



Escola Politècnica Superior
de Castelldefels

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

TREBALL DE FI DE CARRERA

TÍTOL: Sincronització en xarxes d'interconnexió

AUTOR: Esteban Ruiz de Erenchun Larumbe

DIRECTORS: Francesc Comellas Padró i Sílvia Gago Álvarez

DATA: 27 de Juny de 2007

Títol: Sincronització en xarxes d'interconnexió

Autor: Esteban Ruiz de Erenchun Larumbe

Directors: Francesc Comellas Padró i Sílvia Gago Álvarez

Data: 27 de Juny de 2007

Resum

En aquest TFC realitzem un estudi de la sincronització de sistemes dinàmics acoblats. Modelant cada component de la xarxa com un oscil·lador de cicle límit, analitzarem la evolució de xarxes amb diferents topologies de connexió.

Estudis previs sobre la sincronització s'han centrat principalment en la influència segons la topologia de la xarxa assumint que la força d'acoblament era uniforme. Cal tenir present que no és necessàriament així; Per això realitzem també una anàlisi on la força d'acoblament és discreta.

Per a comprendre millor el fenomen de la sincronització realitzarem dos tipus d'anàlisi, a nivell macroscòpic i microscòpic. En la primera anàlisi cada oscil·lador interactua amb els altres segons el model de Kuramoto i ens mostra el comportament global del sistema variant-ne la força d'acoblament (uniforme). La segona anàlisi mostra el comportament individual de cada node assumint una interacció de tipus *pulse-coupled*, de manera que veurem la quantitat de nodes sincronitzats en funció del temps transcorregut. Una tercera anàlisi basada en teoria de jocs corrobora els resultats obtinguts amb interacció *pulse-coupled*.

Title: Sincronització en xarxes d'interconnexió

Author: Esteban Ruiz de Erenchun Larumbe

Directors: Francesc Comellas Padró i Sílvia Gago Álvarez

Date: 27 de Juny de 2007

Overview

In this TFC we have done a study of synchronization in coupled dynamic systems. Modelling each network's component like a limit cycle oscillator, we are going to analyze the network evolution with different kind of connection topologies.

Previous work on synchronization has focused mainly on the influence of the network topology by assuming that the coupling strenght was uniform. We should remark that it is not necessarily true; This fact made us done an analysis with a discrete coupling strenght.

To understand synchronization phenomenon better we have done two kind of analysis, one in a macroscopic level and another in a microscopic one. In the first analysis each oscillator interact with the others following the Kuramoto model and shows us the system global behavior varying the (uniform) coupling strenght. The second analysis shows each node's individual behavior assuming a pulse-coupled type of interaction, so we will see the synchronized rate of nodes in function of elapsed time. A third analysis based in game theory confirm obtained results with the pulse-coupled interaction.

Índex

| | |
|---|----|
| Introducció | 6 |
| 1. Introducció a la Sincronització | 7 |
| 1.1. Visió Històrica..... | 7 |
| 1.2. Definint la Sincronització..... | 9 |
| 1.3. El model de Kuramoto..... | 10 |
| 2. Models de xarxes complexes | 13 |
| 2.1. Definicions de conceptes propis d'una xarxa..... | 13 |
| 2.2. Xarxes reals..... | 14 |
| 2.2.1. Xarxes estructurades..... | 15 |
| 2.2.2. Xarxes Aleatòries..... | 17 |
| 2.2.2.1 Xarxes Small-World..... | 18 |
| 2.2.2.2 Xarxes Scale-Free..... | 19 |
| 3. Entorn de programació | 21 |
| 3.1 El mètode d'Euler..... | 21 |
| 3.2 Tractament i adquisició de dades dels grafs..... | 23 |
| 4. Anàlisi macroscòpica segons la topologia de la xarxa | 24 |
| 4.1 Assignació de valor als paràmetres utilitzats (ω , f , h , its).. | 24 |
| 4.2 Implementació del programa..... | 25 |
| 4.3 Resultats obtinguts..... | 25 |
| 5. Anàlisi microscòpica segons la topologia de la xarxa | 30 |
| 5.1 Disseny i assignació de variables i paràmetres..... | 30 |
| 5.2 Implementació del programa..... | 32 |
| 5.3 Resultats obtinguts..... | 32 |
| 6. Anàlisi mitjançant teoria de jocs | 35 |
| 6.1 Game of Flash..... | 36 |
| 6.2 Consideracions..... | 36 |
| 6.3 Resultats obtinguts..... | 37 |
| 7. Conclusions | 40 |
| 8. Referències | 42 |
| 9. Annex | 43 |

Introducció

Els objectius principals d'aquest TFC són entendre el fenomen de la sincronització i realitzar-ne una simulació mitjançant els models matemàtics que actualment més s'aproximen al comportament real dels sistemes dinàmics acoblats objecte d'estudi.

Els estudis de xarxes de sistemes acoblats donen explicació a gran nombre de fenòmens naturals, des de terratrèmols fins a ecosistemes i organismes vius. Un dels fenòmens més fascinants del comportament dels sistemes dinàmics complexos és la aparició espontània d'ordre i la sincronització col·lectiva.

La sincronització és un fenomen observat en gran varietat de sistemes naturals, socials, econòmics, físics i biològics i se n'han trobat aplicacions en tot tipus de camps. La nombrosa quantitat de xarxes de sistemes dinàmics acoblats existents fa que siguin un tema de gran interès.

En els darrers anys, aquests estudis analitzaven xarxes regulars, o aleatòries. Recentment, a causa del descobriment de diverses característiques comunes en xarxes reals la majoria dels estudis sobre sincronització analitzen xarxes amb topologies complexes.

S'ha demostrat que processos físics i dinàmics, com fallades en cascada, propagació d'epidèmies o la sincronització, estan molt influenciats per la topologia de xarxa que presenten. Per aquest motiu realitzarem una comparativa de quines són les topologies que disposen de major facilitat per arribar a sincronitzar-se i quins són els paràmetres característics que més influeixen en que ho facin.

Aquest TFC consta de 7 capítols; el primer es tracta d'una introducció al fenomen de la sincronització. En el segon capítol presentarem els diferents models de xarxes complexes i veurem les principals característiques que les defineixen. El tercer capítol explica la metodologia aplicada en l'adaptació de la informació a processar en l'entorn informàtic. El quart capítol és l'anàlisi macroscòpica aplicant el model de Kuramoto. El cinquè és l'anàlisi que hem implementat per simular el comportament individual dels nodes. En el sisè capítol reproduïm una anàlisi matemàtica que també intenta modelar la sincronització basant-se en teoria de jocs. El setè i darrer capítol són les conclusions obtingudes.

Capítol 1

Introducció a la Sincronització

1.1 Visió Històrica

La història de la sincronització té el seu origen al voltant de l'any 1665 mentre Christian Huygens, un gran científic Holandès, estava malalt reposant al llit, amb dos rellotges de pèndul a la paret de l'habitació com a única companyia. Feia uns anys, va inventar i perfeccionar el disseny d'aquestes màquines del temps.

Huygens va fer una observació que va creure prou interessant de transmetre en la carta que va escriure al seu pare. Es tractava de que ambdós rellotges de pènduls oscil·laven en perfecta sincronia, va quedar intrigat i va comprovar el fenomen pertorbant-ne el ritme entre ells, i els rellotges sempre retornaven a la posició de perfecta sincronia.

Per suposat, essent un científic, va buscar una explicació per allò que va anomenar "simpatia dels dos rellotges". Va decidir que cada pèndul exercia un impuls imperceptible a la paret on se sostenien, i això feia que aquest impuls tendís a forçar l'altre pèndul a moure's amb sincronia amb ell. Mentre els pènduls es sincronitzen d'aquesta manera, les seves forces oposades cancel·larien el impuls fins a arribar al repòs, a l'equilibri [Ref.1].

Doncs resulta que Huygens tenia raó; tot i que existeixen algunes diferències en la terminologia, això és exactament la explicació que tenim avui per al fenomen de la sincronització mútua. Els científics avui en dia anomenen al impuls *força d'acoblament* entre els rellotges i el tipus de sincronització *contrafase* (donat que el pèndul es mou oposadament a l'altre). Aquests són termes generals per a descriure molts tipus diferents de sistemes; com veurem, el que fa l'estudi de la sincronització tant interessant avui en dia és que està ben lluny de limitar-se únicament a descriure pènduls de rellotges.

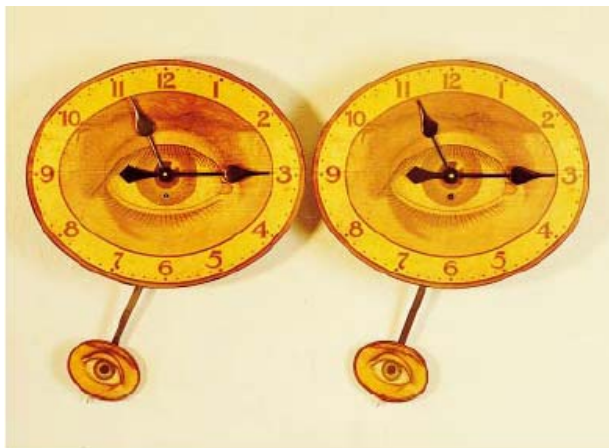


FIG. 1.1. Christian Huygens astrònom, físic i matemàtic Holandès que va inventar el rellotge de pèndul fou el primer en observar el fenomen d'acoblament d'oscil·ladors.

La observació fortuïta de Huygens va iniciar una nova branca matemàtica: la teoria d'oscil·ladors acoblats. Trobem oscil·ladors acoblats per tot arreu en el món natural, com les cèl·lules que fan bategar el cor, també en són un exemple les cèl·lules de secreció d'insulina al pàncrees, com també les xarxes neuronals al cervell i a l'espina dorsal que controlen comportaments rítmics com caminar, córrer o mastegar [Ref.2].

Continuant amb la visió històrica del fenomen, els biòlegs també començaren a observar la sincronització entre diferents organismes. Jean-Jaques Dortous de Marain va descobrir al 1729 que les mongetes tenien fulles que s'elevaven i descendien amb el cicle diari d'obscuritat i llum. A més a més, va observar que les fulles continuaven movent-se en un cicle aproximat de 24 hores en una habitació a les fosques, sense influència dels raigs solars. Diversos estudis des de llavors han provat la existència de rellotges biològics interns que regulen els cicles circadians (cicle diari d'activitat) dels organismes. En absència de influències externes (la llum del sol, per exemple), aquests rellotges difereixen lleugerament del cicle de 24 hores, però en condicions normals es troben sincronitzats al cicle dia-nit per estímuls externs.

En la dècada de 1920, per exemple, uns generadors trifàsics van ser acoblats i van trobar-se sincronitzats. Un generador trifàsic produeix un corrent elèctric altern, i la freqüència de la seva oscil·lació depèn dels paràmetres dels elements que formen el generador. Dos generadors diferents produiran en general diferents freqüències de corrent alterna; però quan els dos generadors estan acoblats es sincronitzen per a produir la mateixa freqüència. A més a més, estudis teòrics mostraren que els generadors podien ser sincronitzats mitjançant una senyal dèbil fins i tot. Aquest resultat va ser utilitzat per a crear poderosos generadors que podien ser fixats a una freqüència molt específica mitjançant la sincronització amb un generador més petit però més precís [Ref.1].

Amb aquest i altres exemples sembla clar que la sincronització és una mena de fenomen intrínsec a la natura, així que científics van mirar de submergir-se més profundament per entendre els principis que hi han darrera d'aquest fenomen. Fins i tot avui en dia. L'estudi de la sincronització es troba lluny d'ésser complet, esdevenint un tema interessant de recerca.

Aquest es tracta d'un capítol per a introduir els conceptes bàsics en l'estudi de la sincronització juntament amb la introducció més específica del model a en que hem decidit fixar part de la recerca.

1.2 Definint la Sincronització

Abans d' entrar en un estudi profund de la sincronització, necessitem una descripció més acurada del què entenem amb aquest terme. Una definició de sincronització presa del diccionari seria "ajust dels ritmes d'objectes en oscil·lació a causa de la seva dèbil interacció". Podem descriure millor "objectes en oscil·lació" com a sistemes portats a oscil·lar per una font d'energia i estables en la seva oscil·lació a petites pertorbacions. Així doncs, quan estudiem la sincronització hem de fixar-nos en la interacció que es produeix entre els diversos oscil·ladors. Aquesta influència o interacció s'anomena acoblament, i la força d'acoblament descriu com són de fortes aquestes interaccions. Tot i un acoblament reduït (com en el cas del rellotges de Huygens), oscil·ladors no idèntics poden interactuar a fi de sincronitzar-se amb els altres.

Generalment hi ha dos paràmetres que determinen la facilitat amb que un grup d'oscil·ladors pot sincronitzar-se: la força d'acoblament, anteriorment descrita, i l'assignació de freqüència. Mitjançant l'assignació de freqüència modelem com són de diferents les freqüències naturals en absència dels efectes produïts pels altres oscil·ladors. Lògicament, un grup amb una assignació de freqüència més àmpliament distribuïda és més difícil de sincronitzar.

Quan parlem de sincronització habitualment ens referim a la igualtat en freqüència dels oscil·ladors. Una vegada aquesta s'ha produït, podem fixar-nos també en la relació entre les fases del oscil·ladors, ja que la sincronització en freqüència no implica pas la igualtat de fase, de mode que es produeix l'anomenat *symetry breaking* trencament de simetria. Al 1985 Ian Stewart i Martin Golubitsky van desenvolupar una classificació matemàtica dels comportaments de les xarxes d'oscil·ladors acoblats, per tant, els tipus de *symetry breaking* segons el nombre d'oscil·ladors.

1.3 El Model de Kuramoto

A la dècada dels 60, a causa de la observació de quelcom semblant a la sincronització col·lectiva en molts sistemes naturals, diversos científics van començar a treballar en un model matemàtic per descriure aquest comportament. En particular, Arthur Winfree va ésser el pioner d'un mètode que ha esdevingut molt popular. Winfree va observar el comportament d'un llarg nombre d'oscil·ladors de cycle límit, en un intent de modelar la sincronització col·lectiva en grans grups. Va construir el seu model assumint que:

1. Els oscil·ladors són aproximadament iguals
2. L'acoblament entre els oscil·ladors és petit

Aquestes hipòtesis ajuden a simplificar en gran mesura el plantejament matemàtic, permeten la separació en escales de temps ràpides i lentes. En una escala de temps ràpida, els oscil·ladors arriben ràpidament al seu cycle límit, l'estat de cada oscil·lador pot ser ben aproximat únicament per la seva fase. Així doncs, en una escala de temps lenta, es pot parlar de com la fase de cada oscil·lador canvia a causa dels efectes dels altres oscil·ladors. Això va fer el tractament matemàtic molt més senzill, perquè la única variable que calia estudiar era la fase de cada oscil·lador, enlloc de totes les variables d'estat [Ref.3].

Aleshores, Winfree va proposar un model en el qual l'efecte sobre la fase de cada oscil·lador ve determinat per l'estat combinat de tots els oscil·ladors (és conegut com aproximació de camp principal, *mean-field*). En el seu model, la evolució de cada oscil·lador és determinat per una combinació de les freqüències naturals ω_i i de l'estat col·lectiu de tots els oscil·ladors combinats. La sensitivitat de cada oscil·lador al ritme col·lectiu ve determinada per una funció Z , i la seva contribució al ritme col·lectiu ve especificada per una funció X . Així doncs, cada oscil·lador té una equació que descriu com canvia la seva fase en el temps:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left(\sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) \cdot Z(\theta_i), \quad i=1, \dots, N,$$

On θ_i és la fase de l'oscil·lador i , $\dot{\theta}_i$ és la taxa de canvi de la fase de l'oscil·lador i , ω_i és la seva freqüència natural i N és el nombre total d'oscil·ladors.

Winfree va estudiar aquest model amb simulacions per ordinador i aproximacions analítiques i va comprovar que els oscil·ladors podien sincronitzar-se plenament donat un acoblament suficientment gran i una assignació de freqüències naturals dins d'un rang suficientment petit. Va trobar un resultat encara mes interessant fixant el rang d'assignació de freqüències a un valor alt (de manera que els oscil·ladors no poguessin sincronitzar-se), i aleshores reduint-lo lentament fins a un valor lllindar, en el qual un grup d'oscil·ladors de sobte es sincronitzen. La població (la xarxa) experimenta una transició de fase, formant-se diferents grups sincronitzats.

Yoshiki Kuramoto estava intrigat pels resultats obtinguts per Winfree, i va començar a treballar amb la sincronització col·lectiva al 1975. Va utilitzar les mateixes hipòtesis que va proposar Winfree, i després de un intens treball matemàtic, va provar que la dinàmica de qualsevol sistema d'oscil·ladors amb cicle límit aproximadament idèntics i amb acoblament reduït pot ser descrit per la següent equació [Ref.4]:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) \quad i=1, \dots, N$$

On Γ_{ij} determina la forma de l'acoblament entre l'oscil·lador i i l'oscil·lador j .



FIG1.2. Yoshiki Kuramoto

Aquesta és una equació general, vàlida per a qualsevol mena d'acoblament. Tot i la simplificació que presenta aquest model de fase les funcions d'interacció poden ser difícils d'analitzar en general, així doncs no es pot avançar gaire amb aquestes úniques hipòtesis.

Però Kuramoto va continuar treballant amb el seu model, i va assumir que cada oscil·lador afectava cadascun dels altres oscil·ladors, com ja havia fet Winfree. Aquesta mena d'interacció s'anomena *acoblament global*. Més endavant, va assumir que les interaccions eren iguals (*equally weighted*) i únicament depenien sinusoidalment de la diferència de fase. Aquestes funcions d'interacció donades

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad 1, \dots, N,$$

constitueixen el que ha esdevingut l'anomenat Model de Kuramoto:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad 1, \dots, N,$$

On K és la constant d'acoblament, i N és el nombre total d'oscil·ladors. Sovint el model s'utilitza amb $N \rightarrow \infty$, de manera que el factor $1/N$ fa que el model es comporti bé dins d'aquest límit.

Per a fer els càlculs teòrics més simples, les freqüències naturals són distribuïdes generalment segons una funció de densitat de probabilitat $g(\omega)$ que és simètrica respecte una freqüència central Ω , de manera que $g(\Omega + \omega) = g(\Omega - \omega)$. També s'acostuma a assumir que $g(\omega)$ decreix monotònicament a cada costat del pic $\omega=0$.

El que fa tant interessant el model proposat per Kuramoto és el treball teòric que es pot fer amb ell. Amb uns passos matemàtics més, Kuramoto no només va ser capaç de demostrar que hi ha una transició de fase cap a la sincronització sinó també de trobar una equació directa que dona la força d'acoblament crítica necessària per a que es produeixi la sincronització [Ref.4]. És realment sorprenent que tot i les simplificacions que Kuramoto va assumir per crear el seu model, s'ha provat que és vàlid per descriure diversos sistemes de sincronització.

Capítol 2

Models de xarxes complexes

Durant la dècada passada hi ha hagut una gran recerca en la qüestió de com coordinar el moviment de múltiples agents autònoms. Gran varietat de disciplines, tant diverses com ecologia, ciències socials, física estàtica, disseny gràfic, també en teoria de sistemes i de control, estan desenvolupant una comprensió més amplia de com un grup d'objectes en moviment (des de ramats, grups de ocells migratoris, grups de persones [Ref.5] fins a robots autònoms o vehicles no tripulats) poden arribar a un consens i moure's en formació sense coordinació centralitzada. Aquest interès a provocat que cobrés gran importància la *dinàmica de xarxes*, disciplina que es basa en la relació entre la estructura del graf i el comportament dinàmic de grans xarxes de origen divers [Ref.6].

2.1. Definicions de conceptes propis d'una xarxa

Una xarxa és un conjunt de nodes units entre ells per connexions o enllaços. Les xarxes es modelen matemàticament mitjançant *grafs*, de manera que els nodes de la xarxa s'associen als vèrtexs del graf i els enllaços a les *arestes* o *branques*.

El nombre total de vèrtexs que té un graf s'anomena *ordre* i el nombre de branques *mida*.

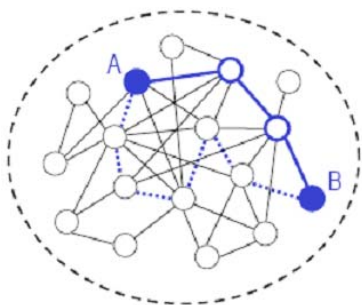


Fig. 2.1 La d_{AB} entre A i B és 3

En una xarxa la distància d_{AB} entre dos vèrtexs definits com A i B respectivament, és definida com el nombre mínim d'arestes que els connecta.

El *diàmetre* d'una xarxa és la màxima distància existent entre totes les parelles de vèrtexs que la formen.

La *distància mitja del camí L* d'una xarxa es defineix com la mínima distància entre dos vèrtexs, realitzant el promig sobre tots els parells de nodes. Així, L determina la mida efectiva de la xarxa, la separació més freqüent o promig d'un parell de vèrtex de dins la xarxa.

Dos vèrtexs són *adjacents o veïns* si els uneix una aresta, per tant, si la seva distància és 1. S'anomena *grau* d'un vèrtex k al nombre de veïns que té, així doncs, el *grau mig* d'una xarxa és la mitja dels graus dels diferents nodes que la componen k_i , i la seva notació és la següent: $\langle k \rangle$.

A l'hora de construir una xarxa, una manera ben simple consisteix en unir dos vèrtex aleatòriament amb una aresta i repetir aquest procés fins a obtenir el graf desitjat. Una xarxa construïda d'aquesta manera, es coneix, òbviament, com a xarxa aleatòria (Figura 2.2). Donat que hem anat afegint enllaços aleatòriament no hi ha cap motiu pel qual un node hagi de tenir un grau molt més elevat que un altre. El nombre d'arestes per vèrtex tendirà aproximar-se a un valor mig, així doncs, les xarxes aleatòries es consideren igualitàries.

Moltes xarxes reals, en canvi, disposen d'uns quants vèrtexs amb moltes connexions amb la resta (Figura 2.2). Definim *cluster* com el conjunt de vèrtexs entre els que existeixen moltes connexions.

El *coeficient de clustering o veïnatge* C o simplement *clustering* n'és un paràmetre relacionat, que mesura la connectivitat local d'una xarxa. El *clustering* d'un vèrtex es defineix com la fracció de branques que uneixen els veïns d'aquest vèrtex entre ells, dividit entre la quantitat total de branques. El *clustering* d'una xarxa és la mitjana dels *clusterings* dels seus vèrtexs. Si un vèrtex està aïllat o només té un veí, per conveni la seva aportació al *clustering* serà 1.

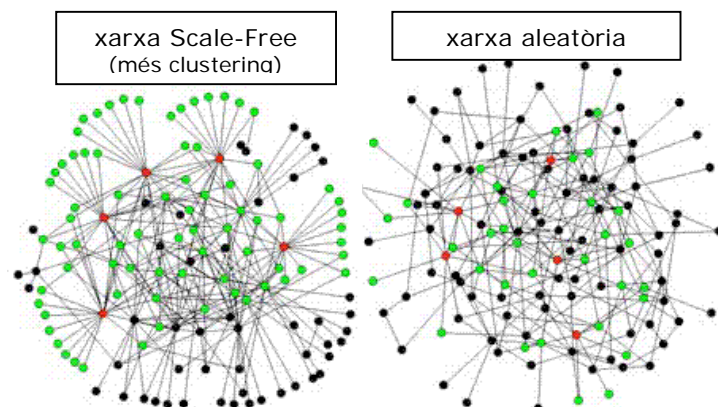


Fig. 2.2 Observem la diferència entre una estructura construïda aleatòriament (dreta) i una altra amb una distribució potencial (mig) que, entre d'altres diferències, presenta un major *clustering*. (esquerra) Un clúster d'estrelles formant una galàxia.

2.2. Xarxes reals

Les xarxes complexes han estat estudiades extensivament a causa de la seva rellevància per a molts sistemes reals [Ref.7] tan diversos com són Internet, la World-Wide-Web (WWW), la xarxa elèctrica de distribució, xarxes biològiques [Ref.8] i xarxes socials. Tot i així encara no es coneixen amb exactitud els fenòmens que s'hi produeixen i sobretot com i perquè es produeixen. Concretament, retornant al nostre tema d'interès, com es sincronitzen les cèl·lules del còrtex visual? O encara més clar és el cas de les cèl·lules que provoquen el batec del cor, ja que en cas de no produir-se la sincronització parlaríem d'una arítmia. Tot seguit veurem com la topologia de la xarxa en qüestió és un dels factors més importants a l'hora de determinar la possible sincronització del sistema.

Segons la topologia de la xarxa diferenciem entre xarxes amb estructura regular i xarxes amb estructura aleatòria.

2.2.1 Xarxes estructurades

Existeixen diversos tipus de xarxes estructurades, com les xarxes geomètriques, com poden ser els anells, les malles, malles toroidals, etc.

S'anomenen *regulars* a aquelles xarxes en les quals el grau de tots els nodes que la componen és idèntic, és a dir el grau mig de la xarxa coincideix amb el grau de cadascun dels nodes.

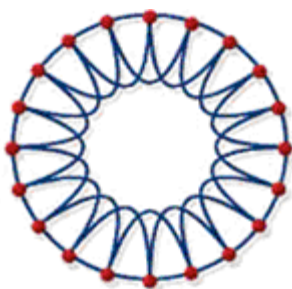


Fig. 2.3 Com es pot observar la xarxa és regular, concretament es tracta d'un anell de grau quatre, ja que cadascun dels nodes disposa de quatre connexions amb els seus veïns.

Habitualment les xarxes geomètriques també són regulars, tot i així, que sigui geomètrica no implica que sigui regular, sobretot quan es tracten casos de xarxes en tres dimensions:

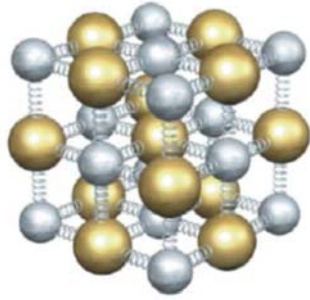


Fig. 2.4 Cristal·lització del fòsfor (P). cada una de las partícules situades en los nodes de la estructura, contribueixen en un part a la formació del número d'àtoms contingut en el seu interior.

Una de les causes és que és menys freqüent la simetria en figures de tres dimensions. Encara que aquest la intenció d'aquest exemple únicament és il·lustrar un cas de xarxa regular no geomètrica cal tenir en compte que les xarxes amb que es treballa tenen, pràcticament sempre, dos dimensions.

En les xarxes estructurades habitualment es comparteixen un mateix nombre de veïns, que a més a més acostumen a ser els immediats. Aquest fet ocasiona que el clustering sigui elevat i que també ho sigui la distància mitja de camí. Hem de tenir molt present que ambdós factors afecten directament la sincronització de la xarxa.

Que el clustering sigui elevat inhibeix la sincronització global donat que els diferents clústers se sincronitzen individualment i com que disposen de poques connexions amb la resta de la xarxa la influència dels nodes exteriors al cluster és reduïda. Així doncs, aquest fet provoca que la xarxa es demori més a assolir la freqüència de sincronització global.

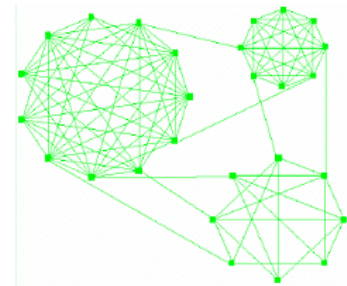


Fig. 2.5 Exemple de dos sub-xarxes geomètriques regulars connectades a una tercera per formar una xarxa amb tres clústers.

Que la distància mitja de camí sigui elevada provoca que hi hagin molts enllaços entre dos nodes determinats. D'aquí se'n desprèn que els nodes estan majoritàriament connectats als nodes més propers, cosa que implica que un node llunyà no influeixi sobre aquest. La conclusió torna a ésser la mateixa que en el cas d'un clustering elevat, el retard en la sincronització global.

2.2.2 Xarxes aleatòries

Amb el terme xarxes aleatòries fem referència a totes aquelles xarxes que presenten una estructura aleatòria o semi-aleatòria.

Al 1960 dos matemàtics hongaresos, Pál Erdős i Alfréd Rényi, van ser els pioners en explorar la teoria dels grafs aleatoris. Van crear un model conegut com model Erdos-Rényi (model ER) mitjançant el qual s'obtenien xarxes amb estructura Small-World (2.2.2.1) però no modelava correctament el clustering, fet que provoca que la longitud mitja de camí fos més reduïda. Així doncs, el model Erdos-Rényi no és vàlid per a la majoria de xarxes reals, donat que aquestes presenten un relativament alt coeficient de clustering.



Fig. 2.6 Pál Erdős



Fig. 2.7 Alfréd Rényi

En un graf aleatori els nodes es connecten amb una certa probabilitat p , la majoria dels nodes tenen el mateix nombre de connexions que la mitja $\langle k \rangle$, i pocs d'ells disposen de més o menys connexions. Donada la naturalesa aleatòria de l'assignació de branques, el histograma o funció de probabilitat que determina el grau dels nodes és de Poisson.

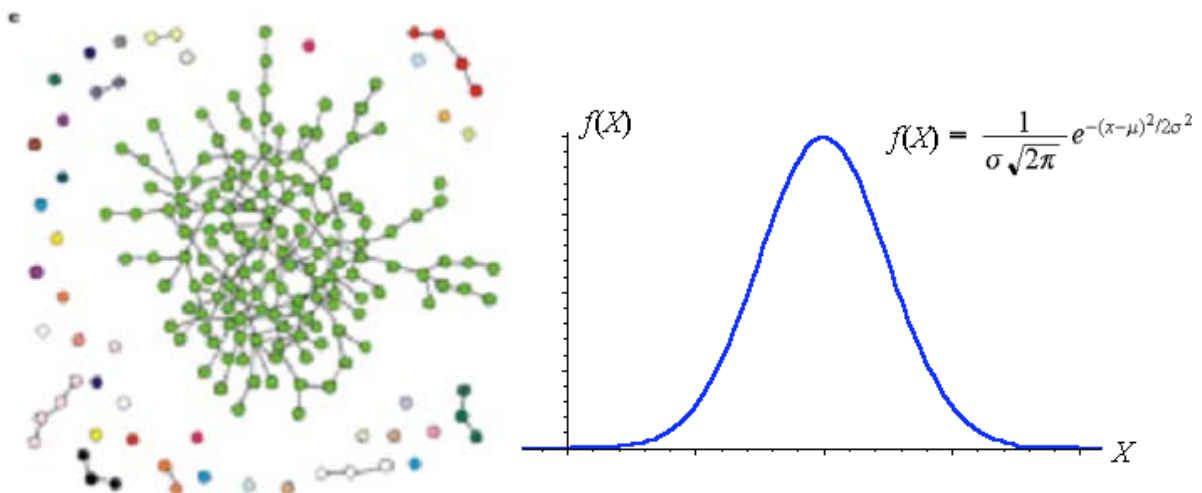


Fig. 2.8 (esquerra) Resultat d'aplicar selecció aleatòria en la connexió dels nodes. (dreta) Funció de densitat de probabilitat $f(X)$ d'una variable aleatòria X amb distribució normal. El valor mig de X és μ , mentre que la desviació estàndard es designa amb σ .

Propietats de les xarxes aleatòries:

L'aleatorietat fa que dos nodes adjacents difícilment comparteixin veïns, així que el *clustering* acostuma a ser reduït. Per a grafs obtinguts mitjançant el ER model:

$$C = p = \frac{\langle k \rangle}{N} \ll 1$$

La distància mitja de camí també ho és donat que els nodes poden estar connectats amb d'altres situats a gran distància (distància mètrica referida a la mida total de la xarxa).

2.2.2.1 Xarxes SMALL-WORLD

El terme *Small World*, habitualment utilitzat per a descriure xarxes, prové del fenomen sociològic que popularment es coneix com la *separació de sis graus*. La idea té el seu origen en els experiments realitzats per Stanley Milgram als anys seixanta, i que el van portar a la popularització dels *six graus de separació* que, en teoria, separen a dos ciutadans qualssevol dels EEUU, mitjançant una cadena de persones conegudes [Ref.8].

En un intent de construir una xarxa amb un alt coeficient de clustering que també tingui estructura Small-World o una distància mitja de camí petita, Duncan J. Watts i Steven H. Strogatz proposaren un model construït mitjançant la reconexió aleatòria dels enllaços d'una malla regular [Ref.9]. Aquest WS model disposa tant d'un alt coeficient de clustering, comú en les malles regulars, com de les característiques pròpies de les xarxes obtingudes a partir del model ER.

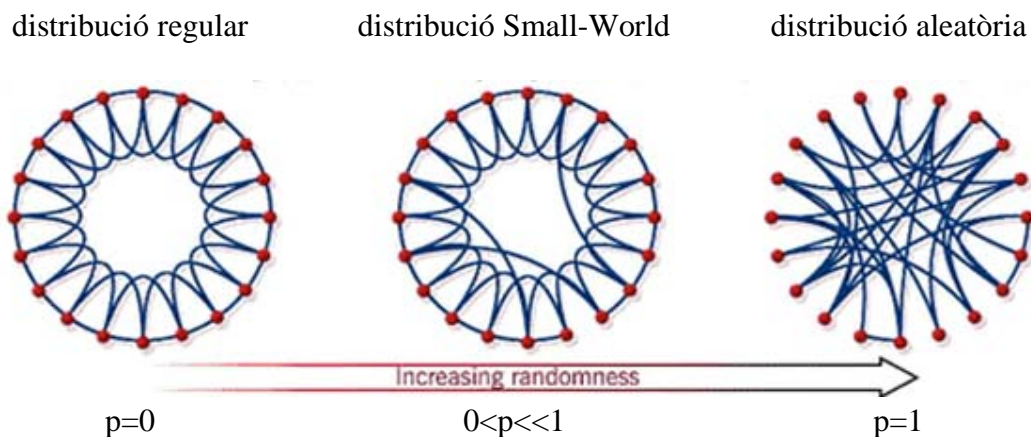
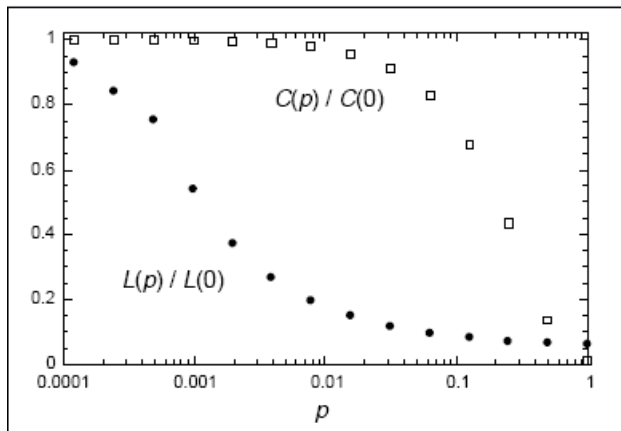


Fig. 2.9 El model de Watts Strogatz s'interpol·la entre una distribució regular i una aleatòria conforme augmentem p , que és la probabilitat de reconnectar aleatòriament un node escollit també aleatòriament.

Propietats del model WS:



Les propietats que caracteritzen les xarxes Small-World són un alt coeficient de clustering, una distància mitja de camí reduïda i una funció de distribució de grau dels nodes similar a les xarxes aleatòries però no de Poisson exactament.

Figura 2.10 Aquesta gràfica mostra els valors de la distància mitja del camí(L) i el clustering (C) com a funció dels valors inicials. S'observa com es redueix ràpidament L per a petits valors de p, mentre el clustering es manté a un valor alt fins que la distribució dels nodes s'aproxima a un graf aleatori.

2.2.2.1 Xarxes SCALE-FREE

En l'estudi de diverses xarxes complexes reals s'ha descobert que la funció de probabilitat que determina el nombre de connexions (distribució de grau) que té un node determinat k pot ser representada mitjançant una llei potencial, $P(k) \approx k^{-\gamma}$, amb un exponent γ usualment dins del rang $2 < \gamma < 3$. Per explicar la llei potencial de distribució de grau Barabási i Albert proposaren un altre model de xarxa (model BA) [Ref.10]. Els models existents fins aleshores no consideraven dos característiques pròpies de les xarxes reals, com són el creixement i l'acoblament preferent. En aquestes dues característiques es basa l'algoritme de creació de xarxes BA Scale-Free.

Cal tenir en compte que com Barabási i Albert indicaren les xarxes reals són dinàmiques, ja que contínuament es van afegint o sostraint nodes, de manera que la topologia es troba en continua evolució.

Acoblament preferent significa que els nous nodes prefereixen connectar-se amb aquells nodes que disposen de més enllaços. El creixement mitjançant l'acoblament preferent genera els anomenats hubs (nodes amb multitud de connexions) i dóna explicació a la llei potencial de distribució de grau.

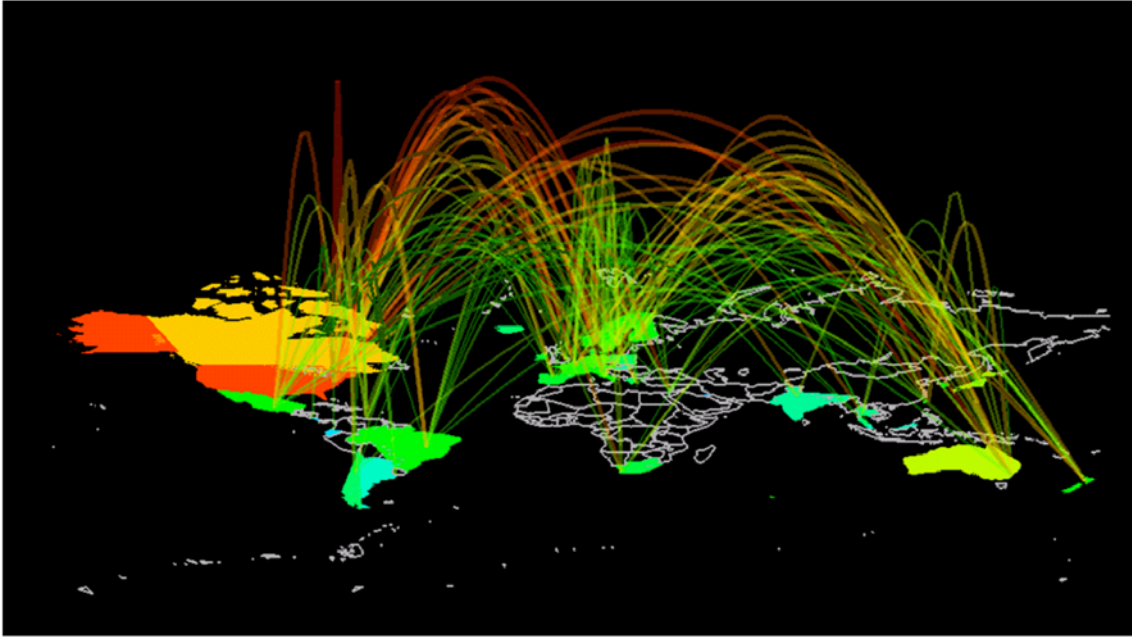
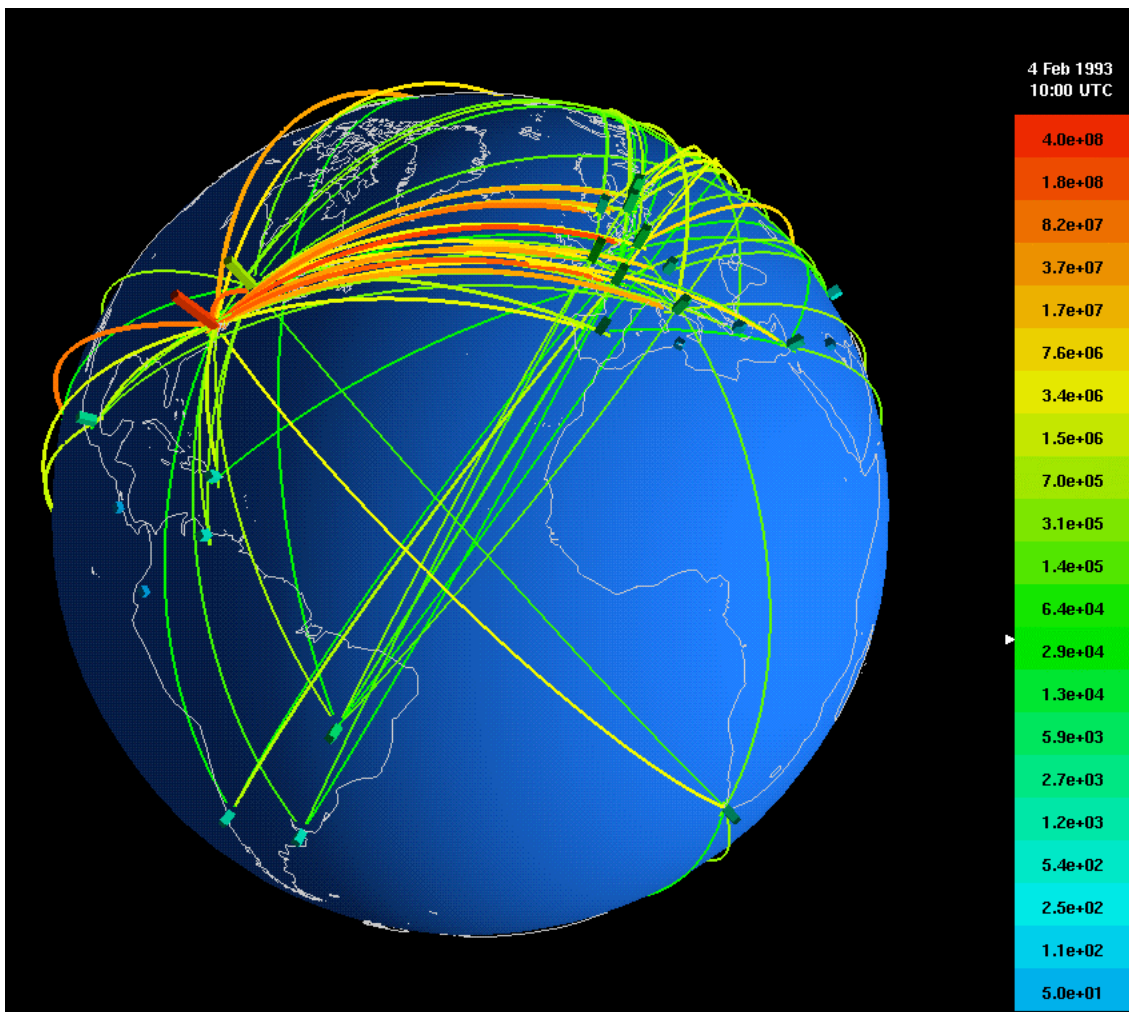


Fig. 2.11 Xarxa de pàgines WWW consultades arreu del món, considerant cada pàgina web un node i cada hyperlink una aresta. Aquesta xarxa presenta una topologia Scale-Free. El grau dels diferents nodes és la suma dels valors (a sota) de les arestes que en surten.



Capítol 3

Entorn de Programació

En aquest capítol veurem la metodologia aplicada en l'anàlisi macroscòpica. Per poder efectuar el programa que simula la evolució de la fase i la freqüència de cadascun dels nodes que componen la xarxa, primerament cal trobar una expressió matemàtica que reguli la influència entre ells. Aquesta influència la determina el model de Kuramoto però per obtenir-ne un valor haurem d'aplicar un mètode numèric.

El model Kuramoto ens ofereix les equacions diferencials que defineixen el increment de fase de cada node. Per tant, disposem d'un model matemàtic que ens indica la dinàmica global del sistema d'oscil·ladors. A causa de la dificultat de treballar amb un sistema d'equacions diferencials acoblades simplifiquem l'anàlisi resolent-les mitjançant el *Mètode d'Euler*.

3.1 Mètode d'Euler

Aquest mètode és un procés numèric per resoldre equacions diferencials ordinàries donat un valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$



FIG. 3.1. Leonhard Euler

Hem d'integrar l'equació diferencial en el interval $x_i \leq x \leq x_{i+1} = x_i + h$ i per a això avaluar la integral que resulta aplicant la fórmula de integració numèrica:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) \cdot dx \quad y|_{x_i}^{x_{i+1}} = h \cdot f(x_i, y_i) + O(h^2)$$

Aleshores, $y_{i+1} - y_i = h \cdot f(x_i, y_i) + O(h^2)$ de on s'obté la següent expressió aproximada l'aplicació de la qual s'anomena *Mètode d'Euler*:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ x_i &= x_0 + i \cdot h \end{aligned}$$

Així doncs, donada una equació diferencial amb valors inicials (x_0, y_0) podem utilitzar el mètode d'Euler per a obtenir una successió de punts:

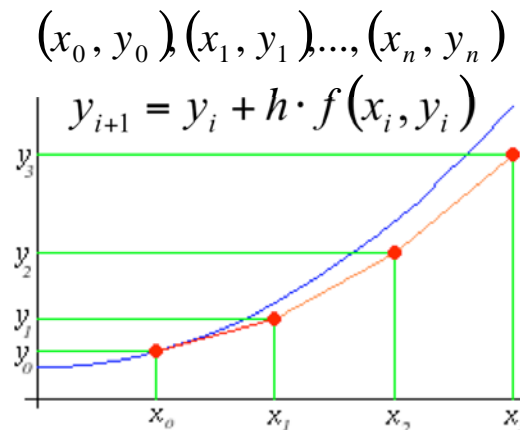


FIG. 3.2. Representació de l'error per l'aplicació del Mètode d'Euler.

Cal tenir en compte que la resolució aplicant un mètode numèric, donat el caràcter aproximat d'aquest, introdueix un cert error. Els errors introduïts poden ser majoritàriament de dos tipus:

- Error d'arrodoniment: Aquest error s'introdueix a causa del nombre limitat d'estadístiques per obtenir la solució.
- Error de truncament: Aquest error és una causa directa de la utilització de mètodes numèrics. Podem separar-lo també en dos parts:
 - Error local: Introduït en una sola iteració.
 - Error propagat: Acumulació d'error dels passos anteriors.

El Teorema de Taylor permet aproximar una funció derivable en l'entorn reduït al voltant d'un punt a mitjançant un polinomi els coeficients del qual depenen de les derivades de la funció en aquest punt. Si el comparem amb el mètode d'Euler:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + R_n(x)$$

Encara que la notació sigui diferent, els primers termes de l'equació coincideixen amb l'equivalència: $(x-a)=h$ i $f'(a)=f(x, y)$. Així doncs, si restem l'equació d'Euler de la de Taylor n'obtenim:

$$\frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + R_n(x)$$

Aquest és el valor de l'error introduït pel mètode d'Euler però usualment només s'utilitza el primer terme per a donar el valor de l'error. Podem concloure doncs, que l'error és d'ordre h^2 , i l'error total és aproximadament el producte del nombre d'iteracions multiplicat per h^2 .

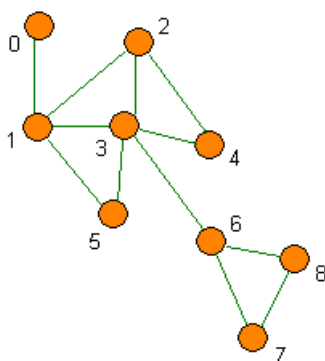
3.2 Tractament i adquisició de dades dels grafs

Les xarxes es modelen matemàticament mitjançant grafs. Els grafs corresponents a les topologies de xarxa analitzades venen determinats per la seva matriu o llista d'adjacència. Per poder treballar amb els diversos grafs en l'entorn de programació requerim recuperar el veïnatge des d'un arxiu de text, a on hi ha desada la matriu o la llista d'adjacència.

La *matriu d'adjacència* es tracta d'una matriu $N \times N$ que indica les connexions entre els nodes. A cada node $[0, N-1]$ li correspon una fila, així que els diferents nodes connectats al node i s'organitzen en les columnes corresponents a la fila i . A la posició a_{ij} de la matriu hi trobem un 1 si els nodes i i j estan connectats, i un 0 si no ho estan.

La *llista d'adjacència*, és una llista que, per cada node del graf, guarda la posició dels veïns d'aquest. En el cas de les llistes únicament s'emmagatzema la informació dels enllaços existents, mentre que en el cas de la *matriu d'adjacència*, hi ha una posició de memòria reservada per cada possible enllaç, existeixi o no.

La utilització de una llista d'adjacència presenta diversos avantatges respecte la de una matriu d'adjacència com l'estalvi de memòria en els arxius de text utilitzats per emmagatzemar-la o com també la major rapidesa a l'hora d'extreure el veïnatge d'aquests arxius.



| NODE | VEÏNS | | | | |
|------|-------|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | 2 | 3 | 5 | |
| 2 | 1 | 3 | 4 | | |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| 4 | 2 | 3 | | | |
| 5 | 1 | 3 | | | |
| 6 | 3 | 7 | 8 | | |
| 7 | 6 | 8 | | | |
| 8 | 6 | 7 | | | |

```
01000000
10110100
01011000
01101110
00110000
01010000
00010011
000000110
```

FIG. 3.3. (Esquerra a dalt) Representació gràfica dels nodes i connexions que componen una xarxa senzilla.

(Esquerra a sota) Matriu d'adjacència corresponent a la xarxa.

(Dreta) Llista d'adjacència corresponent a la xarxa, de on extraurem el veïnatge. Donat que els nodes s'ordenen consecutivament a cada fila de l'arxiu on s'emmagatzemarà no és necessari indicar el node, de manera que la part en groc correspondria a l'arxiu on emmagatzemaríem la llista d'adjacència.

Capítol 4

Anàlisi macroscòpica segons la topologia de la xarxa

En aquest capítol tractarem la metodologia aplicada a resoldre l'anàlisi macroscòpica, com es comporta la xarxa en conjunt. En el capítol posterior, tractarem el comportament de les diferents topologies des del punt de vista de les propietats individuals de cada node, és a dir, analitzarem les xarxes a nivell microscòpic i ho complementarem amb un breu visió de com han provat de simular el fenomen de la sincronització diversos científics i matemàtics mitjançant teoria de jocs.

Donat que l'objectiu és explicar el fenomen de la sincronització i de quins factors en depèn, inicialment aquest capítol consistirà en una descripció i justificació de la metodologia i dels paràmetres rellevants junt amb l'assignació dels valor inicials d'aquests. Seguidament, presentarem els resultats i la justificació dels mateixos.

4.1 Assignació de valor als paràmetres utilitzats (ω , f , h , its)

Per a obtenir el valor del paràmetre que indica la quantitat de nodes del sistema que es troben sincronitzats " m " he utilitzat el model de Kuramoto per a caracteritzar els nodes i el mètode d'Euler per a resoldre el sistema d'equacions diferencials acoblades que se n'obté d'aquest.

Per a realitzar l'estudi treballarem amb oscil·ladors de cicle límit, que es defineixen com aquells que tenen una forma d'ona i una amplitud constant a les quals retornen tot i la influència de petites pertorbacions. Un pèndul és un exemple clar d'oscil·lador de cicle límit.

A fi de modelar amb la major precisió possible el sistema format pels oscil·ladors, cal tenir present la diversitat present en qualsevol sistema real. Inherentment, sempre n'hi haurà de més ràpids i d'altres amb menor freqüència. Així doncs, la distribució de freqüències ha estat realitzada aleatòriament en el interval $0,9 < \omega < 1,1$. Pel que fa a l'assignació de la fase als diferents nodes també ha estat realitzada aleatòriament donat que inicialment no hi ha cap mena de influència entre ells, així el interval en aquest cas és de $0 \leq f \leq 2\pi$.

Pel que fa a l'aplicació del mètode d'Euler, després de realitzar gran quantitat d'execucions per a escollir el valor del pas de quantificació, de mode que per als valors $h=0,005$ i $h=0,02$ han estat obtinguts uns resultats molt similars. Relatiu a l'error introduït per la utilització del mètode numèric de resolució, seria aproximadament el indicat a continuació:

$$\varepsilon = O(h^2) \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1|_{h=0,02} \cong 0,1\% \\ \varepsilon_2|_{h=0,005} \cong 0,00625\% \end{cases}$$

Pel que fa al temps d'execució del programa, utilitzant el pas de quantificació $h=0,005$ el temps de processat és quatre vegades superior al necessari amb una $h=0,02$, donat que realitzem la partició de cadascuna de les 500 iteracions en 200 o 50 intervals ($1/h$) respectivament.

Donat que en l'error total en la obtenció de resultats se n'introdueixen d'altres, com l'error de truncament, no és gaire significativa la diferència d'errors introduïda pel mètode numèric, així que vaig decidir prendre $h=0,02$ com a valor per al pas de quantificació.

Per mirar d'obtenir uns resultats el màxim de rigorosos possible es comencen a prendre els valors del paràmetre de sincronització m transcorregut un cert temps per evitar l'estat transitori del sistema. Així doncs, transcorregudes 100 iteracions per a permetre la relaxació realitzo el càlcul de m en les 400 restants.

4.2 Implementació del programa

El programa implementat per a realitzar l'anàlisi mitjançant les equacions diferencials que planteja el model de Kuramoto, consta de les següents parts:

- ✚ Inicialització del sistema
 - Calcular nodes
 - Inicialització i càrrega de la llista d'adjacència
 - Assignació aleatòria de freqüències i de fases
- ✚ Càlcul de la influència del veïns ($\alpha(h, f, mitja_adj, \omega_i, A_{ij})$)
 - Control de fases
- ✚ Al final de cada iteració recalcularem ω_i i $\{m\}$ guardem les dades en fitxers i incrementem el valor de f .

4.3 Resultats obtinguts

Abans d'analitzar els resultats veurem els paràmetres que caracteritzen cadascuna de les topologies analitzades, que ens poden donar una idea de les semblances i diferències entre elles.

| | BA | BA_clus | Aleatori | Aleatori Reg | WS01 | WS001 | WS0001 | Anell |
|---------------|--------|----------|----------|--------------|---------|---------|---------|-----------|
| Grau mig | 9,97 | 9,912 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| Grau min | 5 | 4 | 2 | 10 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Grau max | 111 | 77 | 21 | 10 | 14 | 11 | 11 | 10 |
| d mitja | 2,9899 | 3,24647 | 3,2568 | 3,2892 | 4,43 | 9,8283 | 21,6495 | 50,450451 |
| Diamètre | 5 | 6 | 5 | 5 | 7 | 21 | 51 | 100 |
| Clustering | 0,04 | 0,382332 | 0,11286 | 0,0076 | 0,48738 | 0,65115 | 0,66356 | 0,6666 |
| Excentricitat | 4,038 | 4,735 | 4,643 | 4,165 | 6,357 | 17,147 | 40,802 | 100 |

FIG. 3.4. Valor dels paràmetres significatius de les diferents topologies analitzades.

Les topologies designades per *BA* són dos xarxes Scale-Free generades amb el model Barábasi-Albert. *BA_clus* presenta un clustering pràcticament 10 vegades superior, de manera que podem observar com afecta el clustering en aquest tipus de xarxes.

La topologia *Aleatòria Regular (RR10)* es tracta d'una xarxa on les connexions internodals s'han generat aleatòriament però tots els nodes disposen del mateix grau (regular). Mentre que les connexions dels nodes que formen la topologia *Aleatòria* està generada completament al atzar (veure Fig. 2.8).

Mentre que la resta de topologies estan generades a partir de l'*Anell* regular de grau 10 mitjançant el model de Watts-Strogatz (veure Fig. 2.9) amb la probabilitat de reconexió P indicada al propi nom. Així la topologia *WS0001* és la més aproximada a l'*Anell* donat que disposa d'una $P=0,001$, mentre que la *WS01* amb una $P=0,1$ s'aproxima més a la topologia aleatòria.

Analitzarem primerament les topologies que presenten major resistència a la sincronització global, per a veure darrerament les que ho fan amb major facilitat.

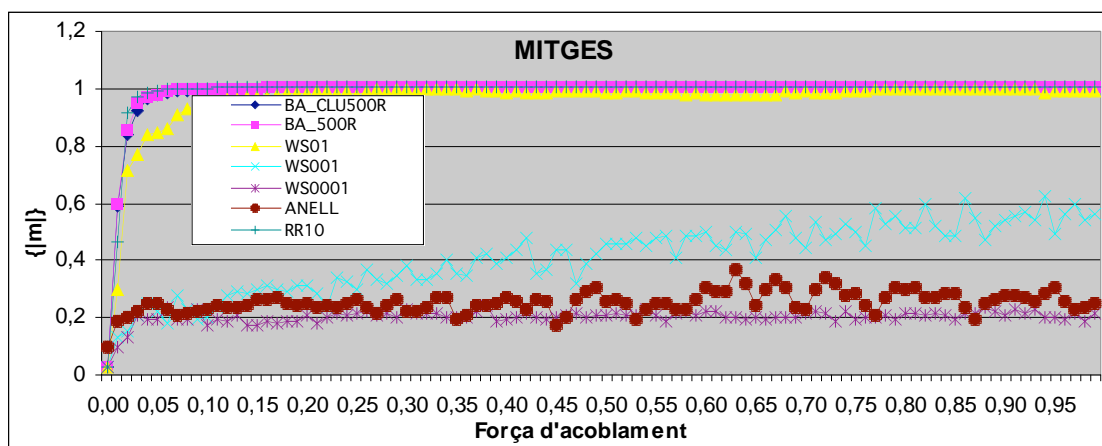


FIG. 3.5. Valor de la sincronització total obtinguda per a les diferents topologies.

Donat que les xarxes regulars i WS Small-World presenten un alt clustering, els diversos clústers de freqüència se sincronitzen independentment i s'inhibeix la sincronització general dels nodes cap a una freqüència concreta. Com que s'observa un increment continu per a la topologia WS001 en el rang de força d'acoblament analitzat, vaig augmentar aquest a fi d'esbrinar si tant aquesta com les topologies WS0001 i en anell mostraven un comportament sincrònic a partir d'un cert llindar de la força d'acoblament.

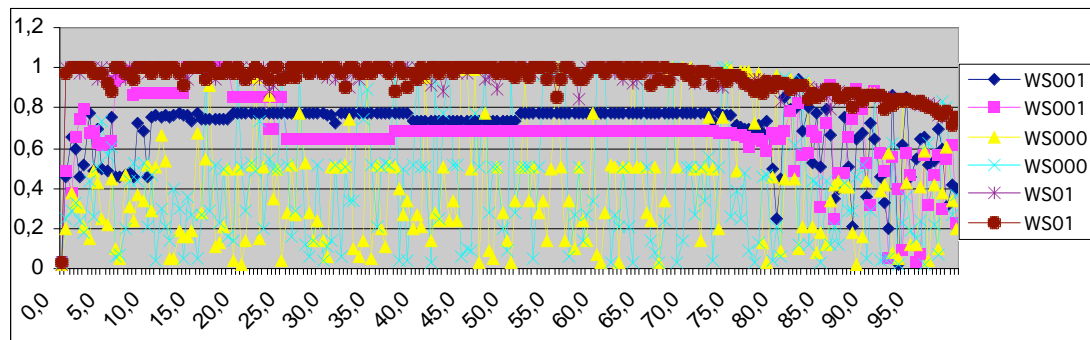


FIG. 3.6. Valor de $\{|m|\}$ per a dos casos particulars de les topologies Small-World. El valor de la mitja emmascara el comportament puntual de la evolució en una iteració, per això únicament es representen dos iteracions.

De la gràfica anterior podem extreure'n dos resultats importants:

1. El valor màxim que assoleix m per a una xarxa Small-World amb probabilitat de reconexió $P=0.01$ és del 75%.
2. En el cas de la xarxa Small-World amb $P=0.001$, $\{|m|\}$ pren el seu valor màxim (100%) puntualment, observant-ne un únic cas. Donat el caràcter puntual i aleatori d'aquestes "deltetes" sincronitzades, observant-ne la mitja queden emmascarades, i de fet no impliquen la sincronització de la xarxa ja que $\{|m|\}$ no roman en el valor màxim.

La xarxa regular en anell ofereix més resistència a sincronitzar-se que les topologies Small-World (amb model WS) donat que encara té un coeficient de clustering més elevat. A més a més, també té una distància de camí mig molt més elevada així que ni tan sols aplicant-hi una gran força d'acoblament arriba a fer-ho més enllà d'un 35%.

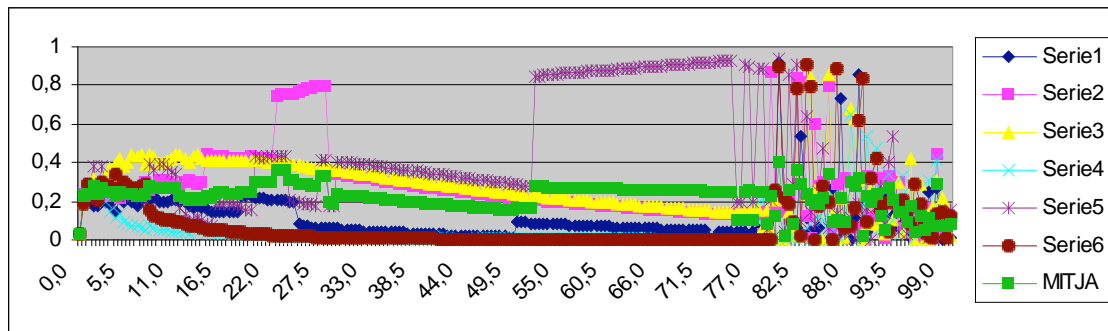
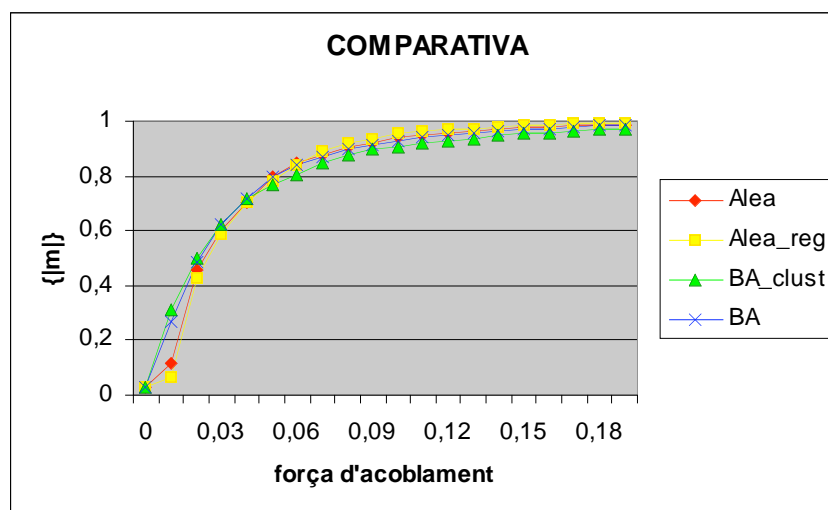


FIG. 3.6. Anell Regular Grau 10. Valor de $\{|m|\}$ per a sis casos particulars. Observem com per a algun cas particular es produeix sincronització en un cert rang de força, per més tard retornar oscil·lant al voltant del valor mig $\{|m|\} \sim 22,2\%$.

Respecte a les topologies amb distribució Barabási-Albert, s'ha demostrat en diversos estudis analítics [Ref.11] que la xarxa sempre sincronitza, donat que la xarxa de tipus Scale-Free, (amb distribució de grau potencial $P(k) \propto k^{-\gamma}$) si disposa d'un coeficient de grau $2 < \gamma \leq 3$.

Podem observar en les gràfiques següents (Figura 3.7) que inicialment per a valors reduïts de la força d'acoblament les distribucions tipus BA Scale-Free són les primeres en començar a sincronitzar-se. Respecte les distribucions aleatòries, podem observar que també es sincronitzen amb gran facilitat.

Les distribucions aleatòries requereixen més temps però en el moment que comencen a sincronitzar-se els nodes ho fan més ràpidament. Inicialment la regular mostra menys sincronització que la completament aleatòria, però de totes les topologies analitzades és la que abans ho arriba a fer. Aquest fet es produeix perquè la distribució aleatòria regular disposa d'un coeficient de clustering pràcticament nul, així que inicialment les freqüències es troben més distribuïdes però a mesura que augmentem la força d'acoblament no es formen clústers de freqüència, mentre que en la resta de distribucions aquests clústers de freqüència inhibeixen la sincronització global.



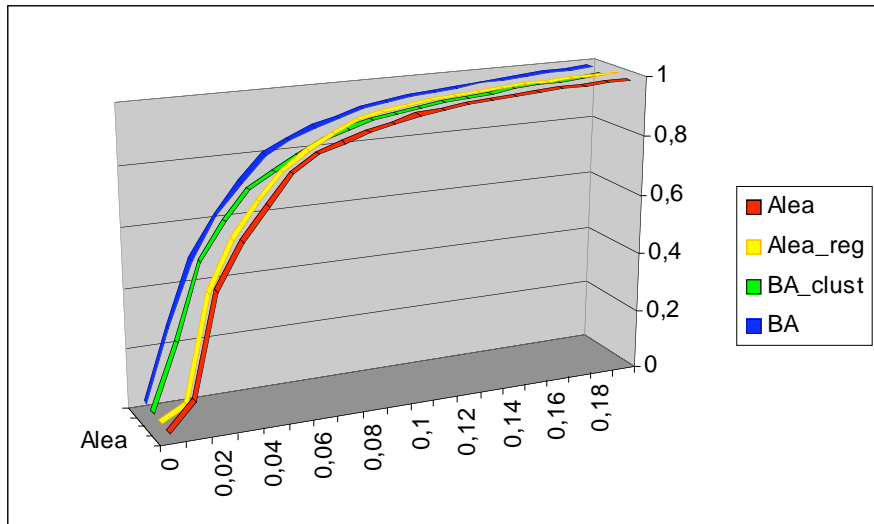


FIG. 3.7. Evolució del percentatge de sincronització total a mesura que augmentem la força d'acoblament entre els nodes.

Capítol 5

Anàlisi microscòpica segons la topologia de la xarxa

L'objectiu d'aquesta anàlisi és comparar i complementar la visió global del sistema analitzada en el capítol anterior. Per poder efectuar una comparativa fiable, haurem de caracteritzar els nodes tant similars com ens sigui possible respecte als paràmetres assignats en el anterior capítol.

5.1 Disseny i assignació de variables i paràmetres

El disseny inicial del programa consistia en assignar aleatòriament un estat (dins d'un rang establert per l'usuari) a cada node i observar-ne la evolució d'estats. Cada estat representava un rang de fase, de mode que es dividia cada cicle entre el nombre d'estats. Els resultats que se'n podien obtenir únicament indicaven la quantitat de cicles transcorreguts fins que tots els nodes (o el percentatge desitjat) es trobessin en el mateix estat, per tant, dins del mateix rang de fase.

Aquest disseny no era vàlid per diversos motius. El primer, i més important, és que no considerava les variacions en les freqüències naturals. Aquestes variacions són bàsiques a l'hora de simular una xarxa real d'oscil·ladors. El segon motiu és que cap dels dos resultats obtinguts, temps total de sincronització i la fase a on es produeix, és útil per a realitzar una comparativa amb l'anàlisi macroscòpica, ja que aquest no considera el temps emprat per arribar a la sincronització i encara menys la fase en la qual ho fan a causa de l'anomenat *symetry breaking*. Bàsicament, el trencament de simetria ens indica que dos o més oscil·ladors acoblats poden oscil·lar a la mateixa freqüència però amb una fase diferent, com per exemple, dos pènduls poden oscil·lar sincronitzats però en contrafase.

Finalment, el programa implementat per a realitzar l'anàlisi microscòpica, simula el procés de sincronització des del punt de vista del temps que necessita cada element per a realitzar un cicle (en el cas de les *Photinus carolinus*, cuques de llum, seria el temps que necessiten per a il·luminar-se i apagar-se completament). Definirem temps d'adquisició com el temps necessari per a realitzar aquest cicle. Naturalment, aquest va variant, i ho fa segons la influència del veïns. Cal considerar un detall important, i és que pel fet d'estar connectats els nodes s'influeixen, independentment de la distància (física) que els separi.

El sistema d'assignació del temps d'adquisició intenta ser el més similar possible al sistema d'assignació emprat en l'anàlisi macroscòpica. Així doncs, considerant

$$\varpi = 2 \cdot \pi \cdot f_{adq} = \frac{2 \cdot \pi}{t_{adq}} \quad 0,9 \leq \varpi \leq 1,1 \Rightarrow$$

$$\frac{2 \cdot \pi}{1,1} \leq t_{adq} \leq \frac{2 \cdot \pi}{0,9} \Rightarrow 5,71 \leq t_{adq} \leq 6,98$$

obtenim el rang de temps d'adquisició indicat. A fi de facilitar el càlcul numèric, treballarem amb el interval [571, 698].

Mitjançant la variable *temps d'adquisició* aconseguim resoldre el problema de l'assignació aleatòria de freqüències no contemplada en la primera versió del programa. A més a més el temps d'adquisició en el qual es sincronitzin els nodes podem reconvertir-lo en la freqüència de sincronització. Donat que els nodes únicament reben la influència dels veïns quan finalitzen el seu cicle, la influència entre els oscil·ladors acoblats és de tipus *pulse-coupled*.

Arribats a aquest punt, introduïrem el concepte d'estat del node. Dividirem uniformement el interval de treball entre el nombre d'estats desitjat, de manera que a cada estat li correspondrà un cert rang de temps d'adquisició.

Si per exemple repartíssim el interval total en 127 estats a cadascun d'ells li correspondria una única unitat (en realitat una centèsima) de temps d'adquisició. La influència dels veïns sobre un node determina l'estat futur d'aquest. Al seu temps l'estat futur determina el *temps d'adquisició futur*.

$$t_{adq_f_i} = 571 + 128 \cdot \frac{estat_f_i + \frac{1}{2}}{num_estats}$$

Afegim el valor $\frac{1}{2}$ a l'*estat_f_i* per treballar amb el valor mig del rang corresponent a cadascun dels estats.

La influència dels veïns ve determinada per uns comptadors que corresponen a cadascun dels estats, i s'incrementen segons l'estat de cada veí. En el cas d'igualtat de comptadors entre dos o més estats es determina l'estat futur aleatòriament entre aquests.

5.2 Implementació del programa

El programa consta de les següents parts:

- ❏ Inicialització del sistema
 - Calcular nodes
 - Inicialització i càrrega de la llista d'adjacència
 - Assignació aleatòria de l'estat i t_{adq_i}
 - Inicialització dels *comptadors_totals* i del temps total: $= t$

- ❏ Càlcul de la influència del veïns ($\alpha(\text{comptadors_parcials}, t_{adq_i}, A_{ij})$)
 - Càlcul del $t_{adq_{f_i}}$ futur.

- ❏ Al final de cada iteració recalculem ω_i i $\{m\}$ i guardem les dades en fitxers.

A cada iteració cadascun dels nodes es veu influenciat únicament una vegada pel veïns, ja que no actualitzem l'estat (i per tant el temps d'adquisició) fins que hagi transcorregut el *temps d'adquisició màxim* ($t_{adq_{max}}$), de manera que fins que el node no ha finalitzat un cicle a la freqüència actual no es veu influenciat de nou.

El càlcul de la influència del veïns es realitza quan el comptador *temps del cicle* (t_{cicle_i}) arriba a 0. Aquest comptador pren el valor del *temps d'adquisició* cada vegada que el node rep la influència.

En aquest cas el valor de la sincronització global m el calculem mitjançant els *comptadors_totals* dels estats futurs tots els nodes que componen la xarxa. De mode que en el moment que l'estat futur de tots els nodes coincideixi el sistema estarà sincronitzat, donat que el sistema complet romandrà en aquest estat.

5.3 Resultats obtinguts

Els resultats presentats corresponen a 10 execucions per a cada tipus de xarxa, a on es reparteix el rang de freqüències/temps en 16 estats ja que mostren amb més exactitud el comportament d'aquestes que assignant un rang inferior. Els resultats més rellevants són el temps total de sincronització, que ens dóna una idea del facilitat de la xarxa en sincronitzar-se, i la quantitat de nodes que formen els diferents clústers de freqüència.

Tal i com cabia esperar les topologies que abans arriben a sincronitzar-se són les aleatòries i les Barábasi-Albert. En aquesta simulació veiem com el clustering afecta molt significativament, com es pot observar en els resultats obtinguts per a les dos xarxes BA.

| BA1000 | $\langle d \rangle = 50,45$ | Estats [0,15] | BA_clus | $\langle d \rangle = 50,45$ | Estats [0,15] |
|-----------------|-----------------------------|---------------|--------------------|-----------------------------|---------------|
| t_sinc | $\langle t_sinc \rangle$ | m | t_sinc | $\langle t_sinc \rangle$ | m |
| 4865 | 4381,818182 | 1 | 5990 | 7663,545455 | 1 |
| 3546 | | 1 | 6230 | | 1 |
| 5830 | | 1 | 6501 | | 1 |
| 4081 | | 1 | 7579 | | 1 |
| 4305 | | 1 | 9105 | | 1 |
| 4137 | | 1 | 6996 | | 1 |
| 5319 | | 1 | 9584 | | 1 |
| 4249 | | 1 | 8745 | | 1 |
| 4305 | | 1 | 7683 | | 1 |
| 3235 | | 1 | 8099 | | 1 |
| 4328 | | 1 | 7787 | | 1 |
| Alea1000 | $\langle d \rangle = 50,45$ | Estats [0,15] | AleaReg1000 | $\langle d \rangle = 50,45$ | Estats [0,15] |
| t_sinc | $\langle t_sinc \rangle$ | m | t_sinc | $\langle t_sinc \rangle$ | m |
| 3642 | 4439,9 | 1 | 4137 | 4843,8 | 1 |
| 5247 | | 1 | 4664 | | 1 |
| 3435 | | 1 | 5830 | | 1 |
| 3594 | | 1 | 4137 | | 1 |
| 4728 | | 1 | 4081 | | 1 |
| 4249 | | 1 | 6996 | | 1 |
| 3930 | | 1 | 5319 | | 1 |
| 5990 | | 1 | 4664 | | 1 |
| 4664 | | 1 | 4249 | | 1 |
| 4920 | | 1 | 4361 | | 1 |

Fig. 5.1. Comparativa del temps que necessiten les xarxes per a arribar a la completa sincronització.

Un resultat interessant és que el nombre de iteracions (múltiples del temps d'adquisició màxim) a partir del qual les xarxes poden sincronitzar-se és sempre superior a la distància mitja de camí i s'aproxima al seu diàmetre, essent sempre lleugerament superior a aquest.

Un resultat que difereix de l'anàlisi amb el model de Kuramoto és que la xarxa amb topologia regular en *Anell* arriba a la total sincronització, tot i que necessita força temps per a fer-ho, com és lògic donada la gran distància mitja i l'alt clustering que presenta.

Amb les xarxes amb model Watts Strogatz es comencen a formar grups de nodes a diferents freqüències, únicament un o dos nodes (en algun cas cap) passen d'un grup a l'altre però retornen a l'estat anterior, per aquest motiu els clústers romandrien amb similar quantitat de nodes independentment del temps sense arribar mai a una completa sincronització.

| Reg1000 <d>=50,45 | | | | | WS0001 <d>=21,65 | | | | |
|-------------------|------------|------------------------|--------------|-------|------------------|-----------|-------------------------|--------------|-------|
| | | Estats [0,15] | | | | | Estats [0,15] | | |
| t_sinc | <t_sinc> | Clusters | Estat(nodes) | m | t_sinc | <t_sinc> | Clusters | Estat(nodes) | m |
| 42559 | 64032,3636 | | | 1 | 58883 | 70633,285 | | | 1 |
| 39061 | | | | 1 | 81620 | | | | 1 |
| 113102 | | | | 1 | 57717 | | | | 1 |
| 32065 | | | | 1 | 68211 | | | | 1 |
| 46057 | | | | 1 | 58883 | | | | 1 |
| 67628 | | | | 1 | 105572 | | | | 1 |
| 55968 | | | | 1 | 63547 | | | | 1 |
| 76956 | | | | 1 | ∞ | | 7(858) 8(142) | | 0,858 |
| 116017 | | | | 1 | ∞ | | 14(908) 15(92) | | 0,908 |
| 49053 | | | | 1 | ∞ | | 12(845) 13(155) | | 0,845 |
| 65890 | | | | 1 | ∞ | | 0(944) 1(56) | | 0,944 |
| WS001 <d>=9,83 | | | | | WS01 <d>=4,43 | | | | |
| | | Estats [0,15] | | | | | Estats [0,15] | | |
| t_sinc | <t_sinc> | Clusters | Estat(nodes) | m | t_sinc | <t_sinc> | Clusters | Estat(nodes) | m |
| 74041 | | | | 1 | 4865 | | | | 0,312 |
| 21472 | | | | 0,502 | 4170 | | | | 0,328 |
| 30135 | | | | 0,504 | 11120 | | | | 0,307 |
| 29885 | | | | 0,5 | 4170 | | | | 0,309 |
| ∞ | | 14(925) 13(15) 12(60) | | 0,925 | ∞ | | 0(278) 1(142) 2(297) | | 0,297 |
| ∞ | | 7(526) 8(201) 9(199) | | 0,526 | ∞ | | 7(308) 8(347) | | 0,347 |
| ∞ | | 15(549) 14(247) 12(90) | | 0,549 | ∞ | | 3(385) 4(178) 5(111) | | 0,385 |
| ∞ | | 5(611) 6(192) 7(167) | | 0,611 | ∞ | | 9(252) 10(165) 11(132) | | 0,252 |
| ∞ | | 0(578) 1(381) | | 0,578 | ∞ | | 15(370) 13(103) 12(185) | | 0,37 |
| ∞ | | 4(672) 5(256) 6(63) | | 0,672 | ∞ | | 0(356) 1(120) 2(225) | | 0,356 |

Fig. 5.2 Resultats del temps de sincronització (tant si es produeix completa com parcialment). També es mostren la quantitat de nodes que formen els clústers de freqüència.

Per al cas de la xarxa amb topologia regular en *Anell* el temps de sincronització és similar al producte del temps d'adquisició amb el diàmetre, tal i com passava amb les xarxes aleatòries i Barábasi-Albert.

Els resultats obtinguts per a les xarxes Watts-Strogatz són força sorprenents ja que a mesura que incrementem les connexions a llarga distància més difícil li és a la xarxa de sincronitzar-se, és a dir, les connexions a llarga distància provoquen discrepàncies a l'hora de seleccionar globalment un estat.

Aquest fet pot ser causat pel criteri de selecció de l'estat futur dels nodes, que consisteix a adquirir la freqüència/temps de que disposen la majoria dels veïns. Posat el cas que un node disposi de deu veïns, només que sis estiguin sincronitzats a un estat encara que quatre ho estessin també en un altre aquests darrers no afectarien al node en qüestió.

Així que una possible línia de investigació seria millorar el criteri de selecció ja que aquest nou model que hem creat pot ser molt útil i és fàcilment aplicable a qualsevol sistema d'oscil·ladors acoblats donat un rang d'assignació de freqüències naturals.

Capítol 6

Anàlisi mitjançant teoria de jocs

Per a comprendre plenament qualsevol fenomen com més punts de vista considerem més complerta i precisa serà la nostra visió sobre aquest. Així doncs, hem decidit incloure també un estudi sobre un cas de sincronització real i ben conegut, la sincronització de les *Photinus carolinus*, més conegudes com cuques de llum.



FIG 6.1. Milers de *Photinus carolinus* enlluernen síncronament durant hores en arribar la nit a la època de reproducció, al Juny, mentre volen.

FIG 6.2. *Photinus carolinus*.

Ian Stewart descriu un dels anàlisis matemàtics sobre aquest fenomen en l'article "*The Synchronicity of Firefly Flashing*" [Ref.12]. Va basar el seu anàlisi en les conclusions a que va arribar Charles S. Peskin, fisiòleg que al 1975 realitzà un estudi sobre la sincronització de les fibres musculars del cor. Peskin va inventar el model d'oscil·lador d'acumulació i descàrrega.

Per tant, cal considerar en aquest cas concret que la influència entre els diferents nodes (oscil·ladors d'acumulació i descàrrega) que componen la xarxa és de tipus *pulse-coupled* (impuls acoblat). Definim influència *pulse-coupled* com aquella que es produeix únicament quan es supera un llindar, així doncs, aplicat al cas que ens ocupa la influència es produirà quan la cuca de llum s'il·lumini, fet que es produeix quan aquesta arriba al final del taulell.

6.1 Game of Flash

El model proposat per Ian Stewart consisteix a tractar els oscil·ladors com si fossin comptadors o fitxes situats aleatòriament en un taulell quadrat de n caselles per cara. La posició del comptador ens indica la seva fase, de mode que quan finalitza un cicle la cuca de llum s'il·lumina i reseteja l'aportació química necessària per produir llum seguint els següents passos:

1. Cal moure cada comptador una casella per unitat de temps. Tot i la execució seqüencial es considera un moviment simultani.
2. Si un comptador arriba a la casella inicial s'encén i provoca que el comptador de cada veí avanci un nombre de quadrats equivalent al valor de l'aresta en la que es trobava situat. Un comptador no pot avançar més enllà de la casella inicial, enlloc de fer-ho s'il·lumina junt amb el veí (aquest fenomen és conegut com *absorció* i es produeix quan dos o més oscil·ladors amb diferents fases s'agrupen per continuar oscil·lant en fase).
3. Si un comptador arriba a la casella inicial com a conseqüència de la influència de un veí, cal tornar a aplicar el pas 2.
4. Retornar al pas 1.

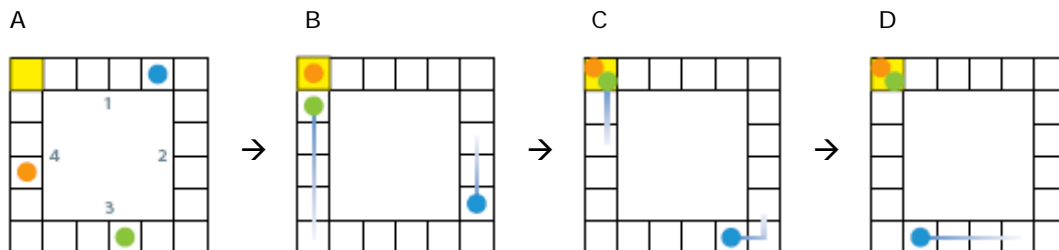


FIG. 6.3. Exemple de sincronització entre tres cuques de llum. Les figures representen instants significatius però no consecutius. Es disposen aleatòriament (A), mouen en direcció horària (Pas1), fins a arribar al quadre on s'il·lumina (B, Pas2), moment en que influeixen sobre els veïns (B,C). (D) És el resultat d'aplicar el Pas3.

6.2 Consideracions

- Si dos o més comptadors veïns acaben una iteració en una mateixa casella es consideraran sincronitzats (*absorció*) i passarem a moure'ls com una única unitat.
- Una unitat formada per diversos oscil·ladors influeix una única vegada sobre els seus veïns, ja que aquest model no contempla la força d'acoblament.

- Cal completar el Pas2 indicant que la influència dels veïns no es produeix si el comptador es troba en la casella inicial.
- A fi d'augmentar la precisió del model podem utilitzar un taulell amb forma poligonal regular, com per exemple, un octògon. D'aquesta manera en el cas d'un taulell de 40 caselles en el moment en que un veí s'il·lumina enlloc d'avançar [2,4,6,8]caselles, utilitzant un octògon obtindríem el doble de precisió en l'avanç.

6.3 Resultats obtinguts

Mitjançant el tipus de influència (*pulse-coupled*) utilitzat amb aquesta simulació qualsevol xarxa *All to all* se sincronitza pràcticament sempre, independentment de la quantitat de nodes que la formen i l'assignació inicial de fase (casella inicial).

A diferència de l'estudi d'Ian Stewart, únicament hem considerat la influència dels veïns per a veure el comportament de les diferents topologies analitzades en les anteriors simulacions.

Mitjançant aquest model, únicament arriben a sincronitzar-se la xarxa en *Anell* i les xarxes amb model Watts-Strogatz creades a partir d'aquesta.

Els resultats obtinguts indiquen que la influència *pulse-coupled* afavoreix la sincronització de les xarxes com més regular sigui la seva estructura. Així doncs, contra més connexions a llarga distància disposi la xarxa més dificultat hi haurà per arribar a la completa sincronització. Podem considerar aquestes connexions a llarga distància com perturbacions respecte la sincronització global, tal i com succeïa en l'anàlisi del capítol 5.

| | Anell | WS0001 | WS001 | WS01 |
|------------------------------|------------|------------|------------|------------|
| 20caselles 4arestes | | | | |
| <t_sinc> | 4743,42857 | 6964,14286 | 11219,1429 | 19425,2857 |
| log(<t_sinc>) | 3,67609 | 3,84287 | 4,04996 | 4,28837 |
| 64caselles 8arestes | | | | |
| <t_sinc> | 18835,5 | 34801,4 | 68055,8 | 127097,7 |
| log(<t_sinc>) | 4,27497715 | 4,54159672 | 4,83286514 | 5,10413769 |
| 360caselles 36arestes | | | | |
| <t_sinc> | 161516 | 343550,3 | 694134,8 | 1476858,7 |
| log(<t_sinc>) | 5,20821555 | 5,53599033 | 5,84144382 | 6,16933895 |

Fig. 6.4 Resultats obtinguts per a diferents mides i formes poligonals de taulell.

20caselles 4arestes

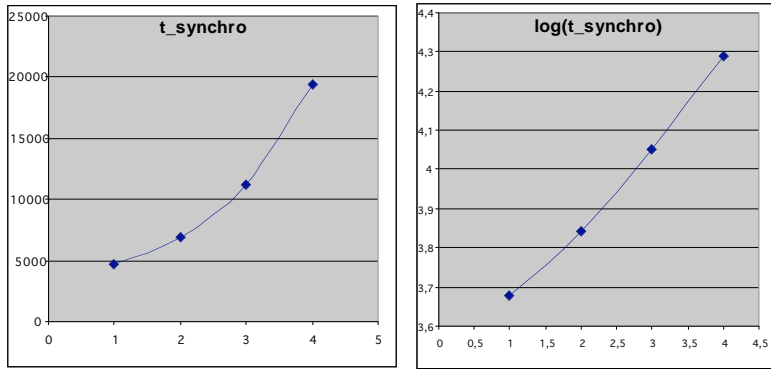
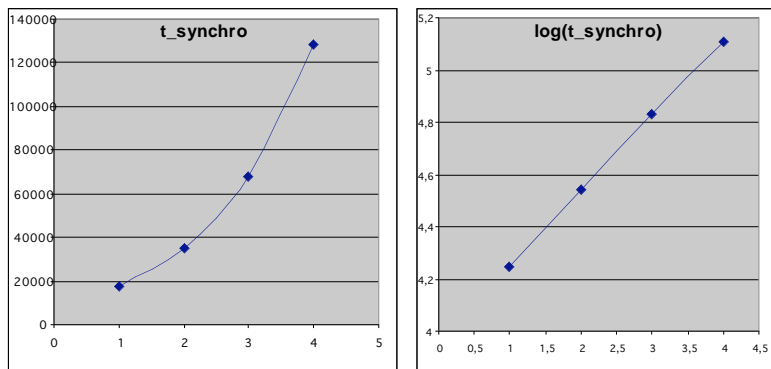
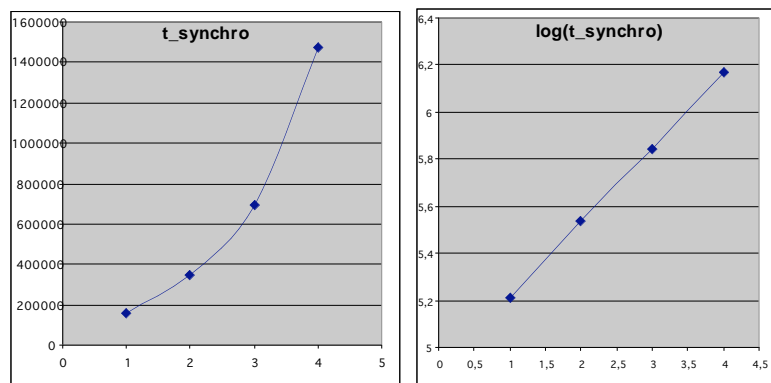


Fig. 6.5 Resultats obtinguts per a les xarxes que arriben a la completa sincronització. El primer dels punts correspon a la topologia *Anell* i els consecutius a les topologies *Watts-Strogatz* en ordre creixent de Probabilitat de reconexió.

64caselles 8arestes



360caselles 36arestes



Donat que els resultats obtinguts mostren un comportament lineal a escala logarítmica. Hem analitzat els diferents paràmetres que poden donar explicació a aquest resultat, posant el temps de sincronització en funció d'aquests. Hem observat que aplicant una escala logarítmica a la distància mitja de les diferents xarxes també n'obtenim una relació lineal (Fig. 6.7).

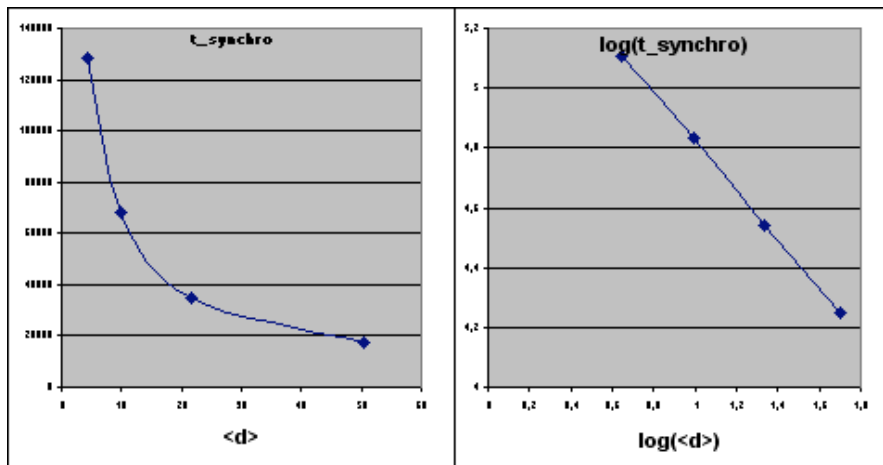
| | <d> | log<d> |
|----------------|-------|------------|
| anell10 | 50,45 | 1,70286117 |
| WS0001 | 21,65 | 1,3354579 |
| WS001 | 9,83 | 0,99255352 |
| WS01 | 4,43 | 0,64640373 |

$$y = t_synchro, x = \langle d \rangle \Rightarrow v = \log y, u = \log x$$

$$v = \alpha \cdot u + u_0 \Rightarrow t_synchro = \langle d \rangle^\alpha + 10^{u_0}$$

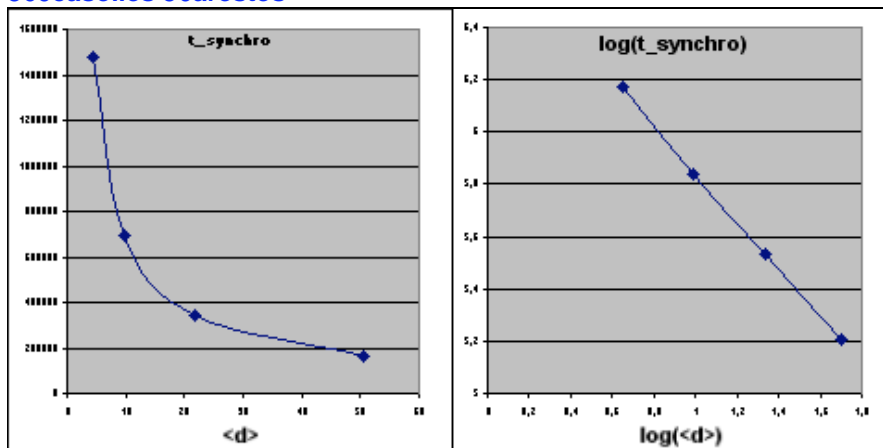
Fig. 6.5 (Esquerra) Valor de la distància mitja i del seu logaritme de les topologies indicades. (Dreta) Donada la linealitat que presenten en escala doble logarítmica podem trobar una relació directa entre <d> i t_synchro.

64caselles 8arestes



$$t_{\text{synchro}}|_{64\text{caselles},8\text{arestes}} = \langle d \rangle^{-0,785} + 10^{5,6115}$$

360caselles 36arestes



$$t_{\text{synchro}}|_{360\text{caselles},36\text{arestes}} = \langle d \rangle^{-0,9097} + 10^{6,7573}$$

Fig. 6.5 (Esquerra) Representació gràfica del temps de sincronització en funció de la distància mitja de camí. En aquest cas els punts s'ordenen segons la $\langle d \rangle$ així que els punts corresponen a les topologies *Watts-Strogatz* en ordre decreixent de Probabilitat de reconexió i el darrer a la topologia *Anell*. (Dreta) Representació gràfica del temps de sincronització en funció de la distància mitja de camí en escala doble logarítmica.

Capítol 7

Conclusions

Pel que fa a la comprensió del fenomen, hem mirat de comentar els diferents factors que determinen si es produirà o fins a quin punt ho farà. Els més representatius els presentem a continuació:

Hem de tenir en compte que la xarxa a analitzar és en realitat un sistema d'*oscil·ladors acoblats* i, per tant, s'exerceixen una *influència* entre ells. Així que un dels factors més importants a l'hora de simular el sistema és determinar el model que millor defineixi la interacció dels oscil·ladors. Habitualment la influència és continua, però existeixen altres models, com l'*acoblament per impuls (pulse-coupled)* simulat en les anàlisis microscòpiques, que ens ofereix un altre punt de vista sobre el fenomen.

Els dos factors principals que determinen la facilitat amb que un grup d'oscil·ladors pot sincronitzar-se són la *força d'acoblament*, que descriu com són de fortes aquestes interaccions, i l'*assignació de freqüència*. Mitjançant l'assignació de freqüència modelem les variacions de freqüències naturals.

Una propietat de l'acoblament que també cal tenir present és si es produeix o no *absorció*, és a dir, si una vegada dos nodes arriben a oscil·lar a la mateixa freqüència poden desincronitzar-se o no.

Respecte als resultats obtinguts en les simulacions, els paràmetres que més influeixen en el fenomen de la sincronització són la distància mitja de camí $\langle d \rangle$ i el coeficient de clustering C . Les connexions a llarga distància redueixen en gran mesura la $\langle d \rangle$, de manera que afavoreixen a que es produeixi la sincronització en el cas que la influència sigui continua. Aquest fet és lògic donat que la influència, en aplicar aquestes connexions, prové de la interacció amb els veïns immediats i els llunyans. D'aquesta manera és més fàcil que la totalitat dels nodes determinin un valor de freqüència de sincronització.

Un coeficient de clustering elevat provoca un efecte diferent. Inicialment, per a valors reduïts de força d'acoblament s'incrementa el percentatge de nodes sincronitzats. Aquest resultat pot dur-nos a un equívoc donat que el que en realitat succeeix no és que el clustering afavoreixi la sincronització global sinó que un conjunt d'oscil·ladors se sincronitza separatament a causa del gran nombre d'interconnexions que els uneixen. Conforme augmentem la força d'acoblament es formen diversos subgrups (clústers de freqüència) sincronitzats a freqüències diferents, de manera que s'inhibeix la transició global cap a una única freqüència.

Per al cas que la influència sigui de tipus *pulse-coupled* hem comprovat que en les xarxes Small-World les connexions a llarga distància dificulten la selecció global d'una freqüència de sincronització. En aquest cas la força d'acoblament no és continua, ja que únicament afecta al node quan finalitza el seu cicle. Una possible línia de investigació seria millorar la influència de la força d'acoblament ja que aquest nou model que hem creat pot ser molt útil i és fàcilment aplicable a qualsevol sistema d'oscil·ladors acoblats donat un rang d'assignació de freqüències naturals.

No existeix encara un model matemàtic capaç de simular amb precisió el fenomen de la sincronització. Per aquest motiu la millor manera de comprendre'l és mirar de integrar els màxims punts de vista per a tenir una visió conjunta més completa de com i perquè es produeix.

La sincronització de sistemes en moviment no és una propietat trivial, i la seva completa comprensió ens ajudaria, entre altres coses, a comprendre millor des del funcionament de diversos òrgans corporals o de la organització distribuïda del sistema nerviós fins a optimitzar el consum energètic de sistemes de màquines sense la necessitat de coordinació centralitzada.

Existeixen diversos resultats directament relacionats amb el impacte mediambiental. Com ja em comentat molts sistemes reals presenten una topologia Scale-Free. Un d'aquests sistemes són les cadenes tròfiques. Realitzant una analogia, podem considerar l'equilibri de la cadena tròfica l'estat en el qual el sistema està sincronitzat. De la mateixa manera hi hauria animals amb gran quantitat de connexions dins d'aquesta (*hubs*). Doncs, a causa de la eliminació d'alguns *hubs* tota la cadena tròfica estaria condemnada a la desaparició. En són un exemple la extinció de tortugues marines que aniria acompanyada d'una gran proliferació de meduses [Ref. 13], cosa que provocaria el desequilibri de l'ecosistema i, per tant, la extinció de una grandiosa quantitat d'espècies animals i vegetals prevista per d'aquí 50 anys si es manté el ritme d'extinció de les diferents espècies de tortugues marines.

Capítol 8

Referències

- [1] Pikovsky, Rosenblum, and Kurths, *Synchronization* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [2] Steven. H. Strogatz, Ian Stewart, *Coupled Oscillators and Biological Synchronization* (Scientific American, December 1993, pp. 102-109).
- [3] Steven H. Strogatz, *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators* (Physica D 143, pp. 1-20, 2000).
- [4] Yoshiki Kuramoto, *Chemical Oscillators, Waves, and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [5] David J. Low, *Following the crowd* (Nature 407, September 2000, pp. 465-466).
- [6] Steven H. Strogatz, *Exploring complex networks* (Nature 410, pp. 268-276, 2001).
- [7] Xiao F. Wang, Guanrong Chen, *Complex Networks: Small-World, Scale-Free and Beyond* (IEEE Circuits and Systems Magazine, pp. 6-20, 1st qt 2003).
- [8] Vera v. Noort, Berend Snel, Martijn A. Huynen, *The yeast coexpression network has a small-world, scale-free architecture and can be explained by a simple model* (European Molecular Biology Organization, 3 Vol.5, pp. 280-284, 2004).
- [9] Duncan J. Watts, *Small Worlds* (Princeton University Press, Princeton, 1999).
- [10] Duncan Watts, Steven H. Strogatz *Collective dynamics of Small World Networks* (Nature 393, pp. 440-442, 1998).
- [11] Albert L. Barabási, Réka Albert, *Emergence of scaling in random networks* (Science 286, pp. 509-512, 1999).
- [12] Takashi Ichinomiya, *Frequency Synchronization in Random Oscillator Network* (Meme Media Laboratory, Hokkaido University of Japan, 2003).
- [13] Ian Stewart, *The Synchronicity of Firefly Flashing* (Scientific American, pp. 104-106, March 1999).
- [14] Claudia E. Mills, *Jellyfish blooms: are populations increasing globally in response to changing ocean conditions?* (Hydrobiologia 451, pp. 55-68, 2001).

Capítol 9

Annex

L'annex d'aquest Projecte Final de Carrera consta dels programes implementats per a realitzar les diferents tipus d'anàlisis vistes en els Capítols 4, 5 i 6. Podreu trobar-los en el CD-Rom.

Agraïments

Desitjo que la lectura d'aquest TFC sigui de tant interès com ho ha estat per a mi la seva creació. Aprofito per agrair la col·laboració de Francesc Comellas, ja que ha posat a la meua disposició molts recursos tals com l'accés remot a la xarxa de servidors del departament de matemàtica aplicada i m'ha ajudat a encarar correctament el treball.