3.- Estat de l'art

En aquest apartat es comentarà el problema logistic que analitza l'estudi i l'evolució al llarg de la història dels problemes que han donat peu a aquest.

3.1.-Problema logístic

La configuració de la xarxa de distribució d'algunes empreses constitueix la base del servei que ofereixen als seus usuaris. És important un bon grau d'eficiència i rapidesa en la xarxa de transports.

El sistema de distribució es presenta jerarquitzat en una sèrie de magatzems, delegacions i centres de consolidació de carrega segons la mida i les característiques. Cada instal·lació fixa te una funció o objectiu en la cadena de distribució que la diferencia de la resta. Les delegacions o magatzems locals distribuïts en tot el territori son els punts bàsics des dels quals la mercaderia s'encamina cap al client final. En canvi, les mercaderies o objectes no es transporten directament entre delegacions en tot el territori de servei, sinó que es transporten cap a uns punts preferents de la xarxa on s'agrupa la carrega d'una mateixa regió de servei amb la finalitat de constituir vehicles de menor capacitat, amb rutes òptimes de distribució.

En aquest sentit, els hubs son terminals de consolidació i trencament de la carrega que s'encamina cap a múltiples destinacions. Aquesta estratègia de distribució aprofita les economies d'escala derivades de la consolidació de carrega. L'objectiu de la consolidació en un hub és l'equilibri entre l'increment del volum dels enviaments cap a una mateixa destinació (reducció dels costos unitaris de transport) amb l'increment de la distancia recorreguda que comporta una reducció en relació a l'enviament directe.

En l'estructura física de les empreses existeixen hubs de nivell superior que serveixen un gran territori i hubs de nivell inferior. Els de nivell superior son hubs nacionals, lligats a les infrastructures bàsiques de connexió interestatal, els hubs de nivell inferior son hubs regionals, la mida dels quals depèn de la regió de servei i de la demanda que tenen assignada.

Aquest fet obliga a una classificació jeràrquica de la xarxa de transport de les empreses en dos grups diferenciats:

- La xarxa interhub o troncal, que es composa d'aquelles rutes y vehicles que comuniquen únicament les terminals o hubs entre si i amb el magatzem central, sense servir directament els clients. Els vehicles destinats a operar en aquesta xarxa són de gran capacitat per aprofitar les economies d'escala que permeten la consolidació dels enviaments en punts estratègics de la xarxa. Addicionalment, les rutes d'aquests vehicles acostumen a ser de gran longitud i presenten un nombre de parades reduït.

- La xarxa capil·lar, que es composa de les rutes i dels vehicles que efectuen el repartiment de la mercaderia des de les delegacions o terminals de consolidació als clients finals. En aquest context, les rutes associades a aquesta xarxa presenten un nombre significatiu de parades en clients i es circunscribeixen únicament al territori contigu a la terminal associada.

El primer grup (xarxa troncal) és una xarxa de distribució del tipus Many to Many, a esquenes del client, ja que no initeractua amb aquest. El segon grup (xarxa capil·lar) en canvi és nua xarxa de distriubció del tipus One to Many, en contacte deirecte amb el client mitjançant esquemes de treball TSP o VRP. A cavall entre aquests dos grups hi ha la localització dels hubs. El present estudi analitza aquesta localització i el posterior disseny de la xarxa capilar.

La planificació de xarxes de distribució de les empreses es pot articular en dues fases operacionals diferenciades:

- La fase tàctica de definició de les carregues (fluxos) a traves dels arcs donada la xarxa existent. L'objectiu és trobar les millors rutes que optimitzin la funció objectiu complint les restriccions del problema en una xarxa de transport ja definida.
- La fase estratègica de disseny d'una xarxa de distribució eficient. Cal identificar aquelles localitzacions on ubicar terminals de consolidació o magatzems (nodes), cal establir i identificar les vies principals de comunicació entre aquests (arcs) amb la finalitat que els fluxos de mercaderies es distribueixin de forma òptima.

Els models de localització de hubs es diferencien dels problemes de localització d'infrastructures en que la demanda dels hubs s'especifica com fluxos. La localització de hubs proporciona una funció de canvi que permet a les mercaderies la transferència d'un vehicle de transport a un altre de diferents mides i costos unitaris.

Els primers anàlisis de la localització de magatzems i centres de producció amb la determinació de fluxos fixes de mercaderia entre aquests es van iniciar als anys 80, amb estudis sobre problemes de localització de multicentres i problemes de p-mitja i p-centres de comunicació mútua. Aquests anàlisi només consideren la localització de terminals y l'assignació de punts amb fluxos que no interaccionen entre si. En aquests casos, es determina primer la partició de l'àrea de servei en districtes assignats a cada terminal, sense que hi hagin fluxos entre districtes. És el problema més senzill que es planteja ja que no existeix cap tipus de transport entre els diferents hubs.

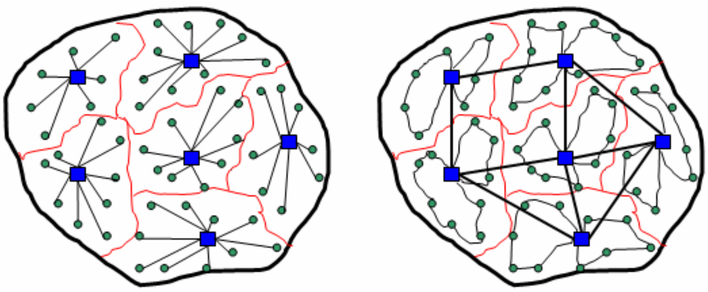


Figura 2.- *Procés de localització d'instal·lacions de servei amb fluxos fixes*

La classificació dels problemes de localització s'estableix a Handler & Mirchndani (1979) i queda definida pels següents criteris:

- Funció objectiu
  - Minisum
  - Terminals centrals
  - Problemes de cobertura
  - Criteri múltiple
- Numero de terminals
  - Una terminal
  - Varies terminals
- Tipus de xarxa
  - Xarxa determinista vs probabilista
  - Xarxa orientada vs no orientada
  - Xarxes cícliques vs xarxes no cícliques.
- Punts de demanda
  - Només als nodes
  - A qualsevol punt de la xarxa
- Possibilitat d'ubicar les terminals
  - Només a un conjunt finit de nodes determinats (localització discreta).
  - En qualsevol node (localització continua).

La estructura de determinació i de disseny de les rutes de distribució parteix d'una estructura fixa de hubs. En aquest sentit, totes les metodologies que aborden la determinació d'una xarxa de distribució eficient, articulen l'estudi en una fase seqüencial que en primer lloc localitza els nodes considerats com a hubs i posteriorment en dissenya les rutes i els encaminaments de la mercaderia. Un cop determinada la localització dels hubs, el problema de disseny de rutes de repartiment es basa en l'assignació de tots els nodes (clients) a un dels hubs de la zona de servei. Alguns investigadors han analitzat la possibilitat de poder assignar un node a més d'un hub.

Amb tot, les estratègies bàsiques (nosaltres en farem una combinació) son les següents:

- Enviament directes. Cal un gran nombre de vehicles i la distancia recorreguda per efectuar la distribució és significativa. Només es considera quan els costos del transport son reduïts o si la demanda associada al destí pot omplir la capacitat del vehicle.

- Enviament amb parades múltiples. En aquest cas tenim un numero reduït de rutes, amb un gran numero de parades en cada ruta. Es pot aplicar quan el cost de parada es reduït i l'escenari de costos del transport és relativament alt.

- Enviament hub&spoke. La construcció de centres de consolidació de carrega (hubs) comporta la concentració de la carrega en aquests punts i la optimització de la capacitat dels vehicles en escenaris de demanda no uniforme. Aquest fet permet reduir el cost unitari del transport a nivell general en tota la xarxa, i reduir també el temps total de distribució.

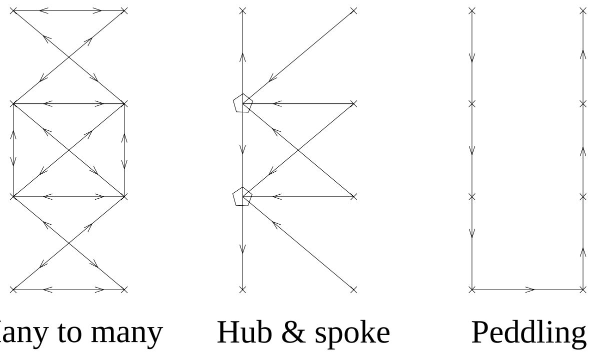


Figura 3.- *Estratègies bàsiques de distribució*

Parades múltiples

Podem avaluar el cost de les parades múltiples. Les variables de decisió son la mida de l'enviament i la mida de la zona de distribució, els costos locals de distribució son despreciables.

A Burns (1985) l'estratègia de parades múltiples s'integra dins la equació de costos de distribució locals, així com els costos d'accés a la zona de repartiment. D'aquesta forma els costos es poden expressar com:

F'	Cost total de l'enviament de parades múltiples per carrega (€/carrega)
D'	Distancia total del viatge d'enviament de parades múltiples (inclou line-haul y distancia local, en km.)
m	Número mig de parades associades a clients per carrega
n	Número de clients per regió de distribució (s'associa a la mida de la regió de servei)
δ	Densitat de clients (clients per km^2)

En aquest sentit, els costos totals d'enviament de parades múltiples per carrega es poden expressar com:

$$F' = \gamma + \sigma m + \alpha D' \quad (3.1)$$

on γ representa el cost fix d'iniciar un nou enviament (€/carrega), α el cost de transport per unitat de longitud (€/km) i σ el cost fix de parada (€/parada). A nivell general, el numero mig de parades de clients associades per carrega, m, depèn de la mida de la regió de servei n i de la mida de l'enviament V.

D'altra banda, la distancia D' pot ser expressada en funció de la distancia local de distribució i la distancia d'accés segons la formulació detallada a Daganzo (1998). D'aquesta manera, la distancia mínima local que uneix m clients distribuïts aleatòriament en una regió de servei es pot aproximar a:

$$d = K\sqrt{mn/\delta} \quad (3.2)$$

on K és una constant que depèn de la mètrica adoptada. En aquest sentit, la distancia total de l'enviament D' es pot aproximar mitjançant la següent equació, suposant que D fa referència a la distancia d'accés a la zona de repartiment:

$$D' = D + K\sqrt{mn/\delta} \tag{3.3}$$

D'aquesta manera, la distancia recorreguda en un lliurament seguint la estratègia peddling depèn del nombre de parades associades a clients, m, que pot ser expressada en termes de n i V. Per una regió de servei determinada, es pot especificar la quantitat de mercaderia demandada pel client i com q_i. En aquest context, si la mercaderia s'envia des de l'origen independentment del ritme de consum en destí, la probabilitat que alguna mercaderia de la regió de servei pertanyi al client i es:

$$q_i / \sum_{i=1}^{n} q_i = q_i / nq \tag{3.4}$$

on q és la demanda mitja de cada client. La probabilitat de que el client i tingui com a mínim una unitat de mercaderia a l'enviament és:

$$1 - (1 - q_i / nq)^V \tag{3.5}$$

Per tant, la probabilitat de parar en un client escollit aleatòriament és igual a la fracció esperada de clients en una regió de servei que reben mercaderia des de una carrega de mida V=m/n.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[1 - (1 - q_i / nq)^V\right]}{n} = \frac{m}{n} \tag{3.6}$$

Per tant, els costos unitaris de transport per una estratègia peddling es poden resumir de la següent manera:

$$C_S = \frac{F'}{V} = \frac{\gamma + \sigma m + \alpha D + \alpha K\sqrt{mn/\delta}'}{V} \tag{3.7}$$

on m es determina mitjançant (3.6).

Hub & spoke
Ens interessarà utilitzar hubs en la nostra xarxa de distribució one to many.

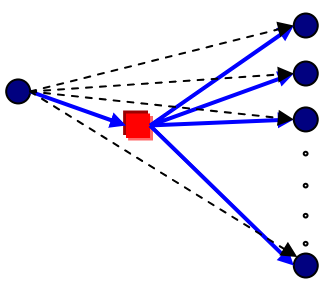


Figura 4.- Esquema *d'enviaments mitjançant una terminal de consolidació de 1 origen a N destinacions.*

A Daganzo (1988) s'estableix un anàlisi de les alternatives peddling per la distribució des d'un sol origen a un grup de terminals des d'on surten les rutes de repartiment local. L'objectiu de les rutes peddling és la consolidació al vehicle de diferents enviaments a diferencia de la estratègia hub&spoke on la consolidació s'efectua a la mateixa terminal. Si partim de que la mercaderia a repartir és homogènia i barata i que no es produeixen variacions estacionals de les variables, es determina una estratègia per a la construcció de rutes peddling.

Model de localització

La majoria de models de localització de magatzems o terminals de consolidació de la literatura científica es basen en problemes de variables discretes en els que coneixem exactament la demanda de cada client de la zona de servei. En aquest sentit, a diferencia de les aproximacions continues, existeixen models en els que es planteja una funció objectiu de costos logístics a minimitzar (principalment en funció de la distancia recorreguda) en els que s'ha de tenir com a informació de partida la localització exacte dels punts de demanda de servei (clients o nodes), la xarxa física que els comunica (arcs) i la identificació detallada de les rutes logístiques de transport. Si be aquests mètodes proporcionen una solució més ajustada a la realitat, presenten com a punt feble la incapacitat de traslladar la solució a altres problemes semblants, així com la falta d'identificació de les variables estratègiques del problema.

El desenvolupament de les eines metodològiques de localització de centres de consolidació o magatzems en problemes discrets s'han formulat com un problema de programació matemàtica. En aquests s'explicita la funció objectiu a minimitzar i les restriccions de les variables associades al problema físic real. La resolució mitjançant programació matemàtica exacta ha sigut incapaç de resoldre configuracions de mida relativament petita degut a la complexitat del problema. Dins de la optimització combinatòria, aquesta tipologia de problemes és NP-hard, per lo que en molts casos és necessari el desenvolupament d'algorismes heurístics de solució que, encara que no proporcionen una solució òptima, tenen un temps computacional molt acotat.

Els conceptes bàsics que permeten una comparació de les prestacions diferencials de cada model es basen en els següents punts:

- Etapes del model. Els models desenvolupats es basen en la resolució de diferents fases dels sistemes de distribució física: el procés de localització de les terminals, l'assignació a la xarxa de la mercaderia associada a cada destinació i el procés de determinació de les rutes als clients finals.
- Hubs. El sistema logístic considerat pot partir d'un numero i d'una localització de hubs prefixada a partir dels quals s'analitza el procés d'assignació de fluxos a la xarxa. Una altre possibilitat és determinar el nombre de hubs que utilitzarem per realitzar la distribució i calcular la seva localització òptima en el territori.
- Capacitat dels hubs. Un aspecte bàsic és la consideració de la capacitat de les terminals per donar servei a tota la mercaderia que es distribueix a traves d'ells. La majoria de models no consideren la capacitat de les instal·lacions, només alguns arriben a definir un sistema capacitat.

- Domini de solucions en localització. Els models que inclouen la etapa de localització de les terminals en el seu desenvolupament poden permetre que aquestes estiguin en qualsevol punt del territori o obligar que la ubicació d'aquestes sigui en un numero de punts singulars, fixats a priori.
- Estratègies d'enviament completades. Els anàlisis científics dels autors determinen diferents possibilitats d'encaminament de la carrega que es diferencien en enviaments a traves de hubs i enviament directes.
- Mètodes de solució. Un dels punts més importants de diferenciació dels diferents models han sigut les metodologies de resolució dels problemes. La major part dels models han desenvolupat la programació matemàtica del problema logístic expressada com una funció objectiu de costos a minimitzar, subjecte a unes restriccions i limitacions. La resolució del problema en programació matemàtica únicament s'ha pogut desenvolupar en un temps computacional assumible en problemes de mida limitada. Aquest fet ha obligat a aplicar un relaxació de les variables del problema per poder determinar solucions a problemes mes grans o l'adopció de tècniques heurístiques, que encara que no assegurin la solució òptima, realitzen els càlculs en un temps acotat. Les ultimes contribucions científiques al problema han desenvolupat algoritmes metaheurístics o heurístics combinats amb tècniques fine-tunning, que a partir d'una configuració existent sub-òptima realitzen un procés de refinament i optimització de la solució.
- Costos considerats. La inclusió dels diferents elements del transport varia en els diferents models. Existeixen models que únicament consideren els costos del transport proporcionals a la distancia i un altre grup que inclou els costos de les instal·lacions fixes (manipulació de la mercaderia i amortització del cost de les instal·lacions). Hi ha un altre grup que considera que els costos del transport varien linealment amb el flux de la mercaderia transportada a cada arc.

La següent taula és un resum de les contribucions científiques a la localització de hubs (destaquem en negreta les característiques que estan més relacionades amb el problema que ens ocupa).

Autor	Etapes del model	Hubs	Capacitat dels hubs	Domini de solucions en localització	Estratègies d'enviament contemplades	Mètode de solució	Costos considerats	Observacions
O'kelly (1987)	Localització de hubs i assignació de fluxos a la xarxa.	Nombre determinat.	Il·limitada.	Discret.	Tots els enviaments mitjançant hubs (enviament directe no permès).	Localització: Programació sencera cuadràtica que es resol amb algoritmes heurístics. Assignació: 1 node al hub és proper.	Costos iguals a la distancia recorreguda.	
Aykin (1990)	Assignació de fluxos a la xarxa.	Nombre i localització determinats.	Il·limitada.	Discret.	Tots els enviaments mitjançant hubs (enviament directe no permès).	Assignació: 1 node al hub de menor cost (no menor distancia).	Costos unitaris de transport fixes.	
Aykin (1992)	Localització de hubs i assignació de fluxos a la xarxa.	Desconeguts.	Il·limitada.	Continua.	Tots els enviaments mitjançant hubs (enviament directe no permès).	Assignació: 1 node al hub de menor cost (no menor distancia).	Costos unitaris de transport fixes.	Es considera flux simètric.
O'kelly(1996)	Localització de hubs i assignació de fluxos a la xarxa.	Nombre determinat.	Il·limitada.	Discret.	Tots els enviaments mitjançant 2 hubs.	Assignació: 1 node a més d'un hub.	Costos unitaris de transport fixes i costos d'inversió de magatzem.	Comparativa d'escenari amb un nombre menor de hubs amb assignació múltiple a escenaris amb més hubs sense assignació múltiple.
Aykin (1994)	Localització de hubs.	Nombre determinat.	Limitada.	Discret (domini de solucions més gran que el nombre de hubs)	Enviament directe o mitjançant 1 o 2 hubs.	Programació matemàtica sencera i relaxació Lagrangiana.	Costos unitaris de transport fixes.	
Aykin (1995)	Localització de hubs i assignació de fluxos a la xarxa.	Nombre determinat.		Continua.	Enviaments directes (fixats amb anterioritat) o amb 1 o 2 hubs.	Programació matemàtica sencera.	Costos unitaris de transport fixes.	
Klincewicz (1991)	Assignació de fluxos a la xarxa.	Nombre i localització determinats.	Il·limitada.	Discret.		Heurístics d'assignació per distancia o multicriteri.	Costos unitaris de transport fixes.	Parteix el model de O'kelly de 1987.
O'kelly (1998)	Localització de hubs i assignació de fluxos a la xarxa.	Nombre determinat.	Il·limitada.	Discret.	Tots els enviaments mitjançant 2 hubs.	Assignació: 1 node a més d'un hub.		
Perl (1985)	Localització de hubs, determinació de la mida dels hubs i ruteig.	Nombre indeterminat, mida indeterminada.	Il·limitada.	Discreta (domini de solucions més gran que el nombre de hubs determinat).	One-to-many	Localització i mida dels hubs mitjançant heurístics.	Costos unitaris de transport fixes i costos d'inversió de magatzem.	
Wasner (2004)	Localització de hubs i ruteig.	Nombre indeterminat, mida determinada.	Il·limitada.	Continua.	Enviaments directes o mitjançant hubs.	Localització i assignació mitjançant algorisme heurístic.	Costos unitaris de transport entre hubs i de repartiment fixes, costos d'instal·lacions no lineals amb el flux.	Proposta teòrica més cas pràctic d'aplicació a Àustria. Determina els límits d eles zones de repartiment i lliurament de cada ruta.
Campbell (1986)	Localització de hubs.	Nombre determinat.	Il·limitada.	Continua.	Enviament mitjançant el hub més proper.	Analític.	Costos de transport constants.	Variació temporal de la demanda.
Ernst (1998)	Localització de hubs i assignació de fluxos a la xarxa.	Nombre determinat.	Il·limitada.	Discreta (domini de solucions més gran que el nombre de hubs determinat).	Enviament mitjançant un hub.	Programació matemàtica no lineal. Mètode de Branch & Bound i heurístics (SA i descens aleatori).	Costos unitaris de transport fixes.	Comparativa de mètodes per a la distribució de serveis postals a Austràlia.
Abdinnour-Helun (1998)	Localització de hubs i assignació de fluxos a la xarxa.	Nombre indeterminat.	Il·limitada.	Discreta (entre nodes).	Enviament mitjançant un hub.	Metodologia de Branch & Bound i algoritmes genètics.	Costos unitaris de transport fixes i costos d'inversió de magatzem.	

Taula 1.- *Resum de les contribucions científiques en la localització de hubs*

3.2.-Problemes clàssics d'optimització combinatòria

Al llarg de la història han aparegut diversos problemes matemàtics relacionats amb la logística, en principi eren simples reptes intel·lectuals, però amb el temps han anat evolucionant, agafant cada vegada més complexitat (en funció de les necessitats de cada moment). Avui en dia són molt importants en la gestió de les empreses de distribució, Christopher(1985) defineix els problemes logístics moderns com "el procés de gestionar de forma estratègica el moviment de mercaderies als consumidors". A continuació es fa una breu revisió d'alguns dels problemes més famosos que han donat peu a l'estudi científic de les rutes de vehicles.

Euler va definir el problema dels "set pons de Könisberg". Es tractava de creuar set ponts que connectaven una illa creuant-los només una vegada cadascun (minimitzant aleshores la distancia). Diuen que eren els habitants de la ciutat que proposaven aquest repte als estrangers. Veiem el següent esquema:

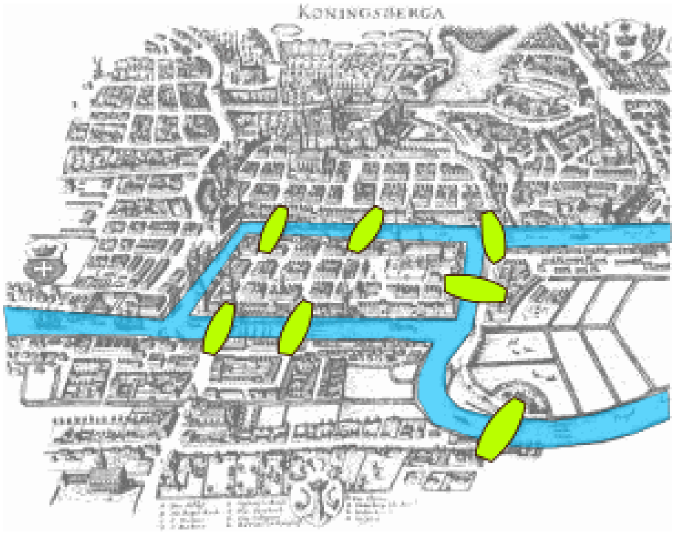


Figura 5.- *Enunciat del set ponts de Könisberg*

Ell mateix va demostrar que no hi ha solució, però en intentar resoldre'l va desenvolupar una metodologia i unes regles que més tard permetran resoldre problemes més difícils, que reflecteixen situacions actuals, com son els següents:

Problema	Capacitat	Objectiu
"Chinese Postman Problem" (CPP)	Il·limitada	Mínima distancia recorrent tots els arcs.
"Rural Postman Problem" (RPP)	Limitada	Mínima distancia recorrent tots els arcs.
"Bin Packing Problem" (BPP)	Limitada	Mínim numero de vehicles o caixes.
"Traveling Salesman Problem" (TSP)	Il·limitada	Mínima distancia recorrent tots els nodes.
"Vehicle Routing Problem" (VRP)	Limitada	Mínima distancia recorrent tots els nodes.

Per demostrar que no hi ha solució va modelar el problema com 4 nodes (representant les 4 riberes) connectats mitjançant 7 arcs (representant els ponts).

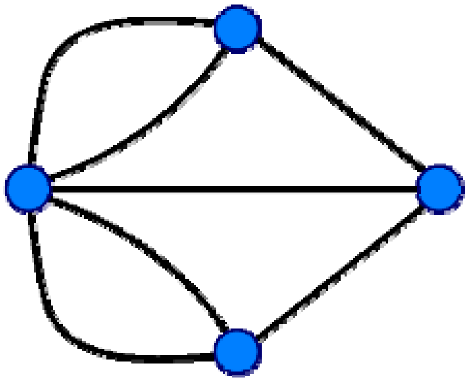


Figura 6.- *Simplificació proposada per Euler*

La idea de la demostració és molt senzilla, si un node té un nombre senar d'arcs, significa que ha de ser inici o final del trajecte, de manera que no poden haver-hi més de dos nodes d'aquest tipus. En aquest cas tenim 4 nodes d'ordre senar, de manera que no hi ha solució.

Aquest problema evolucionarà en altres tal i com indica la taula anterior. La forma d'expressar-los serà en forma de graf G(N,A), on N són un conjunt de nodes i A un conjunt d'arcs. Les variables que intervindran són la demanda dels clients, la capacitat dels vehicles, el temps de recorregut i el temps de servei.

3.2.1.- Chinese Postman Problem (carter xinès)

Donat un graf no orientat, i una oficina de correus dins d'aquest graf, es demana recorre tots els arcs d'aquest fent un recorregut mínim. Tenim una cota inferior de la distancia recorreguda, la suma de les longituds de tots els arcs, de manera que volem que sigui mínima la suma de les longituds dels arcs repetits.

En veurem un exemple i la forma de resoldre'l, l'enunciat és el següent:

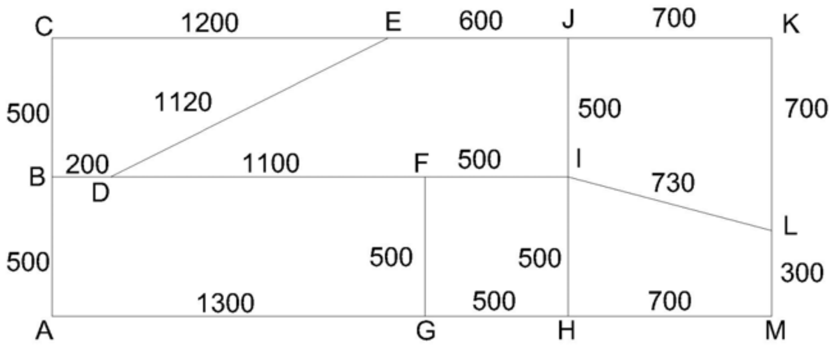


Figura 7.- *Enunciat del problema a resoldre*

La forma tradicional de resoldre el problema és afegir arcs artificials al graf original fins a obtenir un nou graf, amb l'objectiu de convertir tots els nodes d'ordre senar en nodes d'ordre parell. En problemes on tots els nodes son d'ordre parell (ordre parell vol dir que conflueixen un nombre parell d'arcs al node) sabem resoldre el problema de recórrer tots els arcs només una vegada, en diem recorregut d'Euler. Aquesta arcs afegits corresponen als recorreguts que hem de fer dues vegades.

Veiem que els nodes d'ordre senar son B, D, E, J, F, G, H i L, de manera que tenim moltes possibilitats. Hem de triar aquella òptima, és a dir, aquella que la longitud d'arcs afegida sigui mínima. Una bona estratègia és intentar connectar entre si els arcs d'ordre senar, cadascun amb el que te més proper. La solució òptima és la següent:

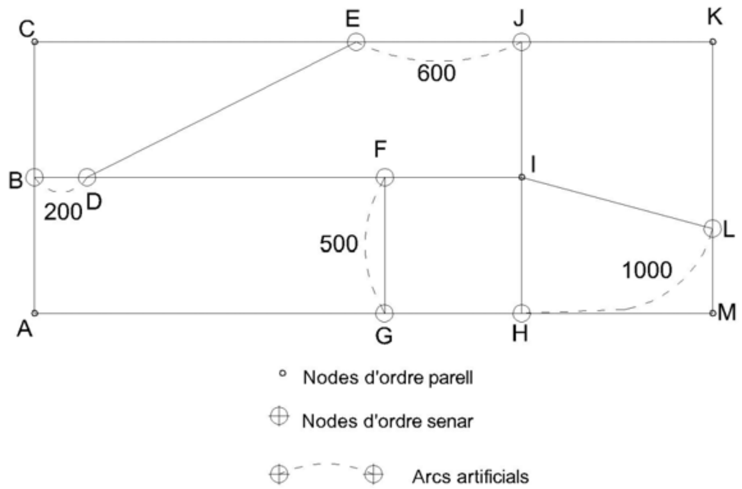


Figura 8.- *Graf final per la determinació de la ruta més curta*

Els passos de resolució del problema son doncs els següents:

1. Identificar tots els nodes d'ordre senar al graf original.
2. Determinar totes les combinacions possibles dels nodes de grau senar, connectant-los amb arcs artificials per formar un graf on tots els nodes son d'ordre parell.
3. Escollir el graf que tingui una longitud d'arcs artificials menor.
4. Determinar el recorregut d'Euler per al nou graf, on la distancia recorreguda serà la dels arcs més la dels arcs artificials.

En el nostre cas, la distancia recorreguda és la suma de tots els arcs més 2300 metres.

Si afegim la restricció de capacitat ens trobem davant del Rural Postman Problem (RPP).

3.2.2.- Traveling Salesman Problem (TSP)

L'origen d'aquest problema el trobem a l'any 1880, quan el matemàtic Irlandès Sir William Rowam Hamilton inventa un joc on els jugadors han de connectar els 20 vèrtex de la projecció en dues dimensions d'un icosàedre, sense repetir cap node. La solució és la següent:

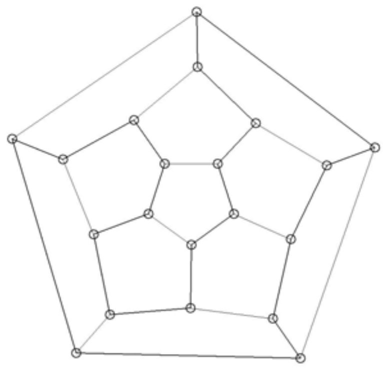


Figura 9.- *Solució al problema de sir Hamilton*

En l'enunciat actual existeixen N nodes d'una xarxa, i els hem de recórrer tots sortint d'un punt origen i retornant a aquest punt, de manera que la distancia total recorreguda sigui mínima.

Es vol doncs minimitzar la següent funció:

$$MinZ = d(n_1, n_2) + d(n_2, n_3) + ...d(n_{i-1}, n_i) + d(n_i, n_{i+1}) + ... + d(n_{n-1}, n_n) + d(n_n, n_1) \qquad (3.8)$$

Els mètodes exactes per resoldre aquest problema no son computacionalment eficients. S'utilitzen doncs mètodes heurístics, que generen solucions satisfactòries amb un temps de computació molt menor.

Larson i Odoni (1981) presenten un mètode heurístic per trobar la solució, molt semblant al del carter xinès. Segueix els següents passos:

1. Crear l'arbre de longitud mínima que connecta tots els nodes a visitar i el node origen.

2. Identificar els nodes d'ordre senar i connectar-los de diferents maneres mitjançant arcs artificials. Ens quedem amb la solució on la suma de les longituds dels arcs artificials sigui mínima.

3. Determinem el recorregut d'Euler que recorre tots els arcs utilitzant la possibilitat de menor longitud d'arcs afegits.

4. Identifiquem aquells nodes visitats més d'una vegada i substituïm els arcs que els visiten per segona vegada per altres arcs nous, formant triangles. Sabem que en un triangle, el costat més gran és menor a la suma dels altres dos sempre.

Seguirem un exemple, tenim un dipòsit i 8 clients per visitar, l'arbre de longitud mínima és el següent:

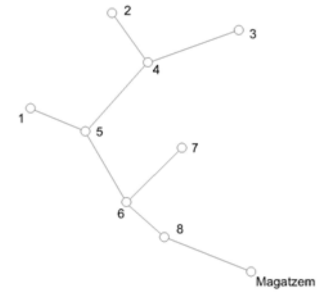
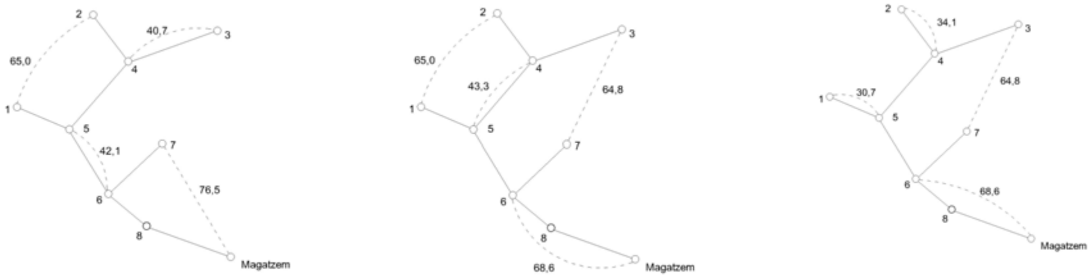


Figura 10.- *Punts de visita i arbre d'extensió mínima*

Els nodes d'ordre senar son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i M, de manera que tenim diferents possibilitats de connectar els nodes.



(224,3 metres) (241,7 metres) (198,2 metres)

Figures 11.- *Primera, segona i tercera construcció per resoldre TSP.*

Ens quedem amb la tercera construcció i substituïm els arcs artificials afegits per arcs nous, formant triangles amb els que ja teníem.

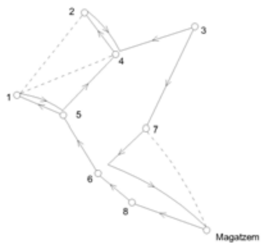


Figura 12.- *Ruta d'Euler*

Ja tenim la solució al problema.

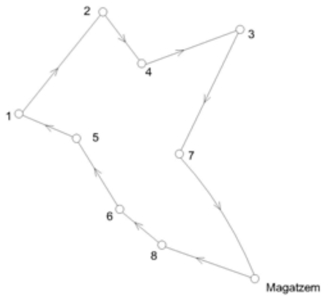


Figura 13.- *Ruta final*

Aquest mètode funciona bé en enunciats amb pocs nodes, en enunciats amb més nodes no genera més d'un 10% d'error respecte la solució òptima.

El que fa realment interessant aquest problema és que NP-complete (es pot resoldre en un temps no polinomial). Els problemes que veurem a continuació també ho són.

El que provoca aquesta necessitat de temps és la quantitat de diferents formes de visitar els nodes. Tenim (n-1)! formes diferents d'ordenar els nodes, de manera que tenim (n-1)!/2 diferents opcions (cada recorregut tindrà el recorregut invers, sent igual la distancia a recórrer). Si agafem n=20 (problema petit) significa doncs que tenim $1{,}2 \times 10^{18}$ possibilitats diferents.

3.2.3.- Vehicle Routing Problem (VRP)

Evolució del problema anterior (TSP), on apareixen algunes restriccions. Les més comuns son les restriccions de capacitat (per part del vehicle) i restriccions de temps (per part del conductor del vehicle). Va ser proposat per Dantzig and Ramser (1959). És pot enunciar de la següent manera:

Donat un graf G (V, E), on $V=\{v_0, v_1, ...v_N\}$ és un conjunt de vèrtex i on $A=\{(v_i,v_j)/v_i, v_j \in V; i \neq j\}$ un conjunt d'arcs, anomenarem a v_0 dipòsit, i a la resta clients o ciutats (tenim doncs el conjunt de ciutats $V'=V\backslash\{v_0\}$).

Anomenarem C a la matriu (simètrica) de costos o distancies c_{ij} entre els clients v_i i v_j, d és el vector de demanda dels clients, R_j la ruta del vehicle j i m el nombre de vehicles de idèntica capacitat. Cada vehicle te assignada una ruta.

En ser la matriu C simètrica és comú reemplaçar A pel conjunt d'arcs $E=\{(v_i,v_j)/v_i, v_j \in V; i<j\}$

Cada vèrtex v_i de V' te associada una quantitat q_i que ha de ser lliurada per algun vehicle.

VRP es basa doncs en determinar el conjunt de les m rutes dels m vehicles començant i acabant al dipòsit, on tots els nodes son visitats només una vegada per un sol vehicle, de manera que el cost total sigui mínim, tal i com ilustra la següen figura.

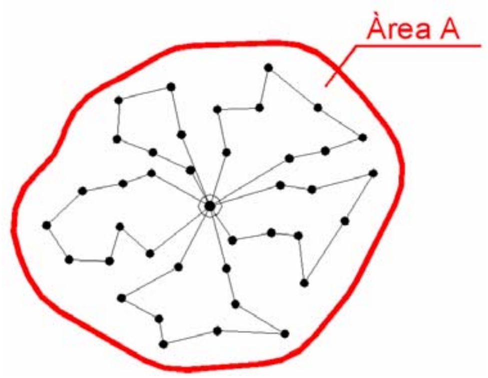


Figura 14.- Exemple de solució de VRP.

Hi ha una restricció temporal en cada ruta, expressada en funció del temps de recorregut més el temps de lliurament a tots els clients.

Breu historia del VRP

1950's Es formula el VRP i es resolen petits problemes (de 10 a 20 clients).

1960's Es proposen els primers heurístics, com el mètode Clark and Wright (1964). Es resolen problemes de fins a 100 clients.

1970's La eficiència computacional es converteix en un objectiu important (Golden, Magnati and Nguyen). Es resolen problemes de fins a 1000 clients, alguns problemes de fins a 30 venedors es resolen de forma òptima.

1980's Es proposen programes matemàtics de resolució (Fisher and Jaikumar). Es desenvolupen heurístics interactius (Cullen, Jarvis and Ratliff). Es resolen alguns problemes de fins a 50 clients de forma òptima.

1990's S'apliquen metaheurístics al VRP. Alguns problemes de fins a 100 clients es resolen de forma òptima (Fisher 1995).

2000's Es resolen de forma òptima problemes de més de 100 clients. A l'any 2002, el problema VRP més gran resolt de forma òptima era F-135-k7,i el més petit no resolt de forma òptima el B-n50-k8.

Aquest problema s'ha convertit en un dels més estudiats dins la logística, i han aparegut diverses variants en funció de les restriccions de l'enunciat. Alguns exemples son:

- CVRP (Capacited VRP)

Apareix la restricció de capacitat màxima dels vehicles. En aquest problema tenim una cota inferior del nombre de rutes, dividint el nombre total de mercaderia entre la capacitat del vehicle. Normalment la quantitat demanada no excedeix la capacitat del vehicle (tots els vehicles tenen la mateixa capacitat).
Gendreau et al. (1999) proposen el mateix problema, on la flota de vehicles és heterogènia.

- MDVRP (multi Depots VRP)

Tenim una sèrie de clients i una sèrie de dipòsits al territori, hem d'assignar cada client a un dipòsit i generar desprès les rutes de cada dipòsit. S'assignen els clients als dipòsits i es resol aleshores un VRP.
Podem trobar algorismes per resoldre la localització de hubs a Sue Abdinnour-Helm and M.A. Venkataramanan (1998) i a Andreas T. Ernst and Mohan Krishnamoorthy (1996).
A M.E. O'Kelly et al. (1996) s'analitza quin és el numero òptim de hubs per cada problema.

- PVRP (VRP with deliveries in some days)

El total de clients son visitats en un període de M dies i tenen una demanda diària. Es resol un VRP de duració M dies, on cada client s'ha de visitar més d'una vegada. Cordeau et al. (Networks, 1997) estudien el VRP amb visites periòdiques.

- SVRP (VRP with random values)

Algunes components del problema son aleatòries, com per exemple els clients, la demanda o els temps. Resolem el problema abans de conèixer les variables estocàstiques i quan les coneixem el corregim de forma dinàmica.

- VRPTW (VRP with Time Windows)

Els clients tenen finestres temporals on s'ha de fer el lliurament. No ens interessa que el vehicle arribi abans de l'hora d'inici de la finestra temporal, ja que s'haurà d'esperar i s'allargarà el temps de viatge. Podem conèixer més coses d'aquest problema a Cordeua et al. (VRP book, 2002).

- SDVRP (VRP where some vehicles serve customer)

La demanda dels clients pot ser major que la capacitat del vehicle. Cal que un client sigui visitat més d'una vegada.

- VRPB (VRP with Backhauls)

Els clients poden retornar part de la mercaderia lliurada. És important que el vehicle tingui capacitat d'absorbir aquestes devolucions.

- VRPPD (VRP with Pick up and Deliveries)

Introduït per Desaulniers et al. (VRP book, 2002). Els clients recullen la mercaderia i en donen de nova per a altres clients. És interessant en aquest cas estudiar les 3 possibilitats que ens podem plantejar per portar la mercaderia del client i al client j:

1. Enviament directe (de i a j).
2. Enviament mitjançant un hub (de i a hub1 o hub2, de hub1 o hub2 a j).
3. Enviament mitjançant dos hubs (de i a hub1, de hub1 a hub2, de hub2 a j).

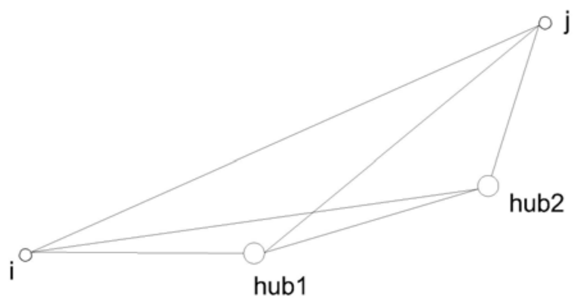


Figura 15.- *Trajecte directe vs trajecte mitjançant hubs*

En aquests problemes te molta importància el factor de descompte entre hubs, aprofitant les economies d'escala de vehicles de gran capacitat en traslladar la mercaderia d'un hub a un altre.
A Jiyin Liu et al. (2003) tenim una bona comparació d'enviaments directes entre 2 clients i d'enviaments via hubs.

- VRPSF (VRP with Satellite Facilities)

Dona la possibilitat de que els vehicles es recarreguin sense tornar al dipòsit. És interessant en el subministrament de combustibles.

A continuació farem una revisió més extensa d'alguns d'aquests problemes (els mes interessants).

CVRP (Capacited Vehicle Routing Problem)

És el problema més estudiat, definit de la següent manera:
Donat G = (V, E) un graf no direccional on $V = \{v_0, v_1, v_2...v_n\}$ és el conjunt de nodes i $E = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, i < j\}$ el conjunt d'arcs. El vèrtex v_0 representa el dipòsit central on tenim *m* vehicles d'idèntica capacitat *Q*. En algunes versions del problema *m* és conegut, en altres és una variable a decidir. La resta de vèrtex representen clients o ciutats a visitar. Cada vèrtex v_i te associada una

demanda no negativa q_i. Tenim també definida un cost o distancia no negatius c_{ij}, associada a cada parell de vèrtex (v_i, v_j).

El CVRP consisteix en determinar una sèrie de *m* rutes que compleixin el següent:

- Comencen i acaben al dipòsit (v_0)
- Cada client és visitat només una vegada per un sol vehicle.
- La demanda total de cada ruta no excedeix Q
- Cost total mínim.

El CVRP és un "NP-hard problem" (el temps de resolució pot ser més alt que qualsevol potencia de n), i per tant molt difícil de resoldre. Cap algorisme exacte pot resoldre'l si tenim més de 50 ciutats.

De totes maneres, alguns enunciats, amb més de 100 ciutats s'han resolt de forma òptima. La única opció per resoldre el CVRP son, doncs, els mètodes heurístics clàssics i els meta-heurístics moderns.

<u>VRPTW</u>(Vehicle Routing Problem with Time Windows)

La nova restricció en aquest problema és l'aparició de finestres temporals, dins de les quals s'han de fer els lliuraments i la recollida de mercaderia. La definició formal és similar a la de VRP i de CVRP. Donat G = (V, A) un graf de nodes $V=V_N \cup \{v_0\}$ i conjunt d'arcs A, on $V_N = \{v_i \in V \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ son els clients i v_0 el magatzem central (on totes les rutes comencen i acaben). Per a cada node $v_i \in V$ tenim una demanda associada q_i, un temps de servei s_i, una finestra temporal de servei [e_i, l_i] i un parell ordenat de coordenades (x_i, y_i). És possible calcular la distancia d_{ij} (mitjançant les coordenades geogràfiques) entre cada parell de nodes diferents v_i i v_j, i el corresponen temps de viatge t_{ij}. Si el vehicle arriba al client v_i abans del temps e_i, hi haurà un temps d'espera, de manera que el temps total de visita al client v_i és la suma del temps de viatge, el temps d'espera i el temps de servei.

L'objectiu del VRPTW es donar servei als clients minimitzant el numero de vehicles necessaris, la distancia total recorreguda, el temps total i l'espera sense violar la capacitat dels vehicles ni les finestres temporals dels clients. Algunes de les aplicacions més comunes de VRPTW es el servei postal, autobusos escolars, servei a restaurants...

VRPTW és un "NP-hard problem", i els mètodes exactes de resolució necessiten temps de càlcul prohibitius si el problema és gran. S'han aplicat molts heurístics i mètodes exactes per la resolució d'aquest problema, tal i com es pot veure a la bibliografia.