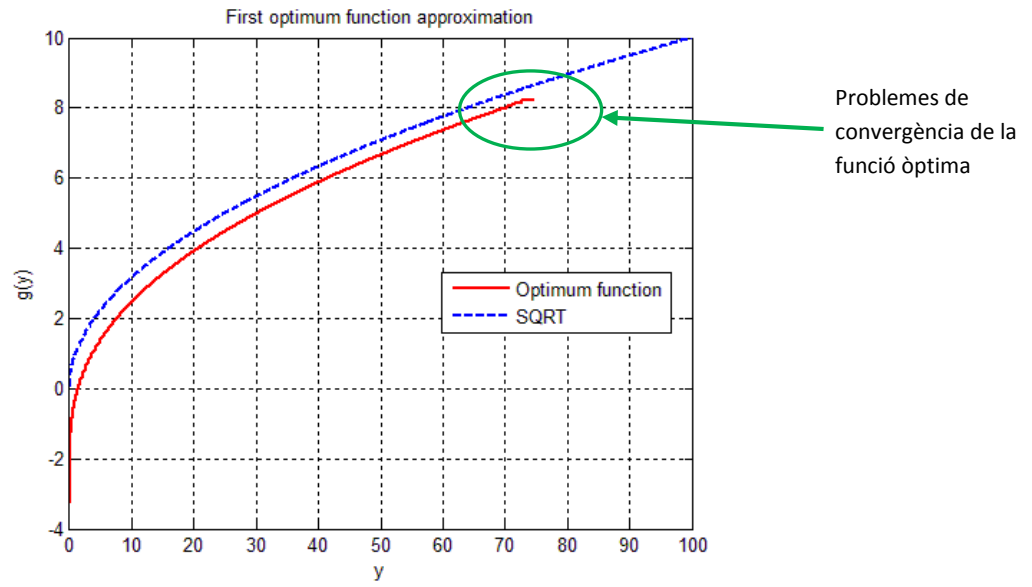


Figura 12.3. Funció òptima per  $n=2$ ,  $\lambda=0$  i  $\sigma=1$  vers l'arrel quadrada

## 13 Mètode de la inversió per solució numèrica

El mètode de la inversió és exacte quan coneixem de forma tancada e implícita la funció de distribució inversa  $F^{-1}$  de la v.a. "destí". En altres casos, hem de resoldre l'equació  $F(X) = U$  numèricament, i això requereix un gran temps de computació quan  $F$  és continua. Alguns mètodes de resolució numèrica que podem fer servir per trobar la funció de distribució inversa d'una v.a. Gaussiana són (veure [33]):

- El mètode de bisecció
- El mètode de la secant
- El mètode de Newton-Raphson

Habitualment, aquests algoritmes s'utilitzen per trobar les arrels d'una equació, però es poden adaptar a altres casos, com el que anem a estudiar. Alguns d'ells, com el de Newton, requereixen també conèixer la primera derivada de la funció en el punt.

### 13.1 Mètode de bisecció

És un mètode numèric útil per resoldre l'equació inversa de  $F(X) = U$  ( $x = F^{-1}(u)$ ). Habitualment el mètode de bisecció s'utilitza com algoritme de recerca d'arrels i és el mètode més elemental i antic que existeix. Treballa dividint l'interval a la meitat i seleccionant l'interval que conté l'arrel (teorema de Bolzano), i així successivament fins fer l'interval tant petit com exigeixi la precisió que hem fixat. En el nostre cas, l'algoritme és lleugerament diferent, però té una mecànica molt semblant, es descriu tot seguit:

```
Find an initial interval  $[a, b]$  to which the solution belongs.  
REPEAT  
     $X \leftarrow (a + b) / 2$   
    IF  $F(X) \leq u$   
        THEN  $a \leftarrow X$   
        ELSE  $b \leftarrow X$   
UNTIL  $b - a \leq 2\delta$   
RETURN  $X$ 
```

El següent codi en MATLAB implementa aquest algoritme pel cas particular d'una CDF Normal  $N(0,1)$ :

```
function x = bisection_method(a,b,u)
delta = 0.0001;
while((b-a) > 2.*delta)
    x = (a+b)./2;
    F = 1/2+1/2.*erf(x./sqrt(2));
    if(F <= u)
        a = x;
    else
        b = x;
    end
end
end
```

En la figura 13.1 es representa l'histograma resultant d'aplicar aquest algoritme numèric per convertir una v.a. uniforme  $U(0,1)$  en una Gaussiana  $N(0,1)$ . La línia vermella representa una Gaussiana ideal.

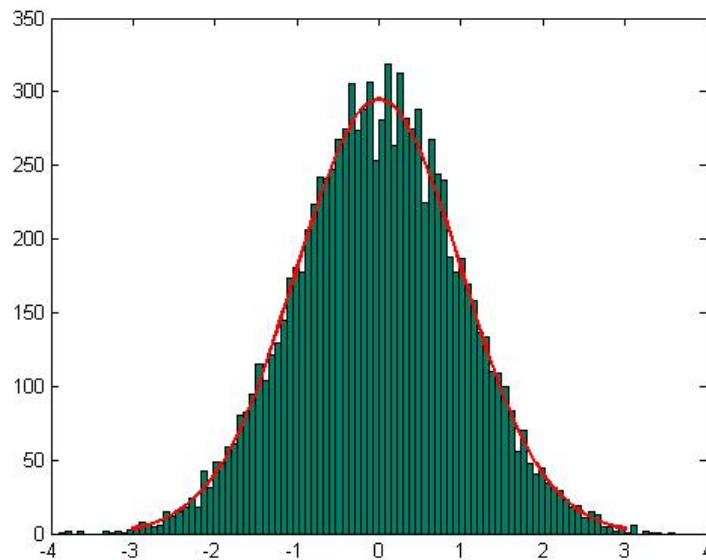


Figura 13.1. Histograma obtingut amb el mètode numèric de la bisecció

Podem fer servir el mètode de la bisecció per trobar la funció òptima que relaciona una v.a. chi quadrada amb, per exemple,  $n = 2$  graus de llibertat i paràmetre de no centralitat  $\lambda = 0$ , i una v.a. Gaussiana amb mitja  $\mu = 0$  i desviació estàndard  $\sigma = 1$ . El següent codi en llenguatge MATLAB utilitza el mètode de la inversa, juntament amb el mètode de la bisecció. Fixeu-vos que en aquest cas hem disminuït l'exactitud a  $10^{-8}$ .

```
function x = funcion_biseccion(y, sigma, lambda, modes)
x = 0.*ones(length(y),1)
y = y./sigma.^2;
u = ncx2cdf(y, modes, lambda);
for i=1:length(t)
    x(i,1) = bisection_method(-1000,1000,u(i,1));
end
x = lambda.*sigma+x.*sigma;
```

La funció òptima pels paràmetres abans descrits es mostra en la figura 13.2, juntament amb la funció arrel quadrada (color blau discontinu). S'ha de destacar que, igual que passava en el capítol 12, a partir d'un cert valor la funció òptima presenta problemes de convergència, més endavant s'estudiarà com solucionar-los.

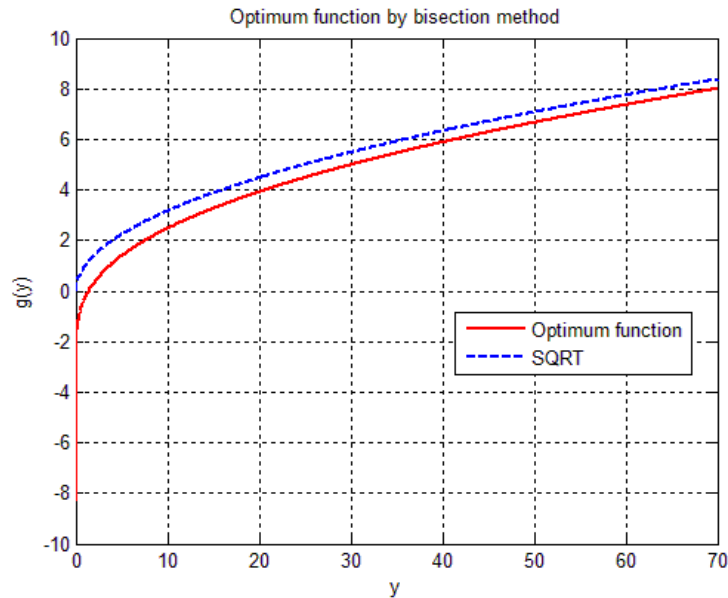


Figura 13.2. Funció òptima per  $n=2$ ,  $\lambda=0$  i  $\sigma=1$  obtinguda amb el mètode numèric de la bisecció i el mètode de la inversa

## 13.2 Mètode de la secant i mètode de Newton-Raphson

Uns altres mètodes numèrics que ens poden valdre per trobar la funció de distribució inversa d'una v.a. normal poden ser: el mètode de la secant i el mètode de Newton-Raphson. Aquests dos mètodes són més ràpids, però menys robustos que el mètode de bisecció. S'ha de comentar que el mètode de bisecció és l'únic en el que sempre es garanteix la convergència. Començant pel primer, el mètode de la secant contempla el següent algoritme [33]:

```

Find an interval  $[a, b]$  to which the solution belongs.
REPEAT
 $X \leftarrow a + (b - a) \frac{U - F(a)}{F(b) - F(a)}$ 

    IF  $F(X) \leq U$ 
        THEN  $a \leftarrow X$ 
        ELSE  $b \leftarrow X$ 
UNTIL  $b - a \leq \delta$ 
RETURN  $X$ 

```

El mètode de la secant, com s'observa en l'algoritme, parteix de dos punts (i no de només un com ho fa el mètode de Newton) i estima la tangent (és a dir, la pendent). Amb aquesta

pendent, obtenim directament l'expressió de la secant que ens proporciona el següent punt d'iteració:

$$a + (b - a) \frac{U - F(a)}{F(b) - F(a)} \quad (13.1)$$

Hem desenvolupat aquest algoritme en MATLAB, però no arriba a convergir. El codi és el següent:

```
function x = secant_method(a,b,u)
delta = 0.01;
while((b-a) > delta)
    Fa = 1/2+1/2.*erf(a./sqrt(2));
    Fb = 1/2+1/2.*erf(b./sqrt(2));
    x = a+(b-a).*(u-Fa)./(Fb-Fa);
    F = 1/2+1/2.*erf(x./sqrt(2));
    if(F <= u)
        a = x;
    else
        b = x;
    end
end
end
```

En general, el mètode de la secant presenta els mateixos avantatges i limitacions que el mètode de Newton-Raphson.

L'algoritme de Newton-Raphson és mostra a continuació, tot i així no l'hem implementat en codi:

Choose an initial guess  $X$   
REPEAT

$$X \leftarrow X - \frac{(F(X) - U)}{f(X)}$$

UNTIL stopping rule is satisfied. (Note:  $f$  is the density corresponding to  $F$ .)  
RETURN  $X$ .

El mètode de Newton és molt ràpid i eficient ja que la convergència és de tipus quadràtica (el nombre de xifres significatives es duplica en cada iteració). Tot i així, la convergència depèn en gran mesura de la forma que adopta la funció en les proximitats del punt d'iteració.

### 13.3 Conclusions del mètodes numèrics

Hem comprovat que aquests mètodes numèrics donen bons resultats (tant de velocitat de convergència com de precisió) per a la generació de variables aleatòries. A més a més, ens permeten variar l'exactitud segons l'aplicació, depenent de l'error màxim que vulguem cometre. En cap cas aconseguim una expressió matemàtica tancada per la funció òptima obtinguda, ja que utilitzem un mètode numèric, de totes maneres es pot interpolar el conjunt de punts resultants d'aplicar un mètode numèric mitjançant funcions conegudes, i

així obtenir una expressió matemàtica aproximada. En el capítol 17 es poden trobar algunes tècniques d'aproximació i interpolació de funcions.





## 14 Funció òptima de Hasting-Dillard

En aquest capítol estudiarem la transformació no lineal basada en el mètode de la inversa (11.4) fent servir l'aproximació de Hasting (10.15) per modelar la CDF inversa d'una v.a. normal. Aquesta transformació resultant, de la mateixa manera que en capítols anteriors, depèn del paràmetres de les distribucions d'entrada i sortida. Generalment són tres paràmetres, que són: el paràmetre de no centralitat  $\lambda$ , la varianza del soroll ASE  $\sigma^2$  i el nombre de graus de llibertat  $n$  de la distribució chi quadrada.

En l'apartat 14.1 veurem que apareixen problemes de convergència quan apliquem directament el mètode de la inversa (11.4) amb  $F_{Z|S}^{-1}(\cdot)$  sent l'aproximació de Hasting i  $F_{Y|S}(\cdot)$  sent la CDF ideal d'una v.a. Chi quadrada (12.2). Per solucionar aquest problema de convergència de la funció òptima, en l'apartat 14.2 presentarem un algoritme recursiu de la funció Marcum Q dins de  $F_{Y|S}(\cdot)$ , anomenat algoritme de Dillard. En funció del nombre d'iteracions d'aquest algoritme, estudiarem dues possibles funcions òptimes (apartats 14.3 i 14.4).

En l'apartat 14.3 veurem una simplificació de la funció òptima fent servir només zero iteracions de l'algoritme de Dillard. Amb zero iteracions de l'algoritme de Dillard s'obté una simplificació de la funció Marcum Q, i per tant una simplificació de la CDF  $F_{Y|S}(\cdot)$ . Això implica que la funció òptima resultant d'aplicar el mètode de la inversa és una aproximació de la funció òptima ideal, per tant es comet un error. Per minimitzar l'error, veurem que s'ha de fixar el paràmetre de no centralitat de la funció a  $\lambda = 0$ . Amb aquest fet, la CDF  $F_{Y|S}(\cdot)$  fent servir zero iteracions coincideix amb la CDF d'una v.a. central chi-square, i per tant l'error és zero. Veurem que aquesta funció dona uns resultats acceptables, però no els òptims.

En l'apartat 14.4 estudiarem la funció òptima quan incrementem el nombre d'iteracions de l'algoritme de Dillard. Amb aquesta funció podrem utilitzar un paràmetre de no centralitat diferent que zero, garantint un error molt petit en l'aproximació, gràcies al fet d'utilitzar un gran nombre d'iteracions. Estudiarem la funció òptima resultant d'aplicar el

mètode de la inversa en funció d'aquest paràmetre de no centralitat, i buscarem quin és el valor d'aquest que minimitza la BER, linealitzant millor el sistema i manté la varianza més constant, sempre garantint una estadística Gaussiana. Durant el text anomenarem paràmetre d'ajust al paràmetre de no centralitat de la funció per evitar confusions amb el paràmetre de no centralitat del senyal. Finalment compararem el rendiment d'aquesta funció amb l'arrel quadrada i l'arrel cúbica en diferents condicions.

## 14.1 Introducció

En [31] és defineix l'aproximació de Hasting. Aquesta aproximació, que vam veure en el capítol 10, expressió (10.15), aproxima la funció inversa de distribució de probabilitat (CDF inversa)  $F_{Z|S}^{-1}(\cdot)$  d'una v.a. normal  $N(0,1)$  amb un error relativament petit. Noteu que el domini d'una CDF inversa són tots els nombres reals que pertanyen a l'interval (0,1).

L'script en MATLAB que defineix l'aproximació de Hasting és el següent (observeu que la funció està definida a trossos):

```
function x = hasting(p)
x = 0;
a0 = 2.515517;
a1 = 0.802853;
a2 = 0.010328;
b1 = 1.432788;
b2 = 0.189269;
b3 = 0.001308;

if(p > 0.5)
    p=1-p;
    y = sqrt(log(1./p^2));
    A = a0 + a1.*y + a2.*y^2;
    B = 1 + b1.*y + b2.*y^2 + b3.*y^3;
    x = (y - A./B);
elseif (p <= 0.5)
    y = sqrt(log(1./p^2));
    A = a0 + a1.*y + a2.*y^2;
    B = 1 + b1.*y + b2.*y^2 + b3.*y^3;
    x = -(y - A./B);
end
```

La figura 14.1 mostra a l'esquerra la CDF inversa donada per l'aproximació de Hasting i a la dreta l'error entre aquesta aproximació i la CDF inversa ideal. Si observem l'error, podem veure que el màxim error que es comet es de  $4.5 \cdot 10^{-4}$ .

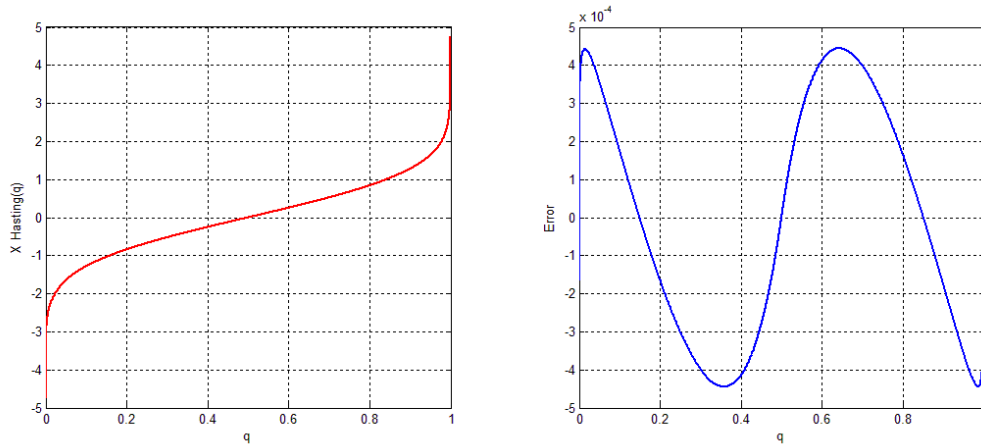


Figura 14.1. Aproximació de Hasting en funció de  $q$  (A l'esquerra).  
Error entre la CDF inversa ideal i l'aprox. de Hasting (A la dreta)

Per comprovar si l'aproximació de Hasting funciona correctament, hem generat l'histograma de la figura 14.2 sobre les mostres de sortida. Per generar aquest histograma hem passat com argument a l'aproximació de Hasting (10.15) una v.a. uniforme distribuïda entre  $(0,1)$ . La distribució de sortida després d'aplicar la transformació de Hasting sobre la v.a. uniforme  $U(0,1)$  és una Gaussiana  $N(0,1)$ , tal i com es mostra en la figura 14.2.

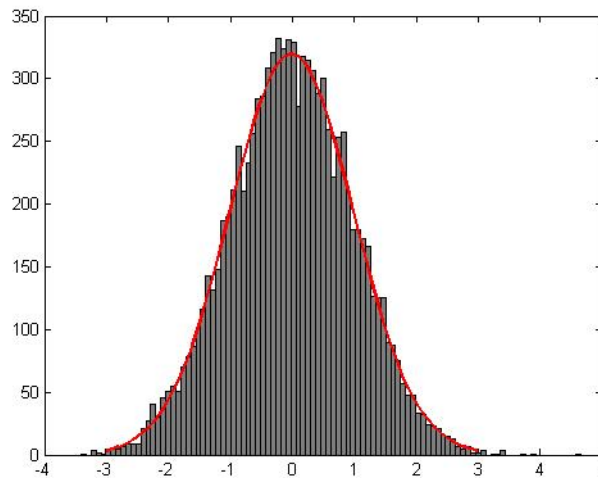


Figura 14.2. Histograma d'una v.a. Gaussiana  $N(0,1)$  generada a partir d'una v.a. uniforme  $U(0,1)$  utilitzant l'aproximació de Hasting

Una vegada hem provat que l'aproximació de Hasting funciona correctament, procedirem a aplicar el mètode de la inversa (equació (11.4)) per trobar la funció òptima  $g(y; \lambda, \sigma, n)$  basada en l'aproximació de Hasting. Noteu que aquesta funció depèn dels paràmetres  $\lambda$ ,  $\sigma$  i  $n$ . Segons (11.4) apliquem com a argument de l'aproximació de Hasting  $F_{Z|\mathcal{S}}^{-1}(\cdot)$  (10.15) el valor resultant d'aplicar la transformació (12.2) amb la funció de distribució de probabilitat  $F_{Y|\mathcal{S}}(\cdot)$  d'una v.a. chi quadrada amb  $n$  graus de llibertat. L'esquema de la transformació fent servir el mètode de la inversa es mostra en la figura 14.3.

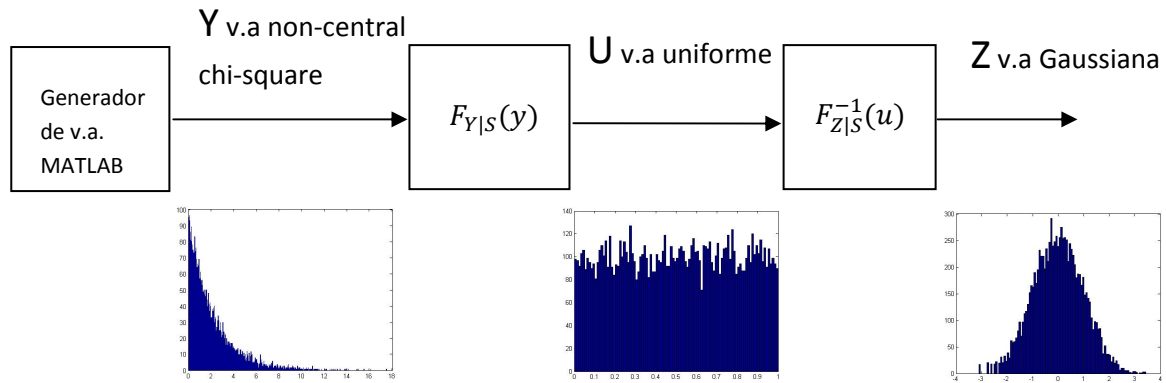


Figura 14.3. Set-up del sistema estadístic a analitzar

La funció de distribució de probabilitat  $F_{Y|S}(\cdot)$  d'una v.a. chi quadrada amb  $n$  graus de llibertat la modelarem amb la funció MATLAB "ncx2cdf". La funció  $F_{Y|S}(\cdot)$  depèn del paràmetre de no centralitat  $\lambda$  i de la desviació estàndard del soroll ASE  $\sigma$ , a part del nombre de graus de llibertat  $n$ .

En la transformació no lineal (11.4) s'ha de tenir present que l'aproximació de Hasting (10.15) està definida a trossos. Per tant, quan  $q = F_{Y|S}(y) \leq 0.5$  la transformació ha de ser:

$$g(y; \lambda, \sigma, n) = \sigma\sqrt{\lambda} + \sigma F_{Z|S}^{-1}(q), \quad q \leq 0.5 \quad (14.1)$$

On  $F_{Z|S}^{-1}(\cdot)$  és l'aproximació de Hasting, que recordem que transforma una v.a. uniforme distribuïda entre (0,1) en una v.a. Gaussiana  $N(0,1)$ . Noteu que modifiquem la mitja i la desviació estàndard de l'estadística Gaussiana de sortida, tenint a la sortida una v.a.  $N(\sigma\sqrt{\lambda}, \sigma)$ . Per valors  $q = F_{Y|S}(y) > 0.5$ , la transformació ha de ser:

$$g(y; \lambda, \sigma, n) = \sigma\sqrt{\lambda} - \sigma F_{Z|S}^{-1}(1 - q), \quad q > 0.5 \quad (14.2)$$

El codi en MATLAB que implementa la funció òptima és el següent:

```
function z = g_function_hasting_ideal(y, sigma, lambda, modes)
z = 0.*ones(length(y),1);
y = y./sigma.^2;
q = ncx2cdf(y, modes, lambda);
for i=1:length(q)
    z(i,1) = hasting(q(i,1));
end
z = lambda.*sigma+z.*sigma;
```

Una vegada ja hem definit la funció òptima mitjançant el mètode de la inversa i l'aproximació de Hasting, podem representar-la per alguns paràmetres concrets. A mode d'exemple hem escollit la funció òptima que relaciona una v.a. chi quadrada  $\chi^2$  amb  $n = 2$  graus de llibertat,  $\sigma^2 = 1$  i paràmetre de no centralitat  $\lambda = 0$  amb una v.a. normal  $N(0,1)$ . Aquesta funció es representa en la figura 14.4, juntament amb l'arrel quadrada.

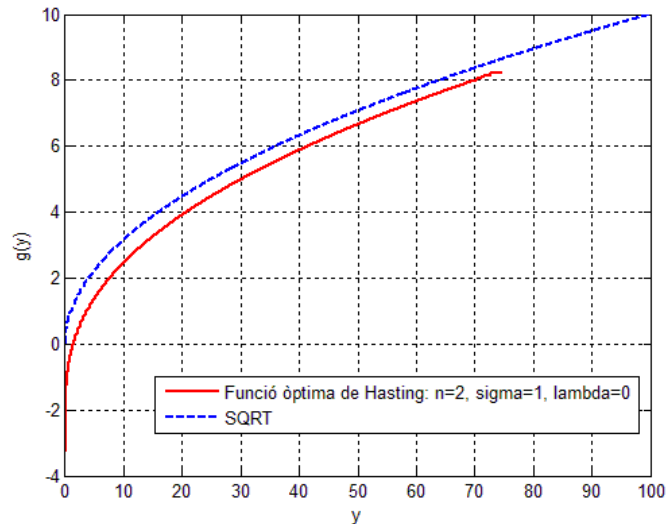


Figura 14.4. Funció òptima per  $n=2$ ,  $\lambda=0$  i  $\sigma=1$  basada en l'aproximació de Hasting i el mètode de la inversa

En la figura 14.4 es pot observar que aproximadament a partir de  $y = 73$  la funció òptima per aquests paràmetres ( $\lambda$ ,  $\sigma$  i  $n$ ) no convergeix. La regió on no convergeix depèn de  $\lambda$ ,  $\sigma$  i  $n$ . Aquest mateix problema va aparèixer en els capítols 12 i 13. Per solucionar aquest problema, podem fer servir una aproximació recursiva de la funció Marcum Q, la qual apareix en l'expressió (12.2). En aquest projecte hem utilitzat l'aproximació de Dillard (apartat 14.2), ja que ens permet descompondre la funció Marcum Q en dues exponencials i en una part recursiva. Gràcies al fet d'utilitzar les exponencials i juntament amb els logaritmes que apareixen en l'aproximació de Hasting (10.15), es pot simplificar la funció resultant i solucionar els problemes de convergència.

Després d'haver obtingut la funció òptima  $g(y; \lambda, \sigma, n)$  basada en l'aproximació de Hasting, hem realitzat una simulació estadística per comprovar el correcte funcionament. Noteu que els problemes de convergència que hem mencionat abans no influeixen per distribucions chi quadrades amb paràmetre de no centralitat proper al zero. La simulació estadística que hem utilitzat és molt senzilla, i consisteix en un generador de variables aleatòries chi quadrades directament connectat a la funció òptima (veure figura 14.3). Amb les mostres de sortida del sistema hem generat un histograma per comprovar la Gaussianitat de forma visual. En la figura 14.5 es representa l'histograma de la distribució de sortida que hem obtingut. Per fer-ho, en el generador de v.a.'s chi quadrades hem fixat: el paràmetre de no centralitat  $\lambda = 0$ , la varianza del soroll ASE  $\sigma^2 = 1$  i el nombre de graus de llibertat  $n = 2$ . Evidentment, en la funció òptima (14.1) i (14.2) hem fet servir els mateixos paràmetres que en el generador de v.a.'s. A simple vista sembla tenir un comportament Gaussià, tot i així encara no es pot asseverar. La línia vermella representa una Gaussiana ideal.

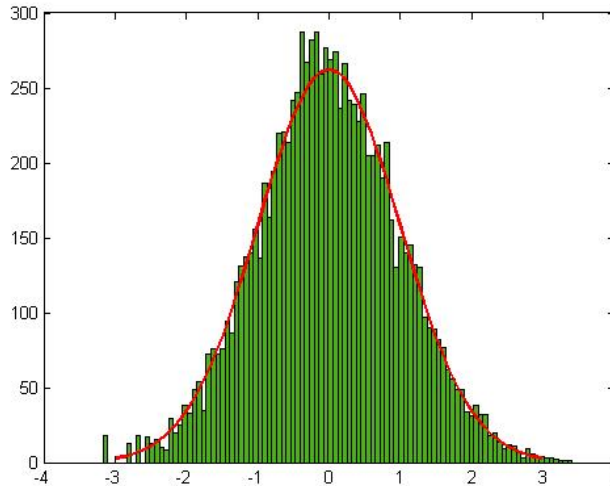


Figura 14.5. Histograma de les mostres de sortida de la transformació òptima de Hasting per  $n=2$ ,  $\lambda=0$  i  $\sigma=1$  convertint una v.a. chi quadrada amb paràmetres  $n=2$ ,  $\lambda=0$  i  $\sigma=1$  en una Gaussiana  $N(0,1)$

## 14.2 Aproximació recursiva de la funció Marcum Q

Per trobar una aproximació en polinomis de radicals (o en fraccions de polinomis de radicals) de la funció òptima, hem de buscar una expressió en sèrie d'exponencials de la funció Marcum Q, veure [41]. Es necessari trobar una aproximació de la funció Marcum Q ja no és possible utilitzar directament la funció en codi MATLAB `marcumq(a,b,m)` (o en el seu defecte `ncx2cdf`), perquè apareixen problemes de convergència. Gràcies a les exponencials que apareixen en l'algoritme recursiu de Dillard o McGee (es veurà tot seguit) i als logaritmes que apareixen en l'argument de l'aproximació de Hasting, es pot simplificar la funció i evitar aquests problemes de convergència.

La funció Marcum Q que apareix en la funció de distribució de probabilitat (12.2) d'una v.a.  $\chi^2$  es defineix de la següent manera:

$$Q_M(a, b) = \int_b^\infty x \left(\frac{x}{a}\right)^{M-1} e^{\left[\frac{-(x^2+a^2)}{2}\right]} \cdot I_{M-1}(ax) dx \quad (14.3)$$

Per resoldre aquesta integral, utilitzarem un mètode recursiu molt semblant al mètode de McGee [42], però amb algunes diferències. Aquest mètode es descriu en [41] i l'anomenarem mètode de Dillard. L'algoritme recursiu és el següent:

$$Q_M(a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k h_k \quad (14.4)$$

On:

$$h_k = h_{k-1} + d_k \quad (14.5)$$

$$d_k = \frac{(b^2/2) d_{k-1}}{(k + M - 1)} \quad (14.6)$$

$$f_k = \frac{(a^2/2) f_{k-1}}{k} \quad (14.7)$$

$$f_0 = e^{-a^2/2} \quad (14.8)$$

$$d_0 = \frac{e^{-b^2/2} (b^2/2)^{M-1}}{(M-1)!} \quad (14.9)$$

$$h_0 = \sum_{j=0}^{M-1} \frac{e^{-b^2/2} (b^2/2)^j}{j!} \quad (14.10)$$

Hem programat aquest algoritme recursiu en MATLAB, el codi és el següent:

```
function z = recursive_marcumq(a,b,M)
iterations = 100;
h0 = 0;
for j=0:M-1
    h0 = h0 + (exp(-b.^2./2).*power(b.^2./2,j))./factorial(j);
end
d0 = (exp(-b.^2./2).*power(b.^2./2,M-1))./factorial(M-1);
f0 = exp(-a.^2./2);

fk = f0;
dk = d0;
hk = h0;
q = f0.*h0;
for i=1:iterations
    fk = ((a.^2./2).*fk)./i;
    dk = ((b.^2./2).*dk)./(i+M-1);
    hk = hk + dk;
    q = hk.*fk + q;
end
z = q;
```

Hem realitzat dues taules comparatives entre el valor real proporcionat per la funció “marcumq(a,b,m)” del MATLAB i el resultat de l’algoritme recursiu de Dillard pels valors  $a = 0.1$ ,  $a = 0$  i  $M = 1$ , utilitzant 4, 3, 2, 1 i 0 iteracions. Aquestes dues taules es poden trobar en l’annex 2, en elles s’exemplifica que si  $a = 0$ , o el que és el mateix  $\lambda = 0$  (paràmetre de no centralitat), la funció de Marcum Q es pot aproximar perfectament per una simple exponencial. Això simplifica molt la funció òptima i la converteix més ràpida computacionalment. En canvi, si  $a \neq 0$  la cosa canvia, ja que l’error entre la funció Marcum Q ideal i l’aproximació de Dillard amb zero iteracions ja no és negligible.

En l’apartat 14.3 és fa ús d’aquesta aproximació de zero iteracions, ja que s’elimina el paràmetre de no centralitat  $\lambda$  fixant-lo a zero. Es veurà, però, que aquesta simplificació no és del tot correcte ja que la varianza no es manté constant per a tots els valors del paràmetre de no centralitat. És per aquest motiu pel qual en l’apartat 14.4 s’introdueix el paràmetre

d'ajust, que no és res més que el paràmetre de no centralitat de la funció. Amb aquest paràmetre d'ajust ja no es podrà donar per bona la simplificació de la funció Marcum Q per una simple exponencial, per aquest motiu caldrà augmentar el nombre d'iteracions en l'algoritme recursiu de Dillard.

### 14.3 Aproximació de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions

Com podem veure en les taules comparatives de l'annex 2, l'error d'aproximació obtingut entre la funció Marcum Q i l'algoritme de Dillard amb zero iteracions és molt petit quan  $s/\sigma \approx 0$ . De fet, hem vist que per valors  $s/\sigma = 0$  l'aproximació de la funció Marcum Q fent servir zero iteracions de l'algoritme de Dillard és exacta. Per zero iteracions de l'algoritme de Dillard i  $M = 1$  ( $n = 2$  graus de llibertat), l'aproximació de la funció Marcum Q és per una simple exponencial. Això ens facilita molt les simplificacions posteriors utilitzant l'aproximació de Hasting, ja que l'argument conté logaritmes neperians.

Així doncs, la funció Marcum Q (14.3) la simplifiquem per (només per valors de  $s/\sigma$  propers al zero i  $M = 1$ ):

$$Q_1\left(\frac{s}{\sigma}, \frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) \approx e^{-\frac{(y+s^2)}{2\sigma^2}} \quad (14.11)$$

En (14.11) s'ha pres que  $M = B_{opt}/B_e = 1$ . Com ja sabem, a la pràctica no sempre ens trobarem aquest cas. Per tant serà d'utilitat definir, mitjançant l'algoritme de Dillard, l'aproximació general (per qualsevol valor de  $M$ ). Aquesta aproximació general de la funció Marcum Q és:

$$Q_M\left(\frac{s}{\sigma}, \frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) \approx e^{-\frac{(y+s^2)}{2\sigma^2}} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{y}{2\sigma^2}\right)^j}{j!} \quad (14.12)$$

Tenint present que  $\lambda = s^2/\sigma^2$  i substituint en (14.12)

$$Q_M\left(\sqrt{\lambda}, \frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) \approx e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{y}{2\sigma^2}\right)^j}{j!} \quad (14.13)$$

Una vegada hem simplificat la funció Marcum Q, podem utilitzar el mètode de la inversa juntament amb l'aproximació de Hasting per definir la funció òptima. Definirem la funció òptima  $g(y; \sigma, \lambda, n)$  basada en les aproximacions de Hasting i zero iteracions de l'algoritme de Dillard en tres passos fent servir el mètode de la inversió que vam veure en (11.4):



1. Aproximació de la funció de distribució de probabilitat (CDF) d'una v.a. chi quadrada amb  $n = 2B_o/B_e$  graus de llibertat (expressió (12.2)), fent servir l'aproximació amb zero iteracions de l'algoritme de Dillard (14.13):

$$p = F_{Y|S}(y) \approx 1 - e^{\frac{-y}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-\lambda}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{M-1} \frac{(y/2\sigma^2)^j}{j!} \quad (14.14)$$

On  $M = B_o/B_e$ . Noteu que si  $\lambda = 0$ , l'expressió (14.14) és igual que la CDF d'una v.a. central chi-square (12.3).

2. Definició de les variables intermèdies  $\eta_1$  i  $\eta_2$  de l'aproximació de Hasting (10.15), on l'argument  $p$  ve donat per l'expressió (14.14):

$$\eta_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln(p)} \quad (14.15)$$

$$\eta_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - p)} \quad (14.16)$$

La variable intermèdia  $\eta_2$  (14.16) es pot simplificar utilitzant les propietats dels logaritmes com

$$\eta_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln \left( e^{\frac{-y}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-\lambda}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{M-1} \frac{(y/2\sigma^2)^j}{j!} \right)} \quad (14.17)$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{y}{\sigma^2} + \lambda - 2 \cdot \ln \left( \sum_{j=0}^{M-1} \frac{(y/2\sigma^2)^j}{j!} \right)} \quad (14.18)$$

3. Finalment, utilitzant l'aproximació de Hasting de la CDF inversa d'una v.a. Gaussiana donada per (10.15) i substituint  $\eta_1$  (14.15) i  $\eta_2$  (14.18)

$$g(y; \sigma, \lambda, n) = \begin{cases} \sigma \cdot \sqrt{\lambda} - \sigma \eta_1 + \sigma \cdot \frac{a_0 + a_1 \cdot \eta_1 + a_2 \cdot \eta_1^2}{1 + b_1 \cdot \eta_1 + b_2 \cdot \eta_1^2 + b_3 \cdot \eta_1^3} & 0 \leq y \leq y_U \\ \sigma \cdot \sqrt{\lambda} + \sigma \eta_2 - \sigma \cdot \frac{a_0 + a_1 \cdot \eta_2 + a_2 \cdot \eta_2^2}{1 + b_1 \cdot \eta_2 + b_2 \cdot \eta_2^2 + b_3 \cdot \eta_2^3} & y \geq y_U \end{cases} \quad (14.19)$$

Els coeficients de (14.19) estan definits en la taula 10.1. El llindar  $y_U$  ve definit per l'equació transcendent:

$$e^{\frac{-y_U}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-\lambda}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{y_U}{2\sigma^2}\right)^j}{j!} = 0.5 \quad (14.20)$$

En la figura 14.6 es representa la funció òptima  $g(y; \sigma = 1, \lambda = 0, n = 2)$  (color vermell) vers l'arrel quadrada (color verd) per a valors inferiors al llindar  $y_U$ .

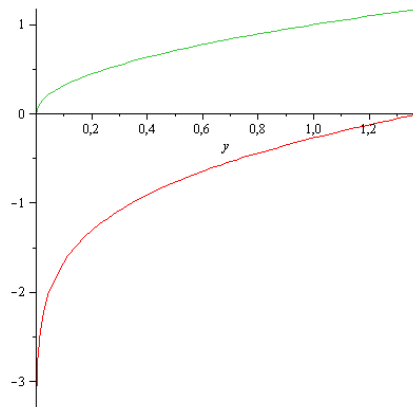


Figura 14.6. Funció òptima de Hasting-Dillard i zero iteracions (vermell) vers arrel quadrada (color verd) per a valors inferiors al llindar

Es pot demostrar que si es realitza el límit quan  $y \rightarrow 0$  de l'equació (14.19) amb els paràmetres  $\sigma = 1, \lambda = 0$  i  $n = 2$ , convergeix al  $-\infty$ . En la figura 14.7 es representa la funció òptima  $g(y; \sigma = 1, \lambda = 0, n = 2)$  (color verd) vers l'arrel quadrada (color vermell) per a valors superiors al llindar  $y_U$ .

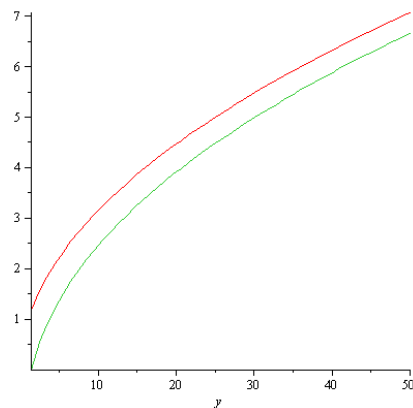


Figura 14.7. Funció òptima de Hasting-Dillard i zero iteracions (verd) vers arrel quadrada (vermell) per a valors superiors al llindar

És molt important entendre que l'aproximació que hem fet servir de la funció Marcum Q (expressió (14.13)) només és exacte pels valors  $\lambda = 0$ , i és aproximada pels valors  $\lambda \ll 1$ . En cap cas es pot prendre aquesta aproximació per bona per a valors molt diferents als que hem vist abans. Per trobar una funció més exacte, s'haurien de realitzar més iteracions en l'algoritme recursiu de Dillard (veure apartat 14.4).

Evidentment, el llindar canviarà segons el nombre de modes (relació  $n = 2 B_{opt}/B_e$ ) i els paràmetres  $\sigma$  i  $\lambda$  que escollim. Quan el nombre de modes és  $n = 2$ , el càlcul del llindar és senzill. En efecte:

$$y_U = -\sigma^2 \lambda - 2\sigma^2 \ln(0.5) \quad (14.21)$$

Però quan el nombre de modes és més gran que  $n = 2$ , l'equació a resoldre és una equació transcendent, i s'ha de resoldre numèricament.

S'ha de destacar que la part de la funció òptima que es correspon als valors grans de  $y$  (superiors al llindar  $y_U$ ), mostra una semblança important amb l'arrel quadrada. En efecte, sigui  $\lambda = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$  i  $n = 2$ , llavors la funció òptima  $g(y; \sigma = 1, \lambda = 0, n = 2)$  per valors de  $y$  més grans que  $y_U$  és :

$$g(y; \sigma = 1, \lambda = 0, n = 2) = \sqrt{y} - \frac{2,515517 + 0,802853 \cdot \sqrt{y} + 0,010328 \cdot y}{1 + 1,432788 \cdot \sqrt{y} + 0,189269 \cdot y + 0,001308 \cdot (y)^{3/2}}, \quad (14.22)$$

$$y \geq y_U$$

Es pot comprovar fàcilment que la tendència de (14.22) és molt semblant a la de l'arrel quadrada. De fet, la fracció de polinomis tendeix a zero quan  $y$  tendeix a l'infinit. En efecte si fem el límit,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2,515517 + 0,802853 \cdot \sqrt{y} + 0,010328 \cdot y}{1 + 1,432788 \cdot \sqrt{y} + 0,189269 \cdot y + 0,001308 \cdot (y)^{3/2}} = 0 \quad (14.23)$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{0,010328 \cdot y}{0,001308 \cdot (y)^{3/2}} = 0$$

En la figura 14.8 es representa en color vermell l'arrel quadrada, i en color blau la funció òptima  $g(y; \sigma = 1, \lambda = 0, n = 2)$ . Es pot veure com quan tendim cap a l'infinit les dues funcions convergeixen (en vermell l'arrel quadrada i en blau la funció òptima).

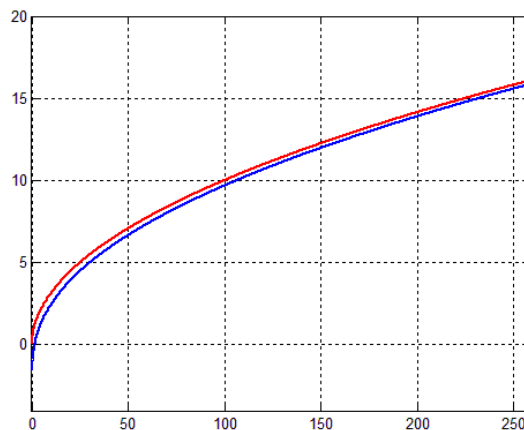


Figura 14.8. Comparació entre la funció òptima de Hasting-Dillard i zero iteracions per  $n=2$ ,  $\lambda=0$  i  $\sigma=1$  vs. Arrel quadrada

Com hem comprovat, la funció òptima depèn dels paràmetres;  $\lambda$  (non-centrality parameter),  $\sigma^2$  (varianza del soroll ASE) i del nombre de modes espectrals ( $n = 2 B_{opt}/B_e$ ), i en funció d'aquests apareix una família de corbes. És inviable pensar que la funció òptima depengui del paràmetre de no centralitat del senyal  $\lambda$ , ja que això vindria a dir que tindríem una funció òptima diferent pel símbol "1" i pel símbol "0", en una modulació OOK. Per tant, l'únic que podem fer és truncar el paràmetre  $\lambda$ .

Decidir quin és el paràmetre de no centralitat  $\lambda$  òptim amb el qual la distribució de sortida s'aproximi a una Gaussiana per qualsevol valor del paràmetre de no centralitat del senyal amb el menor error possible és complicat. La funció òptima basada en l'aproximació de Hasting i zero iteracions de Dillard (expressió (14.19)), té una exigència fonamental per cometre el menor error possible, i és que, degut a l'aproximació de la funció Marcum Q per una exponencial (veure expressions (14.11) i (14.13)), el paràmetre de no centralitat  $\lambda$  ha de ser zero per fer que la transformació (14.19) sigui exacta (veure annex 2). Un altre motiu pel qual pot ser interessant fixar  $\lambda = 0$  és per aconseguir que pel bit "0", quan tenim una relació d'extinció infinita, la Gaussiana de sortida tingui mitja zero, i a més a més tingui una forma Gaussiana exacta. Recordem que utilitzant l'arrel quadrada, la distribució del bit "0" és la que s'allunya més de la forma Gaussiana, doncs el que busquem és solucionar aquest problema.

Després d'aquestes consideracions, tornarem a definir la funció òptima, eliminant el grau de llibertat  $\lambda$  (és a dir,  $\lambda = 0$ ), i substituint  $\sigma$  per  $\gamma$  per evitar confusions entre la desviació estàndard del soroll ASE físic ( $\sigma$ ) i el paràmetre de soroll de la funció ( $\gamma$ ). També substituïrem el nombre de graus de llibertat  $n$  per  $n_e$ , per diferenciar el paràmetre modal del senyal  $n$  del paràmetre estimat de la funció  $n_e$ . El paràmetre  $\gamma$  estarà correctament estimat sempre que coincideixi amb  $\sigma$ , en aquestes condicions la funció serà òptima. Passa el mateix amb el paràmetre modal. Així, la funció òptima amb zero iteracions de l'algoritme de Dillard i paràmetre de no centralitat  $\lambda = 0$ ,  $g(y; \gamma, n_e)$  es defineix en tres passos segons el mètode de la inversa (11.4):

1. Aproximació de la funció de distribució de probabilitat (CDF) d'una v.a. chi quadrada amb  $n_e = 2B_o/B_e$  graus de llibertat (expressió (12.2)), fent servir l'aproximació amb zero iteracions de l'algoritme de Dillard (14.13) i fixant el paràmetre de no centralitat  $\lambda = 0$ :

$$p = F_{Y|S}(y) = 1 - e^{\frac{-y}{2\gamma^2}} \cdot \sum_{j=0}^{n_e/2-1} \frac{\left(\frac{y}{2\gamma^2}\right)^j}{j!} \quad (14.24)$$

En aquest cas (14.24) coincideix amb (12.3).

2. Definició de les variables intermèdies  $\eta_1$  i  $\eta_2$  de (10.15):

$$\eta_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln(p)} \quad (14.25)$$

$$\eta_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(1-p)} \quad (14.26)$$

La variable intermèdia  $\eta_2$  es pot simplificar utilitzant les propietats dels logaritmes

$$\eta_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln \left( e^{\frac{-y}{2\gamma^2}} \cdot \sum_{j=0}^{n_e/2-1} \frac{(y/2\gamma^2)^j}{j!} \right)} \quad (14.27)$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{y}{\gamma^2} - 2 \cdot \ln \left( \sum_{j=0}^{n_e/2-1} \frac{(y/2\gamma^2)^j}{j!} \right)} \quad (14.28)$$

3. Finalment, utilitzant l'aproximació de Hasting de la CDF inversa  $F_{Z|S}^{-1}(\cdot)$  d'una v.a. Gaussiana (10.15) i substituint  $\eta_1$  (14.25) i  $\eta_2$  (14.28):

$$g(y; \gamma, n_e) = \begin{cases} -\gamma\eta_1 + \gamma \cdot \frac{a_0 + a_1 \cdot \eta_1 + a_2 \cdot \eta_1^2}{1 + b_1 \cdot \eta_1 + b_2 \cdot \eta_1^2 + b_3 \cdot \eta_1^3} & 0 \leq y \leq y_U \\ \gamma\eta_2 - \gamma \cdot \frac{a_0 + a_1 \cdot \eta_1 + a_2 \cdot \eta_1^2}{1 + b_1 \cdot \eta_1 + b_2 \cdot \eta_1^2 + b_3 \cdot \eta_1^3} & y \geq y_U \end{cases} \quad (14.29)$$

Els coeficients de (14.29) estan tabulats en la taula 10.1. El llindar  $y_U$  ve definit per l'equació transcendent:

$$e^{\frac{-y_U}{2\gamma^2}} \cdot \sum_{j=0}^{n_e/2-1} \frac{(y_U/2\gamma^2)^j}{j!} = 0.5 \quad (14.30)$$

El codi en MATLAB que implementa aquest algoritme és el següent:

```
function s = g_function_hasting(y, sigma, modes)
a0 = 2.515517;
a1 = 0.802853;
a2 = 0.010328;
b1 = 1.432788;
b2 = 0.189269;
b3 = 0.001308;

z = 0.*ones(length(y),1);
x = residu_modal(y, sigma, modes);
p = 1 - exp(-y./(2.*sigma.^2)).*x;
for i=1:length(y)
    if(p(i,1) > 0.5 && p(i,1) <= 1)
        t = sqrt((y(i,1)./sigma^2)-2.*log(x(i,1)));
        z(i,1) = t-
(a0+a1.*(t)+a2.*(t).^2)./(1+b1.*(t)+b2.*(t).^2+b3.*(t).^3);
    elseif(p(i,1)<=0.5 && p(i,1)>= 0)
        t = sqrt(-2.*log(p(i,1)));
```

```

        z(i,1) = -
t+(a0+a1.*t+a2.*(t).^2)./(1+b1.*t+b2.*(t).^2+b3.*(t).^3);
    end
end
s = z.*sigma;

function k = residu_modal(y, sigma, modes)
x = 0;
for j = 0:modes-1
    x = x+((y./(2.*sigma.^2)).^j)./factorial(j);
end
k=x;

```

### 14.3.1 Anàlisi de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions

Una vegada hem definit la funció òptima  $g(y; \gamma, n_e)$  basada en les aproximacions de Hasting i l'algoritme de Dillard utilitzant zero iteracions (expressió (14.29)), podem realitzar una simulació estadística per comprovar la Gaussianitat del sistema complet. La figura 14.9, mostra el setup de la simulació.

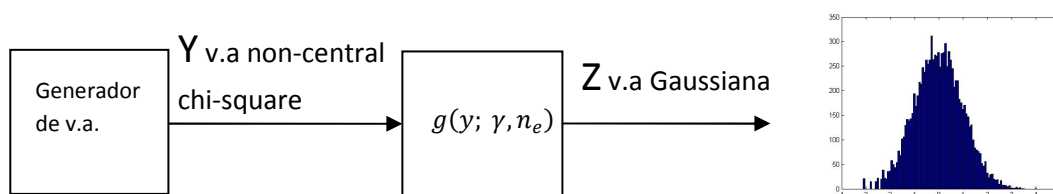


Figura 14.9. Set-up del sistema estadístic a analitzar

El conjunt de mesures de qualitat que implementarem en les simulacions estadístiques són:

- Error quadràtic mig entre la PDF de sortida i una Gaussiana ideal amb mitja i varianza experimentals.
- Diagrames de probabilitat normal
- Test d'hipòtesis
  - Test de Kolmogorov-Smirnov
  - Test de Lilliefors
  - Test de Jarque-Bera
  - Test de Shapiro-Wilks
- Anàlisi visual de la PDF (representant el logaritme de les PDF's i comparant-les amb Gaussians ideals)
- Estudis dels moments estadístics
- Anàlisi de les cues a partir del càlcul de la BER (es veurà en l'apartat següent)

El diagrama de probabilitat normal el representarem amb la funció "normplot" del MATLAB, i es basa en comprovar visualment si un conjunt de dades estan distribuïdes normalment (la línia contínua de color vermell connecta els percentils 25 i 75).

La tercera mesura de qualitat serà aplicar tests no paramètrics de normalitat que bàsicament es tracten de mètodes de proves d'hipòtesis. Amb aquests tests es contrastarà, per un determinat nivell de confiança  $1 - \alpha$  (on  $\alpha$  és el nivell de significació per defecte del

5%), la hipòtesis de que les dades es corresponen a una distribució normal (hipòtesis nul·la). Les dues hipòtesis que es manegaran són:

- $H_0$  (hipòtesis nul·la): La mostra té una distribució normal o Gaussiana.
- $H_1$  (hipòtesis alternativa): La mostra NO té una distribució normal o Gaussiana.

En tots els problemes de test d'hipòtesis es plantegen les dues hipòtesis i, una vegada observada la mostra, es refusa  $H_0$  o no. Llavors pot ocórrer alguna d'aquestes quatre situacions que apareixen en la taula 14.1.

S'aplica el test i	En realitat	
	$H_0$ és certa	$H_1$ és certa
S'accepta $H_0$	OK!	Error tipus II
Es refusa $H_0$	Error tipus I	OK!

Taula 14.1. Situacions possibles en un test d'hipòtesis

Com s'observa en la taula anterior, es poden cometre dos tipus d'error, que se'ls distingeix amb el nom d'error de tipus I i de tipus II. Per qualsevol test, la probabilitat d'error de tipus I és més petita o igual que  $\alpha$ , on  $\alpha$  és el valor de tall pel P-value. Al fixar el nivell de significació  $\alpha$ , en realitat estem fixant la probabilitat d'error de tipus I. La probabilitat d'error de tipus II s'anomena  $\beta$  i és més difícil de calcular (depèn de la dimensió de la mostra).

El P-value, de cada test d'hipòtesis s'obté a partir de l'estadístic de contrast, i és el mínim nivell de significació tal que es refusa la hipòtesis nul·la. Això vol dir que si el P-value és més gran que el nivell de significació  $\alpha$ , llavors s'accepta la hipòtesis nul·la. En canvi, si el P-value és inferior o igual que el nivell de significació  $\alpha$ , llavors es refusa la hipòtesis nul·la, o el que és el mateix, s'accepta la hipòtesis alternativa. Per tant, si el P-value és molt gran (molt proper a 1), s'accepta la hipòtesis nul·la. En els nostres tests utilitzarem un nivell de significació del 5%. És fa una descripció més detallada de cada un d'aquests mètodes en l'annex 5.

Hem realitzat quatre experiments fent variar els paràmetres que defineixen una v.a.  $\chi^2$  ( $\lambda$  i  $\sigma^2$ ) amb  $n = 2$  graus de llibertat. En el generador de v.a. hem fixat els paràmetres  $\lambda = 0$  i  $\sigma^2 = 1$ , mentre en la funció hem introduït els paràmetres  $\gamma^2 = 1$  i  $n_e = 2$  (funció òptima utilitzada:  $g(y; \gamma = 1, n_e = 2)$ ). Els resultats experimentals són els següents (per 100.000 mostres):

- Mitja experimental = 0.0041
- Varianza experimental = 1.0038
- Error quadràtic mig = 0.0034 (0.34 %)
- Test Kolmogorov-Smirnov = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.41334
- Test Lilliefors = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.068
- Test Jarque-Bera = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.323

- Test Shapiro-Wilks = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.14041

Les figures 14.10 i 14.11 mostren la PDF de sortida de la funció òptima (color blau) vers una Gaussiana ideal amb varianza unitària (color verd), i el diagrama de probabilitat normal, respectivament. En la figura 14.10, la Gaussiana ideal té varianza unitària i la mitja està determinada experimentalment. Per tant, en aquest cas la distribució de sortida s'ajusta molt bé a la ideal.

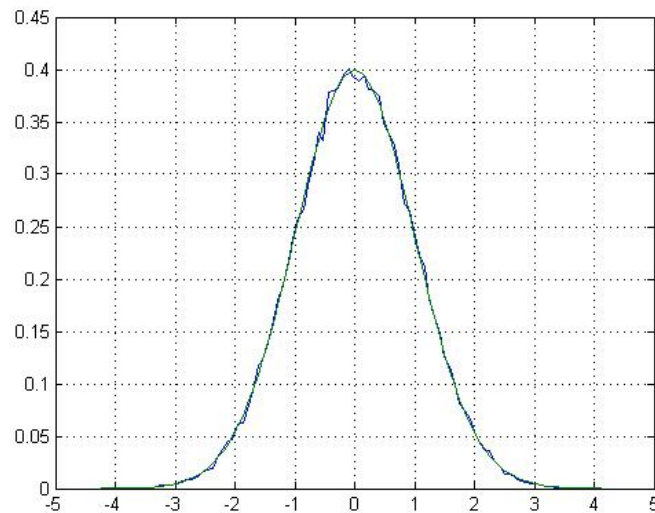


Figura 14.10. PDF de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions per  $n=2$  i  $\gamma=1$  (color blau) vers PDF Gaussiana (color verd)

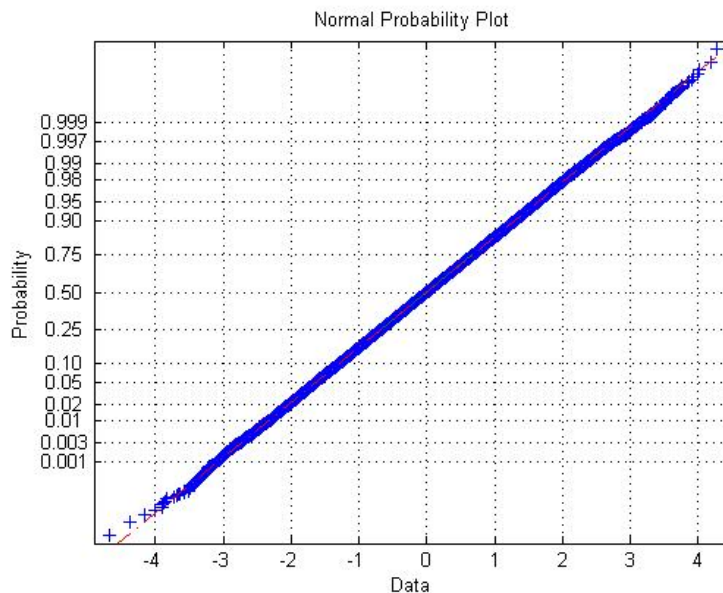


Figura 14.11. Diagrama de probabilitat normal

Per realitzar el segon experiment hem utilitzat una v.a. non-central chi-square  $\chi^2$  amb paràmetre de no centralitat  $\lambda = 1$ ,  $\sigma^2 = 1$  i  $n = 2$  graus de llibertat. Hem utilitzat la mateixa



funció que en el primer experiment (funció òptima utilitzada:  $g(y; \gamma = 1, n_e = 2)$ ). Els resultats experimentals són:

- Mitja experimental = 0.42159
- Varianza experimental = 1.2118
- Error quadràtic mig = 0.0038 (0.38 %)
- Test Kolmogorov-Smirnov = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.033494
- Test Lilliefors = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.11
- Test Jarque-Bera = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.46
- Test Shapiro-Wilks = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.51157

En les figures 14.12 i 14.13 es representa la PDF de sortida de la funció òptima (color blau) vers una Gaussiana ideal amb varianza unitària (color verd), i el diagrama de probabilitat normal, respectivament. En la figura 14.12 apareix superposada una Gaussiana ideal amb varianza unitària i mitja obtinguda experimentalment. En aquest cas, es pot observar que la funció òptima no manté la varianza unitària i la mitja experimental no es correspon a  $\sigma\sqrt{\lambda}$ . Tot i així, segons la figura 14.13, la mostra és bastant normal.

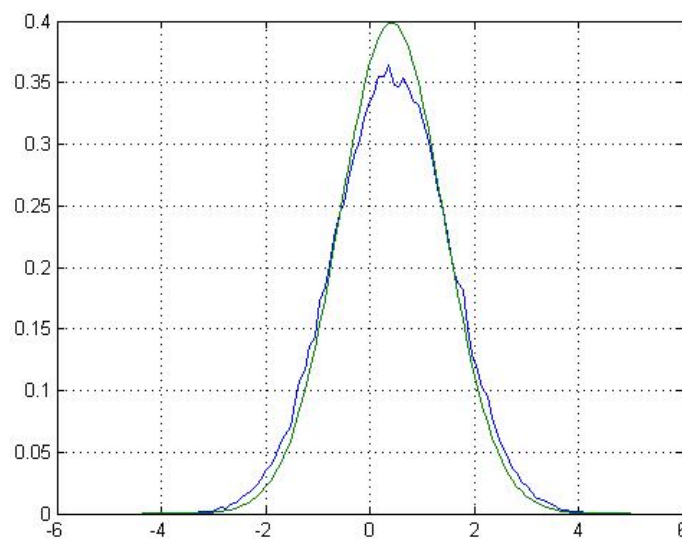


Figura 14.12. PDF de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions per  $n=2$  i  $\gamma=1$  (color blau) vers PDF Gaussiana (color verd)

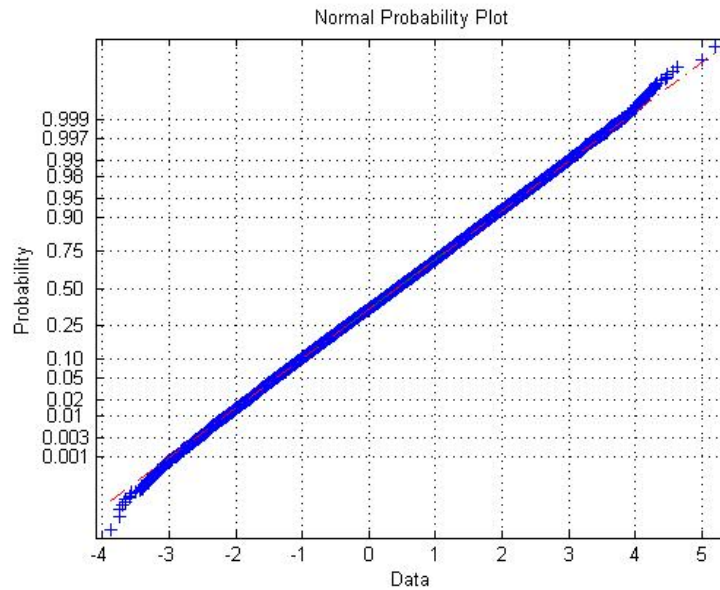


Figura 14.13. Diagrama de probabilitat normal

Per fer el tercer experiment, hem augmentat significativament la relació  $\lambda = s^2/\sigma^2 \gg 1$ . En el generador de v.a.'s hem introduït els paràmetres  $\lambda = 25$ ,  $\sigma^2 = 1$  i  $n = 2$  graus de llibertat (funció òptima utilitzada:  $g(y; \gamma = 1, n_e = 2)$ ). Els resultats són:

- Mitja experimental = 4.5763
- Varianza experimental = 1.1167
- Error quadràtic mig = 0.0028 (0.28 %)
- Test Kolmogorov-Smirnov = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.361
- Test Lilliefors = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.768
- Test Jarque-Bera = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.213
- Test Shapiro-Wilks = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.092285

Com en els casos anteriors, les figures 14.14 i 14.15 mostren la PDF de sortida de la funció òptima (color blau) vers una Gaussiana ideal (color verd), i el diagrama de probabilitat normal, respectivament. En la figura 14.14, la Gaussiana ideal té varianza unitària. En aquesta figura es pot observar que la funció òptima encara genera una PDF de sortida amb una varianza més gran que la ideal, tot i així s'ha reduït en comparació amb la figura 14.12. La mitja experimental tampoc es correspon a  $\sigma\sqrt{\lambda}$ . Tot i així, segons la figura 14.15, la distribució és bastant normal.

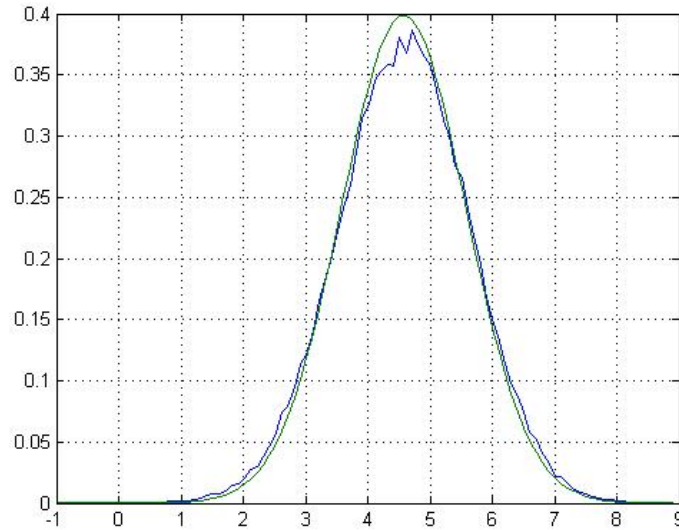


Figura 14.14. PDF de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions per  $n=2$  i  $\gamma=1$  (color blau) vers PDF Gaussiana (color verd)

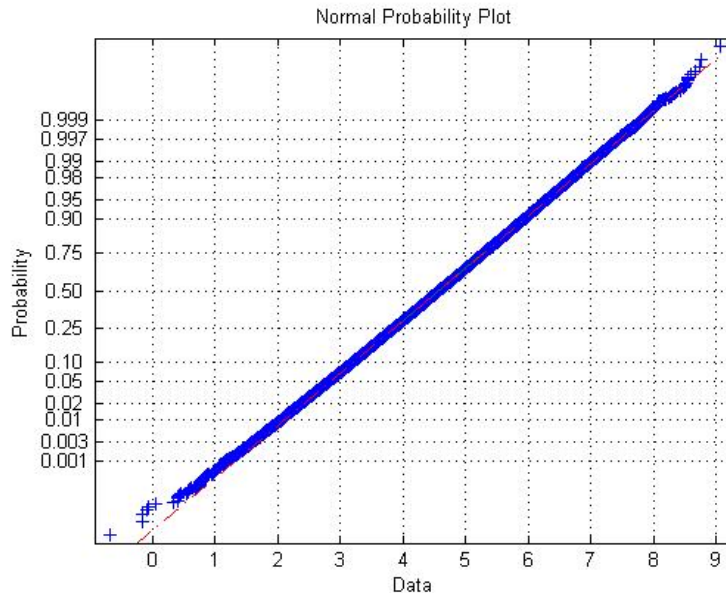


Figura 14.15. Diagrama de probabilitat normal

Finalment, per acabar amb aquesta sèrie d'experiments, hem augmentat encara més la relació de no centralitat  $\lambda = s^2/\sigma^2 \gg 1$ . En el generador de v.a.'s hem introduït els paràmetres  $\lambda = 2500$  i  $\sigma^2 = 1$  i  $n = 2$  graus de llibertat (funció òptima utilitzada:  $g(y; \gamma = 1, n_e = 2)$ ). Els resultats de l'experiment són:

- Mitja experimental = 49.9094
- Varianza experimental = 1.0089
- Error quadràtic mig = 0.0026 (0.26 %)
- Test Kolmogorov-Smirnov = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.99435
- Test Lilliefors = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.763

- Test Jarque-Bera = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.556
- Test Shapiro-Wilks = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.76256

Finalment, en les figures 14.16 i 14.17 es representa la PDF de sortida de la funció òptima (color blau) vers una Gaussiana ideal (color verd), i el diagrama de probabilitat normal, respectivament. En la figura 14.16, noteu que la varianza de la PDF de sortida de la funció òptima torna a ser unitària i que la mitja experimental es correspon aproximadament a  $\sigma\sqrt{\lambda}$ .

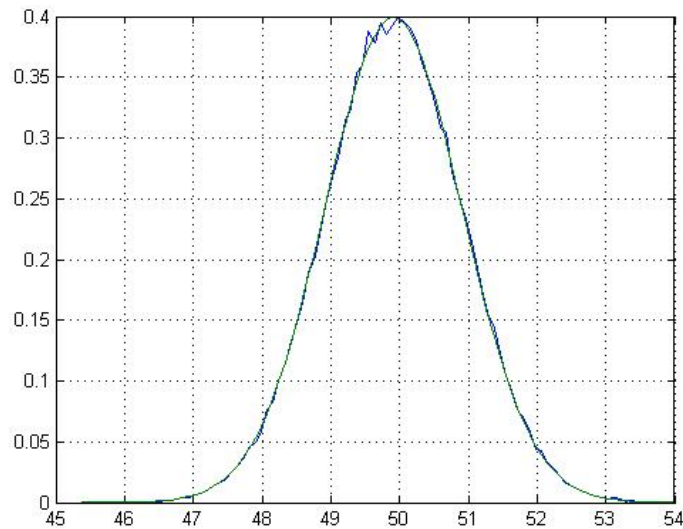


Figura 14.16. PDF de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions per  $n=2$  i  $\gamma=1$  (color blau) vers PDF Gaussiana (color verd)

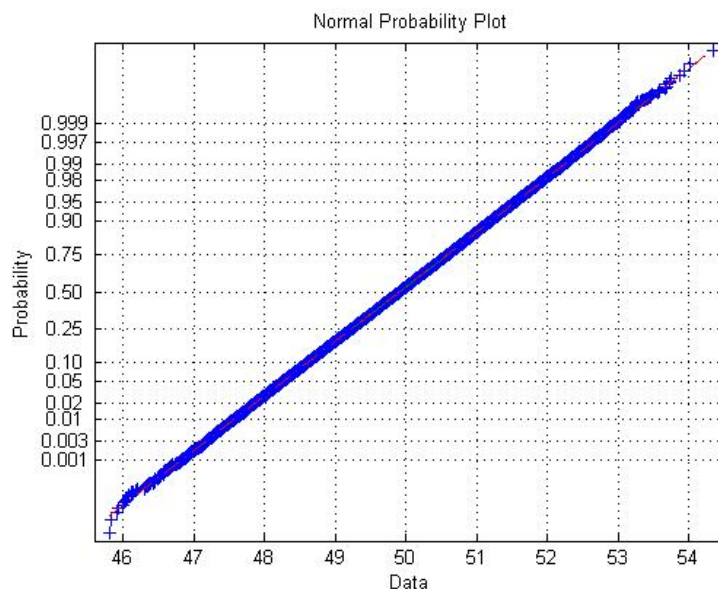


Figura 14.17. Diagrama de probabilitat normal

Amb aquests experiments hem pogut constatar que aquesta aproximació de la funció òptima funciona bastant bé i s'ajusta, amb uns errors molt petits (entorn a l'1% o inferior), al

que estem buscant. El problema més greu resideix en la varianza, ja que no ha sigut constant en aquest anàlisi. I també en la mitja, perquè no ha estat suficientment lineal amb el senyal.

### 14.3.2 Estudi dels moments de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions

No només és important fer un estudi de la normalitat de les mostres de sortida de la funció òptima, també és importantíssim representar gràficament el comportament de la mitja, la varianza, i d'altres paràmetres dependents dels moments estadístics com l'asimetria o "Skewness" i la curtosis o "Excess Kurtosis" en funció del paràmetre  $s/\sigma$  (arrel quadrada del paràmetre de no centralitat del senyal d'entrada). Aquest fet ens permet afirmar, o no, si es linealitzava el sistema, si la varianza és estacionària, i si les mostres de sortida tenen un comportament estadístic normal.

Abans de començar l'anàlisi dels moments estadístics de la funció òptima, és interessant introduir els moments teòrics que ha de tenir una Gaussiana ideal. D'aquesta manera, per una Gaussiana amb mitja  $\mu = 0$  i varianza  $\sigma^2$ , els moments es generalitzen com (aquests mateixos resultats es poden extrapolar als moments centrals):

$$E\{x^n\} = \begin{cases} 0 & n = 2k + 1 \\ 1 \cdot 3 \dots (n-1)\sigma^n & n = 2k \end{cases} \quad (14.31)$$

Així per exemple segons (14.31) el moment de quart ordre seria:

$$E\{x^4\} = 3\sigma^4 \quad (14.32)$$

Per poder treballar correctament amb independència del soroll, normalitzarem les mostres del senyal d'entrada  $y$  per la varianza normal.

$$\bar{y} = y/\sigma^2 \quad (14.33)$$

Això és el mateix que normalitzar la PDF del senyal rebut, de manera que la variable aleatòria  $\bar{Y}$  formada per el sumatori de  $n$  v.a's chi quadrades, ara la definirem com:

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2} \quad (14.34)$$

La funció òptima la definirem de la mateixa manera que hem fet en (14.29), però el paràmetre  $\gamma$  el normalitzarem per la desviació estàndard normal  $\sigma$ :

$$\bar{\gamma} = \gamma/\sigma \quad (14.35)$$

Per tant, la nova notació de la funció òptima normalitzada és:

$$\bar{g}(\bar{y}; \bar{\gamma}, n_e) \quad (14.36)$$

En la funció (14.36) podem eliminar el paràmetre normalitzat (14.35) per  $\bar{\gamma} = 1$ , ja que podem suposar que estimem correctament la desviació estàndard del soroll ASE  $\sigma$ . Així, després d'aquesta suposició la funció òptima normalitzada només depèn del nombre de modes espectrals  $n$ :  $\bar{g}(\bar{y}; n_e)$ .

Després d'aquestes consideracions prèvies, començarem analitzant el moment de primer ordre de la funció òptima normalitzada  $\bar{g}(\bar{y}; n_e)$ . En la figura 14.18 es representa el moment de primer ordre de la funció òptima normalitzada  $\bar{g}(\bar{y}; n_e = 2)$  en funció de  $s/\sigma$  o el que significa el mateix, l'arrel quadrada del paràmetre de no centralitat del senyal ( $\sqrt{\lambda}$ ). També hem representat la mitja ideal per poder comparar.

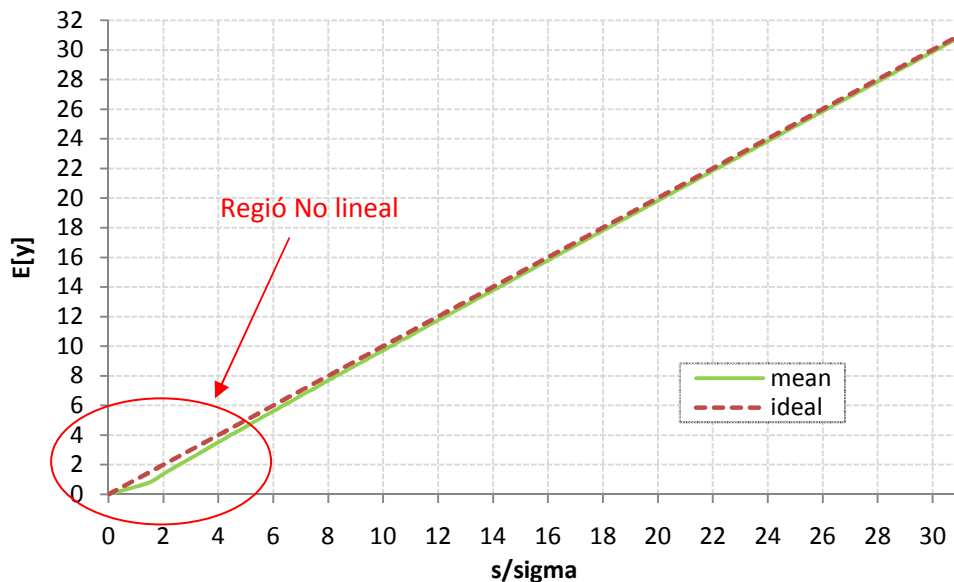


Figura 14.18. Mitja de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions en funció de  $s/\sigma$

Es pot observar que la mitja experimental tendeix a la mitja ideal (o millor dit, a la mitja desitjada per tenir un sistema totalment lineal). Tot i així, presenta problemes de no linealitat a prop del zero. En la figura 14.19 es realitza un zoom d'aquesta regió crítica per observar amb més detall la no linealitat.

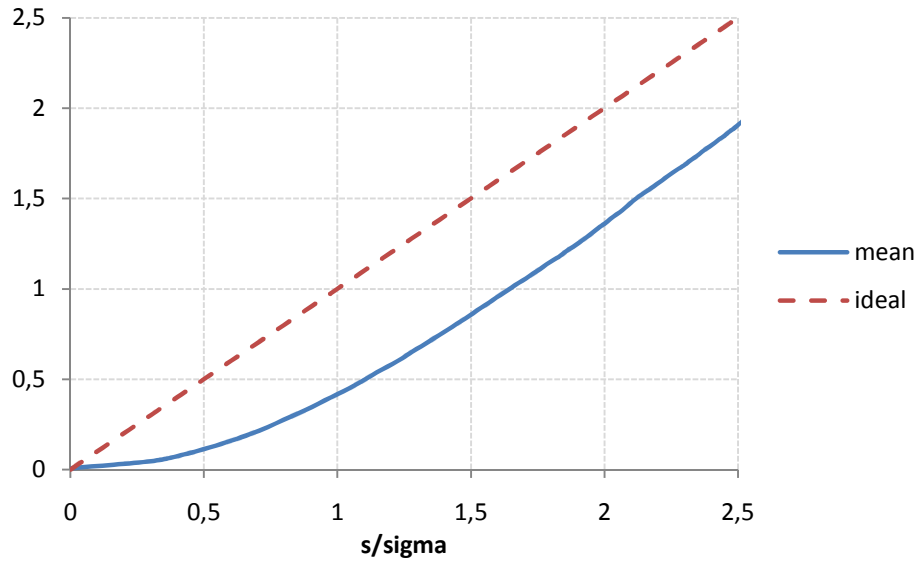


Figura 14.19. Mitja de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions en funció de  $s/\sigma$

La figura 14.20 representa conjuntament la varianza, l'asimetria ("Skewness") i la curtosis ("Excess Kurtosis") de la funció òptima normalitzada  $\bar{g}(\bar{y}; n_e = 2)$ . Principalment es desitja que la varianza sigui constant i igual a 1 per a tot  $s/\sigma$  (ja que hem normalitzat el sistema). En quant a l'asimetria ("Skewness") i la curtosis ("Excess Kurtosis"), per definició per a una Gaussiana han de ser 0 en ambdós casos i per tot  $s/\sigma$ . Els paràmetres asimetria ("Skewness") ( $S$ ) i curtosis ("Excess Kurtosis") ( $EK$ ) es calculen fent ús del moment central de tercer i quart ordre respectivament (es pot trobar també informació en l'annex 5 – Test Jarque-Bera):

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^{3/2}} \quad (14.37)$$

$$EK = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} - 3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2} - 3 \quad (14.38)$$

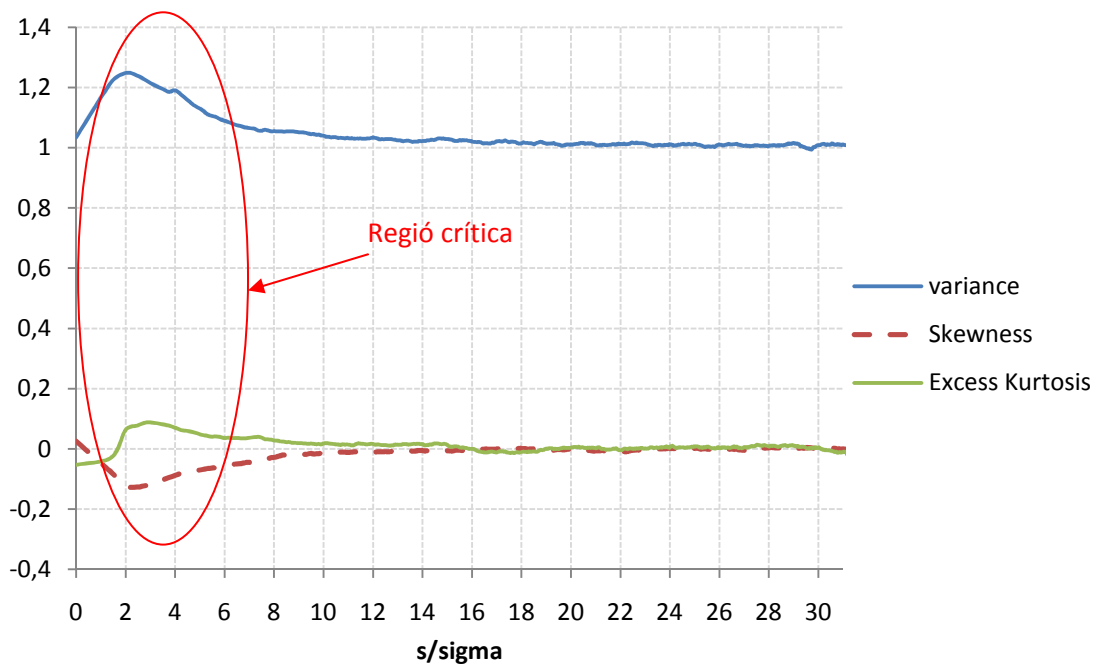


Figura 14.20. Varianza, Skewness i Excess Kurtosis de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions en funció de  $s/\sigma$

Com es pot veure en la figura 14.20 els tres paràmetres d'interès (varianza,  $S$  i  $EK$ ) convergeixen als seus valors esperats. Tot i així, existeix una regió en la qual apareix una petita desviació del valor esperat (aprox.  $1 < s/\sigma < 10$ ). Si ens referim a la varianza, aquesta desviació pot representar un problema greu en els receptors MLSE, ja que per alguns símbols de la modulació podríem tenir major varianza i per tant allunyar-nos d'obtenir el major rendiment amb mètrica simplificada. Per als paràmetres  $S$  i  $EK$ , si fem cas al test estadístic definit per Jarque-Bera (veure annex 5), en l'interval  $1 < s/\sigma < 10$  la probabilitat que la mostra sigui normal serà més petita.

### 14.3.3 Conclusions de la funció òptima de Hasting -Dillard amb zero iteracions

En termes generals, la funció òptima que volem trobar ha de complir un conjunt d'exigències necessàries per donar un rendiment òptim i millorar la funció arrel quadrada. Aquestes exigències són:

- Transformar l'estadística chi quadrada del senyal rebut en estadística Gaussiana, per tot valor del paràmetre de no centralitat del senyal  $\lambda = s^2/\sigma^2$ .
- Linealitzar el sistema. L'amplitud del senyal de post-detecció ha de ser proporcional a l'amplitud del camp elèctric del senyal òptic, enlloc a la potència òptica. Això vol dir, que es desitja que la mitja de sortida sigui igual a  $E\{g(y)\} \approx \sigma\sqrt{\lambda} = s$  per tot valor  $s/\sigma$ .
- Varianza constant per tot valor de  $\lambda = s^2/\sigma^2$ . Importantíssim, ja que en els receptors MLSE amb mètrica simplificada, la varianza no pot dependre del símbol transmès, ja que es perd capacitat de decisió.
- Minimitzar la BER.



En els experiments que hem realitzat fins ara, la funció òptima supera notablement els tests de normalitat (veure resultats dels test d'hipòtesis i diagrames de probabilitat normal). Per tant, podem afirmar que l'estadística de sortida és Gaussiana per tot valor de  $\lambda = s^2/\sigma^2$ . Tot i així, existeix una regió de valors de  $\lambda$  en la que la funció òptima amb zero iteracions retorna un p-value petit en els test d'hipòtesis, doncs és més probable que hi hagi un error.

Hem observat també que la funció òptima convergeix a l'arrel quadrada. Això ens garanteix dues coses; que el sistema serà lineal per valors de  $\lambda = s^2/\sigma^2 \gg 1$  i que la varianza serà constant per valors de  $\lambda = s^2/\sigma^2 \gg 1$ . Això és així perquè s'aproxima a una distribució de Rice.

Desafortunadament, hem trobat un desajust en la varianza per valors petits de  $\lambda = s^2/\sigma^2$ . També en la mitja, fent que el sistema no sigui del tot lineal en valors de  $\lambda = s^2/\sigma^2$  propers al zero.

Com a conclusió final, tot i que el rendiment aconseguit amb aquesta funció supera a l'arrel quadrada i cúbica (aquesta afirmació es pot demostrar amb el programa desenvolupat en l'annex 8), haurem d'intentar ajustar aquesta funció òptima mitjançant el següent procediment:

- Augmentar el nombre d'iteracions de l'algoritme de Dillard.
- Definir un paràmetre d'ajust (paràmetre de no centralitat de la funció) que ens permeti estudiar el comportament dels moments estadístics per reduir aquesta regió crítica, és a dir  $\lambda \neq 0$ .

## 14.4 Aproximació de la funció òptima de Hasting-Dillard amb iteracions il·limitades

Fins ara hem estat utilitzant aproximacions de la funció Marcum Q utilitzant zero iteracions de l'algoritme de Dillard. Amb l'aproximació de zero iteracions aconseguíem simplificar la funció Marcum Q per una simple exponencial (veure (14.11)). El problema d'utilitzar aquestes assumpcions és que la funció òptima aconseguida tindrà un major error si volem modificar el paràmetre de no centralitat per estudiar el comportament dels moments estadístics. Per evitar aquest fet i per intentar minimitzar l'error (en mitja, varianza i altres moments), modificarem l'algoritme de Dillard, així com la definició de la funció òptima que hem vist en (14.29). Definirem la funció òptima normalitzada  $\bar{g}(y; \bar{\gamma}, \delta, n_e)$  fent servir el mètode de la inversió (11.4) en tres passos:

1. Modificació de l'algoritme de Dillard vist en (14.4)

Aquesta modificació genera una funció recursiva  $X_M(a, b)$  dependent de tres paràmetres;  $M$ ,  $a$  i  $b$ . Bàsicament el nou algoritme serà igual, però traurem factor comú les exponencials  $e^{-a^2/2}$  i  $e^{-b^2/2}$ .

$$X_M(a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k n_k \quad (14.39)$$

On:

$$n_k = n_{k-1} + t_k \quad (14.40)$$

$$d_k = \frac{\left(\frac{b^2}{2}\right) d_{k-1}}{(k + M - 1)} \quad (14.41)$$

$$p_k = \frac{\left(\frac{a^2}{2}\right) p_{k-1}}{k} \quad (14.42)$$

$$p_0 = 1 \quad (14.43)$$

$$t_0 = \frac{\left(\frac{b^2}{2}\right)^{M-1}}{(M-1)!} \quad (14.44)$$

$$n_0 = \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{b^2}{2}\right)^j}{j!} \quad (14.45)$$

Per tant, la funció Marcum Q es pot aproximar fent servir (14.39) i les exponencials per:

$$Q_{n_e/2}(a, b) \approx e^{-a^2/2} \cdot e^{-b^2/2} \cdot X_{n_e/2}(a, b) \quad (14.46)$$

2. Definició de la variable intermèdia  $\eta$  de l'aproximació de Hasting (10.15) com;

$$\eta = \sqrt{-2 \cdot \ln(q)} \quad (14.47)$$

On  $q$  és una v.a. uniforme distribuïda entre 0 i 1, però com ja vam veure en apartats anteriors només pot prendre valors entre 0 i 0.5. Fora d'aquí s'ha de substituir per  $1 - q$ . Per diferenciar els dos casos, renombrarem  $\eta$  per:

$$\eta_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln(q)} \quad (14.48)$$

$$\eta_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - q)} \quad (14.49)$$

Fent servir el mètode de la inversa (11.4), el valor de  $q$  dins de (14.48) i (14.49) ens el dona la funció de distribució de probabilitat  $F_{Y|S}(y)$  d'una v.a. non-central chi-square amb  $n$  graus de llibertat (expressió (12.2)):

$$\begin{aligned}
q = F_{Y|S}(y) &= 1 - Q_{n_e/2} \left( \sqrt{\delta}, \frac{\sqrt{y}}{\bar{\gamma}} \right) \\
&= 1 - e^{-\delta/2} \cdot e^{-y/2\bar{\gamma}^2} \cdot X_{n_e/2} \left( \sqrt{\delta}, \frac{\sqrt{y}}{\bar{\gamma}} \right)
\end{aligned} \tag{14.50}$$

Si comparem l'expressió (14.50) amb (12.2) hem substituït  $n_e = 2m$ ,  $\sqrt{\delta} = s/\bar{\gamma}$  i  $\bar{\gamma} = \gamma/\sigma$ . El paràmetre normalitzat  $\bar{\gamma}$  ha de ser igual a la unitat per estar correctament estimat. Per tant el podriem eliminar d'aquesta definició, tot i així volem deixar constància d'aquest paràmetre per si es vol treballar amb la funció desnormalitzada (és a dir substituir en (14.50) el paràmetre de soroll normalitzat  $\bar{\gamma}$  per  $\gamma$ ).

Pels valors de  $q = F_{Y|S}(y)$  entre 0.5 i 1 (és a dir pel cas de substituir per  $1 - q$ ), la variable  $\eta_2$  (14.49) es pot simplificar per:

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \sqrt{-2 \cdot \ln \left( e^{-\delta/2} \cdot e^{-y/2\bar{\gamma}^2} \cdot X_{n_e/2} \left( \sqrt{\delta}, \frac{\sqrt{y}}{\bar{\gamma}} \right) \right)} \\
&= \sqrt{\frac{y}{\bar{\gamma}^2} + \delta - 2 \cdot \ln \left( X_{n_e/2} \left( \sqrt{\delta}, \frac{\sqrt{y}}{\bar{\gamma}} \right) \right)}
\end{aligned} \tag{14.51}$$

3. Finalment, substituint (14.48) i (14.51) en l'aproximació de Hasting de la CDF inversa  $F_{Z|S}^{-1}(\cdot)$  d'una v.a. normal  $N(0,1)$  (10.15).

$$\bar{g}(y; \bar{\gamma}, \delta, n_e) = \begin{cases} \bar{\gamma} \cdot \sqrt{\delta} - \bar{\gamma}\eta_1 + \bar{\gamma} \cdot \frac{2,515517 + 0,802853 \cdot \eta_1 + 0,010328 \cdot \eta_1^2}{1 + 1,432788 \cdot \eta_1 + 0,189269 \cdot \eta_1^2 + 0,001308 \cdot \eta_1^3} & 0 \leq y \leq y_U \\ \bar{\gamma} \cdot \sqrt{\delta} + \bar{\gamma}\eta_2 - \bar{\gamma} \cdot \frac{2,515517 + 0,802853 \cdot \eta_2 + 0,010328 \cdot \eta_2^2}{1 + 1,432788 \cdot \eta_2 + 0,189269 \cdot \eta_2^2 + 0,001308 \cdot \eta_2^3} & y \geq y_U \end{cases} \tag{14.52}$$

On en (14.52) el llindar  $y_U$  ve determinat per la següent equació transcendent:

$$0.5 = e^{-\delta/2} \cdot e^{-y_U/2\bar{\gamma}^2} \cdot X_{n_e/2} \left( \sqrt{\delta}, \frac{\sqrt{y_U}}{\bar{\gamma}} \right) \tag{14.53}$$

El codi en MATLAB que implementa aquest algorisme es mostra a continuació (notar que la funció  $X_M(a, b)$  l'he definit en una funció a part i que a mode d'exemple he introduït 100 iteracions, però podrien ser més).

```
function s = g_function_hasting_dillard(y, sigma, delta, modes)
% G_FUNCTION_HASTING_DILLARD(Y, SIGMA, DELTA, MODES) calculates de
% optimum function based Hasting-Dillard approximations. This
function
% can be applied in optical systems with predominant ASE noise. The
% Hasting-Dillard optimum function recovers the Stationary Gaussian
% statistics, and linearizes the system. This fact allows that
Electrical
% Dispersion Compensation EDC equalizers become optimum solution.
```

```

%
% Sintaxis:
%
% Y: Received electrical samples contaminated with Chi-square
noise.
% SIGMA: Standard deviation of the ASE noise. This is named as
noise
% parameter.
% DELTA: Non-centrality parameter or adjust parameter.
% MODES: Number of modes per polarization state.
%
% @@ author: Alex Jimenez Conesa. GCO- TSC - UPC 2007-2008 @@
%
if nargin==4
    a0 =2.515517;
    a1 =0.802853;
    a2 =0.010328;
    b1 =1.432788;
    b2 =0.189269;
    b3 =0.001308;

    z = 0.*ones(length(y),1);
    K = recursive_X(sqrt(delta), sqrt(y)./sigma, modes);
    p = 1 - exp(-y./(2.*sigma.^2)).*exp(-delta/2).*K;
    for i =1:length(y)
        if(p(i,1) > 0.5 && p(i,1) <= 1)
            t=(y(i,1)./sigma^2)+delta-2.*log(K(i,1));
            z(i,1) = sqrt(t)-
(a0+a1.*(sqrt(t))+a2.*(sqrt(t)).^2)./(1+b1.*(sqrt(t))+b2.*(sqrt(t)).^2
+b3.*(sqrt(t)).^3);
            elseif(p(i,1)<=0.5 && p(i,1)>= 0)
                t = -2.*log(p(i,1));
                z(i,1) = -
sqrt(t)+(a0+a1.*sqrt(t)+a2.*(t))./(1+b1.*sqrt(t)+b2.*(t)+b3.*(t).^(3/2
));
            end
        end
        s = z.*sigma+sigma.*sqrt(delta);
    else
        error('Error on input arguments');
    end

function z = recursive_X(a,b,M)
iterations = 100;
h0 = 0;
for j=0:M-1
    h0 = h0 + (power(b.^2./2,j))./factorial(j);
end
d0 = (power(b.^2./2,M-1))./factorial(M-1);
f0 = 1;

fk = f0;
dk = d0;
hk = h0;
q =f0.*h0;
for i=1:iterations
    fk = ((a.^2./2).*fk)./i;
    dk = ((b.^2./2).*dk)./(i+M-1);
    hk = hk + dk;
    q = hk.*fk + q;
end
z = q;

```

Per tant, la funció òptima normalitzada  $\bar{g}(y; \bar{\gamma}, \delta, n_e)$  quedarà definida per tres paràmetres (o grau de llibertat). Per evitar confusions i problemes d'interpretació entre els paràmetres del senyal i els de la funció, els definirem de la següent manera:

- Paràmetre del soroll normalitzat ( $\bar{\gamma}$ ): Aquest paràmetre ha de ser igual a la unitat per aconseguir les millors prestacions, ja que està normalitzat. Quan treballem en mode

normalitzat, el fixarem directament a 1. En mode desnormalitzat, ha de coincidir amb la desviació estàndard del soroll ASE  $\sigma$ .

- Paràmetre d'ajust o paràmetre de no centralitat de la funció ( $\delta$ ): Està relacionat amb el paràmetre de no centralitat. En un sistema real amb alfabet binari aquest paràmetre hauria de ser diferent per cada un dels bits. A la pràctica això no és viable, doncs utilitzarem aquest paràmetre per ajustar la funció per tal que doni mínima BER i màxima Gaussianitat.
- Paràmetre modal ( $n_e$ ): Vindrà determinada per la relació dels filtres que utilitzem.

Ja sabem que a la pràctica, tenim una funció òptima diferent per cada trienni de valors  $\gamma$ ,  $\delta$  i  $n_e$ . La figura 14.21, mostra quatre possibles combinacions dels paràmetres  $\gamma$ ,  $\delta$  i  $n_e$ , i per tant quatre possibles funcions òptimes (recordeu que només seran òptimes per aquells valors concrets de  $\gamma$ ,  $\delta$  i  $n_e$ ). Hem treballat amb funcions òptimes normalitzades, per tant el paràmetre de soroll  $\gamma$  s'ha fixat a 1.

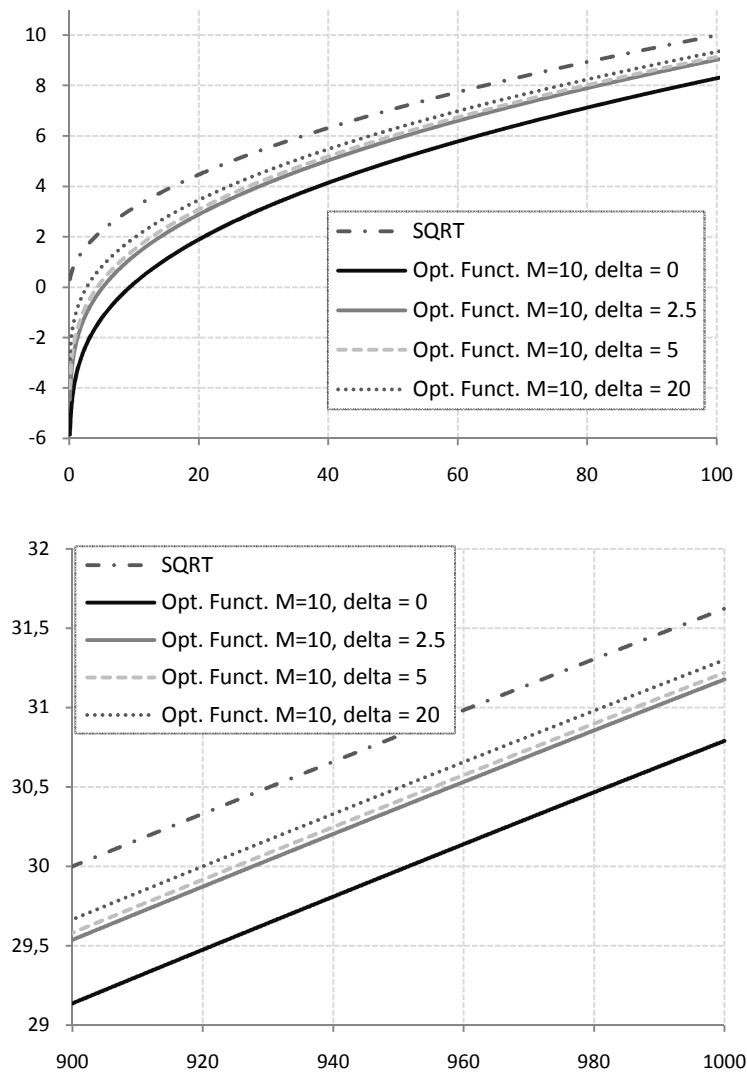


Figura 14.21. Família de funcions òptimes fent servir l'aproximació de Hasting i Dillard amb 100 iteracions

Noteu que les quatre funcions òptimes representades no coincideixen entre si, això implica que és impossible trobar mitjançant el mètode de la inversa una funció única per qualsevol valor del paràmetre de no centralitat. Per valors alts, totes les funcions òptimes i l'arrel quadrada mantenen una pendent molt semblant. Això últim garanteix que totes tenen el mateix comportament per valors alts (amb una petita desviació en mitja). En canvi, per valors d'abscisses petits la pendent de cada una de les funcions és diferent que la de l'arrel quadrada. Això implica que l'elecció del paràmetre d'ajust és molt important en aquesta zona, ja que condiciona la pendent. En aquest sentit, en la figura 14.22 es representa la pendent (o derivada) en percentatge de les diferents funcions òptimes i de l'arrel quadrada que hem analitzat en la figura 14.21. Bàsicament es pot observar que en punts propers a l'origen les pendents entre l'arrel quadrada i les diferents funcions òptimes són completament diferents. Per valors d'abscisses alts, les pendents de les funcions òptimes sempre són més grans que la pendent de l'arrel quadrada, però segons anem augmentant el valor d'abscissa, aquesta diferència es fa més petita. Així, per exemple si agafem el punt d'abscissa  $y = 1000$ , la pendent per la funció òptima amb paràmetres  $\delta = 5$  i  $n_e = 10$  és 1.5952%, en canvi per l'arrel quadrada és 1.5811%. L'error en pendent en el punt  $y=1000$  és de 0.0141% (1.5952-1.5811). En canvi, en el punt  $y = 5000$ , les pendents són 0.7088% i 0.7071% per la funció òptima i l'arrel quadrada, respectivament. Per tant, l'error que es comet en  $y=5000$  és de 0.0017%. Això significa que la diferència o error en pendent va disminuint progressivament, confirmant la hipòtesis que la funció òptima convergeix en l'arrel quadrada.

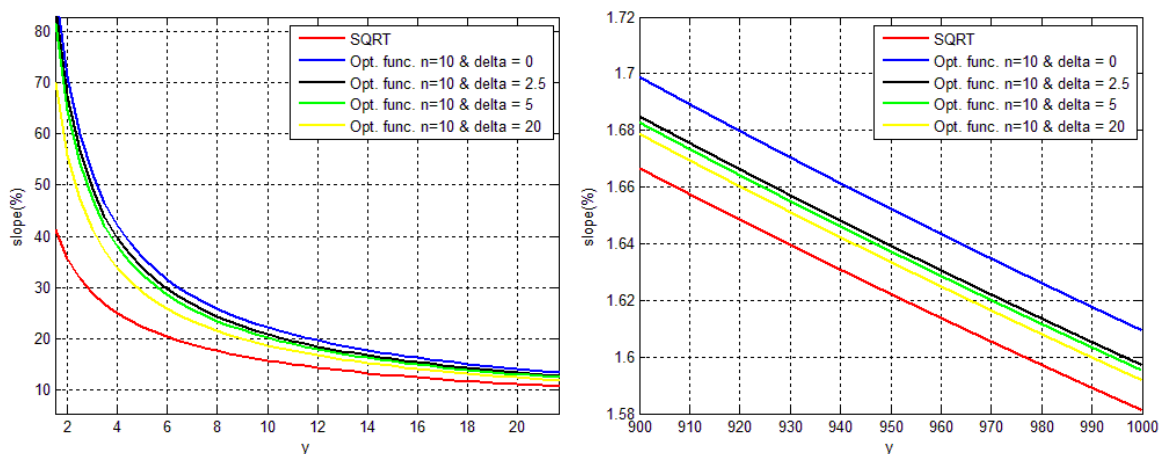


Figura 14.22. Pendents d'algunes de les funcions òptimes de Hasting-Dillard vers l'arrel quadrada

Per compensar la petita desviació que existeix entre les funcions òptimes i l'arrel quadrada per valors d'abscisses grans, hem calculat uns offsets específics en el punt d'abscissa  $y=1000$  per cada una de les funcions. En la figura 14.23, apareixen les funcions que hem utilitzat anteriorment, però amb els offsets corresponents. Per valors d'abscisses grans es pot veure que les pendents no són completament iguals, com ja havíem vist en la figura 14.22, això descarta que siguin paral·leles.

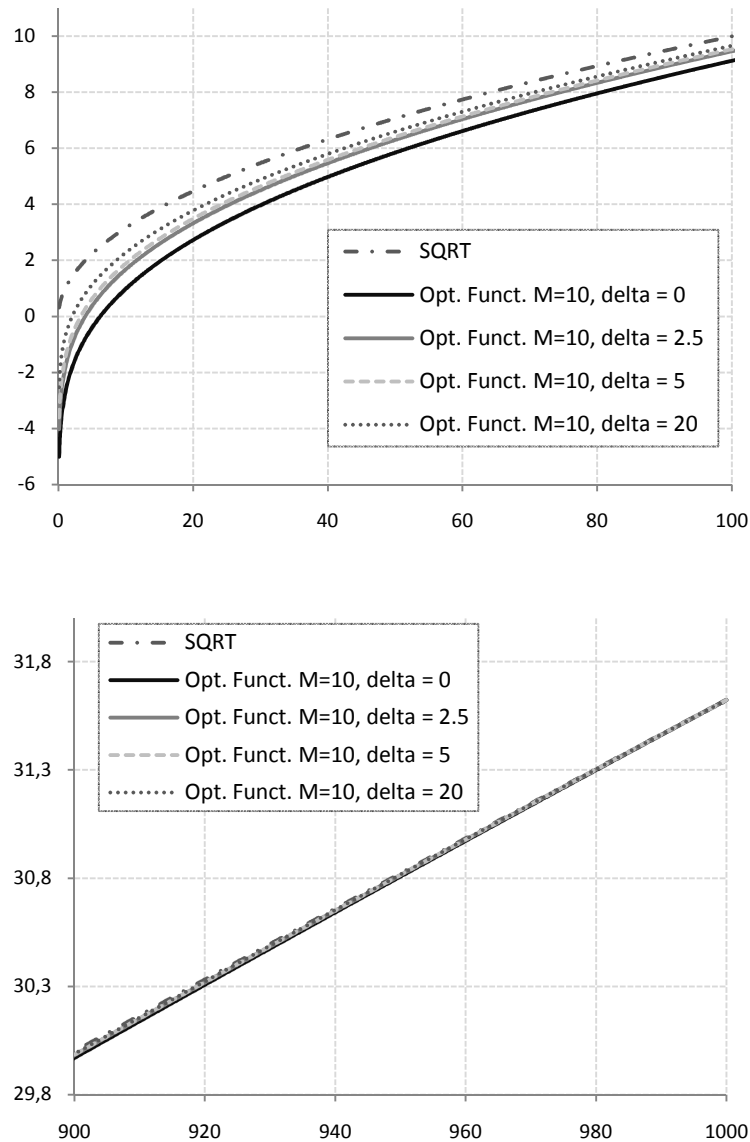


Figura 14.23. Família de funcions òptimes de Hasting-Dillard en funció del paràmetre d'ajust i contemplant uns offsets específics

#### 14.4.1 Moments de la funció òptima de Hasting-Dillard amb iteracions il·limitades

De la mateixa manera com hem fet amb l'aproximació de la funció òptima amb zero iteracions de l'algoritme de Dillard (apartat 14.3.2), en aquesta secció farem un estudi dels moments estadístics de la funció òptima normalitzada amb un major nombre d'iteracions. Aquests moments estadístics els compararem amb els que s'obtenen utilitzant l'arrel quadrada i cúbica. Canviarem alguns paràmetres de la funció òptima per ajustar-nos en quant a velocitats de transmissió actuals i amples de banda dels filtres. Suposem un sistema receptor de comunicacions òptiques digitals amb els següents paràmetres:

- Ample de banda a -3dB del filtre òptic:  $B_o = 40$  GHz
- Ample de banda a -3dB del filtre elèctric:  $B_e = 8$  GHz
- Velocitat de transmissió:  $R_b = 10$  Gb/s
- Responsivitat del fotodíode PIN:  $R = 1$

Amb aquests paràmetres, el nombre de modes espectrals són (incloent els dos estats de polarització):

$$n_e = 2 B_o/B_e = 10 \tag{14.54}$$

I per tant, la funció òptima normalitzada que farem servir en l'estudi següent és:

$$\bar{g}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta, n_e = 10) \tag{14.55}$$

Començarem analitzant la mitja en funció del paràmetre d'ajust  $\delta$ . En les figures 14.24 i 14.25 es representa la mitja de les funcions òptimes per diferents valors de  $\delta$ . També s'han inclòs els casos arrel quadrada i cúbica. S'observa que la no linealitat que apareixia en la funció òptima amb zero iteracions per valors de no centralitat propers al zero (veure figures 14.18 i 14.19) continua apareixent per cada una de les funcions òptimes en funció de  $\delta$ .

La desviació en mitja amb el cas ideal varia en funció del paràmetre d'ajust  $\delta$ . Comparant amb l'arrel cúbica, les funcions òptimes presenten un comportament lineal més ideal. Amb respecte l'arrel quadrada, les funcions òptimes presenten una major linealitat amb senyals amb relació de no centralitat propera al zero, i a més a més evolucionen com l'arrel quadrada per relacions  $s/\sigma$  molt grans. Per tant, és interessant observar com totes les funcions òptimes tendeixen poc a poc a l'arrel quadrada, ja que aquest era un dels nostres objectius inicials a l'hora de plantejar la funció.

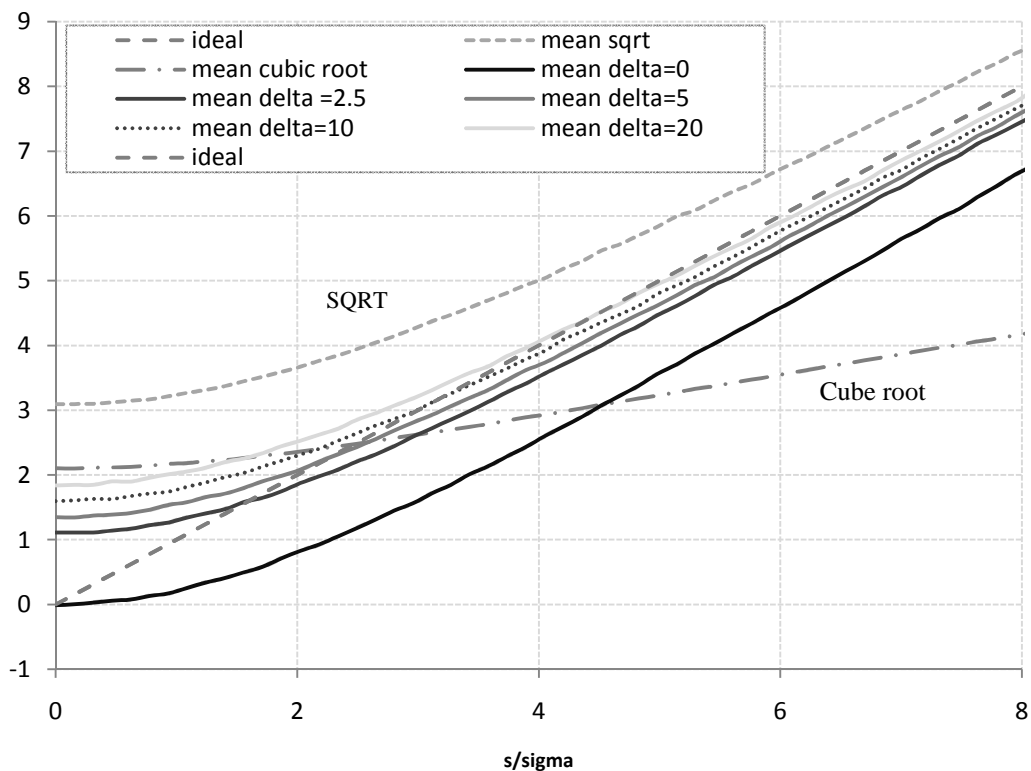


Figura 14.24. Mitja de la funció òptima de Hasting-Dillard amb  $n=10$ , l'arrel quadrada i cúbica en funció de  $s/\sigma$  per relacions de no centralitat properes al zero



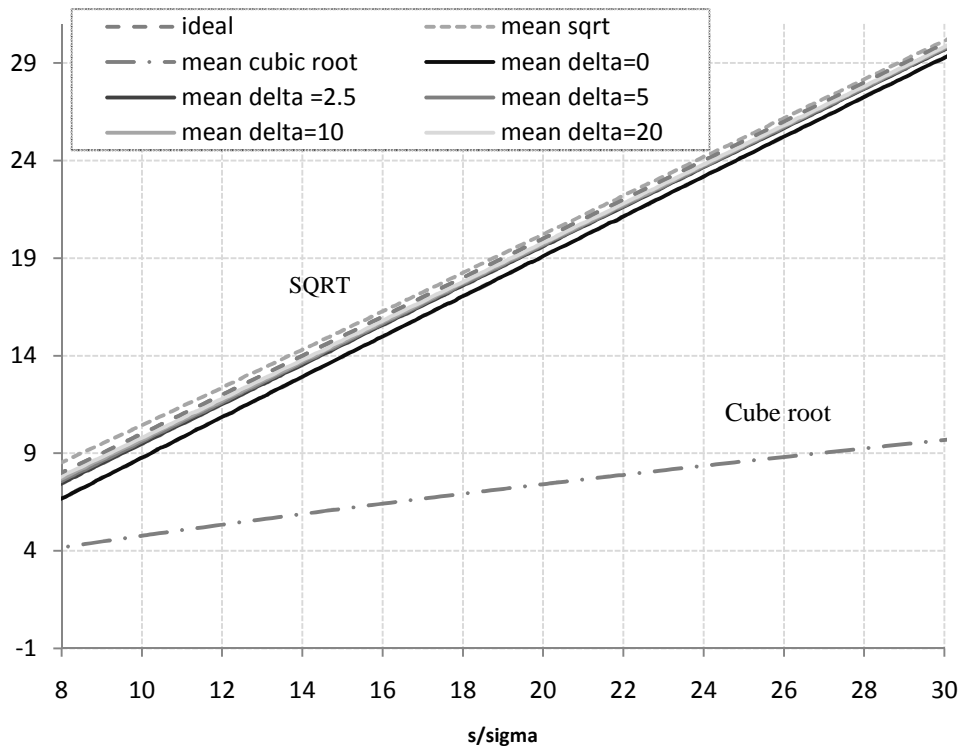


Figura 14.25. Mitja de la funció òptima de Hasting-Dillard amb  $n=10$ , l'arrel quadrada i cúbica en funció de  $s/\sigma$  per relacions de no centralitat llunyanes al zero

La taula 14.2 mostra l'error quadràtic mig entre la mitja de la funció òptima per diferents valors de  $\delta$  i la mitja ideal, quan escollim com a zona crítica o zona no lineal la regió compresa  $0 < s/\sigma < 5$ . S'observa que el menor error es comet quan  $\delta = 3.5$ , tot i així amb  $\delta = 2.5$  i  $\delta = 5$  també s'obté un error similar.

delta	Error quadràtic mig
0	1,20571093
1,5	0,52636638
2,5	0,48164199
3,5	0,48025496
5	0,49908922
10	0,60204721
20	0,74541549

Taula 14.2. Error quadràtic mig entre la mitja ideal i la mitja de la funció òptima per diferents paràmetres d'ajust

La figura 14.26 representa gràficament el comportament de la varianza per diferents valors del paràmetre d'ajust  $\delta$ , en funció de  $s/\sigma$  (o arrel quadrada del paràmetre de no centralitat del senyal). També s'han inclòs els casos arrel quadrada i cúbica. Evidentment, com el sistema està normalitzat, la varianza ideal ha de ser constant i igual a la unitat. Es pot observar que el comportament de la varianza de la funció òptima sempre millora al de l'arrel quadrada per senyals amb relació d'extinció infinita. Amb l'arrel quadrada s'obté una desviació màxima del 50% respecte la varianza ideal. En el cas que el paràmetre d'ajust de la funció òptima sigui  $\delta = 0$ , la varianza de la funció òptima augmenta respecte la ideal un 25%

aproximadament, en canvi si  $\delta = 5$  augmenta un 8% com a màxim i disminueix un 18% com a mínim respecte la ideal. A més a més, amb  $\delta = 5$  o proper a aquest valor es pot observar que la velocitat de convergència al valor esperat o ideal és més gran que per altres casos amb  $\delta$ 's més petites. L'arrel cúbica no presenta una transició tan abrupta com les funcions òptimes i l'arrel quadrada per valors  $s/\sigma$  petits, tot i així no manté una varianza constant quan es va incrementant la relació de no centralitat  $s/\sigma$ , i a més a més no manté la idealitat d'un sistema normalitzat (és a dir varianza unitària).

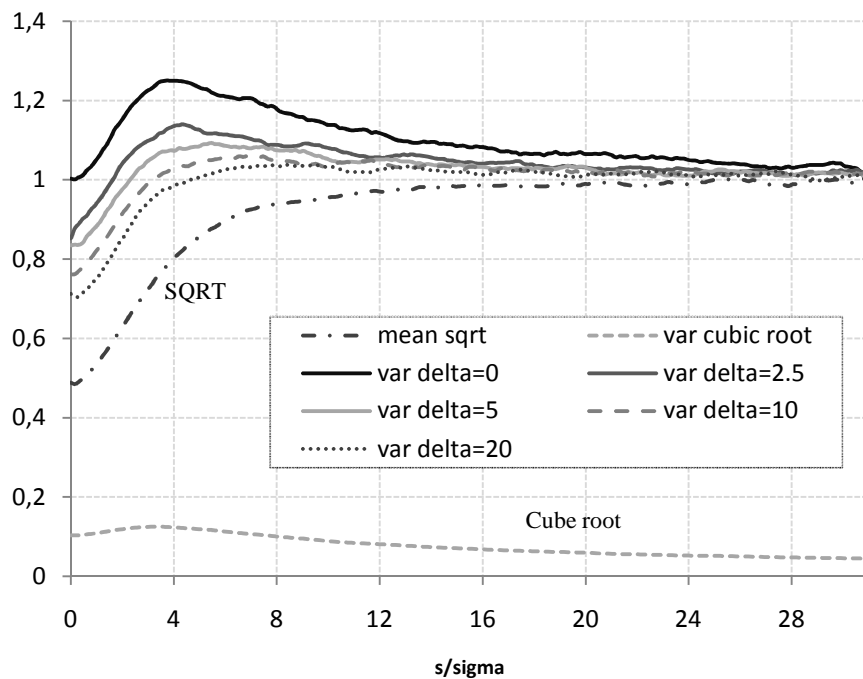


Figura 14.26. Varianza de la funció òptima de Hasting-Dillard amb  $n=10$ , l'arrel quadrada i l'arrel cúbica en funció de  $s/\sigma$

Una manera d'estudiar l'error en varianza entre la funció òptima i el cas ideal és analitzant l'error quadràtic mig en funció del paràmetre  $\delta$ . En la taula 14.3 s'ha calculat l'error quadràtic mig per diferents valors de  $\delta$ . Noteu que el valor on s'assoleix el mínim és per  $\delta = 5$ .

delta	Error quadràtic mig
0	0,12139159
1,5	0,07652199
2,5	0,06565326
3,5	0,05609219
5	0,05410902
10	0,05662215
20	0,06905359

Taula 14.3. Error quadràtic mig entre la varianza ideal i la varianza de la funció òptima per diferents paràmetres d'ajust

Les figures 14.27 i 14.28 mostren l'evolució dels paràmetres d'asimetria ("Skewness") i curtosis ("Excess Kurtosis") en funció de  $s/\sigma$  per diferents paràmetres d'ajust  $\delta$ , respectivament. Anàlogament a com es va fer en els estudis de la mitja i la varianza, s'han inclòs els casos arrel quadrada i arrel cúbica. Observant les gràfiques, sembla que escollint  $\delta = 5$ , obtenim un comportament bastant constant del paràmetre d'asimetria (desviació màxima i mínima d'un 2%) i del paràmetre de curtosis (aproximadament un 1.5% de cota màxima en quant a desviació màxima i mínima).

Si escollim un paràmetre d'ajust  $\delta$  molt gran, el que farem és allunyar-nos del cas òptim Gaussià, ja que perdem la simetria i la forma de la Gaussiana per senyals amb mitges properes al zero. De fet, si augmentem molt el paràmetre d'ajust comprovarem que la funció òptima tendeix a l'arrel quadrada (veure en la figura 14.27 els casos amb  $\delta = 10$  i  $\delta = 20$ ).

Comparant amb l'arrel quadrada, amb la funció òptima amb  $\delta = 5$  millorem la velocitat de convergència i també la desviació màxima del valor ideal. Amb l'arrel quadrada el paràmetre Skewness augmenta un 25% en la seva cota màxima. L'arrel cúbica, presenta un comportament en Skewness lleugerament desviat del cas ideal (disminueix un 10% com a màxim i després roman constant un 5% per sota de l'ideal).

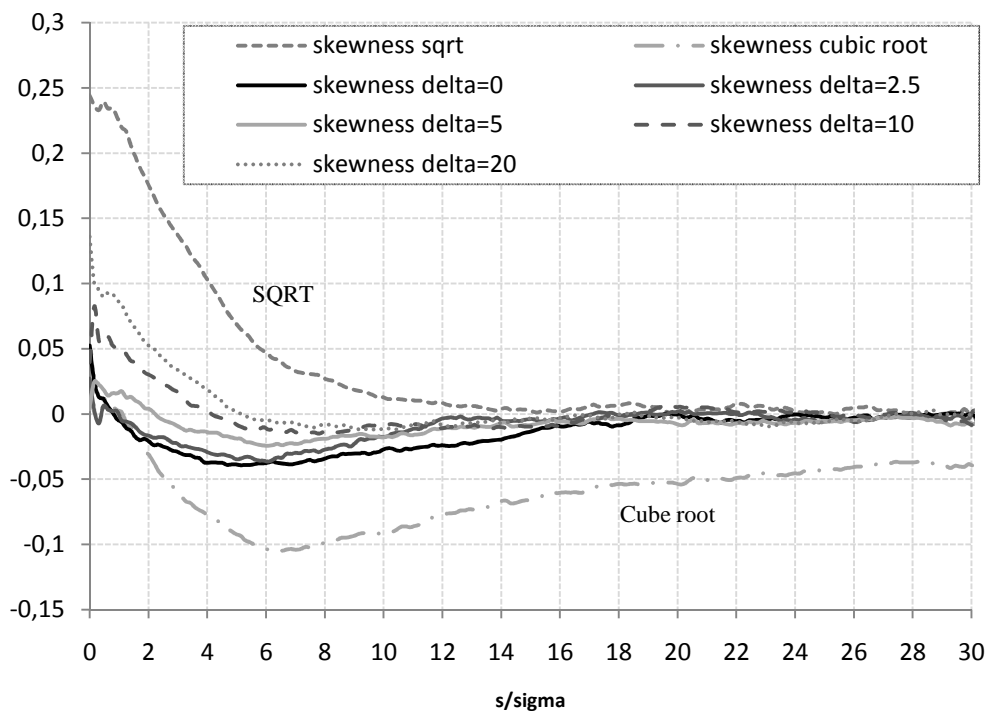


Figura 14.27. Skewness de la funció òptima de Hasting-Dillard amb  $n=10$ , l'arrel quadrada i l'arrel cúbica en funció de  $s/\sigma$

La taula 14.4 mostra l'error quadràtic mig entre l'Skewness ideal (és a dir una constant en zero) i el de la funció òptima. Noteu que el mínim s'assoleix per  $\delta = 5$ .

delta	Error quadràtic mig
0	0,0206769
1,5	0,01966094
2,5	0,01483508
3,5	0,01406684
5	0,01181109
10	0,0157052
20	0,02496987

Taula 14.4. Error quadràtic mig entre l'Skewness ideal i el de la funció òptima per diferents paràmetres d'ajust

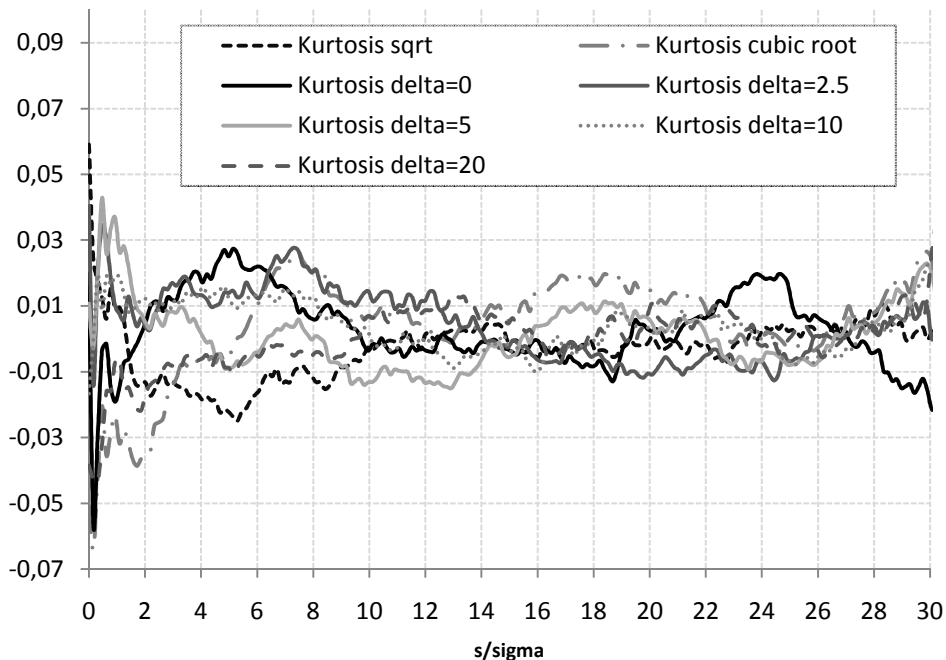


Figura 14.28. Excess Kurtosis de la funció òptima de Hasting-Dillard amb  $n=10$ , l'arrel quadrada i l'arrel cúbica en funció de  $s/\sigma$

### 14.4.2 Anàlisi de les cues i computació de la BER

En un sistema de comunicacions digitals el paràmetre de més interès és la BER o probabilitat d'error de bit, que no és res més que la funció integral de les pdf's en una determinada regió. Per aquest motiu, calcular la BER o la probabilitat de les cues de les PDF's pot resultar una tècnica eficient per comprovar la Gaussianitat. La gran majoria dels test d'hipòtesis es centren, en gran mesura, en el centre de la Gaussiana, deixant de banda les cues. En el cas que ens ocupa, i com que la BER és un paràmetre determinant, les cues han de mantenir aquest comportament Gaussià. Existeix un test d'hipòtesis que dona més

importància a les cues, s'anomena test de Anderson-Darling (prova A-D), i que també podria servir per estudiar el comportament de les PDF's, tot i així no el farem servir.

Evidentment, estudiar el comportament de les cues requereix un gran cost computacional. Habitualment, per calcular la BER es poden utilitzar dues tècniques; per simulacions estadístiques de Monte Carlo o de forma analítica realitzant la integral. En aquest cas, computar la BER de forma analítica és extremadament complicat, per tant utilitzar simulacions estadístiques és la forma més convenient. El principal desavantatge de les simulacions de Monte Carlo és la gran inversió en temps que s'ha de dedicar en cada experiment. Un altre problema de les simulacions estadístiques és que el MATLAB té un límit de memòria i no permet treballar amb vectors o arrays amb dimensions més grans de  $10^8$ . Per aquest motiu, és inviable treballar amb probabilitats d'errors de  $10^{-9}$  o inferiors, ja que per tenir una mostra representativa en aquest interval necessitaríem generar  $10^{11}$  nombres aleatoris (en aquest cas, polsos binaris). Per aquest motiu, en les simulacions estadístiques de Monte Carlo que hem utilitzat, hem suposat que en el sistema s'utilitza un codi FEC, i per tant tenim suficient amb probabilitats d'error de  $10^{-4}$ . D'aquesta manera en les simulacions posteriors hem utilitzat  $10^7$  polsos transmesos, que considerem que és una mostra representativa.

Començarem amb una prova molt simple i directament relacionada amb la BER. Utilitzarem la funció òptima normalitzada basada en les aproximacions de Hasting (expressió (14.52)) definida pels paràmetres següents:

- Nombre de modes espectrals totals:  $n_e = 10$
- Paràmetre d'ajust:  $\delta = 2.5$
- Paràmetre de soroll:  $\bar{\gamma} = 1$

$$\bar{g}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 2.5, n_e = 10) \quad (14.56)$$

Seguidament fem un escombrat del paràmetre de no centralitat, on per cada un d'ells generem  $10^7$  polsos o nombres aleatoris chi quadrats. Aquests valors generats els fem passar per la funció òptima. Si tot fos perfecte, la distribució de sortida hauria de ser una Gaussiana perfecta per tot  $s/\sigma$ . A la pràctica sabem que això no passa, i per tant només tindrem una Gaussiana ideal quan coincideixi el paràmetre de no centralitat  $\lambda$  amb el paràmetre d'ajust  $\delta$  i per valors grans del paràmetre de no centralitat  $\lambda$ , ja que la funció convergeix a l'arrel quadrada i sabem que és òptima.

El que farem és calcular el llinar òptim d'una Gaussiana ideal amb mitja i varianza mostral (les obtingudes experimentalment amb les mostres de sortida de la funció òptima), i a partir d'aquest llinar calcular la probabilitat de la cua. Per conveni, calcularem l'àrea de la cua dreta de la Gaussiana. Per calcular el llinar hem utilitzat l'expressió següent:

$$v_{th} = \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot \operatorname{erfc}^{-1}(2 \cdot p) + \mu \quad (14.57)$$

On  $\mu$  i  $\sigma$  són la mitja i la desviació estàndard mostral,  $\operatorname{erfc}^{-1}(\cdot)$  és la funció error inversa i  $p$  és la probabilitat de la cua (en el nostre cas  $p = 10^{-4}$ ). L'algoritme és molt senzill:

Sigui  $x_i$  la mostra de sortida de la funció òptima,  $n_T$  el nombre de mostres totals i  $n_f$  el nombre de casos favorables:

```

Recorrem les  $n_T$  mostres{
  Si  $x_i > v_{th}$ 
    Llavors incrementem  $n_f$ 
}
Probabilitat de la cua =  $n_f/n_T$ 

```

El resultat d'aplicar aquest algoritme per diferents valors del paràmetre de no centralitat es representa en la figura 14.29. L'eix de les ordenades és el logaritme en base 10 de la probabilitat de la cua. Si la distribució de sortida fos totalment Gaussiana per tot  $s/\sigma$ , llavors la probabilitat de la cua hauria de ser constant i igual a  $10^{-4}$  (en aquest cas -4, ja que l'eix d'ordenades és logarítmic). Com es pot observar això no passa i si extrapolem aquest resultat als que vam veure en les gràfiques de la varianza i skewness (figures 14.27 i 14.28), veiem que la regió crítica coincideix. El que s'observa també és que per  $s/\sigma = \sqrt{2.5}$  s'arriba al cas òptim i la probabilitat de la cua coincideix exactament amb la ideal. També s'observa que al incrementar  $s/\sigma$ , l'àrea de la cua va convergint poc a poc al valor òptim. No s'ha pogut augmentar el marge de representació degut a limitacions del MATLAB.

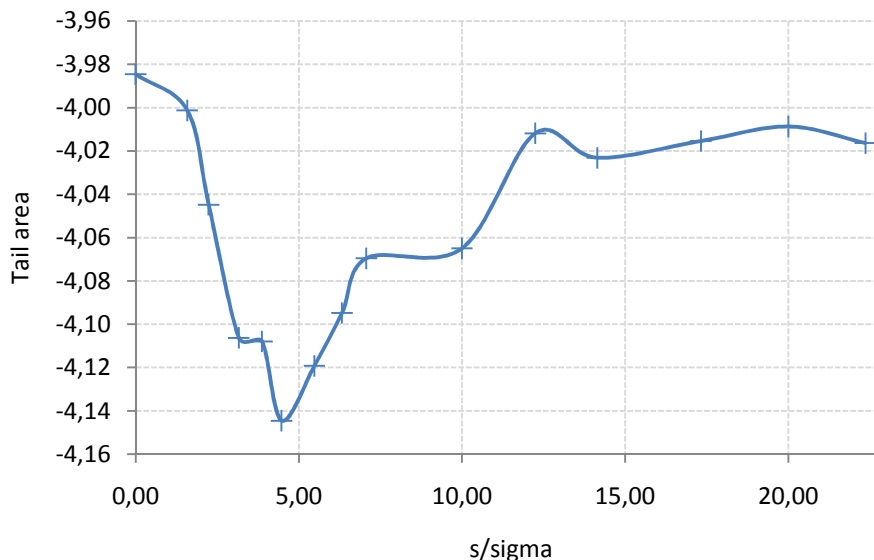


Figura 14.29. Probabilitat de la cua dreta de la funció de densitat de probabilitat de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard amb paràmetres  $n=10$ ,  $\gamma=1$  i  $\delta=2.5$

Per computar la BER, necessitem calcular l'àrea de la cua dreta pel bit '0' i l'àrea de la cua esquerra del bit '1', per un llindar òptim concret. El llindar òptim vindrà determinat per la suposició de l'aproximació Gaussiana. D'aquesta manera, per un sistema de comunicacions

digitals amb una modulació OOK i amb soroll Gaussià predominant, el llindar òptim ve determinat per:

$$v_{th} = \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \mu_1 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_0)^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_0^2) 2 \ln \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}} \quad (14.58)$$

La probabilitat d'error ideal es pot calcular amb l'expressió següent:

$$BER = P_0 \cdot P(\varepsilon | 0) + P_1 \cdot P(\varepsilon | 1) \quad (14.59)$$

On  $P_0$  i  $P_1$  són les probabilitats d'aparèixer el bit '0' i '1' respectivament, i  $P(\varepsilon | 0)$  i  $P(\varepsilon | 1)$  són:

$$P(\varepsilon | 0) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{v_{th} - \mu_0}{\sqrt{2} \sigma_0} \right) \quad (14.60)$$

$$P(\varepsilon | 1) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{-(v_{th} - \mu_1)}{\sqrt{2} \sigma_1} \right) \quad (14.61)$$

La BER es podria haver calculat de la forma clàssica que vam veure en 5.4, però com que el paràmetre  $Q$  s'obté directament d'aproximar l'expressió del llindar òptim  $v_{th}$  (14.58), hem preferit utilitzar les fórmules exactes per cometre el menor error possible.

Fent servir l'expressió (14.58) per calcular el llindar òptim i generant cíclicament la seqüència  $\{0,1\}$  per garantir la equiprobabilitat dels dos bits, hem implementat en codi MATLAB l'algoritme que s'encarrega de computar la BER mitjançant simulació de MC. Hem suposat també que tenim una relació d'extinció infinita, per estudiar el cas més crític.

Aquest algoritme per computar la BER el podem fer servir per estudiar aquest paràmetre de qualitat en funció del paràmetre d'ajust de la funció òptima. D'aquesta manera, podem trobar un mètode que complementa a l'anàlisi dels moments estadístics i estudis mitjançant error quadràtic mig vist en l'apartat 14.4.1. Recordeu que en aquests anàlisis vam concloure que els millors resultats de Gaussianitat s'aconseguien quan  $\delta \sim 5$ .

#### 14.4.2.1 Discussió sobre el paràmetre d'ajust i la repercussió en la BER

Quan vam parlar del paràmetre d'ajust de la funció òptima, vam dir que per fixar-lo a un valor òptim havíem d'estudiar els resultats de diferents anàlisis, com per exemple els moments estadístics, els test d'hipòtesis i els diagrames de probabilitat normal. També vam dir que la decisió era complexa i que resultava d'un compromís entre els diferents anàlisis.

Un possible criteri per fixar el paràmetre d'ajust òptim podria ser analitzar la BER en funció d'aquest paràmetre. En aquest sentit, en les figures 14.30 i 14.31 es representa la BER

en funció del paràmetre d'ajust. Hem suposat una relació d'extinció infinita i una relació  $E_b/N_0 = 15$  (en lineal), així com  $n = 10$  modes espectrals i  $10^6$  polsos transmesos (la meitat per cada un dels bits). Vam utilitzar la funció òptima normalitzada amb paràmetre  $n_e = 10$ . Amb aquests paràmetres de sistema s'ha generat la gràfica de la figura 14.30, on es pot observar que en la regió  $\delta \in [4, 7]$  és on s'obtenen els millors resultats.

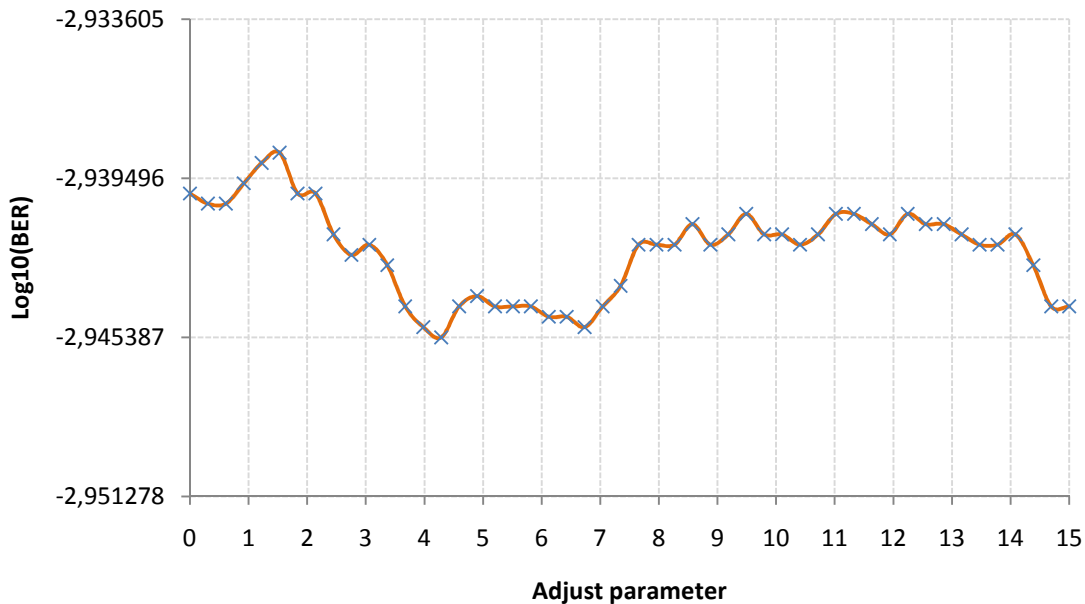


Figura 14.30. Logaritme de la BER en funció del paràmetre d'ajust de la funció òptima de Hasting-Dillard per  $n=10$  i  $\gamma=1$

En la figura 14.30 els resultats són bastant canviants i depenen de la realització. Per solucionar aquesta variabilitat dels resultats i reduir l'interval de confiança, hem augmentat el nombre de polsos transmesos a  $10^7$  i el nombre de realitzacions a 5, per després promitjar-les i obtenir un resultat més fiable. La figura 14.31 mostra els resultats obtinguts. Podem veure que el cas òptim es troba en l'interval  $\delta \in [4, 6]$  per aquests paràmetres de sistema. Així doncs, fixar el paràmetre d'ajust  $\delta = 5$  pot ser una bona elecció per minimitzar la BER. En l'apartat 14.4.1 vam veure que amb  $\delta = 5$  també s'obtenien els millors resultats (mínim error quadràtic mig).



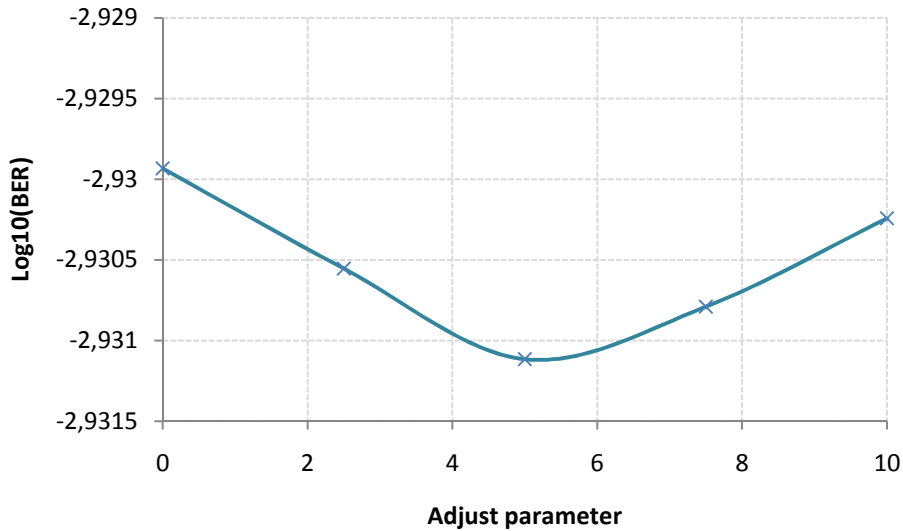


Figura 14.31. Logaritme de la BER en funció del paràmetre d'ajust de la funció òptima de Hasting-Dillard per  $n=10$  i  $\gamma=1$

#### 14.4.2.2 BER en funció del paràmetre d'ajust òptim

Amb els resultats obtingut en l'apartat anterior (14.4.2.1), i fent servir l'algoritme que calcula la BER amb l'aproximació Gaussiana (veure l'expressió del llindar en (14.58)) hem generat la gràfica de la figura 14.32. En aquesta figura es representa el logaritme de la probabilitat d'error de bit (BER) en funció de la relació  $E_b/N_0$  en decibels ( $10 \cdot \log(E_b/N_0)$ ) per cinc casos diferents. Amb triangles i color blau es representa la BER de la distribució de sortida de la funció òptima (amb paràmetres  $\delta = 5$  i  $n_e = 10$ ), amb cercles i color violeta la BER de la funció arrel quadrada, amb creus i color taronja la BER de l'arrel cúbica, amb rombes i color negre la BER en el cas de no utilitzar cap funció, i finalment, amb quadrats i color verd la BER ideal pel cas Gaussià estacionari. Per calcular la BER del cas Gaussià estacionari s'ha utilitzat l'expressió clàssica de radio d'una modulació ASK de dos nivells:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right) \quad (14.62)$$

Com es pot veure en la figura 14.32, la diferència en BER entre la funció òptima i les funcions arrel quadrada i arrel cúbica és molt petita. Tot i així, la funció òptima sempre dona un rendiment més gran que l'arrel quadrada. Per exemple per aconseguir una  $BER = -4,5$ , la funció òptima necessita 13,61 dB, l'arrel quadrada 13,81 dB i l'arrel cúbica 13,70 dB. Per tant, amb l'arrel quadrada tenim una penalització de 0,2 dB amb respecte la funció òptima, mentre que amb l'arrel cúbica la penalització es de aprox. 0,1 dB.

Un altre aspecte a destacar és que tant la funció òptima com l'arrel quadrada i l'arrel cúbica queden molt lluny del cas Gaussià estacionari, així per exemple per aconseguir una  $BER = 10^{-4}$ , amb el cas Gaussià estacionari necessitem una relació aproximadament de 11,4 dB a l'entrada del fotodetector, en canvi amb la funció òptima necessitem

aproximadament uns 13.1dB, una penalització de 1,7 dB en aquest cas. Finalment, també és interessant veure la millora que presenten les tres funcions (òptima, arrel quadrada i cúbica) vers els cas en que no s'utilitza cap funció. Per exemple, per aconseguir una BER = -3.5 amb la funció òptima necessitem una relació  $E_b/N_0 = 12.55$ dB, en canvi amb el cas sense funció necessitem  $E_b/N_0 = 14.5$ dB. Això equival a una penalització de 1.95 dB.

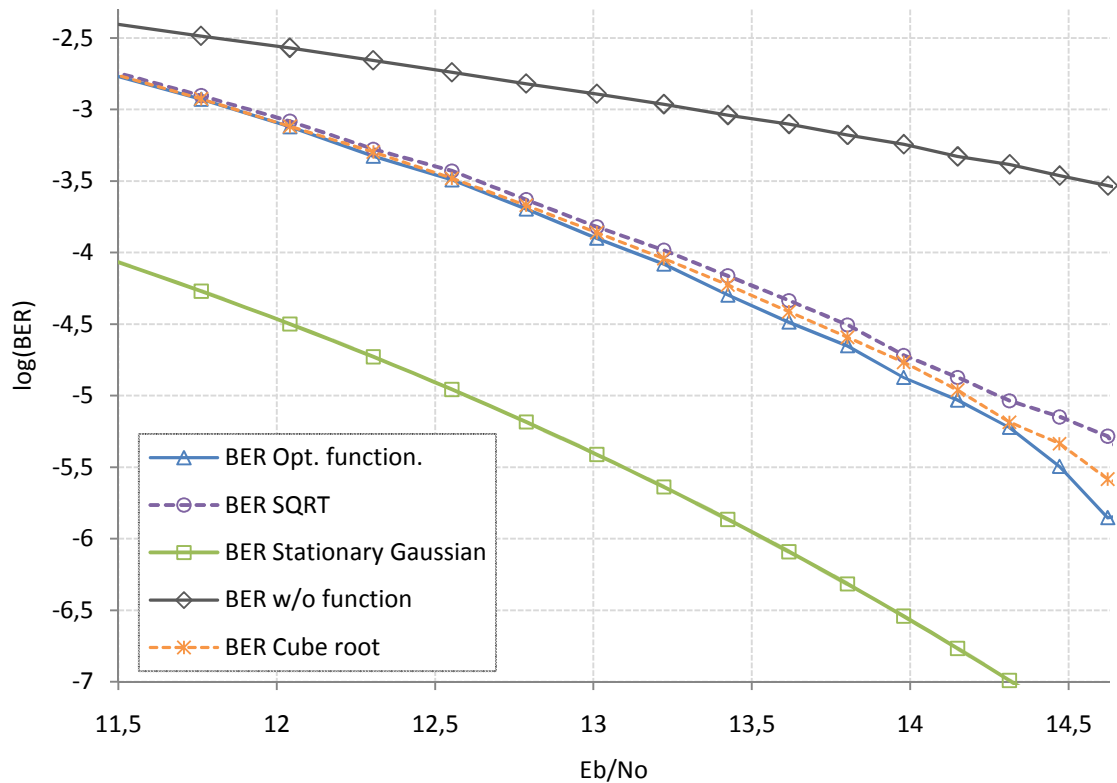


Figura 14.32. Logaritme de la BER en funció de la relació  $E_b/N_0$  per diferents casos

Com s'observa en la figura 14.32, la diferència entre la funció òptima, l'arrel quadrada i l'arrel cúbica és molt petita. Per observar millor aquestes evidències, en la taula 14.5 apareixen alguns dels valors amb els que s'ha realitzat la gràfica 14.32. Observant els resultats, podem veure que la funció òptima supera en rendiment a l'arrel quadrada i l'arrel cúbica.

$E_b/N_0$	Opt. function	SQRT	Cube root
<b>13,0103</b>	-3,90031936	-3,82016107	-3,86106606
<b>13,2221929</b>	-4,08039898	-3,98422124	-4,04239271
<b>13,4242268</b>	-4,29756946	-4,16304326	-4,22621356
<b>13,6172784</b>	-4,4867824	-4,33629907	-4,4134127
<b>13,8021124</b>	-4,65169514	-4,50584541	-4,59345982
<b>13,9794001</b>	-4,8728952	-4,71896663	-4,76700389
<b>14,1497335</b>	-5,03151705	-4,8728952	-4,9625735
<b>14,3136376</b>	-5,22184875	-5,03621217	-5,18708664
<b>14,4715803</b>	-5,49485002	-5,14874165	-5,33724217
<b>14,62398</b>	-5,85387196	-5,28399666	-5,58502665
<b>14,7712125</b>	-5,79588002	-5,7212464	-5,69897

## 14.5. Comparació BER: funció òptima, SQRT i arrel cúbica

En la figura 14.33 apareixen quatre gràfiques on es representa el logaritme de la PDF pels bits "0" i "1", suposant una relació d'extinció infinita, diferents valors  $E_b/N_0$  i  $n = 10$  graus de llibertat. Es va utilitzar la funció òptima normalitzada amb paràmetres  $n_e = 10$  i  $\delta = 5$ . Si comparem amb l'arrel quadrada (veure figura 14.34) ens adonem que la funció òptima té un comportament bastant favorable respecte a la Gaussianitat. En totes aquestes figures es superposa una Gaussiana ideal tant pel bit "0" com pel bit "1", en color blau discontinu i vermell discontinu respectivament. Els resultats són molt satisfactoris per gairebé tots els casos.

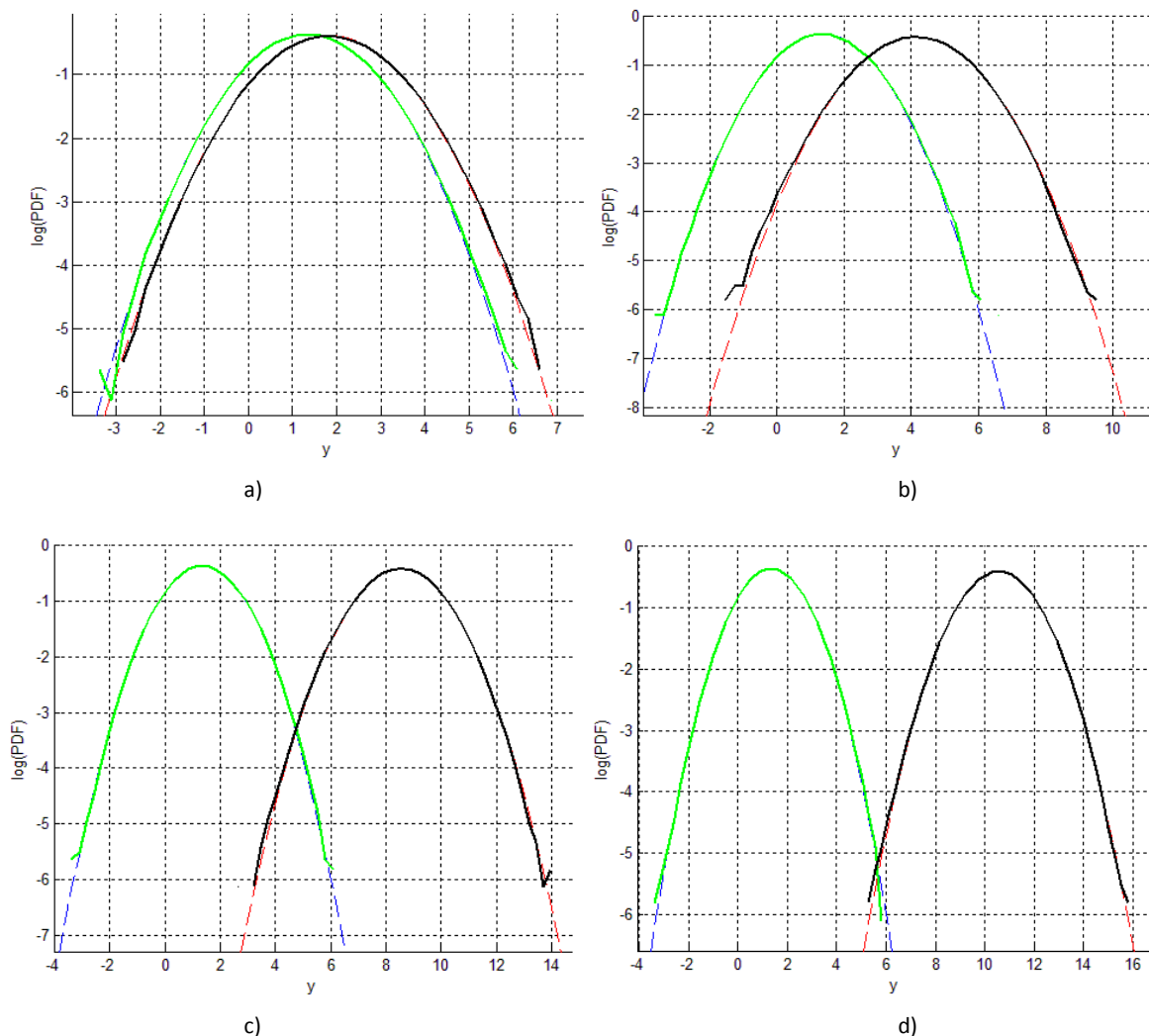


Figura 14.33. Representacions de les PDF's logarítmiques de la distribució de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard per  $n=10$ ,  $\delta=5$  i  $\gamma=1$  i per diferents relacions  $E_b/N_0$ : a)  $E_b/N_0 = -2.04$  dB, b)  $E_b/N_0 = 6.98$  dB, c)  $E_b/N_0 = 13.01$  dB i d)  $E_b/N_0 = 14.77$  dB

Si ara comparem els mateixos exemples amb l'arrel quadrada, veurem que existeixen diferències evidents pel bit "0" quan estem treballant amb relacions d'extinció infinites. En la figura 14.34 apareixen quatre gràfiques corresponents a les PDF's de sortida del dispositiu arrel quadrada per diferents valors  $E_b/N_0$  amb respecte Gaussianes ideals. Es pot veure que

per relacions  $E_b/N_0$  petites les diferències entre la PDF real i la Gaussiana ideal són clares (veure 14.34-a i 14.34-b). També es pot veure que per qualsevol relació  $E_b/N_0$  el bit "0" s'allunya moltíssim de la Gaussiana ideal.

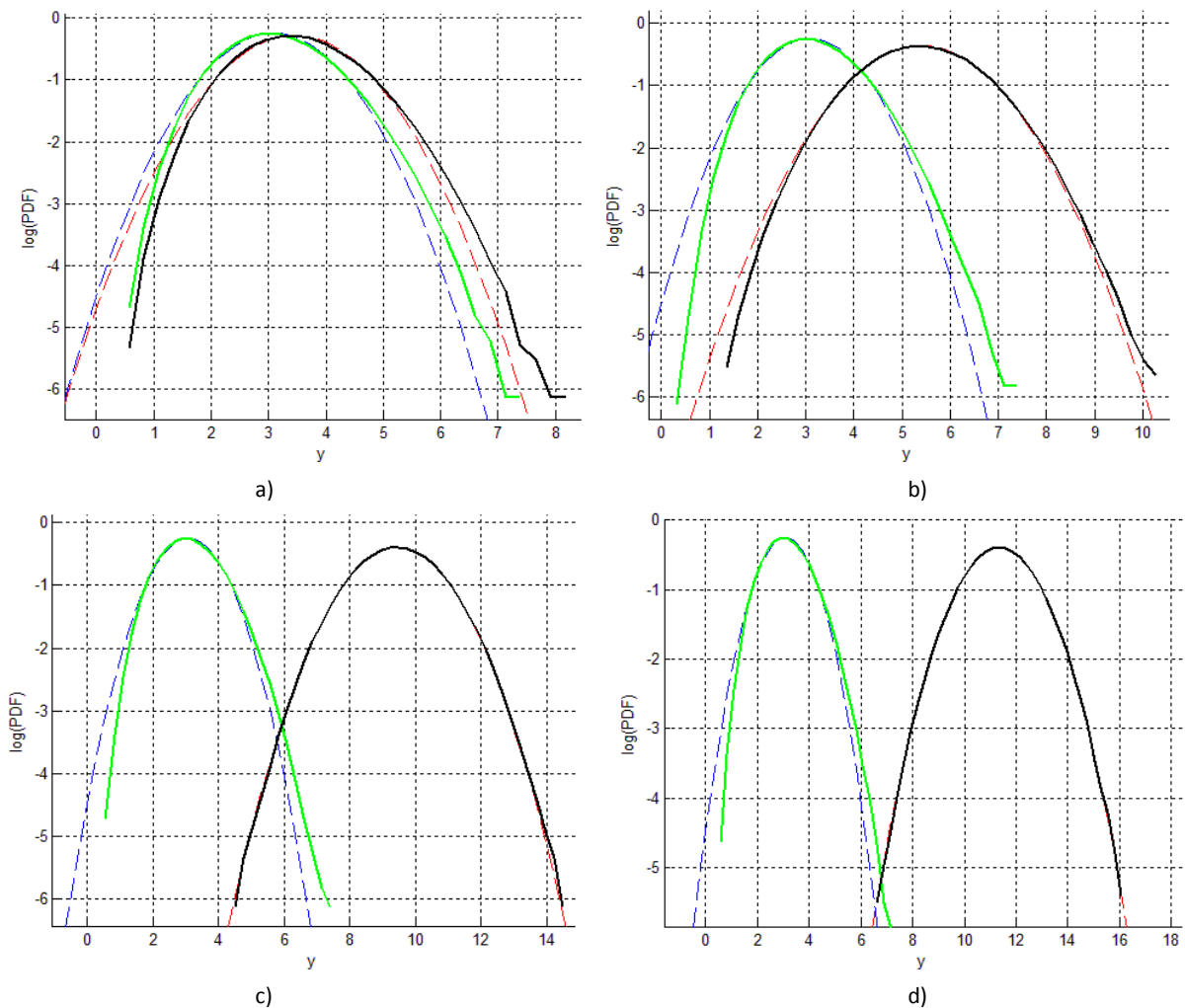


Figura 14.34. Representacions de les PDF's logarítmiques de la distribució de sortida de la funció arrel quadrada per diferents relacions  $E_b/N_0$ : a)  $E_b/N_0 = -2.04$  dB, b)  $E_b/N_0 = 6.98$  dB, c)  $E_b/N_0 = 13.01$  dB i d)  $E_b/N_0 = 14.77$  dB

### 14.4.3 Estimació dels paràmetres del canal

Totes les funcions òptimes que hem trobat en aquest projecte depenen dels paràmetres de canal per poder treballar en les condicions òptimes. Per tant, és imprescindible una correcta estimació d'aquests paràmetres de canal, i disposar de mètodes adients per fer-ho. En aquest apartat, descriurem algunes de les tècniques d'estimació de paràmetres de canal, centrant-nos sobretot en el mètode dels moments degut a la seva simplicitat.

Els mètodes d'estimació de canal poden ser paramètrics o no paramètrics. Els mètodes paramètrics assumeixen que la forma funcional de la PDF del senyal és coneguda, però els seus paràmetres no, en canvi els mètodes no paramètrics no assumeixen cap

aproximació de la PDF. Un exemple de mètode no paramètric és el mètode de l'histograma, i un exemple de mètode paramètric és el mètode dels moments (MoM).

El mètode dels moments (MoM) es pot aplicar sempre i quan coneixem a priori la forma funcional de la PDF del senyal, però no coneixem els valors dels paràmetres que la defineixen. Si tenim present que les mostres del senyal elèctric, després dels processos de fotodetecció i filtrat, tenen una distribució chi quadrada, llavors el mètode dels moments té un gran interès. En el cas que ens ocupa, determinar els paràmetres del canal és molt important, ja que la funció òptima depèn directament d'aquests. Per tant, per calibrar correctament la funció òptima, caldrà generar unes seqüències d'entrenament i calcular de forma experimental la mitja, la varianza i el moment central de tercer ordre per estimar els paràmetres de canal. Així, sigui  $X_1 = \{1,1, \dots, 1\}$  la seqüència d'entrenament del bit '1' i  $X_0 = \{0,0, \dots, 0\}$  la seqüència d'entrenament del bit '0', llavors definim  $v_1 = \text{var}\{X_1\}$  com la varianza per la seqüència d'1's,  $v_0 = \text{var}\{X_0\}$  com la varianza per la seqüència de 0's,  $m_1 = E\{X_1\}$  la mitja per la seqüència d'1's,  $m_0 = E\{X_0\}$  la mitja per la seqüència de 0's i  $q_0$  el moment central de tercer ordre per la seqüència de 0's. Fent servir aquesta nomenclatura i aplicant el mètode dels moments (MoM) en el cas de tenir una distribució chi quadrada, els paràmetres del canal es poden estimar a partir de les següents expressions:

$$\bar{N}_0 = \frac{v_1 - v_0}{2(m_1 - m_0)} \quad (14.63)$$

$$\overline{pM} = \frac{6m_0N_0^2 - q_0}{4N_0^3} \quad (14.64)$$

On  $\bar{N}_0$  és l'estimador de la densitat espectral de potència del soroll ASE i  $\overline{pM}$  és l'estimador del nombre de graus de llibertat. L'equació (14.64) també es podria definir com  $\overline{2M}$  i després multiplicar-ho tot per  $p = 2$  per aconseguir el nombre de graus de llibertat totals. La relació que existeix entre el paràmetre modal  $n_e$  i l'equació (14.64) és  $n_e = 2\overline{pM}$  (o també  $n_e = p\overline{2M}$ ). La relació que existeix entre el paràmetre de soroll  $\gamma$  i l'equació (14.63) és  $\gamma = \sqrt{\bar{N}_0}/2$ .

La figura 14.35 mostra el resultat d'aplicar el mètode MoM per diferents dimensions de la seqüència d'entrenament. En aquest cas els paràmetres de sistema s'han configurat per tenir  $N_0 = 2$  ( $\sigma^2 = 1$ ) i  $pM = 2.5$  (en total  $n = 5$  graus de llibertat). S'ha de comentar que per aconseguir la figura 14.35 s'han promitjat les mostres desplaçant una finestra de 80 mostres (funció smooth amb 80 elements). Clarament s'observa que segons anem augmentant el nombre de mostres de la seqüència d'entrenament, el mètode dels moments convergeix al valor esperat en cada cas.

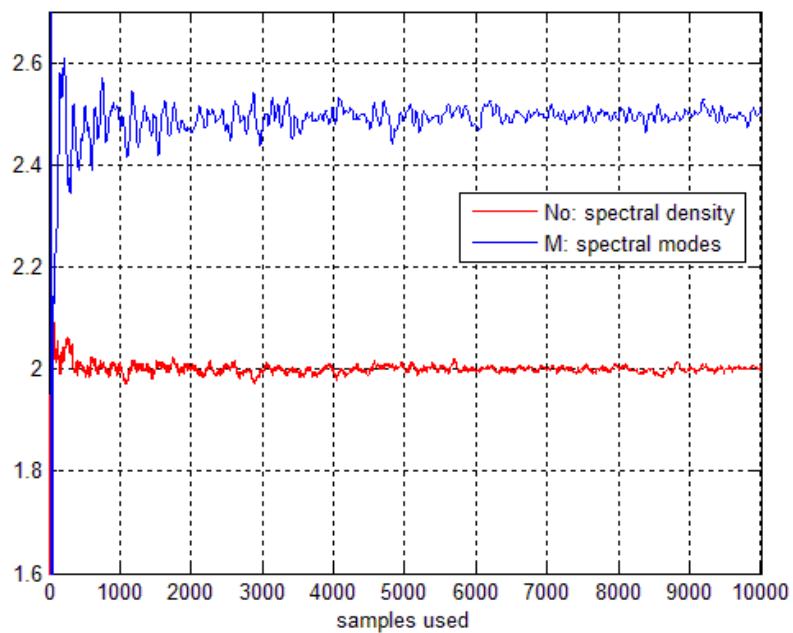


Figura 14.35. Estimació dels paràmetres de canal amb MoM promitjat amb finestres de 80 mostres en funció de la dimensió de les seqüències

Per aconseguir la figura 14.36, no s'ha utilitzat cap funció smooth però a canvi s'ha utilitzat un major nombre de mostres. Podem concloure que amb una seqüència d'entrenament de 100.000 mostres (tant pel bit '1' com pel bit '0'), l'estimador donat pel mètode de moments és comporta bastant bé.

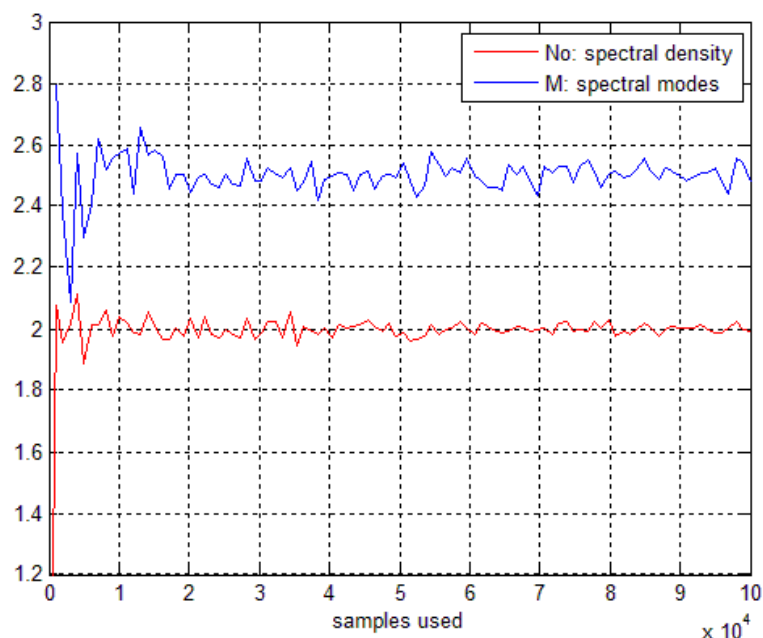


Figura 14.36. Estimació dels paràmetres de canal amb MoM en funció de la dimensió de les seqüències

#### 14.4.4 Simulacions de la funció òptima de Hasting-Dillard amb VPI

Fins ara hem analitzat la funció òptima de Hasting-Dillard amb models estadístics realitzats amb MATLAB, que no contemplaven cap fenomen que introdueix la fibra òptica, com per exemple la dispersió cromàtica (CD), la dispersió per mode de polarització (PMD) o altres efectes no lineals. Aquests models en MATLAB només analitzaven una part del soroll que existeix en els sistemes de comunicacions òptiques amb amplificació òptica, és a dir el soroll ASE. A més a més, els models estadístics en MATLAB es basaven en un sistema amb processos de filtrat ideals, i sabem que a la pràctica això no passa. Per fer un estudi més realista, hem realitzat un conjunt d'experiments amb el software *VPI photonics*, que es tracta d'un simulador de sistemes òptics.

##### 14.4.4.1 Experiment 1

El primer experiment consisteix en una comparativa del diagrama d'ull a 200km per tres casos diferents; utilitzant l'arrel quadrada + equalització electrònica DFE, utilitzant només equalització DFE, i per últim sense utilitzar cap tipus d'equalització. Tot i que no fem servir la funció òptima, amb aquest experiment podem comprovar la millora que aporta la funció arrel quadrada a nivell del diagrama d'ull. El SETUP es basa en un Loop de fibra i amplificació òptica amb els següents paràmetres de sistema:

- Emissor:
  - ER (Relació d'extinció): 30 dB
  - ChirpSign: Positiu
  - Velocitat de TX:  $R_b = 10 \text{ Gb/s}$
  - Freqüència d'emissió:  $193.1 \text{E}12 \text{ Hz}$
  - Potència d'emissió: 8 dBm
  - MZ Bandwidth: 12 GHz
- Canal:
  - Dispersió:  $20 \text{E}-6 \text{ s/m}^2$
  - Atenuació: 0.2 dB/km
  - Loops: 5
  - Trams: 40 km/tram
  - Canal No polaritzat (es contemplen els dos estats de polarització)
  - Guany AO:  $\text{Length} * \text{Attenuation} + 1.5 \text{ #dB}$
  - NF (figura de soroll de l'AO): 4.5 dB
  - Ample de banda equivalent del soroll de l'AO:  $8 * R_b$
- Receptor:
  - Filtre òptic:
    - Tipus: Gaussià
    - Ordre: 4
    - Ample de banda -3dB:  $4 * R_b$
  - Fotodiode PIN:
    - Responsivitat:  $R=1$
    - Soroll tèrmic:  $0 \text{ A}/\sqrt{\text{Hz}}$
    - Soroll shot: NO
  - Filtre elèctric

- Tipus: integrador passa-baix
- Ample de banda:  $0.8 \cdot R_b$
- Amplificador de RF
  - Guany en petita senyal: 100dB
  - Atenuació màxima: 100 dB
- Equalització DFE:
  - FF\_taps: 8
  - FB\_taps: 8
  - Step Size: 0.01
  - iterations: 500

Realitzant la simulació s'obtenen els tres diagrames d'ull següents (figures 14.37, 14.38 i 14.39) per una distància entre emissor i receptor de 200 Km repartida en 5 trams de fibra + AO. La figura 14.37 mostra el diagrama d'ull pel cas sense equalització DFE. Es pot observar que l'ISI i el soroll que afecta al senyal és molt gran i fa inobservable l'obertura de l'ull.

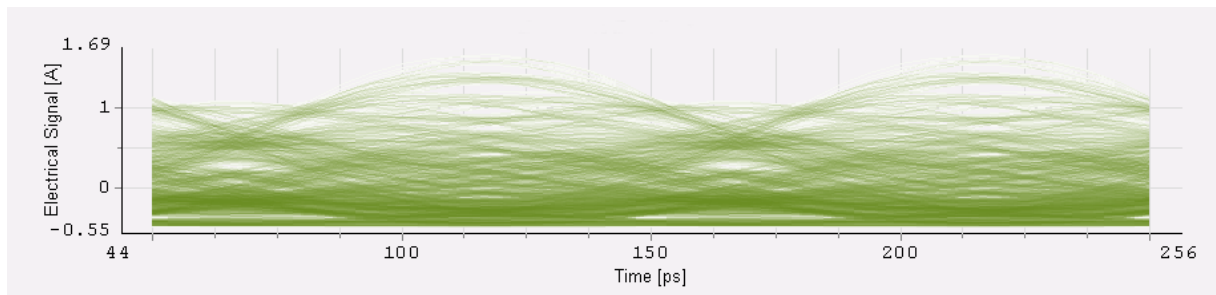


Figura 14.37. Diagrama d'ull a 200 Km obtingut en un sistema sense equalització

La figura 14.38 mostra el diagrama d'ull pel cas d'utilitzar només equalització electrònica DFE. Comparant-lo amb el cas anterior, es pot constatar que millora bastant, tant en l'amplada com en l'altura de l'obertura de l'ull.

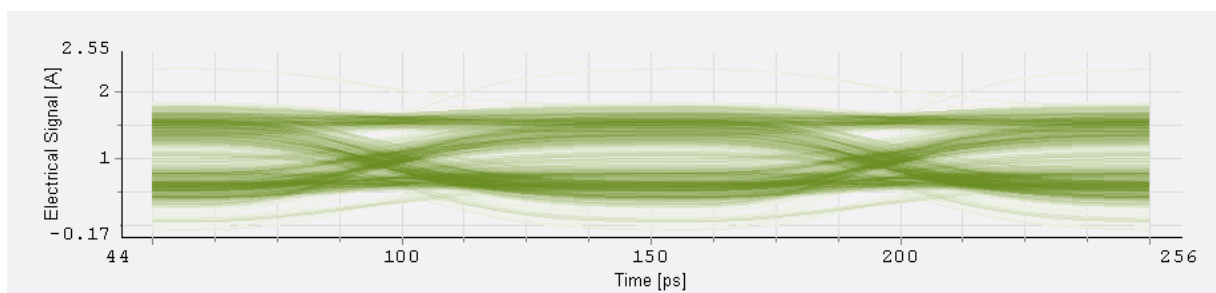


Figura 14.38. Diagrama d'ull a 200 Km obtingut en un sistema amb equalització DFE

Finalment, en el cas d'utilitzar equalització DFE + l'arrel quadrada, es pot comprovar en la figura 14.39 que el sistema es linealitz molt més que en els dos casos anteriors, fent que l'equalitzador DFE treballi millor. Per tant el diagrama d'ull presenta un millor aspecte en quant a l'amplada de l'obertura de l'ull, cosa que garanteix un menor nombre d'errors deguts a l'ISI, i també presenta un millor aspecte en quant a l'altura de l'obertura de l'ull, per tant presenta un millor marge sobre el soroll.



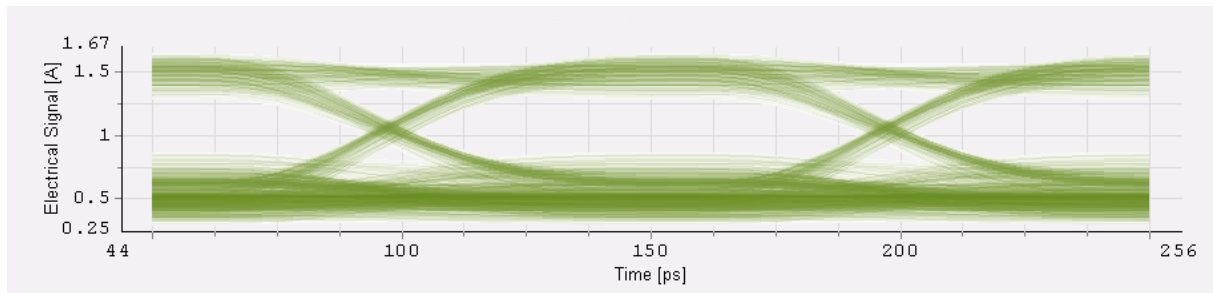


Figura 14.39. Diagrama d'ull a 200 Km obtingut en un sistema amb equalització DFE i equalització no lineal amb la funció arrel quadrada

#### 14.4.4.2 Experiment 2

El segon experiment consisteix en una comparativa entre la funció òptima i l'arrel quadrada fent servir una configuració molt semblant a la que s'ha fet servir en el primer experiment. La funció òptima s'ha implementat en MATLAB i s'ha inclòs dins d'un mòdul *Cosimulation* del VPI. El codi en MATLAB que s'ha utilitzat s'ha tingut que adaptar a les estructures de dades que utilitza el VPI. El VPI et permet treballar amb diferents formats de senyal (Blocks, samples...), que no és res més que estructures de dades. Aquestes estructures, a més a més, són diferents en el cas de senyals òptiques o elèctriques. En les meves simulacions he utilitzat Blocks per senyals elèctriques, per tant he tingut que adaptar la funció òptima a aquest tipus d'estructures. El codi de la funció òptima adaptat per VPI és:

```
function out = g_function_hasting(in, sigma, delta, modes)
% set the type of the signal
y.type = 'esignal';
% Set the boundary conditions of the signal
y.boundaries = 'Periodic';
% set the time grid spacing
y.dt = in.dt;
% set the frequency grid spacing
y.df = in.df;
% set the time stamp
y.t0 = 0;
% set the duration of the signal in grid points unit (=Duration/time
grid spacing)
y.T = in.T;
% set the bandwidth of the structure in grid points unit
y.fs = in.fs;
y.band.type = 'eband';
y.band.fs = in.band.fs;
for i = 1:length(in.band.E)
    y.band.E(1,i) = g_function_hasting_dillard (in.band.E(1,i), sigma,
delta, modes);
end
out = y;

function s = g_function_hasting_dillard(y, sigma, delta, modes)
% G_FUNCTION_HASTING_DILLARD(Y, SIGMA, DELTA, MODES) calculates de
% optimum function based Hasting-Dillard approximations. This
function
% can be applied in optical systems with predominant ASE noise. The
% Hasting-Dillard optimum function recovers the Stationary Gaussian
% statistics, and linearizes the system. This fact allows that
Electrical
% Dispersion Compensation EDC equalizers become optimum solution.
%
% Sintaxis:
%
%     Y: Received electrical samples contaminated with Chi-square
noise.
```

```

%      SIGMA: Standard deviation of the ASE noise. This is named as
noise
%      parameter.
%      DELTA: Non-centrality parameter or adjust parameter.
%      MODES: Number of modes per polarization state.
%
%      @@ author: Alex Jimenez Conesa. GCO- TSC - UPC 2007-2008 @@
%
if nargin==4
    a0 =2.515517;
    a1 =0.802853;
    a2 =0.010328;
    b1 =1.432788;
    b2 =0.189269;
    b3 =0.001308;

    z = 0.*ones(length(y),1);
    K = recursive_X(sqrt(delta), sqrt(y)./sigma, modes);
    p = 1 - exp(-y./(2.*sigma.^2)).*exp(-delta/2).*K;
    for i =1:length(y)
        if(p(i,1) > 0.5 && p(i,1) <= 1)
            t=(y(i,1)./sigma^2)+delta-2.*log(K(i,1));
            z(i,1) = sqrt(t)-
(a0+a1.*(sqrt(t))+a2.*(sqrt(t)).^2)./(1+b1.*(sqrt(t))+b2.*(sqrt(t)).^2
+b3.*(sqrt(t)).^3);
        elseif(p(i,1)<=0.5 && p(i,1)>= 0)
            t = -2.*log(p(i,1));
            z(i,1) = -
sqrt(t)+(a0+a1.*sqrt(t)+a2.*(t))./(1+b1.*sqrt(t)+b2.*(t)+b3.*(t).^(3/2
));
        end
    end
    s = z.*sigma+sigma.*sqrt(delta);
else
    error('Error on input arguments');
end

function z = recursive_X(a,b,M)
iterations = 100;
h0 = 0;
for j=0:M-1
    h0 = h0 + (power(b.^2./2,j))./factorial(j);
end
d0 = (power(b.^2./2,M-1))./factorial(M-1);
f0 = 1;

fk = f0;
dk = d0;
hk = h0;
q =f0.*h0;
for i=1:iterations
    fk = ((a.^2./2).*fk)./i;
    dk = ((b.^2./2).*dk)./(i+M-1);
    hk = hk + dk;
    q = hk.*fk + q;
end
z = q;

```

Com hem comentat abans, el SETUP del sistema a simular en el segon experiment, és molt semblant al del primer experiment, per tant també conté un Loop de fibra + AO. Això és un problema a l'hora d'utilitzar la funció òptima perquè aquesta depèn del soroll, i en cada tram d'amplificació (o en cada Loop) la densitat espectral del soroll ASE canvia. D'aquesta manera, els resultats d'aquest segon experiment s'han obtingut a partir de truncar el paràmetre del soroll per algun valor que doni bons resultats. També s'ha tingut que sumar un petit offset al senyal d'entrada de la funció òptima, ja que el VPI entra en conflicte amb el valor que retorna el MATLAB quan el senyal presenta amplitud propera al zero, degut a la imprecisió d'ajust del paràmetre del soroll. Aleshores, és fàcil deduir que els resultats que obtindrem no

seran els òptims, però segurament milloraran el cas de l'arrel quadrada si s'ajusten correctament els paràmetres.

El SETUP d'aquest segon experiment es mostra en l'esquemàtic VPI de la figura 14.40. Es pot observar el Loop de fibra òptica + amplificació òptica, així com els dos ramals que s'utilitzen en recepció; un per la funció òptima i un altre per l'arrel quadrada. En el ramal de la funció òptima es suma un offset, com hem comentat anteriorment, i també s'observa que depèn de tres constants; la varianza del soroll ASE, el nombre de modes espectrals i el paràmetre d'ajust. Immediatament després es realitza l'equalització electrònica amb DFE i s'estima la BER per ambdós ramals.

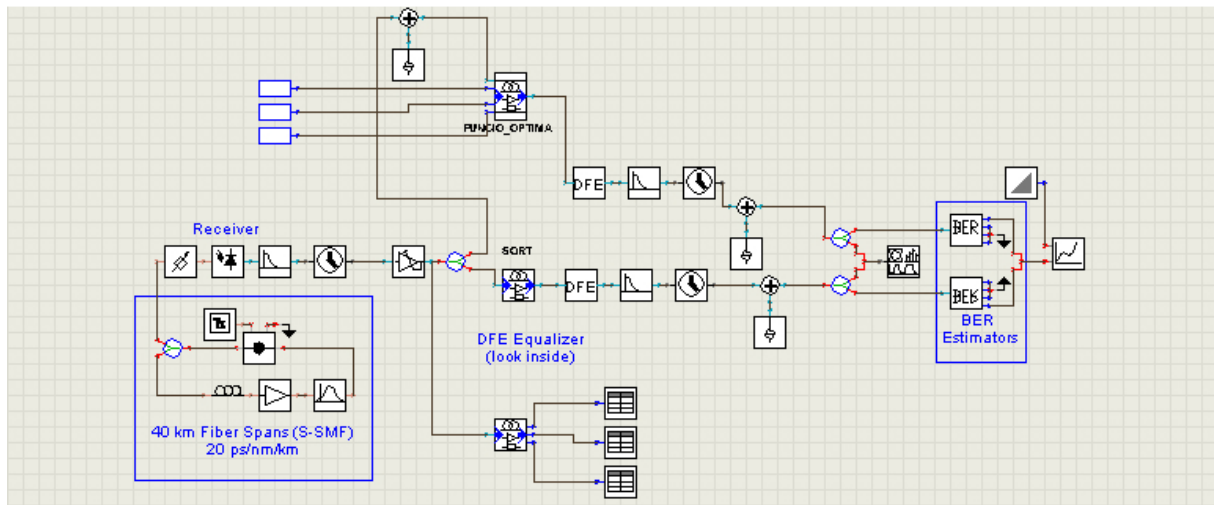


Figura 14.40. Schematic del VPI de l'experiment 2

### Experiment 2 – Primera part.

Possiblement, la part més complicada d'aquest experiment va ser ajustar el conjunt de graus de llibertat. Vaig començar fixant els paràmetres de la funció òptima amb els següents valors:

- Funció òptima:
  - Paràmetre modes:  $n_e = 10$
  - Paràmetre soroll: 0.005
  - Paràmetre d'ajust: 5
  - Offset: 0.005

El paràmetre modal, pot ser, és el més senzill de fixar, ja que estem utilitzant un filtre òptic Gaussià de quart ordre amb ample de banda  $4 \cdot R_b$  i un filtre elèctric integrador amb ample de banda  $0.8 \cdot R_b$ , que donen com a resultat  $n_e = 10$  modes espectrals. El paràmetre d'ajust l'hem escollit seguint els criteris que vam veure en aquest capítol, i l'hem fixat a  $\delta = 5$ . En la figura 14.41 es mostra el resultat d'aquesta simulació. Com es pot veure, la millora és pràcticament insignificant amb aquests paràmetres, i només millora per una distància de 200 Km.

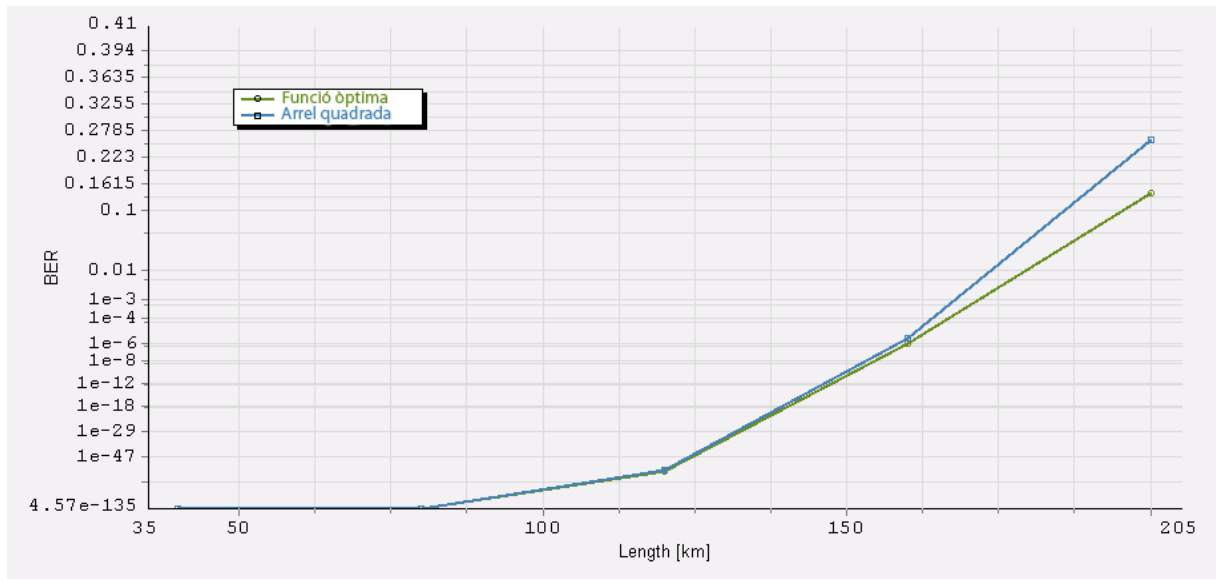


Figura 14.41. Comparació de la BER en funció de la distància pel cas d'utilitzar la funció òptima i l'arrel quadrada

Les figures 14.42 i 14.43 mostren els diagrames d'ull obtinguts amb els paràmetres anteriors per 200 Km, pels casos funció òptima i arrel quadrada, respectivament. Es pot veure amb prou claredat que els diagrames d'ull són idèntics.

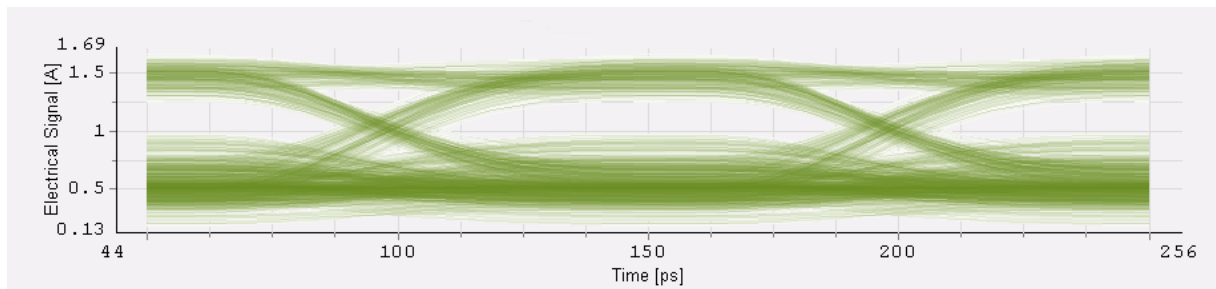


Figura 14.42. Diagrama d'ull a 200 Km de la funció òptima de Hasting-Dillard per  $n=10$ ,  $\gamma=0.005$  i  $\delta=5$  i un offset a l'entrada de 0.005

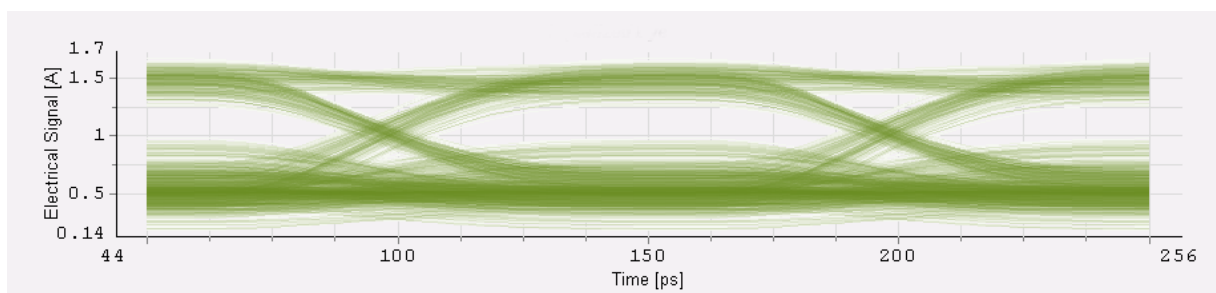


Figura 14.43. Diagrama d'ull a 200 Km de l'arrel quadrada

### Experiment 2 – Segona part.

La segona part de l'experiment va consistir en variar aquests paràmetres de la funció òptima de la següent manera:

- Funció òptima:
  - Paràmetre modes:  $n_e = 10$
  - Paràmetre soroll: 0.05
  - Paràmetre d'ajust: 5
  - Offset: 0.5

I en aquest cas, es van millorar els resultats tal i com mostra la figura 14.44, on es representa la BER vers la distància. Per una distància de 160 Km, la BER obtinguda amb la funció òptima millora amb respecte l'arrel quadrada.

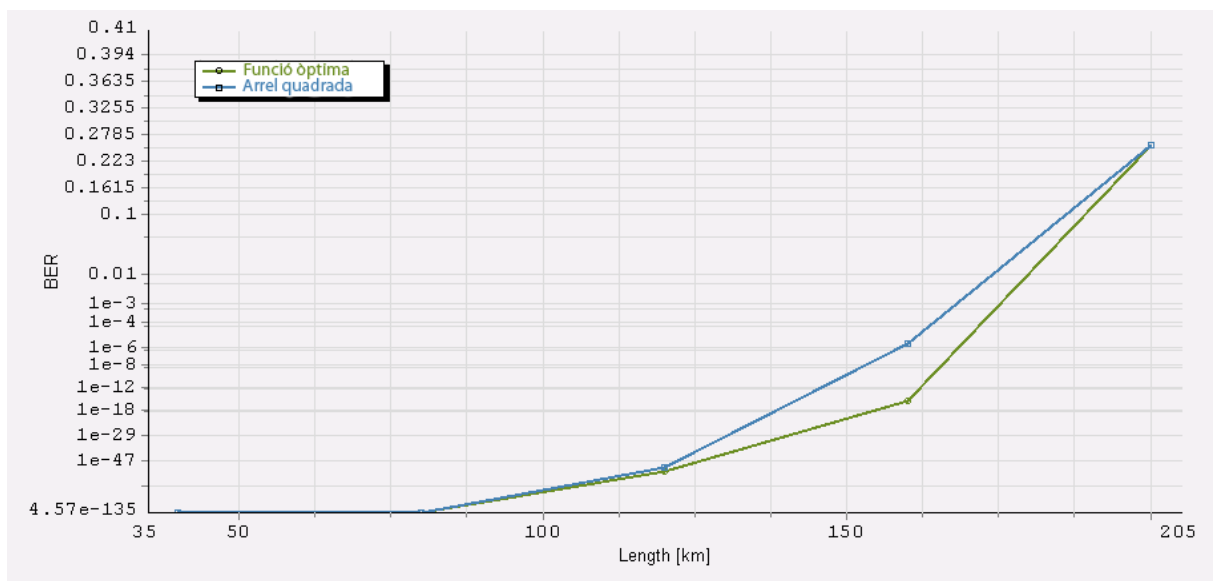


Figura 14.44. Comparació de la BER en funció de la distància pel cas d'utilitzar la funció òptima i l'arrel quadrada

Els diagrames d'ull, per una distància de 200 Km, per aquesta segona part de l'experiment es representen en les figures 14.45 i 14.46. Pràcticament no es nota la diferència perquè com es pot veure en la gràfica anterior (figura 14.44), la BER a 200 Km és pràcticament idèntica.

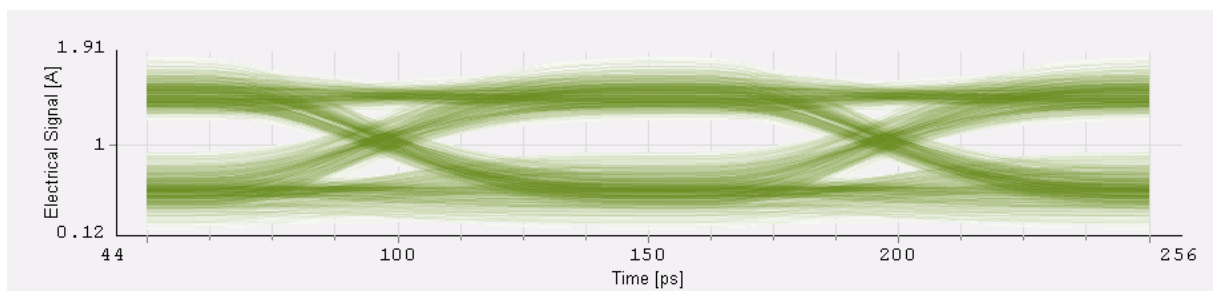


Figura 14.45. Diagrama d'ull a 200 Km de la funció òptima de Hasting-Dillard per  $n=10$ ,  $\gamma=0.05$  i  $\delta=5$  i un offset a l'entrada de 0.5

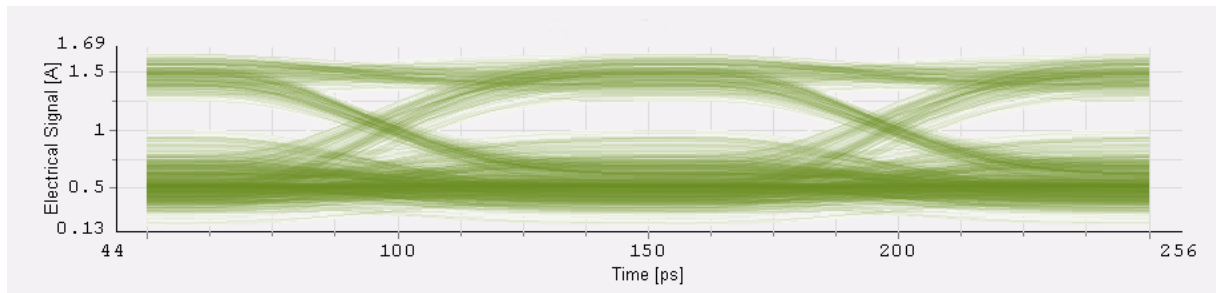


Figura 14.46. Diagrama d'ull a 200Km de l'arrel quadrada

### 14.4.4.3 Experiment 3

Evidentment, el mètode utilitzat en el segon experiment no és el mètode més indicat a l'hora d'ajustar els paràmetres de la funció òptima. En aquest sentit, en el tercer experiment, hem eliminat el Loop de fibra + amplificador òptic per poder trobar els paràmetres del canal a partir del mètode dels moments MoM. En la figura 14.47 es representa el model esquemàtic VPI que s'ha utilitzat en el tercer experiment. Noteu que hem eliminat el tram de fibra òptica i l'hem modelat per un atenuador. Amb aquest fet, podem obtenir el diagrama d'ull amb una distància de 0 km sense dispersió acumulada, i com que no existeix dispersió en el sistema podem eliminar l'equalitzador DFE. L'amplificador òptic serà la principal font de soroll, ja que el fotodetector no introdueix ni soroll shot, ni soroll tèrmic. En aquest tercer experiment, noteu que no hem utilitzat cap offset previ a la funció òptima, això és perquè en aquest cas ajustem perfectament els paràmetres de canal.

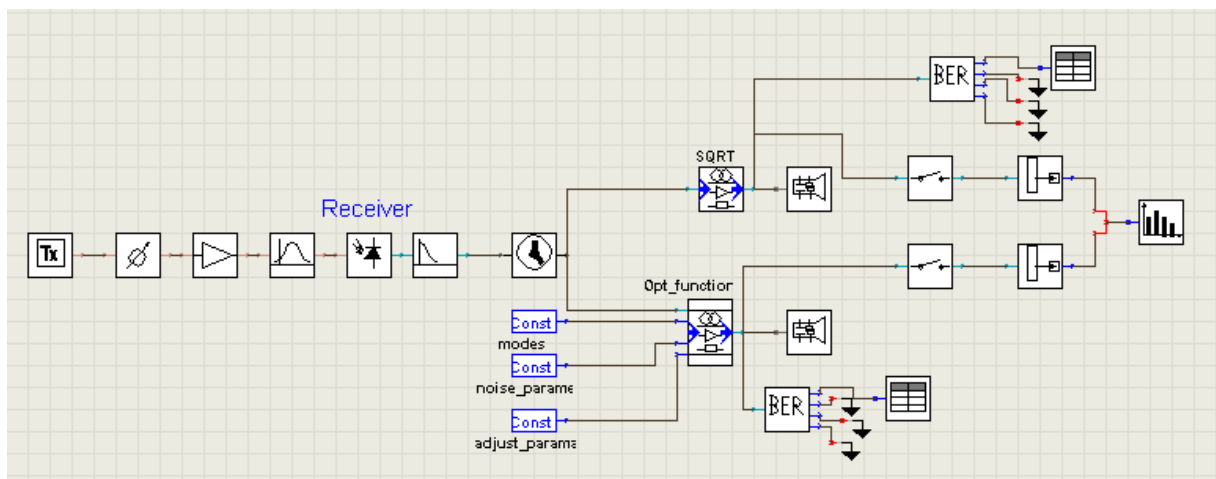


Figura 14.47. Schematic VPI del tercer experiment

Respecte als paràmetres del sistema, hem fet servir els mateixos que vam veure a l'experiment 1, tot i així hem realitzat alguns canvis com són: Relació d'extinció de 200 dB (l'aproximem per infinita), potència d'emissió del làser de 0.5 dBm, Atenuador ideal amb atenuació de 25 dB, amplificador òptic amb guany 26.5 dB i figura de soroll de 5dB, i en l'extrem del receptor un filtre òptic Gaussià de 7 ordre.

Fent servir el SETUP de la figura 14.47, s'han calculat els moments estadístics de les mostres del senyal pel bit "0" i pel bit "1", per poder estimar els paràmetres del canal fent servir el mètode dels moments. En la taula 14.6 apareixen els resultats de la simulació d'aquest sistema.

bit	mitja	varianza	Moment 3é ordre
0	7,14E-06	8,49E-12	2,44E-17
1	1,59E-03	4,11E-09	6,57E-15

Taula 14.6. Resultats MoM amb el simulador VPI

I si fem servir les fórmules vistes en 14.4.3 (expressions (14.63) i (14.64)), s'obté que:

$$\begin{aligned}\bar{N}_0 &= 1,30 \cdot 10^{-6} \\ \overline{pM} &= 5,46\end{aligned}$$

I, com es pot veure, el nombre de modes espectrals s'aproxima bastant a 5 que seria el cas teòric (si  $p = 2$ ,  $2M = B_o/B_e = 5$ ). Per tant, els paràmetres de la funció òptima que vam utilitzar van ser:

- Funció òptima:
  - Paràmetre modes:  $n_e = 10$
  - Paràmetre soroll: 0.000805
  - Paràmetre d'ajust: 5

El paràmetre de soroll es deriva directament de la densitat espectral de la forma:

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}} = 0,000805 \quad (14.65)$$

El nombre de modes de la funció òptima l'he fixat a  $n_e = 10$  ja que aquesta només soporta nombres enters. L'algoritme que implementa la funció òptima de Hasting-Dillard només suporta nombre enters pel paràmetre modal  $n_e$  i pel seu valor meitat  $n_e/2 = pM$ .

Per comprovar el correcte funcionament del mètode dels moments i de la funció òptima, vam analitzar les distribucions de la funció òptima i de l'arrel quadrada pels dos estats lògics ("0" i "1"). Els histogrames de les figures 14.48 i 14.49 mostren les distribucions de sortida de la funció arrel quadrada (color blau) i la funció òptima de Hasting-Dillard (color taronja) obtingudes pel bit "0" i "1", respectivament. Si observem els histogrames de la figura 14.48, veiem que la funció òptima es capaç de Gaussianitzar l'estadística molt millor del que fa l'arrel quadrada. Observeu que hem superposat una Gaussiana ideal sobre la distribució de sortida de la funció òptima i que s'ajusta bastant bé. En canvi, la distribució de sortida de l'arrel quadrada és asimètrica i no conserva la varianza.

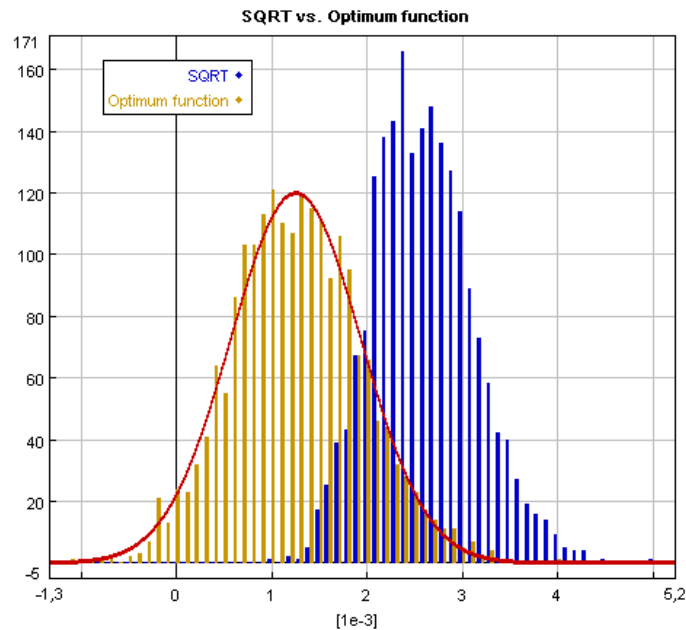


Figura 14.48. Histograma del bit "0" posterior a la funció òptima de Hasting-Dillard i l'arrel quadrada

Els histogrames pel bit "1" que mostren la figura 14.49, mostren que tant la funció òptima com l'arrel quadrada tenen un comportament molt semblant, i només es diferencien per una petita desviació en mitja. Noteu que la Gaussiana ideal (color vermell) sobre la distribució de sortida de la funció òptima s'ajusta bastant bé.

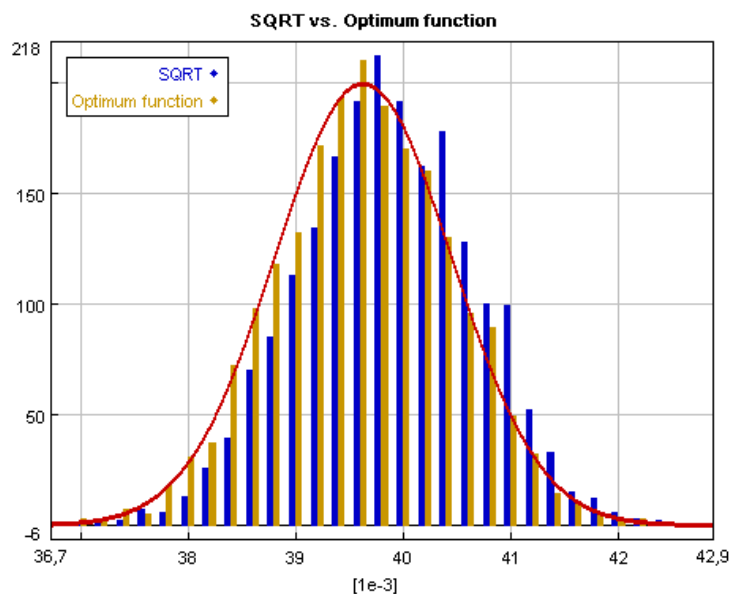


Figura 14.49. Histograma del bit "1" posterior a la funció òptima de Hasting-Dillard i l'arrel quadrada

Una vegada hem ajustat els paràmetres de la funció òptima, podem buscar els diagrames d'ull a 0 km i comparar-los amb els casos arrel quadrada i sense utilitzar cap funció. En aquest sentit, en les figures 14.50, 14.51 i 14.52 es mostren els diagrames d'ull a 0 km obtinguts pels casos sense funció, amb arrel quadrada i amb la funció òptima, respectivament. Noteu com en la figura 14.50 el soroll depèn del senyal ja que és Chi quadrat, així el bit "1" té una varianza molt més gran que el bit "0". Els diagrames d'ull de les



figures 14.51 i 14.52 són pràcticament idèntics i només s'aprecia alguna diferència en el bit "0", ja que si s'observa amb detall la varianza és més gran utilitzant la funció òptima amb respecte l'arrel quadrada. Això últim és evident, ja que si observem els histogrames de la figura 14.48 podem comprovar que la funció òptima té una varianza més gran que l'arrel quadrada. Comparant la varianza dels dos bits per les dues funcions, amb la funció òptima s'obté una varianza més constant entre el bit "0" i el bit "1". Una altre diferència entre els diagrames d'ull de l'arrel quadrada i la funció òptima és que en el bit "0" la funció òptima presenta algunes transicions negatives, en canvi amb l'arrel quadrada això no passa. Noteu que el punt de tall de les transicions del "0" al "1" i viceversa, no es fa a la meitat degut a que en el modulador hem modulat la intensitat (potència) enlloc de l'amplitud del camp elèctric. A més a més, el filtrat elèctric en el receptor és molt estret (8 GHz), per tant hauríem d'augmentar l'ample de banda del filtre de post-detecció (per exemple a 20 GHz) abans d'entrar en la funció òptima, i filtrar més selectivament el senyal a la sortida d'aquesta.

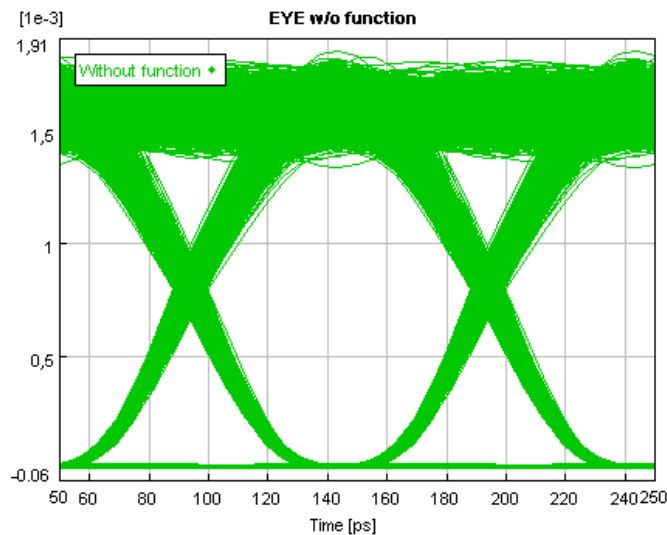


Figura 14.50. Diagrama d'ull a 0 km en un sistema IM/DD i sense utilitzar cap funció

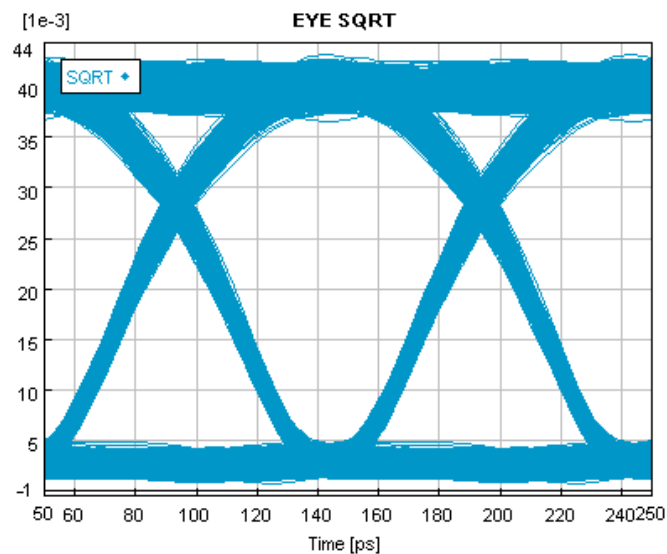


Figura 14.51. Diagrama d'ull a 0 km quan utilitzem la funció arrel quadrada

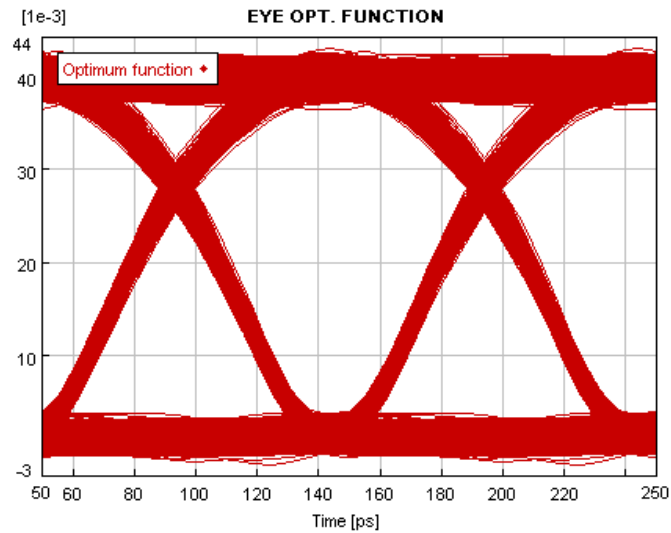


Figura 14.52. Diagrama d'ull a 0 km quan utilitzem la funció òptima de Hasting-Dillard

En la figura 14.53 hem representat un altre conjunt dels tres diagrames d'ull, però disminuint la potència d'emissió del làser de 0.5 dBm a -5dBm, d'aquesta manera apropem més els dos bits i tenim una probabilitat d'error més propera a la que realment tenim en els sistemes òptics. Els comentaris sobre els diagrames d'ull són els mateixos que hem fet abans.

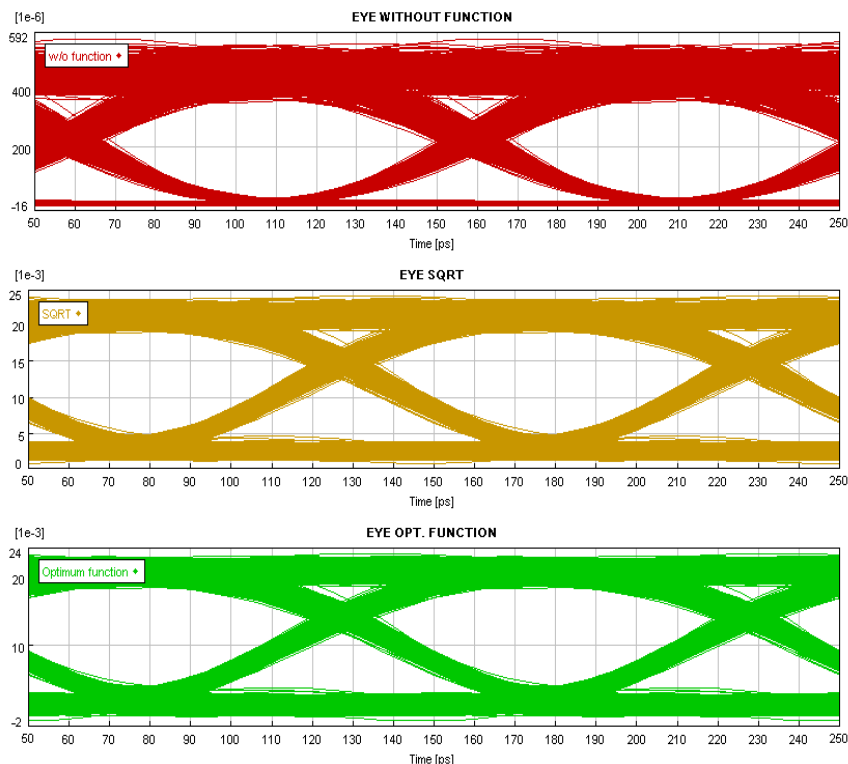


Figura 14.53. Comparació dels diagrames d'ull a 0 km i potència d'emissió de -5dBm

Finalment, les figures 14.54 i 14.55 mostren els diagrames d'ull multinivell (4-PAM) pel cas IM/DD (modulació de potència òptica, és a dir sense utilitzar cap funció), arrel quadrada i funció òptima. En el modulador, en el cas IM/DD hem modulats la potència òptica i en els casos SQRT i funció òptima hem modulats l'amplitud del camp. Per fer això últim hem elevat

al quadrat el senyal modulador i hem utilitzat un modulador d'intensitat convencional. L'esquema transmissor es basava en dos generadors de seqüència pseudo-aleatòria PRBS independents i dos conformadors NRZ amb els que generàvem els quatre nivells necessaris per injectar al modulador. El canal el vam modelar d'una manera molt semblant a la que vam veure en la figura 14.47, és a dir fent servir un atenuador i un preamplificador. En recepció, i només en els casos AM-SQRT i AM-optimum function, vam utilitzar un filtre Gaussià de 5é ordre amb 40 GHz d'ample de banda, i un filtre elèctric integrador amb un ample de banda de 20 GHz. Amb aquests amplitudes de banda garantíem una mínima distorsió sobre el senyal i com a conseqüència les transicions entre els diferents nivells tallaven en els punt intermitjos. Per suavitzar el diagrama d'ull, vam utilitzar un filtre integrador de 8GHz a la sortida de la funció òptima i l'arrel quadrada.

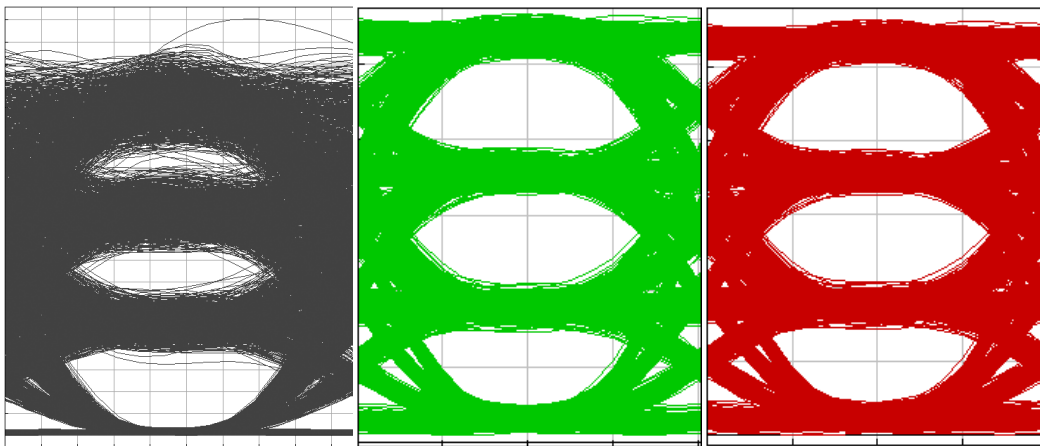


Figura 14.54. Diagrames d'ull multinivell a 0 Km utilitzant un preamplificador amb 25 dB de guany pels casos IM-DD (color gris), AM-SQRT (color verd) i AM funció òptima amb  $n=4$ ,  $\delta=5$  i  $\gamma=0.001$  (color vermell)

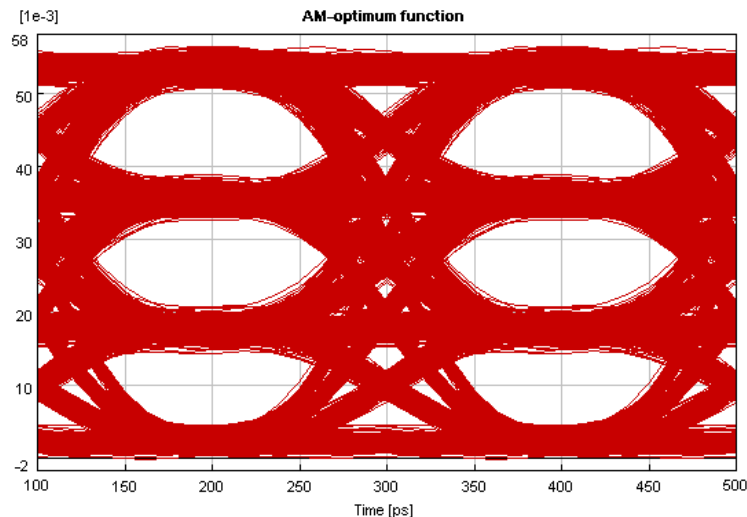


Figura 14.55. Diagrama d'ull multinivell a 0 Km de la funció òptima utilitzant un preamplificador amb 25 dB de guany. Funció òptima utilitzada  $n=2$ ,  $\delta=5$  i  $\gamma=0.001$

#### 14.4.5 Anàlisi receptor MLSE i funció òptima de Hasting-Dillard

Un altre anàlisi que podem realitzar és estudiar el comportament de la BER de la funció òptima de Hasting-Dillard en un sistema amb equalització MLSE i comparar els resultats que s'obtenen amb l'arrel quadrada i l'arrel cúbica. Afortunadament, disposem

d'un programa en MATLAB que implementa tot un sistema IM/DD, on en el receptor s'implementa un equalitzador MLSE a partir de l'algoritme de Viterbi. El programa en qüestió carrega uns fitxers on es troben les mostres del senyal rebut immediatament després del quantificador i la seqüència PRBS transmesa, i amb això es realitza el còmput de la BER fent servir l'algoritme MLSE. Les mostres del senyal rebut en l'extrem del receptor es van obtenir amb un simulador de sistemes òptics, en concret l'OPTSIM. Aquestes mostres van ser obtingudes per diferents distàncies entre l'emissor i el receptor (400, 700 i 1040 Km) i per diferents paràmetres del sistema (relació d'extinció, amplex de banda dels filtres, OSNR, etc.). Naturalment, no farem un anàlisi per cada un dels fitxers o repositoris, sinó que escollirem un d'ells i compararem els resultats obtinguts. En concret, hem escollit el fitxer :

`"elsig_optsim_400km_15dB_4spb_er12.dat"`

Per generar aquest fitxer es van fer servir els següents paràmetres de sistema:

- Bit-rate: 10.7 Gbit/s
- Transmissor
  - Modulador OOK amb polsos conformats amb formes d'ona rectangulars NRZ i filtrades amb un filtre de Bessel d'ordre 5 amb ample de banda 7.5 GHz.
  - Relació d'extinció: 12 dB.
  - Grau seqüència PRBS: 20
- Fibra òptica
  - Modelada amb un FBG (Fiber Bragg Grating) ideal amb dispersió  $D \cdot L$ , amb  $D = 17$  ps/nm/km i  $L = 400$  km.
- Receptor
  - Filtre òptic Super-Gaussian de segon ordre amb ample de banda de 35 GHz.
  - Filtre de post-detecció (elèctric) de Bessel de 5é ordre amb ample de banda de 7.5 GHz.
  - Mostreig elèctric amb 4 mostres per bit.

En el programa en codi MATLAB que implementa l'algoritme MLSE, també s'han de fixar alguns paràmetres de sistema, en concret tots els referents a l'equalitzador MLSE. Alguns paràmetres que vam utilitzar són:

- Nombre de bits considerats per l'algoritme MLSE:  $2^{20} - 1$
- Nombre de mostres per bit utilitzades per l'algoritme MLSE: 2
- Nombre d'estats en l'algoritme de Viterbi: 128
- Es fa servir la mètrica simplificada; és a dir la mètrica Gaussiana estacionaria o euclidiana.
- Nombre d'execucions : 32

Amb aquests paràmetres vam calcular la BER pels casos arrel quadrada i arrel cúbica. Els resultats es mostren en la taula 14.7. Es pot comprovar que, en aquest cas, l'arrel quadrada dona millor rendiment.

BER SQRT	BER Arrel cúbica
1,24E-05	1,72E-05

Taula 14.7. BER amb MLSE per l'arrel quadrada i l'arrel cúbica

Els fitxers de dades que hem utilitzat en el simulador no els hem generat nosaltres directament, per tant desconexim alguns paràmetres que són vitals a l'hora de calibrar la funció òptima, com són  $n = 2pM$  (nombre de modes espectrals) i  $N_0$  (densitat espectral del soroll ASE).

Per estimar aquests paràmetres, en aquest cas, no podem utilitzar el mètode dels moments, ja que no disposem de dues seqüències independents (una pel bit "0" i una altra pel bit "1") prou grans que ens permetin utilitzar les fórmules que vam veure en 14.4.3. Així que l'única manera de trobar els valors òptims serà provant. El nombre de modes per estat de polarització  $2M$  (veure expressió (7.14)) és pot estimar fàcilment fent servir la relació entre els amples de banda dels filtres òptic i elèctric. En el nostre cas, amb els paràmetres de sistema que hem fet servir,  $2M = 4.67$  i  $n = 2pM = 9.34$  (nombre de graus de llibertat totals incloent els dos estats de polarització  $p = 2$ ). Tot i així, vam veure que la funció òptima basada en les aproximacions de Hasting i Dillard només suporta nombres enters (o naturals) per definir el paràmetre modal  $n_e$  i el seu valor meitat  $n_e/2 = pM$ , de tal manera que haurem de truncar-lo. El truncarem pels dos nombres enters més propers, és a dir  $2M = 4$  i  $2M = 5$  o el que és el mateix  $n_e = 8$  i  $n_e = 10$  respectivament, i compararem els resultats.

Per trobar el paràmetre de soroll òptim  $\gamma$  de la funció, vam haver de fer un escombrat de la BER amb MLSE en funció d'aquest paràmetre, i ens vam quedar amb el valor tal que minimitzava la BER. Amb respecte el paràmetre d'ajust  $\delta$ , vam escollir  $\delta = 5$ , ja que com vam veure en 14.4.2.1 aquest valor minimitza la BER i aproxima millor l'estadística a una Gaussiana. Resumint, els paràmetres de la funció òptima de Hasting-Dillard  $g(y; \gamma, \delta, n_e)$  que vam utilitzar van ser:

- Paràmetre d'ajust:  $\delta = 5$
- Paràmetre modal:  $n_e = 8$  ó  $10$
- Paràmetre del soroll  $\gamma$ : Es desconeix.

La gràfica de la figura 14.56 mostra el logaritme en base 10 de la BER a la sortida de l'equalitzador MLSE i en funció del paràmetre del soroll de la funció òptima. En aquesta gràfica es representen els dos casos de funció òptima definits pels paràmetres modals  $2M = 4$  o  $n_e = 8$  (color violeta) i  $2M = 5$  o  $n_e = 10$  (color blau), així com els casos arrel quadrada (color vermell) i arrel cúbica (color verd). Evidentment les funcions arrel quadrada i arrel cúbica no depenen del paràmetre del soroll, per aquest motiu la BER es constant. Es

pot observar que si escollim correctament el paràmetre del soroll de la funció òptima s'aconsegueix un major rendiment en comparació amb l'arrel quadrada i l'arrel cúbica, tot i així aquesta millora és relativament petita. Si comparem les dues funcions òptimes, podem dir que la funció òptima amb paràmetre modal  $2M = 4$  proporciona un major rendiment que la funció òptima amb  $2M = 5$ , encara que el valor mínim en BER que assoleixen ambdues funcions és exactament el mateix.

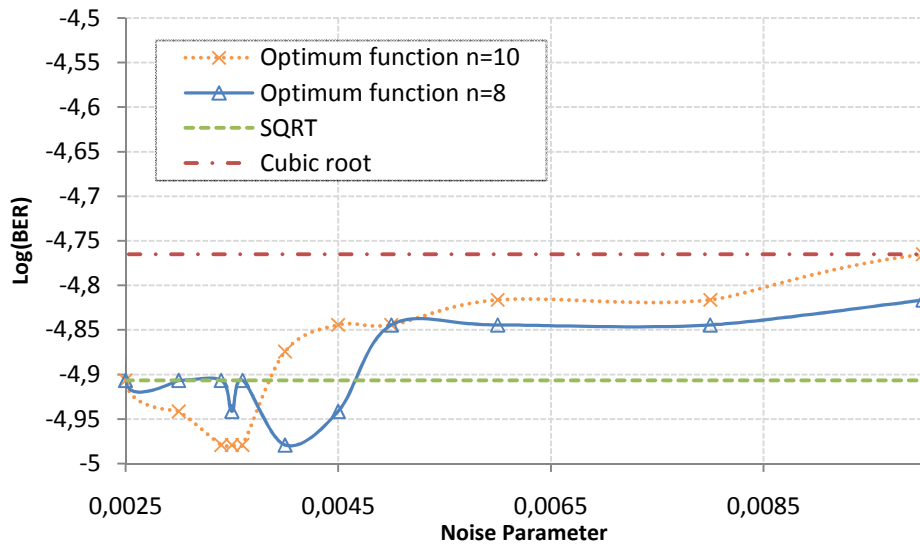


Figura 14.56. Logaritme de la BER amb MLSE en funció del paràmetre del soroll de la funció òptima de Hasting-Dillard amb  $n=10$ ,  $n=8$  i  $\delta=5$

Si ens fixem en la funció òptima amb paràmetre modal  $n_e = 8$  i paràmetre del soroll  $\gamma = 0.004$ ,  $g(y; \gamma = 0.004, \delta = 5, n_e = 8)$ , i fem una comparativa entre la BER resultant i els casos arrel quadrada i arrel cúbica, es pot comprovar que la funció òptima és la millor, tal i com mostra la taula 14.8.

BER SQRT	BER Arrel cúbica	Funció òptima 2M=4
1,24E-05	1,72E-05	1,05E-05

Taula 14.8. BER amb MLSE per l'arrel quadrada, l'arrel cúbica i la funció òptima

Una vegada coneixem el paràmetre de soroll òptim de la funció òptima tal que minimitza la BER, podem estudiar el comportament de la funció òptima variant alguns paràmetres de l'algoritme de Viterbi que depenguin de la complexitat, com per exemple el nombre d'estats de Trellis, i comparar els resultats amb els casos arrel quadrada i arrel cúbica. En aquest sentit, en la figura 14.57 apareix el logaritme de la BER en funció del nombre d'estats en l'algoritme de Viterbi pels tres casos anteriors; funció òptima amb  $2M = 4$  ( $n_e = 8$ ), arrel quadrada i arrel cúbica. Es pot observar que la funció òptima amb els paràmetres abans descrits dona sempre un major rendiment en comparació amb l'arrel quadrada i l'arrel cúbica. Si escollim 512 estats de Trellis, el simulador MLSE retorna una BER igual a zero pel cas de la funció òptima, mentre que pels casos arrel quadrada i arrel cúbica retorna  $9,54 \cdot 10^{-7}$ .

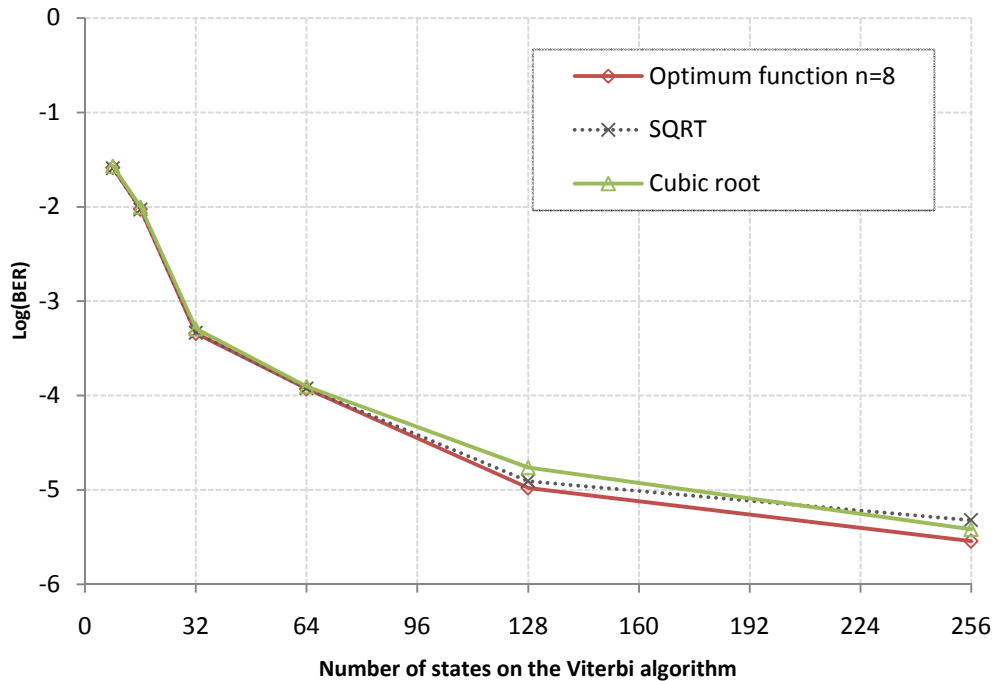


Figura 14.57. Logaritme de la BER amb MLSE en funció del nombre d'estats de Trellis i els casos funció òptima de Hasting-Dillard amb  $n=8$ ,  $\gamma=0.004$  i  $\delta=5$ , arrel quadrada i arrel cúbica

## 14.5 Conclusions de la funció Hasting-Dillard

En aquest capítol, hem demostrat que mitjançant el mètode de la inversa no es possible trobar una funció òptima que ens permeti solucionar els tres principals problemes que tenim: Estadística no Gaussiana, No linealitat del sistema i varianza dependent del senyal.

Hem vist que la funció òptima depèn de tres paràmetres, i només és òptima si aquests paràmetres de la funció coincideixen amb els paràmetres del canal i/o senyal. Els paràmetres de la funció òptima són: el paràmetre de soroll  $\gamma$  (ha de coincidir amb la desviació estàndard  $\sigma$  del soroll ASE), el paràmetre d'ajust  $\delta$  (ha de coincidir amb el paràmetre de no centralitat  $\lambda$  del senyal) i el paràmetre modal  $n_e$  (ha de coincidir amb el nombre de graus de llibertat  $n$  de la distribució Chi quadrada). D'aquests tres paràmetres, dos d'ells són fàcils d'estimar mitjançant el mètode dels moments, aquests són  $\gamma$  i  $n_e$ . El paràmetre d'ajust  $\delta$  no es pot estimar a priori ja que canvia segons els símbol transmès. Per tant el vam haver de truncar o fixar per un valor idoni tal que minimitzes l'error en la transformació. Com que el paràmetre d'ajust  $\delta$  en general no coincideix amb el paràmetre de no centralitat del bit "1",  $\lambda_1$ , ni del bit "0",  $\lambda_0$ , la funció deixa de ser òptima. I si coincidís amb algun d'ells ( $\delta = \lambda_1$  o  $\delta = \lambda_0$ ) només seria òptima per un dels dos casos, mai pels dos.

Tot i així, agafant un valor idoni del paràmetre d'ajust  $\delta$  (generalment petit) i com que totes les funcions òptimes evolucionen d'una manera molt semblant a l'arrel quadrada, es poden aconseguir millorar els resultats de qualsevol altre funció del tipus  $y^\alpha$  amb  $0 < \alpha \leq$

1. Noteu que pràcticament totes les funcions òptimes tenen la mateixa pendent que l'arrel quadrada per valors d'abscisses grans (llunyans al zero).

En aquest capítol hem estudiat la funció òptima basada en les aproximacions de Hasting i Dillard. Hem fet servir zero iteracions de l'algoritme de Dillard en l'apartat 14.3 i moltes iteracions en l'apartat 14.4 (generalment hem utilitzat 100 iteracions, tot i que en casos puntuals les hem incrementat fins a 10.000). La funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions no té el paràmetre d'ajust, i per tant no es pot estudiar en funció d'aquest.

La funció òptima de Hasting-Dillard amb iteracions il·limitades es bastant potent per recuperar l'estadística Gaussiana si s'escullen correctament els paràmetres de que depèn. Durant aquest capítol hem vist que amb la funció òptima s'aconsegueixen distribucions pràcticament normals per tot  $s/\sigma$  (arrel quadrada del paràmetre de no centralitat), i així ho han demostrat els diversos tests d'hipòtesis que hem vingut utilitzant, com també els diagrames de probabilitat normal, les gràfiques dels paràmetres d'asimetria (Skewness) i curtosis, i els anàlisis de la BER. En els anàlisis de BER i Skewness s'ha demostrat que s'aconsegueix màxima Gaussianitat amb un paràmetre d'ajust  $\delta \sim 5$ .

Malauradament, la funció òptima no aconsegueix linealitzar el sistema per tot  $s/\sigma$ . De fet, en les figures on es representa el moment de primer ordre es pot observar que la tendència és lineal per valors de  $s/\sigma$  grans. En canvi, per valors de  $s/\sigma$  propers al zero la mitja de la funció òptima presenta una zona de no linealitat. L'arrel quadrada té un comportament molt semblant en aquest sentit. Hem demostrat que la mitja de les funcions òptimes normalitzades amb qualsevol valor del paràmetre d'ajust  $\delta$  convergeixen en la mitja ideal (o mitja objectiu) per valors  $s/\sigma \gg 0$ . S'observa també que la mitja de la funció òptima normalitzada amb paràmetre  $\delta = 5$  convergeix més ràpidament a la mitja ideal que pels paràmetres  $\delta = 0$  i  $\delta = 2.5$ . Com que sabem que l'arrel quadrada linealitzava bastant bé el sistema, com es va veure en [1-3], es un resultat satisfactori que la funció òptima convergeixi a aquesta.

En els estudis de la varianza de la funció òptima, s'ha vist que no és possible arribar al cas de màxima estacionarietat, és a dir amb varianza constant per tot valor del paràmetre de no centralitat. Tot i així, amb la funció òptima de Hasting-Dillard hem aconseguit millorar el comportament en varianza de l'arrel quadrada i arrel cúbica. El millor rendiment en varianza s'ha aconseguit amb  $\delta = 5$ .

Mitjançant simulacions estadístiques de Monte Carlo (recompte d'errors) hem demostrat que la funció òptima de Hasting-Dillard permet un major rendiment en termes de BER en comparació amb l'arrel quadrada i l'arrel cúbica per sistemes sense dispersió i utilitzant l'aproximació Gaussiana per calcular el llindar.

També hem realitzat proves amb el simulador VPI amb el qual hem implementat la funció òptima de Hasting-Dillard. Amb el simulador es va demostrar que la funció òptima millora el rendiment de l'arrel quadrada, tal i com mostren les gràfiques de BER en funció de



la distància i els diagrames d'ull, i permet que els equalitzadors DFE's treballin amb un canal més lineal i per tant que puguin treballar més òptimament i millorar la BER. Per calibrar la funció òptima de Hasting-Dillard, és a dir per estimar el paràmetres de canal, vam utilitzar el mètode dels moments juntament amb dos seqüències d'entrenament. Amb aquest mecanisme juntament amb la funció òptima vam aconseguir fer més Gaussià i lineal el sistema tal i com denoten els histogrames i els diagrames d'ull multinivell (4-PAM).

Amb el simulador MLSE i utilitzant la mètrica simplificada o euclidiana vam demostrar que la funció òptima, escollint correctament els seus paràmetres, millora el rendiment en BER amb respecte l'arrel quadrada i l'arrel cúbica. La millora en rendiment augmenta en funció de la complexitat.

Finalment, els resultats han demostrat que la funció òptima basada en les aproximacions de Hasting i Dillard és capaç de reduir la distorsió harmònica produïda per la llei quadràtica del fotodetector i com a conseqüència patir una menor penalització en ISI que amb el cas de l'arrel quadrada o l'arrel cúbica. Aquest fet, juntament amb la major linealització del sistema, permet reduir la BER i/o augmentar la velocitat o distància de transmissió.



# 15 Aproximació de la funció òptima per interpolació de polinomis de Chebyshev

Com alternativa a la funció òptima de Hasting-Dillard, en aquest capítol derivarem l'expressió de la funció òptima basada en interpolació de polinomis de Chebyshev, a partir de les aproximacions de la funció error inversa. Sabem que la funció error  $erf(y)$  té un lligam molt fort amb la funció de distribució de probabilitat CDF d'una v.a. normal. Existeixen molts estudis basats en aproximacions de la funció error inversa, entre ells els basats en interpolació de polinomis de Chebyshev. Podríem aprofitar-nos d'aquests estudis i fer una transformació dels eixos per, juntament amb el mètode de la inversa, trobar la funció òptima basada en polinomis de Chebyshev [39-40].

## 15.1 La funció error

La funció error es defineix de la següent manera:

$$x = erf(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt \quad (15.1)$$

La funció error és una funció imparell ( $erf(y) = -erf(-y)$ ), i també es pot parlar de la funció error complementari:

$$erfc(y) = 1 - erf(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (15.2)$$

La funció error inversa ve definida com:

$$y = \text{inverf}(x) \quad (15.3)$$

Al igual que passava amb la funció de distribució de probabilitat inversa d'una v.a. normal, la funció  $\text{inverf}(x)$  s'ha d'aproximar. Una de les tècniques que s'utilitzen es per interpolació amb polinomis de Chebyshev.

La relació que existeix entre la funció de distribució de probabilitat normal i la funció error és:

$$F(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf} \left( \frac{y - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) = 1 - \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \frac{y - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (15.4)$$

## 15.2 Polinomis de Chebyshev

Els polinomis de Chebyshev (veure [31]) de primera espècie són un sistema de polinomis ortogonals  $T_n(x)$  de grau  $[T_n(x)] = n$ , en l'interval  $-1 \leq x \leq 1$ , amb respecte la funció pes  $w(x)$ , de tal manera que s'acompleix:

$$\int_{-1}^1 w(x) T_n(x) T_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m; n, m = 0, 1, 2, \dots) \quad (15.5)$$

La funció pes  $w(x)$  ( $w(x) \geq 0$ ) determina al sistema de polinomis  $T_n(x)$  una constant per cada un d'aquests polinomis ortogonals. Aquesta constant ve definida per:

$$\int_{-1}^1 w(x) T_n^2(x) dx = h_n \quad T_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \dots \quad (15.6)$$

Per norma general, tots els polinomis  $f_n(x)$  que formin una base ortogonal (ja siguin els de Chebyshev, els de Jacobi, Legendre, Hermite, etc..), han de satisfer un conjunt de propietats, les més importants són:

- Equació Diferencial:

$$g_2(x) f_n'' + g_1(x) f_n' + a_n f_n = 0 \quad (15.7)$$

on  $g_2(x)$  i  $g_1(x)$  són independents de  $n$  i  $a_n$  és una constant dependent només de  $n$ .

- Fórmula de recurrència:

$$f_{n+1} = (a_n + x b_n) f_n - c_n f_{n-1} \quad (15.8)$$

on

$$b_n = \frac{k_{n-1}}{k_n}, \quad a_n = b_n \left( \frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right), \quad c_n = \frac{k_{n+1} k_{n-1} h_n}{k_n^2 h_{n-1}} \quad (15.9)$$

- Fórmula de Rodrigues

$$f_n = \frac{1}{e_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{w(x)[g(x)]^n\} \quad (15.10)$$

on  $g(x)$  és un polinomi en  $x$  independent de  $n$ . El sistema  $\left\{\frac{df_n}{dx}\right\}$  consisteix un altre cop en polinomis ortogonals.

Ja en el cas concret dels polinomis de Chebyshev de primera espècie, la funció pes es defineix com:

$$w(x) = (1 - x^2)^{-1/2} \quad (15.11)$$

I la constant  $h_n$  és:

$$h_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n \neq 0 \\ \pi & n = 0 \end{cases} \quad (15.12)$$

La constant  $k_n$  es defineix (només pel cas dels polinomis de Chebyshev de primera espècie):

$$k_n = 2^{n-1} \quad (15.13)$$

L'expressió explícita dels polinomis de Chebyshev és:

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} \quad (15.14)$$

Els polinomis de Chebyshev d'ordre  $n$  es poden escriure en forma trigonomètrica com:

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos(x)) & \text{per a } |x| \leq 1 \\ \cosh(n \cdot \operatorname{arccosh}(x)) & \text{per a } |x| > 1 \end{cases} \quad (15.15)$$

També es poden descriure amb una fórmula recursiva de la següent manera,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (15.16)$$

Tenint present que  $T_0(x) = 1$  i  $T_1(x) = x$ . Així per exemple, el polinomi de Chebyshev de grau  $n = 2$  és  $T_2(x) = 2x^2 - 1$ , etc.

### 15.3 Càlcul de $\operatorname{inverf}(x)$ per valors petits de $x$

Si  $x = \operatorname{erf}(y)$  i prima indica la derivada de  $y$  amb respecte  $x$ , tenim que:

$$y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{y^2} \quad (15.17)$$

Llavors

$$y'' = 2yy'y' \quad (15.18)$$

L'equació (15.18) es pot escriure com  $y''(y')^{-2} = 2y$  i integrada per aconseguir  $-1/y' = 2 \int y dx + C$ . De (15.17), és evident que  $y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  quan  $y = 0 = x$ . Conseqüentment,

$$\frac{-1}{y'(x)} = 2 \int_0^x y(t) dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (15.19)$$

Si es combinen les equacions (15.17) i (15.19), s'obté:

$$\int_0^x y(t) dt = (1 - e^{-y^2(x)})/\sqrt{\pi} \quad (15.20)$$

La funció error inversa es pot aproximar per la sèrie:

$$\text{inverf}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^{2n-1} \quad (15.21)$$

Per  $x$  petites, llavors de (15.19)

$$1 + \left( \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)C_m x^{2m-2} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} C_n x^{2n} - 2/\sqrt{\pi} \right) = 0 \quad (15.22)$$

Els valors  $C_n$  es poden determinar multiplicant les series de (15.22) i igualant els coeficients de cada potencia de  $x^2$  a zero. Els primers 200 resultats es poden veure en la Taula 2 en l'article "On the Calculation of the inverse of the Error Function" de Anthony J. Strecok. El resultat, equivalent en exactitud a (15.21), també es pot expressar de la forma (per l'interval  $|x| \leq 0.8$ ),

$$\text{inverf}(x) = x \left\{ \xi_0 + \sum_{n=1}^{38} \xi_n T_n \left( \frac{x^2}{0.32} - 1 \right) \right\} \quad (15.23)$$

On  $T_n(\lambda)$  es el polinomi de Chebyshev de grau  $n$  en  $\lambda$  i els coeficients  $\xi_n$  estan tabulats en la taula A.4 en l'annex 3.

## 15.4 Formes asimptòtiques

C. Hastings aproxima essencialment la CDF inversa d'una v.a. normal utilitzant funcions racionals de la forma  $\sqrt{-\ln(t^2)}$  on  $t = 1/(2\pi)^{1/2} \int_x^\infty e^{-z^2/2} dz$ . Com que aquestes fórmules tenen una exactitud limitada, recomanem una forma lleugerament diferent que justificarem tot seguit. Sigui:

$$x^2 = (\operatorname{erf}(y))^2 = \frac{4}{\pi} \int_0^y e^{-s^2} ds \int_0^y e^{-t^2} dt = \frac{4}{\pi} \int_0^y \int_0^y e^{-(s^2+t^2)} ds dt \quad (15.24)$$

El quadrat sobre el que es fa la integració es pot descompondre en dos regions,  $\psi_1$  i  $\psi_2$ , on  $\psi_1$  és el quart de cercle  $s^2 + t^2 \leq y^2$ , i  $\psi_2$  és la resta del quadrat. Convertint (15.24) a coordenades polars, veiem que

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \int_{\psi_1} e^{-(s^2+t^2)} ds dt &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^y e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^y e^{-r^2} 2r dr \\ &= 1 - e^{-y^2} \end{aligned} \quad (15.25)$$

Ja que

$$\frac{4}{\pi} \int_{\psi_2} e^{-(s^2+t^2)} ds dt < \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_y^{y\sqrt{2}} e^{-r^2} r dr d\theta = e^{-y^2} - e^{-2y^2} \quad (15.26)$$

Aquesta quantitat pot ser negligida en comparació a  $1 - e^{-y^2}$ . D'aquesta manera  $x^2 \approx 1 - e^{-y^2}$  i podem agafar  $y \approx [-\ln(1 - x^2)]^{1/2}$  o,

$$\operatorname{inverf}(x) \approx (-\ln[(1-x)(1+x)])^{\frac{1}{2}} \quad (15.27)$$

Assumint  $x$  positiva. Per simplificar la notació,  $\beta(x)$  denotarà  $[-\ln(1 - x^2)]^{1/2}$  al llarg del text.

L'equació (15.27) es pot millorar si definim una nova funció  $R(x)$  tal que,

$$\operatorname{inverf}(x) = \beta(x) \cdot R(x) \quad (15.28)$$

Per valors petits de  $x$ ,  $\beta(x)$  pot ser una sèrie de potències. Per aquesta raó, també es va generar una sèrie de potències per  $R(x)$  fent servir l'equació (15.21). Les sèries resultants per  $R(x)$  són més convergents que les sèries que vam veure en (15.21). Desafortunadament, es requereix un major esforç per avaluar  $\beta(x)$  que per computar els termes extra en (15.21).

Les fórmules per  $R(x)$  que s'avaluen tot seguit estan obtingudes aplicant interpolació de polinomis de Chebyshev a  $\operatorname{inverf}(x)/\beta(x)$ .

- Per  $0.8 \leq x \leq 0.9975$ ,

$$R(x) \approx \sum_{n=0}^{26} \lambda_n T_n(D_1 \beta(x) + D_2) \quad (15.29)$$

On

$$\begin{aligned} D_1 &= -1.54881\ 30423\ 73261\ 65951\ 2742, \\ D_2 &= 2.56549\ 01231\ 47816\ 15192\ 8163, \end{aligned}$$

Els coeficients  $\lambda_n$  es poden trobar en la Taula A.5 en l'annex 3.

- Per  $25 \cdot 10^{-4} \geq 1 - x \geq 5 \cdot 10^{-16}$ ,

$$R(x) \approx \sum_{n=0}^{37} \delta_n T_n(D_3 \beta(x) + D_4) \quad (15.30)$$

On,

$$\begin{aligned} D_3 &= -0.55945\ 76313\ 29832\ 32254\ 36913, \\ D_4 &= 2.28791\ 57162\ 63357\ 63896\ 5891, \end{aligned}$$

Els coeficients  $\delta_n$  es poden trobar en la Taula A.6 en l'annex 3.

- Per  $5 \cdot 10^{-16} \geq 1 - x \geq 10^{-300}$ ,

$$R(x) \approx \sum_{n=0}^{25} \mu_n T_n \left( D_5 / (\beta(x))^{1/2} + D_6 \right) \quad (15.31)$$

On,

$$\begin{aligned} D_5 &= -9.19999\ 23588\ 30151\ 03127\ 8420, \\ D_6 &= 2.79499\ 08201\ 24599\ 49376\ 8426, \end{aligned}$$

Els coeficients  $\mu_n$  es poden trobar en la Taula A.7 en l'annex 3.

## 15.5 Definició de la CDF inversa mitjançant interpolació de polinomis de Chebyshev

Fent servir les aproximacions per interpolació de polinomis de Chebyshev en les quatre regions de l'interval (0,1), podem fixar un algoritme que calculi la funció error inversa amb un error d'aproximació extremadament petit (màxim de  $2.29 \cdot 10^{-14}$ ) en l'interval (-1, 1). La gràfica de la figura 15.1 mostra una comparativa entre la funció error inversa aconseguida a partir d'interpolació de Chebyshev i la funció "erfinv(x)" de MATLAB. També hem



representat el logaritme de l'error entre les dues funcions. Noteu que la funció  $\text{erfinv}$  és una funció imparell.

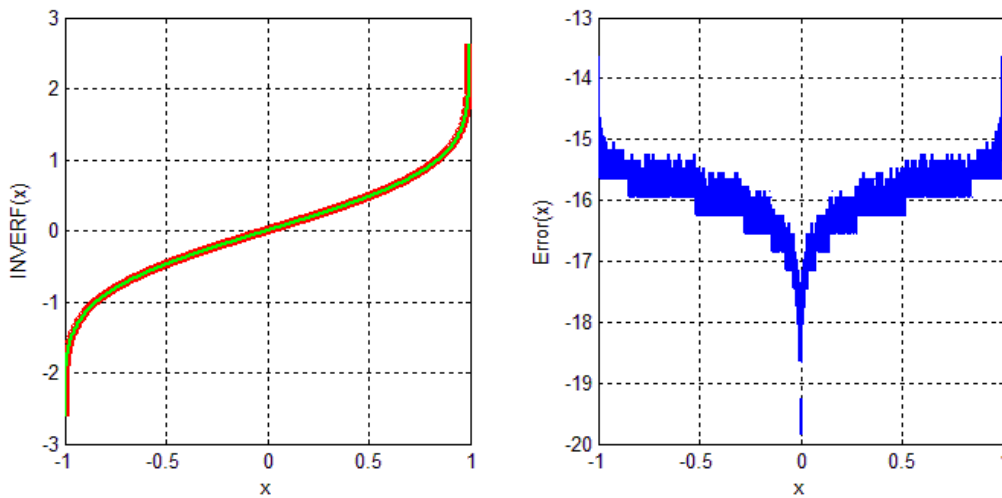


Figura 15.1. Comparació i error logarítmic entre la funció error inversa ideal i l'aproximació amb interpolació de polinomis de Chebyshev

La funció en MATLAB que calcula aquesta aproximació de la funció error inversa i per tant de les set aproximacions per interpolació de polinomis de Chebyshev en les diferents regions de l'interval  $(-1,1)$  es pot trobar en l'annex 3 juntament amb les taules que defineixen els coeficients de l'aproximació.

En el nostre problema en particular, ens interessa treballar amb la funció de distribució de probabilitat inversa enlloc de amb la funció error inversa, per aquest motiu haurem de realitzar una transformació dels eixos tenint en compte la relació que existeix entre aquestes dues funcions. Així, si tenim en compte la relació entre la CDF i la funció error ERF per una v.a. normal:

$$x = F(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{y - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (15.32)$$

Llavors, la funció de distribució inversa serà tal que

$$y = F^{-1}(x) \quad (15.33)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) = y \quad (15.34)$$

$$\operatorname{erf} \left( \frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) = 2 \left( y - \frac{1}{2} \right) = z \quad (15.35)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{erfinv}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right) &= \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = \operatorname{erfinv}(z) \\ &= \operatorname{erfinv}\left(2\left(y-\frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (15.36)$$

Si simplifiquem en (15.36)  $\mu = 0$ , llavors

$$x = \sqrt{2}\sigma \cdot \operatorname{erfinv}\left(2\left(y-\frac{1}{2}\right)\right) \quad (15.37)$$

Per tant, la transformació d'eixos que hem de realitzar és:

$$z = 2\left(y-\frac{1}{2}\right) \quad (15.38)$$

Aquesta transformació passa de l'interval  $y \in [0, 1]$  (propi de la CDF inversa) a l'interval  $z \in [-1, 1]$  (propi de la ERF inversa). Lògicament, haurem d'aplicar la transformació inversa per als intervals que defineixen els diferents trams de l'aproximació de la ERF inversa per interpolació de polinomis de Chebyshev. És a dir, els diferents trams queden definits de la següent manera:

- $|x| < \left(\frac{0.8}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$$F^{-1}(x) = \sqrt{2}\sigma \cdot 2\left(x-\frac{1}{2}\right) \left\{ \xi_0 + \sum_{n=1}^{38} \xi_n T_n \left( \frac{\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}{0.32} - 1 \right) \right\}$$

- $\left(\frac{0.8}{2} + \frac{1}{2}\right) \leq x < \left(\frac{0.9975}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$$F^{-1}(x) = \sqrt{2}\sigma \cdot \beta \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) \sum_{n=0}^{26} \lambda_n T_n \left(D_1 \beta \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + D_2\right)$$

- $\left(\frac{0.9975}{2} + \frac{1}{2}\right) \leq x < \left(\frac{1-5 \cdot 10^{-16}}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$$F^{-1}(x) = \sqrt{2}\sigma \cdot \beta \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) \sum_{n=0}^{37} \delta_n T_n \left(D_3 \beta \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + D_4\right)$$

- $x \geq \left(\frac{1-5 \cdot 10^{-16}}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$$F^{-1}(x) = \sqrt{2}\sigma \cdot \beta \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) \sum_{n=0}^{25} \mu_n T_n \left(D_5 / \left(\beta \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right)^{1/2} + D_6\right)$$

- $\left(\frac{-0.9975}{2} + \frac{1}{2}\right) < x \leq \left(\frac{-0.8}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$$F^{-1}(x) = -\sqrt{2}\sigma \cdot \beta \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) \sum_{n=0}^{26} \lambda_n T_n \left(D_1 \beta \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + D_2\right)$$

- $\left(\frac{-1+5 \cdot 10^{-16}}{2} + \frac{1}{2}\right) < x \leq \left(\frac{-0.9975}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$$F^{-1}(x) = -\sqrt{2}\sigma \cdot \beta \left( 2 \left( x - \frac{1}{2} \right) \right) \sum_{n=0}^{37} \delta_n T_n \left( D_3 \beta \left( 2 \left( x - \frac{1}{2} \right) \right) + D_4 \right)$$

•  $x \leq \left( \frac{-1+5 \cdot 10^{-16}}{2} + \frac{1}{2} \right)$

$$F^{-1}(x) = -\sqrt{2}\sigma \cdot \beta \left( 2 \left( x - \frac{1}{2} \right) \right) \sum_{n=0}^{25} \mu_n T_n \left( D_5 / \left( \beta \left( 2 \left( x - \frac{1}{2} \right) \right) \right)^{1/2} + D_6 \right)$$

A continuació es representa gràficament (figura 15.2) la funció que hem descrit anteriorment (color vermell i discontinu) en comparació amb la funció de distribució inversa d'una v.a. normal donada per la funció "NORMINV" del MATLAB (color blau). Es pot apreciar que són idèntiques en tot el seu domini.

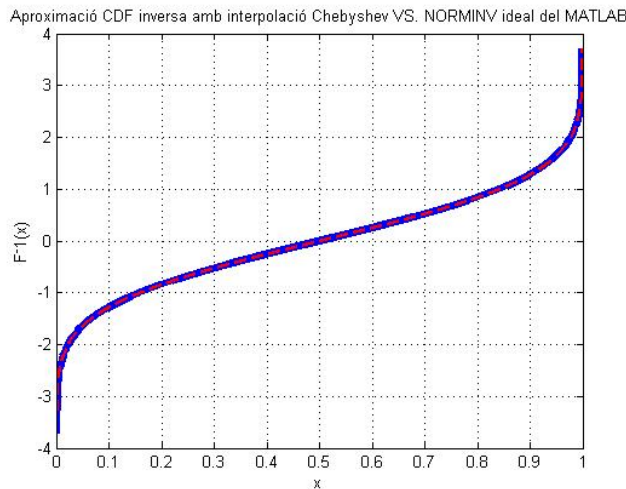


Figura 15.2. Comparació entre la CDF inversa ideal i la CDF per interpolació de polinomis de Chebyshev

## 15.6 Funció òptima normalitzada per interpolació de polinomis de Chebyshev

La funció òptima basada en interpolació per polinomis de Chebyshev s'obté utilitzant el mètode de la inversa tal i com vam fer en l'aproximació de Hasting. S'utilitzarà l'algoritme de Dillard amb iteracions il·limitades, i la mateixa idea del paràmetre d'ajust que vam veure en Hasting (apartat 15.4). Per tant, la funció òptima normalitzada  $\bar{f}(y; \bar{\gamma}, \delta, n_e)$  basada en interpolació de polinomis de Chebyshev s'obté en tres passos:

1. Utilització de l'algoritme de Dillard modificat que vam veure en la funció òptima de Hasting-Dillard, concretament l'equació (15.46).
2. Definició de la variable intermèdia  $\beta(\cdot)$  de l'aproximació de Chebyshev. Recordem que la funció  $\beta(x) = [-\ln(1 - x^2)]^{1/2}$  i si realitzem el canvi de variable:

$$x = 2 \left( p - \frac{1}{2} \right) \tag{15.39}$$

Llavors queda,

$$\beta\left(2\left(p - \frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{-\ln(4 \cdot p \cdot (1 - p))} \quad (15.40)$$

On  $p$  és una v.a. uniforme distribuïda entre 0 i 1. Pel mètode de la inversa  $p$  ve donat per:

$$p(y, \bar{\gamma}, \delta, n_e) = 1 - e^{-\delta/2} \cdot e^{-y/2\bar{\gamma}^2} \cdot X_{n_e/2}\left(\sqrt{\delta}, \frac{\sqrt{y}}{\bar{\gamma}}\right) \quad (15.41)$$

Per tant, definirem  $\beta(\cdot)$  com una funció dependent de tres paràmetres ( $n_e, \delta$  i  $\bar{\gamma}$ ):

$$\begin{aligned} & \beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta) \\ &= \sqrt{\frac{y}{2\bar{\gamma}^2} + \frac{\delta}{2} - \ln\left(X_{n_e/2}\left(\sqrt{\delta}, \frac{\sqrt{y}}{\bar{\gamma}}\right)\right) - \ln(p(y, \bar{\gamma}, \delta, n_e)) - \ln(4)} \end{aligned} \quad (15.42)$$

3. Finalment, substituint aquests resultats en l'aproximació de Chebyshev:

$$\bar{f}(y; \bar{\gamma}, \delta, n_e) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad |p(y, \bar{\gamma}, \delta, n_e)| < \left(\frac{0.8}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ \quad \bar{\gamma} \cdot \sqrt{\delta} + \sqrt{2}\bar{\gamma} \cdot 2\left(p(y, \bar{\gamma}, \delta, n_e) - \frac{1}{2}\right) \left\{ \xi_0 + \sum_{n=1}^{38} \xi_n T_n \left( \frac{\left(2\left(p(y, \bar{\gamma}, \delta, n_e) - \frac{1}{2}\right)\right)^2}{0.32} - 1 \right) \right\} \\ \bullet \quad \left(\frac{0.8}{2} + \frac{1}{2}\right) \leq p(y, \bar{\gamma}, \delta, n_e) < \left(\frac{0.9975}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ \quad \bar{\gamma} \cdot \sqrt{\delta} + \sqrt{2}\bar{\gamma} \cdot \beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta) \sum_{n=0}^{26} \lambda_n T_n(D_1 \beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta) + D_2) \\ \bullet \quad \left(\frac{0.9975}{2} + \frac{1}{2}\right) \leq p(y, \bar{\gamma}, \delta, n_e) < \left(\frac{1-5 \cdot 10^{-16}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ \quad \bar{\gamma} \cdot \sqrt{\delta} + \sqrt{2}\bar{\gamma} \cdot \beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta) \sum_{n=0}^{37} \delta_n T_n(D_3 \beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta) + D_4) \\ \bullet \quad p(y, \bar{\gamma}, \delta, n_e) \geq \left(\frac{1-5 \cdot 10^{-16}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ \quad \bar{\gamma} \cdot \sqrt{\delta} + \sqrt{2}\bar{\gamma} \cdot \beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta) \sum_{n=0}^{25} \mu_n T_n\left(D_5 / (\beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta))^{1/2} + D_6\right) \\ \bullet \quad \left(\frac{-0.9975}{2} + \frac{1}{2}\right) < p(y, \bar{\gamma}, \delta, n_e) \leq \left(\frac{-0.8}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ \quad \bar{\gamma} \cdot \sqrt{\delta} + -\sqrt{2}\bar{\gamma} \cdot \beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta) \sum_{n=0}^{26} \lambda_n T_n(D_1 \beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta) + D_2) \\ \bullet \quad \left(\frac{-1+5 \cdot 10^{-16}}{2} + \frac{1}{2}\right) < p(y, \bar{\gamma}, \delta, n_e) \leq \left(\frac{-0.9975}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ \quad \bar{\gamma} \cdot \sqrt{\delta} + -\sqrt{2}\bar{\gamma} \cdot \beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta) \sum_{n=0}^{37} \delta_n T_n(D_3 \beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta) + D_4) \\ \bullet \quad p(y, \bar{\gamma}, \delta, n_e) \leq \left(\frac{-1+5 \cdot 10^{-16}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ \quad \bar{\gamma} \cdot \sqrt{\delta} + -\sqrt{2}\bar{\gamma} \cdot \beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta) \sum_{n=0}^{25} \mu_n T_n\left(D_5 / (\beta_{n_e}(y, \bar{\gamma}, \delta))^{1/2} + D_6\right) \end{array} \right.$$

L'algoritme que descriu la funció òptima fent servir interpolació amb polinomis de Chebyshev es pot trobar en l'annex 4. De la mateixa manera que vam fer amb la funció òptima de Hasting-Dillard, els paràmetres que defineixen la funció òptima per interpolació de polinomis de Chebyshev  $\bar{f}(y; \bar{\gamma}, \delta, n_e)$  són:

- Paràmetre del soroll normalitzat ( $\bar{\gamma}$ ): Aquest paràmetre ha de ser igual a la unitat per aconseguir les millors prestacions, ja que està normalitzat. Quan treballem en mode normalitzat, el fixarem directament a 1. En mode desnormalitzat, ha de coincidir amb la desviació estàndard del soroll ASE.
- Paràmetre d'ajust o paràmetre de no centralitat de la funció ( $\delta$ ): Està relacionat amb el paràmetre de no centralitat. La missió d'aquest paràmetre es corregir la desviació de la varianza per qualsevol relació de no centralitat.
- Paràmetre modal ( $n_e$ ): Vindrà determinada per la relació dels filtres que utilitzem.

En aquesta situació, ja podem representar gràficament la funció òptima normalitzada. En efecte, la funció òptima normalitzada definida pels paràmetres;  $n_e = 10$ ,  $\bar{\gamma} = 1$  i  $\delta = 5$  ( $\bar{f}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 10)$ ) obtinguda a partir de l'aproximació utilitzant interpolació de polinomis de Chebyshev es pot veure en la figura 15.3. També hem inclòs l'arrel quadrada a mode comparatiu.

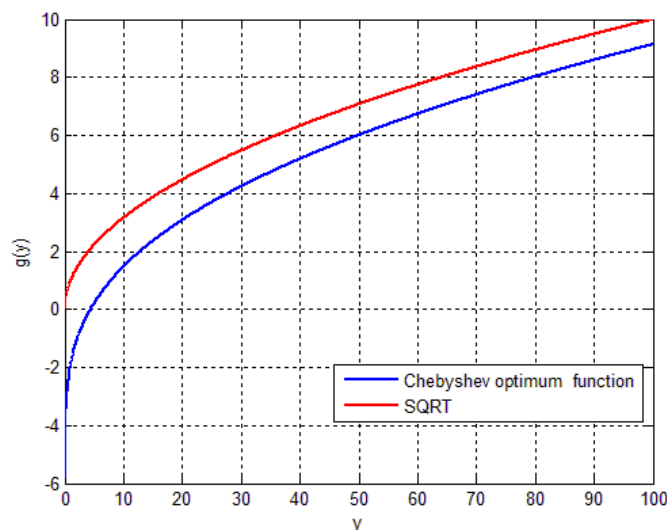


Figura 15.3. Funció òptima per interpolació de polinomis de Chebyshev i Dillard amb paràmetres  $n=10$ ,  $\delta=5$  i  $\gamma=1$

Tal i com hem vingut fent al llarg del text, realitzarem un conjunt de simulacions amb diferents v.a. chi quadrades  $\chi^2$  (variant el paràmetre de no centralitat  $\lambda$  del senyal d'entrada) amb  $n = 10$  graus de llibertat. Fixarem la funció òptima normalitzada idònia per aquesta estadística d'entrada, en aquest cas els paràmetres òptims seran:  $n_e = 10$ ,  $\bar{\gamma} = 1$  i  $\delta = 5$  i la funció òptima normalitzada per interpolació de polinomis de Chebyshev queda definida com  $\bar{f}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 2)$ . En totes les mesures posteriors s'han utilitzat

100.000 mostres i l'error quadràtic mig es realitza entre una Gaussiana ideal amb mitja i varianza experimental i la distribució de sortida.

1. Per una relació  $\lambda = s^2/\sigma^2 = 0$ :

- Mitja experimental = 1.3508
- Varianza experimental = 0.83346
- Error quadràtic mig = 0.0036 (0.36 %)
- Test Kolmogorov-Smirnov = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.56328
- Test Lilliefors = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.762
- Test Jarque-Bera = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.118
- Test Shapiro-Wilks = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.24282

El logaritme de la distribució de sortida de la funció òptima (color vermell) vers una Gaussiana ideal (color blau discontinu) es mostren en la figura 15.4. Així, també hem inclòs el diagrama de probabilitat normal. A destacar l'exactitud entre la distribució de sortida i la Gaussiana ideal. El diagrama de probabilitat normal i els test d'hipòtesis utilitzats denoten que la mostra de sortida és Gaussiana.

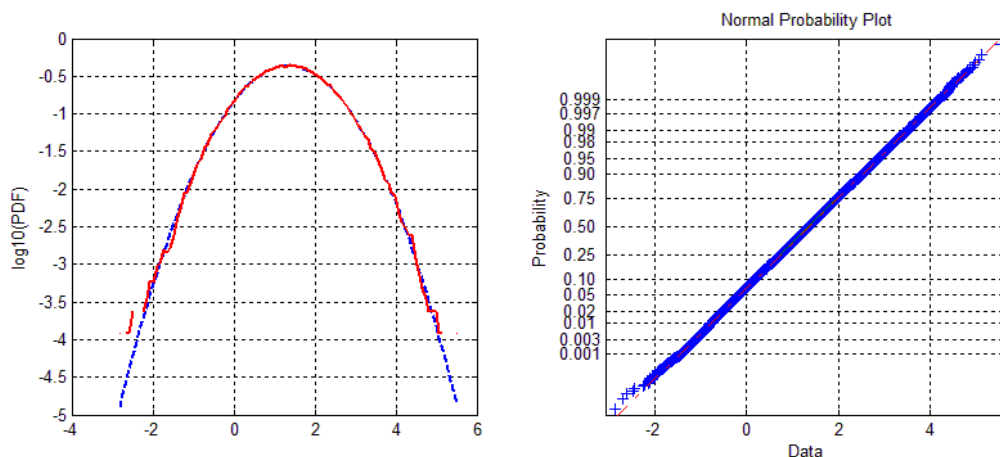


Figura 15.4. PDF logarítmica i diagrama de probabilitat normal amb funció òptima basada en interpolació de polinomis de Chebyshev per ncp=0

2. Per  $\lambda = s^2/\sigma^2 = 10$ :

- Mitja experimental = 2.9581
- Varianza experimental = 1.0612
- Error quadràtic mig = 0.0029 (0.29 %)
- Test Kolmogorov-Smirnov = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.28264
- Test Lilliefors = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.745

- Test Jarque-Bera = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.973
- Test Shapiro-Wilks = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.81541

En la figura 15.5 apareix el logaritme de la distribució de sortida de la funció òptima (color vermell) vers una Gaussiana ideal amb mitja i varianza mostral (color blau discontinu), juntament amb el diagrama de probabilitat normal de les mostres de sortida. A diferència del cas anterior, apareix un petit desajust en una de les cues de la Gaussiana, per aquest motiu la mostra de sortida no presenta una Gaussianitat tan destacable com en el primer cas.

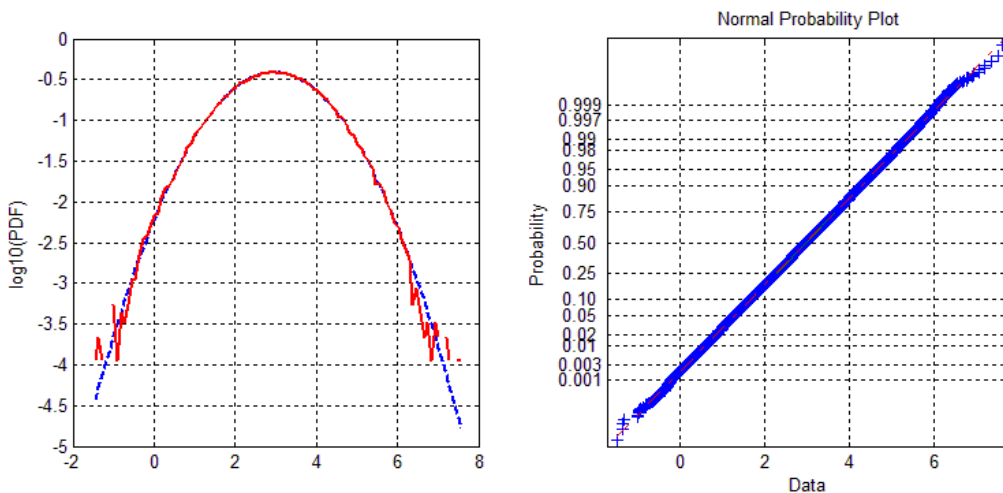


Figura 15.5. PDF logarítmica i diagrama de probabilitat normal amb funció òptima basada en interpolació de polinomis de Chebyshev per  $n_{cp}=10$

3. Per  $\lambda = s^2/\sigma^2 = 50$ :

- Mitja experimental = 6.6661
- Varianza experimental = 1.0844
- Error quadràtic mig = 0.0033 (0.33 %)
- Test Kolmogorov-Smirnov = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.33641
- Test Lilliefors = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.22
- Test Jarque-Bera = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.428
- Test Shapiro-Wilks = 0 (compleix la hipòtesis H0, per tant és normal). P-value = 0.19212

De la mateixa manera que hem vist en els casos anteriors, en la figura 15.6 apareix el logaritme de la distribució de sortida i el seu diagrama de probabilitat normal. Observant el diagrama de probabilitat normal i els test d'hipòtesis, podem constatar que la distribució de sortida és Gaussiana, amb una bona exactitud.

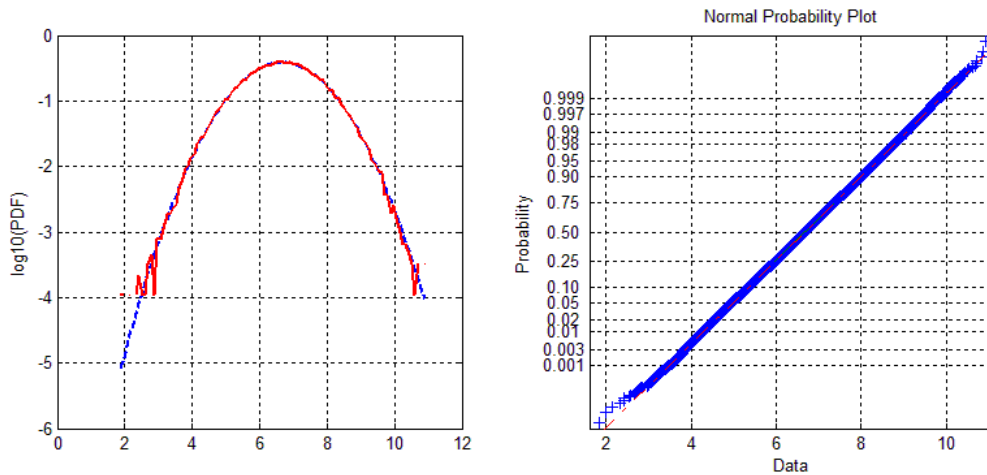


Figura 15.6. PDF logarítmica i diagrama de probabilitat normal amb funció òptima basada en interpolació de polinomis de Chebyshev per  $n_{cp}=50$

4. Per  $\lambda = s^2/\sigma^2 = 2500$ :

- Mitja experimental = 49.7982
- Varianza experimental = 1.0064
- Error quadràtic mig = 0.0035 (0.35 %)
- Test Kolmogorov-Smirnov = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.93812
- Test Lilliefors = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.388
- Test Jarque-Bera = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.216
- Test Shapiro-Wilks = 0 (compleix la hipòtesis  $H_0$ , per tant és normal). P-value = 0.31623

Finalment, en la figura 15.7 apareix la distribució de sortida i el seu diagrama de probabilitat normal. En aquest últim cas, la distribució presenta una Gaussianitat major que amb els casos  $\lambda = 10$  i  $\lambda = 50$ , ja que el diagrama de normalitat així ho mostra.

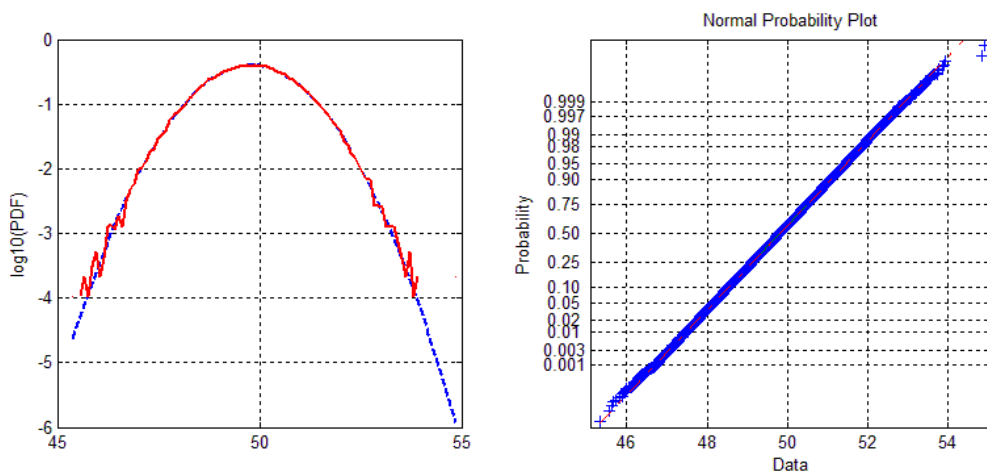


Figura 15.7. PDF logarítmica i diagrama de probabilitat normal amb funció òptima basada en interpolació de polinomis de Chebyshev per  $n_{cp}=2500$



## 15.7 Conclusions sobre l'aproximació de Chebyshev

La funció òptima basada en interpolació de polinomis de Chebyshev és més robusta ja que comet un error més petit que la basada en l'aproximació de Hasting, sempre i quan fem una transformació d'una distribució chi quadrada amb paràmetres coneguts ( $n, \sigma$  i  $\lambda$ ) i utilitzem els mateixos paràmetres en la funció ( $n_e = n, \sigma = \gamma$  i  $\lambda = \delta$ ). També és una aproximació que comporta un major cost computacional degut al nombre de constant que ha de processar, i als ordres del polinomis de Chebyshev.

Naturalment, l'error d'aproximació és més petit que en el cas de Hasting-Dillard, però els resultats pràctics són idèntics, ja que l'error que es comet al truncar el paràmetre d'ajust o paràmetre de no centralitat de la funció és molt més gran del que comet la CDF inversa basada en interpolació de Chebyshev. Per tant, per molt que guanyem en exactitud en la CDF inversa d'una v.a. normal, després ho perdem quan trunquem el paràmetre d'ajust. En aquest capítol no he inclòs l'anàlisi dels moments estadístics per extensió del projecte, de totes maneres els resultats són idèntics als que vam veure en l'apartat 15.4.

La funció òptima basada en la interpolació de polinomis de Chebyshev pot servir com una alternativa de la funció òptima de Hasting-Dillard quan es vol treballar amb una major exactitud, encara que vistos els resultats (on no apareix cap tipus de diferència evident) és molt més còmode treballar amb l'aproximació de Hasting.



# 16 Funció òptima pel mètode de la inversió i altres aproximacions de la CDF inversa Normal

En aquest capítol estudiarem algunes de les aproximacions de la CDF (Cumulative Distribution Function) inversa d'una v.a. normal  $F_{Z|S}^{-1}(\cdot)$  que vam veure en el capítol 10.3, en concret aquelles destinades a les calculadores de mà [34-38], i les farem servir, juntament amb el mètode de la inversa, per trobar la funció òptima. Aquestes aproximacions de la CDF inversa  $F_{Z|S}^{-1}(\cdot)$  que tractarem són molt més simples que les aproximacions de Hasting i de Chebyshev, per aquest motiu ens permetrà trobar una funció òptima més senzilla i simplificada, encara que amb un major error. Finalment, estudiarem si aquestes funcions són correctes comparant-les amb les que vam obtenir en els capítols 14 i 15.

## 16.1 Primera aproximació

En aquest apartat obtindrem la funció òptima utilitzant l'aproximació de la CDF inversa d'una v.a. normal (10.18). Aquesta aproximació té una gran semblança amb les aproximacions de Hasting i d'Odeh & Evans. L'aproximació que tractarem és:

$$F_{Z|S}^{-1}(P) = t - \left\{ \frac{1}{0.5 + 0.3t} \right\} \quad (16.1)$$

On  $t = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - P)}$ ,  $P \geq \frac{1}{2}$ . O el que és el mateix, una funció definida a trossos com:

$$F_{Z|S}^{-1}(P) = \begin{cases} -t_1 + \left\{ \frac{1}{0.5 + 0.3t_1} \right\} & P < 1/2 \\ t_2 - \left\{ \frac{1}{0.5 + 0.3t_2} \right\} & P \geq 1/2 \end{cases} \quad (16.2)$$

On  $t_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - P)}$  i  $t_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(P)}$ . Noteu que (16.2) és la CDF inversa d'una v.a. normal  $N(0,1)$ .

En la figura 16.1 es mostra, a l'esquerra, la CDF inversa normal donada per l'aproximació (16.2) i, a la dreta, l'error entre aquesta aproximació i la CDF inversa ideal. Noteu que la funció no és contínua, ja que si observem la gràfica de l'error, presenta una discontinuïtat en  $p = 0.5$ . També observeu que l'error màxim és de 0.011.

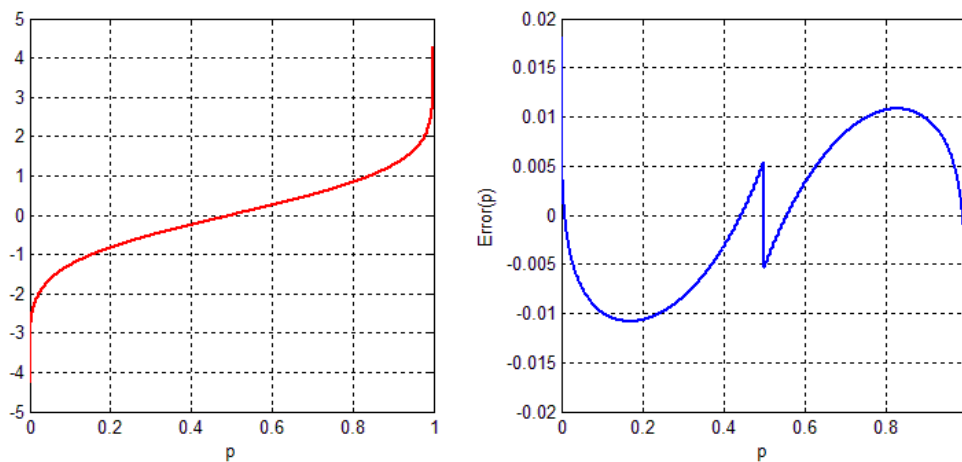


Figura 16.1. Aproximació per calculadores de mà (16.2) i error entre aquesta aproximació i la CDF inversa ideal d'una v.a. Gaussiana

Per trobar la funció òptima farem servir l'algoritme de Dillard modificat per computar la funció Marcum Q (veure expressió (14.46)). El següent codi en llenguatge MATLAB representa la funció òptima fent servir l'aproximació de la CDF inversa per calculadores de mà (16.2), el mètode de la inversa (11.4) i l'algoritme de Dillard modificat (14.46).

```
function [z] = g_function_handcalculator(y, sigma, delta, modes)
x = 0.*ones(length(y),1);
K = recursive_X(sqrt(delta), sqrt(y)./sigma, modes);
u = 1 - exp(-y./(2.*sigma.^2)).*exp(-delta/2).*K;
for j=1:length(y)
    if (u(j,1) >= 0.5)
        t=sqrt((y(j,1)./sigma^2)+delta-2.*log(K(j,1)));
        x(j,1) = t-((1)/(0.5+0.3.*t));
    else
        t = sqrt(-2.*log(u(j,1)));
        x(j,1) = -t+((1)/(0.5+0.3.*t));
    end
end
end
z = x.*sigma+sqrt(delta).*sigma;
```

Utilitzarem aquesta aproximació de la funció òptima per realitzar algunes simulacions estadístiques. El model estadístic que utilitzem és el mateix que vam utilitzar en capítols anteriors, és a dir un generador de v.a's chi quadrades directament connectat a la funció òptima. Aquestes simulacions aniran acompanyades del resultat del test d'hipòtesis de Kolmogorov-Smirnov i del diagrama de probabilitat normal. Els paràmetres de sistema que utilitzarem per fer les simulacions són:

- Ample de banda a -3dB del filtre òptic:  $B_o = 40$  GHz
- Ample de banda a -3dB del filtre elèctric:  $B_e = 8$  GHz
- Velocitat de transmissió:  $R_b = 10$  Gb/s
- Responsivitat del fotodíode PIN:  $R = 1$

Per tant el nombre de modes per estat de polarització són  $2M = B_o/B_e = 5$  (en total  $n = 10$  modes espectrals). Evidentment el sistema treballa amb absència de dispersió i d'altres fenòmens produïts al canal i suposem negligibles altres sorolls diferents al soroll d'amplificació òptic. Utilitzarem la nomenclatura  $\overline{g^2}(y; \overline{\gamma}, \delta, n_e)$  per designar la funció òptima normalitzada fent servir l'aproximació per calculadores de mà (16.2) i l'algoritme de Dillard (14.46), on els paràmetres  $\gamma$ ,  $\delta$  i  $n_e$  són els mateixos que es van fer servir en les aproximacions de Hasting i Chebyshev. D'aquesta manera, la funció òptima que utilitzarem en les simulacions és  $\overline{g^2}(y; \overline{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 10)$ , seguint el criteri que hem vist en capítols anteriors en el que amb un paràmetre d'ajust  $\delta \sim 5$  s'obtenien els millors resultats.

El primer experiment es va fer per una v.a. chi quadrada  $\chi^2$  amb  $n = 10$  graus de llibertat i paràmetre de no centralitat  $\lambda = 0$ . En la figura 16.2 es mostren els resultats de la simulació. Del primer que ens adonem observant la figura 16.2 és que la funció òptima (PDF de color vermell) presenta una discontinuïtat de salt, per tant no serà contínua, ni tampoc derivable en aquest punt. Això és un problema greu que no presentaven els casos de Hasting i Chebyshev. En la figura 16.2, en color blau es representa una Gaussiana ideal.

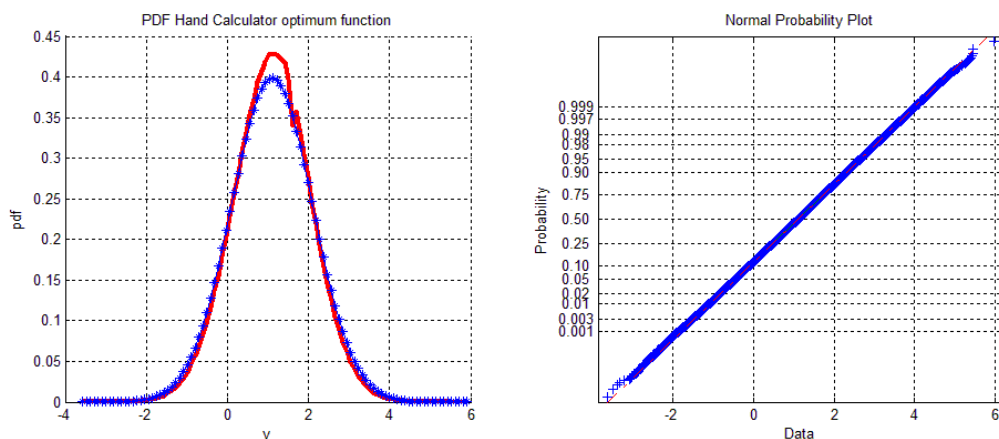


Figura 16.2. PDF de sortida de la funció òptima per calculadores de mà i diagrama de probabilitat normal per paràmetre de no centralitat del senyal d'entrada  $\lambda=0$

És fàcil demostrar perquè existeix aquesta discontinuïtat. Per la definició de continuïtat d'una funció, el límit quan tendeix a zero per la dreta i per l'esquerra han de coincidir:

$$\lim_{P \rightarrow 0.5^-} F_{Z|S}^{-1}(P) = \lim_{P \rightarrow 0.5^-} -t + \left\{ \frac{1}{0.5 + 0.3t} \right\} = -0.005383494 \quad (16.3)$$

$$\lim_{P \rightarrow 0.5^+} F_{Z|S}^{-1}(P) = \lim_{P \rightarrow 0.5^+} t - \left\{ \frac{1}{0.5 + 0.3t} \right\} = 0.005383494 \quad (16.4)$$

I com es pot veure els dos límits no coincideixen, per tant la funció no és contínua. Naturalment, aquesta discontinuïtat provoca que la distribució de sortida no sigui Gaussiana, i així ho denota el test de Kolmogorov-Smirnov per un nivell de significació del 5% refusant la hipòtesis nul·la.

El segon experiment serveix per comprovar si aquesta aproximació funciona bé per valors alts. Hem escollit una v.a. chi quadrada  $\chi^2$  amb  $n = 10$  graus de llibertat i paràmetre de no centralitat  $\lambda = 2500$ . Com es pot veure en la figura 16.3, els resultats són molt satisfactoris, on en color vermell es representa la PDF de sortida de la funció òptima  $\overline{g2}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 10)$  i en color blau es representa una Gaussiana ideal. El test paramètric de K-S confirma que per un nivell de significació del 5%, la mostra pertany a la hipòtesis nul·la, i per tant és Gaussià.

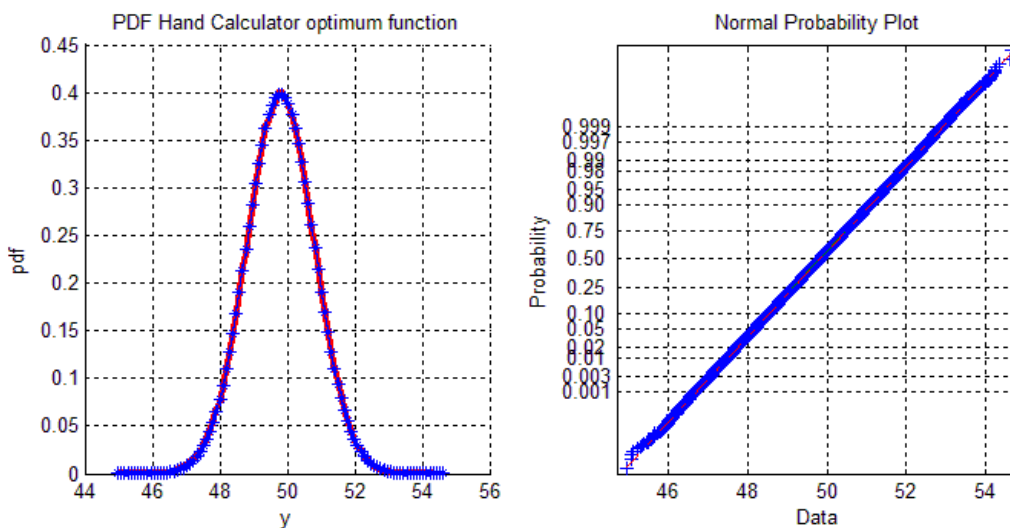


Figura 16.3. PDF de sortida de la funció òptima per calculadores de mà i diagrama de probabilitat normal per paràmetre de no centralitat del senyal d'entrada  $\lambda=2500$

Després d'aquest petit experiment, hem pogut comprovar el comportament d'aquesta aproximació de la funció òptima. Lamentablement, el fet que presenti una discontinuïtat de salt, invalida totalment la funció. Tot i així, s'ha de tenir en compte que es tracta d'una funció molt més simplificada que totes les que hem vist en apartats anteriors, depèn d'un nombre menor de constants i, a més a més, aquestes constants tenen un menor nombre de dígitos. És una funció més simple parlant en termes de computació.

La figura 16.4 il·lustra la funció òptima normalitzada  $\overline{g_2}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 10)$  vers l'arrel quadrada (color vermell). S'observa que evoluciona cap a l'arrel quadrada per a valors grans.

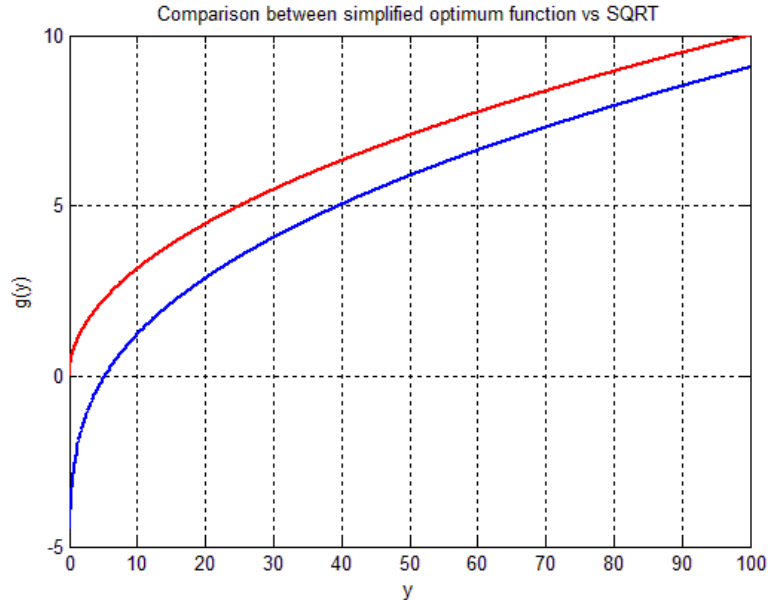


Figura 16.4. Comparació entre l'arrel quadrada i la funció òptima per l'aproximació de les calculadores de mà

## 16.2 Segona aproximació

Un dels principals desavantatges de les funcions que hem vist en els capítol 14 i 15 és que són funcions definides a trossos. Això fa que no es pugui donar una única expressió de la funció òptima. En aquest apartat estudiarem una altra aproximació de la CDF inversa normal  $F_{Z|S}^{-1}(\cdot)$  per calculadores de mà la qual està definida en tot el seu domini per una única expressió. Això ens permetrà trobar una única expressió de la funció òptima, sense el problema d'estar definida a trossos. L'aproximació de la CDF inversa  $F_{Z|S}^{-1}(\cdot)$  d'una v.a. normal  $N(0,1)$  que farem servir en aquest apartat és:

$$F_{Z|S}^{-1}(P) = \text{sign}\left(P - \frac{1}{2}\right) \{1.238 \cdot t_2 \cdot (1 + 0.0262 \cdot t_2)\} \quad (16.5)$$

$$\text{On } t_2 = \sqrt{-\ln(4 \cdot P \cdot (1 - P))}$$

En la figura 16.5 es representa la CDF inversa  $F_{Z|S}^{-1}(\cdot)$  donada per l'aproximació (16.5) (esquerra) i l'error entre aquesta i la ideal (dreta). Noteu que l'error màxim que es comet és de  $4.5 \cdot 10^{-3}$ .

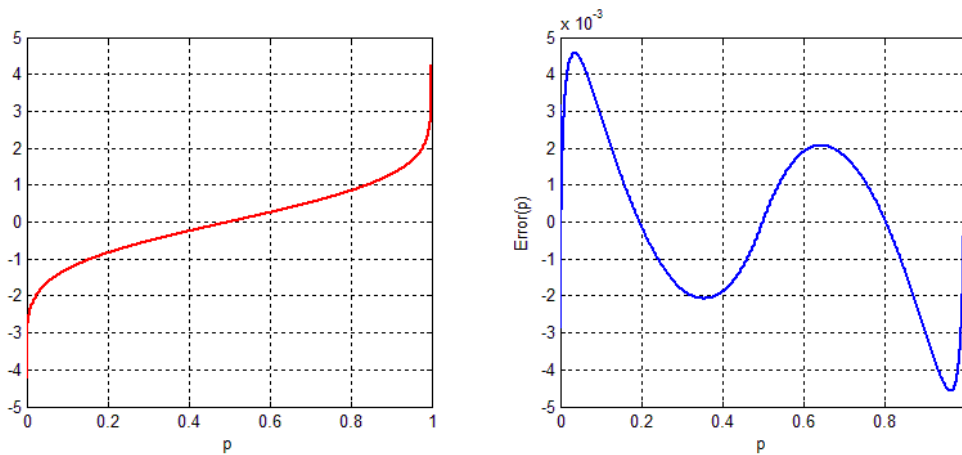


Figura 16.5. Aproximació per calculadores de mà (16.5) i error entre aquesta i la CDF inversa ideal d'una v.a. normal

El gran avantatge d'aquesta funció és que no està definida a trossos i amb una sola fórmula aproximem la funció òptima. Definirem la funció òptima fent servir el mètode de la inversa (11.4) i seguint els següents passos:

- Definim la variable  $P$  com (donada per la CDF d'una v.a. chi quadrada (14.50)):

$$P = 1 - e^{-\delta/2} \cdot e^{-y/2\bar{\gamma}^2} \cdot X_{n_e/2} \left( \sqrt{\delta}, \frac{\sqrt{y}}{\bar{\gamma}} \right) \quad (16.6)$$

On com ja es va veure en altres aproximacions, la funció  $X_{n_e/2}(\cdot)$  és una modificació de l'algoritme de Dillard (veure expressió (14.39)).

- Definició de la variable intermèdia  $t_2$  de l'aproximació (16.5), substituint  $P$  per (16.6)

$$t_2 = \sqrt{-\ln(4 \cdot P \cdot (1 - P))} \quad (16.7)$$

$$t_2 = \sqrt{y/2\bar{\gamma}^2 + \delta/2 - \ln \left( X_{n_e/2} \left( \sqrt{\delta}, \frac{\sqrt{y}}{\bar{\gamma}} \right) \right) - \ln(4) - \ln(1 - P)} \quad (16.8)$$

- I substituint (16.8) en (16.5), la funció òptima la definirem com:

$$\begin{aligned} \overline{g3}(y; \bar{\gamma}, \delta, n_e) &= \bar{\gamma} \cdot \sqrt{\delta} + \text{sign} \left( P - \frac{1}{2} \right) \cdot \bar{\gamma} \\ &\cdot \{1.238 \cdot t_2 \cdot (1 + 0.0262 \cdot t_2)\} \end{aligned} \quad (16.9)$$

Noteu que la funció òptima depèn dels paràmetres  $\bar{\gamma}$ ,  $\delta$  i  $n_e$ . Aquests paràmetres estan definits de la mateixa manera que vam veure en el capítol 14 i 15. El codi en MATLAB que simula dita funció òptima és el següent:



```
function z = g_function_handcalculator3(y, sigma, delta, modes)
x = 0.*ones(length(y),1);
K = recursive_X(sqrt(delta), sqrt(y)./sigma, modes);
P = 1 - exp(-y./(2.*sigma.^2)).*exp(-delta/2).*K;
t=sqrt((y./(2.*sigma.^2)+(delta/2)-log(K)-log(4)-log(P)));
for j=1:length(y)
    x(j,1) = sign(P(j,1)-1/2).*(1.238.*t(j,1).*(1+0.0262.*t(j,1)));
end
z = x.*sigma+sqrt(delta).*sigma;
```

Per testejar la funció òptima, farem servir el mateix procediment que hem vist en la primera aproximació en aquest mateix capítol. Els paràmetres de sistema que defineixen la funció són els mateixos que hem utilitzat abans, així la funció òptima que utilitzarem és  $\overline{g3}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 10)$ . La figura 16.6 es el resultat de la simulació estadística introduint a la funció òptima una v.a. chi quadrada amb  $n = 10$  graus de llibertat i  $\lambda = 0$  i la figura 16.7 és per  $n = 10$  graus de llibertat i  $\lambda = 2500$ . En color blau tenim una Gaussiana ideal amb mitja experimental i varianza unitària i en color vermell tenim la PDF de sortida de la funció  $\overline{g3}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 10)$ .

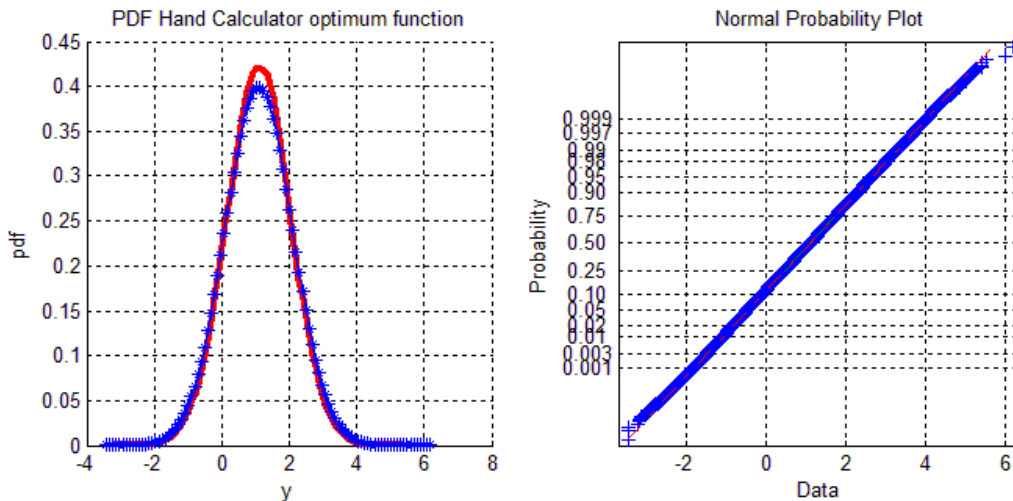


Figura 16.6. PDF de sortida de la funció òptima per calculadores de mà i diagrama de probabilitat normal per paràmetre de no centralitat del senyal d'entrada  $\lambda=0$

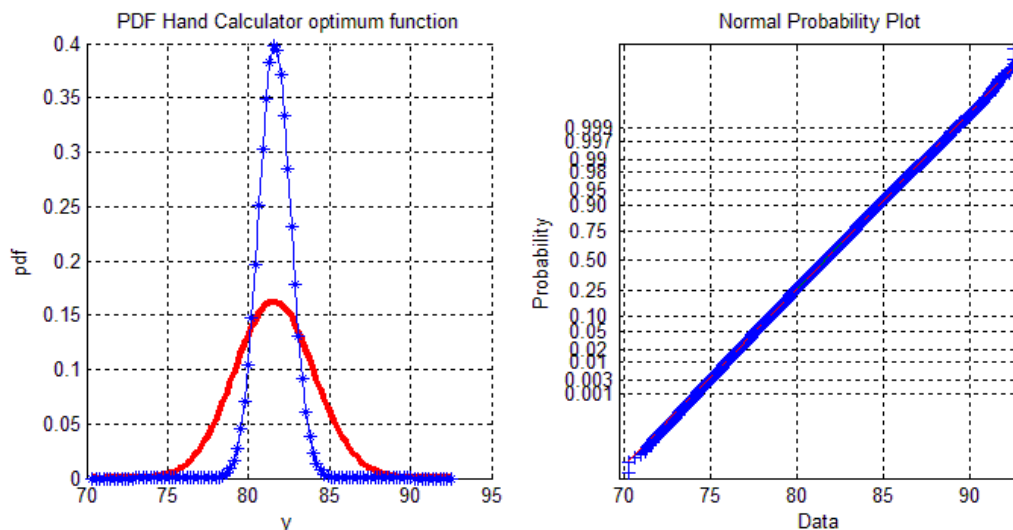


Figura 16.7. PDF de sortida de la funció òptima per calculadores de mà i diagrama de probabilitat normal per paràmetre de no centralitat del senyal d'entrada  $\lambda=2500$

Es pot comprovar que aquesta funció no té els problemes de continuïtat que tenia l'altra (primera aproximació), però sí que té problemes en quant a la varianza. Això últim indica que la funció que estem utilitzant no convergeix en l'arrel quadrada, tot seguit ho demostrarem. La figura 16.8 mostra la comparació entre la funció  $\overline{g3}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 10)$  (color blau), la funció  $\overline{g2}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 10)$  (color vermell) i amb l'arrel quadrada (color negre).

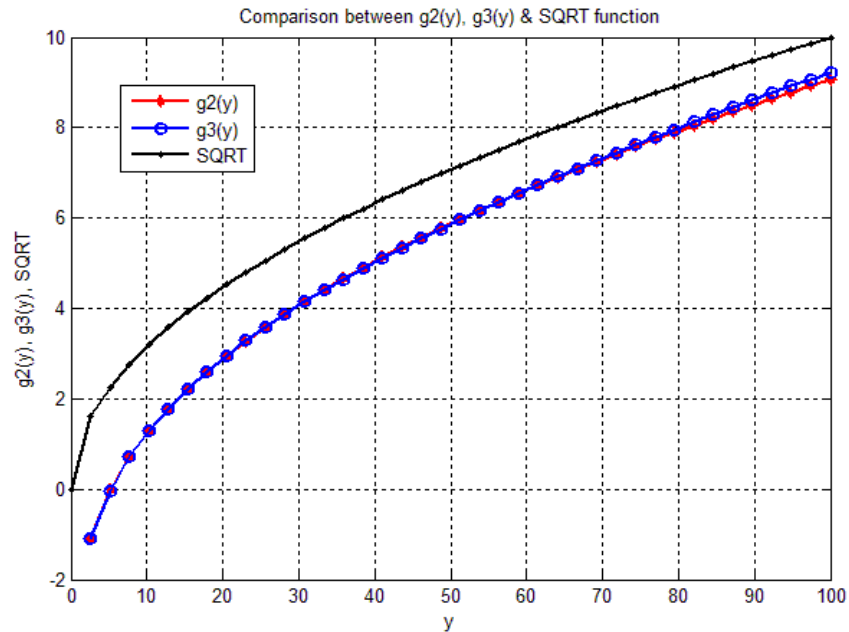


Figura 16.8. Comparació entre les dues funcions òptimes i l'arrel quadrada

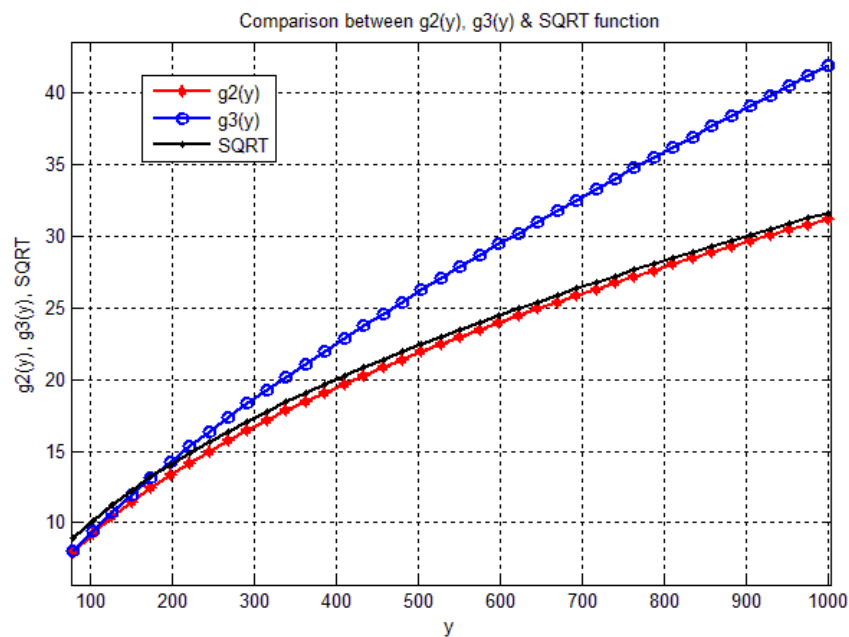


Figura 16.9. Comparació entre les dues funcions òptimes i l'arrel quadrada

En les gràfiques anteriors es pot veure que a prop del zero el comportament entre la funció òptima  $\overline{g2}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 10)$ , vista en la primera aproximació, i la funció  $\overline{g3}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 10)$ , vista en la segona aproximació, són molt semblants. Per valors grans de  $y$  (figura 16.9), el comportament entre ambdues funcions divergeix. Bàsicament, és aquest el motiu pel qual la varianza de la funció  $\overline{g3}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 5, n_e = 10)$  de la segona aproximació comença a augmentar.

### 16.3 Conclusions sobre les aproximacions per calculadores de mà

De entre totes les aproximacions de la CDF inversa d'una v.a. normal  $N(0,1)$  que vam veure en l'apartat 10.3, les més precises, o millor dit les que són relativament bones per un rang de valors grans, són aquestes dues que hem utilitzat en aquest capítol. Les altres aproximacions que vam veure en 10.3 no les hem utilitzat degut a que són aproximacions locals que només són bones en un interval concret. Aquestes aproximacions tenen com avantatge que són extremadament simples a nivell computacional. La simplicitat de les expressions fa que l'error d'aproximació sigui molt més gran que en el cas de les aproximacions de Hasting o Chebyshev.

Desafortunadament cap de les dues aproximacions de la funció òptima que hem vist en aquest capítol ens serveixen. La primera funció òptima que hem trobat l'hem anomenat  $\overline{g2}(y; \bar{\gamma}, \delta, n_e)$ , i és molt semblant a la de Hasting. Tot i així, té un problema molt greu, ja que la funció és discontinua (presenta una discontinuïtat de salt) en un punt. Aquesta discontinuïtat invalida totalment aquesta funció.

La segona aproximació de la funció òptima que hem trobat l'hem anomenat  $\overline{g3}(y; \bar{\gamma}, \delta, n_e)$ , i com s'ha pogut observar en les figures 16.7 i 16.9, la funció no tendeix a l'arrel quadrada i per tant la varianza no es manté constant per tot valor  $s/\sigma$ . Aquest fet comporta que aquesta funció tampoc sigui útil per a la nostra aplicació.



# 17 Altres aproximacions polinòmiques

Com ja hem vist en capítols anteriors, la funció òptima depèn d'una sèrie de paràmetres; nombre de modes espectrals, paràmetre d'ajust i varianza del soroll ASE. A més a més, les expressions que hem vist fins ara són molt complexes i costoses computacionalment (funcions definides a trossos, càlculs de logaritmes i exponencials, gran nombre d'iteracions en l'algoritme de Dillard, utilització de moltes constants, etc.). L'objectiu d'aquest capítol, doncs, és introduir algunes tècniques d'aproximació i interpolació de funcions per trobar expressions fàcils d'utilitzar computacionalment.

Les aproximacions que veurem tot seguit, són casos particulars d'una funció òptima concreta. La funció òptima que aproximarem serà aquella definida pels següents paràmetres de sistema:

- Ample de banda a -3dB del filtre òptic:  $B_o = 40$  GHz
- Ample de banda a -3dB del filtre elèctric:  $B_e = 8$  GHz
- Velocitat de transmissió:  $R_b = 10$  Gb/s
- Responsivitat del fotodíode PIN:  $R = 1$
- Paràmetre d'ajust:  $\delta = 5$
- Paràmetre del soroll normalitzat:  $\bar{\gamma} = 1$

Noteu que les tècniques que veurem tot seguit serveixen per qualsevol altre funció definida per paràmetres diferents als anteriors.

## 17.1 Aproximació de la funció òptima amb polinomis de radicals

A partir dels resultats que es van obtenir amb la funció òptima de Hasting-Dillard (veure expressió (14.54)) definida pels paràmetres anteriors ( $\bar{g}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 2.5, n_e = 10$ )), hem realitzat una aproximació polinòmica fent servir les funcions arrel quadrada i arrel cúbica com funcions de referència. El fet d'utilitzar l'arrel quadrada en l'aproximació polinòmica és

trivial, ja que per força ha de tendir d'alguna manera cap aquesta funció. L'arrel cúbica s'utilitza perquè en diferents articles s'afirma que dona un major rendiment per algunes condicions de dispersió i aproxima millor la PDF per una Gaussiana que el cas de l'arrel quadrada per energies del senyal petites (bit "0" principalment). Tot i així, també hem considerat introduir expressions del tipus  $x^{1/\alpha}$  amb  $0 < \alpha \leq 1$ , per donar una major exactitud en la interpolació, ja que es tracten de funcions còncaves com l'arrel quadrada i l'arrel cúbica. Aquesta família de funcions còncaves són les més indicades per tractar problemes amb soroll ASE, soroll Gaussià o la combinació entre ambdós. La interpolació que utilitzarem es basa en la teoria de mínims quadrats.

Abans de començar amb la interpolació, s'han de definir les funcions que utilitzarem. No importa que siguin funcions ortogonals, tot i que pel fet de no tenir una base de funcions ortogonals es complicaran els càlculs matricials. Utilitzarem expressions exponencials per separar la part que tendeix a l'arrel quadrada (valors alts d'abscissa) i la part que presenta una pendent més abrupta (valors petits d'abscissa). Seguint aquest criteri, les funcions que utilitzarem són:

$$f_1(x) = 1 \quad (17.1)$$

$$f_2(x) = x \cdot e^{-x/\tau} \quad (17.2)$$

$$f_3(x) = \sqrt{x} \cdot (1 - e^{-x/\tau}) \quad (17.3)$$

$$f_4(x) = \sqrt[3]{x} \cdot e^{-x/\tau} \quad (17.4)$$

I en general:

$$f_n(x) = \sqrt[n-1]{x} \cdot e^{-x/\tau}, \quad n \geq 4 \quad (17.5)$$

Així, la funció òptima l'aproximarem interpolant funcions d'aquest tipus com:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) \quad (17.6)$$

Direm que  $y$  és el vector del valor exacte de la funció òptima (obtingut per Hasting-Dillard, Chebyshev o per mètodes numèrics). Així, el nostre objectiu és minimitzar la distància euclidiana entre el valor exacte  $y$  i l'aproximació  $\bar{y}$  (problema de mínims quadrats).

$$\min_{\alpha} d(y, \bar{y}) = \min_{\alpha} \|y - \bar{y}\|^2 \quad (17.7)$$

Amb aquest criteri el mínim s'assoleix quan  $y - \bar{y} \perp \bar{y}$ , i si suposem que aquestes funcions formen un subespai vectorial format pels vector  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , que l'anomenarem subespai

vectorial de Hilbert  $X = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ , llavors  $y - \bar{y} \perp X$  (error perpendicular a les dades). D'aquesta manera obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\langle y - \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j, f_i \rangle = 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad (17.8)$$

I aïllant queda,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \langle f_j, f_i \rangle = \langle y, f_i \rangle \quad (17.9)$$

D'aquest sumatori es pot extrapolar un sistema d'equacions,

$$\begin{cases} \alpha_1 \langle f_1, f_1 \rangle + \alpha_2 \langle f_2, f_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle f_n, f_1 \rangle = \langle y, f_1 \rangle \\ \alpha_1 \langle f_1, f_2 \rangle + \alpha_2 \langle f_2, f_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle f_n, f_2 \rangle = \langle y, f_2 \rangle \\ \dots \\ \alpha_1 \langle f_1, f_n \rangle + \alpha_2 \langle f_2, f_n \rangle + \dots + \alpha_n \langle f_n, f_n \rangle = \langle y, f_n \rangle \end{cases} \quad (17.10)$$

Anomenarem  $M$  a la matriu formada pels productes escalars. Degut a la independència lineal dels vectors  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , el determinant de  $M$  ha de ser diferent de zero.

$$M = \begin{pmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \dots & \langle f_n, f_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_1, f_n \rangle & \dots & \langle f_n, f_n \rangle \end{pmatrix} \quad (17.11)$$

Una vegada hem definit la matriu  $M$ , podem escriure el sistema en forma matricial com (el punt “ $\cdot$ ” denota el producte escalar):

$$M\alpha = y^T \cdot \mathbf{f} \quad (17.12)$$

On

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad (17.13)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (17.14)$$

Finalment, els coeficients que minimitzen l'error es calculen de la següent manera:

$$\alpha = M^{-1}(y^T \cdot f) \quad (17.15)$$

El codi MATLAB que hi ha a sota implementa aquesta solució de mínims quadrats per un marge d'aproximació [0.01, 5000]. Noteu que comencem per 0.01 perquè si comencem per 0, la funció òptima retorna un valor no correcte (NaN Not-a-Number en MATLAB). També hem de destacar que hem fixat  $\tau = 1000$  en les expressions (17.2), (17.3) i (17.4).

```
function alpha = regresion(n)
pasos = 10000;
tau = 1000;
t = linspace(0.01, 5000, pasos)';
for j = 1:pasos
    y(j,1)=g_function_hasting_dillard(t(j,1), 1, 5, 5);
end
p1 = ones(pasos,1);
p2 = t.*exp(-t./tau);
p3 = sqrt(t).*(1-exp(-t./tau));
p = [p1 p2 p3];
for i=4:n
    k = ((t).^(1/i)).*exp(-t./tau);
    p = [p k];
end
M = 0.*ones(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        M(i,j) = p(:,j)'*p(:,i);
    end
end
s = 0.*ones(n,1);
for i=1:n
    s(i,1)=y'*p(:,i);
end
alpha = inv(M)*s;
y2 = p*alpha;
determinante = det(M)
subplot(121)
plot(t,y, t,y2), grid on,
subplot(122)
plot(t, y-y2), grid on
```

Per un ordre d'aproximació  $n = 7$  s'obtenen uns bons nivells d'aproximació com es justifica tot seguit. En la figura 17.1 es representa la interpolació de la funció òptima (color vermell) vers l'arrel quadrada (color blau discontinu) i la funció error entre la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard. Observant l'error entre la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard veiem que l'error és bastant petit en tot el marge de l'aproximació.



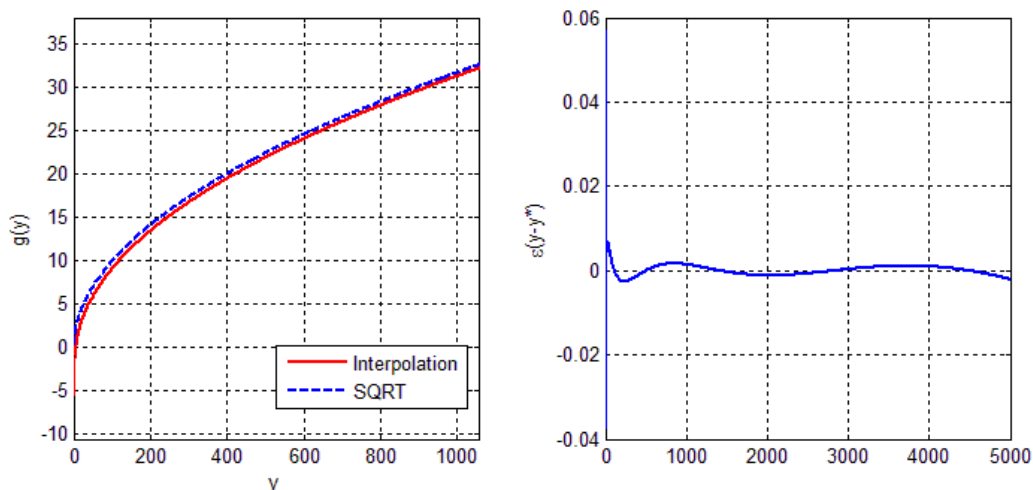


Figura 17.1. Interpolació de la funció òptima de Hasting-Dillard amb paràmetres  $n=10$ ,  $\delta=5$  i  $\gamma=1$  i error entre l'aproximació de Hasting-Dillard i la interpolació

Els coeficients del vector  $\alpha$  que donen aquests resultats són (amb  $\tau = 1000$ ):

$$\begin{aligned} \alpha^t &= [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_7] = \\ &= [-0.482952205464244 \quad 0.001574524358148 \quad 1.003568777377950 \quad 2.339024219512940 \cdot 10^2 \\ &\quad - 1.188438014984131 \cdot 10^3 \quad 1.853676559448242 \cdot 10^3 \quad - 9.005298538208008 \\ &\quad \cdot 10^2] \end{aligned}$$

Per demostrar que aquesta aproximació és robusta hem realitzat un anàlisi dels moments estadístics i hem comparat amb els resultats de la funció òptima obtinguda pel mètode de Hasting-Dillard. La figura 17.2 representa el moment de primer ordre en funció de  $s/\sigma$  per la interpolació que hem trobat. També hem inclòs l'error entre la interpolació i la funció òptima de Hasting Dillard. Si observem l'error entre la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard, podem veure que l'error en mitja és petit per valors  $s/\sigma < 70$ . Això és evident, ja que l'aproximació minimitza l'error en la regió  $s^2/\sigma^2 \in [0, 5000]$ .

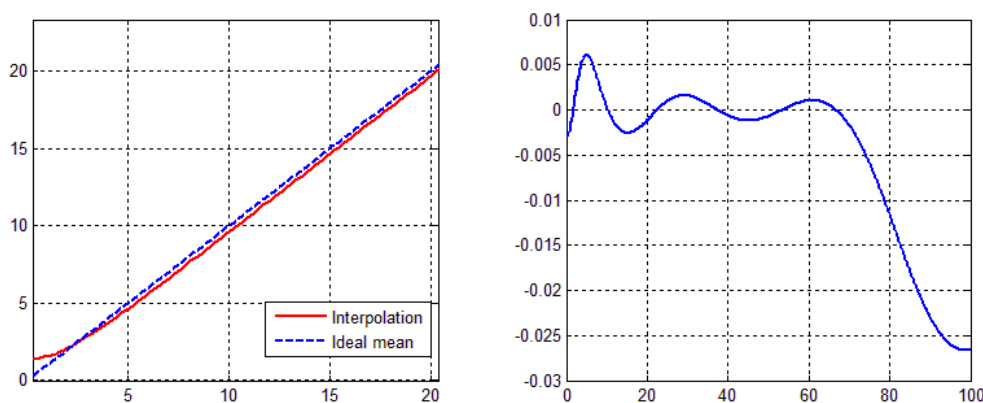


Figura 17.2. Mitja de la interpolació en funció de  $s/\sigma$ , i error entre la mitja de la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard

En la figura 17.3 podem veure la varianza de l'interpolació i l'error entre aquesta i la varianza de la funció òptima de Hasting-Dillard. Aquesta interpolació està pensada per treballar en el rang  $[0, 5000]$ , i com es pot veure en 17.3 a partir de  $\sqrt{5000} \approx 70.7$ , la varianza de la

interpolació divergeix lleugerament de la varianza de la funció òptima de Hasting. Tot i així, l'error més gran s'observa que es troba per valors de  $s/\sigma$  propers al zero.

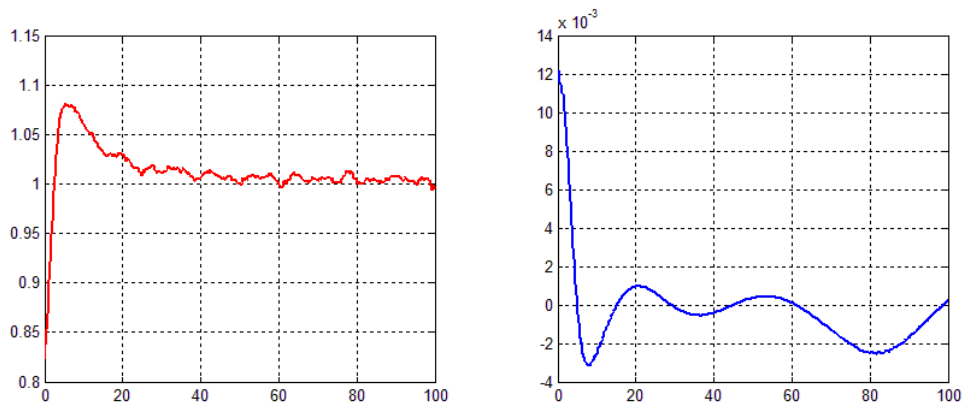


Figura 17.3. Varianza de la interpolació en funció de  $s/\sigma$ , i error entre la varianza de la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard

En les figures 17.4 i 17.5 es representa el paràmetre d'asimetria o "Skewness" i la Curtosis, respectivament. Ambdues figures mostren que la interpolació que hem trobat pot ser una bona aproximació de la funció òptima de Hasting-Dillard, ja que els resultats són pràcticament idèntics, excepte per valors de  $s/\sigma$  propers al zero on es pot veure que és on es comet el major error.

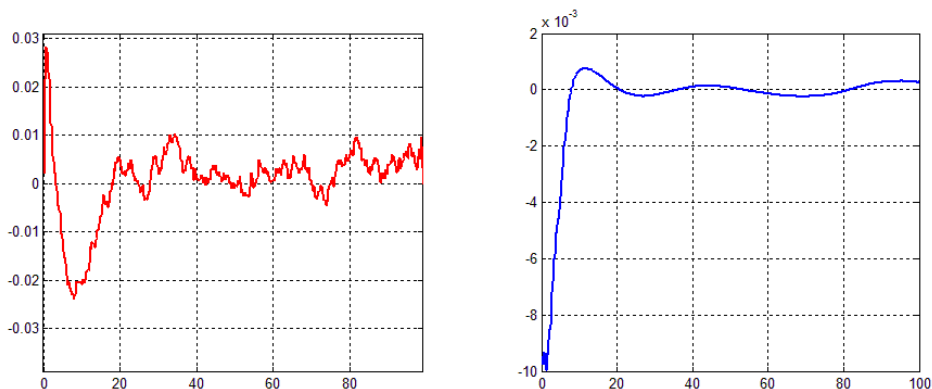


Figura 17.4. Skewness de la interpolació en funció de  $s/\sigma$ , i error entre l'Skewness de la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard

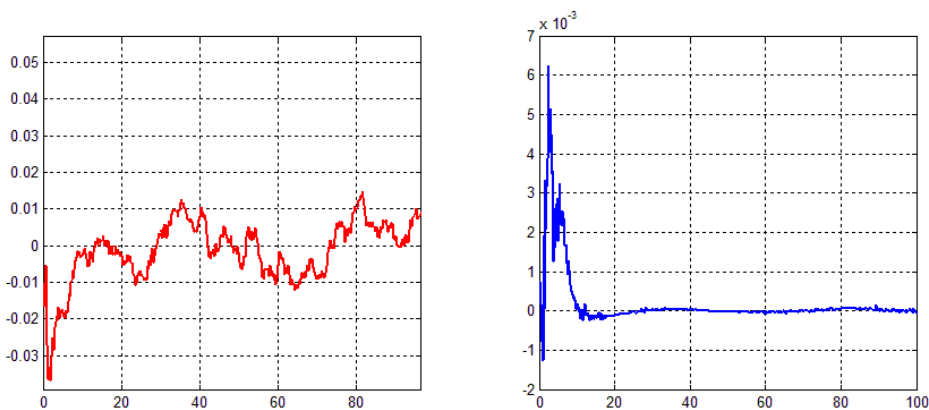


Figura 17.5. Excess Kurtosis de la interpolació en funció de  $s/\sigma$ , i error entre l'EK de la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard

## 17.2 Interpolació per trams i mínims quadrats

En capítols anteriors vam veure que la funció òptima només és òptima per una distribució chi-square amb uns paràmetres concrets (nombre de graus de llibertat, paràmetre de no centralitat i varianza del soroll ASE). Això vol dir que per cada distribució amb paràmetres  $n$  (nombre de graus de llibertat),  $\lambda$  (paràmetre de no centralitat) i  $\sigma$  (varianza del soroll ASE) només existeix una sola funció òptima que transformi aquesta PDF en una Gaussiana. El nombre de graus de llibertat  $n$  no és un problema greu (es pot estimar a partir del mètode dels moments), en canvi la dependència de la funció òptima amb  $\lambda$  fa irrealitzable trobar una funció única i universal. La figura 17.6 representa la família de funcions òptimes per  $n = 5$  graus de llibertat i per diferents paràmetres de no centralitat. Es pot veure que totes les funcions evolucionen de forma casi paral·lela (no són paral·leles, veure figura 14.22) a l'arrel quadrada (color vermell) i contra més augmentem el paràmetre de no centralitat, més s'aproxima la funció òptima a l'arrel quadrada.

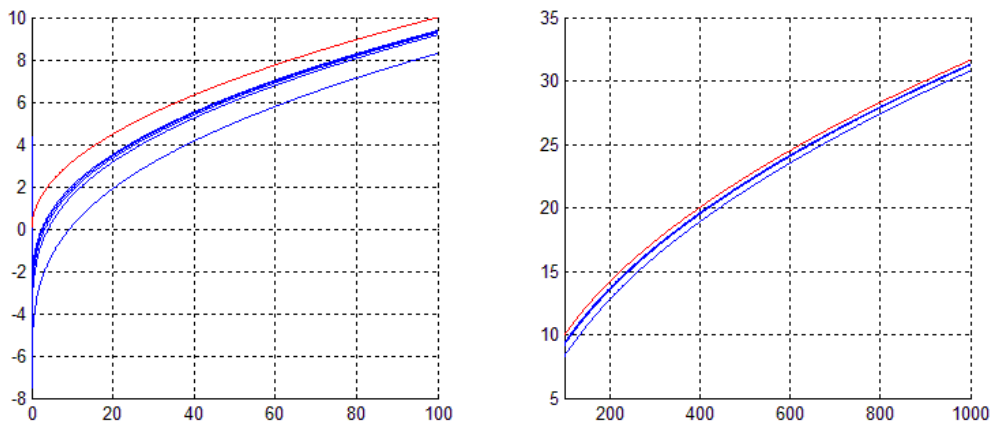


Figura 17.6. Família de funcions òptimes per  $n=5$  graus de llibertat i  $\gamma=1$  en funció de  $\delta$

Si pensem en cada una d'aquestes funcions òptimes, veurem que a la pràctica només s'utilitza una part del domini i la imatge d'aquesta. En la figura 17.7 es representen els trams que realment s'utilitzen de cada una d'aquestes funcions òptimes. Aquests trams s'han obtingut generant seqüències aleatòries de 10.000 esdeveniments chi-square amb  $n = 5$  graus de llibertat. Mitjançant cada seqüència s'ha calculat el màxim i el mínim, que definiran l'interval de cada tram. Finalment, s'ha representat la funció òptima en aquell tram. En la figura 17.7 s'han representat els trams òptims per  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 50$  i  $\lambda = 500$ . Com s'ha dit anteriorment, contra més augmentem el paràmetre de no centralitat, més s'aproxima el tram a l'arrel quadrada. Noteu que per  $\lambda = 0$  el tram òptim no coincideix amb l'arrel quadrada i per  $\lambda = 500$  pràcticament són idèntiques.

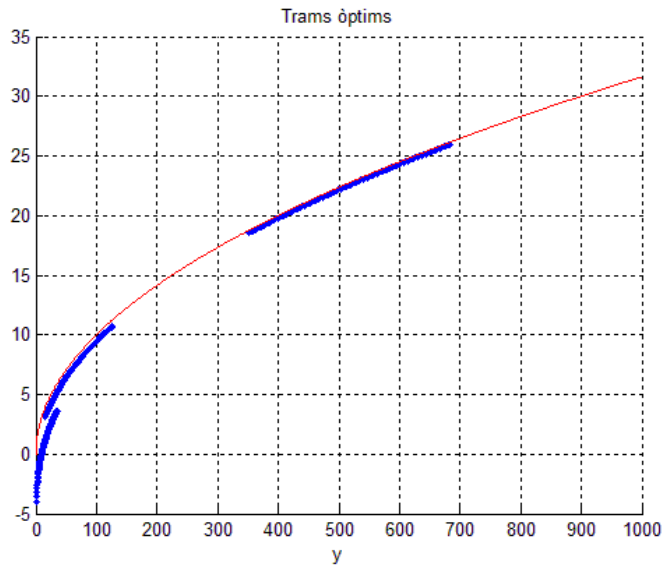


Figura 17.7. Trams òptics per diferents paràmetres de no centralitat i arrel quadrada

A partir d'aquest criteri per trams, va sorgir la idea de trobar la funció la qual minimitza l'error entre un conjunt de trams. D'aquesta manera, fent servir la teoria de mínims quadrats que hem vist en 17.1, l'objectiu serà trobar els coeficients del vector  $\alpha$  que minimitzen l'error quadràtic a partir de la interpolació lineal dels diversos trams. La figura 17.8 mostra una visió més densa del conjunt de trams que representen les funcions òptimes. S'observa que per valors alts, el conjunt de trams convergeixen en l'arrel quadrada i coincideixen entre ells. En canvi, per valors propers al zero, cada un dels trams són molt diferents (sobretot en pendent).

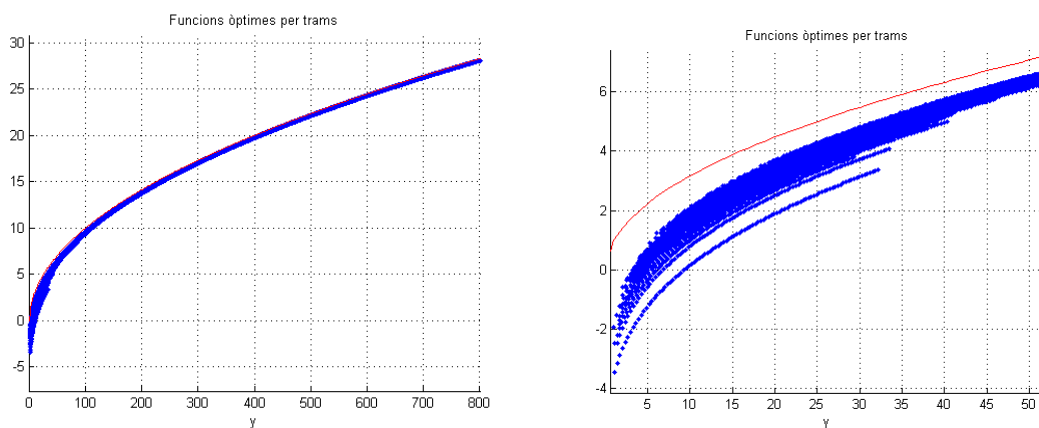


Figura 17.8. Conjunt de trams òptims (color blau) vers l'arrel quadrada (color vermell)

Evidentment, per fer la interpolació utilitzarem les mateixes funcions base que hem utilitzat en l'apartat 17.1 (veure (17.1), (17.2), (17.3) i (17.5)). En aquest apartat, però, fixarem el coeficient  $\tau = 100$ . En l'annex 7 es troba el programa en MATLAB que realitza aquesta interpolació dels trams. La figura 17.9 mostra la interpolació per mínims quadrats (en color blau), el conjunt de punts donats pels diferents trams (color vermell) i la funció òptima normalitzada de Hasting-Dillard amb paràmetre d'ajust  $\delta = 5$  i  $n_e = 10$  (color verd).

Sobretot és important destacar que per amplituds de senyal grans, la interpolació és idèntica als trams òptims.

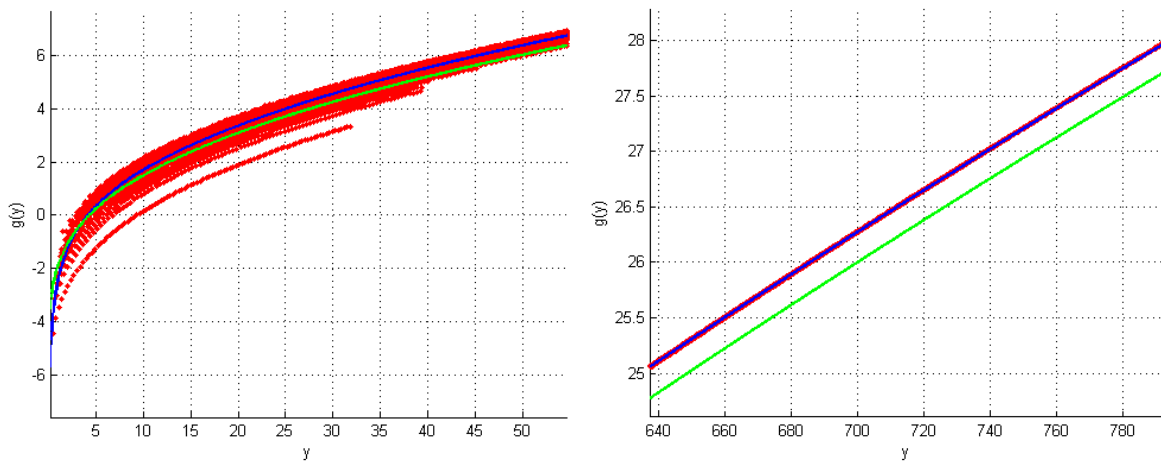


Figura 17.9. Comparació de la interpolació dels trams òptims (color blau), la funció òptima de Hasting-Dillard ( $n=10$  i  $\delta=5$ ) (color verd) i els diferents trams òptims (color vermell)

Els coeficients que retorna l'algoritme poden variar lleugerament d'una realització a una altra, degut a que la longitud de cada un dels trams és aleatòria. Per una de les realitzacions concretes, el vector de coeficients  $\alpha$  és (recordem que hem utilitzat  $\tau = 100$ ):

$$\begin{aligned} \alpha^t &= [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_7] = \\ &= [-0.127880347892642 \quad -0.032068896107376 \quad 0.997871653875336 \quad 7.641802139282227 \cdot 10^2 \\ &\quad -3.953115417480469 \cdot 10^3 \quad 6.137693298339844 \cdot 10^3 \quad -2.951116851806641 \cdot 10^3] \end{aligned}$$

La figura 17.10 representa els quatre moments estadístics de la interpolació per trams que hem realitzat. A destacar per sobre de la resta, el comportament de la mitja, ja que és pràcticament lineal i millora tots els casos vistos anteriorment (funcions òptimes de Hasting-Dillard, Chebyshev, arrel quadrada, etc.). La varianza té un comportament molt semblant al que s'obtenia amb les aproximacions de la funció òptima de Hasting-Dillard i Chebyshev. Possiblement, el paràmetre que més empitjora és la kurtosis.

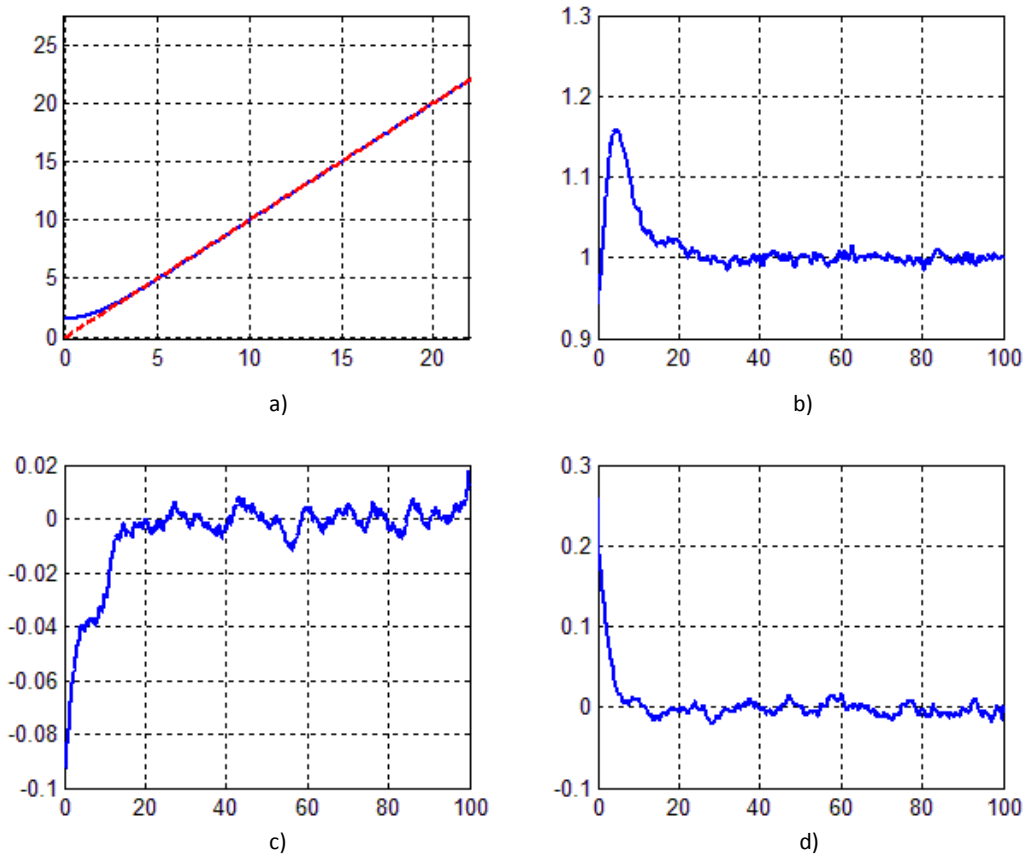


Figura 17.10. Moments estadístics de la interpolació per trams:  
a) Mitja, b) Varianza, c) Skewness, d) Excess Kurtosis

Suposem que ens arriba un senyal a l'entrada del fotodetector modulad en OOK i conformat amb formes d'ona NRZ, amb una  $E_b/N_0 = 10.96$  dB, relació d'extinció infinita i absència de ISI degut a que suposem un canal no dispersiu. En aquest cas, en la figura 17.11 es representa el logaritme de les PDF's de sortida de la interpolació per trams, tant pel bit '0' (color vermell), com pel bit '1' (color verd), en comparació amb dues Gaussians ideals de mitja i varianza experimental (blau discontinu pel bit "0" i negre discontinu pel bit "1"). Podem destacar que la PDF del bit "1" és pràcticament idèntica a la ideal, i que la PDF del bit "0", encara que no és simètrica, presenta una part dreta pràcticament idèntica a la Gaussiana ideal. Com ja vam veure en capítols anteriors, en un sistema de comunicacions òptic digital el paràmetre de més interès és la BER. En aquest sentit, per calcular la BER necessitem analitzar la cua de la dreta de la PDF del bit "0" i la cua de l'esquerra de la PDF del bit "1", per tant l'aproximació per trams pot resultar una bona alternativa a les funcions que hem vist.

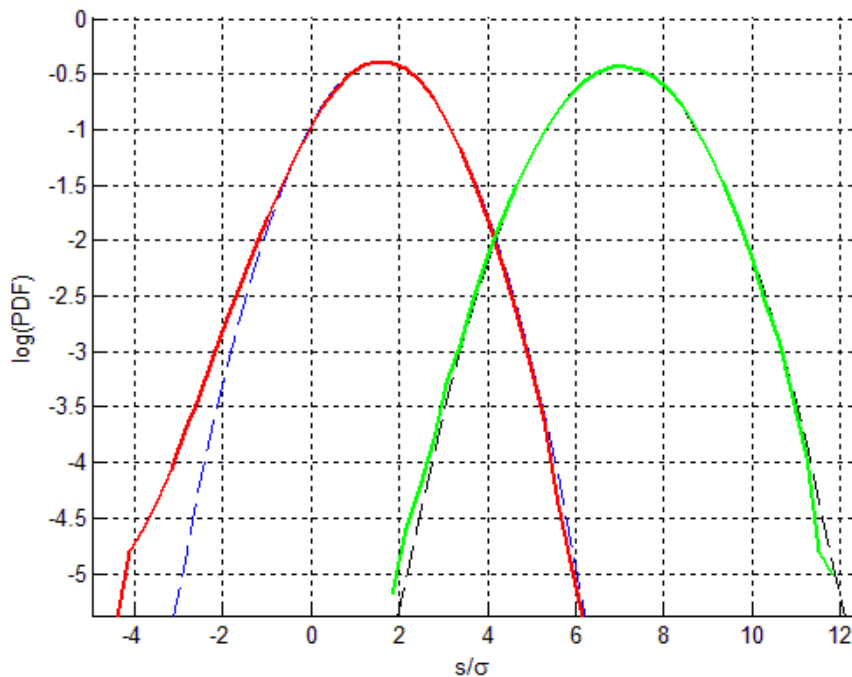


Figura 17.11. PDF's logarítmiques a la sortida de la interpolació per trams pel bit "0" i "1" suposant una ER infinita i una relació  $E_b/N_0=10.69\text{dB}$

### 17.3 Teoria de l'aproximació

En el camp de la teoria d'aproximació podem trobar diferents formes d'aproximar una funció, tal i com es pot consultar en [43]. Abans d'utilitzar qualsevol de les tècniques d'aproximació que veurem tot seguit, primer hem de fixar quin és l'interval d'aproximació i l'ordre de l'aproximació que volem utilitzar. Tant l'interval com l'ordre de l'aproximació dependran de les exigències de l'aplicació, segons l'error màxim que es pot cometre. En el nostre cas l'interval el pot donar la relació d'extinció. Una vegada coneixem l'ordre i l'interval de l'aproximació, podem utilitzar algun dels mètodes més comuns de la teoria de l'aproximació, com són:

- Aproximació de mínims quadrats en sèrie de polinomis de Chebyshev o altres sistemes de funcions ortogonals (sèries de Fourier, interpolació amb polinomis de Hermite, interpolació de Laguerre, interpolació de Legendre, etc...). Això vol dir que aproximem la funció objectiu per una combinació lineal d'aquestes funcions ortogonals, i els coeficients de l'expansió venen definits a través de minimitzar l'error quadràtic o a través de minimitzar la distància euclidiana entre el valor exacte i l'aproximació. Un cas particular d'aquest és la regressió lineal amb la base  $\{1, x\}$ .
- Interpolació racional de polinomis (quocient de polinomis). La forma més coneguda és l'aproximació de Padé, molt relacionada amb l'aproximació en sèrie de Taylor.
- Interpolació polinòmica lineal, quadràtica, cúbica o n-èssima de forma clàssica a partir de la matriu d'interpolació o matriu de Vandermonde (i de la seva inversa). Interpolació amb polinomis de Lagrange, interpolació amb polinomi de Newton.

- Interpolació de Taylor.

De entre totes aquestes tècniques, nosaltres només farem servir l'interpolació racional de polinomis, com un exemple d'interpolació amb tècniques d'aproximació generals de la funció òptima de Hasting-Dillard, tot i així podríem haver fet servir qualsevol altra.

### 17.3.1 Aproximacions racionals de polinomis

L'aproximació de funcions a partir d'interpolació racional de polinomis és molt interessant i senzilla d'aplicar (sempre que utilitzem algun programa com MATLAB o similar). Aquest mètode aproxima una funció donada, per exemple  $f(x)$ , en un quocient de dos polinomis  $N(x)/D(x)$ .

Per realitzar una aproximació racional de polinomis de la funció òptima de Hasting-Dillard, hem utilitzat la funció `ratpolyfit` del MATLAB, que utilitza la matriu de Vandermonde per l'interpolació polinòmica. S'ha de notar que aquest mètode no utilitza funcions ortogonals per realitzar l'interpolació. En el següent codi en MATLAB es mostra com vam aproximar la funció òptima de Hasting-Dillard (òptima pels paràmetres:  $n_e = 10$  modes en total,  $\delta = 5$  i  $\bar{\gamma} = 1$ ) en el rang  $[0, 1000]$ , utilitzant aquest algoritme d'aproximació racional. Aquesta aproximació l'anomenarem  $R_{n,m}(y)$ , on  $n$  és l'ordre del polinomi del numerador i  $m$  és l'ordre del polinomi del denominador. Direm que  $R_{n,m}(y)$  és una aproximació d'ordre  $(n, m)$  de la funció òptima de Hasting-Dillard. En aquest cas hem utilitzat una aproximació d'ordre  $(5, 5)$  tal i com es mostra al codi.

```
function [N, D]=interpolacio_funcio_optima
t = linspace(0.01, 1000, 40);
z2 = g_function_hasting_recursive(t', 1, 2.5, 5);
[N, D]=ratpolyfit(t', z2, 5, 5);
figure(1); pzmap(N, D),
yy=polyval(N,t')./polyval(D,t');
figure(2); plot(t', z2, 'b', t', yy, 'dr'); grid on; axis([min(t') max(t')
min(yy) max(yy)]);
```

El resultat d'aquest script es mostra en les figures 17.12 i 17.13, on es representa el diagrama de pols i zeros de la funció racional  $R_{5,5}(y)$ , i la interpolació vers l'arrel quadrada i l'error entre la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard, respectivament. En la figura 17.13, en color blau es representa la interpolació racional i en color vermell discontinu l'arrel quadrada, també es mostra el logaritme de l'error entre la interpolació racional i la funció òptima de Hasting-Dillard. Els coeficients del dos polinomis que retorna l'algoritme en el cas d'una aproximació d'ordre  $(5, 5)$  són (en notació MATLAB):

$$\begin{aligned} N &= [N(1) \ N(2) \ N(3) \ N(4) \ N(5) \ N(6)] = \\ &= [4.600610143316194 \cdot 10^{-10} \ 1.656117349961646 \\ &\cdot 10^{-6} \ 8.633146416959213 \\ &\cdot 10^{-4} \ 0.075308347941204 \ 0.409342989937109 \ -3.443264808261804] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= [D(1) \ D(2) \ D(3) \ D(4) \ D(5) \ D(6)] \\
 &= [ 2.516226906225482 \cdot 10^{-12} \ 3.663098743054089 \\
 &\quad \cdot 10^{-8} \ 4.752806306899835 \\
 &\quad \cdot 10^{-5} \ 0.010792732718656 \ 0.395061983543388 \ 1.0000]
 \end{aligned}$$

És a dir, l'expressió que aproxima a la funció òptima de Hasting-Dillard amb paràmetres  $n_e = 10$ ,  $\delta = 5$  i  $\bar{\gamma} = 1$  és:

$$R_{5,5}(y) = \frac{N(1) \cdot y^5 + N(2) \cdot y^4 + \dots + N(5) \cdot y + N(6)}{D(1) \cdot y^5 + D(2) \cdot y^4 + \dots + D(5) \cdot y + D(6)}$$

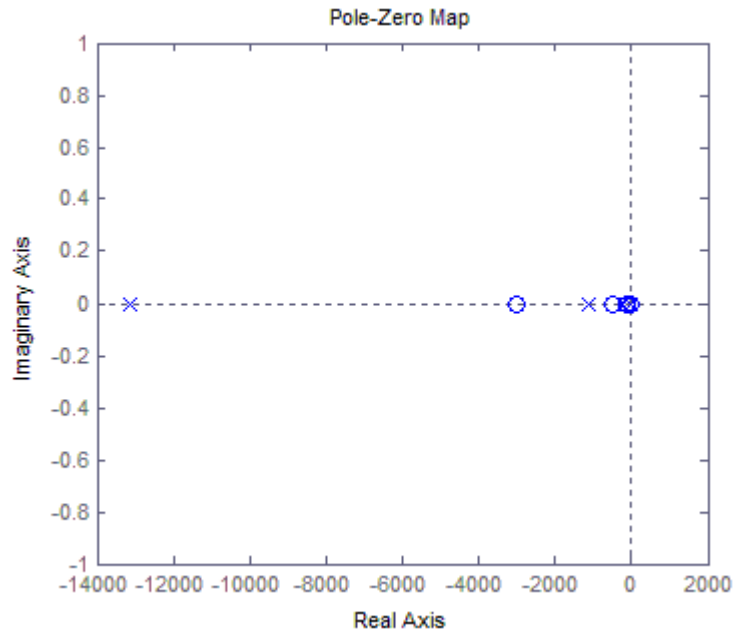


Figura 17.12. Diagrama de pols i zeros de la interpolació racional

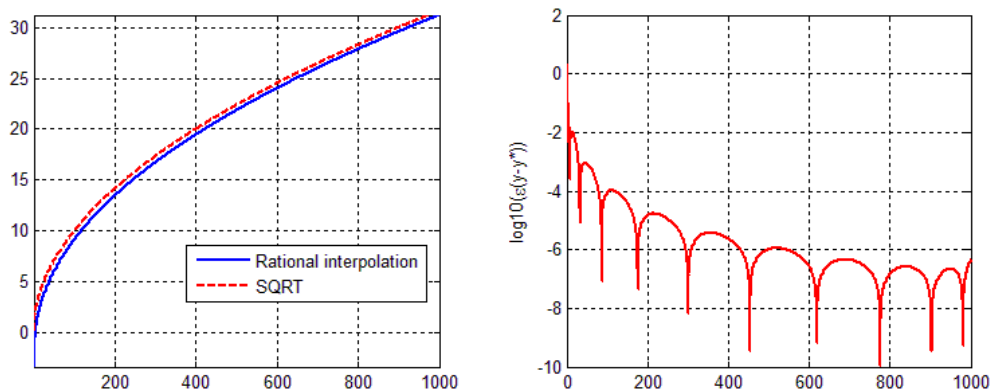


Figura 17.13. Interpolació racional i error logarítmic entre la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard per  $n=10$ ,  $\delta=5$  i  $\gamma=1$



# 18 Funció òptima considerant soroll ASE i soroll tèrmic

Durant tota la memòria hem analitzat el soroll en el receptor negligint el terme de soroll tèrmic que introdueix el fotodíode PIN o altres components electrònics. A la pràctica això no passa, i la PDF de les mostres sorolloses en recepció és la convolució de diferents PDF's donades pel soroll ASE, soroll tèrmic, soroll shot, etc.

En aquest capítol analitzarem el cas en que existeixi soroll tèrmic i soroll ASE sobre el senyal rebut. Plantejarem un anàlisi basat en una sèrie d'aproximacions amb les quals arribarem a una família de funcions dependents de la quantitat de soroll tèrmic i ASE. Aquest capítol es basa en el recull d'informació dels articles [9-12], i pretén ser una passarel·la per futurs treballs i línies d'investigació.

## 18.1 Càlcul de la PDF del senyal rebut

Per trobar la funció òptima, en el cas que considerem la suma del soroll tèrmic i el soroll ASE, haurem de realitzar tot una sèrie d'aproximacions, ja que sinó els càlculs es poden complicar moltíssim. Suposarem el model del sistema vist al capítol 2, on el transmissor modula la intensitat del senyal transmès utilitzant un alfabet binari (per exemple una modulació OOK). Assumirem que el nivell d'intensitat pel nivell lògic '0' és diferent de zero, ja que és el més usual en la majoria de transmissors (per tant suposarem una relació d'extinció diferent a infinit). Seguint aquest criteri  $ER = 10 \cdot \log P_1/P_0 < 10$  dB pot ser una bona cota.

Suposarem que el soroll ASE es modela per un canal AWGN en el domini òptic. El receptor és el mateix que el descrit en el model del sistema en el capítol 2, així el senyal òptic es filtra òpticament i aleshores es converteix a corrent elèctric amb un díode PIN o un fotodetector APD. El fotocorrent resultant es filtra amb un filtre elèctric de post-detecció. Per simplicitat, en l'anàlisi següent, utilitzarem un filtre òptic ideal i un filtre integrador passa-baix. La

sortida del filtre elèctric és idealment mostrejada (amb resolució infinita) a la freqüència  $1/T$ . El model del sistema de comunicacions òptiques descrit es mostra en la figura 18.1.

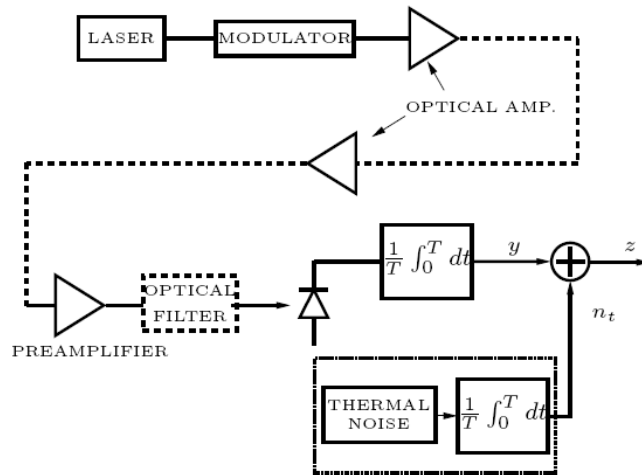


Figura 18.1. Model del sistema de comunicacions òptiques considerant soroll additiu d'amplificació òptica i soroll tèrmic

Les mostres rebudes en la figura 18.1 es poden escriure com:

$$z = y + n_t \quad (18.1)$$

$$n_t = \frac{1}{T} \int_0^T I_t(t) dt \quad (18.2)$$

On  $I_t(t)$  és el corrent generat pel soroll tèrmic (notar que  $n_t$  és una v.a. Gaussiana). El senyal rebut també es pot escriure descomponent el terme  $y$  en:

$$z = I_s + n_{sp} + n_t = s + n_{sp} + n_t \quad (18.3)$$

On  $n_{sp}$  és el terme de soroll òptic amb valor mig  $I_{sp}$  ( $E\{n_{sp}\} = I_{sp}$ ).

L'anàlisi comença amb el model estadístic proposat per Marcuse (veure capítol 4) pel soroll òptic i amb la PDF del soroll tèrmic:

$$f_{y|s}(y) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi K_s I_{spm}}} e^{-\frac{(\sqrt{y} - \sqrt{K_s})^2}{I_{spm}}}, \quad y > 0 \quad (18.4)$$

$$f_{n_t}(n_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{n_t^2}{2\sigma_t^2}} \quad (18.5)$$

On

- $f_{y|s}(y)$  = La PDF del senyal rebut (senyal + soroll òptic) condicionada al símbol transmès.
- $f_{n_t}(n_t)$  = La PDF del soroll tèrmic.

A més a més,

- $K_s = I_s + I_{sp} - \frac{3}{2}I_{spm}$
- $\sigma_t^2$  = varianza del soroll tèrmic.

Noteu que la PDF (18.4) és una simplificació de la PDF d'una v.a. chi quadrada. Per veure més detalls d'aquesta simplificació, referiu-vos al capítol 9, on es fa un anàlisi d'aquesta simplificació. Aquesta simplificació només és vàlida quan tenim una relació d'extinció més gran que zero ( $r_{01} = P_0/P_1 > 0$ ) i que  $N_0$  és suficientment petit.

A partir d'aquí, donat que les variables aleatòries  $n_t$  (soroll tèrmic) i  $y$  (senyal + soroll òptic) són independents, es pot demostrar que la funció de densitat de probabilitat de la suma (condicionada al símbol transmès) ve donada per la convolució de les seves respectives PDF's [25]:

$$f_{z|s}(z) = f_{y|s}(z) * f_{n_t}(z) \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi^2 K_s I_{spm} \sigma_t^2}} \int_0^\infty \exp \left[ - \left( \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{K_s})^2}{I_{spm}} + \frac{(z-x)^2}{2\sigma_t^2} \right) \right] dx \quad (18.6)$$

Amb l'objectiu d'obtenir la PDF de  $z$  (18.1), és necessari solucionar la integral (18.6), que per simplificar es pot escriure com:

$$\int_0^\infty e^{-g(x)} dx \quad (18.7)$$

On

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{K_s})^2}{I_{spm}} + \frac{(z-x)^2}{2\sigma_t^2} \quad (18.8)$$

Aquesta integral es pot aproximar per:

$$\int_0^\infty e^{-g(x)} dx \approx e^{-g(x_r)} \Delta x \quad (18.9)$$

On  $x_r$  és tal que:

$$-g(x_r) = \max_k \{-g(k\Delta x)\} \quad (18.10)$$

Per tal d'obtenir  $x_r$ , és necessari trobar el màxim de  $-g(x)$ , o de forma equivalent el mínim de  $g(x)$ . Per trobar el mínim podem fer-ho a partir de la primera derivada de  $g(x)$ , que ve donada per:

$$g'(x) = h(x) = \frac{1 - x^{-1/2} \sqrt{K_s}}{I_{spm}} + \frac{x - z}{\sigma_t^2} \quad (18.11)$$

Notar que la primera derivada de  $h(x)$  (18.11) és sempre positiva, així  $h(x)$  té només una arrel real. D'aquesta manera el criteri de màxima verosimilitud (que intenta minimitzar l'integral de la convolució) és equivalent a maximitzar la següent funció:

$$\hat{f}_{z|s}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{K_s}} e^{-g(x_r(z))} \quad (18.12)$$

O també es pot escriure com:

$$f_{z|s}(z|s) \approx G_s e^{-g_s(z)} \quad (18.13)$$

$$g_s(z) = \frac{(\sqrt{\omega_n} - \sqrt{I_s})^2}{N_0} + \frac{(z - \omega_n)^2}{2\sigma_t^2} \quad (18.14)$$

On  $G_s$  és un factor dependent del senyal tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} G_s e^{-g_s(z)} dz = 1$ , mentre que  $\omega_n > 0$  és el valor que minimitza  $g_s(z)$ . Noteu que aquesta minimització comporta solucionar l'equació de tercer ordre  $(dg_s(z))/d\omega_n = 0$ .

## 18.2 El mètode de la inversa i relació entre PDF's: Expressió genèrica de la PDF

Tal i com vam veure en capítols anteriors, el mètode de la inversa pot transformar una v.a.  $z$  a una v.a. Gaussiana  $u$  a través d'una transformació no lineal  $\mathcal{T}_s(\cdot)$  com la que segueix:

$$u = \mathcal{T}_s(z) = F_{u|s}^{-1}(F_{z|s}(z)) \quad (18.15)$$

On  $F_{u|s}(\cdot)$  i  $F_{z|s}(\cdot)$  són les funcions de distribució de probabilitat de  $u$  i  $y$ , respectivament, quan es reb el senyal lliure de soroll  $s$  (o  $I_s$ ). Per la monotonia de les funcions de distribució de probabilitat, noteu que  $\mathcal{T}_s(\cdot)$  és també una funció monòtona creixent.

Assumirem que  $\mathcal{T}_s(\cdot)$  és una funció diferenciable creixent. Aquesta propietat es verifica en molts casos d'interès com en el soroll Gaussià, el soroll ASE, o la combinació de soroll

Gaussià i soroll ASE. Així, concloem que la funció inversa  $\mathcal{T}_s^{(-1)}(\cdot)$  de la funció  $\mathcal{T}_s(\cdot)$  existeix i és també una funció diferenciable creixent. Aleshores, es pot demostrar que:

$$f_{u|s}(u|s) = f_{z|s}(z|s)|\mathcal{T}'_s(z)|^{-1} \quad (18.16)$$

On  $z = \mathcal{T}_s^{(-1)}(u)$ , i  $\mathcal{T}'_s(z) = d\mathcal{T}_s(z)/dz$ . També:

$$f_{u|s}(u|s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta_s}} e^{-\frac{1}{2\zeta_s}[u-\bar{u}_s]^2} \quad (18.17)$$

On  $\bar{u}_s$  i  $\zeta_s$  són la mitja i la varianza de  $u$ , respectivament. Ja que  $\mathcal{T}_s(\cdot)$  és una funció diferenciable creixent (és a dir,  $\mathcal{T}'_s(z) > 0, \forall z$ ), podem expressar la PDF condicionada del senyal rebut com:

$$f_{z|s}(z|s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta_s}} e^{-\frac{1}{2\zeta_s}[\mathcal{T}_s(z)-\bar{u}_s]^2} \mathcal{T}'_s(z), \quad \forall z \quad (18.18)$$

Si suposem que  $z$  està concentrada prop de la seva mitja  $\tilde{s}$ , llavors  $f_{z|s}(z|s)$  és negligible fora de l'interval  $(\tilde{s} - \epsilon, \tilde{s} + \epsilon)$  amb  $\epsilon > 0$  i en aquest interval  $\mathcal{T}'_s(z) \approx \mathcal{T}'_s(\tilde{s})$ . Per la desigualtat de Chebyshev, noteu que aquesta condició pot ser verificada quan la potència del soroll és suficientment baixa, això és quan  $Pr\{|z - \tilde{s}| \geq \epsilon\} \leq (\mathcal{M}_{2,s}/\epsilon^2)$  amb  $\mathcal{M}_{2,s}$  sent el moment central de segon ordre condicionat del senyal rebut  $z$ . Així, podem verificar que  $E_s\{z\} = \tilde{s} \approx s$  i per tant

$$\bar{u}_s \approx \mathcal{T}_s(\tilde{s}) \approx \mathcal{T}_s(s) \quad (18.19)$$

$$\zeta_s \approx [\mathcal{T}'_s(\tilde{s})]^2 \mathcal{M}_{2,s} \approx [\mathcal{T}'_s(s)]^2 \mathcal{M}_{2,s} \quad (18.20)$$

$$\mathcal{T}'_s(z) \approx \mathcal{T}'_s(s) \quad (18.21)$$

Si fem servir aquestes aproximacions, és simple demostrar que la PDF genèrica es pot aproximar per:

$$f_{z|s}(z|s) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{M}_{2,s}}} e^{-\frac{1}{2\mathcal{M}_{2,s}}[\mathcal{T}_s(z)-\mathcal{T}_s(s)]^2}, \quad s \in \mathcal{S} \quad (18.22)$$

## 18.3 Aproximació de la funció òptima en sistemes òptics IM/DD

Com s'ha expressat prèviament, la PDF condicionada exacta del senyal rebut es pot escriure com:

$$f_{z|s}(z|s) = G_s e^{-g_s(z)} \quad (18.23)$$

Si relacionem aquest resultat amb l'obtingut en (18.22), llavors noteu que:

$$g_s(z) \approx \frac{1}{2\zeta_s} [\mathcal{T}_s(z) - \mathcal{T}_s(s)]^2 \quad (18.24)$$

En general, obtenir una expressió analítica simple per  $\mathcal{T}_s(\cdot)$  a partir del mètode de la inversa o a partir de la relació anterior és molt difícil. Tot i així, en molts casos d'interès és possible derivar una bona aproximació analitzant les propietats de  $g_s(\cdot)$  i  $\mathcal{T}_s(\cdot)$ . Ja que anteriorment hem assumit que  $\mathcal{T}_s(\cdot)$  és una funció diferenciable creixent, llavors pot ser aproximada per:

$$\mathcal{T}_s(z) \approx \mathcal{H}_{\Theta_s}(z) \quad (18.25)$$

On  $\mathcal{H}_{\Theta_s}(z)$  és una funció diferenciable creixent amb paràmetres desconeguts definits per un conjunt  $\Theta_s$ . En canals òptics amb combinació de soroll ASE i soroll de post-detecció Gaussià,  $\mathcal{T}_s(\cdot)$  és una funció còncava. Per tant,  $\mathcal{H}_{\Theta_s}(z)$  també ha de ser còncava. Assumint una relació d'extinció més gran que zero, es pot demostrar que el conjunt de funcions paramètriques còncaves que es defineixen a continuació, s'ajusten bastant bé per:

$$\mathcal{H}_{\Theta_s}(z) = z^{\nu_s}, \quad 0 < \nu_s \leq 1 \quad (18.26)$$

Amb  $\Theta_s = \{\nu_s\}$  és adequat per aproximar  $\mathcal{T}_s(z)$  de forma acurada en transmissions sobre canals òptics. Utilitzant els resultats anteriors, la PDF condicionada del senyal rebut es pot escriure com:

$$f_{z|s}(z|s) \approx \frac{\nu_s s^{(\nu_s-1)}}{\sqrt{2\pi\zeta_s}} e^{-\frac{1}{2\zeta_s} [z^{\nu_s} - s^{\nu_s}]^2}, \quad s \in S \quad (18.27)$$

Per la combinació de soroll ASE i soroll de post-detecció Gaussià ( $\sigma_t > 0$ ,  $N_0 > 0$ ), noteu que  $Pr\{z \leq 0\} > 0$ ; i com es pot comprovar, l'aproximació  $\mathcal{H}_{\Theta_s}(z) = z^{\nu_s}$  no està definida si  $\nu_s < 1$ . Aquest problema es pot solucionar fàcilment sumant un offset al senyal d'entrada i despreciant els valors negatius.

## 18.4 Estimació dels paràmetres de canal

En quant a l'estimació dels paràmetres de canal, com per exemple  $N_0$ ,  $\sigma_t$  i  $M$ , es poden obtenir a partir del mètode dels moments que vam veure en 14.4.3, però s'han d'afegir algunes consideracions:

- Primerament s'ha de pensar que en aquest cas tenim una combinació entre soroll ASE i soroll tèrmic. Així doncs els moments centrals de segon i tercer ordre, així com la mitja, vindran definits per:



$$\mathcal{M}_{1,s} = MN_0 + s \quad (18.28)$$

$$\mathcal{M}_{2,s} = N_0(2s + N_0M) + \sigma_t^2 \quad (18.29)$$

$$\mathcal{M}_{3,s} = 6(s + N_0M)N_0^2 - 4MN_0^3 \quad (18.30)$$

- En canals òptics IM/DD amb combinació de soroll ASE Gaussià i filtres ideals, es pot verificar que:

$$\mathcal{M}_{4,s} \approx 3\mathcal{M}_{2,s}^2 \quad (18.31)$$

A partir d'aquestes consideracions, ampliarem les definicions dels paràmetres de canal que vam veure en 14.4.3, afegint l'estimació del paràmetre que defineix la varianza del soroll tèrmic:

$$E_0 = \mu_0 - MN_0 \quad (18.32)$$

$$\sigma_t^2 = v_0 - 2E_0N_0 - MN_0^2 \quad (18.33)$$

Ja que  $u = z^{v_s}$  és aproximadament una v.a. Gaussiana amb mitja  $\bar{u}_s$ , el seu moment central de tercer ordre  $\eta_s$  hauria de ser zero pel valor òptim de  $v_s$ , que és:

$$\eta_s = E\{(z^{v_s} - \bar{u}_s)^3\} = 0 \quad (18.34)$$

L'expansió de segon ordre en sèrie de Taylor de  $z^{v_s}$  al voltant del punt  $x = E_s\{z\} \approx s$  és:

$$z^{v_s} \approx s^{v_s} + v_s s^{v_s-1}(z-s) + \frac{1}{2}v_s(v_s-1)s^{v_s-2}(z-s)^2 \quad (18.35)$$

Noteu que:

$$\bar{u}_s = E_s\{z^{v_s}\} \approx s^{v_s} + \frac{1}{2}v_s(v_s-1)s^{v_s-2}\mathcal{M}_{2,s} \quad (18.36)$$

I aleshores el moment central de tercer ordre de  $z^{v_s}$  resulta:

$$\begin{aligned} \eta_s &= E\{(z^{v_s} - \bar{u}_s)^3\} \\ &\approx v_s^3 s^{3v_s-3} \\ &\quad \cdot E\left\{\left[(z-s) + \frac{1}{2}v_s(v_s-1)((z-s)^2 - \mathcal{M}_{2,s})\right]^3\right\} \end{aligned} \quad (18.37)$$

Operant queda que:

$$\eta_s \approx v_s^3 s^{3v_s-3} \left[ \mathcal{M}_{3,s} + \frac{3}{2s} (v_s - 1) (\mathcal{M}_{4,s} - \mathcal{M}_{2,s}^2) \right] \quad (18.38)$$

Així, per  $v_s > 0$ , el moment central de tercer ordre de  $z^{v_s}$  és zero quan:

$$v_s = 1 - \frac{3}{2} \frac{s \mathcal{M}_{3,s}}{\mathcal{M}_{4,s} - \mathcal{M}_{2,s}^2} \quad (18.39)$$

I fent servir l'aproximació (18.31) en (18.39)

$$v_s = 1 - \frac{s \mathcal{M}_{3,s}}{3 \mathcal{M}_{2,s}^2} \quad (18.40)$$

Pels casos particulars en que només tinguem soroll ASE ( $\sigma_t = 0, N_0 > 0$ ) i només soroll Gaussià ( $\sigma_t > 0, N_0 = 0$ ) el valor òptim de  $v_s$  és:

- Només Soroll ASE:  $\zeta_s = \frac{N_0}{2}, \quad v_s = 0.5, \quad y > 0$
- Només Soroll Gaussià:  $\zeta_s = \sigma_t^2, \quad v_s = 1, \quad y \in \mathbb{R}$

Una vegada hem estimat  $v_s$ , els paràmetres  $\zeta_s$  i  $\bar{u}_s$  es poden calcular fàcilment a partir de:

$$\bar{u}_s \approx s^{v_s} \quad (18.41)$$

$$\zeta_s \approx v_s^2 s^{2(v_s-1)} \mathcal{M}_{2,s} \quad (18.42)$$

## 18.5 Conclusions sobre la funció òptima considerant soroll ASE i Gaussià

En aquest últim capítol hem analitzat el cas de tenir combinació de soroll ASE i soroll Gaussià (tèrmic). Per tractar el problema, degut a la seva complexitat matemàtica, hem tingut que realitzar algunes simplificacions, i per fer-les hem tingut que aplicar algunes precondicions. Considerant que tenim una relació d'extinció més gran que zero ( $r_{01} = P_0/P_1 > 0$ ) i que  $N_0$  és suficientment petit, llavors hem vist que la funció òptima que transforma el senyal  $z$  (contaminat amb soroll ASE i soroll Gaussià) en un senyal  $u$  amb estadística Gaussiana és una funció del tipus  $g(z) = z^{v_s}$  amb  $0 < v_s \leq 1$ .

En el cas de tenir només soroll ASE, el paràmetre òptim és  $v_s = 0.5$  (com ja es va demostrat en el capítol 9) i en el cas de tenir només soroll Gaussià, lògicament  $v_s = 1$ . En la resta de casos el paràmetre  $v_s$  s'ha d'estimar utilitzant el mètode dels moments (MoM) amb l'expressió (18.40), on  $E_s\{z\} \approx s$  és la mitja del senyal rebut, i  $\mathcal{M}_{2,s}$  i  $\mathcal{M}_{3,s}$  són els moments centrals de segon i tercer ordre respectivament. També hem de tenir present que les funcions del tipus  $g(z) = z^{v_s}$  amb  $0 < v_s \leq 1$ , no suporten nombres negatius, excepte en el cas que  $v_s = 1$ , per tant haurem de sumar una constant  $\bar{y}_c$ . Aquesta constant estarà

relacionada amb la desviació estàndard del soroll Gaussià o tèrmic, i habitualment  $\bar{y}_c$  serà igual a  $5\sigma_t$  o  $6\sigma_t$ .

En aquest capítol hem volgut donar una alternativa a possibles vies de treball per investigacions futures. Hem plantejat una breu introducció a les funcions òptimes en el cas que existeixi combinació de soroll tèrmic i soroll ASE. Altres treballs futurs podrien aprofundir més en la funció òptima amb combinació de soroll tèrmic i soroll ASE, considerant qualsevol relació d'extinció així com nivell de soroll  $N_0$ .



## 19 Conclusions

L'objectiu inicial d'aquest projecte fi de carrera era trobar una funció òptima no lineal amb la qual es pogués equalitzar l'estadística del senyal contaminat amb soroll ASE, principalment, per convertir-la en una estadística Gaussiana i estacionària, és a dir que la varianza no depengués del símbol o seqüència transmesa. Dita funció òptima també havia de linealitzar el sistema en funció del senyal per reduir la distorsió harmònica ocasionada per la llei quadràtica del fotodíode, fent que el nivell de corrent elèctric detectat fos sempre igual o proporcional a l'amplitud que tenia el camp elèctric en el domini òptic, enlloc de la potència òptica. La idea també era trobar una funció que no depengués de cap paràmetre de canal, com en el cas de l'arrel quadrada o l'arrel cúbica, ja que el seu ús podria ser universal.

A la pràctica, i com hem demostrat durant tota la memòria, no ha estat possible trobar aquesta funció òptima hipotètica que es va plantejar en uns inicis. En realitat, podríem afirmar que si hem trobat la funció ideal, tot i que aquesta funció depèn directament de l'energia del símbol (paràmetre de no centralitat  $\lambda$ ). Que depengui de l'energia del símbol implica que en un modulació multinivell, hem de disposar a priori de tantes funcions òptimes com símbols disposi l'alfabet, i a més a més hem de ser capaços d'estimar el paràmetre de no centralitat a priori de cada símbol i commutar la funció cada temps de bit. És aquest el motiu pel qual vam haver de truncar el paràmetre de no centralitat de la funció, ja que és inviable que depengui d'aquest. Amb aquest fet la funció deixa de ser òptima per molts casos, i només ho serà quan el paràmetre de no centralitat de la funció coincideixi amb el paràmetre de no centralitat del senyal, i per valors del paràmetre de no centralitat del senyal alts.

Aquesta funció que hem trobat també depèn d'altres paràmetres del canal com són  $n$  (nombre de graus de llibertat de la distribució chi quadrada),  $\sigma$  (desviació estàndard del soroll ASE) i  $\sigma_t^2$  (varianza del soroll tèrmic, només pel cas de combinació de soroll ASE i soroll tèrmic, veure capítol 18). Tot i així, aquests paràmetres són relativament fàcils d'estimar mitjançant el mètode dels moments.

Durant aquest projecte hem utilitzat diferents estratègies per trobar la funció òptima. Les tres estratègies més importants que hem seguit han estat:

- La primera es va veure en el capítol 9, on s'intentava trobar la funció òptima a partir de la relació entre la PDF de la v.a.  $Y$  d'entrada (chi quadrada amb  $n$  graus de llibertat) i la PDF de la v.a.  $Z$  de sortida (Gaussiana) donada per la funció  $z = g(y)$ .
- La segona estratègia (capítols 10-16) estava basada en la utilització del mètode de la inversió i en l'aproximació de la funció inversa de distribució de probabilitat d'una v.a. normal a partir de diferents mètodes com són:
  - Per solució numèrica (Bisecció, Secant, Newton...).
  - Aproximació per expressions tancades (aprox. C. Hasting, aprox. per interpolació de polinomis de Chebyshev, aprox. per calculadores de mà).
- La tercera estratègia estava basada en la interpolació dels trams òptims amb funcions radicals fent servir l'algoritme de mínims quadrats (capítol 17).

Amb la primera estratègia no va ser possible trobar la funció òptima exacta. Tot i així, si suposàvem una relació d'extinció  $r_{01} = P_0/P_1 > 0$  i un valor de  $N_0$  suficientment petit (molt més petit que l'energia del senyal òptic lliure de soroll), aleshores es podien aplicar unes simplificacions en la PDF de la v.a. Chi quadrada i es demostrava que la funció òptima havia de ser l'arrel quadrada en un sistema amb soroll ASE com a predominant. Amb aquest estudi vam concloure que la funció òptima, per força, havia de tendir cap a l'arrel quadrada, i vam poder descartar tota la resta de funcions del tipus  $y^\alpha$  amb  $0 < \alpha \leq 1$  i  $\alpha \neq 0.5$ .

La major part del projecte s'ha centrat en analitzar les funcions obtingudes a partir del mètode de la inversió, és a dir amb la segona estratègia. Per realitzar correctament la conversió d'una v.a. Chi quadrada amb  $n$  graus de llibertat en una v.a. Gaussiana utilitzant el mètode de la inversió, és necessari conèixer la funció inversa de distribució de probabilitat (CDF) d'una v.a. Gaussiana. Desafortunadament, no existeix una expressió tancada i exacta d'aquesta funció, és per aquest motiu pel qual hem utilitzat aproximacions i/o algorismes d'aquesta funció inversa. Com ja s'ha vist durant la memòria, les aproximacions de la CDF inversa d'una v.a. normal que hem utilitzat són:

- Aproximació a partir de mètodes numèrics (Bisecció)
- Aproximació de Hasting.
- Aproximació per interpolació de polinomis de Chebyshev.
- Aproximacions per calculadores de mà.

Utilitzant qualsevol d'aquestes aproximacions, com hem demostrat, es pot aconseguir una funció òptima que doni bons resultats, excepte si utilitzem les aproximacions per calculadores de mà. En aquest últim cas, vam demostrar en el capítol 16 que cap de les aproximacions trobades en [34-38] ens servien, ja que el nivell d'exactitud de l'aproximació era bastant dolent i apareixien problemes.

Evidentment, la única aproximació de la CDF inversa d'una v.a. normal amb la qual podem fixar el grau d'exactitud és a la donada pel mètode numèric de la bisecció. En la resta d'aproximacions l'exactitud ve donada per una cota màxima. Tot i així, utilitzant el mètode numèric de la bisecció, juntament amb el mètode de la inversa, vam trobar problemes de convergència i no vam poder obtenir més punts de la funció òptima a partir d'un cert valor d'abscissa, per aquest motiu aquesta tècnica també la vam descartar.

Per solucionar els problemes de convergència que apareixien a l'utilitzar directament el mètode de la inversa amb algunes de les aproximacions de la CDF inversa d'una v.a. normal, vam utilitzar el mètode recursiu de Dillard per simplificar la funció Marcum Q dins de la CDF d'una v.a. chi quadrada amb  $n$  graus de llibertat. Gràcies al fet d'utilitzar l'algoritme de Dillard i algunes de les aproximacions de la CDF inversa d'una v.a. normal, com Hasting o Chebyshev, vam aconseguir solucionar els problemes de convergència de la funció òptima.

Hem vist, doncs, que les principals funcions amb les quals hem treballat en aquest projecte han estat la funció òptima de Hasting-Dillard i la funció òptima per interpolació de polinomis de Chebyshev (també utilitza l'algoritme de Dillard). La primera funció és menys precisa que la segona, encara que la diferència en el comportament és gairebé insignificant. A més a més, la primera funció és molt més ràpida computacionalment i més senzilla a l'hora d'implementar i treballar. Per aquests motius, ens hem centrat especialment amb la funció òptima de Hasting-Dillard per estudiar el seu comportament.

Amb la funció de Hasting-Dillard i escollint un paràmetre d'ajust (o paràmetre de no centralitat de la funció) adient, vam demostrar que aquesta funció evoluciona d'una forma molt semblant a l'arrel quadrada per senyals amb nivells alts. De fet, vam veure que les pendents entre les funcions òptimes i l'arrel quadrada convergeixen a l'infinit. Per senyals amb nivells propers al zero, la funció de Hasting-Dillard presenta una pendent molt més abrupta que l'arrel quadrada, ja que presenta una asímptota vertical.

Mitjançant diferents mesures de qualitat vam demostrar que la funció òptima de Hasting-Dillard millorava el rendiment de les funcions arrel quadrada i arrel cúbica en sistemes IM/DD amb soroll ASE com a predominant i relacions d'extinció infinites. Així, vam analitzar els moments estadístics de primer, segon, tercer i quart ordre, i els vam comparar amb els que s'obtenien amb l'arrel quadrada, l'arrel cúbica i amb una Gaussiana ideal. En aquests anàlisis vam observar que la funció òptima de Hasting-Dillard, escollint un paràmetre d'ajust adient, linealitzava el sistema millor del que ho feia l'arrel quadrada, també millorava l'estacionarietat de la varianza fent que aquesta fos més constant. A nivell de Gaussianitat, amb els moments de tercer i quart ordre vam comprovar que la funció òptima de Hasting-Dillard recuperava més correctament la forma Gaussiana que amb els casos arrel quadrada i arrel cúbica. Per reforçar l'anàlisi dels moments estadístics, també vam fer un estudi de la Gaussianitat a partir d'un conjunt de test d'hipòtesis i diagrames de probabilitat normal, amb els que vam poder comprovar que la funció òptima presentava uns

millors resultats que l'arrel quadrada i que l'arrel cúbica per senyals amb relació d'extinció infinita.

A més a més dels anàlisis anteriors, també vam sotmetre la funció òptima de Hasting-Dillard a anàlisis de les cues de la distribució de sortida. En aquest sentit, vam calcular la probabilitat d'error de bit (BER) per diferents relacions  $E_b/N_0$  a partir de simulacions de MonteCarlo i l'aproximació Gaussiana (per trobar el llindar de decisió). Vam fer servir un sistema ideal IM/DD amb absència de dispersió i d'altres fenòmens del canal òptic, excepte el soroll ASE. En aquest tipus de sistema ideal es va demostrar que la funció òptima supera en rendiment a l'arrel quadrada i a l'arrel cúbica. Així, amb l'arrel quadrada obteníem una penalització de 0.2dB en la relació  $E_b/N_0$  amb respecte la funció òptima de Hasting-Dillard i amb l'arrel cúbica, en canvi, obteníem una penalització de 0.1dB amb respecte la funció òptima per aconseguir una  $BER = 10^{-4.5}$ .

Per estudiar el rendiment de la funció òptima de Hasting-Dillard en un sistema real (considerant dispersió, processos de filtrat no ideals, etc), vam fer ús del simulador VPI. Amb aquest programa vam demostrar que la funció òptima de Hasting-Dillard millora el rendiment de l'arrel quadrada perquè linealitzava millor el canal. El fet de linealitzar el sistema permet reduir la distorsió harmònica i fa que els equalitzadors donin un millor rendiment. Tenint present això, vam realitzar varies simulacions amb un equalitzador DFE i vam poder comprovar la millora en BER de la funció òptima vers l'arrel quadrada. També vam obtenir els diagrames d'ull per 0 Km, i vam comprovar que la funció òptima de Hasting-Dillard (calibrada amb el mètode dels moments) és capaç de recuperar l'estadística Gaussiana. Amb la funció òptima de Hasting-Dillard vam aconseguir diagrames d'ull multinivell més simètrics i lineals que amb l'arrel quadrada, igualant encara més la separació entre símbols i la varianza.

Amb el simulador MLSE vam analitzar el rendiment de la funció òptima de Hasting-Dillard en un sistema amb dispersió i per tant amb gran quantitat d'ISI. Vam utilitzar la mètrica simplificada, és a dir la mètrica euclidiana. Per aquest tipus de mètrica és molt important que l'estadística del senyal sigui Gaussiana i estacionària. Amb la funció òptima de Hasting-Dillard vam aconseguir millorar el rendiment en BER amb MLSE de l'arrel quadrada i l'arrel cúbica, i segons augmentàvem la complexitat (nombre d'estats de Trellis) la diferència es feia més destacable.

En el capítol 17 vam proposar tècniques d'interpolació de funcions, mitjançant la teoria de mínims quadrats, per simplificar les funcions òptimes de Hasting-Dillard i de Chebyshev. La base de funcions proposada constava de funcions còncaues del tipus  $y^\alpha$  amb  $0 < \alpha \leq 1$ . També vam utilitzar exponencials per separar la part que s'assembla més a l'arrel quadrada (valors alts), de la part amb pendent més abrupta (valors propers al zero). En aquest capítol també vam proposar la tercera estratègia per trobar la funció òptima fent servir la interpolació dels trams òptims. Aquesta tècnica donava uns resultats bastant bons, tal i com vam poder veure en les gràfiques dels moments estadístics, tot i així no vam aprofundir.



Finalment, vam fer un petit estudi introductori sobre la funció òptima en un sistema IM/DD amb presència de soroll ASE i soroll Gaussià. En aquest anàlisi vam fer varies aproximacions per poder resoldre el problema i trobar la funció òptima, entre les quals la relació d'extinció  $r_{01} = P_0/P_1 > 0$  i  $N_0$  suficientment petit. Vam demostrar que la funció òptima havia de ser del tipus  $u = z^{v_s}$  amb  $0 < v_s \leq 1$ , i que en un sistema amb només soroll ASE, el valor òptim de  $v_s$  és 0.5, en canvi en un sistema amb només soroll tèrmic, el valor òptim de  $v_s$  és 1. En qualsevol altre cas,  $v_s$  serà diferent i es pot estimar pel mètode dels moments.

## 19.1 Futurs treballs i aplicacions alternatives

Els anàlisis realitzats en aquesta memòria els hem centrat exclusivament en sistemes digitals amb receptors MLSE, DFE i d'altres més ideals. Tot i així, aquest resultat també poden ser de gran utilitat pel disseny de receptors amb una relació lineal entre el camp elèctric i el senyal detectat, i d'aquesta manera simplificar l'aplicació de tècniques analògiques de radio sobre sistemes òptics (RoF).

Aquest projecte fi de carrera pot deixar la porta oberta a altres possibles camps d'investigació. Alguns d'ells poden ser: fer una anàlisi més rigorós per trobar la funció òptima en sistemes amb combinació de soroll tèrmic i soroll ASE, estudiar més en detall el impacte de la dispersió cromàtica i el PMD, i estudiar el impacte dels processos de filtrat òptic i elèctric no ideals.

## 19.2 Valoració personal

Com a valoració personal, penso que les funcions òptimes obtingudes per les diferents tècniques, tot i que donen un rendiment major que l'arrel quadrada, com hem demostrat, presenten grans problemes d'implementació. De fet cada funció òptima va estretament lligada amb els paràmetres del canal, i s'han d'estimar correctament per poder treure el màxim rendiment. Això és un inconvenient important en comparació amb el dispositiu arrel quadrada, que no cal que tingui memòria. A més a més, encara que la funció òptima presenta un major rendiment respecte amb l'arrel quadrada, aquest és molt petit (per exemple en BER). Finalment, considerant que a la pràctica en la majoria dels transmissors la relació d'extinció és finita i que la densitat espectral del soroll ASE es molt petita, l'arrel quadrada és la millor solució sempre i quan predomini el soroll ASE, ja que és una solució senzilla, fàcil d'implementar, no requereix memòria i no depèn dels paràmetres del canal.



# Annexos

## Annex 1. Tabulació de la funció òptima

En la taula A.1 es tabula la funció òptima (per  $n = 2$ ,  $\lambda = 0$  i  $\sigma = 1$ ) aproximada a partir de l'associació intermèdia de la variable  $u$ .

$y$	$u$	$z$	<i>Arrel quadrada</i>	<i>Arrel cúbica</i>
<b>0</b>	0	<b>-8,327</b>	0	0
<b>0,003</b>	0,001	<b>-3,087</b>	0,05477226	0,14422496
<b>0,004</b>	0,002	<b>-2,879</b>	0,06324555	0,15874011
<b>0,006</b>	0,003	<b>-2,749</b>	0,07745967	0,18171206
<b>0,008</b>	0,004	<b>-2,652</b>	0,08944272	0,2
<b>0,01</b>	0,005	<b>-2,576</b>	0,1	0,21544347
<b>0,012</b>	0,006	<b>-2,512</b>	0,10954451	0,22894285
<b>0,014</b>	0,007	<b>-2,457</b>	0,1183216	0,24101423
<b>0,016</b>	0,008	<b>-2,409</b>	0,12649111	0,25198421
<b>0,018</b>	0,009	<b>-2,365</b>	0,13416408	0,26207414
<b>0,02</b>	0,01	<b>-2,327</b>	0,14142136	0,27144176
<b>0,04</b>	0,02	<b>-2,054</b>	0,2	0,34199519
<b>0,061</b>	0,03	<b>-1,881</b>	0,24698178	0,39364972
<b>0,082</b>	0,04	<b>-1,751</b>	0,28635642	0,43444815
<b>0,103</b>	0,05	<b>-1,645</b>	0,32093613	0,46875481
<b>0,124</b>	0,06	<b>-1,555</b>	0,35213634	0,4986631
<b>0,145</b>	0,07	<b>-1,476</b>	0,38078866	0,52535879
<b>0,167</b>	0,08	<b>-1,405</b>	0,40865633	0,55068784
<b>0,189</b>	0,09	<b>-1,341</b>	0,4347413	0,57387935
<b>0,211</b>	0,1	<b>-1,281</b>	0,45934736	0,59533418
<b>0,233</b>	0,11	<b>-1,226</b>	0,48270074	0,61534495
<b>0,256</b>	0,12	<b>-1,175</b>	0,50596443	0,63496042
<b>0,278</b>	0,13	<b>-1,127</b>	0,52725705	0,65265189
<b>0,302</b>	0,14	<b>-1,08</b>	0,54954527	0,67091729
<b>0,325</b>	0,15	<b>-1,037</b>	0,57008771	0,68753443
<b>0,349</b>	0,16	<b>-0,995</b>	0,59076222	0,70405806
<b>0,373</b>	0,17	<b>-0,954</b>	0,61073726	0,7198405
<b>0,397</b>	0,18	<b>-0,915</b>	0,63007936	0,73495966
<b>0,422</b>	0,19	<b>-0,878</b>	0,64961527	0,75007407
<b>0,446</b>	0,2	<b>-0,842</b>	0,66783231	0,76403212
<b>0,472</b>	0,21	<b>-0,806</b>	0,68702256	0,77859928
<b>0,497</b>	0,22	<b>-0,772</b>	0,70498227	0,79210994
<b>0,523</b>	0,23	<b>-0,739</b>	0,72318739	0,80568862
<b>0,549</b>	0,24	<b>-0,706</b>	0,74094534	0,81882441
<b>0,575</b>	0,25	<b>-0,675</b>	0,75828754	0,83155175
<b>0,602</b>	0,26	<b>-0,643</b>	0,77588659	0,84436877

<b>0,63</b>	0,27	<b>-0,613</b>	0,79372539	0,85726189
<b>0,657</b>	0,28	<b>-0,583</b>	0,81055537	0,86933759
<b>0,685</b>	0,29	<b>-0,553</b>	0,82764727	0,88151598
<b>0,714</b>	0,3	<b>-0,524</b>	0,84498521	0,89378433
<b>0,742</b>	0,31	<b>-0,496</b>	0,86139422	0,90531831
<b>0,771</b>	0,32	<b>-0,468</b>	0,87806606	0,91696226
<b>0,801</b>	0,33	<b>-0,44</b>	0,89498603	0,9287044
<b>0,831</b>	0,34	<b>-0,413</b>	0,91159201	0,94015691
<b>0,862</b>	0,35	<b>-0,385</b>	0,92843955	0,95170516
<b>0,893</b>	0,36	<b>-0,358</b>	0,94498677	0,96297975
<b>0,924</b>	0,37	<b>-0,332</b>	0,96124919	0,97399634
<b>0,956</b>	0,38	<b>-0,306</b>	0,97775252	0,9851128
<b>0,989</b>	0,39	<b>-0,279</b>	0,99448479	0,99631981
<b>1,022</b>	0,4	<b>-0,253</b>	1,01094016	1,0072802
<b>1,055</b>	0,41	<b>-0,227</b>	1,02713193	1,01800713
<b>1,089</b>	0,42	<b>-0,202</b>	1,04355163	1,02882765
<b>1,124</b>	0,43	<b>-0,176</b>	1,06018866	1,03973366
<b>1,16</b>	0,44	<b>-0,151</b>	1,07703296	1,05071757
<b>1,196</b>	0,45	<b>-0,126</b>	1,09361785	1,06147652
<b>1,232</b>	0,46	<b>-0,101</b>	1,10995495	1,07202168
<b>1,27</b>	0,47	<b>-0,075</b>	1,12694277	1,08293213
<b>1,308</b>	0,48	<b>-0,05</b>	1,14367828	1,09362706
<b>1,347</b>	0,49	<b>-0,025</b>	1,16060329	1,10439017
<b>1,386</b>	0,5	<b>0</b>	1,17728501	1,11494748
<b>1,427</b>	0,51	<b>0,025</b>	1,19457105	1,12583477
<b>1,468</b>	0,52	<b>0,05</b>	1,2116105	1,13651547
<b>1,51</b>	0,53	<b>0,075</b>	1,22882057	1,14725242
<b>1,553</b>	0,54	<b>0,1</b>	1,24619421	1,15804069
<b>1,597</b>	0,55	<b>0,126</b>	1,26372465	1,16887563
<b>1,642</b>	0,56	<b>0,151</b>	1,28140548	1,17975289
<b>1,688</b>	0,57	<b>0,176</b>	1,29923054	1,19066836
<b>1,735</b>	0,58	<b>0,202</b>	1,31719399	1,20161819
<b>1,783</b>	0,59	<b>0,253</b>	1,33529023	1,21259874
<b>1,832</b>	0,6	<b>0,253</b>	1,35351395	1,22360663
<b>1,883</b>	0,61	<b>0,279</b>	1,37222447	1,2348573
<b>1,935</b>	0,62	<b>0,306</b>	1,39104277	1,24612131
<b>1,988</b>	0,63	<b>0,332</b>	1,40996454	1,25739615
<b>2,043</b>	0,64	<b>0,359</b>	1,42933551	1,26888654
<b>2,099</b>	0,65	<b>0,385</b>	1,4487926	1,28037587
<b>2,157</b>	0,66	<b>0,413</b>	1,46867287	1,29206208
<b>2,217</b>	0,67	<b>0,44</b>	1,48895937	1,30393286
<b>2,279</b>	0,68	<b>0,468</b>	1,50963572	1,31597642
<b>2,342</b>	0,69	<b>0,496</b>	1,53035943	1,32799252
<b>2,408</b>	0,7	<b>0,524</b>	1,55177318	1,34035188
<b>2,476</b>	0,71	<b>0,553</b>	1,57353106	1,35285177
<b>2,546</b>	0,72	<b>0,583</b>	1,595619	1,36548248

<b>2,619</b>	0,73	<b>0,613</b>	1,61833248	1,37841027
<b>2,694</b>	0,74	<b>0,643</b>	1,64134092	1,39144442
<b>2,772</b>	0,75	<b>0,675</b>	1,66493243	1,4047458
<b>2,854</b>	0,76	<b>0,706</b>	1,68937858	1,41846293
<b>2,939</b>	0,77	<b>0,739</b>	1,71435119	1,43240731
<b>3,028</b>	0,78	<b>0,772</b>	1,74011494	1,44672268
<b>3,121</b>	0,79	<b>0,806</b>	1,76663522	1,46138481
<b>3,219</b>	0,8	<b>0,842</b>	1,79415718	1,47652337
<b>3,321</b>	0,81	<b>0,878</b>	1,82236111	1,49195695
<b>3,43</b>	0,82	<b>0,915</b>	1,85202592	1,50810428
<b>3,544</b>	0,83	<b>0,954</b>	1,88255146	1,52463039
<b>3,665</b>	0,84	<b>0,994</b>	1,91441897	1,54178799
<b>3,794</b>	0,85	<b>1,036</b>	1,94781929	1,55966901
<b>3,932</b>	0,86	<b>1,08</b>	1,98292713	1,57835432
<b>4,08</b>	0,87	<b>1,126</b>	2,01990099	1,59791395
<b>4,241</b>	0,88	<b>1,175</b>	2,05936884	1,6186617
<b>4,415</b>	0,89	<b>1,226</b>	2,10119014	1,64050252
<b>4,605</b>	0,9	<b>1,281</b>	2,14592637	1,66370585
<b>4,816</b>	0,91	<b>1,341</b>	2,19453868	1,68873755
<b>5,052</b>	0,92	<b>1,405</b>	2,24766546	1,71588343
<b>5,319</b>	0,93	<b>1,476</b>	2,30629573	1,74559436
<b>5,628</b>	0,94	<b>1,555</b>	2,37234062	1,77876276
<b>5,991</b>	0,95	<b>1,645</b>	2,44765194	1,81621158
<b>6,439</b>	0,96	<b>1,751</b>	2,53751847	1,86039919
<b>7,014</b>	0,97	<b>1,881</b>	2,64839574	1,91420562
<b>7,825</b>	0,98	<b>2,054</b>	2,79732015	1,98530902
<b>9,214</b>	0,99	<b>2,326</b>	3,03545713	2,09644144
<b>19,806</b>	1	<b>3,891</b>	4,45039324	2,70561247

Taula A 1. Tabulació funció òptima definida pels paràmetres  $n=2$ ,  $\lambda=1$  i  $\sigma=1$



## Annex 2. Comparació aprox. Dillard i funció Marcum Q

La taula A.2 s'ha generat per  $a = 0$ ,  $b \in [0,50]$  i  $M = 1$ , utilitzant la funció ideal del MATLAB:

$$\text{MARCUMQ}(a, b, M)$$

I també l'algoritme de Dillard amb 4,3,2,1 i 0 iteracions.

<b>b</b>	<b>0 iterations</b>	<b>1 iteration</b>	<b>2 iterations</b>	<b>3 iterations</b>	<b>4 iterations</b>	<b>marcumq MATLAB</b>
<b>0</b>	1	1	1	1	1	1
<b>2,08333333</b>	0,11416176	0,11416176	0,11416176	0,11416176	0,11416176	0,11416176
<b>4,16666667</b>	0,00016986	0,00016986	0,00016986	0,00016986	0,00016986	0,00016986
<b>6,25</b>	3,29E-09	3,29E-09	3,29E-09	3,29E-09	3,29E-09	3,29E-09
<b>8,33333333</b>	8,32E-16	8,32E-16	8,32E-16	8,32E-16	8,32E-16	8,32E-16
<b>10,4166667</b>	2,74E-24	2,74E-24	2,74E-24	2,74E-24	2,74E-24	2,74E-24
<b>12,5</b>	1,18E-34	1,18E-34	1,18E-34	1,18E-34	1,18E-34	1,18E-34
<b>14,5833333</b>	6,58E-47	6,58E-47	6,58E-47	6,58E-47	6,58E-47	6,58E-47
<b>16,6666667</b>	4,80E-61	4,80E-61	4,80E-61	4,80E-61	4,80E-61	4,80E-61
<b>18,75</b>	4,56E-77	4,56E-77	4,56E-77	4,56E-77	4,56E-77	4,56E-77
<b>20,8333333</b>	5,65E-95	5,65E-95	5,65E-95	5,65E-95	5,65E-95	5,65E-95
<b>22,9166667</b>	9,12E-115	9,12E-115	9,12E-115	9,12E-115	9,12E-115	9,12E-115
<b>25</b>	1,92E-136	1,92E-136	1,92E-136	1,92E-136	1,92E-136	1,92E-136
<b>27,0833333</b>	5,26E-160	5,26E-160	5,26E-160	5,26E-160	5,26E-160	5,26E-160
<b>29,1666667</b>	1,88E-185	1,88E-185	1,88E-185	1,88E-185	1,88E-185	1,88E-185
<b>31,25</b>	8,75E-213	8,75E-213	8,75E-213	8,75E-213	8,75E-213	8,75E-213
<b>33,3333333</b>	5,31E-242	5,31E-242	5,31E-242	5,31E-242	5,31E-242	5,31E-242
<b>35,4166667</b>	4,20E-273	4,20E-273	4,20E-273	4,20E-273	4,20E-273	4,20E-273
<b>37,5</b>	4,33E-306	4,33E-306	4,33E-306	4,33E-306	4,33E-306	4,33E-306
<b>39,5833333</b>	0	0	0	0	0	0
<b>41,6666667</b>	0	0	0	0	0	0
<b>43,75</b>	0	0	0	0	0	0
<b>45,8333333</b>	0	0	0	0	0	0
<b>47,9166667</b>	0	0	0	0	0	0
<b>50</b>	0	0	0	0	0	0

Taula A.2. Tabulació algoritme de Dillard per 0,1,2,3,4 i 5 iteracions i paràmetres  $M=1$ ,  $a=0$

La taula A.3 s'ha generat per  $a = 0.1$ ,  $b \in [0,50]$  i  $M = 1$ , utilitzant la funció ideal del MATLAB:

$$\text{MARCUMQ}(a, b, M)$$

I també l'algoritme de Dillard amb 4,3,2,1 i 0 iteracions.

<b>b</b>	<b>0 iterations</b>	<b>1 iteration</b>	<b>2 iterations</b>	<b>3 iterations</b>	<b>4 iterations</b>	<b>marcumq MATLAB</b>
<b>0</b>	0,99501248	1	1	1	1	1
<b>2,08333333</b>	0,11359238	0,11540076	0,11540076	0,11540076	0,11540076	0,11540076
<b>4,16666667</b>	0,00016901	0,00017729	0,00017729	0,00017729	0,00017729	0,00017729
<b>6,25</b>	3,28E-09	3,62E-09	3,62E-09	3,62E-09	3,62E-09	3,62E-09
<b>8,33333333</b>	8,28E-16	9,83E-16	9,83E-16	9,83E-16	9,83E-16	9,83E-16
<b>10,4166667</b>	2,73E-24	3,54E-24	3,54E-24	3,54E-24	3,54E-24	3,54E-24
<b>12,5</b>	1,17E-34	1,68E-34	1,68E-34	1,68E-34	1,68E-34	1,68E-34
<b>14,5833333</b>	6,55E-47	1,06E-46	1,06E-46	1,06E-46	1,06E-46	1,06E-46
<b>16,6666667</b>	4,78E-61	8,75E-61	8,75E-61	8,75E-61	8,75E-61	8,75E-61
<b>18,75</b>	4,54E-77	9,53E-77	9,53E-77	9,53E-77	9,53E-77	9,53E-77
<b>20,8333333</b>	5,62E-95	1,36E-94	1,36E-94	1,36E-94	1,36E-94	1,36E-94
<b>22,9166667</b>	9,07E-115	2,56E-114	2,56E-114	2,56E-114	2,56E-114	2,56E-114
<b>25</b>	1,91E-136	6,30E-136	6,30E-136	6,30E-136	6,30E-136	6,30E-136
<b>27,0833333</b>	5,23E-160	2,03E-159	2,03E-159	2,03E-159	2,03E-159	2,03E-159
<b>29,1666667</b>	1,87E-185	8,56E-185	8,56E-185	8,56E-185	8,56E-185	8,56E-185
<b>31,25</b>	8,71E-213	4,72E-212	4,72E-212	4,72E-212	4,72E-212	4,72E-212
<b>33,3333333</b>	5,29E-242	3,40E-241	3,40E-241	3,40E-241	3,40E-241	3,40E-241
<b>35,4166667</b>	4,18E-273	3,20E-272	3,20E-272	3,20E-272	3,20E-272	3,20E-272
<b>37,5</b>	4,31E-306	3,94E-305	3,94E-305	3,94E-305	3,94E-305	3,94E-305
<b>39,5833333</b>	0	0	0	0	0	0
<b>41,6666667</b>	0	0	0	0	0	0
<b>43,75</b>	0	0	0	0	0	0
<b>45,8333333</b>	0	0	0	0	0	0
<b>47,9166667</b>	0	0	0	0	0	0
<b>50</b>	0	0	0	0	0	0

Taula A 3. Tabulació algoritme de Dillard per 0,1,2,3,4 i 5 iteracions i paràmetres M=1, a=0.1





TABLE 4  
Coefficients for calculating  $R(x)$  from formula (15)

$n$	$\lambda_n$	$\lambda_n$	$n$	$\lambda_n$	$n$	$\lambda_n$					
0	.91215	88034	17553	77330	59200	14	.00000	00000	00052	53240	85874
1	-.01626	62818	67663	69585	46661	15	.00000	00000	00019	71154	08612
2	.00043	35564	72949	44536	50589	16	-.00000	00000	00001	74943	33828
3	.00021	44385	70074	45920	65205	17	-.00000	00000	00000	48005	96619
4	.00000	26257	51075	76481	30176	18	.00000	00000	00000	05573	02987
5	-.00000	30210	91050	10379	69912	19	.00000	00000	00000	01163	26054
6	-.00000	00124	06061	83675	72157	20	-.00000	00000	00000	00172	62489
7	.00000	00624	06609	29999	17380	21	-.00000	00000	00000	00027	84973
8	-.00000	00005	40124	79009	57858	22	.00000	00000	00000	00005	24481
9	-.00000	00014	23207	89753	15910	23	.00000	00000	00000	00000	65270
10	.00000	00000	34384	02819	55305	24	-.00000	00000	00000	00000	15707
11	.00000	00000	33584	87039	00138	25	-.00000	00000	00000	00000	01475
12	-.00000	00000	01458	42885	16512	26	.00000	00000	00000	00000	00450
13	-.00000	00000	00810	21742	58833						

Taula A 5. Coeficients de l'aproximació (15.29)



TABLE 6  
Coefficients for calculating  $R(x)$  from formula (17)

$n$	$\mu_n$	$n$	$\mu_n$	$n$	$\mu_n$
0	.98857	13	60358	00000	35068
1	.01085	14	60281	00000	06972
2	-.00175	15	94825	00000	01095
3	.00002	16	37984	00000	00115
4	.00001	17	87911	00000	00013
5	-.00000	18	24261	00000	00002
6	-.00000	19	17780	00000	00000
7	.00000	20	57429	00000	00000
8	-.00000	21	13442	00000	00000
9	-.00000	22	56161	00000	00000
10	.00000	23	58299	00000	00000
11	-.00000	24	22362	00000	00000
12	-.00000	25	55170	00000	00000

Taula A 7. Coeficients de l'aproximació (15.31)

```

function [t, inv, y] = aproximacion_cheby
%APROXIMACION_CHEBY: Calcula la aproximación de la ERFINV
%SINTAXIS: [t, inv, y] = aproximacion_cheby

t = linspace(-1, 1, 10000);
inv=0.*ones(10000, 1);

for i =1:10000
    if t(i) < 0.8 & t(i) > -0.8
        inv(i)=aprox_cheby_rang1(t(i));
    elseif t(i) >= 0.8 & t(i) <= 0.9975
        inv(i)=aprox_cheby_rang2(t(i));
    elseif t(i) <= -0.8 & t(i) >= -0.9975
        inv(i)=-aprox_cheby_rang2(t(i));
    elseif t(i) > 0.9975 & t(i) <= 1-5*10^(-16)
        inv(i)=aprox_cheby_rang3(t(i));
    elseif t(i) < -0.9975 & t(i) >= -(1-5*10^(-16))
        inv(i)=-aprox_cheby_rang3(t(i));
    elseif t(i) > 1-5*10^(-16)
        inv(i)=aprox_cheby_rang4(t(i));
    elseif t(i) < -(1-5*10^(-16))
        inv(i)=-aprox_cheby_rang4(t(i));
    end
end

y = erfinv(t);
subplot(121),
plot(t, y, 'r','LineWidth', 5), hold on
plot(t, inv, 'g', 'LineWidth', 2), hold off
xlabel('x'), ylabel('INVERF(x)')
grid on
subplot(122),
plot(t, log10(y'-inv), 'b', 'Linewidth',2), grid on, xlabel('x'),
ylabel('Error(x)')

function [r] = aprox_cheby_rang1(x)
e = 0.*ones(39, 1);
e(1) = 0.9928853766189408231495800;
e(2) = 0.1204675161431044864647846;
e(3) = 0.0160781993420999447257039;
e(4) = 0.0026867044371623158279591;
e(5) = 0.0004996347302357262947170;
e(6) = 0.0000988982185991204409911;
e(7) = 0.0000203918127639944337340;
e(8) = 0.0000043272716177354218758;
e(9) = 0.0000009380814128593406758;
e(10)= 0.0000002067347208683427411;
e(11)= 0.0000000461596991054300078;
e(12)= 0.0000000104166797027146217;
e(13)= 0.0000000023715009995921222;
e(14)= 0.0000000005439284068471390;
e(15)= 0.0000000001255489864097987;
e(16)= 0.0000000000291381803663201;
e(17)= 0.0000000000067949421808797;
e(18)= 0.0000000000015912343331469;
e(19)= 0.0000000000003740250585245;
e(20)= 0.0000000000000882087762421;
e(21)= 0.0000000000000208650897725;
e(22)= 0.0000000000000049488041039;
e(23)= 0.00000000000000011766394740;
e(24)= 0.0000000000000002803855725;
e(25)= 0.0000000000000000669506638;
e(26)= 0.0000000000000000160165495;
e(27)= 0.0000000000000000038382583;
e(28)= 0.000000000000000009212851;
e(29)= 0.000000000000000002214615;
e(30)= 0.000000000000000000533091;
e(31)= 0.000000000000000000128488;
e(32)= 0.000000000000000000031006;
e(33)= 0.000000000000000000007491;
e(34)= 0.000000000000000000001812;
e(35)= 0.0000000000000000000000439;
e(36)= 0.0000000000000000000000106;
e(37)= 0.0000000000000000000000026;
e(38)= 0.0000000000000000000000006;
e(39)= 0.0000000000000000000000002;

```

```

r = 0;
r = x.*e(1);
for i = 2:39
    r = x.*e(i).*(ortho_poly(1, ((x.^2)./0.32)-1, i-1))+r;
end

function [r] = aprox_cheby_rang2(x)
e = 0.*ones(27, 1);
e(1) = 0.9121588034175537733059200;
e(2) = -0.0162662818676636958546661;
e(3) = 0.0004335564729494453650589;
e(4) = 0.0002144385700744592065205;
e(5) = 0.0000026257510757648130176;
e(6) = -0.0000030210910501037969912;
e(7) = -0.0000000124060618367572157;
e(8) = 0.0000000624066092999917380;
e(9) = -0.000000005401247900957858;
e(10) = -0.0000000014232078975315910;
e(11) = 0.0000000000343840281955305;
e(12) = 0.0000000000335848703900138;
e(13) = -0.000000000014584288516512;
e(14) = -0.0000000000008102174258833;
e(15) = 0.000000000000525324085874;
e(16) = 0.0000000000000197115408612;
e(17) = -0.0000000000000017494333828;
e(18) = -0.0000000000000004800596619;
e(19) = 0.000000000000000557302987;
e(20) = 0.0000000000000000116326054;
e(21) = -0.000000000000000017262489;
e(22) = -0.000000000000000002784973;
e(23) = 0.00000000000000000524481;
e(24) = 0.00000000000000000065270;
e(25) = -0.00000000000000000015707;
e(26) = -0.00000000000000000001475;
e(27) = 0.00000000000000000000450;
d1 = -1.548813042373261659512742;
d2 = 2.565490123147816151928163;

r = 0;
beta = sqrt(-log(1-x.^2));

for i = 1:27
    r = e(i).*(ortho_poly(1, d1.*beta+d2, i-1))+r;
end
r = r.*beta;

function [r] = aprox_cheby_rang3(x)
e = 0.*ones(38, 1);
e(1) = 0.9566797090204925274526373;
e(2) = -0.0231070043090649036999908;
e(3) = -0.0043742360975084077333218;
e(4) = -0.0005765034226511854809364;
e(5) = -0.0000109610223070923931242;
e(6) = 0.0000251085470246442787982;
e(7) = 0.0000105623360679477511955;
e(8) = 0.0000027544123300306391503;
e(9) = 0.0000004324844983283380689;
e(10) = -0.000000205303366552086916;
e(11) = -0.0000000438915366654316784;
e(12) = -0.000000176840095080881795;
e(13) = -0.0000000039912890280463420;
e(14) = -0.000000001869324124559212;
e(15) = 0.0000000002729227396746077;
e(16) = 0.0000000001328172131565497;
e(17) = 0.0000000000318342484482286;
e(18) = 0.000000000016700607751926;
e(19) = -0.0000000000020364649611537;
e(20) = -0.000000000009648468127965;
e(21) = -0.0000000000002195672778128;
e(22) = -0.000000000000095689813014;
e(23) = 0.00000000000000137032572230;
e(24) = 0.0000000000000062538505417;
e(25) = 0.0000000000000014584615266;
e(26) = 0.000000000000001078123993;
e(27) = -0.000000000000000709229988;
e(28) = -0.000000000000000391411775;

```

```

e(29)= -0.00000000000000000111659209;
e(30)= -0.0000000000000000015770366;
e(31)= 0.0000000000000000002853149;
e(32)= 0.0000000000000000002716662;
e(33)= 0.0000000000000000000957770;
e(34)= 0.000000000000000000176835;
e(35)= -0.00000000000000000009828;
e(36)= -0.00000000000000000020464;
e(37)= -0.00000000000000000008020;
e(38)= -0.00000000000000000001650;

d3 = -0.5594576313298323225436913;
d4 = 2.287915716263357638965891;

r = 0;
beta = sqrt(-log(1-x.^2));

for i = 1:38
    r = e(i).*(ortho_poly(1, d3.*beta+d4, i-1))+r;
end
r = r.*beta;

function [r] = aprox_cheby_rang4(x)

e = 0.*ones(26, 1);
e(1) = 0.9885750640661893136460358;
e(2) = 0.0108577051845994776160281;
e(3) = -0.0017511651027627952494825;
e(4) = 0.0000211969932065633437984;
e(5) = 0.0000156648714042435087911;
e(6) = -0.0000005190416869103124261;
e(7) = -0.0000000371357897426717780;
e(8) = 0.0000000012174308662357429;
e(9) = -0.0000000001768115526613442;
e(10)= -0.0000000000119372182556161;
e(11)= 0.0000000000003802505358299;
e(12)= -0.0000000000000660188322362;
e(13)= -0.0000000000000067917055170;
e(14)= -0.0000000000000003506869329;
e(15)= -0.0000000000000000697221497;
e(16)= -0.0000000000000000109567941;
e(17)= -0.0000000000000000011536390;
e(18)= -0.0000000000000000001326235;
e(19)= -0.0000000000000000000263938;
e(20)= 0.0000000000000000000005341;
e(21)= -0.0000000000000000000022610;
e(22)= 0.0000000000000000000009552;
e(23)= -0.0000000000000000000005250;
e(24)= 0.0000000000000000000002487;
e(25)= -0.0000000000000000000001134;
e(26)= 0.0000000000000000000000420;

d5 = -9.199992358830151031278420;
d6 = 2.794990820124599493768426;

r = 0;
beta = sqrt(-log(1-x.^2));

for i = 1:26
    r = e(i).*(ortho_poly(1, d5./(beta).^(0.5)+d6, i-1))+r;
end
r = r.*beta;

```





## Annex 4. Codi MATLAB funció òptima Chebyshev-Dillard

```

function [inv]=funcio_optima_cheby(t, sigma, delta ,modes)
%APROXIMACION_CHEBY: Calcula la funcio optima Chebyshev
%Sintaxis [inv]=FUNCIO_OPTIMA_CHEBY(t, sigma, delta ,modes)
%      t: mostres d'entrada
%      sigma: varianza del soroll ASE (ull! en aquest cas és la
varianza no la desviació estàndard)
%      delta: paràmetre d'ajust
%      modes: nombre de modes per estat de polarització

inv=0.*ones(length(t), 1);
K = recursive_X(sqrt(delta), sqrt(t)./sqrt(sigma), modes);
p = 1 - exp(-t./(2.*sigma)).*exp(-delta/2).*K;

for i =1:length(t)
    if p(i) < (0.8/2+1/2) & p(i) > (-0.8/2+1/2)
        inv(i)=sqrt(sigma.*delta)+sqrt(2).*aprox_cheby_rang1(t(i),
sigma, delta,modes);
    elseif p(i) >= (0.8/2+1/2) & p(i) < (0.9975/2+1/2)
        inv(i)= sqrt(sigma.*delta)+sqrt(2).*aprox_cheby_rang2(t(i),
sigma, delta,modes);
    elseif p(i) <= (-0.8/2+1/2) & p(i) > (-0.9975/2+1/2)
        inv(i)= sqrt(sigma.*delta)-sqrt(2).*aprox_cheby_rang2(t(i),
sigma, delta,modes);
    elseif p(i) >= (0.9975/2+1/2) & p(i) < ((1-5*10^(-16))/2+1/2)
        inv(i)= sqrt(sigma.*delta)+sqrt(2).*aprox_cheby_rang3(t(i),
sigma, delta,modes);
    elseif p(i) < (-0.9975/2+1/2) & p(i) > ((-1+5*10^(-16))/2+1/2)
        inv(i)= sqrt(sigma.*delta)-sqrt(2).*aprox_cheby_rang3(t(i),
sigma, delta,modes);
    elseif p(i) >= ((1-5*10^(-16))/2+1/2)
        inv(i)= sqrt(sigma.*delta)+sqrt(2).*aprox_cheby_rang4(t(i),
sigma,delta ,modes);
    elseif p(i) <= ((-1+5*10^(-16))/2+1/2)
        inv(i)= sqrt(sigma.*delta)-sqrt(2).*aprox_cheby_rang4(t(i),
sigma, delta,modes);
    end
end

function [r] = aprox_cheby_rang1(x, sigma, delta, modes)
e = 0.*ones(39, 1);
e(1) = 0.9928853766189408231495800;
e(2) = 0.1204675161431044864647846;
e(3) = 0.0160781993420999447257039;
e(4) = 0.0026867044371623158279591;
e(5) = 0.0004996347302357262947170;
e(6) = 0.0000988982185991204409911;
e(7) = 0.0000203918127639944337340;
e(8) = 0.0000043272716177354218758;
e(9) = 0.0000009380814128593406758;
e(10)= 0.0000002067347208683427411;
e(11)= 0.0000000461596991054300078;
e(12)= 0.0000000104166797027146217;
e(13)= 0.0000000023715009995921222;
e(14)= 0.000000005439284068471390;
e(15)= 0.0000000001255489864097987;
e(16)= 0.0000000000291381803663201;
e(17)= 0.0000000000067949421808797;
e(18)= 0.0000000000015912343331469;
e(19)= 0.0000000000003740250585245;
e(20)= 0.0000000000000882087762421;
e(21)= 0.0000000000000208650897725;
e(22)= 0.000000000000049488041039;
e(23)= 0.0000000000000011766394740;
e(24)= 0.000000000000002803855725;
e(25)= 0.000000000000000669506638;
e(26)= 0.000000000000000160165495;
e(27)= 0.000000000000000038382583;
e(28)= 0.000000000000000009212851;
e(29)= 0.000000000000000002214615;

```

```

e(30)= 0.0000000000000000000000000533091;
e(31)= 0.0000000000000000000000000128488;
e(32)= 0.0000000000000000000000000031006;
e(33)= 0.000000000000000000000000007491;
e(34)= 0.000000000000000000000000001812;
e(35)= 0.00000000000000000000000000439;
e(36)= 0.00000000000000000000000000106;
e(37)= 0.0000000000000000000000000026;
e(38)= 0.0000000000000000000000000006;
e(39)= 0.0000000000000000000000000002;

K = recursive_X(sqrt(delta), sqrt(x)./sqrt(sigma), modes);
x = 1 - exp(-x./(2.*sigma)).*exp(-delta/2).*K;

x=2.*(x-0.5);
r = 0;
r = x.*e(1);
for i = 2:39
    r = x.*e(i).*(ortho_poly(1, ((x.^2)./0.32)-1, i-1))+r;
end
r = r.*sqrt(sigma);

function [r] = aprox_cheby_rang2(x, sigma, delta,modes)

e = 0.*ones(27, 1);
e(1) = 0.9121588034175537733059200;
e(2) = -0.0162662818676636958546661;
e(3) = 0.0004335564729494453650589;
e(4) = 0.0002144385700744592065205;
e(5) = 0.0000026257510757648130176;
e(6) = -0.0000030210910501037969912;
e(7) = -0.0000000124060618367572157;
e(8) = 0.0000000624066092999917380;
e(9) = -0.0000000005401247900957858;
e(10)= -0.0000000014232078975315910;
e(11)= 0.0000000000343840281955305;
e(12)= 0.0000000000335848703900138;
e(13)= -0.0000000000014584288516512;
e(14)= -0.0000000000008102174258833;
e(15)= 0.0000000000000525324085874;
e(16)= 0.0000000000000197115408612;
e(17)= -0.0000000000000017494333828;
e(18)= -0.0000000000000004800596619;
e(19)= 0.0000000000000000557302987;
e(20)= 0.00000000000000000116326054;
e(21)= -0.00000000000000000017262489;
e(22)= -0.00000000000000000002784973;
e(23)= 0.00000000000000000000524481;
e(24)= 0.00000000000000000000065270;
e(25)= -0.00000000000000000000015707;
e(26)= -0.00000000000000000000001475;
e(27)= 0.00000000000000000000000450;
d1 = -1.548813042373261659512742;
d2 = 2.565490123147816151928163;

K = recursive_X(sqrt(delta), sqrt(x)./sqrt(sigma), modes);
P = 1 - exp(-x./(2.*sigma)).*exp(-delta/2).*K;
beta = sqrt((x./(2.*sigma))+(delta/2)-log(K)-log(4)-log(P));

r = 0;
for i = 1:27
    r = e(i).*(ortho_poly(1, d1.*beta+d2, i-1))+r;
end
r = r.*beta;
r = r.*sqrt(sigma);

function [r] = aprox_cheby_rang3(x, sigma, delta,modes)
e = 0.*ones(38, 1);
e(1) = 0.9566797090204925274526373;
e(2) = -0.0231070043090649036999908;
e(3) = -0.0043742360975084077333218;
e(4) = -0.0005765034226511854809364;
e(5) = -0.0000109610223070923931242;
e(6) = 0.0000251085470246442787982;
e(7) = 0.0000105623360679477511955;
e(8) = 0.0000027544123300306391503;
e(9) = 0.0000004324844983283380689;

```

```

e(10)= -0.0000000205303366552086916;
e(11)= -0.0000000438915366654316784;
e(12)= -0.0000000176840095080881795;
e(13)= -0.0000000039912890280463420;
e(14)= -0.0000000001869324124559212;
e(15)= 0.000000002729227396746077;
e(16)= 0.0000000001328172131565497;
e(17)= 0.0000000000318342484482286;
e(18)= 0.0000000000016700607751926;
e(19)= -0.0000000000020364649611537;
e(20)= -0.0000000000009648468127965;
e(21)= -0.0000000000002195672778128;
e(22)= -0.0000000000000095689813014;
e(23)= 0.0000000000000137032572230;
e(24)= 0.0000000000000062538505417;
e(25)= 0.0000000000000014584615266;
e(26)= 0.0000000000000001078123993;
e(27)= -0.0000000000000000709229988;
e(28)= -0.0000000000000000391411775;
e(29)= -0.0000000000000000111659209;
e(30)= -0.0000000000000000015770366;
e(31)= 0.0000000000000000002853149;
e(32)= 0.00000000000000000002716662;
e(33)= 0.0000000000000000000957770;
e(34)= 0.0000000000000000000176835;
e(35)= -0.000000000000000000009828;
e(36)= -0.0000000000000000000020464;
e(37)= -0.000000000000000000008020;
e(38)= -0.000000000000000000001650;

d3 = -0.5594576313298323225436913;
d4 = 2.287915716263357638965891;

K = recursive_X(sqrt(delta), sqrt(x)./sqrt(sigma), modes);
P = 1 - exp(-x./(2.*sigma)).*exp(-delta/2).*K;
beta = sqrt((x./(2.*sigma))+(delta/2)-log(K)-log(4)-log(P));

r = 0;
for i = 1:38
    r = e(i).*(ortho_poly(1, d3.*beta+d4, i-1))+r;
end
r = r.*beta;
r = r.*sqrt(sigma);

function [r] = aprox_cheby_rang4(x, sigma, delta,modes)

e = 0.*ones(26, 1);
e(1) = 0.9885750640661893136460358;
e(2) = 0.0108577051845994776160281;
e(3) = -0.0017511651027627952494825;
e(4) = 0.0000211969932065633437984;
e(5) = 0.0000156648714042435087911;
e(6) = -0.0000005190416869103124261;
e(7) = -0.0000000371357897426717780;
e(8) = 0.00000000012174308662357429;
e(9) = -0.0000000001768115526613442;
e(10) = -0.0000000000119372182556161;
e(11) = 0.000000000003802505358299;
e(12) = -0.00000000000000660188322362;
e(13) = -0.0000000000000067917055170;
e(14) = -0.0000000000000003506869329;
e(15) = -0.000000000000000697221497;
e(16) = -0.0000000000000000109567941;
e(17) = -0.000000000000000011536390;
e(18) = -0.000000000000000001326235;
e(19) = -0.000000000000000000263938;
e(20) = 0.0000000000000000000005341;
e(21) = -0.000000000000000000022610;
e(22) = 0.000000000000000000009552;
e(23) = -0.000000000000000000005250;
e(24) = 0.0000000000000000000002487;
e(25) = -0.000000000000000000001134;
e(26) = 0.000000000000000000000420;

d5 = -9.199992358830151031278420;
d6 = 2.794990820124599493768426;

```

```
K = recursive_X(sqrt(delta), sqrt(x)./sqrt(sigma), modes);
P = 1 - exp(-x./(2.*sigma)).*exp(-delta/2).*K;
beta = sqrt((x./(2.*sigma))+(delta/2)-log(K)-log(4)-log(P));
r = 0;
for i = 1:26
    r = e(i).*(ortho_poly(1, d5./(beta).^(0.5)+d6, i-1))+r;
end
r = r.*beta;
r = r.*sqrt(sigma);

function z = recursive_X(a,b,M)
h0 = 0;
for j=0:M-1
    h0 = h0 + (power(b.^2./2,j))./factorial(j);
end
d0 = (power(b.^2./2,M-1))./factorial(M-1);
f0 = 1;

fk = f0;
dk = d0;
hk = h0;
q = f0.*h0;
for i=1:100
    fk = ((a.^2./2).*fk)./i;
    dk = ((b.^2./2).*dk)./(i+M-1);
    hk = hk + dk;
    q = hk.*fk + q;
end
z = q;
```

## Annex 5. Tests d'Hipòtesis

Una hipòtesis estadística és una conjetura sobre el valor d'un o més paràmetres d'un model estadístic. El test d'hipòtesis és un procés d'establir la validació d'una hipòtesis. Aquest tema és fonamental en una gran varietat d'aplicacions, alguns exemples són; ¿La teoria d'herència de Mendel és vàlida? ¿El nombre de partícules emeses per una substància radioactiva té una distribució de Poisson? ¿La mitja d'una v.a. canvia si certs factors de l'experiment són modificats? ¿Fumar disminueix l'expectació de vida?

Podem definir el test d'hipòtesis o de contrast d'hipòtesis com el procediment estadístic mitjançant el qual s'investiga la certesa o falsedat d'una hipòtesis sobre una població o poblacions.

Anomenarem hipòtesis nul·la, i es representa per  $H_0$ , a la hipòtesis que es formula i per tant es vol contrastar o refusar, i hipòtesis alternativa, i es representa per  $H_1$ , a qualsevol altre hipòtesis que sigui diferent de la formulada, i que sigui contrària a  $H_0$ , de forma que l'acceptació de la hipòtesis nul·la  $H_0$  implica el refús de l'alternativa  $H_1$  i viceversa, el refús de  $H_0$  implica l'acceptació de  $H_1$ .

Al tenir ja formulada la hipòtesis nul·la, és necessari que les evidències siguin fortes per refusar-la; és a dir que els canvis deguts a l'atzar, on en tal cas el canvi no és significatiu, i no canviem, però pot ser que els canvis siguin deguts a altres causes. En aquest últim cas és quan el canvi és significatiu i el refusarem.

Per tant, el primer que hem de fer és fixar un cert interval dins del qual sigui normal que hi hagin canvis, és a dir, una regió tal que si el paràmetre es manté en dit interval, ens continuem quedant amb la hipòtesis  $H_0$ , doncs aquestes petites variacions són degudes a l'atzar. Aquest interval o regió es denomina regió d'acceptació, i serà major o menor depenent del nivell de confiança que utilitzem,  $1 - \alpha$ .

La regió que quedi fora de la regió d'acceptació indica que en aquest cas els canvis no es poden atribuir a l'atzar, i per tant hem de refusar  $H_0$  i acceptar  $H_1$ . Tal regió s'anomena regió crítica o de refús.

En aquest annex només veurem quatre test d'hipòtesis o de contrast, que són els següents: Test de Kolmogorov-Smirnov [25], test de Lilliefors, test de Jarque-Bera [44] i test de Shapiro-Wilks [44]. A continuació es realitza una descripció de cada un d'ells.

### Test de Kolmogorov-Smirnov (KS)

Suposeu que modelem el procés aleatori  $\hat{F}(x)$  com l'estimació del problema i utilitzem la següent variable aleatòria com a test estadístic:

$$q = \max_x |\hat{F}(x) - F_0(x)|$$

Aquesta elecció està basada en les següents observacions: Per un específic  $\xi$ , la funció  $\hat{F}(x)$  és l'estimació empírica de  $F(x)$ ; Aquesta tendeix a  $F(x)$  per  $n \rightarrow \infty$ . Per tant es pot dir que:

$$E\{\hat{F}(x)\} = F(x) \quad \hat{F}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x)$$

Això vol dir que per valors grans de  $n$ ,  $q$  és proper al zero si  $H_0$  és cert i és proper a maximitzar  $|\hat{F}(x) - F_0(x)|$  si  $H_1$  és cert. Això porta a la conclusió que podem refusar la hipòtesis  $H_0$  si  $q$  és més gran que una constant  $c$ . Aquesta constant està determinada en termes del nivell de significació  $\alpha = P\{q > c \mid H_0\}$  i la distribució de  $q$ . Utilitzant l'aproximació de Kolmogorov s'obté:

$$\alpha = P\{q > c \mid H_0\} \cong 2e^{-2nc^2}$$

D'aquesta manera, el test procedeix com segueix: Es modela l'estimació empírica  $\hat{F}(x)$  de  $F(x)$  i es determina  $q$  de l'aproximació de Kolmogorov. Així que:

$$\text{S'accepta } H_0 \text{ si } q < \sqrt{-\frac{1}{2n} \ln \frac{\alpha}{2}}$$

### Test de Lilliefors

És una adaptació del test de KS. Si considerem la hipòtesis simple:

$$H_0: F = \Phi_{\mu_0, \sigma_0^2}$$

On  $\Phi_{\mu, \sigma^2}$  és la funció de distribució de la normal  $N(\mu, \sigma^2)$ .

El test KS és llavors: "Refusar  $H_0$ " si

$$q = \max_x |\hat{F}(x) - \Phi_{\mu_0, \sigma_0^2}(x)| > c$$

Però, en general, no es coneix la mitja i la varianza de  $\hat{F}(x)$ . La hipòtesis de normalitat de  $\hat{F}(x)$  és llavors composta:

$$H_0: \begin{cases} \hat{F} \text{ és una distribució normal:} \\ \hat{F} \in \{\Phi_{\mu, \sigma^2}, (\mu, \sigma^2)\} \end{cases}$$

El test de Lilliefors per aquest contrast es basa en l'estadístic de KS, substituint  $\mu$  i  $\sigma^2$  pels seus estimadors:

$$q^* = \max_x |\hat{F}(x) - \Phi_{\bar{X}, S^2}(x)|$$

On  $\bar{X}$  i  $S^2$  són respectivament la mitja i la varianza mostral. Per un nivell de significació donat  $\alpha$ , el llinar crític  $c$  del test s'obté mitjançant la taula de Lilliefors (aquestes taules han sigut computades mitjançant el mètode de Monte Carlo).

## Test de Jarque-Bera (JB)

En estadística, el test de Jarque-Bera és una mesura de bondat per indicar la divergència de normalitat, basat en la mostra "kurtosis" i "skewness". El test estadístic de JB es defineix com:

$$JB = \frac{n}{6} \left( S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right)$$

On  $n$  és el nombre d'observacions (o graus de llibertat),  $S$  és la mostra "skewness",  $K$  és la mostra "kurtosis", definides com

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}}$$

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2}$$

On  $\mu_3$  i  $\mu_4$  són els moments centrals de tercer i quart ordre respectivament,  $\bar{x}$  és el valor mig, i  $\sigma^2$  és el moment central de segon ordre (la varianza).

El test estadístic de JB té una distribució asimptòtica chi-quadrada amb dos graus de llibertat i pot ser utilitzat com a test d'hipòtesis per tal de comprovar si les dades tenen una distribució normal. La hipòtesis nul·la és una unió d'hipòtesis del "skewness" sent zero i la "excess kurtosis" sent zero, ja que les mostres de la distribució normal tenen un "skewness" esperat de 0 i un "excess kurtosis" de 0 (que és el mateix que una kurtosis de 3).

## Test de Shapiro-Wilks

Donada una mostra aleatòria de dimensió  $n$ , es vol saber si procedeix d'una població amb distribució normal. El contrast de Shapiro-Wilks realitza els següents passos:

- S'ordena la mostra de menor a major, obtenint un nou vector mostral.
- Es calcula l'estadístic de contrast:

$$q = \frac{1}{ns^2} \left( \sum_{i=1}^h a_{in} (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}) \right)^2$$

On  $s^2$  és la varianza mostral,

$$h = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ és parell} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ és imparell} \end{cases}$$

i les  $a_{i n}$  solen estar tabulades.

- La distribució de l'estadístic  $q$  es troba també tabulada per cada nivell de significació.

El contrast de normalitat es planteja en els següents termes:

$H_0$ : "la mostra procedeix d'una població normal"

Front a l'alternativa:

$H_1$ : "la mostra no procedeix d'una població normal"

La regió crítica per contrastar la veracitat del test ve donat per:

$$q < W_{n,\alpha}$$

On  $W_{n,\alpha}$  és un valor de la taula de Shapiro-Wilks corresponent a una dimensió mostral  $n$  i un nivell de significació  $\alpha$ .



## Annex 6. Distribució de Rice

La distribució de Rice s'obté a partir d'una v.a. non-central chi-square  $\chi^2$  amb  $n$  graus de llibertat

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

En el cas particular d'una v.a. non-central chi-square amb  $n = 2$  graus de llibertat, denotada per la lletra  $Y$  com,

$$Y = X_1^2 + X_2^2$$

On  $X_1$  i  $X_2$  són v.a. gaussianes estadísticament independents, llavors la v.a. de Rice, donada per  $R = \sqrt{Y}$  té la següent funció de densitat de probabilitat:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-(r^2+s^2)/2\sigma^2} I_0\left(\frac{r \cdot s}{\sigma^2}\right) \quad r \geq 0$$

On  $s^2 = m_1^2 + m_2^2$  és l'energia del senyal,  $2\sigma^2$  és la densitat espectral del soroll i  $I_0(\cdot)$  és la funció de Bessel modificada de primera espècie i d'ordre 0. La seva funció de distribució de probabilitat (cdf) es pot escriure com:

$$F_R(r) = 1 - Q_1\left(\frac{s}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right) \quad r \geq 0$$

On  $Q_1(a, b)$  és la funció de Marcum Q.

Si generalitzem les expressions anteriors pel cas de  $n$  graus de llibertat, la PDF de  $R$  és:

$$f_R(r) = \frac{r^{n/2}}{\sigma^2 s^{(n-2)/2}} e^{-(r^2+s^2)/2\sigma^2} I_{n/2-1}\left(\frac{r \cdot s}{\sigma^2}\right) \quad r \geq 0$$

I la corresponent CDF és:

$$F_R(r) = P(R \leq r) = P(\sqrt{Y} \leq r) = P(Y \leq r^2) = F_Y(r^2)$$

On  $F_Y(\cdot)$  és la funció de distribució de probabilitat d'una v.a. non-central chi-square. En el cas especial en que  $m = n/2$  és un enter, tenim

$$F_R(r) = 1 - Q_m\left(\frac{s}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right) \quad r \geq 0$$

Finalment, la següent expressió dona el moment k-èsim de  $R$

$$E(R^k) = (2\sigma^2)^{k/2} e^{-s^2/2\sigma^2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+k)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} {}_1F_1\left(\frac{n+k}{2}, \frac{n}{2}; \frac{s^2}{2\sigma^2}\right)$$

On  ${}_1F_1(\alpha, \beta; x)$  és la funció hipergeomètrica confluent.

En el cas particular de  $n = 2$  graus de llibertat, el moment de primer ordre o mitja és:

$$E\{y\} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \left(1 + \frac{s^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{s^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{s^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{s^2}{4\sigma^2}\right) \right] e^{-\frac{s^2}{4\sigma^2}}$$

I la varianza és:

$$\sigma_y^2 = 2\sigma^2 + s^2 - \frac{\pi}{2} \sigma^2 e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} \left( \left(1 + \frac{s^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{s^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{s^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{s^2}{4\sigma^2}\right) \right)^2$$

La distribució de Rice és inherent al sistema amb el dispositiu arrel quadrada, i sempre que utilitzem l'arrel quadrada en un sistema de comunicacions òptiques amb amplificadors òptics, la distribució resultant serà de Rice. Se sap que la distribució de Rice s'aproxima molt bé per una Gaussiana quan el nombre de graus de llibertat és gran o quan tenim senyals amb energies grans ( $s^2 \gg 1$ ). En canvi, per senyals amb energies properes al zero (per exemple el bit zero), no podem fer aquesta aproximació Gaussiana.

Podem realitzar una comparació entre la distribució de Rice i una Gaussiana ideal per diferents valors de l'energia del senyal. En efecte, sigui  $s^2 = 0.01$ , un valor molt proper al zero, però diferent de zero. Suposem varianza igual a 1. Per aquest exemple, el valor mitjà de la Gaussiana ideal que voldríem tenir a la sortida del sistema és:

$$E\{y\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \left(1 + \frac{0.01}{2}\right) I_0\left(\frac{0.01}{4}\right) + \frac{0.01}{2} I_1\left(\frac{0.01}{4}\right) \right] e^{-\frac{0.01}{4}} = 1.2564$$

I la varianza és:

$$\sigma_y^2 = 2\sigma^2 + s^2 - (1.2564)^2 = 2 + 0.01 - (1.2564)^2 = 0.431459$$

La figura A.1 representa una Gaussiana ideal (color verd) amb el paràmetre de mitja que hem calculat anteriorment i varianza unitària, i la PDF experimental d'una v.a. de Rice amb paràmetres  $s^2 = 0.01$ ,  $\sigma^2 = 1$  i  $n = 2$  graus de llibertat (color blau). Es pot comprovar a simple vista que les distribucions són totalment diferents.

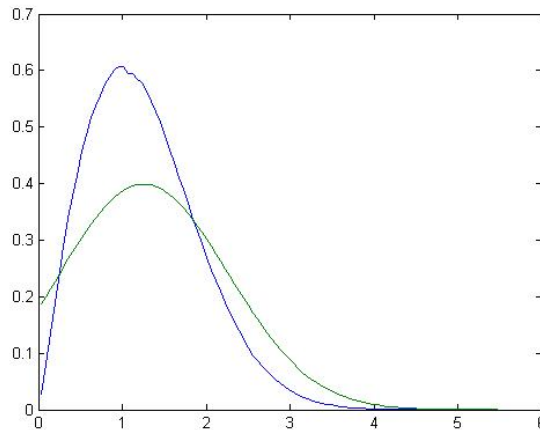


Figura A. 1. Comparació Gaussiana amb  $\mu=0.1$  i  $\sigma=1$  vers una Rice amb  $n=2$  i  $s^2=0.01$

- Mitja experimental = 1.2561
- Varianza experimental = 0.4307
- Error quadràtic mig = 0.0913 (9.13 %)

Per a un valor d'energia del senyal  $s^2$  gran, per exemple  $s^2 = 2500$ , la mitja és:

$$E\{y\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \left(1 + \frac{2500}{2}\right) I_0\left(\frac{2500}{4}\right) + \frac{2500}{2} I_1\left(\frac{2500}{4}\right) \right] e^{-\frac{2500}{4}} = 50.0100$$

I la varianza és:

$$\sigma_y^2 = 2\sigma^2 + s^2 - (50.0100)^2 = 2 + 50^2 - (50.0100)^2 = 0.9999$$

La Gaussiana ideal ha d'estar centrada en 50.01. En el gràfic de la figura A.2 s'observa que la distribució de Rice i la distribució Gaussiana són idèntiques per a valors  $s^2/\sigma^2$  grans.

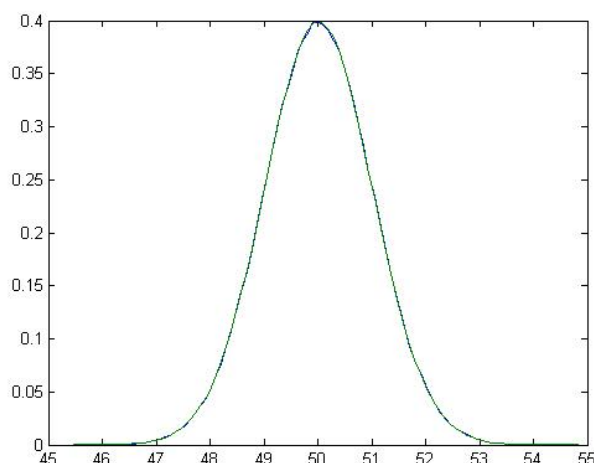


Figura A. 2. Comparació Gaussiana amb  $\mu=50$  i  $\sigma=1$  vers una Rice amb  $n=2$  i  $s^2=2500$

- Mitja experimental = 50.0124
- Varianza experimental = 1.0005
- Error quadràtic mig = 8.8305e-004 (0.088 %)



## Annex 7. Codi aproximació per trams

```

function [alpha, m1, variancel, skewness1, kurtosis1]= aprox_per_trams
nmuestras = 10000;
n = 7;
tau = 100;
pasos = 1000;
sigma = 1;
delta = linspace(0, 600, pasos)';
modes = 5;
L = 100;
x = 0.*ones(L, length(delta));
t = 0.*ones(L, length(delta));
for i=1:length(delta)
    pdf = ncx2rnd(2.*modes,delta(i,1), nmuestras, 1);
    maxi = max(pdf);
    mini = min(pdf);
    t(:,i) = linspace(mini, maxi, L)';
    for j=1:L
        x(j,i) = g_function_hasting_dillard(t(j,i), sigma, delta(i,1),
modes);
    end
end
t_vector = [t(:,1)];
x_values = [x(:,1)];
for i=2:length(delta)
    t_vector=[t_vector; t(:,i)];
    x_values=[x_values; x(:,i)];
end
p1 = ones(length(t_vector),1);
p2 = t_vector.*exp(-t_vector./tau);
p3 = sqrt(t_vector).*(1-exp(-t_vector./tau));
p = [p1 p2 p3];
for i=4:n
    k = ((t_vector).^(1/i)).*exp(-t_vector./tau);
    p = [p k];
end
M = 0.*ones(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        M(i,j) = p(:,j)'*p(:,i);
    end
end
s = 0.*ones(n,1);
for i=1:n
    s(i,1)=x_values'*p(:,i);
end
alpha = inv(M)*s;
y2 = p*alpha;
figure(1);
hold on,
plot(t_vector,x_values,'r. '),
kk = linspace(0.01, 800, 10000)';
y2_p = aprox1(alpha, kk, tau, n);
plot(kk,y2_p, 'b', 'Linewidth', 2), grid on, xlabel('y'),
ylabel('g(y)')
kkk = linspace(0, 800, 10000)';
for i=1:length(kkk)
    y3(i,1) = g_function_hasting_dillard(kkk(i,1), 1, 5, modes);
end
plot(kkk,y3, 'g', 'Linewidth', 2), grid on, xlabel('y'),
ylabel('g(y)')

pasos2 = 1000;
nmuestras2 = 10000;

delta1 = linspace(0, 100, pasos2);
delta1 = delta1.^2;
pdf_input = 0.*ones(nmuestras2, pasos2);
x1 = 0.*ones(nmuestras2, 500);
m1 = 0.*ones(pasos2, 1);
variancel = 0.*ones(pasos2,1);
skewness1 = 0.*ones(pasos2,1);
kurtosis1 = 0.*ones(pasos2,1);

```

```

for i = 1:pasos2
    pdf_input(:,i) = ncx2rnd(2.*modes,delta1(1,i), nmuestras2, 1);
end

for i = 1:pasos2
    x1(:,i) = aprox1(alpha, pdf_input(:,i), tau, n);
    m1(i,1)= mean(x1(:,i));
    variancel(i,1) = var(x1(:,i));
    skewness1(i,1) = moment(x1(:,i),3)/((variancel(i,1)).^(3/2));
    kurtosis1(i,1) = moment(x1(:,i),4)/((variancel(i,1)).^2);
end
figure(2)
subplot(141),
plot(sqrt(delta1), m1, 'b',sqrt(delta1),sqrt(delta1), 'r--',
'Linewidth', 2); grid on
subplot(142),
plot(sqrt(delta1), smooth(variancel, 10), 'Linewidth', 2); grid on
subplot(143),
plot(sqrt(delta1), smooth(skewness1, 40), 'Linewidth', 2); grid on
subplot(144),
plot(sqrt(delta1), smooth(kurtosis1-3, 40), 'Linewidth', 2); grid on

function k = aprox1(alpha, t, tau, n)
p1 = ones(length(t),1);
p2 = t.*exp(-t./tau);
p3 = sqrt(t).*(1-exp(-t./tau));
p = [p1 p2 p3];
for i=4:n
    k = ((t).^(1/i)).*exp(-t./tau);
    p = [p k];
end
k = p*alpha;

```

## Annex 8. Programa de test amb GUI desenvolupat en MATLAB

En el present annex es descriurà el funcionament de l'aplicació interactiva desenvolupada en llenguatge de programació MATLAB que integra diferents anàlisis de la funció òptima i d'altres funcions radicals, com l'arrel quadrada i l'arrel cúbica.

La idea de desenvolupar una aplicació amb entorn gràfic i interactiva amb l'usuari va sorgir a partir de cursar una assignatura de lliure elecció anomenada "MATLAB: Fonaments i aplicacions" (MFA). En aquesta assignatura vaig assolir els coneixements necessaris per realitzar programes amb MATLAB i fer-los més atractius amb l'eina GUIDE. Durant el transcurs d'aquesta assignatura ens van suggerir desenvolupar un projecte en el que podíem escollir temàtica. Jo vaig escollir fer una petita eina relacionada amb el meu PFC.

En un primer moment, no sabia com enfocar el programa, ni tampoc quins aspectes incloure. A més a més, durant el curs de l'assignatura, encara no havia trobat resultats concloents al meu PFC. Al final del curs vaig acabar la primera versió beta del programa, i va ser la que vaig entregar com a projecte final de l'assignatura MFA. Tot i així, encara estava molt verda.

Una vegada vaig acabar l'assignatura MFA, vaig continuar treballant en aquest programa, decidit en citar-lo al meu PFC, com una part experimental. Per fer-ho, encara havia de polir alguns aspectes del programa.

La versió que presento en aquest annex és la versió definitiva, tot i que té alguns petits errors en l'apartat de càlcul de la BER, per aquest motiu recomano no utilitzar aquesta opció. Aquesta versió, a diferència de les primeres versions beta, està traduïda a l'anglès i presenta moltes millores tècniques i d'anàlisis. A més a més, també he prestat una especial atenció en l'aspecte visual i la interfície gràfica, intentant que sigui intuïtiva i de fàcil utilització.

La versió definitiva del programa conté aproximadament 1400 línies de codi, per aquest motiu no les afegiré en aquest annex. El programa s'ha testejat en la última versió comercial de MATLAB; aquesta és la versió 7.5.0 (R2007b). En altres versions més antigues, no l'he provat. L'execució és molt senzilla:

- Primerament, recomano afegir al Path de directoris del MATLAB la carpeta on es trobi el programa. Per fer-ho, seleccionem File->Set Path. Una vegada dins, seleccionem Add Folder i busquem la carpeta de treball. Abans de sortir, guardem amb Save.
- Una vegada hem fet això, en la finestra de Command Window del MATLAB, llençarem el programa principal amb la següent instrucció:

```
chi_to_gauss
```

Amb aquests dos passos, s'hauria d'executar el programa principal, mostrant la finestra que apareix en la figura A.3.

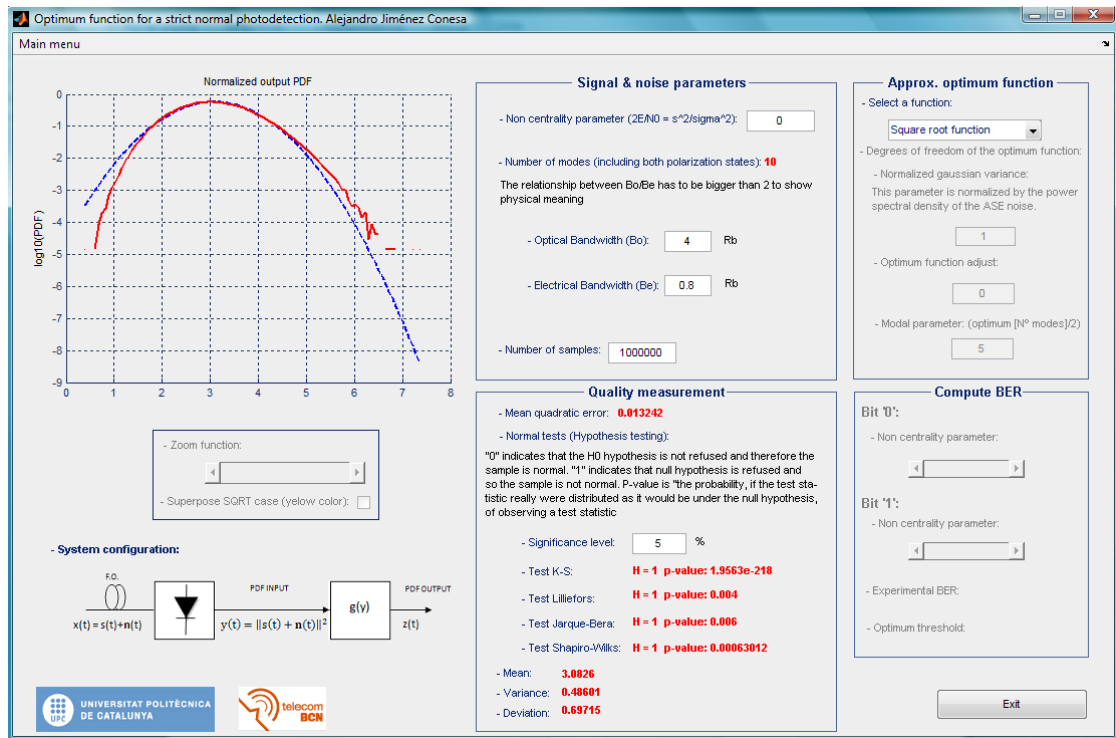


Figura A. 3. Primera pantalla del programa

El programa presenta un menú principal on es poden trobar les sis opcions següents:

- **PDF d'entrada:** Es representa en uns eixos de coordenades el logaritme de la PDF d'entrada (color vermell) i es compara amb una Gaussiana ideal (color blau discontinu) tal i com es pot veure en la figura A.4.

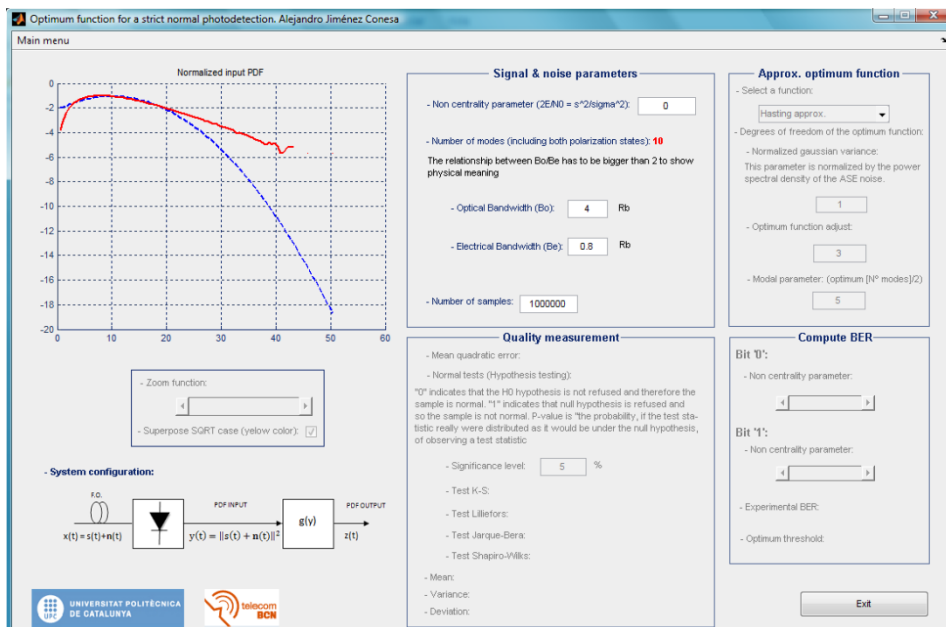


Figura A. 4. Pantalla Input PDF

- **PDF de sortida:** Es representa en uns eixos de coordenades el logaritme de la PDF de sortida (color vermell) i es compara amb una Gaussiana ideal (color blau discontinu) com es pot veure en A.5.



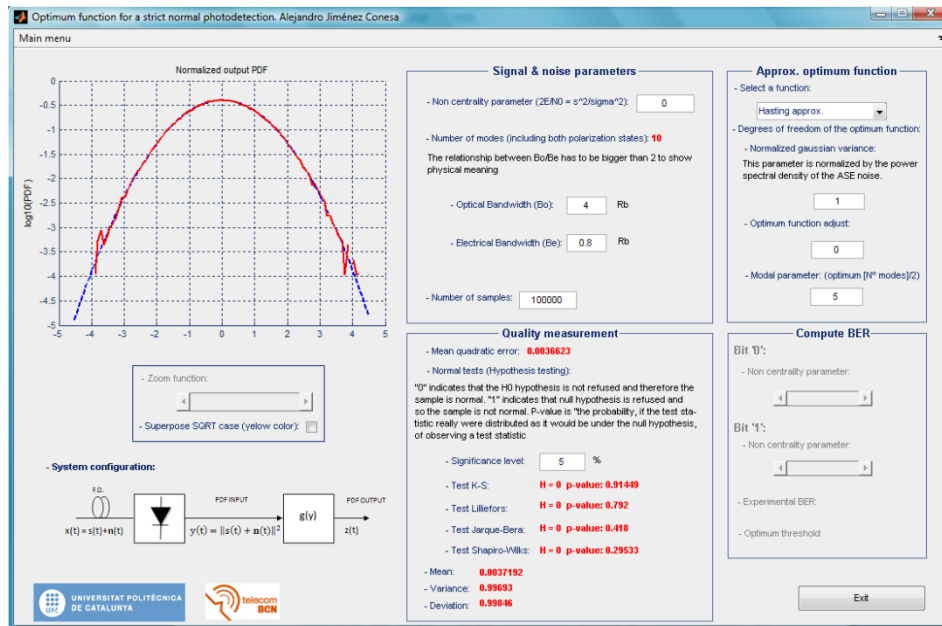


Figura A. 5. Pantalla Output PDF

- **Funció:** Es representa en uns eixos de coordenades la funció escollida i permet analitzar-la a partir de un slider que fa de zoom. En la figura A.6 es representa l'opció Function.

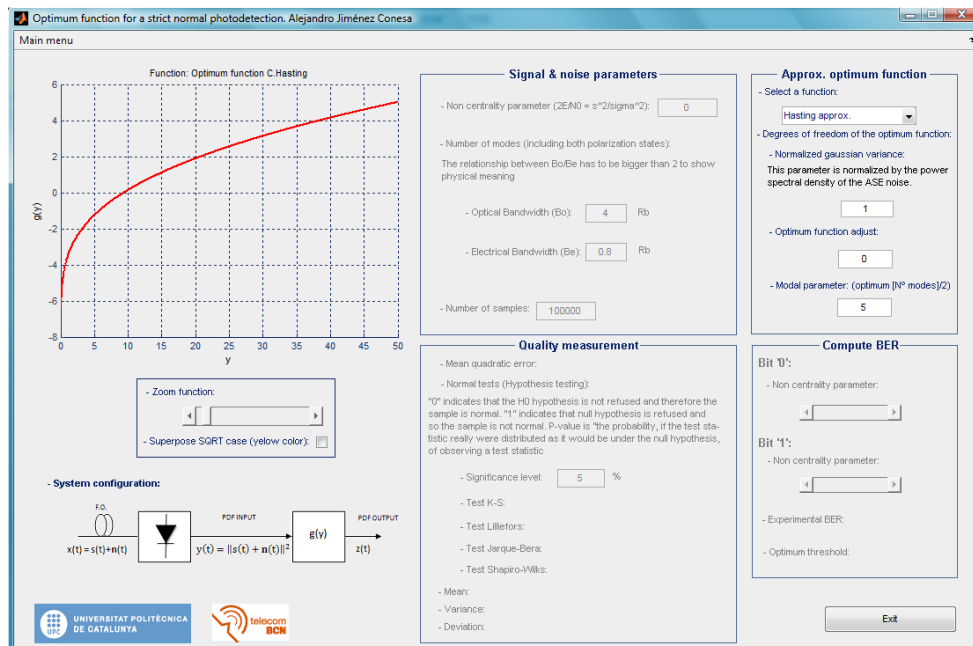


Figura A. 6. Pantalla function

- **Diagrama de probabilitat normal:** Es representa el diagrama de probabilitat normal de les mostres de sortida de la funció escollida. En la figura A.7 es representa aquesta opció.

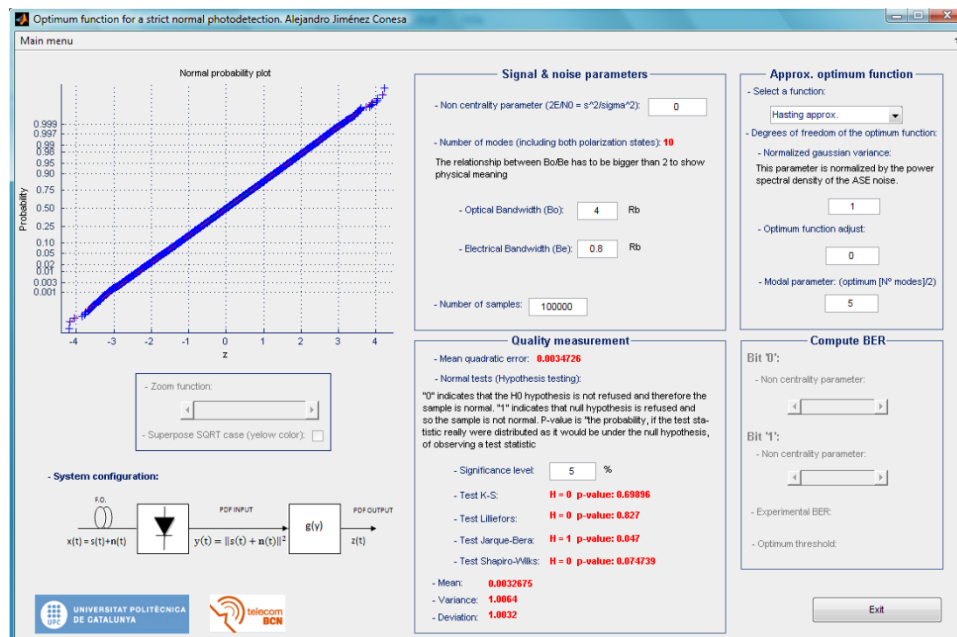


Figura A. 7. Pantalla normal plot

- **Càlcul de la BER:** Computa la BER, a partir d'una simulació estadística de MC, per uns paràmetres concrets. No recomano fer servir aquesta opció, ja que el temps de computació és molt gran i té alguns problemes que pot fer que el programa no respongui. Aquesta opció no s'ha pogut acabar!
- **Sortir del programa.**

A part del menú principal, el programa mostra quatre frames d'interacció amb l'usuari, que són els següents:

- **Paràmetres del senyal i soroll:** Bàsicament, permet a l'usuari introduir els paràmetres relacionats amb el senyal i el soroll, com són el paràmetre de no centralitat, el nombre de modes espectrals (definit per la relació entre amples de banda del filtre òptic i elèctric) i el nombre de mostres. El programa treballa amb PDF's normalitzades per la varianza del soroll ASE  $\sigma^2 = N_0/2$ , és per aquest el motiu pel qual no es demana aquest paràmetre.
- **Mesures de qualitat:** Aquest frame mostra els resultats de diferents mesures de qualitat com són l'error quadràtic mig, test d'hipòtesis (on es pot variar el nivell de significació segons convingui) i càlcul de moments estadístics.
- **Aproximació de la funció òptima:** Permet que l'usuari pugui escollir entre diferents funcions com són l'arrel quadrada, l'arrel cúbica, la funció òptima basada en les aproximacions de C. Hasting i la funció òptima basada en la interpolació de polinomis de Chebyshev.
- **Computació de la BER:** L'usuari pot variar els paràmetres de no centralitat del bit "0" i del bit "1", i el programa et retorna la BER experimental i el llindar òptim.

El programa també permet superposar el cas arrel quadrada en les opcions: PDF input, PDF output i Function. Així la figura A.8 mostra la PDF de sortida de la funció òptima de Hasting (color vermell), la Gaussiana ideal (color blau discontinu) i l'arrel quadrada (color groc).

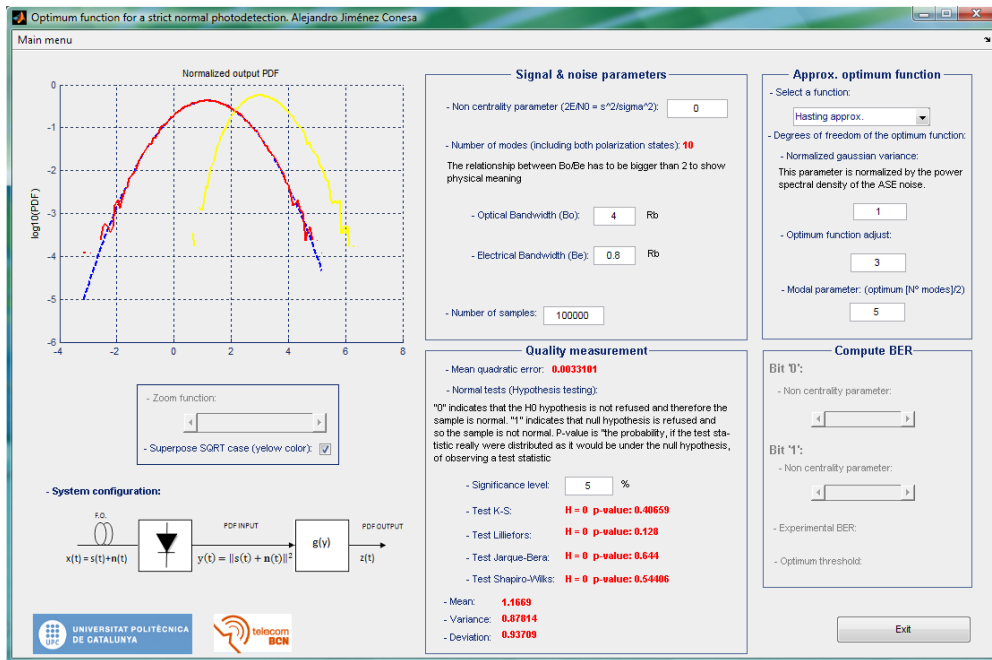


Figura A. 8. Pantalla Output PDF amb superposició del cas SQRT

La figura A.9 mostra una comparativa entre la funció òptima de Hasting amb paràmetres  $\bar{g}(y; \bar{\gamma} = 1, \delta = 3, n_e = 10)$  en color vermell, i la funció arrel quadrada, en color groc.

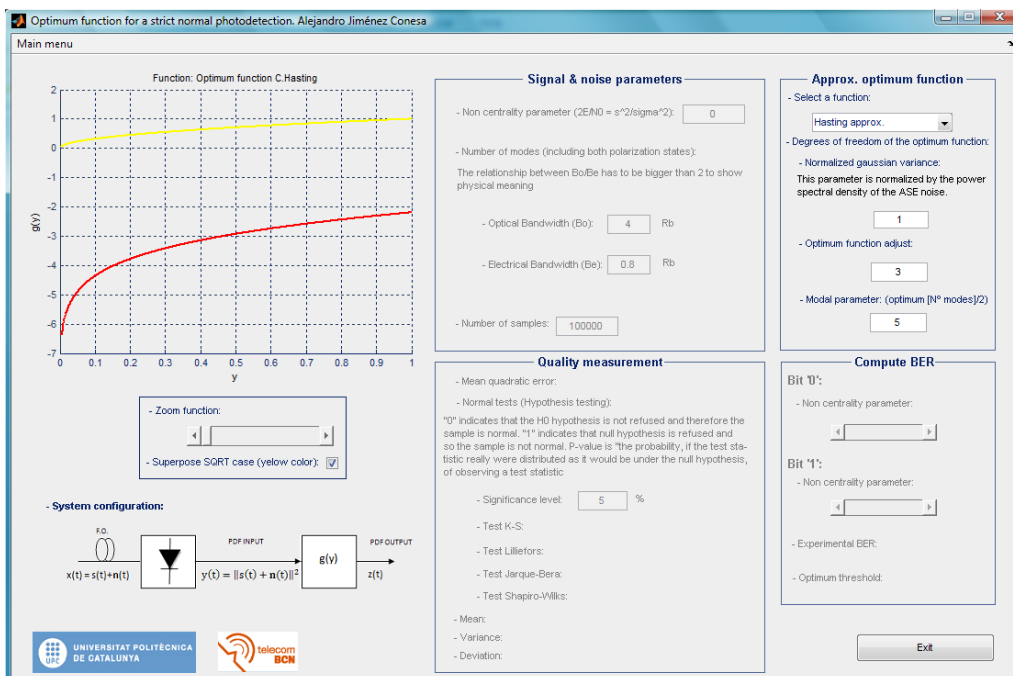


Figura A. 9. Pantalla function amb superposició del cas SQRT



# Referències i Bibliografia

- [1] Josep Prat, Mireia Omella, Pierluigi Poggiolini, Gabriela Bosco, Robert Killey, Antonio Teixeira, Ruben Sousa. "Electronic equalization of photodetection by means of an SQRT module"
- [2] J. Prat, A. Napoli, J.M. Gené, M. Omella, P. Poggiolini, V. Curri, "Square Root Strategy: a Novel Method to Linearize an Optical Communication System with Electronic Equalizers", *ECOC 2005, Glasgow*.
- [3] Josep Prat, María C. Santos and Mireia Omella, "Square Root Module to Combat Dispersion-Induced Nonlinear Distortion in Radio-Over-Fiber Systems" *IEEE Phot. Tech.Lett., vol. 18, no. 18, September 15, 2006*.
- [4] P.Poggiolini , G.Bosco , S.Savory, Y.Benlachtar, R.I.Killey, J. Prat, "1,040 km Uncompensated IMDD Transmission over G.652 Fiber at 10 Gbit/s using a Reduced-State SQRT-Metric MLSE Receiver", post deadline paper 4.4.6, ECOC 2006
- [5] G. Bosco, P. Poggiolini, M. Visintin, "Performance Analysis of MLSE Receivers Based on the Square-Root Metric", Dipartimento di Elettronica, Politecnico di Torino.
- [6] P. Poggiolini, G. Bosco, J. Prat, R. I. Killey, S. Savory, "Branch Metrics for Effective Long-Haul MLSE IMDD Receivers", paper We2.5.4, ECOC 2006
- [7] M. Franceschini, G. Ferrari, R. Raheli, F. Meli, and A. Castoldi. Post-detection nonlinear distortion for efficient MLSD in optical links. 3 September 2007 / Vol. 15, No. 18 / OPTICS EXPRESS 11752
- [8] G. Bosco, I. Cano, V. Curri, P. Poggiolini, "Optimization of Branch Metric Exponent and Quantization Range in MLSE Receivers for Duobinary Systems". *Photonics Technology Letters, IEEE*. Volume 20, Issue 11, June1, 2008 Page(s):924 – 926
- [9] Mario R. Hueda, Diego E. Crivelli, Hugo S. Carrer, and Oscar E. Agazzi, "Parametric Estimation of IM/DD Optical Channels Using New Closed-Form Approximations of the Signal PDF", *JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY*, VOL. 25, NO. 3, MARCH 2007
- [10] Mario R. Hueda, Diego E. Crivelli, Hugo S. Carrer, "Performance of MLSE-Based Receivers in Lightwave Systems with Nonlinear Dispersion and Amplified Spontaneous Emission Noise", *IEEE Communications Society, Globecom 2004*.
- [11] Oscar E. Agazzi, Fellow, IEEE, Mario R. Hueda, Hugo S. Carrer, and Diego E. Crivelli, "Maximum-Likelihood Sequence Estimation in Dispersive Optical Channels", *JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY*, VOL. 23, NO. 2, FEBRUARY 2005 749
- [12] Hugo S. Carrer , Diego E. Crivelli , Mario R. Hueda, "Reduced complexity maximum likelihood sequence estimator for high-speed fiber optic communications systems", 2005

- [13] Yannis Kopsinis, John S. Thompson, Bernard Mulgrew. "System-independent threshold and BER estimation in optical communications using the extended generalized gamma distribution". Institute for Digital Communications. Optical Fiber Technology (2007) 39-45.
- [14] Qian Yu, and Abhijit Shanbhag, "Electronic Data Processing for Error and Dispersion Compensation", JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY, VOL. 24, NO. 12, DECEMBER 2006
- [15] Tommaso Foggi, Enrico Forestieri, *Member, IEEE*, Giulio Colavolpe, and Giancarlo Prati, *Fellow, IEEE*. "Maximum-Likelihood Sequence Detection With Closed-Form Metrics in OOK Optical Systems Impaired by GVD and PMD". JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY, VOL. 24, NO. 8, AUGUST 2006
- [16] D.E. Crivelli, H.S. Carrer, M.R. Hueda, "On the performance of reduced-state Viterbi receivers in IM/DD optical transmission systems," Proc. of ECOC 2004, paper We.4.P.083, Stockholm (Sweden), 5-9 Nov. 2004
- [17] Carl W. Helstrom, "Statistical theory of signal detection", Pergamon Press, Second Edition.
- [18] DIETRICH MARCUSE, FELLOW, IEEE. Derivation of Analytical Expressions for the Bit-Error Probability in Lightwave Systems with Optical Amplifiers. JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY. VOL. 8, NO. 12. DECEMBER 1990
- [19] Pierre A. Humblet and Murat Azizoglu, "On the Bit Error Rate of Lightwave Systems with Optical Amplifiers", JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY. VOL. 9. NO. 11. NOVEMBER 1991
- [20] Gabriella Bosco, Andrea Carena, Vittorio Curri, Robert Gaudino, Pierluigi Poggiolini, and Sergio Benedetto, "A Novel Analytical Approach to the Evaluation of the Impact of Fiber Parametric Gain on the Bit Error Rate", IEEE TRANSACTIONS ON COMMUNICATIONS, VOL. 49, NO. 12, DECEMBER 2001
- [21] Dietrich Marcuse, *Fellow, IEEE*. Calculation of Bit-Error Probability for a Lightwave System with Optical Amplifiers and Post-Detection Gaussian Noise. JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY, VOL 9. NO. 4. APRIL 1991
- [22] Göran Einarsson, "Principles of Lightwave Communications". John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [23] John G. Proakis, "Digital Communications", McGraw Hill, 4<sup>th</sup> Edition
- [24] G. Agrawal, "Lightwave Technology: Telecommunication Systems". John Wiley & Sons. 2005
- [25] Athanasios Papoulis, S. Unnikrishna Pillai, "Probability, Random Variables and stochastic Processes", McGraw Hill, Fourth Edition.

- [26] P. C. Becker, N. A. Olsson, and J. R. Simpson, "Erbium-Doped Fiber Amplifiers: Fundamentals and Technology", Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [27] G. Agrawal, "Fiber-Optic Communications Systems". John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2002.
- [28] Urkowitz, H., "Energy detection of unknown deterministic signals", Proceedings of the IEEE Volume 55, Issue 4, April 1967 Page(s): 523 – 531
- [29] Yi Cai; Morris, J.M.; Adali, T.; Menyuk, C.R., "On turbo code decoder performance in optical-fiber communication systems with dominating ASE noise", Lightwave Technology, Journal of Volume 21, Issue 3, March 2003 Page(s): 727 – 734
- [30] Cai, Y.; Ramanujam, N.; Morris, J.M.; Adali, T.; Lenner, G.; Puc, A.B.; Pilipetskii, A., "Performance limit of forward error correction codes in optical fiber communications", Optical Fiber Communication Conference and Exhibit, 2001. OFC 2001
- [31] M. Abramowitz and I.A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Washington United States Department of Commerce. National Bureau.
- [32] Mervin E. Muller, "A Comparison of Methods for Generating Normal Deviates on Digital Computers", Volume 6, Issue 3 (July 1959) table of contents. Pages: 376 - 383
- [33] Luc Devroye, "Non-Uniform Random Variate Generation", (originally published with Springer-Verlag, New York, 1986). School of Computer Science McGill University.
- [34] E. Page, "Approximations to the Cumulative Normal Function and its Inverse for Use on a Pocket Calculator", *Applied Statistics*, Vol. 26, No. 1 (1977), pp. 75-76
- [35] Bruce W. Schmeiser, "Approximations to the Inverse Cumulative Normal Function for Use on Hand Calculators", *Applied Statistics*, Vol. 28, No. 2 (1979), pp. 175-176
- [36] Jinn-Tyan Lin, "Alternatives to Hamakers' Approximations to the Cumulative Normal Distribution and its Inverse", *The Statistician*, Vol. 37, No. 4/5 (1988), pp. 413-414
- [37] B. J. R. Bailey, "Alternatives to Hastings' Approximation to the Inverse of the Normal Cumulative Distribution Function", *Applied Statistics*, Vol. 30, No. 3 (1981), pp. 275-276
- [38] Hugo C. Hamaker, "Approximating the Cumulative Normal Distribution and its Inverse", *Applied Statistics*, Vol. 27, No. 1 (1978), pp. 76-77
- [39] J. M. Blair, C. A. Edwards, J. H. Johnson, "Rational Chebyshev Approximations for the Inverse of the Error Function", *Mathematics of Computation*, Vol. 30, No. 136, (Oct., 1976), pp. 827-830
- [40] Anthony J. Strecok . On the Calculation of the Inverse of the Error Function. *Mathematics of Computation*, Vol. 22, No. 101, (Jan., 1968), pp. 144-158

- [41] GEORGE M. DILLARD, "Recursive Computation of the Generalized Q Function", Naval Electronics Lab. Ctr. San Diego, Calif. 92152.
- [42] W. F. McGee, "Another recursive method of computing the Q-function," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-16, pp. 500-501, July 1970.
- [43] E. W. Cheney, "Introduction to Approximation Theory", AMS Chelsea Publishing.
- [44] <http://www.wikipedia.org/>



# Índex de figures

Figura 2.1. Model del receptor de comunicacions òptiques utilitzat .....	19
Figura 3.1. OSNR en funció de la distància per una BER = $10^{-3}$ objectiu i diferents mètriques	27
Figura 4.1. Espectre d'emissió i bombeig d'un amplificador EDFA.....	29
Figura 4.2. Model passa-baix sèrie Karhunen-Loève .....	30
Figura 4.3. Model passa-baix de Marcuse.....	37
Figura 5.1. Espectre d'absorció i guany d'un AO EDFA.....	47
Figura 5.2. Procés de filtrat òptic passa banda del soroll blanc.....	48
Figura 5.3. Densitats espectrals de les batudes del soroll ASE .....	50
Figura 5.4. Discretització de l'espectre del soroll ASE del model de Marcuse .....	52
Figura 5.5. Relació entre la OSNR i el nombre de modes espectrals.....	56
Figura 6.1. Esquema del sistema de comunicacions òptiques.....	57
Figura 6.2. Espai de senyal d'una modulació ASK amb M=2 nivells .....	59
Figura 6.3. Densitat espectral de potència d'un senyal NRZ-ASK .....	60
Figura 6.4. Representació en pla complex del senyal fotodetectat.....	63
Figura 6.5. Procés de fotodetecció. A l'esquerra, senyal i soroll òptic d'entrada al fotodetector. A la dreta, senyal elèctric detectat i comparació amb l'envoltant òptica.....	64
Figura 8.1. Arrel quadrada del senyal fotodetectat vers l'equivalent passa-baix del senyal òptic.....	74
Figura 8.2. Diagrama multinivel 4-PAM amb arrel quadrada .....	75
Figura 8.3. Model estadístic utilitzant l'arrel quadrada.....	75
Figura 8.4. Comparació Gaussiana (color verd) & Rice (color vermell), $s^2=0.01$ i $\sigma^2=1$ .....	76
Figura 8.5. Comparació Gaussiana (color verd) & Rice (color vermell), $s^2=20$ i $\sigma^2=1$ .....	76
Figura 8.6. Comparació de les PDF's logarítmiques per SQRT amb $E_b/N_0=14$ dB .....	77
Figura 8.7. Layout del chip MMIC que implementa la funció SQRT .....	78
Figura 9.1. Model estadístic que relaciona la v.a. d'entrada Y amb la v.a. de sortida Z.....	79
Figura 9.2. Comparació entre la funció arrel quadrada i una estimació de la funció òptima	83
Figura 10.1. Mètode d'acceptació i refús. Obtenció d'una v.a. Gaussiana a partir d'una v.a. Chi-quadrada.....	87
Figura 10.2. Aproximació Gaussiana pel límit central.....	90
Figura 11.1. Funcions de distribució inverses d'algunes distribucions conegudes.....	96
Figura 11.2. Procés de conversió d'una v.a. chi quadrada en una v.a. Gaussiana amb el mètode de la inversa.....	96
Figura 11.3. Mètode de la funció inversa. Conversió d'una v.a. uniforme a v.a. exponencial	98
Figura 11.4. Mètode de la funció inversa. Conversió d'una v.a. Gaussiana a v.a. exponencial .....	98
Figura 11.5. Funció no lineal que relaciona una v.a. normal amb una v.a. exponencial.....	99
Figura 12.1. Comparació entre l'estimació de la funció òptima per $n=2$ , $\lambda=0$ i $\sigma=1$ , l'arrel quadrada i l'arrel cúbica.....	104

Figura 12.2. Comparació entre l'estimació de la funció òptima per $n=2$ , $\lambda=0$ i $\sigma=1$ , l'arrel quadrada i l'arrel cúbica.....	104
Figura 12.3. Funció òptima per $n=2$ , $\lambda=0$ i $\sigma=1$ vers l'arrel quadrada .....	106
Figura 13.1. Histograma obtingut amb el mètode numèric de la bisecció.....	108
Figura 13.2. Funció òptima per $n=2$ , $\lambda=0$ i $\sigma=1$ obtinguda amb el mètode numèric de la bisecció i el mètode de la inversa .....	109
Figura 14.1. Aproximació de Hasting en funció de $q$ (A l'esquerra). Error entre la CDF inversa ideal i l'aprox. de Hasting (A la dreta) .....	115
Figura 14.2. Histograma d'una v.a. Gaussiana $N(0,1)$ generada a partir d'una v.a. uniforme $U(0,1)$ utilitzant l'aproximació de Hasting.....	115
Figura 14.3. Set-up del sistema estadístic a analitzar .....	116
Figura 14.4. Funció òptima per $n=2$ , $\lambda=0$ i $\sigma=1$ basada en l'aproximació de Hasting i el mètode de la inversa .....	117
Figura 14.5. Histograma de les mostres de sortida de la transformació òptima de Hasting per $n=2$ , $\lambda=0$ i $\sigma=1$ convertint una v.a. chi quadrada amb paràmetres $n=2$ , $\lambda=0$ i $\sigma=1$ en una Gaussiana $N(0,1)$ .....	118
Figura 14.6. Funció òptima de Hasting-Dillard i zero iteracions (vermell) vers arrel quadrada (color verd) per a valors inferiors al llindar .....	122
Figura 14.7. Funció òptima de Hasting-Dillard i zero iteracions (verd) vers arrel quadrada (vermell) per a valors superiors al llindar .....	122
Figura 14.8. Comparació entre la funció òptima de Hasting-Dillard i zero iteracions per $n=2$ , $\lambda=0$ i $\sigma=1$ vs. Arrel quadrada .....	123
Figura 14.9. Set-up del sistema estadístic a analitzar .....	126
Figura 14.10. PDF de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions per $n=2$ i $\gamma=1$ (color blau) vers PDF Gaussiana (color verd).....	128
Figura 14.11. Diagrama de probabilitat normal.....	128
Figura 14.12. PDF de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions per $n=2$ i $\gamma=1$ (color blau) vers PDF Gaussiana (color verd).....	129
Figura 14.13. Diagrama de probabilitat normal.....	130
Figura 14.14. PDF de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions per $n=2$ i $\gamma=1$ (color blau) vers PDF Gaussiana (color verd).....	131
Figura 14.15. Diagrama de probabilitat normal.....	131
Figura 14.16. PDF de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions per $n=2$ i $\gamma=1$ (color blau) vers PDF Gaussiana (color verd).....	132
Figura 14.17. Diagrama de probabilitat normal.....	132
Figura 14.18. Mitja de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions en funció de $s/\sigma$ .....	134
Figura 14.19. Mitja de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions en funció de $s/\sigma$ .....	135
Figura 14.20. Varianza, Skewness i Excess Kurtosis de la funció òptima de Hasting-Dillard amb zero iteracions en funció de $s/\sigma$ .....	136

Figura 14.21. Família de funcions òptimes fent servir l'aproximació de Hasting i Dillard amb 100 iteracions.....	141
Figura 14.22. Pendants d'algunes de les funcions òptimes de Hasting-Dillard vers l'arrel quadrada .....	142
Figura 14.23. Família de funcions òptimes de Hasting-Dillard en funció del paràmetre d'ajust i contemplant uns offsets específics .....	143
Figura 14.24. Mitja de la funció òptima de Hasting-Dillard amb $n=10$ , l'arrel quadrada i cúbica en funció de $s/\sigma$ per relacions de no centralitat properes al zero .....	144
Figura 14.25. Mitja de la funció òptima de Hasting-Dillard amb $n=10$ , l'arrel quadrada i cúbica en funció de $s/\sigma$ per relacions de no centralitat llunyanes al zero.....	145
Figura 14.26. Varianza de la funció òptima de Hasting-Dillard amb $n=10$ , l'arrel quadrada i l'arrel cúbica en funció de $s/\sigma$ .....	146
Figura 14.27. Skewness de la funció òptima de Hasting-Dillard amb $n=10$ , l'arrel quadrada i l'arrel cúbica en funció de $s/\sigma$ .....	147
Figura 14.28. Excess Kurtosis de la funció òptima de Hasting-Dillard amb $n=10$ , l'arrel quadrada i l'arrel cúbica en funció de $s/\sigma$ .....	148
Figura 14.29. Probabilitat de la cua dreta de la funció de densitat de probabilitat de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard amb paràmetres $n=10$ , $\gamma=1$ i $\delta=2.5$ .....	150
Figura 14.30. Logaritme de la BER en funció del paràmetre d'ajust de la funció òptima de Hasting-Dillard per $n=10$ i $\gamma=1$ .....	152
Figura 14.31. Logaritme de la BER en funció del paràmetre d'ajust de la funció òptima de Hasting-Dillard per $n=10$ i $\gamma=1$ .....	153
Figura 14.32. Logaritme de la BER en funció de la relació $E_b/N_0$ per diferents casos .....	154
Figura 14.33. Representacions de les PDF's logarítmiques de la distribució de sortida de la funció òptima de Hasting-Dillard per $n=10$ , $\delta=5$ i $\gamma=1$ i per diferents relacions $E_b/N_0$ : a) $E_b/N_0 = -2.04$ dB, b) $E_b/N_0 = 6.98$ dB, c) $E_b/N_0 = 13.01$ dB i d) $E_b/N_0 = 14.77$ dB .....	155
Figura 14.34. Representacions de les PDF's logarítmiques de la distribució de sortida de la funció arrel quadrada per diferents relacions $E_b/N_0$ : a) $E_b/N_0 = -2.04$ dB, b) $E_b/N_0 = 6.98$ dB, c) $E_b/N_0 = 13.01$ dB i d) $E_b/N_0 = 14.77$ dB .....	156
Figura 14.35. Estimació dels paràmetres de canal amb MoM promitjat amb finestres de 80 mostres en funció de la dimensió de les seqüències.....	158
Figura 14.36. Estimació dels paràmetres de canal amb MoM en funció de la dimensió de les seqüències.....	158
Figura 14.37. Diagrama d'ull a 200 Km obtingut en un sistema sense equalització.....	160
Figura 14.38. Diagrama d'ull a 200 Km obtingut en un sistema amb equalització DFE .....	160
Figura 14.39. Diagrama d'ull a 200 Km obtingut en un sistema amb equalització DFE i equalització no lineal amb la funció arrel quadrada.....	161
Figura 14.40. Schematic del VPI de l'experiment 2.....	163
Figura 14.41. Comparació de la BER en funció de la distancia pel cas d'utilitzar la funció òptima i l'arrel quadrada.....	164

Figura 14.42. Diagrama d'ull a 200 Km de la funció òptima de Hasting-Dillard per $n=10$ , $\gamma=0.005$ i $\delta=5$ i un offset a l'entrada de 0.005 .....	164
Figura 14.43. Diagrama d'ull a 200 Km de l'arrel quadrada .....	164
Figura 14.44. Comparació de la BER en funció de la distància pel cas d'utilitzar la funció òptima i l'arrel quadrada.....	165
Figura 14.45. Diagrama d'ull a 200 Km de la funció òptima de Hasting-Dillard per $n=10$ , $\gamma=0.05$ i $\delta=5$ i un offset a l'entrada de 0.5.....	165
Figura 14.46. Diagrama d'ull a 200Km de l'arrel quadrada .....	166
Figura 14.47. Schematic VPI del tercer experiment.....	166
Figura 14.48. Histograma del bit "0" posterior a la funció òptima de Hasting-Dillard i l'arrel quadrada .....	168
Figura 14.49. Histograma del bit "1" posterior a la funció òptima de Hasting-Dillard i l'arrel quadrada .....	168
Figura 14.50. Diagrama d'ull a 0 km en un sistema IM/DD i sense utilitzar cap funció .....	169
Figura 14.51. Diagrama d'ull a 0 km quan utilitzem la funció arrel quadrada.....	169
Figura 14.52. Diagrama d'ull a 0 km quan utilitzem la funció òptima de Hasting-Dillard .....	170
Figura 14.53. Comparació dels diagrames d'ull a 0 km i potencia d'emissió de -5dBm.....	170
Figura 14.54. Diagrames d'ull multinivell a 0 Km utilitzant un preamplificador amb 25 dB de guany pels casos IM-DD (color gris), AM-SQRT (color verd) i AM funció òptima amb $n=4$ , $\delta=5$ i $\gamma=0.001$ (color vermell) .....	171
Figura 14.55. Diagrama d'ull multinivell a 0 Km de la funció òptima utilitzant un preamplificador amb 25 dB de guany. Funció òptima utilitzada $n=2$ , $\delta=5$ i $\gamma=0.001$ .....	171
Figura 14.56. Logaritme de la BER amb MLSE en funció del paràmetre del soroll de la funció òptima de Hasting-Dillard amb $n=10$ , $n=8$ i $\delta=5$ .....	174
Figura 14.57. Logaritme de la BER amb MLSE en funció del nombre d'estats de Trellis i els casos funció òptima de Hasting-Dillard amb $n=8$ , $\gamma=0.004$ i $\delta=5$ , arrel quadrada i arrel cúbica .....	175
Figura 15.1. Comparació i error logarítmic entre la funció error inversa ideal i l'aproximació amb interpolació de polinomis de Chebyshev .....	185
Figura 15.2. Comparació entre la CDF inversa ideal i la CDF per interpolació de polinomis de Chebyshev .....	187
Figura 15.3. Funció òptima per interpolació de polinomis de Chebyshev i Dillard amb paràmetres $n=10$ , $\delta=5$ i $\gamma=1$ .....	189
Figura 15.4. PDF logarítmica i diagrama de probabilitat normal amb funció òptima basada en interpolació de polinomis de Chebyshev per $n_{cp}=0$ .....	190
Figura 15.5. PDF logarítmica i diagrama de probabilitat normal amb funció òptima basada en interpolació de polinomis de Chebyshev per $n_{cp}=10$ .....	191
Figura 15.6. PDF logarítmica i diagrama de probabilitat normal amb funció òptima basada en interpolació de polinomis de Chebyshev per $n_{cp}=50$ .....	192

Figura 15.7. PDF logarítmica i diagrama de probabilitat normal amb funció òptima basada en interpolació de polinomis de Chebyshev per $n_{cp}=2500$ .....	192
Figura 16.1. Aproximació per calculadores de mà (16.2) i error entre aquesta aproximació i la CDF inversa ideal d'una v.a. Gaussiana .....	196
Figura 16.2. PDF de sortida de la funció òptima per calculadores de mà i diagrama de probabilitat normal per paràmetre de no centralitat del senyal d'entrada $\lambda=0$ .....	197
Figura 16.3. PDF de sortida de la funció òptima per calculadores de mà i diagrama de probabilitat normal per paràmetre de no centralitat del senyal d'entrada $\lambda=2500$ .....	198
Figura 16.4. Comparació entre l'arrel quadrada i la funció òptima per l'aproximació de les calculadores de mà.....	199
Figura 16.5. Aproximació per calculadores de mà (16.5) i error entre aquesta i la CDF inversa ideal d'una v.a. normal.....	200
Figura 16.6. PDF de sortida de la funció òptima per calculadores de mà i diagrama de probabilitat normal per paràmetre de no centralitat del senyal d'entrada $\lambda=0$ .....	201
Figura 16.7. PDF de sortida de la funció òptima per calculadores de mà i diagrama de probabilitat normal per paràmetre de no centralitat del senyal d'entrada $\lambda=2500$ .....	201
Figura 16.8. Comparació entre les dues funcions òptimes i l'arrel quadrada .....	202
Figura 16.9. Comparació entre les dues funcions òptimes i l'arrel quadrada .....	202
Figura 17.1. Interpolació de la funció òptima de Hasting-Dillard amb paràmetres $n=10$ , $\delta=5$ i $\gamma=1$ i error entre l'aproximació de Hasting-Dillard i la interpolació.....	209
Figura 17.2. Mitja de la interpolació en funció de $s/\sigma$ , i error entre la mitja de la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard .....	209
Figura 17.3. Varianza de la interpolació en funció de $s/\sigma$ , i error entre la varianza de la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard .....	210
Figura 17.4. Skewness de la interpolació en funció de $s/\sigma$ , i error entre l'Skewness de la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard .....	210
Figura 17.5. Excess Kurtosis de la interpolació en funció de $s/\sigma$ , i error entre l'EK de la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard .....	210
Figura 17.6. Família de funcions òptimes per $n=5$ graus de llibertat i $\gamma=1$ en funció de $\delta$ ....	211
Figura 17.7. Trams òptics per diferents paràmetres de no centralitat i arrel quadrada.....	212
Figura 17.8. Conjunt de trams òptims (color blau) vers l'arrel quadrada (color vermell).....	212
Figura 17.9. Comparació de la interpolació dels trams òptims (color blau), la funció òptima de Hasting-Dillard ( $n=10$ i $\delta=5$ )(color verd) i els diferents trams òptims (color vermell).....	213
Figura 17.10. Moments estadístics de la interpolació per trams: a) Mitja, b) Varianza, c) Skewness, d) Excess Kurtosis.....	214
Figura 17.11. PDF's logarítmiques a la sortida de la interpolació per trams pel bit "0" i "1" suposant una ER infinita i una relació $E_b/N_0=10.69$ dB .....	215
Figura 17.12. Diagrama de pols i zeros de la interpolació racional .....	217
Figura 17.13. Interpolació racional i error logarítmic entre la interpolació i la funció òptima de Hasting-Dillard per $n=10$ , $\delta=5$ i $\gamma=1$ .....	217

Figura 18.1. Model del sistema de comunicacions òptiques considerant soroll additiu d'amplificació òptica i soroll tèrmic .....	220
---	-----

## Annexos

Figura A. 1. Comparació Gaussiana amb $\mu=0.1$ i $\sigma=1$ vers una Rice amb $n=2$ i $s^2=0.01$ .....	259
Figura A. 2. Comparació Gaussiana amb $\mu=50$ i $\sigma=1$ vers una Rice amb $n=2$ i $s^2=2500$ .....	259
Figura A. 3. Primera pantalla del programa .....	264
Figura A. 4. Pantalla Input PDF .....	264
Figura A. 5. Pantalla Output PDF .....	265
Figura A. 6. Pantalla function .....	265
Figura A. 7. Pantalla normal plot.....	266
Figura A. 8. Pantalla Output PDF amb superposició del cas SQRT.....	267
Figura A. 9. Pantalla function amb superposició del cas SQRT .....	267

# Índex de taules

Taula 10.1. Coeficients de l'aproximació de Hasting amb sis constants.....	91
Taula 10.2. Coeficients de l'aproximació de Hasting amb quatre constants.....	91
Taula 10.3. Coeficients de l'aproximació d'Odeh & Evans.....	92
Taula 14.1. Situacions possibles en un test d'hipòtesis .....	127
Taula 14.2. Error quadràtic mig entre la mitja ideal i la mitja de la funció òptima per diferents paràmetres d'ajust.....	145
Taula 14.3. Error quadràtic mig entre la varianza ideal i la varianza de la funció òptima per diferents paràmetres d'ajust.....	146
Taula 14.4. Error quadràtic mig entre l'Skewness ideal i el de la funció òptima per diferents paràmetres d'ajust .....	148
14.5. Comparació BER: funció òptima, SQRT i arrel cúbica .....	155
Taula 14.6. Resultats MoM amb el simulador VPI .....	167
Taula 14.7. BER amb MLSE per l'arrel quadrada i l'arrel cúbica .....	173
Taula 14.8. BER amb MLSE per l'arrel quadrada, l'arrel cúbica i la funció òptima.....	174

## Annexos

Taula A 1. Tabulació funció òptima definida pels paràmetres $n=2$ , $\lambda=1$ i $\sigma=1$ .....	237
Taula A 2. Tabulació algoritme de Dillard per 0,1,2,3,4 i 5 iteracions i paràmetres $M=1$ , $a=0$ .....	239
Taula A 3. Tabulació algoritme de Dillard per 0,1,2,3,4 i 5 iteracions i paràmetres $M=1$ , $a=0.1$ .....	240
Taula A 4. Coeficients de l'aproximació (15.23).....	241
Taula A 5. Coeficients de l'aproximació (15.29).....	242
Taula A 6. Coeficients de l'aproximació (15.30).....	243
Taula A 7. Coeficients de l'aproximació (15.31).....	244





# Acrònims

AO	Amplificador Òptic
ASE	Amplified Spontaneous Emission
ASK	Amplitude Shift Keying
AWGN	Additive White Gaussian Noise
BCJR	Bahl, Cocke, Jelinek and Raviv
BER	Bit Error Rate
BGF	Bragg Grating Filter
BPF	Band Pass Filter
CD	Chromatic Dispersion
CDF	Cumulative Distribution Function
DFE	Decision Feedback Equalizer
DSP	Digital Signal Processing
DWDM	Dense Wavelength-Division Multiplexing
ECM	Error cuadrático medio
EDC	Electrical Dispersion Compensation
EDFA	Erbium Doped Fiber Amplifier
EE	Electrical Equalizer
EK	Excess Kurtosis
ER	Extinction Ratio
ERF	Error Function
FEC	Forward Error Correction
FET	Field-Effect Transistor
FFE	Feed Forward Equalizer
FIR	Finite Impulse Response
GA	Gaussian Approximation
GCO	Grup de Comunicacions Òptiques
HEMT	High Electron Mobility Transistor

I&D	Integrate-and-Dump
IM/DD	Intensity Modulation/Direct Detection
ISI	Inter-Symbol Interference
KL	Karhunen-Loeve
LMS	Least Mean Square
LPF	Low Pass Filter
LUT	Look-Up Table
MAP	Maximum A Posteriori
MC	Monte Carlo
MGF	Moment-Generating Function
MLSE	Maximum-Likelihood Sequence Estimation
MMIC	Monolithic Microwave Integrated Circuit
MOM	Method Of Moments
NRZ	Non-Return-to-Zero
O&E	Odeh & Evans
OOK	On-Off Keying
OSNR	Optical Signal-to-Noise Ratio
PAM	Pulse-Amplitude Modulation
PDF	Probability Density Function
PMD	Polarization Mode Dispersion
PMDC	Polarization Mode Dispersion Compensation
PRBS	Pseudo Random Bit Sequence
ROF	Radio Over Fiber
RZ	Return-to-Zero
SMF	Single Mode Fiber
SNR	Signal-to-Noise Ratio
SQRT	Square Root
TDC	Tunable Dispersion Compensator
TF	Transversal Filter

UPC	Universitat Politècnica de Catalunya
VA	Viterbi Algorithm
WDM	Wavelength-Division Multiplexing