

ANNEX I – TEORIA I IMPLEMENTACIÓ DELS MODELS AMB FLAC

I. MODELS CONSTITUTIUS UTILITZATS

I.1. Model nul

Les tensions dintre d'una zona nul·la es posen a zero; cap força (per exemple la gravetat) actua dins d'aquestes zones. El material nul pot canviar-se en una fase posterior a un altre model; d'aquesta manera es poden, per exemple, simular etapes d'una excavació.

I.2. Model elàstic isòtrop

Els models d'aquest grup es caracteritzen per tenir deformacions reversibles al descarregar. Les lleis de tensió-deformació són lineals i independents del camí.

En aquest model, la relació de tensió-deformació en forma incremental s'expressa per la llei de Hooke en tensió plana com:

$$\begin{aligned}
 \Delta\sigma_{11} &= \alpha_1\Delta e_{11} + \alpha_2\Delta e_{22} \\
 \Delta\sigma_{22} &= \alpha_2\Delta e_{11} + \alpha_1\Delta e_{22} \\
 \Delta\sigma_{12} &= 2G\Delta e_{12} \\
 \Delta\sigma_{33} &= \alpha_2(\Delta e_{11} + \Delta e_{22})
 \end{aligned}
 \quad \Delta\sigma_{21} = \Delta\sigma_{12} \quad (I.1)$$

$$\text{on } \alpha_1 = K + \left(\frac{4}{3}\right)G$$

$$\alpha_2 = K - \left(\frac{2}{3}\right)G$$

K = mòdul de rigidesa

G = mòdul de cisalla

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right] \Delta t \quad (I.2)$$

on Δe_{ij} = tensor increment de deformacions

\dot{u}_i =: desplaçament

En tensió plana aquestes equacions queden:

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{11} &= \beta_1\Delta e_{11} + \beta_2\Delta e_{22} \\
\Delta\sigma_{22} &= \beta_2\Delta e_{11} + \beta_1\Delta e_{22} \\
\Delta\sigma_{12} &= 2G\Delta e_{12} \\
\Delta\sigma_{33} &= 0
\end{aligned}
\quad (\Delta\sigma_{21} = \Delta\sigma_{12}) \quad (1.3)$$

on $\beta_1 = \alpha_1 - (\alpha_2^2 / \alpha_1)$ i
 $\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2^2 / \alpha_1)$

Per a geometria axisimètrica:

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{11} &= \alpha_1\Delta e_{11} + \alpha_2(\Delta e_{22} + \Delta e_{33}) \\
\Delta\sigma_{22} &= \alpha_1\Delta e_{22} + \alpha_2(\Delta e_{11} + \Delta e_{33}) \\
\Delta\sigma_{12} &= 2G\Delta e_{12} \\
\Delta\sigma_{33} &= \alpha_1\Delta e_{33} + \alpha_2(\Delta e_{11} + \Delta e_{22})
\end{aligned}
\quad (\Delta\sigma_{21} = \Delta\sigma_{12}) \quad (1.4)$$

I.3. Models plàstics

Tots els models plàstics involucren potencialment algun grau de deformacions permanents, que són conseqüència de la no linealitat de les relacions entre tensió i deformació. Els diferents models de FLAC es caracteritzen per la seva funció de fluència, les funcions d'enduriment/reblaniment i la llei de rigidització (flow rule). Les funcions de fluència per a cada model defineixen la combinació de tensions, perquè es doni el flux plàstic. Aquestes funcions o criteris es representen per una o més superfícies limitants en un espai general de tensions, amb punts per sota, o a la superfície, que es caracteritzen per un comportament incremental elàstic o plàstic respectivament. La formulació del flux plàstic en FLAC es recolza en assumpcions de la teoria de la plasticitat com que l'increment de deformació total pot descomposar-se en una part elàstica i una altra de plàstica, on només la part elàstica contribueix a l'increment de tensions a partir d'una llei elàstica. En definitiva s'agafen ambdós increments de deformacions plàstica i elàstica prenent-los coaxials amb els actuals eixos principals de tensions (només vàlid si les deformacions elàstiques són petites comparades amb les deformacions plàstiques durant el flux plàstic). La llei de rigidització (*flow rule*) especifica que la direcció del vector increment plàstic de deformació es pren normal a la superfície potencial; es diu associat si el potencial i la funció de fluència coincideixen, i no - associat si no coincideixen.

Pels models de Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, obiquitous-joint, softening-rdning i bilinear-softening-obiquitous, s'utilitza una funció de fluència de tallant i una llei de rigidització (*flow rule*) no associada.

Al FLAC, la tensió perpendicular al pla es pren en consideració en la formulació, que s'expressa en termes tridimensionals. Tots els models es basen en condicions de tensió plana, amb l'excepció del model *hardening-softening*.

També s'ha de tenir en compte que els models de plasticitat es formulen en termes de tensions efectives i no de tensions totals.

En la implementació numèrica dels models l'increment de la tensió es computa primer a partir de l'increment de deformació total fent servir la forma incremental de la llei de Hooke. Les tensions corresponents s'avaluen llavors. Si violen el criteri de fluència (és a dir, la representació del punt de tensió es troba damunt de la funció de fluència en l'espai de tensions generalitzat), es produiran deformacions plàstiques. En aquest cas, només la part elàstica de l'increment de deformacions pot contribuir a l'increment de tensió; posteriorment és corregeix utilitzant la llei de rigidització plàstica (*flow rule*) per a assegurar que les tensions queden sobre la funció de fluència composta.

1.3.1. Model de Mohr-Coulomb

L'envolvent de trencament per aquest model correspon al criteri de Mohr-Coulomb. La llei de flux de l'esforç tallant és no associada i la llei de flux a tracció és associada.

1.3.1.1. Llei elàstica incremental

A l'aplicació de FLAC d'aquest model, s'utilitzen les tensions principals σ_1 , σ_2 , σ_3 ; la tensió perpendicular al pla, σ_{zz} , es reconeix com una d'aquestes. Les tensions principals i les direccions principals són avaluades dels components del tensor de tensions i són ordenades d'aquesta manera (s'ha de recordar que les tensions compressives són negatives)

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \quad (1.5)$$

Els corresponents increments de deformació principals Δe_1 , Δe_2 , Δe_3 es descomponen de la següent manera

$$\Delta e_i = \Delta e_i^e + \Delta e_i^p \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

on els exponents *e* i *p* es refereixen a la part elàstica i plàstica, respectivament, i els components plàstics només són no zero durant el flux plàstic. L'expressió incremental de la llei de Hooke en termes de tensions i deformacions principals té la forma

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_1 &= \alpha_1 \Delta e_1^e + \alpha_2 (\Delta e_2^e + \Delta e_3^e) \\ \Delta \sigma_2 &= \alpha_1 \Delta e_2^e + \alpha_2 (\Delta e_1^e + \Delta e_3^e) \\ \Delta \sigma_3 &= \alpha_1 \Delta e_3^e + \alpha_2 (\Delta e_1^e + \Delta e_2^e) \end{aligned} \quad (1.7)$$

on

$$\alpha_1 = K + 4G/3 \text{ y } \alpha_2 = K - 2G/3.$$

1.3.1.2. Funcions potencials i de fluència

Amb la convenció de la classificació de la Eq. (I.5) el criteri de trencament pot representar-se en el pla (σ_1, σ_3) com s'il·lustra a la Figura I-1.

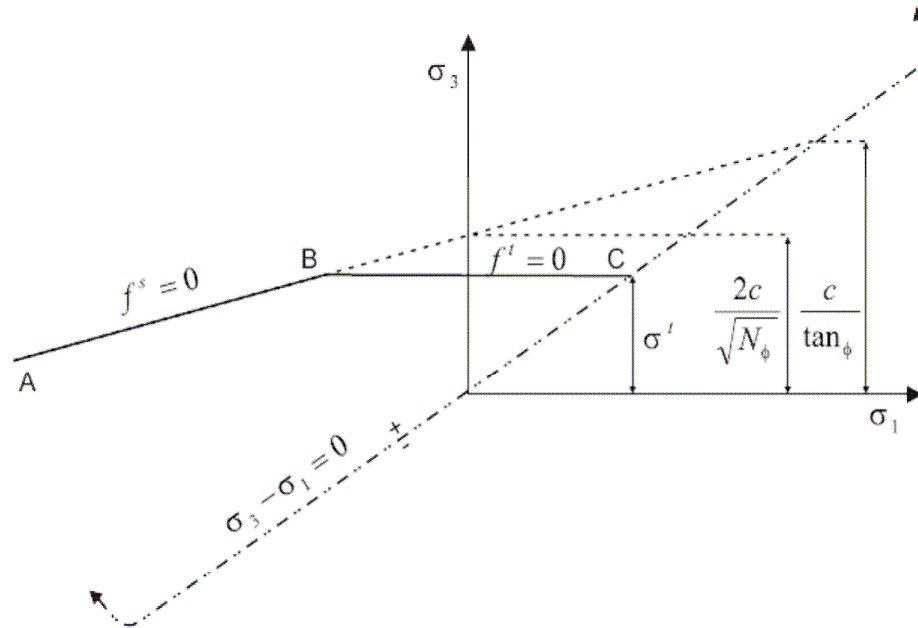


Figura I-1: criteri de trencament de Mohr-Coulomb en FLAC

L'envolent de trencament es defineix del punt A al punt B per la funció de fluència de Mohr-Coulomb

$$f^s = \sigma_1 - \sigma_3 N_\phi + 2c\sqrt{N_\phi} \quad (I.8)$$

i de B a C per una funció de fluència de tallant de la forma

$$f^t = \sigma^t - \sigma_3 \quad (I.9)$$

on ϕ és l'angle de fricció, c , la cohesió, σ^t , la resistència a tracció

$$N_\phi = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (I.10)$$

S'ha de fer notar que només les tensions principals majors i menors són actives a la formulació de fluència de l'esforç tallant; la tensió principal intermèdia no té efecte. Per a un material amb fricció, $\phi = 0$ la resistència a la tracció del material no pot excedir el valor de σ^t_{\max}

$$\sigma^t_{\max} = \frac{c}{\tan \phi} \quad (I.11)$$

El potencial de l'esforç tallant g^s de la funció corresponent a una regla de flux no-associada té la forma

$$g^s = \sigma_1 - \sigma_3 N_\psi \quad (I.12)$$

on ψ és l'angle de dilatància i

$$N_\psi = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \quad (I.13)$$

La regla de flux associada pel trencament a tracció es deriva de la funció potencial g^t , amb

$$g^t = -\sigma_3 \quad (I.14)$$

Les regles de flux per aquest model donen una única definició a la proximitat d'un límit de la funció composta de fluència en l'espai de tensions tridimensional per l'aplicació d'una tècnica, il·lustrada més avall, pel cas d'un límit de tensió-deformació. Es defineix una funció $h(\sigma_1, \sigma_3) = 0$ que es representa per la diagonal entre la representació de $f^s = 0$ i $f^t = 0$ en el pla (σ_1, σ_3) (veure la Figura I-2).

Aquesta funció té la forma

$$h = \sigma_3 - \sigma^t + \sigma^P (\sigma_1 - \sigma^P) \quad (I.15)$$

on el α^P i σ^P són constants definides com

$$\alpha^P = \sqrt{1 + N_\phi^2} + N_\psi \quad (I.16)$$

i

$$\sigma^P = \sigma^t N_\phi - 2c\sqrt{N_\phi} \quad (I.17)$$

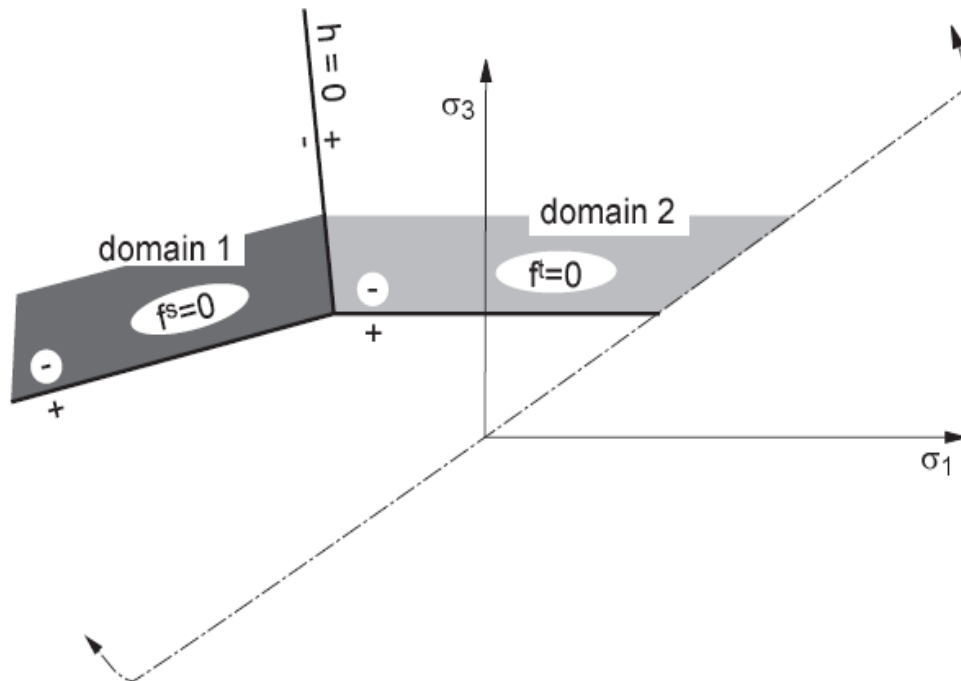


Figura I-2: model de Mohr-Coulomb: dominis utilitzats a la definició de la regla de flux.

Una suposició elàstica que violi el criteri de trencament es representa per un punt al pla (σ_1, σ_3) localitzat en el domini 1 o 2, corresponent a dominis negatius o positius de $h = 0$, respectivament. Si en el domini 1 es declara el trencament per esforç tallant, i el punt de tensió es retorna a la corba $f^s = 0$, s'utilitza una regla de flux derivada utilitzant la funció potencial g^s . Si és en el domini 2, té lloc el trencament per tracció, i el punt de tensió es retorna a $f^t = 0$ s'utilitza una regla de flux derivada de g^t .

I.3.1.3. Correccions plàstiques

Primer consideris un trencament per esforç tallant. La regla de flux té la forma

$$\Delta e_i^P = \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma_i} \quad i=1,3 \quad (I.18)$$

on λ^s és encara un paràmetre de magnitud desconeguda. Utilitzant la Eq. (I.12) per g^s , aquestes equacions es tornen, després de derivació parcial:

$$\begin{aligned} \Delta e_1^P &= \lambda^s \\ \Delta e_2^P &= 0 \\ \Delta e_3^P &= -\lambda^s N_\psi \end{aligned} \quad (I.19)$$

Els increments de deformació elàstica poden expressar-se de la Eq. (I.6) com el total menys els increments plàstics. Més enllà utilitzant la regla de flux de la Eq. (I.19) , llavors les lleis elàstiques de l'Eq. (I.7) es tornen

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_1 &= \alpha_1\Delta e_1 + \alpha_2(\Delta e_2 + \Delta e_3) - \lambda^s(\alpha_1 - \alpha_2 N_\psi) \\ \Delta\sigma_2 &= \alpha_1\Delta e_2 + \alpha_2(\Delta e_1 + \Delta e_3) - \lambda^s\alpha_2(1 - N_\psi) \\ \Delta\sigma_3 &= \alpha_1\Delta e_3 + \alpha_2(\Delta e_1 + \Delta e_2) - \lambda^s(-\alpha_1 N_\psi + \alpha_2)\end{aligned}\quad (I.20)$$

Permetent-se als nous i vells estats de tensions ser referits pels exponents N i O, (New, Old) respectivament. Llavors per definició,

$$\sigma_i^N = \sigma_i^O + \Delta\sigma_i \quad i=1,3 \quad (I.21)$$

Substituint en aquestes equacions la Eq. (I.16) per a $\Delta\sigma_i$, $i = 1, 3$, podem escriure

$$\begin{aligned}\sigma_1^N &= \sigma_1^I - \lambda^s(\alpha_1 - \alpha_2 N_\psi) \\ \sigma_2^N &= \sigma_2^I - \lambda^s\alpha_2(1 - N_\psi) \\ \sigma_3^N &= \sigma_3^I - \lambda^s(-\alpha_1 N_\psi + \alpha_2)\end{aligned}\quad (I.22)$$

on l'exponent I s'utilitza per a representar la suposició elàstica obtinguda agregant a les velles tensions els increments elàstics computats utilitzant els increments de deformació total, és a dir,

$$\begin{aligned}\sigma_1^I &= \alpha_1^O + \alpha_1\Delta e_1 + \alpha_2(\Delta e_2 + \Delta e_3) \\ \sigma_2^I &= \alpha_2^O + \alpha_1\Delta e_2 + \alpha_2(\Delta e_1 + \Delta e_3) \\ \sigma_3^I &= \alpha_3^O + \alpha_1\Delta e_3 + \alpha_2(\Delta e_2 + \Delta e_3)\end{aligned}\quad (I.23)$$

EL paràmetre λ_s pot ser definit ara demanant que el nou punt de tensió estigui localitzat a la superfície de fluència de l'esforç tallant. La substitució de σ_1^N i σ_3^N per σ_1 i σ_3 en $f^s = 0$ dóna, després d'algunes manipulacions (veure les Eqs. (I.8) i (I.22):

$$\lambda^s = \frac{f^s(\sigma_1^I, \sigma_3^I)}{(\alpha_1 - \alpha_2 N_\psi) - (\alpha_2 - \alpha_1 N_\psi) N_\phi} \quad (I.24)$$

En el cas de trencament per tracció, la regla de flux té la forma

$$\Delta e_i^p = \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \sigma_i} \quad i=1,3 \quad (I.25)$$

on la magnitud del paràmetre λ^t no es defineixen encara. Utilitzant la Eq (I.14) per a g^t , aquesta expressió dóna, després de derivació parcial:

$$\begin{aligned}
 \Delta e_1^p &= 0 \\
 \Delta e_2^p &= 0 \\
 \Delta e_3^p &= -\lambda^t
 \end{aligned}
 \tag{I.26}$$

Repetint un raonament similar al descrit anteriorment, obtenim:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^N &= \sigma_1^I + \lambda^t \alpha_2 \\
 \sigma_2^N &= \sigma_2^I + \lambda^t \alpha_2 \\
 \sigma_3^N &= \sigma_3^I + \lambda^t \alpha_1
 \end{aligned}
 \tag{I.27}$$

i

$$\lambda^t = \frac{f^t(\sigma_3^I)}{\alpha_1}
 \tag{I.28}$$

1.3.1.4. Implementació

A la implementació del model de Mohr-Coulomb en FLAC, es computa primer una suposició elàstica σ_{ij}^I , agregant als components de tensió vells increments calculats per l'aplicació de la llei de Hooke a l'increment de deformació total per a cada pas. Les tensions principals $\sigma_1^I, \sigma_2^I, \sigma_3^I$ i les seves corresponents direccions principals es calculen i s'ordenen. Si aquestes tensions violen el criteri de fluència compost, s'ha d'aplicar una correcció a la suposició elàstica per a donar el nou estat de tensions. En aquesta situació tenim que o $h(\sigma_1^I, \sigma_3^I) = 0$ o $h(\sigma_1^I, \sigma_3^I) > 0$ (veure la Eq. (I.15)). En el primer cas, es declara trencament per esforç tallant. S'avaluen les noves tensions de la Eq. (I.22) utilitzant la Eq. (I.24) pel λ^s . Al segon cas, el trencament per tracció té lloc i les noves tensions es calculen de la Eq. (I.27), utilitzant la Eq. (I.28). Es calculen els components del tensor de tensions en el sistema d'eixos de referència llavors es calculen les tensions principals assumint que les direccions principals no han estat afectades per la correcció plàstica.

En FLAC, el valor predefinit per la resistència a tracció és zero. Aquest valor es posa igual a σ_{\max}^t si el valor assignat de la tensió de tracció supera σ_{\max}^t . Si el valor computat de σ_3 excedeix σ^t en una zona, la tensió de tracció es posa a zero per a aquesta zona. Això simula reblaniment tensor instantani. Les deformacions plàstiques en aquest model no es calculen directament per accelerar el càlcul.

1.3.2. Model de la junta ubiqua (Ubiquitous joint)

En aquest model es considera la presència d'una orientació de debilitat (pla dèbil) dins un model FLAC de Mohr-Coulomb, la fluència pot ocórrer en la matriu, al llarg del pla de debilitat, o en ambdós alhora, depenent de l'estat de tensions,

l'orientació del pla de debilitat i de les propietats mecàniques de la matriu i del pla dèbil.

A la implementació del model en FLAC, l'ús que es fa d'una tècnica per la qual es descobreix primer el trencament general i les correccions plàstiques pertinents s'apliquen d'igual manera que al model de Mohr-Coulomb. Les noves tensions s'analitzen llavors pel trencament del pla de debilitat i s'actualitzen d'acord amb ell. El criteri de trencament del pla consisteix en una forma local de la condició de fluència de Mohr-Coulomb, la llei local de flux de l'esforç tallant és no-associada i la llei de flux de tracció local és associada. El model de Mohr-Coulomb és idèntic a l'exposat en l'apartat anterior, ara es passa a exposar com es desenvolupa el flux plàstic en el pla de debilitat.

1.3.2.1. Correccions plàstiques en plans dèbils

La Figura I-3 il·lustra el pla dèbil que existeix en un material de Mohr-Coulomb i les coordenades globals (x-y) i locals (x'-y').

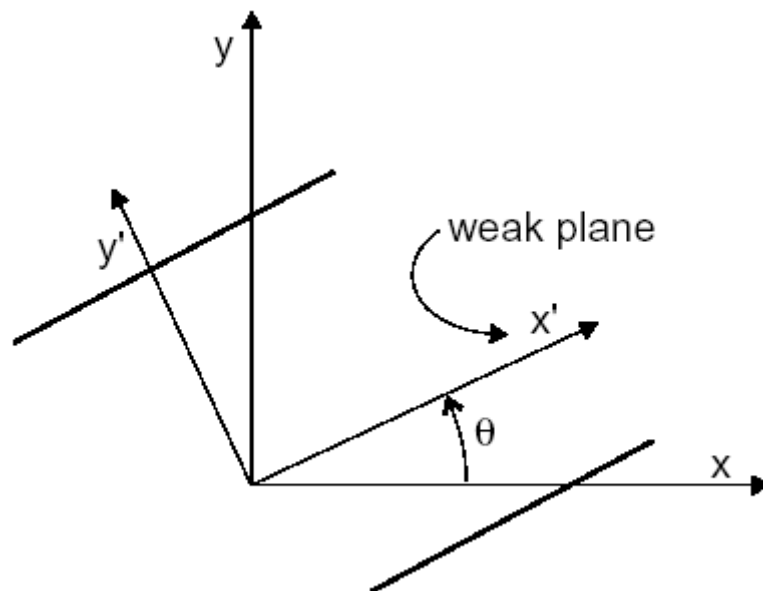


Figura I-3: el pla dèbil orientat un angle θ respecte l'eix de referència global

Per a simplificar la notació, es defineix per σ_{ij} els components de tensió que s'obtenen després de l'aplicació de qualsevol de les correccions plàstiques que corresponen al trencament general pel pas (*step*). Aquestes tensions globals es resolen en components locals que utilitzen les expressions:

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta - 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta \\
 \sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta \\
 \sigma'_{33} &= \sigma_{33} \\
 \sigma'_{12} &= (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)
 \end{aligned}
 \tag{I.29}$$

on θ és l'angle de la junta (mesurat en el sentit contrari a les agulles del rellotge des de l'eix x-global).

Per convenció, deixem que τ representi la magnitud del component de la tracció tangencial en el pla dèbil, la variable de deformació associada és γ i tenim:

$$\begin{aligned}\tau &= |\sigma'_{12}| \\ \gamma &= |e'_{12}|\end{aligned}\quad (I.30)$$

Amb aquesta notació, l'expressió local de les lleis elàstiques incrementals té la forma:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma'_{11} &= \alpha_1\Delta e'_{11} + \alpha_2(\Delta e'_{22} + \Delta e'_{33}) \\ \Delta\sigma'_{22} &= \alpha_1\Delta e'_{22} + \alpha_2(\Delta e'_{11} + \Delta e'_{33}) \\ \Delta\sigma'_{33} &= \alpha_1\Delta e'_{33} + \alpha_2(\Delta e'_{11} + \Delta e'_{22}) \\ \Delta\tau &= 2G\Delta\gamma^e\end{aligned}\quad (I.31)$$

on $\alpha_1 = K + 4G/3$, $\alpha_2 = K - 2G/3$ i l'exponent e indica "la part elàstica."

El criteri de trencament del pla dèbil pot representar-se en el pla (σ'_{22}, τ) , com s'il·lustra a la Figura I-4.

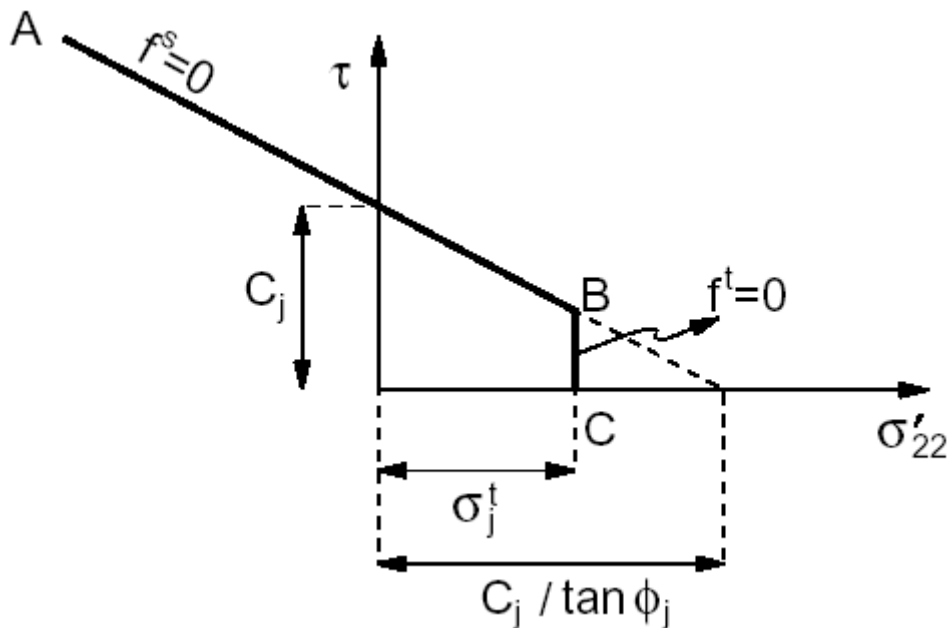


Figura I-4: criteri de trencament del pla dèbil en FLAC

L'envolvent de trencament local es defineix des del punt A al B per un criteri de trencament de Mohr-Coulomb definit com $f^s = 0$ amb

$$f^s = -\tau - \sigma'_{22} \tan \phi_j + c_j \quad (I.32)$$

i de B a C per un criteri de trencament de tensió de la forma $f^t = 0$ amb

$$f^t = \sigma_j^t - \sigma_{22}^t \quad (I.33)$$

on el ϕ_j , c_j i σ_j^t són la fricció, cohesió i tensió del pla dèbil, respectivament. Vegis que, per a un pla dèbil amb angle de fricció no-zero, el valor de la màxima tensió es dóna per

$$\sigma_{j\max}^t = \frac{c_j}{\tan \phi_j} \quad (I.34)$$

Les funcions potencials d'esforç tallant g^s i g^t corresponen a una regla de flux no-associada amb dilatància, ψ_j , i una regla de flux associada, respectivament. Tenen la forma

$$g^s = -\tau - \sigma_{22}^t \tan \psi_j \quad (I.35)$$

i

$$g^t = -\sigma_{22}^t \quad (I.36)$$

La llei de flux té una única definició en la proximitat del límit del criteri de trencament per a l'aplicació d'una tècnica ja descrita en el context del model de Mohr-Culomb. Aquí, una funció, $h(\sigma_{22}^t, \tau) = 0$ és utilitzada per què pugui ser representada per la diagonal entre la representació de $f^s = 0$ i $f^t = 0$ en el pla (σ_{22}^t, τ) (veure la Figura I-5). Aquesta funció té la forma

$$h = \tau - \tau_j^P - \alpha_j^P (\sigma_{22}^t - \sigma_j^t) \quad (I.37)$$

on τ_j^P i α_j^P són constants definides com

$$\begin{aligned} \tau_j^P &= c_j - \tan \phi_j \sigma_j^t \\ \alpha_j^P &= \sqrt{1 + \tan^2 \phi_j} - \tan \phi_j \end{aligned} \quad (I.38)$$

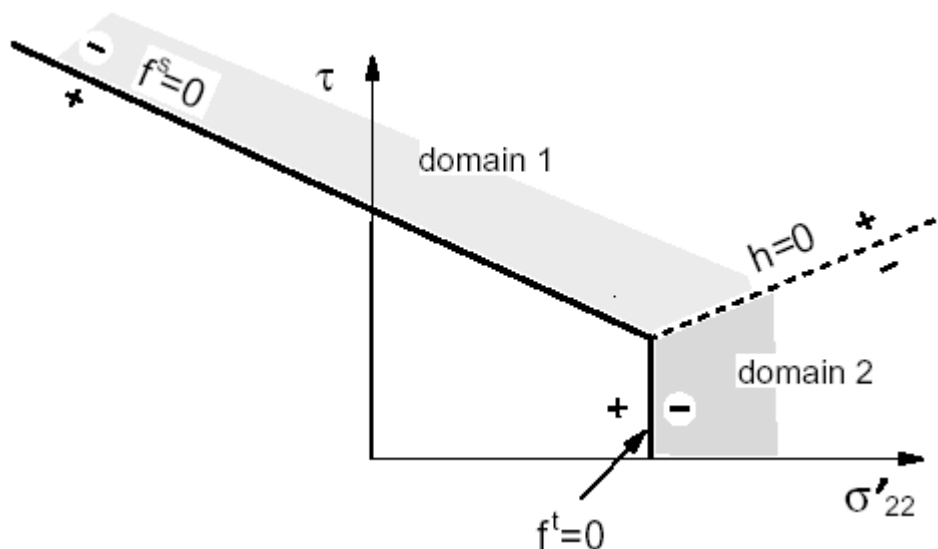


Figura I-5: model de *Ubiquitous joint* : els dominis utilitzats a la definició de la llei de fluència del pla dèbil.

Un estat de tensions que viola el criteri de trencament local es representa per un punt en el pla (σ'_{22}, τ) localitzat en el domini 1 o 2, corresponent al domini positiu o al domini negatiu de $h = 0$, respectivament. Si en el domini 1, es dona trencament per l'esforç tallant en el pla, i el punt de tensió es retorna a la corba $f^s = 0$ s'utilitza una llei de flux derivada utilitzant la funció potencial g^s . Si en el domini 2, es declara tensió de trencament, i el punt de tensió es retorna a $f^t = 0$ s'utilitza una regla de flux derivada utilitzant g^t .

Primer es considera trencament per esforç tallant en el pla, la regla de flux té la forma:

$$\begin{aligned}\Delta e'_{11}{}^P &= \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma'_{11}} \\ \Delta e'_{22}{}^P &= \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma'_{22}} \\ \Delta e'_{33}{}^P &= \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma'_{33}} \\ \Delta \gamma^P &= \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \tau}\end{aligned}\tag{I.39}$$

on l'exponent p es refereix a la part plàstica associada amb el trencament en el pla dèbil i la magnitud λ^s és encara desconeguda. Utilitzant la Eq (I.31) per a g^s , aquestes equacions es transformen després de derivació parcial en:

$$\begin{aligned}\Delta e'_{11}{}^P &= 0 \\ \Delta e'_{22}{}^P &= -\lambda^s \tan \psi_j \\ \Delta e'_{33}{}^P &= 0 \\ \Delta \gamma^P &= -\lambda^s\end{aligned}\tag{I.40}$$

Els increments de deformació elàstica en les relacions elàstiques de la Eq. (I.31) s'expressen com diferències entre el total i l'increment de deformació plàstica per a cada pas. Assumint que les contribucions plàstiques al trencament general i local són additives, se segueix un raonament similar al de la derivació de les correccions de tensió pel criteri de Mohr-culomb, en què interpretem les suposicions elàstiques allà com les tensions que s'obtenen després de l'aplicació de les correccions plàstiques que relacionen el trencament general. (Aquesta tècnica només és aproximada quan el trencament ocorre a la matriu i al pla dèbil conjuntament.) Utilitzant aquesta aproximació, pot mostrar-se que el nou estat de tensions es pot expressar com:

$$\begin{aligned}\sigma'_{11}{}^N &= \sigma'_{11} + \alpha_2 \tan \psi_j \lambda^s \\ \sigma'_{22}{}^N &= \sigma'_{22} + \alpha_1 \tan \psi_j \lambda^s \\ \sigma'_{33}{}^N &= \sigma'_{33} + \alpha_2 \tan \psi_j \lambda^s \\ \tau^N &= \tau + 2G\lambda^s\end{aligned}\tag{I.41}$$

on G és el mòdul de l'esforç tallant i λ^s es dona per

$$\lambda^s = \frac{f^s(\sigma'_{22}, \tau)}{2G + \alpha_1 \tan \phi_j \tan \psi_j} \quad (1.42)$$

Podent derivar-se de τ^N la nova tensió de l'esforç tallant en el pla dèbil i τ utilitzant la relació

$$\sigma'_{12}{}^N = \sigma'_{12} \frac{\tau^N}{\tau} \quad (1.43)$$

Les correccions de tensió local tenen la forma

$$\begin{aligned} \Delta \sigma'_{11} &= \alpha_2 \tan \psi_j \lambda^s \\ \Delta \sigma'_{22} &= \alpha_1 \tan \psi_j \lambda^s \\ \Delta \sigma'_{33} &= \alpha_2 \tan \psi_j \lambda^s \\ \Delta \sigma'_{12} &= \sigma'_{12} \frac{\tau^N - \tau}{\tau} \end{aligned} \quad (1.44)$$

on el λ^s és donat per la Eq. (1.42).

Finalment, les correccions de tensió globals pel trencament d'esforç tallant en el pla, obtingut per resolució de correccions de tensió local en els eixos globals, pot expressar-se com

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{11} &= -2\Delta \sigma'_{12} (\cos \theta \sin \theta) + \Delta \sigma'_{11} \cos^2 \theta + \Delta \sigma'_{22} \sin^2 \theta \\ \Delta \sigma_{22} &= 2\Delta \sigma'_{12} (\cos \theta \sin \theta) + \Delta \sigma'_{11} \sin^2 \theta + \Delta \sigma'_{22} \cos^2 \theta \\ \Delta \sigma_{33} &= \Delta \sigma'_{33} \\ \Delta \sigma_{12} &= \Delta \sigma'_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\Delta \sigma'_{11} - \Delta \sigma'_{22}) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (1.45)$$

Aquestes correccions són afegides als components de tensió σ_{ij} , les quals inclouen les correccions de tensió pel trencament general, si n'hi ha, proporcionant el nou estat de tensió pel pas.

Considerem trencament a tracció ara en el pla. En aquest cas, la regla de flux té la forma

$$\begin{aligned} \Delta e_{11}{}^P &= \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \sigma'_{11}} \\ \Delta e_{22}{}^P &= \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \sigma'_{22}} \\ \Delta e_{33}{}^P &= \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \sigma'_{33}} \\ \Delta \gamma^P &= \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (1.46)$$

on λ^t és encara un paràmetre de magnitud desconegut. Utilitzant la Eq. (I.36) per g^t , aquestes equacions es tornen, després de derivació parcial:

$$\begin{aligned}\Delta e_{11}^P &= 0 \\ \Delta e_{22}^P &= -\lambda^t \\ \Delta e_{33}^P &= 0 \\ \Delta \gamma^P &= 0\end{aligned}\tag{I.47}$$

Utilitzant el mateix raonament que s'ha descrit anteriorment, obtenim

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^N &= \sigma'_{11} + \lambda^t \alpha_2 \\ \sigma_{22}^N &= \sigma'_{22} + \lambda^t \alpha_1 \\ \sigma_{33}^N &= \sigma'_{33} + \lambda^t \alpha_2 \\ \tau^N &= \tau\end{aligned}\tag{I.48}$$

$$i \quad \lambda^t = \frac{f^t(\sigma'_{22})}{\alpha_1}\tag{I.49}$$

Podent expressar-se les correccions de tensió local pel trencament tensor en el pla dèbil, després de la substitució de Eq. (I.45) per λ^t en Eq. (I.44),

$$\begin{aligned}\Delta \sigma'_{11} &= (\sigma^t - \sigma'_{22}) \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ \Delta \sigma'_{22} &= (\sigma^t - \sigma'_{22}) \\ \Delta \sigma'_{33} &= (\sigma^t - \sigma'_{22}) \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\end{aligned}\tag{I.50}$$

com on l'ús que s'ha fet de l'Eq. (I.29) pel f^t .

Després de la resolució en els eixos globals, les correccions de tensió es transformen

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_{11} &= (\sigma^t - \sigma'_{22}) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \\ \Delta \sigma_{22} &= (\sigma^t - \sigma'_{22}) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right) \\ \Delta \sigma_{33} &= (\sigma^t - \sigma'_{22}) \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ \Delta \sigma_{12} &= -(\sigma^t - \sigma'_{22}) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\tag{I.54}$$

En el mode de grans-tensions, l'orientació θ del pla de debilitat s'ajusta per considerar rotacions rígides pel cos i rotacions degudes a les deformacions. La correcció $\Delta\theta$, avaluada com a mitjana sobre tots els triangles en una zona, té la forma

$$\Delta\theta = e_{12} + \omega \quad (I.55)$$

on $\Delta\theta$ s'expressa en radians.

$$\begin{aligned} e'_{12} &= -(e_{11} - e_{22}) \sin\theta \cos\theta + e_{12} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ \omega &= \frac{1}{2} (\dot{u}_{1,2} - \dot{u}_{2,1}) \end{aligned} \quad (I.56)$$

1.3.2.2. Implementació

A la implementació del model de la junta-obliqua en FLAC, les tensions que corresponen a la part elàstica pel pas s'analitzen primer per a un trencament general i s'executen les correccions plàstiques pertinents com es descriu en el model de Mohr-culomb. Els components de tensió resultants (anomenats σ_{ij} en aquesta secció) són llavors examinats pel trencament en el pla de debilitat.

Els corresponents components de tensió locals σ'_{22} i τ es calculen utilitzant les Eqs. (I.29) i (I.30). Si aquestes tensions violen el criteri de fluència compost del pla de debilitat (veure les Eqs. (I.32) i (I.33)), han d'aplicar-se correccions als components σ_{ij} per donar el nou estat de tensions pel pas (*step*). En aquesta situació tenim que qualsevol $h(\sigma'_{22}, \tau) > 0$ o $h(\sigma'_{22}, \tau) = 0$ (veure les Eqs. (I.37) i (I.38)). En el primer cas, el trencament per esforç tallant té lloc en el pla dèbil. Les noves tensions són avaluades afegint correccions Eq. (I.45) al σ'_{ij} . En el segon cas, es produeix el trencament en el pla de debilitat i es calculen de nou les tensions utilitzant les correccions Eq. (I.51).

En mode de grans tensions, l'orientació del pla dèbil s'ajusta per considerar les rotacions del cos (veure les Eqs. (I.52) i (I.53)).

El valor per defecte per a la resistència a tracció en el pla de debilitat és zero si $\phi_j = 0$ i $\sigma_{j,\max}^t$ d'altra banda (veure la Eq. (I.34)). Aquest últim valor també es reté en el codi si el valor assignat per a la tensió de tracció en el pla de debilitat excedeix $\sigma_{j,\max}^t$. Si el valor computat de σ'_{22} excedeix a $\sigma_{j,\max}^t$ en una zona, llavors la tensió a tracció es posa a zero en aquesta zona. Això simula el reblaniment instantani.