

# TÍTULO: ESTIMACIÓN DE LOS PUNTOS DE FEKETE EN LA ESFERA UNIDAD.

AUTOR: JOSE MANUEL GESTO BEIROA.

TUTORES: ENRIQUE BENDITO, ANDRÉS M. ENCINAS y ÁNGELES CARMONA.

**RESUMEN:** esta tesina se centra en el problema matemático de conseguir distribuir bien una cantidad cualquiera de puntos sobre la superficie de una esfera. Este problema admite multitud de variantes; nosotros estudiaremos tres de ellas: disponer  $n$  cargas eléctricas puntuales iguales y del mismo signo sobre la superficie de la esfera de manera que estén en equilibrio electrostático; disponer  $n$  partículas puntuales sobre la superficie de la esfera de manera que sea máximo el producto de todas sus distancias euclídeas dos a dos y disponer  $n$  partículas puntuales sobre la superficie de la esfera de manera que sea máxima la suma de todas sus distancias euclídeas dos a dos. El primero de estos problemas suele aparecer en la literatura como *problema de J.J. Thomson* y el segundo como *problema de Fekete*, y a las distribuciones de puntos que resuelven este último se les da el nombre de *puntos de Fekete de orden  $n$  en la esfera*. También es habitual encontrar que esos tres problemas y otros similares se engloben bajo el nombre común de *problema de los puntos de Fekete*. Haciendo uso de los principios de la Teoría del Potencial es posible plantear los tres problemas anteriores en términos de la minimización de un cierto funcional de energía potencial cuya expresión varía según el caso. Nosotros proponemos un nuevo algoritmo numérico de localización de mínimos de esos funcionales de energía restringidos a la esfera unidad  $S^2$ . El algoritmo está basado en las leyes de la mecánica newtoniana y de la geometría diferencial, y elude el problema directo de optimización -tremendamente duro computacionalmente hablando- mediante la búsqueda de posiciones de equilibrio estático estable a partir de consideraciones puramente dinámicas. Los conocidos principios de conservación de la energía que se derivan de las leyes de la mecánica clásica garantizan que esas posiciones de equilibrio estático estable coinciden con mínimos locales de los funcionales de energía potencial. En términos físicos puede decirse que nuestro algoritmo reproduce numéricamente la trayectoria cuasiestática que seguiría cada una de las partículas de un total de  $n$  que interaccionasen entre sí según fuerzas calculables por derivación de una función potencial si estuvieran restringidas a permanecer siempre sobre  $S^2$  y el medio ofreciera una resistencia viscosa a su movimiento proporcional en módulo a sus vectores velocidad y de sentido contrario a los mismos, siendo la constante de proporcionalidad -también llamada coeficiente de amortiguamiento- infinita. A pesar de lo aparentemente intrincado del planteamiento anterior, su programación resulta sumamente sencilla, siendo además su coste computacional realmente bajo: el algoritmo efectúa  $O(n^2)$  operaciones por iteración y sólo necesita  $3(n-1)$  posiciones de memoria; además, es paralelizable, con lo cual los tiempos de cálculo pueden reducirse drásticamente si se dispone de una batería de ordenadores convenientemente coordinados por otro ordenador central -no obstante, todos los resultados calculados para esta tesina han sido obtenidos con un único ordenador personal con procesador tipo PENTIUM IV de 2.53GHz-. Se comparan los resultados proporcionados por nuestro algoritmo con los obtenidos por otras fuentes; en particular, se consideran las distribuciones de puntos dadas por los vértices de los poliedros *platónicos* y *arquimedianos* y por los vértices de las *cúpulas geodésicas*, los *puntos en espiral* -*spiral points*, en el inglés original; son distribuciones propuestas por el grupo de Saff, Rakhmanov y Zhou como buenas soluciones para los problemas anteriores-, las soluciones calculadas por Zhou para valores de  $n$  entre 2 y 200 usando el algoritmo BFGS de minimización, y ciertas funciones de extrapolación para cualquier  $n$  obtenidas por el mismo autor a partir de esos resultados con  $n$  entre 2 y 200. Como conclusiones generales se tiene que, hasta donde sabemos, nuestro método es capaz de proporcionar buenas soluciones para los tres problemas que estudiamos con valores de  $n$  mucho mayores que los conseguidos hasta ahora y con tiempos de cálculo más que razonables; a día de hoy, disponemos de una buena distribución para el problema de maximización de la suma de distancias de tamaño 507002 que ha sido calculada con el procesador antes mencionado en aproximadamente cinco horas. Además, las soluciones dadas por nuestro método son siempre mejores que los puntos en espiral y que las cúpulas geodésicas, y para valores de  $n$  mayores que 500 mejoran invariablemente la extrapolación realizada por Zhou para los problemas de Thomson y de Fekete y se ajustan extraordinariamente bien a la extrapolación correspondiente al problema de la suma de distancias.

