

Sumari

Sumari	1
A Piles de combustible	3
A.1 Marc històric.....	3
A.2 Què és una pila de combustible?	5
A.3 Classificació	8
A.3.1 Piles de combustible alcalines (AFC).....	9
A.3.2 Piles de combustible de membrana polimèrica (PEMFC).....	10
A.3.3 Piles de combustible de metanol directe (DMFC).....	13
A.3.4 Piles de combustible d'àcid fosfòric (PAFC).....	14
A.3.5 Piles de combustible de carbonat fos (MCFC).....	15
A.3.6 Piles de combustible d'òxid sòlid (SOFC)	16
A.4 Comparativa piles de combustible i sistemes tradicionals	17
A.5 Combustibles	18
B Modelització del sistema	20
B.1 Introducció.....	20
B.2 Subministrament d'oxigen.....	20
B.2.1 Compressor.....	20
B.2.2 Supply Manifold.....	24
B.2.3 Static air cooler.....	25
B.2.4 Static humidifier	26
B.3 Subministrament d'hidrogen	26
B.4 Stack voltage	26
B.4.1 Potencial de Nernst.....	27
B.4.2 Pèrdues per activació.....	27
B.4.3 Pèrdues òhmiques.....	28
B.4.4 Pèrdues per concentració.....	28
B.5 Càtode.....	29
B.6 Ànode	30
B.7 Hidratació de la membrana.....	31
B.8 Col·lector de sortida.....	33
B.9 Altres equacions	33
B.9.1 Càlcul flux màssic	33
B.9.2 Càlculs termodinàmics	34
B.10 Dades del model	35
C Teoria matemàtica	38
C.1 Normes	38
C.1.1 Normes de vectors	38
C.2 Valors i vectors propis.....	39
C.3 Descomposició en valors singulars	40
C.3.1 Valors singulars per matrius 2 x 2	41
C.3.2 SVD com a suma de matrius de rang 1	41
C.4 Introducció al control multivariable	42



C.5	Anàlisi de la resposta freqüencial multivariable	43
C.5.1	Direccions en sistemes multivariables	43
C.5.2	Descomposició en valors singulars	44
C.5.3	Valors singulars i comportament del sistema	47
C.6	MRI Morari resilience index	49
C.7	Número de condicionament CN i Matriu de guanys relatiu RGA	49
C.7.1	Número de condicionament	49
C.7.2	Matriu de guanys relatiu RGA	50
C.8	Escalat	52
D	Funcions programades en MATLAB	55
D.1	ModelEscalat	55
D.2	CalculRGA	55
D.3	CalculCN_MRI	56
D.4	CalculConstantsControladors	57
E	Valoració econòmica del Projecte	60
E.1	Cost del personal	60
E.2	Cost dels equips	61
E.3	Altres costos varis	63
E.4	Cost total	63



A Piles de combustible

A.1 Marc històric

L'any 1839, a Anglaterra, Sir William Grove va desenvolupar la primera pila de combustible. Els experiments que va realitzar en l'estudi del procés d'electròlisi, l'ús d'electricitat per separar l'aigua en hidrogen i oxigen, van donar lloc al primer dispositiu que posteriorment seria anomenat pila de combustible.

La teoria de Grove tractava que si era possible separar l'aigua en hidrogen i oxigen amb el subministrament d'energia, electricitat, el procés invers, generar electricitat a través de la reacció d'oxigen i hidrogen, hauria de ser possible. Per provar la seva teoria, va tancar dues làmines de platí en dues ampolles segellades, una contenint hidrogen i l'altra contenint oxigen. Quan les dues ampolles són submergides en àcid sulfúric diluït un corrent elèctric comença a circular entre els dos elèctrodes, formant-se aigua en les ampolles. Per augmentar el voltatge produït es van connectar diversos muntatges, iguals als anteriors, en sèrie, aconseguint el que va anomenar com a bateria de gas. L'any 1898 els químics Ludwig Mond i Charles Langer van crear el terme pila de combustible quan van intentar crear el primer dispositiu pràctic usant aire i el gas generat a les indústries de carbó.

Abans de poder arribar a la comercialització d'aquests sistemes s'havien de superar molts obstacles. A finals del segle XIX els motors de combustió interna emergien i la generalització de l'explotació dels combustibles fòssils van provocar que la tecnologia de les piles de combustible quedés relegada.

Al 1932, el Dr. Francis Thomas Bacon, a la universitat de Cambridge a Anglaterra, va donar un nou pas endavant en el desenvolupament de les piles de combustible. A partir del mecanisme dissenyat per Mond i Langer va dissenyar un nou implementant una sèrie de modificacions. Va reemplaçar els elèctrodes de platí amb gases de níquel, de cost inferior. A més, va substituir l'electròlit d'àcid sulfúric per l'alcalí hidròxid de potassi, una substància menys corrosiva pels elèctrodes. Aquest mecanisme que va anomenar cèl·lula Bacon (Bacon Cell), es tracta essencialment de la primera pila de combustible alcalina (AFC). 27 anys després, el mateix Dr. Bacon, va produir la primera pila de combustible operativa. Al 1959 va presentar un motor capaç de produir una potència de 5kW, que permetia alimentar una màquina de soldar.



Harry Karl Ihrig de la companyia Allis-Chalmers, productor d'equipament per granges als EUA, va presentar el primer vehicle impulsat per motor basat en la teoria de les piles de combustible, a l'any 1959. Combinant 1008 cel·les va formar un stack que era capaç de generar 15kW i alimentar un tractor de 20CV.

Perspectiva actual

L'interès per les piles de combustible es va renovar a finals de la dècada dels 50 principi de la dècada dels 60. L'agència espacial nord-americana NASA, necessitava un sistema per alimentar una sèrie de missions espacials tripulades. Entre les possibles solucions que van descartar es trobaven les bateries (provocava problemes de pes), l'energia solar (un sistema massa cara per l'època) i l'energia nuclear (considerada de massa risc). Finalment es van adoptar com a solució les piles de combustible. La NASA va impulsar fortament el desenvolupament d'aquests sistemes pels seus projectes. Aquesta investigació va portar la realització de la primera pila de combustible de tipus PEM.

Willard Thomas Grubb, treballador de General Electric, l'any 1955 va modificar el disseny inicial, va fer servir una membrana de poliestiré sulfatat com a electròlit. Tres anys després Leonard Niedrach va idear la manera de dipositar platí sobre la membrana. Aquesta pila es va conèixer com la pila de combustible Grubb-Niedrach. La NASA i General Electric van desenvolupar aquesta tecnologia conjuntament posant-la en servei en el projecte espacial Gemini. Aquest va ser el primer ús comercial de les piles de combustible.

A principis de la dècada del 60, el productor de motors per aviació Pratt & Whitney va renovar el disseny original de Bacon, la finalitat era alleugerir el pes i allargar la seva vida (comparant-la amb la dissenyada per la NASA i General Electric). El resultat va ser que aquestes piles de combustible fossin escollides per les aeronaus Apollo. Posteriorment, aquestes piles de combustible alcalines es van convertir en les utilitzades majoritàriament per les posteriors missions espacials tripulades dels EUA, incloent les Space Shuttle.

Durant la dècada del 70, la tecnologia de les piles de combustible es va desenvolupar encaminant-la per sistemes a la terra. Les crisis del petroli del 73 i el 79 van impulsar els esforços en la investigació sobre les piles de combustible, amb la finalitat de ser menys dependents del petroli.



Un gran nombre de companyies i organitzacions governamentals, durant les dècades dels 70 i 80, començaren investigacions amb la intenció de superar els obstacles que impedièn la comercialització generalitzada de les piles de combustible. Es van desenvolupar els materials necessaris, es van decidir les fonts de combustible òptimes i la reducció dels costos d'aquesta tecnologia.

La tecnologia de piles de combustible va començar a ser testada per serveis i per constructors del sector automobilístic durant la dècada dels 80. L'any 1993 la companyia canadenca Ballard va presentar el primer vehicle impulsat per piles de combustible comercialitzable.

En els últims anys les piles de combustible han estat instal·lades en hospitals i escoles. La majoria de constructors del mercat automobilístic tenen prototipus de vehicles de piles de combustible. Ciutats europees i nord-americanes han realitzat proves en l'ús d'autobusos motoritzats amb piles de combustible per la implantació d'aquest sistema en un futur pròxim. El progressiu increment en el consum energètic i els problemes medi ambientals conseqüents han comportat el desenvolupament d'aquesta tecnologia en les últimes dècades. Igualment els sistemes convencionals de generació d'energia es troben propers al seu límit termodinàmic. Aquestes conclusions porten a la necessitat de solucions més eficients i respectuoses amb el medi.

A.2 Què és una pila de combustible?

Una pila de combustible és un mecanisme que transforma l'energia química d'un combustible (en el cas de piles de combustible poden ser hidrogen, gas natural, metanol, etc.) i un oxidant (aire o oxigen) en electricitat. El comportament d'aquest sistema es pot assimilar a una bateria, però a diferència d'aquestes no s'esgoten i no requereixen recarregar-se. Les piles de combustible produeixen energia i calor sempre i quan es mantingui el subministrament de combustible i oxidant.

Tant les piles de combustible com les bateries estan formades per un ànode carregat positivament, un càtode carregat negativament i un material conductor iònic anomenat electròlit. Ambdós sistemes són mecanismes electroquímics. Les piles de combustible es classifiquen segons el tipus d'electròlit que es faci servir. Els sistemes electroquímics generen electricitat sense la combustió del combustible i l'oxidant, a diferència dels sistemes tradicionals de generació d'electricitat.



L'electricitat es genera pel pas de l'oxigen per l'elèctrode de l'oxidant (càtode) i pel pas de l'hidrogen per l'elèctrode del combustible (ànode), ànode i càtode es troben separats per una membrana conductora de ions. En el procés electroquímic es generen, a part d'electricitat, aigua i calor. Les molècules del combustible i de l'oxidant es combinen sense la necessitat de combustió i no es veuen afectades per la ineficiència ni la producció de pol·lució dels sistemes de combustió tradicionals.

L'hidrogen no és una energia primària com el carbó o el petroli, sinó que és un “portador” d'energia. Per la seva obtenció es requereix de sistemes energètics basats en les energies primàries convencionals, cosa que comporta perdre la seva consideració d'energia no contaminant. Les PC no produeixen emissions contaminants per si mateixes però és en el procés d'obtenció de l'hidrogen des d'un hidrocarbur on es produeixen emissions d'efecte hivernacle. Aquestes emissions són significativament més baixes que les produïdes per sistemes de combustió interna. Per resoldre aquest problema, sistemes basats en energies renovables tindran una més gran importància en la producció d'hidrogen, permetent que el cicle de producció i consum de l'hidrogen com a combustible estigui lliure de l'emissió de partícules de CO₂ i sigui independent de sistemes basats en el petroli o el carbó. La possibilitat d'extreure l'hidrogen del gas natural redueix la dependència existent avui dia del petroli.

Característiques bàsiques

Algunes de les característiques generals ja s'han exposat, però per entendre les diferències entre els tipus de piles de combustible és necessari el coneixement de les següents:

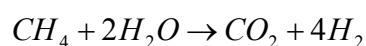
- *Portador de càrrega*: el portador de càrrega és l'ió que travessa l'electròlit. El portador de càrrega varia segons el tipus de pila de combustible, però en molts d'aquests es tracta de l'ió hidrogen (H^+).
- *Enverinament per contaminació*: les piles de combustible poden experimentar una degradació en el seu comportament, efecte conegut com enverinament, per l'acció de diferents tipus de molècules. Segons el tipus de pila de combustible, diferències en l'electròlit, temperatura de treball, catalitzador i altres factors, les molècules poden afectar de maneres diferents. El verí més important per tots els tipus de piles de combustible són el compostos amb contingut de sofre com l'àcid sulfhídric (H_2S). Els compostos amb sulfurs estan presents en tots els combustibles fòssils, i després



dels processats normals resten petites quantitats que han de ser eliminades abans d'entrar en la pila de combustible.

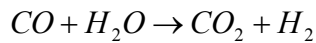
- *Combustible:* hidrogen és el combustible escollit avui en dia per totes les piles de combustible. Gasos com el monòxid de carboni (CO) o el metà (CH_4) tenen un comportament diferent segons el tipus de pila de combustible. Per exemple, el monòxid de carboni és un verí per les piles de combustible que operin a baixes temperatures com poden ser les piles de membrana polimèrica (PEMFC - Proton Exchange Membrane Fuel Cell). Si la temperatura de treball és elevada com a les piles de tipus òxid sòlid (SOFC - Solid Oxide Fuel Cell) el monòxid de carboni pot ser emprat com a combustible. Cada tipus de pila de combustible amb el seu electròlit i catalitzador específic pot acceptar diferents tipus de gasos com a combustibles sense que comportin un empitjorament en el seu funcionament. Els sistemes de subministrament s'han d'adequar al tipus de combustible subministrat i al tipus de pila de combustible.
- *Factors sobre el comportament:* el comportament de la pila de combustible depèn de nombrosos factors. Entre aquests factors es poden citar la composició de l'electròlit, la geometria de la pila de combustible (en particular l'àrea de l'ànode i el càtode), la temperatura de treball i la pressió dels gasos.
- *Tractament del combustible:* les piles de combustible que treballen a baixes temperatures operen amb hidrogen com a combustible. Per obtenir l'hidrogen, avui en dia, s'extreu de combustibles fòssils.

La transformació del combustible fòssil en hidrogen és anomenada reformació (*reforming*). Amb el procés reformació de vapor (steam reforming) el vapor d'aigua és mesclat amb el combustible a temperatures de $760^{\circ}C$. La reacció química que es produeix en aquest procés pel gas natural com a combustible, format principalment per metà (CH_4), és:



En piles de combustible de temperatura de treball elevada (MCFC i SOFC), el gas CO actua com a combustible. En aquest cas la reacció química que te lloc és:





El tractament del combustible es pot realitzar en instal·lacions de diferent escala. El tractament a gran escala es realitza en instal·lacions com plantes químiques. L'hidrogen que se'n pot obtenir és de gran puresa, en forma líquida o com a gas a alta pressió. D'aquí és distribuït als consumidors.

El tractament a mitjana escala pot ser realitzat en gasolineres. Combustibles com la gasolina o el dièsel són refinats i distribuïts a les gasolineres amb la infraestructura existent. L'equipament local transforma el combustible fòssil en una mescla formada principalment per hidrogen, però que pot incloure altres components com CO_2 i N_2 . La puresa d'aquest hidrogen depèn de les tècniques existents i el desenvolupament d'aquestes per separar l'hidrogen d'altres gasos de forma viable econòmicament. L'hidrogen és distribuït com a gas a alta pressió.

Si el procés es desenvolupa a petita escala es realitza just abans d'introduir el combustible a la pila de combustible. Un vehicle impulsat per piles de combustible que inclou un tanc de gasolina pot fer servir la infraestructura actual de distribució del combustible, i un sistema de tractament del combustible intern del vehicle es pot encarregar de transformar la gasolina en un flux ric en hidrogen, que alimenta la pila de combustible directament.

A llarg termini gairebé tot l'hidrogen emprat per alimentar les piles de combustible serà generat a partir d'energies renovables, com l'energia eòlica o la solar. L'energia elèctrica generada en una estació eòlica pot ser usada per separar aigua en hidrogen i oxigen. El procés d'electròlisi produiria hidrogen pur i oxigen pur. Posteriorment l'hidrogen pot ser distribuït a tots els consumidors finals.

A.3 Classificació

Les PC es classifiquen segons el tipus d'electròlit emprat, el qual determina la temperatura de treball, l'eficiència assolible i, conseqüentment, les seves possibles aplicacions.



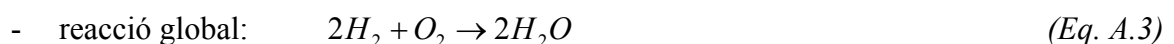
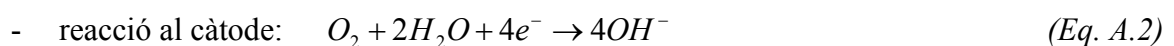
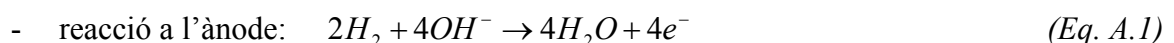
Tecnologia	Electròlit	T (°C)	Eficiència (%)	Aplicacions
Alcalina AFC	Hidròxid de potassi	70-100	45-60	Militar, espai, transport
Polímers PEM	Polímer orgànic sòlid	60-100	45-60	Transport, portàtil, estació de baixa potència
Metanol directe DMFC	Polímer	50-100	30-40	Portàtil
Àcid fosfòric PAFC	Àcid fosfòric	175-220	40-50	Transport pesat, ús elèctric
Carbonats MCFC	Carbonat de sodi, liti i/o potassi	600-1000	45-65	Estació d'alta potència
Òxids sòlids SOFC	Sòlid òxid de Zirconia amb Itria	800-1000	50-65	Transport, estació d'alta potència

Taula A.1 Classificació de piles de combustible

A.3.1 Piles de combustible alcalines (AFC)

Aquest tipus de piles són unes de les més desenvolupades, han estat fetes servir des dels anys 60 per la NASA en els programes Apollo i Space Shuttle. Són de les més eficients generant energia, amb una eficiència propera al 70%.

Les piles de combustible alcalines usen un electròlit en solució aquosa d'hidròxid de potassi (KOH) mantingut en una matriu porosa estabilitzada. La concentració de KOH pot variar amb la temperatura de treball de la pila, que varia entre els 65°C i els 220°C. El portador de càrrega per una pila AFC és l'ió hidroxil (OH^-) que es trasllada del càtode fins l'ànode on finalment reacciona amb l'hidrogen per generar aigua i electrons. L'aigua que es forma a l'ànode torna al càtode per regenerar els ions hidroxils. Les reaccions químiques que tenen lloc en una pila de combustible alcalina (AFC) es mostren a continuació, els productes de les reaccions són aigua i calor:



Una de les característiques de les AFC és que són molt sensibles a la presència de CO_2 a l'aire o al combustible. El CO_2 reacciona amb l'electròlit enverinant-lo ràpidament i degradant el funcionament de la pila de combustible. Per tant, aquest tipus de piles estan limitades a l'ús en ambients tancats, com l'espai o vehicles submarins, i ha de funcionar amb hidrogen pur i oxigen. Molècules com CO_2 , H_2O i CH_4 , que són inofensives o serveixen com a combustible per altres tipus de piles de combustible, són verins per una pila de combustible tipus AFC.

Les piles de combustible AFC són les més barates de fabricar. Això és degut a que el catalitzador requerit en els elèctrodes pot ser de diversos materials que són relativament més econòmics que els fets servir per altres tipus de piles de combustible.

Per aplicacions de transport la seva sensibilitat al enverinament, que provoca la necessitat d'un subministrament d'hidrogen i oxigen purs i nets, és un obstacle avui en dia pel seu ús. En canvi, les temperatures de treball baixes i la seva alta eficiència (en comparació amb els altres tipus de piles de combustible) són característiques que possibiliten una posada en marxa ràpida i un consum eficient de combustible, respectivament.

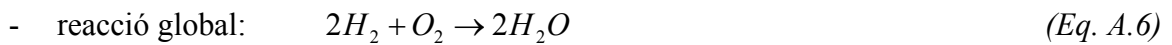
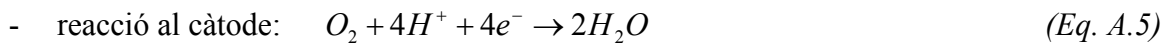
A.3.2 Piles de combustible de membrana polimèrica (PEMFC)

Les piles PEMFC són considerades com la millor opció per alimentar un vehicle substituint els tradicionals motors de combustió interna, gasolina i dièsel. Van ser usades per primera vegada en el programa Gemini de la NASA a la dècada dels 60.

Com a electròlit es fa servir una membrana polimèrica sòlida (un fi film plàstic). Aquest polímer és permeable als protons quan es troba saturada d'aigua, però evita la circulació d'electrons.

El combustible per aquest tipus de piles és l'hidrogen i el portador de càrrega és l'ió d'hidrogen (protó). A l'ànode, les molècules d'hidrogen són separades en protons d'hidrogen i electrons. Els ions d'hidrogen travessen l'electròlit fins el càtode mentre que els electrons circulen per el circuit extern i es produeix energia elèctrica. L'oxigen, normalment en forma d'aire, és subministrat al càtode i es combina amb els electrons i els ions d'hidrogen per formar aigua. Les reaccions que tenen lloc són les següents:





La proporció d'energia generada per una pila PEMFC segons el seu volum i pes és superior comparant-la amb altres tipus de piles de combustible. Aquesta característica d'alta densitat energètica permet que tinguin un disseny compacte i de baix pes. Per altra banda, la seva baixa temperatura d'operació, inferior als 100°C, permet una ràpida posada en marxa. Aquestes són algunes de les característiques que fan que les PEMFC siguin les principals alternatives per aplicacions automobilístiques.

La composició de l'electròlit com a polímer sòlid i no líquid permet que el segellament dels gasos a ànode i càtode sigui més simple, i per tant menys costós econòmicament. L'electròlit sòlid és més immune als problemes de corrosió i a les dificultats d'orientació, provocant una vida més llarga de la pila i del stack.

Treballar a temperatures properes o inferiors als 100°C no permeten operacions de cogeneració. La necessitat de tenir l'electròlit saturat d'aigua per operar de forma òptima requereix d'un control acurat de la humitat dels fluxos a càtode i ànode.

Elèctrodes:

Degut a la baixa temperatura de treball les reaccions es produeixen lentament, per tant és necessari la presència d'un catalitzador als elèctrodes per augmentar la velocitat de les reaccions. Aquest catalitzador per les piles PEM és el platí. Les característiques dels elèctrodes són:

- conductors elèctrics
- màxima superfície de platí disponible a les cares contigües amb la membrana
- permetre l'accés dels gasos a la superfície del catalitzador
- químicament resistent als compostos amb els quals tenen contacte



Electròlits:

L'electròlit està format per una membrana polimèrica. L'estructura d'aquesta membrana és un polímer orgànic, en aquest cas el Nafion 117 de la casa DuPont, anomenat àcid poliperfluorsulfònic. Les principals característiques d'aquests polímers són una alta estabilitat química i tèrmica enfront a bases fortes.

L'electròlit està format per ions positius i ions negatius. Aquest s'hidrata absorbint aigua i permet el lliure moviment dels protons. Això comporta la necessitat que els gasos d'entrada arribin amb un cert grau d'humitat, però un excés d'aquesta provocaria el mal funcionament de la membrana.

En el procés de les reaccions quan l'àtom allibera un electró la membrana impedeix que aquest pugui moure's a través d'ella, per tant l'únic moviment possible és per un cable extern per completar el circuit. En canvi, el flux d'ions d'hidrogen té un moviment lliure a través de la membrana, de l'ànode al càtode.

Al treballar amb aigua líquida és necessari que la pila de combustible treballi a una temperatura inferior a la d'ebullició, que dependrà de la pressió de treball. El contingut d'aigua a la cel·la s'ha de mantenir controlat per poder mantenir la conductivitat iònica.

Una elevada temperatura, una baixa pressió, una baixa humidificació i un gran flux de reactius provoquen un dèficit d'aigua, els casos contraris provoquen un excés.

La membrana ha de complir les següents prestacions:

- electròlit conductor de ions positius únicament
- aïllant d'electrons
- separador dels gasos oxidant i reductor
- hidratada durant el funcionament

Catalitzador:

Per augmentar la velocitat de les reaccions es fa necessari l'ús d'un catalitzador, això és degut a la temperatura de treball d'aquest tipus de piles. En piles PEM es fa servir el platí per aquesta finalitat, gràcies a la seva capacitat per enllaçar les formes intermitjants d'hidrogen i oxigen.



El platí presenta els inconvenients del seu alt cost i la seva sensibilitat a les impureses als gasos.

Influència de la temperatura:

Per cada grau que augmenti la temperatura és possible augmentar entre 1,1 i 2,5 mV el voltatge de sortida. Al augmentar la temperatura disminueix la resistència òhmica de l'electròlit. Però també comporta la reducció en el transport de massa a elevada temperatura.

En cap cas la temperatura ha de superar el punt d'ebullició de l'aigua, degut a que la pila deixaria de funcionar..

Influència de la pressió:

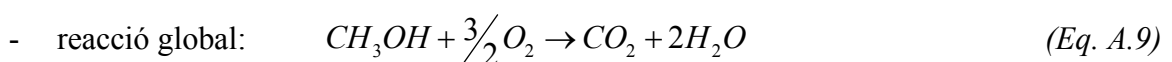
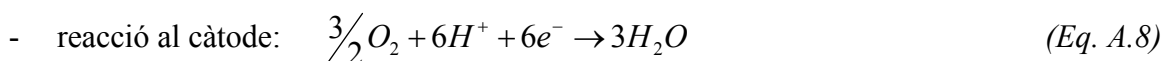
Aquestes piles permeten un rang de pressions entre els 0,1 y 10 MPa, però es sol operar entorn els 0,2 MPa. En augmentar la pressió s'aconsegueix augmentar el rendiment de la cel·la, encara que aquest augment també comporta un increment en l'energia necessària per comprimir els gasos.

A.3.3 Piles de combustible de metanol directe (DMFC)

La tecnologia en la qual estan basades les piles de combustible de metanol directe encara està en les primeres etapes del seu desenvolupament, però s'ha demostrat la seva validesa per alimentar telèfons mòbils i ordinadors portàtils.

L'electròlit és un polímer i el portador de càrrega és l'ió d'hidrogen al igual que les piles PEMFC. No obstant, el metanol (CH_3OH) en estat líquid és oxidat en presència d'aigua a l'ànode generant CO_2 , ions d'hidrogen i electrons que circulen pel circuit extern. Els ions d'hidrogen circulen a través de l'electròlit i reaccionen amb l'oxigen, procedent de l'aire, i els electrons, que arriben pel circuit extern, per formar aigua a l'ànode.

Les reaccions que tenen lloc són:



Aquestes piles van ser inicialment desenvolupades a principis de la dècada dels 90, però no van ser acceptades per la seva baixa eficiència i densitat d'energia, a més d'altres problemes. Millores en els catalitzadors i altres avenços han permès incrementar la densitat d'energia i la seva eficiència, poden arribar al 40%.

La temperatura de treball d'aquestes piles de combustible es situa entre els 50-120°C. Aquesta baixa temperatura d'operació i la no necessitat d'un tractament previ del combustible, fan que les DMFC siguin una excel·lent opció per aplicacions de petit o mig tamany, des de telèfons mòbils a plantes d'automoció.

Com a contrapartida, l'oxidació del metanol a baixes temperatures a ions d'hidrogen i diòxid de carboni requereix un catalitzador més actiu, el que normalment comporta una més gran quantitat de platí en el catalitzador, el que augmenta el cost considerablement. Igualment, es considera que l'ús d'un combustible líquid i la no necessitat de reformar el combustible tindran més importància que no l'augment del cost.

Un dels principals problemes que marca el desenvolupament de les piles DMFC és la toxicitat del metanol. Aquest fet a provocat que diverses companyies hagin començat a investigar la creació de les piles de combustible d'etanol directe (DEFC). De moment les prestacions que se'n poden obtenir de les piles DEFC són aproximadament les de les piles DMFC, però s'espera que aquesta diferència es pugui reduir amb futurs avenços tecnològics.

A.3.4 Piles de combustible d'àcid fosfòric (PAFC)

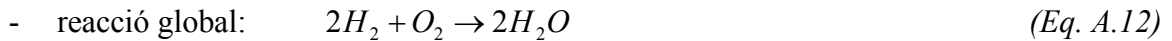
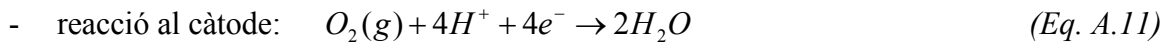
Aquest tipus de piles van ser les primeres en ser comercialitzades. Desenvolupades a la meitat de la dècada dels seixanta i testades des de la dècada dels setanta, han experimentat una important millora en estabilitat, comportament i cost. Aquestes característiques han convertit les PAFC en candidates per les primeres aplicacions estàtiques.

L'electròlit emprat és l'àcid fosfòric (H_3PO_4), que pot apropar-se a una concentració del 100%. La conductivitat iònica de l'àcid fosfòric és baixa a baixes temperatures, per tant el rang de temperatures d'operació és 150-220°C.

El portador de càrrega és l'ió d'hidrogen (H^+). L'hidrogen introduït per l'ànode és separat en protons i electrons. Els protons són transportats a través de l'electròlit i combinats amb



L'oxigen al càtode per formar aigua. Els electrons circulen per un circuit extern. Els productes de les reaccions són aigua i calor, aquestes reaccions són:



L'eficiència en la generació d'electricitat de les piles PAFC supera el 40%. En aplicacions de cogeneració l'eficiència global es pot situar en el 85%. A la temperatura de treball de les piles PAFC la calor produïda pot escalfar aigua calenta o generar vapor a pressió atmosfèrica.

La gran eficiència treballant en un procés de cogeneració és un dels grans avantatges d'aquestes piles. La presència de CO_2 on afecta l'electròlit o el funcionament de la pila, el que comporta que pugui treballar fàcilment amb combustibles fòssils reformats. La seva senzillesa en la construcció, la baixa volatilitat de l'electròlit i la seva estabilitat a llarg termini són altres avantatges de les PAFC.

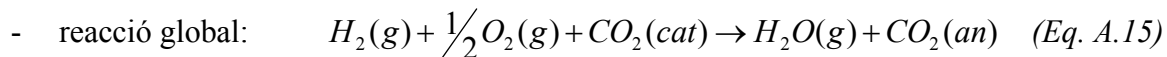
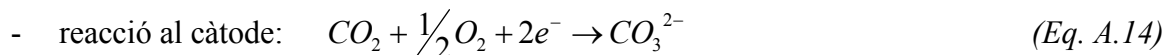
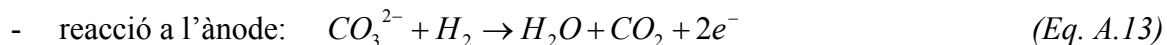
A.3.5 Piles de combustible de carbonat fos (MCFC)

Aquest tipus de piles de combustible es classifiquen entre les que operen en un rang de temperatures elevat. Aquesta temperatura de treball elevada permet el subministrament directe de gas natural, sense la necessitat de processar-lo amb anterioritat, a més s'han fet servir altres combustibles o gasos extrets de processos industrials amb baix poder calorífic.

El funcionament de les piles de MCFC es una mica diferent del d'altres tipus. L'electròlit està compost per una mescla fosa de diferents sals carbonatades. Dues mescles són les principalment usades: carbonat de liti i carbonat de potassi o carbonat de liti i carbonat de sodi. Per fondre les sals carbonatades i aconseguir una més lta mobilitat dels ions a través de la membrana, les piles MCFC operen a altes temperatures, uns 650°C.

Quan la temperatura arriba a prop dels 650°C les sals es fonen i es converteix conductor de ions carbonats (CO_3^{2-}). Aquests ions es mouen des del càtode a l'ànode on es combinen amb hidrogen per donar aigua, diòxid de carboni i electrons. Els electrons són conduïts per un circuit extern al càtode, generant electricitat i calor.





L'elevada temperatura de treball permet que el procés de tractament del combustible (“reforming”) ocorri de forma interna a la pila sense la necessitat d'un sistema extern. Aquesta és la principal avantatge de les piles MCFC sobre les piles que operen a baixes temperatures. Altres avantatges d'aquest tipus de piles són la possibilitat de fer servir materials estàndard per la seva construcció, com fulles d'acer inoxidable, i l'ús de catalitzadors basats en níquel en els elèctrodes. La calor produïda per una pila MCFC pot servir per generar vapor a alta pressió útil per moltes aplicacions industrials i comercials. Per altra banda, treballar a altes temperatures comporta una sèrie de desavantatges. Operar a altes temperatures requereix un tems significatiu per arribar a les condicions de treball necessàries i respon lentament a canvis en la demanda de potència.

Totes aquestes característiques fan que les piles MCFC siguin apropiades per aplicacions de consum constant. L'electròlit carbonat pot produir problemes de corrosió a l'elèctrode. El consum de CO_2 a l'ànode i el seu transport al càtode introdueix la necessitat de controlar el seu flux per aconseguir un comportament òptim, fet que no està present en els altres tipus de piles de combustible.

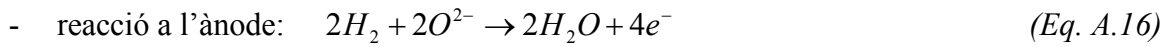
A.3.6 Piles de combustible d'òxid sòlid (SOFC)

Les piles SOFC són actualment les piles en desenvolupament que treballen a una temperatura més elevada, permetent un rang de temperatures entre 600-1000°C. Per poder treballar a tan altes temperatures l'electròlit és un fi material ceràmic sòlid (òxid sòlid), conductor dels ions d'oxigen (O^{2-}). Les SOFC es troben en desenvolupament des de finals de la dècada dels 50 i tenen dues configuracions que han estat investigades, planes i tubulars.

Com a electròlit sòlid és impermeable al cruament de gasos d'un elèctrode a un altre. El portador de càrrega és l'ió d'oxigen (O^{2-}). Al càtode, les molècules d'oxigen de l'aire són separades en ions d'oxigen amb l'addició de quatre electrons. Els ions d'oxigen són conduïts



a través de l'electròlit i es combinen amb hidrogen a l'ànode, deixant anar quatre electrons. Els electrons circulen a través d'un circuit extern produint energia elèctrica i calor.



L'eficiència en la generació elèctrica és la més elevada entre el diferents tipus de piles de combustible, situant-se en un 60%. La elevada temperatura de treball permet aplicacions de cogeneració per crear vapor a altes pressions vàlid per moltes aplicacions. La combinació d'una pila de combustible d'alta temperatura amb una turbina en una pila de combustible híbrida permet aconseguir una eficiència global en la generació d'electricitat del 70%.

Les piles SOFC, al igual que les MCFC, degut a la seva alta temperatura de treball requereixen d'un temps significatiu per arribar a les condicions de treball i per respondre a les variacions en la demanda d'electricitat. Per tant, aquests tipus de piles de combustible estan considerades com las candidates per aplicacions d'alta potència amb un consum constant incloent indústries i estacions generadores d'electricitat de llarga escala.

Les altes temperatures de treball permeten l'ús de combustibles poc purs, com els obtinguts en els processos de gasificació del carbó o gasos de processos industrials i altres fonts. Com a contrapartida, aquestes altes temperatures requereixen de materials més específics per la seva construcció i, per tant, més costos.

A.4 Comparativa piles de combustible i sistemes tradicionals

En els sistemes tradicionals de producció d'energia elèctrica, el combustible i l'aire són cremats, generant gasos a altes temperatures. A les plantes de carbó, el calor dels gasos és transferit a líquid a alta pressió que és portat a l'ebullició. En el cas de plantes de gasolina, dièsel o turbines de gas, el gas calent es troba a alta pressió. El vapor, o gas calent, a alta pressió és expansionat per un sistema mecànic i finalment acciona un generador elèctric.

En una pila de combustible ocorren les mateixes reaccions químiques bàsiques, però l'electricitat es genera directament al tractar-se d'un sistema electroquímic, no existeix cap combustió ni la circulació de gasos a altes temperatures. Aquesta conversió directa d'energia



química a energia elèctrica és més eficient i molt menys contaminant que els sistemes tradicionals basats en la combustió.

La millora en la eficiència que comporten les piles de combustible, gràcies a la conversió directa abans esmentada, permet la generació d'una quantitat més elevada d'electricitat amb la mateixa quantitat de combustible.

La no combustió del combustible en el procés evita l'emissió de contaminants. Alguns dels contaminants que són reduïts són els òxids de nitrogen i hidrocarburs no cremats, causants del efecte hivernacle, i monòxid de carbó, gas verinós.

L'eficiència de les piles de combustible no es troba limitada pel cicle de Carnot, limitacions que sí presenten els altres sistemes actuals. Aquesta millora en la eficiència fa que les piles de combustible siguin adoptades com a solució per aplicacions de vehicles, producció d'energia domèstica i/o descentralitzada i altres com aparells electrònics portàtils. Les piles de combustible PEM apareixen dins del marc tecnològic actual com la principal alternativa als sistemes de combustió interna en l'automoció. Actualment diverses companyies del sector ja disposen del seu model de vehicle basat en piles de combustible.

A.5 Combustibles

El combustible més utilitzat fins el moment en el desenvolupament de les PC és l'hidrogen. Aquest element presenta una elevada densitat d'energia (PCI de 120 MJ/kg) i al tractar-se d'un gas a temperatura ambient pot ser comprimit fàcilment augmentant la seva pressió. Aquest fet es especialment útil en les aplicacions per vehicles. Un altra avantatge per utilitzar hidrogen pur és que, les emissions produïdes són nul·les.

L'obtenció d'hidrogen resulta molt diversa:

- Processos químics, com la síntesis de l'amoníac i el clorur d'hidrogen.
- Electròlisi de l'aigua, que pot produir-se mitjançant energies alternatives i renovables.
- Reformat d'hidrocarburs, com poden ser biocombustibles, metanol, biodiesel, o d'origen fòssil, provenint del petroli.

En contra, el factor de seguretat provoca incertesa respecte l'ús d'aquest combustible, degut a que és un producte fàcilment inflamable en contacte amb l'oxigen atmosfèric.



Per eliminar aquest risc s'han plantejat diverses solucions:

- La primera es tracta d'utilitzar productes que continguin hidrogen, com el metanol o la gasolina, amb l'objectiu de recuperar-lo en el moment d'utilització, mitjançant un reformador. El metanol es pot aconseguir tant del metà com de la descomposició de matèria orgànica, per tant s'utilitzaria energia alternativa.
- La segona metodologia és la d'utilitzar combustibles alternatius directament, com el metanol o gasolina.
- Una altra alternativa són els hidrurs metàl·lics, que absorbeixen hidrogen que es col·loca a l'interior de l'estructura cristal·lina. El procés d'extracció es controlat per pressió. Actualment es pot emmagatzemar 1 kg d'hidrogen per cada 20 kg de metall.



B Modelització del sistema

B.1 Introducció

Per la realització del projecte ha estat necessari la construcció d'un model matemàtic, que permetés analitzar el comportament del sistema en el qual està basat i poder dissenyar els controladors adequats a les prestacions que es volen obtenir de la PC. El model ha estat dissenyat sota el paquet informàtic Matlab® Release 14 i la seva eina Simulink®. La facilitat d'ús d'aquest software i la seva gran introducció en la indústria permeten trobar una àmplia bibliografia i documentació sobre el seu funcionament i aprofitament. Simulink basa el seu modelat en un sistema gràfic de blocs.

El model parteix del realitzat per Pukrushpan et al. [1] amb l'addició d'algunes variacions. Com s'ha exposat en la memòria no s'ha considerat la modelització del subsistema encarregat del subministrament d'hidrogen i/o la seva producció, dels subsistemes d'acondicionament del voltatge de sortida i del sistema per gestionar la calor produïda per la PC.

Com a modificacions sobre el model original s'han implementat: model del compressor dissenyat en base a equacions substituint el mapa inicial, modelat l'orifici a l'ànode per permetre la possibilitat de tenir un flux de sortida i el sistema de control de la diferència de pressions entre ànode i càtode, que es realitzarà a través de un controlador a dissenyar.

B.2 Subministrament d'oxigen

Per subministrar al càtode el flux necessari i en les condicions adients s'han modelat:

- Compressor
- Col·lector d'entrada al càtode (supply manifold)
- Intercanviador de calor (static air cooler)
- Humidificador (static humidifier)

B.2.1 Compressor

Per representar el comportament dinàmic del compressor (CP) es modela la unió del compressor amb un motor, compressor motor (CM), rotatiu. L'equació que regeix aquest comportament és:



$$J_{cp} \frac{d\omega_{cp}}{dt} = \tau_{cm} - \tau_{cp} \quad (\text{Eq. B.1})$$

on τ_{cm} (funció de v_{cm} i de ω_{cp}) és el parell que desenvolupa el motor del compressor i τ_{cp} és el parell que realitza la càrrega.

El parell del motor és calculat fent servir una equació estàtica d'aquest:

$$\tau_{cm} = \eta_{cm} \frac{k_t}{R_{cm}} (v_{cm} - k_v \omega_{cp}) \quad (\text{Eq. B.2})$$

on k_t , R_{cm} i k_v són constants del motor i η_{cm} és el rendiment mecànic del motor. El parell necessari per accionar el compressor ve calculat per l'equació termodinàmica:

$$\tau_{cp} = \frac{C_p}{\omega_{cp}} \frac{T_{atm}}{\eta_{cp}} \left[\left(\frac{p_{sm}}{p_{atm}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] W_{cp} \quad (\text{Eq. B.3})$$

on γ és la ràtio de les calors específiques de l'aire (de valor 1,4), C_p és la constant de la calor específica a pressió constant de l'aire ($=1004 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$), η_{cm} l'eficiència del compressor, p_{sm} la pressió a l'interior del supply manifold i p_{atm} i T_{atm} la pressió i temperatura atmosfèrica respectivament.

Per calcular la temperatura de sortida del flux d'aire es fa servir l'equació termodinàmica:

$$T_{cp} = T_{atm} + \frac{T_{atm}}{\eta_{cp}} \left[\left(\frac{p_{sm}}{p_{atm}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (\text{Eq. B.4})$$

Inicialment s'ha dissenyat un mapa estàtic del compressor per determinar el flux d'aire que aquest pot servir al sistema, W_{cp} . Aquest flux és funció de la relació de pressions entre la del supply manifold i l'atmosfèrica i de la velocitat de rotació ($p_{sm}/p_{atm}, \omega_{cp}$). Posteriorment s'ha substituït aquest mapa del compressor per unes equacions que modelin el mateix comportament.

Basant-se en les dades que proporciona el mapa del compressor, s'han buscat les equacions que descriuen aquest comportament fent servir tècniques de regressió. Realitzant una anàlisi dimensional del procés es poden realitzar algunes simplificacions, les quals es poden trobar en



molts textos de turbines i compressors (Watson and Janota, 1982). El resultat és agrupar variables en grups adimensionals. Aquests grups no són realment adimensionals, però això és degut a que varies constants, amb dimensions, s'han eliminat de l'anàlisi. Els dos grups són:

- Flux màssic adimensional: $\frac{W\sqrt{T_1}}{P_1}$
- Velocitat angular: $\frac{N}{\sqrt{T_1}}$

De les dades recollides en la taula del compressor cal corregir els valors dels fluxos màssics de sortida i les velocitats angulars. Per realitzar aquestes operacions s'empraran els dos grups adimensionals citats anteriorment.

$$W_{cr} = \frac{W_{cp} \sqrt{T_{cp,in}}}{P_{cp,in}} \quad (Eq. B.5)$$

on W_{cr} és el flux màssic de sortida del compressor corregit, W_{cp} el flux màssic de sortida del compressor extret de les taules, $T_{cp,in}$ la temperatura d'entrada de l'aire al compressor (en aquest cas serà la temperatura atmosfèrica $T_{atm} = 298,15K$) i $P_{cp,in}$ la pressió d'entrada de l'aire (la pressió atmosfèrica $P_{atm} = 1,01325bar$).

$$N_{cr} = \frac{N_{cp}}{\sqrt{T_{cp,in}}} \quad (Eq. B.6)$$

on N_{cr} és la velocitat angular corregida, N_{cp} la velocitat extreta del mapa del compressor i $T_{cp,in}$ la temperatura d'entrada de l'aire.

Els valors que es troben tabulats corresponen a velocitats de 10, 20, 30, ..., 90 i 100 kRPM, per tant es realitzen regressions per cadascuna d'aquestes velocitats angulars de forma separada. Una vegada es tinguin les equacions que representin el comportament a aquestes velocitats, cal trobar la variació i comportament que han sofert els paràmetres d'aquestes equacions per poder establir finalment unes equacions vàlides per valors de velocitats intermedis. La necessitat de trobar la variació dels paràmetres entre valors de velocitats



angulars successius provoca que la equació que regeixi el comportament a velocitats conegudes sigui sempre la mateixa.

El càlcul de les equacions que millor representen el comportament es realitza a través de la utilitat “Curve Fitting Tool” de l'eina matemàtica Matlab. Per calcular les equacions a velocitats angulars conegudes es representen gràficament el quocient de pressions i la velocitat angular ja corregida $\left(W_{cr}, \frac{P_{sm}}{P_{atm}}\right)$. Aquesta utilitat de Matlab permet comprovar la qualitat de l'ajust a través d'indicadors probabilístics, com pot ser R^2 que quan més proper a 1 indica que l'error entre el valor estimat i el real és més proper a 0. És possible provar qualsevol equació per la regressió, però d'entre les incloses per defecte en el programa es troba l'escollida i que millor representa la relació entre les dues variables representades. Aquesta equació implementa el comportament del compressor retornant valors de R^2 compresos entre 0,97 i 0,99. Per tant l'equació escollida ha estat:

$$Y = A \cdot e^{B \cdot X} + C \cdot e^{D \cdot X} \quad (\text{Eq. B.7})$$

Una vegada obtingudes cadascuna de les equacions, una equació per cada velocitat angular tabulada, cal recollir els diferents valors dels paràmetres A, B, C i D i graficar l'evolució de cada paràmetre amb la velocitat angular corregida. En total es troben quatre noves equacions de regressió que reflecteixen la variació que experimenta cada paràmetre amb la variació de la velocitat. En aquest cas, no cal que totes les equacions escollides tinguin la mateixa formulació, només s'han de buscar les que millor s'ajustin.

Si anomenem A_n, B_n, C_n i D_n a les equacions que representen el comportament dels paràmetres A, B, C i D, tenim que l'equació final és la següent:

$$W_{cr} = A_n(N_{cr}) \cdot e^{B_n(N_{cr}) \cdot X} + C_n(N_{cr}) \cdot e^{D_n(N_{cr}) \cdot X} \quad (\text{Eq. B.8})$$

$$\text{on } X = \frac{P_{sm}}{P_{atm}}.$$

Es pot comprovar que no és possible trobar una equació vàlida per tot el rang de velocitats angulars, això comporta l'haver de tallar en dos segments, tenir dues equacions iguals però que la variació dels paràmetres es regeix segons unes altres equacions. El tall que s'ha realitzat ha estat a la velocitat de 70kRPM, tenint un primer tram des d'una velocitat angular



de 10kRPM fins a 70kRPM, en el segon tram estan incloses les velocitats compreses entre 70 i 100kRPM. Aquest fet comporta el perill de provocar una discontinuïtat en el punt d'unió, el pas d'un segment a un altre no ha de provocar un comportament estrany. Per corregir aquest defecte s'ha d'aconseguir que l'equació que governa la velocitat de 70kRPM estan al segment de velocitats inferiors a aquesta sigui la mateixa que la que representa aquesta velocitat al segment de velocitats superiors als 70kRPM.

En la figura B.1 es presenten les corbes obtingudes per aquest mètode entre les velocitats de rotació de 50 kRPM i 100 kRPM:

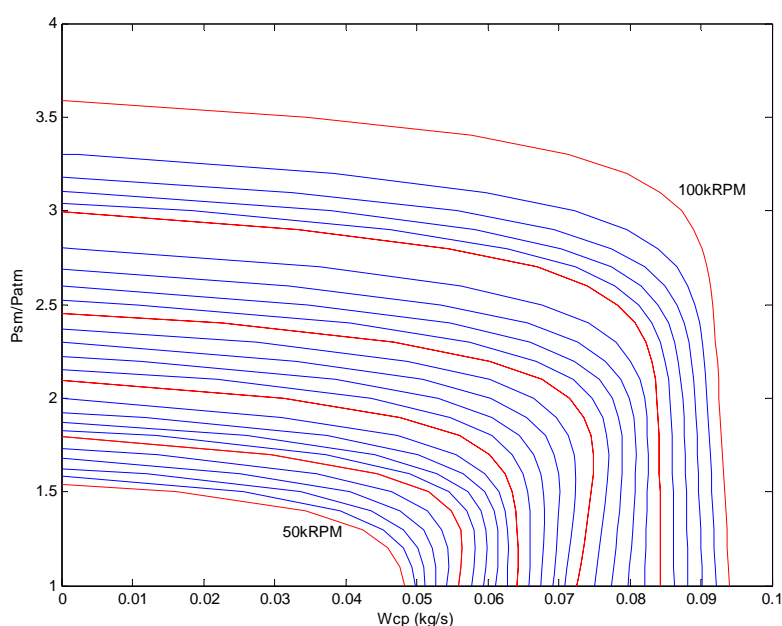


Fig. B.1 Mapa del compressor

Una vegada s'ha obtingut la velocitat angular corregida, cal tornar a aplicar l'equació B.7 per retrobar el valor del flux d'aire de sortida del compressor.

B.2.2 Supply Manifold

El col·lector d'entrada al càtode, supply manifold (SM), inclou els tubs i volums intermedis entre el compressor i la PC. La pressió del supply manifold, p_{sm} , està determinada per les equacions de continuïtat de la massa i la conservació de l'energia:



$$\begin{aligned}\frac{dm_{sm}}{dt} &= W_{cp} - W_{sm,out} \\ \frac{dp_{sm}}{dt} &= \frac{\gamma R_a}{V_{sm}} (W_{cp} T_{cp} - W_{sm,out} T_{sm})\end{aligned}\quad (\text{Eq. B.9})$$

on R_a és la constant dels gasos per l'aire, V_{sm} el volum del supply manifold i T_{sm} la temperatura a l'interior del supply manifold, calculats a partir de la llei ideal dels gasos.

El flux de sortida d'aire del supply manifold, $W_{sm,out}$, es calcula com a funció de les pressions al supply manifold i al càtode fent servir l'equació linealitzada del flux de sortida a través d'una obertura (linearized nozzle flow equation):

$$W_{sm,out} = k_{nozzle,sm} (p_{sm} - p_{ca}) \quad (\text{Eq. B.10})$$

on $k_{nozzle,sm}$ és la constant que representa l'estrictió produïda per l'obertura de sortida. Aquesta equació únicament serà vàlida en el cas que la diferència de pressions sigui petita, en cas contrari s'haurà de distingir entre dues possibles regions d'operació, com es podrà comprovar quan es modelitzi el col·lector de sortida del càtode, return manifold (RM), veure apartat B.9.1.

B.2.3 Static air cooler

Per reduir la temperatura del flux de l'aire que surt del compressor, normalment elevada i que podria malmetre la membrana de la PC, és necessari refredar aquest flux. És assumit que la temperatura ideal de funcionament per una PC de tipus PEM és de 80°C, a més que la caiguda de pressió per l'acció de l'intercanviador és menystenible. Per tant les equacions que regeixen el funcionament de l'intercanviador són:

$$p_{cl} = p_{sm} \quad (\text{Eq. B.11})$$

$$\phi_{cl} = \frac{p_{v,cl}}{p_{sat}(T_{cl})} = \frac{p_{cl} p_{v,tm}}{p_{atm} p_{sat}(T_{cl})} = \frac{p_{cl} \phi_{atm} p_{sat}(T_{atm})}{p_{atm} p_{sat}(T_{cl})} \quad (\text{Eq. B.12})$$

De l'equació B.12 es pot obtenir la humitat amb la qual surt l'aire un vegada refredat. La humitat de l'aire ambient es suposa constant i de valor $\phi_{atm} = 0,5$, i $p_{sat}(T_i)$ és la pressió de saturació del vapor a temperatura T_i .



B.2.4 Static humidifier

Per tal de calcular l'aigua necessària a injectar al flux que surt de l'intercanviador per aconseguir el grau d'humitat relativa desitjada pel flux d'aire que entra al càtode, s'utilitza l'equació:

$$W_{v,inj} = \frac{M_v}{M_a} \frac{\phi_{des} p_{sat}(T_{cl})}{p_{a,cl}} W_{a,cl} - W_{v,cl} \quad (Eq. B.13)$$

El flux d'aigua injectat és en estat vapor. ϕ_{des} és la humitat desitjada del flux d'oxigen a l'entrada del càtode, W_{cl} flux màssic a la sortida de l'intercanviador, $W_{a,cl}$ el flux màssic d'aire sec, $W_{v,cl}$ flux de vapor i $p_{a,cl}$ la pressió d'aire sec, tots referenciats a l'intercanviador. M_v i M_a són, respectivament, les masses moleculars de vapor i aire sec de l'aire.

Finalment per calcular el flux d'aire i la seva pressió a l'entrada del càtode es fan servir les equacions B.14 i B.15:

$$W_{ca,in} = W_{cl} + W_{v,inj} \quad (Eq. B.14)$$

$$p_{ca,in} = p_{a,cl} + \phi_{des} p_{sat}(T_{cl}) \quad (Eq. B.15)$$

on $W_{ca,in}$ és el flux màssic d'aire que entra al càtode i $p_{ca,in}$ la pressió d'aquest flux.

B.3 Subministrament d'hidrogen

El flux d'hidrogen prové d'un tanc del qual es suposa que el flux sortint es troba en les condicions adequades pel seu subministrament a l'ànode.

B.4 Stack voltage

Pel càlcul del voltatge que es pot obtenir de la PC s'ha de modelar el potencial de Nernst, E , i les pèrdues per activació, v_{act} , òhmiques, v_{ohm} , i per concentració, v_{conc} . El càlcul de la PC serà el balanç d'aquests termes segons l'equació:

$$v_{fc} = E - v_{act} - v_{ohm} - v_{conc} \quad (Eq. B.16)$$



D'aquesta manera s'obté el voltatge per una cel·la, si es desitja el voltatge per tot el stack s'assumeix que totes les cel·les són iguals i produeixen el mateix voltatge, per tant, el voltatge total serà el d'una cel·la pel total de cel·les. Es té una PC formada per $n = 381$ cel·les, així:

$$v_{st} = n \times v_{fc} \quad (\text{Eq. B.17})$$

B.4.1 Potencial de Nernst

L'equació de Nernst calcula el voltatge en circuit obert:

$$E = 1,229 - 8,5 \times 10^{-4} (T_{fc} - 298,15) + 4,3085 \times 10^{-5} T_{fc} \left[\ln(p_{H_2}) + \frac{1}{2} \ln(p_{O_2}) \right] \quad (\text{Eq. B.18})$$

on T_{fc} és la temperatura de la PC expressada en Kelvin i p_{H_2} i p_{O_2} són les pressions parcials d'hidrogen i oxigen, respectivament, en atmosferes.

B.4.2 Pèrdues per activació

L'equació de Tafel descriu la relació entre les pèrdues per activació i la densitat de corrent:

$$v_{act} = v_0 + v_a (1 - e^{-c_1 i}) \quad (\text{Eq. B.19})$$

$$v_0 = 0,279 - 8,5 \times 10^{-4} (T_{fc} - 298,15) + 4,3085 \times 10^{-5} T_{fc} \left[\ln\left(\frac{p_{ca} - p_{sat}}{1,01325}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{0,1173(p_{ca} - p_{sat})}{1,01325}\right) \right]$$

$$v_a = (-1,618 \times 10^{-5} T_{fc} + 1,618 \times 10^{-2}) \left(\frac{p_{O_2}}{0,1173} + p_{sat} \right)^2 + (1,8 \times 10^{-4} T_{fc} - 0,166) \left(\frac{p_{O_2}}{0,1173} + p_{sat} \right) + (-5,8 \times 10^{-4} T_{fc} + 0,5736)$$

$$c_1 = 10$$

$$i_{fc} = \frac{I_{st}}{A_{fc}} \quad (\text{Eq. B.20})$$

on i_{fc} és la densitat de corrent, I_{st} el corrent del stack que és igual al d'una cel·la en Amperes, A_{fc} és l'àrea activa de la cel·la en cm^2 , T_{fc} la temperatura de la PC en Kelvin i p_{ca} la pressió total al càtode en bar.



B.4.3 Pèrdues òhmiques

Aquestes pèrdues segueixen la llei de Ohm que relaciona el voltatge amb la densitat de intensitat i la resistència:

$$v_{ohm} = i \cdot R_{ohm} \quad (Eq. B.21)$$

La resistència òhmica depèn fortament de la humitat de la membrana i la temperatura de la PC. És proporcional al gruix de la membrana, t_m , i inversament proporcional a la conductivitat d'aquesta, σ_m .

$$R_{ohm} = \frac{t_m}{\sigma_m} \quad (Eq. B.22)$$

$$\sigma_m = (b_{11}\lambda_m - b_{12}) \exp\left(b_2 \left(\frac{1}{303} - \frac{1}{T_{fc}}\right)\right) \quad (Eq. B.23)$$

$$b_{11} = 0,005139$$

$$b_{12} = 0,00326$$

$$b_2 = 350$$

on λ_m és el contingut d'aigua a la membrana, les constants t_m , b_{11} i b_{12} depenen del tipus de membrana, en aquest cas Nafion 117 (Dupont). La constant b_2 s'ha ajustat segons les dades de la PC.

B.4.4 Pèrdues per concentració

L'equació que descriu les pèrdues degudes per elevades densitats de corrent ve descrita per:

$$v_{conc} = i \left(c_2 \frac{i}{i_{max}} \right)^{c_3} \quad (Eq. B.24)$$

$$c_3 = 2, \quad i_{max} = 2,2$$



$$c_2 = \begin{cases} \text{if } \frac{p_{O_2}}{0,1173} + p_{sat} < 2atm \rightarrow \\ \rightarrow (7,16 \times 10^{-4} T_{fc} - 0,622) \left(\frac{p_{O_2}}{0,1173} + p_{sat} \right) + (-1,45 \times 10^{-3} T_{fc} + 1,68) \\ \text{else } \rightarrow (8,66 \times 10^{-5} T_{fc} - 0,068) \left(\frac{p_{O_2}}{0,1173} + p_{sat} \right) + (-1,6 \times 10^{-4} T_{fc} + 0,54) \end{cases}$$

B.5 Càtode

Pel modelat del càtode s'ha considerat una sèrie d'assumpcions:

- Tots el gasos obeeixen les lleis dels gasos ideals.
- La temperatura de l'aire a l'interior del càtode és la mateixa que la de la PC.
- Les propietats del flux al sortir del càtode són les mateixes que tenia a l'interior.
- Quan la humitat relativa arriba al 100% el vapor condensa en forma líquida.
- L'aigua líquida no abandona la PC i tornarà a estat vapor quan la humitat baixi del 100%.

La continuïtat de la massa permet realitzar el balanç dels tres elements, oxigen, nitrogen i vapor d'aigua:

$$\begin{aligned} \frac{dm_{O_2}}{dt} &= W_{O_2,in} - W_{O_2,out} - W_{O_2,reacted} \\ \frac{dm_{N_2}}{dt} &= W_{N_2,in} - W_{N_2,out} \\ \frac{dm_{w,ca}}{dt} &= W_{v,ca,in} - W_{v,ca,out} + W_{v,ca,gen} + W_{v,membr} \end{aligned} \quad (Eq. B.25)$$

Fent ús de la llei dels gasos ideals i de les propietats termodinàmiques es calculen les pressions parcials d'oxigen, p_{O_2} , nitrogen, p_{N_2} , i vapor, $p_{v,ca}$, la pressió total, $p_{ca} = p_{O_2} + p_{N_2} + p_{v,ca}$, la humitat relativa, ϕ_{ca} , i la fracció molar d'oxigen d'aire sec, $y_{O_2,ca}$.

El flux màssic d'entrada i sortida d'oxigen, nitrogen i vapor són calculats utilitzant les expressions de l'apartat B.9.2.



La quantitat d'oxigen que reacciona, $W_{O_2,reacted}$, i la producció d'aigua que es genera, $W_{v,ca,gen}$, es calculen en base a principis electroquímics:

$$W_{O_2,reacted} = M_{O_2} \cdot \frac{nI_{st}}{4F} \quad (Eq. B.26)$$

$$W_{v,ca,gen} = M_v \cdot \frac{nI_{st}}{2F} \quad (Eq. B.27)$$

on F és la constant de Faraday ($F=96485$ Coulombs), I_{st} és el corrent de la PC i M_{O_2} i M_v són les masses moleculars d'oxigen i vapor, respectivament.

El flux màssic d'aigua que circula a través de la membrana, $W_{v,membr}$, es calcula en el model de la hidratació de la membrana, apartat B.7.

Per calcular el flux màssic de sortida del càtode, $W_{ca,out}$, es fa ús de l'equació linealitzada per la sortida per una obertura:

$$W_{ca,out} = K_{nozzle,ca,out} (p_{ca} - p_{rm}) \quad (Eq. B.28)$$

on p_{rm} és la pressió al col·lector de sortida, return manifold (RM).

B.6 Ànode

El modelat d'aquesta part de la PC es modela de forma similar a com es modela el càtode. Per determinar la pressió parcial d'hidrogen, p_{H_2} , i la humitat del flux, ϕ_{an} , es realitza el balanç de masses tant d'hidrogen, m_{H_2} , com d'aigua, $m_{w,an}$:

$$\begin{aligned} \frac{dm_{H_2}}{dt} &= W_{H_2,in} - W_{H_2,out} - W_{H_2,reacted} \\ \frac{dm_{w,an}}{dt} &= W_{v,an,in} - W_{v,an,out} - W_{v,membr} \end{aligned} \quad (Eq. B.29)$$

La humitat relativa del flux d'hidrogen entrant es considerada del 100%. La temperatura de l'hidrogen a l'ànode es suposa igual a la del càtode, per tant igual a la de la PC. La quantitat d'hidrogen consumit en la reacció ve donada per l'equació:



$$W_{H_2,reacted} = M_{H_2} \cdot \frac{nI_{st}}{2F} \quad (Eq. B.30)$$

on M_{H_2} és la massa molecular de l'hidrogen.

La quantitat d'hidrogen que surt de la PC es calcula a través de l'expressió linealitzada, abans usada en el cas del càtode (equació B.28):

$$W_{an,out} = K_{nozzle,an,out} (p_{an} - p_{atm}) \quad (Eq. B.31)$$

B.7 Hidratació de la membrana

Aquest model representa l'efecte del transport d'aigua a través de la membrana. Tant el contingut d'aigua com el seu flux s'assumeixen uniformes en tota l'àrea superficial de la membrana i són funció de la corrent i la humitat relativa del gas en l'ànode i el càtode.

El transport d'aigua es modela mitjançant dos fenòmens:

- Primer, les molècules d'aigua són arrossegades a través de la membrana des del ànode fins al càtode pels protons d'hidrogen. Aquest fenomen s'anomena "arrossegament electro-osmòtic". El coeficient d'arrossegament electro-osmòtic, n_d , es defineix com el nombre de molècules d'aigua transportades per cada protó, i per tant el flux net d'aigua transportada des de l'ànode fins al càtode, $N_{v,osmotic}$, és:

$$N_{v,osmotic} = n_d \frac{i}{F} \quad (Eq. B.32)$$

- Segon, existeix una diferència d'humitat en els fluxos de l'ànode i el càtode, fet que provoca un gradient de concentració d'aigua a través de la membrana. Aquest gradient, provoca "back-diffusion" d'aigua, normalment des del càtode fins l'ànode. El flux net d'aigua des del càtode fins l'ànode és:

$$N_{v,diff} = D_w \frac{dc_v}{dy} \quad (Eq. B.33)$$

on c_v és la concentració d'aigua, y és la distància en la direcció normal de la membrana i D_w és el coeficient de difusió.



Combinant els dos mecanismes de transport d'aigua i assumint que la concentració d'aigua varia de forma lineal a través del gruix de la membrana, el flux d'aigua que travessa la membrana és (assumint valors positius en la direcció ànode cap a càtode):

$$W_{v,membr} = M_v A_{fc} n \left(\frac{n_d I_{st}}{F} - D_w \frac{c_{v,ca} - c_{v,an}}{t_m} \right) \quad (Eq. B.34)$$

Els coeficients n_d i D_w varien amb el contingut d'aigua de la membrana, λ_m , que es calcula com el promig del contingut d'aigua a l'ànode, λ_{an} , i al càtode, λ_{ca} . La concentració d'aigua a la superfície de la membrana, $c_{v,ca}$ pel càtode i $c_{v,an}$ per l'ànode (equació B.35), és funció del contingut del contingut d'aigua a la superfície, λ_{ca} i λ_{an} respectivament. Tant λ_{an} com λ_{ca} , equació B.36, es calculen a partir de l'activitat de l'aigua a la membrana, equació B.37:

$$c_{v,i} = \frac{\rho_{m,dry} \lambda_i}{M_{m,dry}} \quad (Eq. B.35)$$

$$\lambda_i = \begin{cases} 0,043 + 17,81a_i - 39,85a_i^2 + 36a_i^3 & , 0 < a_i \leq 1 \\ 14 + 1,4(a_i - 1) & , 1 < a_i \leq 3 \end{cases} \quad (Eq. B.36)$$

$$a_i = \frac{y_{v,i} P_i}{P_{sat,i}} = \frac{p_{v,i}}{P_{sat,i}} \quad (Eq. B.37)$$

on i és "an" o "ca", $\rho_{m,dry}$, expressat en $\frac{kg}{cm^3}$, és densitat de la membrana assecada i $M_{m,dry}$, expressat en $\frac{kg}{mol}$, és el pes equivalent de la membrana seca.

λ_i pot variar entre 0 i 14, equivalent 0 a una humitat relativa del 0% i 14 una humitat relativa del 100%.

El càlcul del coeficient electro-osmòtic i del coeficient de difusió s'obtenen a partir de les següents equacions, respectivament:

$$n_d = 0,0029\lambda_m^2 + 0,05\lambda_m - 3,4 \times 10^{-19} \quad (Eq. B.38)$$



$$D_w = D_\lambda \exp\left(2416\left(\frac{1}{303} - \frac{1}{T_{fc}}\right)\right) \quad (\text{Eq. B.39})$$

$$\text{on } D_\lambda = \begin{cases} 10^{-6} & , \lambda_m < 2 \\ 10^{-6}(1+2(\lambda_m-2)) & , 2 \leq \lambda_m < 3 \\ 10^{-6}(3-1,67(\lambda_m-3)) & , 3 \leq \lambda_m < 4,5 \\ 1,25 \times 10^{-6} & , \lambda_m \geq 4,5 \end{cases}$$

Tots aquests resultats estan extrets de resultats experimentals per la membrana Nafion 117.

B.8 Col·lector de sortida

A diferència del col·lector d'entrada on és necessària la consideració de que les temperatures canvien, al col·lector de sortida la temperatura, T_{rm} , s'assumeix que és igual a la temperatura del flux que surt del càtode. L'equació de la conservació de la massa i la llei dels gasos ideals per processos isotèrmics permeten calcular la pressió a l'interior del col·lector de sortida, p_{rm} :

$$\frac{dp_{rm}}{dt} = \frac{R_a T_{rm}}{V_{rm}} (W_{ca,out} - W_{rm,out}) \quad (\text{Eq. B.40})$$

on V_{rm} és el volum del col·lector de sortida, la temperatura T_{rm} serà igual a T_{fc} , $W_{ca,out}$ és el flux de sortida del càtode i $W_{rm,out}$ és el flux màssic de sortida del col·lector de sortida.

El càlcul de $W_{rm,out}$ es realitza a través de les equacions no lineals de la sortida d'un flux per una obertura, com a funció de la pressió al col·lector de sortida, p_{rm} , i l'àrea d'obertura de la vàlvula, $A_{T,rm}$.

B.9 Altres equacions

B.9.1 Càlcul flux màssic

Per calcular el flux màssic entre dos volums es fa servir l'equació de flux per una estricció. El flux que circula a través del conducte d'unió entre volums és funció de la pressió aigües



amunt, p_u , i la pressió aigües avall, p_d . El càlcul del flux es divideix en dues seccions segons la ràtio de pressió crítica:

$$pr_{crit} = \left(\frac{p_d}{p_u} \right)_{crit} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (Eq. B.41)$$

Quan la ràtio pr és superior a la crítica, pr_{crit} , es troba a la secció de flux sub-crític i es calcula segons la següent equació:

$$W = \frac{C_D A_T p_u}{\sqrt{RT_u}} (pr)^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[1 - (pr)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (Eq. B.42)$$

on T_u és la temperatura aigües amunt, C_D és el coeficient de descàrrega de l'esticció i A_T és la secció de pas en m^2 .

Pel cas de flux crític, $pr \leq pr_{crit}$, es calcula segons la següent equació:

$$W = \frac{C_D A_T p_u}{\sqrt{RT_u}} \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (Eq. B.43)$$

En el cas que la diferència de pressions sigui petita el flux es pot calcular a partir de la linealització de l'equació:

$$W = k_{nozzle} (p_u - p_d) \quad (Eq. B.44)$$

B.9.2 Càlculs termodinàmics

La pressió de vapor es calcula a partir de la definició de la humitat relativa, assumint un comportament de gas ideal:

$$p_v = \phi \cdot p_{sat}(T) \quad (Eq. B.45)$$

L'aire humit és la mescla d'aire sec i vapor, així la pressió parcial d'aire sec és la diferència entre la pressió total i la de vapor, $p_a = p - p_v$.

El coeficient d'humitat ω es calcula com la relació entre la massa de vapor i d'aire sec:



$$\omega = \frac{M_v p_v}{M_a p_a} \quad (\text{Eq. B.46})$$

on M_v i M_a són la massa molecular de vapor i aire sec respectivament. M_a es calcula a partir de la següent equació:

$$M_a = y_{O_2} \cdot M_{O_2} + (1 - y_{O_2}) \cdot M_{N_2} \quad (\text{Eq. B.47})$$

on M_{O_2} i M_{N_2} són la massa molecular d'oxigen i nitrogen respectivament.

Els fluxos es calculen segons:

$$W_a = \frac{1}{1 + \omega} W \quad (\text{Eq. B.48})$$

$$W_v = W - W_a \quad (\text{Eq. B.49})$$

$$W_{O_2} = x_{O_2} W_a \quad (\text{Eq. B.50})$$

$$W_{N_2} = (1 - x_{O_2}) W_a \quad (\text{Eq. B.51})$$

on $x_{O_2} \equiv m_{O_2} / m_a$ és la fracció màssica i es calcula com:

$$x_{O_2} = \frac{y_{O_2} \cdot M_{O_2}}{y_{O_2} \cdot M_{O_2} + (1 - y_{O_2}) \cdot M_{N_2}} \quad (\text{Eq. B.52})$$

Les mateixes equacions s'apliquen quan es fa referència a l'ànode.

B.10 Dades del model

El model desenvolupat conté nou variables d'estat:

- Velocitat angular del compressor, ω_{cp}
- Massa al col·lector d'entrada, m_{sm}
- Pressió de l'aire al col·lector d'entrada, p_{sm}
- Pressió de l'aire al col·lector de sortida, p_{rm}



- Massa d'oxigen al càtode, m_{O_2}
- Massa de nitrogen al càtode, m_{N_2}
- Massa de vapor al càtode, $m_{w,ca}$
- Massa d'hidrogen a l'ànode, m_{H_2}
- Massa de vapor a l'ànode, $m_{w,an}$

Aquests estats determinen el voltatge de sortida de la PC. Com a entrades del sistema tenim el corrent del stack, I_{st} , i el voltatge del compressor, v_{cm} . Els valors dels paràmetres que intervenen en el model queden reflectits a la taula B.1. Molts d'aquests paràmetres estan extrets de les PC de 75kW usades en el vehicle Ford P2000, prototipus de vehicle impulsat per PC.

Símbol	Nom de la variable	Valor
$\rho_{m,dry}$	Densitat de la membrana seca	0,002 kg/cm ³
$M_{m,dry}$	Pes equivalent de la membrana seca	1,1 kg/mol
t_m	Gruix de la membrana	0,01275 cm
n	Número de cel·les	381
A_{fc}	Àrea activa de la PC	280cm ²
d_c	Diàmetre del compressor	0,2286 m
J_{cp}	Inèrcia del compressor i motor	5x10 ⁻⁵ kg·m ²
V_{an}	Volum de l'ànode	0,005 m ³
V_{ca}	Volum del càtode	0,01 m ³
V_{sm}	Volum del col·lector d'entrada	0,02 m ³
V_{rm}	Volum del col·lector de sortida	0,005 m ³
$C_{D,rm}$	Coefficient de descàrrega del col·lector de sortida	0,0124
$A_{T,rm}$	Àrea d'obertura de la vàlvula del col·lector de sortida	0,002 m ²
$k_{sm,out}$	Contant de l'orifici de sortida del col·lector d'entrada	0,3629 kg/(s·bar)
$k_{ca,out}$	Constant de l'orifici de sortida del càtode	0,2177 kg/(s·bar)
$k_{an,out}$	Constant de l'orifici de sortida de l'ànode	0,192 kg/(s·bar)



k_v	Constant elèctrica del motor del compressor	0,0153 V/(rad/s)
k_t	Constant del parell del motor del compressor	0,0153 N · m/A
R_{cm}	Resistència del circuit del motor del compressor	0,816 Ω
η_{cm}	Eficiència del motor del compressor	0,98
η_{cp}	Eficiència del compressor	0,7

Taula B.1 Valor de les constants del model

C Teoria matemàtica

C.1 Normes

És molt útil tenir un valor que doni una mesura d'un vector, matriu, senyal o sistema. Per això es fan servir funcions que s'anomenen normes. La més coneguda és la norma euclidiana però el concepte és més general i es defineix:

Definició C.1: Una norma d' e (que pot ser un vector, matriu, senyal o sistema) és un nombre real, denotat $\|e\|$, que satisfà les següents condicions:

1. No negativa: $\|e\| \geq 0$
2. Positiva: $\|e\| = 0 \Leftrightarrow e = 0$
3. Homogènia: $\|\alpha \cdot e\| = |\alpha| \cdot \|e\|$ per qualsevol escalar complex α
4. Desigualtat triangular: $\|e_1 + e_2\| \leq \|e_1\| + \|e_2\|$

C.1.1 Normes de vectors

Es considera un vector a amb m elements a_i , vector de l'espai C^m . Per il·lustrar les diferents normes es calcularà cadascuna pel vector

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Es consideren tres normes les quals són casos particulars del vector norma-p

$$\|a\|_p = \left(\sum_i |a_i|^p \right)^{1/p} \quad (\text{Eq. C.1})$$

on $p \geq 1$ per satisfer la desigualtat triangular. Aquí a és un vector columna amb elements a_i i $|a_i|$ és el valor absolut de l'escalar complex a_i .



Norma-1 (Norma suma)

En dos dimensions correspon a la distància entre dos llocs quan es segueixen els “carrers” (estil Eixample)

$$\|a\|_1 = \sum_i |a_i| \quad (\|b\|_1 = 1 + 3 + 5 = 9)$$

Norma-2 (Norma Euclidiana)

Aquesta és la norma més comú i correspon a la distància més curta entre dos punts.

$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_i |a_i|^2} \quad (\|b\|_2 = \sqrt{1 + 9 + 25} = 5.916)$$

La norma Euclidiana satisfà la propietat

$$a^H a = \|a\|_2^2$$

on a^H denota el complex conjugat transposat del vector a .

Norma-∞ (Norma màxima)

És l'element més gran en el vector.

$$\|a\|_\infty = \max_i |a_i| \quad (\|b\|_\infty = |-5| = 5)$$

C.2 Valors i vectors propis

Definició C.2: Valors i vectors propis. Sigui A una matriu quadrada $n \times n$. Els valors propis λ_i , on $i = 1, \dots, n$, són les n solucions de l'equació característica d'ordre n

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (\text{Eq. C.2})$$

El vector propi t_i corresponent al valor propi λ_i és la solució no trivial ($t_i \neq 0$) de

$$(A - \lambda_i I)t_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad At_i = \lambda_i t_i$$



Els valors propis a vegades s'anomenen guanyos característics. El conjunt de valors propis d' A s'anomena l'espectre d' A . El valor propi d' A més gran, en valor absolut, és el *radi espectral* d' A , $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$.

Cal notar que si t és un vector propi, també ho és αt per qualsevol constant α . Per tant, els vectors propis s'acostumen a normalitzar per que siguin unitaris, $t^H t = 1$. Els vectors propis corresponents a diferents valors propis són sempre linealment independents.

C.3 Descomposició en valors singulars

Definició C.3: Matriu unitària. Una matriu (complexa) U és unitària si

$$U^H = U^{-1} \quad (\text{Eq. C.3})$$

Tots els valors propis de una matriu unitària tenen un valor absolut igual a 1, i tots els seus valors singulars són iguals a 1.

Definició C.4: SVD. Qualsevol matriu A complexa, $l \times m$, es pot factoritzar en la seva descomposició en valors singulars

$$A = U \Sigma V^H \quad (\text{Eq. C.4})$$

on la matriu U , $l \times l$, i la matriu V , $m \times m$, són unitàries, i la matriu Σ , $l \times m$, conté una matriu diagonal Σ_1 de valors singulars reals, no negatius, ordenats en ordre descendent com:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad l \geq m \quad \text{o bé} \quad \Sigma = [\Sigma_1 \quad 0]; \quad l \leq m$$

on $\Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$; $k = \min(l, m)$ i $\bar{\sigma} \equiv \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \equiv \underline{\sigma}$

Les matrius unitàries U i V formen bases ortonormals per l'espai de les columnes (sortida) i de les files (entrada) d' A . Els vectors columna de V , denotats v_i , s'anomenen vectors singulars d'entrada i els vectors columna de U , denotats u_i , s'anomenen vectors singulars de sortida. Definim $\bar{u} \equiv u_1$, $\bar{v} \equiv v_1$, $\underline{u} \equiv u_k$ i $\underline{v} \equiv v_k$.

Els valors singulars són les arrels quadrades positives dels $k = \min(l, m)$ valors propis més grans de AA^H i també de $A^H A$. Per tant,



$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^H A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^H)} \quad (\text{Eq. C.5})$$

A més, la matriu U és la matriu de vectors propis unitaris de AA^H i $\{\sigma_i^2\}$ són els seus valors propis. De la mateixa forma tenim que V és la matriu de vectors propis unitaris de $A^H A$.

C.3.1 Valors singulars per matrius 2 x 2

En general, els valors singulars s'han de calcular numèricament. Per matrius 2 x 2, s'obté la següent expressió analítica,

$$\begin{aligned} b &= \text{tr}(A^H A) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \\ c &= \det(A^H A) \end{aligned} \quad (\text{Eq. C.6})$$

La suma de valors propis d'una matriu és igual a la seva traça i el producte és igual al seu determinant, per tant

$$\lambda_1 + \lambda_2 = b \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = c$$

Solucionant per obtenir λ_1 i λ_2 , i usant $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^H A)}$ s'obté

$$\bar{\sigma}(A) = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \quad \underline{\sigma}(A) = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}}$$

C.3.2 SVD com a suma de matrius de rang 1

Sigui r el rang de la matriu A , $l \times m$. Es considera la SVD com la descomposició d' A en r matrius $l \times m$, cadascuna de rang 1. S'obté

$$A = U \Sigma V^H = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^H \quad (\text{Eq. C.7})$$

Els termes restants des de $r + 1$ fins $k = \min(l, m)$ tenen valors singulars igual a 0 i no contribueixen a la suma. La primera i més important submatriu correspon a $A_1 = \sigma_1 u_1 v_1^H$. Si es considera la matriu residual

$$A^1 = A - A_1 = A - \sigma_1 u_1 v_1^H$$



llavors $\sigma_1(A^1) = \sigma_2(A)$.

Per tant, el valor singular més gran de A^1 és igual al segon valor singular de la matriu original. La direcció que correspon a $\sigma_2(A)$ és la segona direcció més important.

C.4 Introducció al control multivariable

La figura C.1 representa en general un sistema de control en laç obert. Es considera una planta MIMO, de l'anglès Multi-Input Multi-Output, amb m entrades i l sortides. Llavors, la funció de transferència del model és $y(s) = G(s)d(s)$, on y és un vector $l \times 1$, d un vector $m \times 1$ i $G(s)$ és una matriu de funcions de transferència. Aquesta és una representació externa del sistema, una generalització dels sistemes SISO, de l'anglès Single-Input Single-Output, que es pot fer perquè es treballa amb un sistema linealitzat o bé lineal.

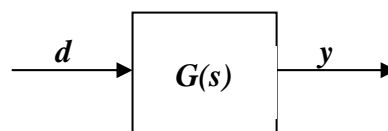


Fig. C.1 Sistema general

Si es fa un canvi en la primera entrada, d_1 , aquest generalment afectarà totes les sortides, y_1, y_2, \dots, y_l , per tant, existeix interacció entre les entrades i les sortides. Una planta sense interacció és quan d_1 només afecta y_1 , d_2 només afecta y_2 , etc.

La principal diferència entre un sistema escalar (SISO) i un sistema MIMO és la presència de *direccions* en el darrer. Les direccions són rellevants per vectors i matrius, però no per escalars. Malgrat el complicat factor de les direccions, moltes de les idees i tècniques per els sistemes SISO es poden estendre al sistemes MIMO. La descomposició en valors singulars (SVD) proporciona una manera útil de quantificar la direccionalitat multivariable, i molts dels resultats en sistemes SISO relatius al valor absolut (magnitud) es poden generalitzar per sistemes multivariable, considerant el màxim valor singular. Una excepció d'això és la condició d'estabilitat de Bode, que no té una generalització en termes de valors singulars. Això està relacionat amb el fet que és difícil trobar una bona mesura de la fase per les funcions de transferència en sistemes MIMO.



C.5 Anàlisi de la resposta freqüencial multivariable

La funció de transferència $G(s)$ és una funció de la variable de Laplace s i pot ser utilitzada per representar un sistema dinàmic. Si es fixa $s = s_0$ llavors es veu $G(s_0)$ simplement com una matriu complexa, que pot ser analitzada utilitzant eines d'àlgebra matricial. En particular, l'elecció de $s_0 = j\omega$ és interessant per que $G(j\omega)$ representa la resposta per un senyal sinusoidal de freqüència ω .

C.5.1 Direccions en sistemes multivariables

Per un sistema SISO, $y = Gd$, el guany a una freqüència donada és simplement

$$\frac{|y(\omega)|}{|d(\omega)|} = \frac{|G(j\omega)d(\omega)|}{|d(\omega)|} = |G(j\omega)| \quad (\text{Eq. C.8})$$

El guany depèn de la freqüència ω , però mentre el sistema sigui lineal és independent de la magnitud de l'entrada $|d(\omega)|$.

Per sistemes MIMO, on les senyals d'entrada i de sortida són vectors, es necessita “sumar” les magnituds dels elements en cada vector utilitzant alguna norma, veure apartat C.1.1. Si s'elegeix el vector norma-2 (euclidiana), la mesura usual de longitud, llavors a una freqüència donada ω la magnitud del vector de la senyal d'entrada és:

$$\|d(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_j |d_j(\omega)|^2} = \sqrt{d_{10}^2 + d_{20}^2 + \dots}$$

i la magnitud de la senyal de sortida és:

$$\|y(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_i |y_i(\omega)|^2} = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots}$$

El guany del sistema $G(s)$ per una senyal d'entrada $d(\omega)$ és donat pel quocient:

$$\frac{\|y(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2} = \frac{\|G(j\omega)d(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2} = \frac{\sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots}}{\sqrt{d_{10}^2 + d_{20}^2 + \dots}} \quad (\text{Eq. C.9})$$



El guany continua depenent de la freqüència ω , i també és independent de la magnitud de l'entrada $\|d(\omega)\|_2$. Però per un sistema MIMO hi ha graus de llibertat addicionals i el guany depèn també de la *direcció* de l'entrada d .

El màxim valor del guany en l'equació C.9 quan es varia la direcció de l'entrada és el màxim valor singular de G ,

$$\max_{u \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \max_{\|u\|_2=1} \|Gd\|_2 = \bar{\sigma}(G) \quad (\text{Eq. C.10})$$

d'altra banda el mínim guany és el mínim valor singular de G ,

$$\min_{u \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \min_{\|u\|_2=1} \|Gd\|_2 = \underline{\sigma}(G) \quad (\text{Eq. C.11})$$

Aquestes definicions són degudes a que el guany és independent de la magnitud de l'entrada per un sistema lineal o bé hagi estat linealitzat.

C.5.2 Descomposició en valors singulars

La descomposició en valors singulars (SVD) és definida en l'apartat C.3. Aquí es centre en la interpretació física aplicada a la resposta freqüencial d'un sistema MIMO $G(s)$ amb m entrades i l sortides.

Es considera una freqüència fixa ω on $G(j\omega)$ és una matriu complexa constant de dimensions $l \times m$ i es denota $G(j\omega)$ per G per simplicitat. Qualsevol matriu G pot ser descomposta en la seva descomposició en valors singulars, i s'escriu

$$G = U \Sigma V^H \quad (\text{Eq. C.12})$$

on Σ és una matriu $l \times m$ amb $k = \min\{l, m\}$ valors singulars no negatius, σ_i , disposats en ordre descendent al llarg de la diagonal principal; les altres entrades són zero. Els valors singulars són les arrels quadrades positives dels valors propis de $G^H G$, on G^H és el conjugat complex transposat de G .

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^H G)}$$



U és una matriu unitària $l \times l$ de vectors singulars de sortida, u_i .

V és una matriu unitària $l \times l$ de vectors singulars d'entrada, v_i .

Això és il·lustrat per la SVD de una matriu real 2×2 que es pot escriure sempre de la forma

$$G = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \pm \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \pm \cos \theta_2 \end{bmatrix}^T}_{V^T} \quad (\text{Eq. C.13})$$

on els angles θ_1 i θ_2 depenen de la matriu donada. De l'equació C.13 es veu que les matrius U i V involucren rotacions i que les seves columnes són ortonormals.

A vegades els valors singulars s'anomenen els valors principals o guanys principals, i les direccions associades són anomenades direccions principals. En general, els valors singulars cal computar-los numèricament. Per matrius 2×2 , expressions analítiques pels valors singulars es donen a l'apartat C.3.1.

Direccions d'entrada i sortida

Els vectors columna d' U , denotats u_i , representen les *direccions de sortida* de la planta. Són ortogonals i de longitud unitària (ortonormals), això és

$$\|u_i\|_2 = \sqrt{|u_{i1}|^2 + |u_{i2}|^2 + \dots + |u_{il}|^2} = 1$$

$$u_i^H u_i = 1, \quad u_i^H u_j = 0, \quad i \neq j$$

Així mateix, els vectors columna d' V , denotats v_i , són ortogonals i de longitud unitària i representen les *direccions d'entrada*. Aquestes direccions d'entrada i sortida estan relacionades a través dels valors singulars. Per veure això, notem que si V és unitària tenim $V^H V = I$, per tant es pot escriure com $GV = U\Sigma$, que per la columna i esdevé

$$Gv_i = \sigma_i u_i \quad (\text{Eq. C.14})$$

on v_i , i u_i són vectors, mentre σ_i és un escalar. Per tant, si es considera una *entrada* en la direcció v_i , llavors la *sortida* és en la direcció u_i . A més, si $\|v_i\|_2 = 1$ i $\|u_i\|_2 = 1$ es veu que l'i-



èssim valor singular σ_i dona directament el guany de la matriu G en aquesta direcció. En altres paraules

$$\sigma_i(G) = \|Gv_i\|_2 = \frac{\|Gv_i\|_2}{\|v_i\|_2} \quad (\text{Eq. C.15})$$

Alguns avantatges de la SVD enfront la descomposició en vectors propis per analitzar guanys i direccionalitat per plantes multivariables són:

1. Els valors singulars donen millor informació sobre els guanys de la planta.
2. Les direccions de la planta obtingudes de la SVD són ortogonals.
3. La SVD es pot aplicar directament a plantes no quadrades.

Màxim i mínim valors singulars

Com s'ha comentat anteriorment, es pot veure que el guany més gran per *qualsevol* direcció d'entrada és igual al màxim valor singular

$$\bar{\sigma}(G) \equiv \sigma_1(G) = \max_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \frac{\|Gv_1\|_2}{\|v_1\|_2} \quad (\text{Eq. C.16})$$

i el guany menor per qualsevol direcció d'entrada és igual al mínim valor singular

$$\underline{\sigma}(G) \equiv \sigma_k(G) = \min_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \frac{\|Gv_k\|_2}{\|v_k\|_2} \quad (\text{Eq. C.17})$$

On $k = \min\{l, m\}$. Per tant, per qualsevol vector d s'obté que

$$\underline{\sigma}(G) \leq \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} \leq \bar{\sigma}(G)$$

Definim $u_1 = \bar{u}$, $v_1 = \bar{v}$, $u_k = \underline{u}$ i $v_k = \underline{v}$. Llavors es segueix que

$$G\bar{v} = \bar{\sigma}\bar{u} \quad G\underline{v} = \underline{\sigma}\underline{u}$$



El vector \bar{v} correspon a la direcció d'entrada amb amplificació més elevada, i \bar{u} és la direcció de sortida corresponent en la que les entrades són més efectives. Les direccions implicades \bar{v} i \bar{u} a vegades són referides com les direccions “més fortes”, “de guanys elevats”, o “més importants”. Les següents direccions més importants són les associades amb v_2 i u_2 , i per tant (veure apartat C.3.2) són les direccions “menys importants”, “dèbils” o “guanys baixos”, les quals s'associen amb \underline{v} i \underline{u} .

Per sistemes dinàmics els valors singulars i les seves direccions associades varien amb la freqüència, i per propòsits de control, usualment el rang de freqüència corresponent a l'ample de banda en llaç tancat és el que té més interès. Els valors singulars s'acostumen a representar en funció de la freqüència en un diagrama de Bode.

C.5.3 Valors singulars i comportament del sistema

Els valors singulars a més a més de donar informació sobre el guany en les diferents direccions d'entrada i sortida són molt útils en termes de la robustesa i el comportament en el domini freqüencial. Per sistemes SISO es coneix que el mòdul $|S(j\omega)|$ avaluat com a funció de la freqüència dona molta informació sobre l'efectivitat de la realimentació. De fet és el guany entre una entrada sinusoidal i l'error, $|e(\omega)|/|r(\omega)| = |S(j\omega)|$.

Per sistemes MIMO una generalització útil és el quocient entre la norma-2 de l'error i l'entrada. Aquest guany depèn de la direcció de $r(\omega)$ però es pot acotar amb els valors singulars de S .

$$\sigma(S(j\omega)) \leq \frac{\|e(\omega)\|_2}{\|r(\omega)\|_2} \leq \bar{\sigma}(S(j\omega))$$

En termes de comportament, és desitjable que aquest quocient es mantingui petit en qualsevol direcció de $r(\omega)$, incloent la direcció del “pitjor cas” la qual dona un guany de $\bar{\sigma}(S(j\omega))$. Si es fa servir una funció de pes per analitzar el comportament el seu invers, $1/|w_p(j\omega)|$, representa el màxim permès per aquest quocient per cada freqüència. Això es pot imposar en termes de valors singulars:



$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(S(j\omega)) \leq 1/|w_p(j\omega)|, \forall \omega &\Leftrightarrow \overline{\sigma}(w_p S) < 1, \forall \omega \\ &\Leftrightarrow \|w_p S\|_\infty < 1 \end{aligned}$$

on la norma H_∞ es defineix com el pic del màxim valor singular de la resposta freqüencial.

$$\|M(s)\|_\infty = \max_{\omega} \overline{\sigma}(M(j\omega))$$

Els valors singulars de $S(j\omega)$, es poden representar en funció de la freqüència. Normalment, són petits a baixes freqüències on la realimentació és efectiva, i s'aproximen a 1 per altes freqüències ja que qualsevol sistema físic és estrictament propi.

$$\omega \rightarrow \infty: L(j\omega) \rightarrow 0 \Rightarrow S(j\omega) \rightarrow I$$

El màxim valor singular, $\overline{\sigma}(S(j\omega))$, normalment presenta un pic major que 1 al voltant les freqüències de tall. Aquest pic és indesitjable, però és inevitable per sistemes reals.

Per sistemes SISO es defineix la banda passant com la freqüència a partir de la qual la realimentació és efectiva. Per sistemes MIMO la banda passant dependrà de les direccions, i es té una regió de banda passant entre una freqüència baixa on el màxim valor singular, $\overline{\sigma}(S)$, assoleix 0,7 (la direcció pitjor o el guany més baix) i una freqüència més gran on el mínim valor singular, $\underline{\sigma}(S)$, assoleix 0,7 (la direcció millor o el guany més elevat). Si es vol associar una única freqüència de banda passant per un sistema multivariable, llavors cal considerar el cas de la direcció pitjor (el guany menor), i es defineix

· *Banda passant*, ω_B : Freqüència on $\overline{\sigma}(S)$ travessa $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$ des de sota.

S'entén que la banda passant és com a mínim ω_B per qualsevol direcció de la senyal d'entrada (referència o pertorbació). Sent $S = (I + L)^{-1}$, llavors

$$\underline{\sigma}(L) - 1 \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(S)} \leq \underline{\sigma}(L) + 1$$

Per tant a freqüències on la realimentació és efectiva ($\underline{\sigma}(L) \gg 1$) s'obté $\overline{\sigma}(S) \approx 1/\underline{\sigma}(L)$, i a la freqüència de banda passant ($1/\overline{\sigma}(S(j\omega_B)) = \sqrt{2} = 1,41$) s'obté que $\underline{\sigma}(L(j\omega_B))$ es troba entre



0,41 i 2,41. Per tant, la banda passant és aproximadament quan $\underline{\sigma}(L)$ travessa 1. Finalment, a freqüències elevades on per qualsevol sistema real $\underline{\sigma}(L)$ és petit s'obté $\overline{\sigma}(S) \approx 1$.

C.6 MRI Morari resilience index

El mínim valor singular de la planta $\underline{\sigma}(G(j\omega))$, avaluat en funció de la freqüència, és una mesura útil per avaluar la viabilitat d'aconseguir un control acceptable. Si les entrades i les sortides s'han escalat com s'explica en l'apartat C.8, llavors amb una entrada manipulada unitària (mesurada per la norma-2), podem aconseguir una magnitud de sortida com a mínim $\underline{\sigma}(G)$ en qualsevol direcció de sortida. Generalment voldrem $\underline{\sigma}(G)$ el més gran possible. El mínim valor singular de la planta i el seu ús és discutit per Morari (1983), i Yu and Luyben (1986) anomenant $\underline{\sigma}(G(j\omega))$ el "Morari resilience index".

C.7 Número de condicionament CN i Matriu de guanys relatiu RGA

Dues mesures que són utilitzades per quantificar el grau de direccionalitat i el nivell d'interacció bidireccional en sistemes MIMO, són el número de condicionament CN (de l'anglès Conditional Number) i la matriu de guanys relatiu RGA (de l'anglès Relative Gain Array).

C.7.1 Número de condicionament

Es defineix el CN d'una matriu com el quocient entre el màxim i el mínim valors singulars,

$$\gamma(G) = \frac{\overline{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)} \quad (\text{Eq. C.18})$$

Una matriu amb un CN gran es diu que està mal condicionada. El CN depèn fortament de l'escalat de les entrades i les sortides. Per ser més específics, si D_1 i D_2 són matrius diagonals d'escalat, llavors els CN de les matrius G i $D_1 G D_2$ poden estar arbitràriament allunyats. En general, la matriu G s'ha d'escalar amb bases físiques, per exemple, dividint cada entrada i sortida per el valor esperat o desitjat més gran, veure apartat C.8.

El CN s'utilitza com a mesura de la controlabilitat d'entrada-sortida, i en particular està postulat que un CN gran indica sensibilitat a la incertesa. Això no és cert en general, però el



contrari és manté; si el CN és petit, llavors els efectes multivariable de la incertesa no són seriosos.

Si el CN és gran (més gran de 10), llavors això pot indicar problemes de control:

1. Un CN, $\gamma(G) = \bar{\sigma}(G) / \underline{\sigma}(G)$, gran pot ser causat per un valor petit de $\underline{\sigma}(G)$, la qual cosa és generalment indesitjable o per un valor gran de $\bar{\sigma}(G)$, fet que no implica necessàriament un problema.
2. Un CN gran pot significar que la planta té grans elements en la matriu RGA, fet indicatiu de problemes fonamentals de control.
3. Un CN gran implica que el sistema és sensible a una entrada no estructurada d'incertesa, però aquest tipus d'incertesa no sol passar en la pràctica. No es pot concloure que una planta amb un CN gran sigui sensible a l'incertesa.

C.7.2 Matriu de guanys relatius RGA

La RGA d'una matriu quadrada no singular G és una matriu quadrada definida com

$$RGA(G) = \Lambda(G) = Gx(G^{-1})^T \quad (\text{Eq. C.19})$$

on x denota la multiplicació element per element.

Bristol (1966) originalment va introduir la RGA, com una mesura, en estat estacionari, de les interaccions per control descentralitzat. Degut aquesta definició original, s'acostuma a interpretar que la RGA és significativa només a $\omega = 0$. Al contrari, en molts casos és el valor de la RGA a freqüències properes a la freqüència de tall quan més important és.

La RGA té bastants propietats algebraiques, de les quals les més destacades són:

1. És independent de l'escalat de les entrades i sortides.
2. Les seves files i columnes sumen 1.
3. La norma-1 de la RGA és molt propera al CN minimitzat γ^* . Això significa que plantes amb grans elements en la RGA estan sempre mal condicionades (amb un CN



gran), però el contrari no es pot sostenir (una planta amb un CN gran pot tenir elements petits en la RGA).

4. Un canvi relatiu en un element de G igual a l'invers negatiu del seu corresponent element de la RGA produeix singularitat.
5. La RGA és la matriu identitat si G és triangular superior o inferior.

De la última propietat se segueix que la RGA (o més precisament $A - I$) proporciona una mesura d'interacció bidireccional.

A més de les propietats llistades anteriorment, la RGA té moltes propietats de control:

1. La RGA és un bon indicador de sensibilitat a la incertesa:
 - a) Incertesa en els canals d'entrada. Plantes amb grans elements en la RGA aprop de la freqüència de tall són fonamentalment difícils de controlar degut a la sensibilitat de la incertesa de l'entrada (p.e, causat per incertesa o mal funcionament de l'actuador dinàmic). En particular, desacobladors o altres tipus de controladors no s'han d'utilitzar per plantes amb elements grans en la RGA.
 - b) Incertesa de l'element. Elements grans en la RGA impliquen sensibilitat a l'incertesa element per element. Aquest tipus d'incertesa no acostuma a succeir en la pràctica degut als acoblaments físics entre els elements de la funció de transferència. Per tant, la incertesa d'entrada diagonal (que sempre està present) acostuma a ser la que més influència té en plantes amb grans elements en la RGA.
2. *RGA i RHP-zeros*. Si el signe de un element de la RGA canvia des de $s = 0$ fins $s = \infty$, llavors hi ha un RHP-zero en G o en algun subsistema de G .
3. *Plantes no quadrades*. Entrades extra: Si la suma de els elements en una columna de la RGA és menor ($\ll 1$), llavors es pot considerar eliminar la corresponent entrada. Sortides extra: Si tots els elements en una fila de la RGA són petits ($\ll 1$), llavors la corresponent sortida no pot ser controlada.



4. *Domini Diagonal*. La RGA pot ser utilitzada per mesurar el domini diagonal, per la simple quantitat

$$RGA - number = \|\Lambda(G) - I\|_{sum}$$

Per control descentralitzat es preferible parelles per les quals el valor de la RGA a les freqüències de treball sigui proper a 1.

5. *RGA i control descentralitzat*.

- a) *Integritat*: Per plantes estables evitar aparellament entrada-sortida amb elements negatius, en estat estacionari, de RGA. D'un altre banda, si els controladors són dissenyats independentment amb una acció integral, llavors les interaccions provocaran inestabilitat tant en el cas quan tots els llaços estan tancats, o quan el llaç corresponent al guany relatiu negatiu esdevé inactiu (per exemple degut a la saturació).
- b) *Estabilitat*: Són preferibles parelles corresponents amb un valor de RGA pròxim a 0 a la freqüència de treball.

Per un anàlisi detallat de la representació assolible de la planta (anàlisi de controlabilitat entrada sortida), s'ha de considerar els valors singulars, RGA i CN com a funcions de la freqüència. En particular, el rang de la freqüència de treball és important. A més, pertorbacions i la presència de inestables (RHP) pols de la planta i zeros s'han de considerar.

C.8 Escalat

Escalar és molt important en les aplicacions pràctiques perquè fa molt més senzill l'anàlisi del model i el disseny del controlador. Escalar requereix avaluar, al principi del procés de disseny, el comportament requerit del sistema. Cal decidir sobre les magnituds esperades de les pertorbacions i els canvis en les referències, les magnituds permeses per cada senyal d'entrada, i en la desviació permesa per cada sortida.

Sigui el model lineal sense escalar del procés en variables desviades,

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \hat{G}\hat{u} + \hat{G}_d\hat{d} \\ \hat{e} &= \hat{y} - \hat{r} \end{aligned} \quad (Eq. C.20)$$



on el barret (\hat{x}) s'utilitza per indicar que les variables estan en les seves unitats sense escalar. Una aproximació útil per escalar és fer que les variables siguin menor que 1 en magnitud. Això es realitza dividint cada variable pel seu màxim canvi esperat o permès. Per pertorbacions i entrades manipulades, s'utilitzen les variables escalades

$$d = \frac{\hat{d}}{\hat{d}_{MAX}}, \quad u = \frac{\hat{u}}{\hat{u}_{MAX}}$$

on:

- \hat{d}_{MAX} - Canvi més gran esperat en la pertorbació

- \hat{u}_{MAX} - Canvi més gran permès en l'entrada

La màxima desviació d'un valor nominal s'ha d'escollir pensant en el màxim valor que es pot esperar, o permetre, en funció del temps. Les variables \hat{y} , \hat{e} i \hat{r} tenen les mateixes unitats, per tant es pot aplicar el mateix factor d'escalat per cadascuna. Dos alternatives són possibles:

- \hat{e}_{MAX} - Màxim error de control permès

- \hat{r}_{MAX} - Canvi més gran esperat en el valor de referència

Com un dels principals objectius de control es minimitzar l'error de control, \hat{e} , s'acostuma a escollir per escalar respecte el màxim error de control:

$$y = \frac{\hat{y}}{\hat{y}_{MAX}}, \quad r = \frac{\hat{r}}{\hat{r}_{MAX}}, \quad e = \frac{\hat{e}}{\hat{e}_{MAX}}$$

Per formalitzar el procediment d'escalat, s'introdueixen els factors d'escalat

$$D_e = \hat{e}_{MAX}, \quad D_u = \hat{u}_{MAX}, \quad D_d = \hat{d}_{MAX}, \quad D_r = \hat{r}_{MAX}$$

Per sistemes MIMO cada variable en els vectors \hat{d} , \hat{e} , \hat{u} i \hat{r} poden tenir valors màxims diferents, en aquest cas D_e , D_u , D_d i D_y esdevenen matrius diagonals d'escalat.

Les variables escalades utilitzades per propòsits de control són:



$$d = D_d^{-1} \hat{d}, \quad u = D_u^{-1} \hat{u}, \quad y = D_e^{-1} \hat{y}, \quad e = D_e^{-1} \hat{e}, \quad r = D_e^{-1} \hat{r}$$

Substituint en l'equació C.20 s'obté

$$D_e y = \hat{G} D_u u + \hat{G}_d D_d d; \quad D_e e = D_e y - D_e r$$

i si s'introdueixen les funcions de transferència escalades

$$G = D_e^{-1} \hat{G} D_u, \quad G_d = D_e^{-1} \hat{G}_d D_d$$

El model en termes de variables escalades és

$$\begin{aligned} y &= Gu + G_d d \\ e &= y - r \end{aligned} \quad (\text{Eq. C.21})$$

Aquí u i d han de ser menors que 1, i en alguns casos és útil introduir una referència escalada \tilde{r} , que és inferior a 1. Això es pot realitzar dividint la referència pel seu màxim canvi esperat

$$\tilde{r} = \frac{\hat{r}}{\hat{r}_{MAX}} = D_r^{-1} \hat{r}$$

Llavors s'obté

$$r = R\tilde{r} \quad \text{on} \quad R = D_e^{-1} D_r = \frac{\hat{r}_{MAX}}{\hat{e}_{MAX}}$$

En el sistema en variables escalades el següent objectiu de control és rellevant: en termes de variables escalades es té que $|d(t)| \leq 1$ i $|\tilde{r}(t)| \leq 1$, i l'objectiu de control és manipular u amb $|u(t)| \leq 1$ per aconseguir que $|e(t)| = |y(t) - r(t)| \leq 1$ (com a mínim la major part del temps).



D Funcions programades en MATLAB

En aquest annex es presenten els fitxers més importants pel funcionament de les simulacions i la representació gràfica del comportament del sistema. Aquests permeten realitzar la selecció de les estructures de control i els controladors més adients per cada situació proposada.

La programació s'ha efectuat amb el llenguatge de MATLAB i el seu funcionament només es podrà realitzar en aquest mateix entorn.

D.1 ModelEscalat

Funció que retorna el model en espai d'estats amb variables escalades. L'argument d'entrada *Model* és una dada de tipus *sys* que conté la informació de l'espai d'estats del model linealitzat. Els arguments d'entrada D_U i D_Y són les matrius d'escalat dels vectors d'entrada i sortida, respectivament. La funció retorna una dada de tipus *sys* que conté l'espai d'estats del model ja escalat.

```
function [Model_esc] = ModelEscalat (Model_sys, DU, DY)
    Model_esc = Model_sys;
    % i és el nombre d'entrades al sistema, en el nostre cas 9.
    for i = 1 : 9
        BESC( :, i ) = Model_sys.b( :, i ) * DU( i, i );
    end
    Model_esc.b = BESC;
    % j és el nombre de sortides del sistema, en el nostre cas 2.
    for j = 1 : 2
        CESC( j, :) = Model_sys.c( j, :) / DY( j, j );
    end
    Model_esc.c = CESC;
return
```

D.2 CalculRGA

Es presenta el codi emprat pel càlcul de la matriu RGA, el qual retorna el gràfic en 2D del valor de la primera posició de la matriu RGA, en funció de la freqüència. Per funcionar requereix que existeixi una dada de tipus *sys*, anomenada *Model_sys*, que conté l'espai d'estats del model linealitzat.



script CalculRGA

```

n=1;
for i=1:8
    for j=i+1:9
        results=[ ];
        % Es crea el model reduït sysred per treballar únicament amb dues
        % entrades.
        sysred(:, 1)=Model_sys(:, i);
        sysred(:, 2)=Model_sys(:, j);
        % Es seleccionen una sèrie de freqüències on es calcularà el valor
        % de la RGA.
        W=[0.00001 0.00005 0.0001 0.0005 0.001 0.005 0.01 0.05 0.1 0.5 1 5 10 50
        100 500];
        [M,N] = size(W);
        % Es calcula la matriu RGA per cadascuna de les freqüències
        % definides anteriorment.
        for k=1:N
            % Càlcul de la RGA utilitzant la definició  $RGA = G(j\omega) \times G(j\omega)^{-1}$ 
            rga=evalfr(sysred, j*W(k)).*(inv(evalfr(sysred, j*W(k))))';
            % Guarda de les dades freqüència, i els valors de la
            % diagonal de la matriu RGA.
            results=[results; W(k) rga(1,1) rga(2,2) ];
        end
        % Per cadascuna de les possibles combinacions d'entrades, es
        % guarden dins de totalresults els valors de les freqüències,
        % la RGA(1,1) i la combinació d'entrada n
        totalresults(:, :, n)=results(:, :);
        n=n+1;
    end
end
% Es grafica per les 36 possibles combinacions d'entrades el valor de la RGA(1,1) en
% funció de la freqüència
for l=1:36
    semilogx(W,totalresults(:, 2, l))
    hold on
end
totalresults(9, 2, :)
end script

```

D.3 CalculCN_MRI

En aquest apartat s'exposa el codi utilitzat per realitzar el càlcul del CN i MRI. L'execució del codi permet representar els gràfics en 2D del CN i MRI en funció de la freqüència. Degut a la sensibilitat d'aquests índexs de controlabilitat a l'escalat del model, es necessari treballar amb



un model ja escalat adientment. Es necessari l'existència d'una dada de tipus *sys*, anomenada *Model_esc*, que conté l'espai d'estats escalat del model linealitzat.

script CalculCN_MRI

```
clear sysred;
for m=1:8
    for n=m+1:9
        % Es crea el model reduït sysred, a partir del model escalat, per
        % treballar únicament amb dues entrades.

        sysred(:,1)=Model_esc(:, m);
        sysred(:,2)=Model_esc(:, n);

        % La funció sigma realitza la descomposició en valors singulars
        % d'un sistema, en una sèrie de freqüències predeterminades
        % per Matlab.

        [SV, W]=sigma(sysred);
        %El valor SV(2,:) és directament el valor del MRI
        % Es guarda el valor del CN per cada freqüència en la tercera posició
        % del vector SV.
        SV(3, :)=SV(1, :)./SV(2, :);
        % Es representa el MRI en funció de la freqüència
        figure (1);
        hold on;
        loglog(W, SV(2, :));
        % Es representa el CN en funció de la freqüència
        figure (2);
        hold on;
        loglog(W,SV(3,:));
    end
end
end script
```

D.4 CalculConstantsControladors

Per la selecció de les constants del controlador s'ha desenvolupat el següent programa que permet estudiar de forma gràfica el comportament dels paràmetres sobrepuig màxim i temps d'establiment amb la variació de les constants K_p i K_i dins del rang de validesa establert en l'anterior apartat per cada llaç de control a dissenyar.



Script CalculConstantsControlador

```

c=1;          % inicialització del comptador del número de simulacions realitzades
% introducció del número corresponent a l'entrada, la sortida i la pertorbació,
% respectivament
x=input('x=')
y=input('y=')
p=input('p=')
P=input('P=')          % valor de la variació en la pertorbació
Yd=input('Yd=')       % valor de la variació en la sortida a controlar
% valor inicial, de l'increment i final de  $K_p$  i  $K_i$ 
startKp=input('startKp=')
startKi=input('startKi=')
pasKp=input('pasKp=')
pasKi=input('pasKi=')
endKp=input('endKp=')
endKi=input('endKi=')
Gu=tf(Model_sys(y,x));          % funció de transferència entre entrada i sortida
Gp=tf(Model_sys(y,p));          % fun. de transferència entre pertorbació i sortida
for Kp=startKp:pasKp:endKp
    Kp
    for Ki=startKi:pasKi:endKi
        Ki;
        Gc=tf([Kp Ki],[1 0]);          % funció de transferència del controlador
        G=series(Gc,Gu);
        Y=parallel(series(series(P,Gp),feedback(1,G))),series(Yd,(feedback
        (G,1))));
        [X,T]=step(Y);          %X: valor de la resposta al graó
                                %T: instant de temps corresponent a cada X

        absX=abs(X);
        Sp=max(absX);          % Sobrepuig màxim del sistema
        Tf=T(end);          % Temps final

        % càlcul del temps d'establiment del sistema
        margesup=absX(end)+abs(absX(end)-max(absX))*0.02;
        margeinf=absX(end)-abs(absX(end)-max(absX))*0.02;
        n=size(absX);
        i=n(1);
        while margeinf<absX(i) & margesup>absX(i)
            i=i-1;
        end
        Te=T(i);          % temps d'establiment del sistema
        clear X;
        clear absX;
        clear T;
        KP(c)=Kp;
        KI(c)=Ki;
        SP(c)=Sp;
        TE(c)=Te;
        c=c+1;
    end
% Gràfiques dels resultats
tri=delaunay(KP,KI);          % triangulació de la regió

```



```
    trisurf(tri,KP,KI,SP)           % gràfica de superfície del valor del sobrepuig  
                                  màxim del sistema  
    figure;  
    trisurf(tri,KP,KI,TE)         % gràfica de superfície del valor del temps  
                                  d'establiment del sistema  
end script
```



E Valoració econòmica del Projecte

El present Projecte és un projecte d'investigació i recerca, i dintre del seu pressupost cal incloure els costos econòmics derivats de la seva realització. En concordància amb les característiques del mateix, aquests costos es poden considerar classificats en els següents conceptes:

- Costos relatius al personal
- Costos derivats dels equips
- Altres costos varis

E.1 Cost del personal

En aquest apartat s'inclouen els costos relatius al personal que ha desenvolupat el projecte. El projecte engloba un seguit de tasques que es poden desglossar en les que s'encarregaria de desenvolupar pròpiament un enginyer, com a director del projecte i desenvolupador del mateix, les d'un programador, com implementador dels programes i del model matemàtic, i la feina de documentació de la memòria.

El temps invertit en la realització del projecte s'estima en 12 mesos i considerant que la dedicació per dia al projecte es equivalent a mitja jornada, el nombre total d'hores invertides en el mateix és:

$$12 \text{ mesos} \times \frac{20 \text{ dies}}{1 \text{ mes}} \times \frac{4 \text{ hores}}{1 \text{ dia}} \times 2 \text{ membres} = 1.920 \text{ hores}$$

L'estimació del percentatge de realització de les diferents tasques sobre el total d'hores invertides és:

- 70% en temes d'enginyer
- 20% en temes de programador
- 10% en temes de documentació de la memòria



El cost total del personal, aplicant els següents costos per hora, resulta:

Recurs	Cost [€/h]	Dedicació [h]	Cost [€]
Enginyer	60	1.344	80.640
Programador	25	384	9.600
Redactor	15	192	2.880
Total		1.920	93.120

Taula D.1.- Cost dels recursos humans

E.2 Cost dels equips

En aquest apartat s'han inclòs els costos d'amortització dels equips informàtics i el software empleat per portar a terme el projecte. Els equips utilitzats han estat dos ordinadors personals, una impressora i software ofimàtic i de càlcul matemàtic.

Els ordinadors emprats són:

- PC portàtil amb processador Pentium IV a 3,06GHz valorat en 1.500 €
- PC de sobretaula amb processador AMD Athlon 64 3200+ valorat en 800 €

La impressora utilitzada és:

- Hewlett Packard DeskJet 6122 que té un preu de 130 €

Pel que fa al software utilitzat cal destacar:

- Sistema operatiu Windows XP
- Suite ofimàtica de Microsoft Office 2003 Standard
- Programa MATLAB 7.0 Release 14 (amb les Toolboxes Optimization, Curve Fitting, Control Design i Simulink 6.0)
- Programa Adobe Acrobat 7.0 Professional

El preu d'aquest conjunt de software amb llicències és de 3.879 €.

Per calcular l'amortització dels equips anteriors es consideren els següents criteris:



- S'utilitza el mètode d'amortització lineal, per tant es considera que el desgast de l'actiu és constant al llarg del temps.
- Pels equips i les aplicacions informàtiques (software) el PGC (Pla General Comptable) estableix un període d'amortització mínim de 4 anys i un màxim de 8. Es considera que tant els ordinadors com el software produiran rendiments, permetran generar ingressos, durant un període de quatre anys. Per tant, la seva vida útil serà de quatre anys, és a dir s'amortitza a un "rate" del 25% anual. D'aquesta manera es segueix també el criteri fiscal que estableix un màxim del 25% (4 anys) i un mínim del 12,5% (8 anys) per aquest tipus d'actiu.
- La base d'amortització és el preu de cost de l'actiu ja que no s'estima valor residual per aquest.

Per tant l'amortització anual es pot calcular com segueix

$$\text{Amortització anual} = \frac{\text{Base d'amortització}}{\text{Vida útil}}$$

Actiu	Detall	Cost [€]	Vida útil [Anys]	Amortització anual [€]
Equips Informàtics	PC portàtil	1.500	4	375
	PC sobretaula	800	4	200
	Impressora	130	4	32,5
Software	Windows XP	309	4	77,25
	Microsoft Office 2003	670	4	167,5
	Matlab 7.0 R14	2.300	4	575
	Adobe Acrobat 7.0 Pro	600	4	150
Total		6.309		1.577,25

Taula D.2.- Cost i amortització dels equips



E.3 Altres costos varis

Sota aquest títol s'engloben totes les despeses que s'han produït durant la realització del projecte en concepte de material d'oficina, recàrregues de tinta d'impressora, fotocòpies, etc., estimant el conjunt de costos en 100 €.

E.4 Cost total

El cost total del projecte inclou tots els apartats anteriors, resultant aquest de:

Concepte	Cost [€]
Personal	93.120
Equips i software informàtic	1.577,25
Varis	100
Total	94.797,25

Taula D.3.- Cost del projecte

