

Mesures de regularitat per a polígons convexos

Maria Saumell Mendiola

Treball de Fi de Màster

FME

Directors:

Ferran Hurtado Díaz (MA2, UPC)
Vera Sacristán Adinolfi (MA2, UPC)

Febrer de 2008

Agraïments

En primer lloc, m'agradaria donar les gràcies al Ferran Hurtado i la Vera Sacristán per trobar temps per a mi en la seva agenda, per oferir-me l'oportunitat d'aprendre d'ells, i també per la seva calidesa, els seus ànims i el seu entusiasme cap als problemes de geometria computacional. Sempre han aconseguit que em sentís afortunada quan podia dedicar el meu temps a pensar en aquests problemes. També els he d'agrair, a ells i a alguns més, haver-me donat motius per convèncer-me que val la pena intentar que aquest no sigui el meu últim treball acadèmic.

Molt important, també, ha estat la paciència dels meus pares i la meva germana. Espero (i ells encara més!) aprendre algun dia a deixar de posar-me de mal humor cada vegada que no se m'acudeixi un bon algorisme o que no em surti una demostració.

També m'agradaria donar les gràcies a l'Antonio Rodríguez, per la seva petita xerrada sobre la relació entre el mètode dels elements finits i els polígons regulars, i a l'Abdó Roig, pel seu contraexemple (i al Francesc Fité, perquè ell també hi va col·laborar).

Finalment, dedico aquest treball a les meves dues àvies, pel seu coratge durant aquest difícil 2007.

Índex

Agraïments	iii
1 Introducció	1
1.1 Antecedents i motivació	1
1.2 Terminologia bàsica	2
1.3 Criteris estudiats en aquesta memòria	2
2 Polígons del mateix nombre de costats	3
2.1 Introducció	3
2.2 Inscripció dins d'una circumferència	3
2.3 Cerca de la posició regular	8
2.3.1 Minimització del desplaçament màxim	8
2.3.2 Minimització de la suma de desplaçaments	11
2.4 Altres paràmetres relacionats	11
3 Inscripció i circumscripció	13
3.1 Introducció	13
3.2 Inscripció	13
3.2.1 Resolució amb un algorisme genèric	14
3.2.2 Resolució per casos segons tipus de contactes	15
3.2.3 Simplificació de la complexitat de l'algorisme genèric	29
3.3 Circumscripció	29
3.3.1 Resolució amb un algorisme genèric	30
3.3.2 Resolució per casos segons tipus de contactes	30
3.3.3 Simplificació de la complexitat de l'algorisme genèric	32
4 Simetria radial	33
4.1 Introducció	33
4.2 Distribució equiangular	33
4.3 Centres areals	38
4.3.1 Minimització del triangle més gran	39
4.3.2 Maximització del triangle més petit	44
4.3.3 Minimització de la diferència entre els triangles	45
5 Resum i conclusions	49

Capítol 1

Introducció

1.1 Antecedents i motivació

Els polígons regulars han fascinat els matemàtics de totes les èpoques. Entre els nombrosos fets i documents que avalen aquesta afirmació, podem assenyalar que ja apareix un mètode per a la construcció del pentàgon regular amb regla i compàs en els *Elements* d'Euclides, obra escrita al voltant de l'any 300aC, i també que, tot i les nombroses aportacions a les matemàtiques que va realitzar Gauss al llarg de la seva vida, estava tan orgullós de la seva construcció del polígon regular de disset costats amb regla i compàs que va demanar que aquest polígon fos gravat a la seva tomba.

Aquest interès cap als polígons equilàters i equiangles no és, però, exclusiu dels matemàtics, ja que força objectes de la vida quotidiana que han estat fabricats per l'ésser humà prenen aquesta forma: senyals de trànsit, instruments musicals, logotips, joies, mobiliari, jocs diversos, productes alimentaris... Per aquest motiu, en els últims anys s'han desenvolupat diferents mètodes (vegeu-ne algun a [5] i [18]) amb l'objectiu de detectar polígons regulars en imatges donades (per exemple, un senyal de perill en una panoràmica d'una carretera). El que nosaltres ens proposem és, no obstant, diferent: donat un polígon convex qualsevol, volem associar-hi paràmetres que ens permetin saber si aquest polígon té una forma semblant a la d'algun polígon regular, és a dir, si és *molt o poc* regular. Un precedent d'aquest problema que ha despertat l'interès de bastants investigadors és l'estudi de coeficients no de regularitat sinó de convexitat per a polígons i per a conjunts de punts (vegeu, per exemple, [6] i [27]).

Endemés de l'interès intrínsec i acadèmic hi ha, si més no, tres possibles àmbits d'aplicació d'aquesta investigació, que són la metrologia, la robòtica i la generació de malles en el mètode dels elements finits. La metrologia estudia, entre d'altres coses, les mides dels objectes. Sovint es fabriquen peces mecàniques que passen un control de qualitat que consisteix a verificar que no es desvien massa d'allò desitjable a través de la comprovació que compleixen certes propietats; si el que es pretén és que aquestes peces siguin gairebé regulars, les mesures que proposem poden ser tests per al seu control de qualitat. Pel que fa a la robòtica, ja hem esmentat abans la problemàtica de la detecció automàtica de polígons regulars en els objectes. Finalment, en el mètode dels elements finits es fan discretitzacions del domini del problema i es calculen integrals sobre cada regió. Com que aquestes integrals es fan per quadratures, prèviament es realitza una transformació isoperimètrica per passar de la regió original a un polígon regular del mateix nombre de costats, i aquesta transformació es deteriora si els dos polígons tenen formes molt diferents. És clar, doncs, que les nostres mesures de regularitat poden esdevenir una eina útil per al càlcul d'índexs de qualitat per a les malles.

1.2 Terminologia bàsica

Al llarg de tot el treball seguim els convenis que s'expliquen a continuació.

Treballem amb polígons convexos on tots els angles són estrictament menors que π . Donat un n -gon convex P , la llista p_1, p_2, \dots, p_n denota els seus vèrtexs donats en ordre positiu, e_i és el costat d'extremes p_i i p_{i+1} , i l_i és la longitud d'aquest costat. Tots aquests índexs es regeixen per l'aritmètica mòdul n .

Sempre que parlem d'un arc o d'una poligonal d'origen p i final q que formen part de la frontera d'un cercle o d'un polígon, respectivament, ens referim a l'arc o a la poligonal que uneix p i q i deixa la regió corresponent a la seva esquerra.

L'expressió $d(p, q)$ denota la distància euclidiana entre p i q , i, quan escrivim $\triangle abc$, ens referim al triangle de vèrtexs a , b i c .

1.3 Criteris estudiats en aquesta memòria

Aquest treball s'emmarca dins de la branca de la geometria que s'ocupa de la forma dels objectes; en geometria computacional s'han desenvolupat molts algorismes de simplificació de la forma (càlcul de l'envolupant convexa, de l'anell contenidor mínim...), o de transformació (convexificació de polígons, reconfiguracions...); vegeu [26]. És natural de veure com s'adaptin els mètodes al nostre cas particular i què esdevenen les seves complexitats, i quan se'n poden fer *ad hoc*. Així, algunes de les mesures de regularitat que proposem són fruit de problemes nous, però unes altres sorgeixen de problemes coneguts i es busca millorar el temps d'execució dels algorismes preexistents.

Hi ha molts criteris que vénen al cap a l'hora de mesurar si un polígon convex és molt lluny o molt a prop de ser regular. Per exemple, des d'un punt de vista estadístic, es pot calcular la desviació estàndard de la sèrie l_1, l_2, \dots, l_n i també la de la seqüència dels angles interiors de P , i afirmar que P és *molt regular* si aquests dos valors són molt petits. Nosaltres, però, ens hem centrat en aquelles mesures que, a més de ser naturals, corresponen a un enfocament propi de la geometria discreta i computacional i comporten el desenvolupament d'algorismes per al seu càlcul i l'anàlisi de la seva complexitat.

Així, classifiquem els paràmetres que analitzem en aquesta memòria en tres grups. Al Capítol 2, el fil conductor és la comparació de P amb un polígon regular del mateix nombre de costats. En les mesures que expliquem amb més detall, P és un polígon *cíclic*, és a dir, amb tots els vèrtexs concíclics, i es vol que els seus vèrtexs llisquin al llarg de la circumferència circumscrita fins que es converteixin en els vèrtexs d'un polígon regular amb el "mínim" desplaçament possible. Aquest desplaçament dóna una mesura de la regularitat de P .

Al Capítol 3 també es realitzen comparacions de P amb polígons regulars, però aquests tenen un nombre de costats arbitrari. S'estudien dues versions del problema clàssic de la disciplina que consisteix a, donats dos polígons convexos qualssevol, trobar la còpia més gran d'un dins de l'altre realitzant translacions, rotacions i homotècies. Desenvolupem els casos en què un dels dos polígons és regular, i els criteris de regularitat s'obtenen de la comparació entre l'àrea de P i les dels polígons regulars circumscrit i inscrit obtinguts.

Al Capítol 4 proposem criteris amb la pretensió de mesurar la regularitat de P a través de la seva simetria radial. En primer lloc, fixem en el baricentre de P un feix de semirectes concurrents en un punt i busquem l'angle de rotació del feix que divideix P en n porcions tan semblants com es pugui. Després, busquem un punt de P que també permeti dividir el polígon en n regions d'àrees similars, en aquest cas traçant segments des del punt fins als n vèrtexs de P . Les mesures de regularitat estan relacionades amb el grau d'equilibri que s'assoleix en aquestes divisions òptimes.

Concloem en el Capítol 5 amb un breu resum del treball realitzat i algunes conclusions que n'hem extret.

Capítol 2

Polígons del mateix nombre de costats

2.1 Introducció

Si el nostre objectiu és obtenir informació sobre com de prop de ser regular està un polígon convex, la primera possibilitat natural d'abordar la qüestió és comparar el polígon donat amb un de regular del mateix nombre de costats. En aquest primer capítol desenvolupem aquesta idea, la qual dóna lloc als primers criteris de regularitat del treball.

La tasca d'intentar trobar un bon criteri que permeti realitzar una comparació entre dos polígons pot resultar complicada si no s'imposa alguna condició que limiti el ventall de figures amb les quals es treballa. Per exemple, no té gaire sentit contraposar dos cossos d'àrees molt diferents si es té la possibilitat d'obtenir-ne còpies de magnituds més semblants mitjançant homotècies. Així doncs, els nostres polígons de partida comparteixen alguna característica: tenen la mateixa àrea, el mateix perímetre, o estan inscrits en la mateixa circumferència.

En els paràmetres principals considerats en aquest capítol, el polígon convex i el polígon regular se suposen inscrits en una mateixa circumferència. És per aquest motiu que a la Secció 2.2 comencem donant un mètode que ens permet passar d'un polígon convex donat a un polígon amb la mateixa seqüència ordenada de longituds dels costats, però inscrit en una circumferència. Notem que aquest plantejament de focalitzar l'atenció en la seqüència ordenada de longituds dels costats relaciona les nostres mesures amb tota una sèrie de problemes inspirats pel fet que un polígon es pot utilitzar per modelitzar una estructura articulada formada per frontisses (representades pels vèrtexs del polígon) i barres rígides (representades pels seus costats); vegeu [7].

En el nostre problema, els vèrtexs del polígon cíclic d'entrada poden lliscar sobre la circumferència circumscriu i busquem que es col·loquin en *posició regular*, és a dir, com a vèrtexs d'un polígon regular inscrit en la mateixa circumferència, de manera que es minimitzi algun paràmetre que sigui indicatiu de com de prop de la posició regular estava la configuració inicial. La Secció 2.3 està dedicada al càlcul de dos d'aquests paràmetres.

Finalment, a la Secció 2.4 es proposen altres mesures de regularitat en les quals no hem aprofundit, o bé perquè no presenten cap dificultat computacional, o bé perquè queden fora de l'abast d'aquest treball.

2.2 Inscripció dins d'una circumferència

Donat un polígon convex P de n vèrtexs amb seqüència ordenada de longituds dels costats l_1, l_2, \dots, l_n , ens proposem trobar el radi $r(P)$ de la circumferència en la qual es pot inscriure un polígon P' convex amb

la mateixa seqüència ordenada de longituds dels costats. En primer lloc, necessitem confirmar l'existència i unicitat de $r(P)$:

Teorema 2.1 [19, 22]. *Si P és un polígon convex, existeix un polígon P' cíclic amb la mateixa seqüència ordenada de longituds dels costats que P . El polígon P' és únic llevat d'isometries.*

A [19] i [22] s'exposen dues proves diferents de l'existència de P' . La unicitat es pot trobar a [19]. La demostració de l'existència que es fa a [22] és per inducció i no proporciona un mètode ràpid ni exacte per al càlcul de $r(P)$. En canvi, a [19] s'explicita una funció en r de la qual $r(P)$ és arrel. Per obtenir-la, és necessari distingir dos casos (vegeu [19]), la interpretació geomètrica dels quals és:

Definició 2.2. Diem que una inscripció d'un polígon Q en una circumferència C és *del tipus 1* si el centre de C està contingut a l'interior o la frontera de Q , i diem que és *del tipus 2* en cas contrari (vegeu la Figura 2.1).

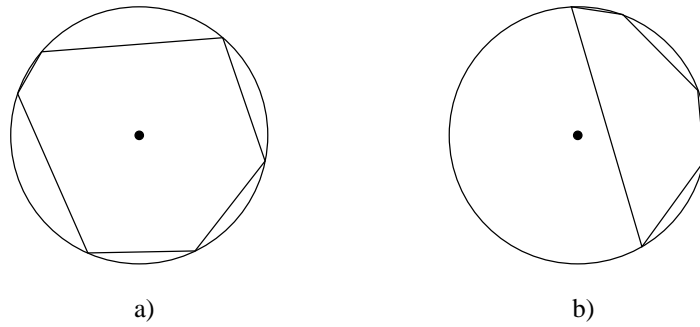


Figura 2.1: La inscripció en a) és del tipus 1 i la inscripció en b) és del tipus 2.

A partir d'ara, suposarem que el costat més llarg de P és el de longitud l_1 . Notem que, necessàriament, $r(P) \geq l_1/2$. Observem que l'angle central corresponent a una corda de longitud l_i té amplitud $2 \arcsin(l_i/2r)$. Resumint i reescrivint els resultats de [19] relacionats amb el nostre problema:

Proposició 2.3 [19]. *Donat un polígon convex P de seqüència ordenada de longituds dels costats l_1, l_2, \dots, l_n , són equivalents:*

- (i) *la inscripció de P' en la circumferència de radi $r(P)$ és del tipus 1;*
- (ii) $\sum_{i=1}^n 2 \arcsin(l_i/l_1) \geq 2\pi$;
- (iii) $r(P)$ és (l'única) solució de $\sum_{i=1}^n 2 \arcsin(l_i/2r) = 2\pi$.

També són equivalents:

- (i) *la inscripció de P' en la circumferència de radi $r(P)$ és del tipus 2;*
- (ii) $\sum_{i=1}^n 2 \arcsin(l_i/l_1) < 2\pi$;
- (iii) $r(P)$ és (l'única) solució de $\sum_{i=2}^n \arcsin(l_i/2r) = \arcsin(l_1/2r)$.

Vegem un esquema de la demostració:

Demostració. L'equivalència entre (i) i (iii) és clara en ambdós casos.

En el primer cas, Pinelis treballa amb la funció

$$f(k) := \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \arcsin \frac{kl_i}{2}, \quad k \in [0, 2/l_1],$$

que és contínua i estrictament creixent en l'interval $[0, 2/l_1]$. Com que, a més, $f(0) = 0$, tenim que (ii) i (iii) són equivalents.

En el segon cas, la funció que s'ha estudiar és

$$g(k) := \frac{1}{\pi} \left(\sum_{i=2}^n \arcsin \frac{kl_i}{2} - \arcsin \frac{kl_1}{2} \right), \quad k \in [0, 2/l_1].$$

Aquí, la via que s'utilitza per deduir l'equivalència entre (ii) i (iii) és veure que $g(0) = 0$, $g'(0) > 0$ i que g és una funció còncaua. La demostració de l'última part és la més laboriosa. \square

La Proposició 2.3 permet discriminar de quin tipus és la inscripció de P' abans de conèixer el mateix P' . A més, suggereix un mètode per al càlcul aproximat de $r(P)$. Ara bé, si el que es pretén és trobar una aproximació de $r(P)$ aplicant algun mètode numèric a la funció corresponent, pot ser útil conèixer algun interval més petit que $[l_1/2, +\infty)$ on puguem afirmar que es troba la solució.

A més de $l_1/2$, que correspon a la circumferència que té per diàmetre la longitud del costat més llarg de P , una fita inferior trivial per $r(P)$ és $(\sum_{i=1}^n l_i)/2\pi$, que correspon a la circumferència que té per longitud el perímetre de P . Mentre que la primera pot resultar ser el valor exacte de $r(P)$ (vegeu la Figura 2.3a) la segona pot ser millorada usant el conegut resultat següent:

Lema 2.4. *D'entre tots els polígons de n vèrtexs que es poden inscriure en una circumferència fixada, el que té perímetre màxim és el regular.*

Demostració. Siguin p_i, p_{i+1}, p_{i+2} tres vèrtexs consecutius d'un polígon P' inscrit en una circumferència C . El lloc geomètric de tots els punts q tals que $d(p_i, q) + d(q, p_{i+2}) = d(p_i, p_{i+1}) + d(p_{i+1}, p_{i+2})$ és una el·lipse de focus p_i i p_{i+2} .

D'entre totes les el·lipses de focus p_i i p_{i+2} que tenen punts sobre l'arc de C d'origen p_i i final p_{i+2} , la més gran és la que és tangent al punt de tall entre la mediatriu de p_i, p_{i+2} i l'arc de C mencionat (vegeu la Figura 2.2). Per tant, el punt p'_{i+1} de l'arc que maximitza la suma de les distàncies a p_i i p_{i+2} és tal que $d(p_i, p'_{i+1}) = d(p'_{i+1}, p_{i+2})$.

Com que això es compleix per a cada terna de vèrtexs consecutius del polígon, es té que aquest és regular. \square

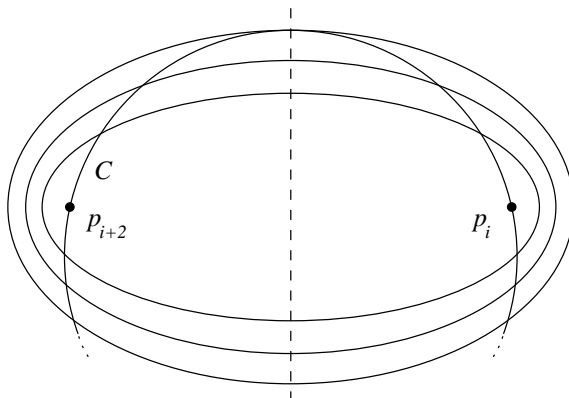


Figura 2.2: Demostració del Lema 2.4.

D'aquest lema es dedueix que, donat un polígon convex P de n costats, $r(P)$ és més gran o igual que el radi r_0 de la circumferència circumscriu al polígon regular de n costats del mateix perímetre que P . Tenint

en compte que el costat d'aquest polígon regular té longitud $\sum_{i=1}^n l_i/n$, resulta que

$$\sin(\pi/n) = \frac{\sum_{i=1}^n l_i/2n}{r_0}.$$

Així, $r(P) \geq r_0$ i es dóna la igualtat si P és regular (vegeu la Figura 2.3b).

En resum, quant a fites inferiors per a $r(P)$ hem vist:

Proposició 2.5. *Si P és un polígon convex de n costats, es té que*

$$r(P) \geq \max \left\{ \frac{l_1}{2}, \frac{\sum_{i=1}^n l_i/2n}{\sin(\pi/n)} \right\}$$

i hi ha exemples en què aquests valors s'assoleixen.

Busquem ara fites superiors. Considerem una circumferència de radi r i una corda de la circumferència d'angle central α ; l'arc d'amplitud α té longitud αr i, evidentment, és més llarg que la corda, que té longitud $2r \sin(\alpha/2)$.

Lema 2.6. *La funció*

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}, \quad x \in (0, \pi/2),$$

és creixent.

Demostració. En efecte, si examinem la derivada de $f(x)$,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin^2 x / \cos x},$$

veiem que és positiva, ja que, per a $x \in (0, \pi/2)$, $\cos x > 0$ i $\operatorname{tg} x > x$. □

Per tant, en una inscripció del tipus 1 d'un polígon P en una circumferència C , l'arc cobert per un costat de llargada l_i té longitud menor o igual que $\pi/2 \cdot l_i$ i la longitud de C és menor o igual que $\pi/2 \cdot \sum_{i=1}^n l_i$. Hem demostrat, doncs, el resultat següent:

Proposició 2.7. *Si la inscripció de P' en una circumferència C és del tipus 1, aleshores*

$$r(P) \leq \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{4}.$$

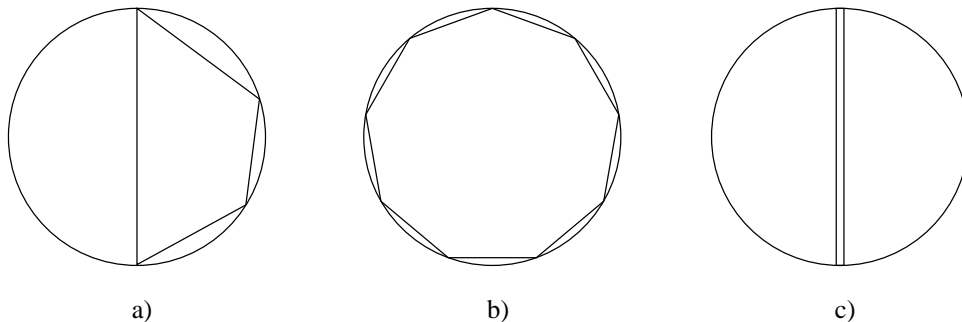


Figura 2.3: Les fites per a $r(P)$ són ajustades.

Observació 2.8. Paga la pena comentar que:

- (i) Ens podem acostar a aquesta última fita tant com vulguem prenent rectangles de base molt petita i altura molt gran (vegeu la Figura 2.3c).

- (ii) L'amplitud de l'interval per a $r(P)$ que hem trobat és prou petita, ja que la fita inferior és més gran que $(\sum_{i=1}^n l_i)/2\pi$.

Pel que fa a les inscripcions del tipus 2, no existeix una fita superior per a $r(P)$ en funció del perímetre de P o de la longitud del seu costat més llarg, ja que polígons amb aquestes constants molt petites poden estar inscrits en circumferències de radi tan gran com es vulgui; només cal que $\sum_{i \geq 2}^n l_i$ tendeixi a l_1 (vegeu la Figura 2.4).

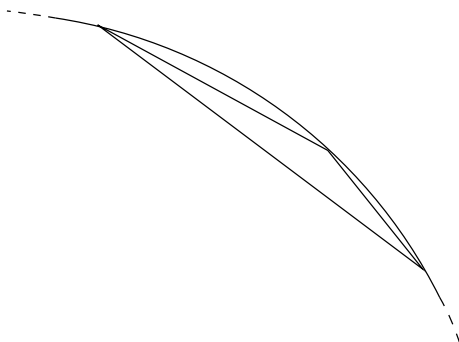


Figura 2.4: Triangle de perímetre petit inscrit en una circumferència de radi molt gran.

Observació 2.9. També es pot fer una aproximació al problema de trobar el radi de la circumferència circumscriu utilitzant eines de l'àlgebra computacional (vegeu [17]). No sembla recomanable, però, utilitzar els algorismes proposats per a valors grans de n , ja que el seu temps d'execució és alt fins i tot per a valors petits de n .

Abans de passar a calcular mesures de regularitat per a P' , ens aturem un moment a pensar si podem extreure alguna mesura de regularitat a partir d'aquest procés d'inscripció de P .

Una *configuració convexa* de longituds de costats l_1, l_2, \dots, l_n és un polígon convex amb aquesta seqüència ordenada de longituds dels costats. Aichholzer *et al.* demostren a [3] que, donades dues configuracions convexes de les mateixes longituds de costats, hi ha un moviment de $O(n)$ passos de la primera configuració a la segona que preserva les longituds dels costats, manté el polígon convex en tot moment i és tal que cada angle varia monòtonament durant tot el procés. L'esquema d'aquest moviment és el següent: en una primera fase, s'etiqueten els angles (o vèrtexs) de la configuració de partida amb els símbols $+, -, 0$, en funció de si són més petits, més grans o iguals (respectivament) que els angles (o vèrtexs) de la configuració d'arribada que els corresponen; després, es busquen grups de quatre vèrtexs ordenats que tinguin etiquetes $+, -, +, -$ en aquest ordre i s'aplica un moviment a tota la configuració que fa que un dels quatre vèrtexs s'iguali amb el corresponent vèrtex de la configuració d'arribada. Es repeteix aquesta acció fins que tots els vèrtexs tenen etiqueta 0.

Hom podria aplicar aquest algorisme per passar de P a P' i preguntar-se si el nombre de passos que es porten a terme és una possible mesura, si ja no de regularitat, com a mínim d'"inscribilitat" per a P . Doncs bé, la resposta és negativa, atès el nombre de passos és igual al nombre de parelles de vèrtexs corresponents diferents, i és fàcil pensar en configuracions que tinguin molts vèrtexs diferents als de P' però una "forma" semblant a la de P' i en d'altres que només tinguin 4 vèrtexs diferents als de P' però una "forma" molt diferent.

2.3 Cerca de la posició regular

2.3.1 Minimització del desplaçament màxim

Un cop trobada la configuració inscriptible de P , busquem que els vèrtexs de P' llisquin sobre la circumferència circumscriu (que suposarem de radi unitat per poder comparar els resultats) i es col·loquin en posició regular minimitzant algun paràmetre indicatiu de la diferència entre ambdues distribucions dels vèrtexs. Una possibilitat natural és considerar el màxim de les longituds dels arcs coberts per cadascun dels vèrtexs durant el trajecte cap a la posició final. Donats n punts p_1, p_2, \dots, p_n sobre una circumferència de radi unitat i un nombre real no negatiu r , si $B_i(r)$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) és la bola tancada centrada en p_i de radi r (prenent com a distància la distància sobre la circumferència) la pregunta que s'ha de contestar és, doncs: quin és el mínim valor de r per al qual es pot inscriure un n -gon regular en la circumferència de manera que cadascun dels seus vèrtexs estigui inclòs en una bola diferent del conjunt $\{B_i(r), i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$? En la Figura 2.5 es mostra un exemple amb un valor de r per al qual, efectivament, en cadascuna de les boles tancades de radi r i centrades en un p_i hi ha un vèrtex d'un pentàgon regular.

Per resoldre el problema, ens podem imaginar un n -gon regular inscrit en la circumferència fent una

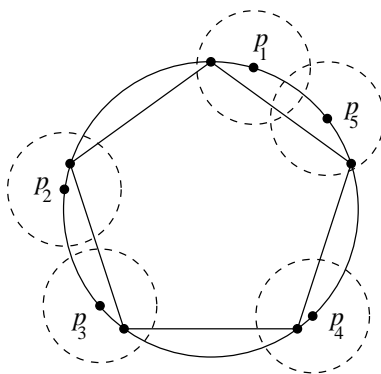


Figura 2.5: Exemple de r vàlid, però no mínim.

rotació al voltant del seu centre fins a assolir la posició òptima, és a dir, la posició final dels p_i quan r pren el valor òptim. Siguen q_1, q_2, \dots, q_n els seus vèrtexs. És característic d'un candidat a solució no només el valor de r (diem-li r_0), sinó també la bijecció entre els punts q_i i els punts p_j donada per les inclusions dels q_i en les boles; direm que q_i i p_j estan *emparellats* si la imatge de q_i per aquesta bijecció és p_j . Notem que si q_i i p_j estan emparellats, aleshores $q_i \in B_j(r_0)$, però el recíproc no és necessàriament cert.

El lema següent és la base de la solució proposada:

Lema 2.10. *Si $r_0 \geq 0$ és la solució del problema i, en aquesta solució, q_i i p_j estan emparellats, aleshores o bé q_{i+k} i p_{j+k} estan emparellats $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ o bé es pot fer una reassignació de parelles que no empitjora el valor de r_0 , per tal que tots els emparellaments tinguin aquesta forma.*

Demostració. Suposem que tenim la solució del problema. Imaginem-nos que tots els p_i viatgen cap a les seves parelles a una mateixa velocitat constant. Diem que p_i i p_k es creuen si, en un moment del seu recorregut i estant els dos en moviment, la seva posició sobre la circumferència coincideix. Diem també que p_i sobrepassa p_k si, estant p_i en moviment i p_k a la seva posició final, les posicions dels dos punts sobre la circumferència coincideixen. Veurem:

- (i) si, durant el seu recorregut, cap p_i sobrepassa un altre p_k ni cap parell de punts p_i es creua, aleshores q_{i+k} i p_{j+k} estan emparellats $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$;

(ii) cada vegada que, durant el seu recorregut, un p_i sobrepassa un altre p_k o un parell de punts p_i es creua, podem fer una reassignació de parelles que no empitjora el valor de r_0 , per tal que deixin de sobrepassar-se o creuar-se.

Comencem demostrant (i). Suposem la hipòtesi i suposem també que p_{j+1} està emparellat amb q_{i+k_0} , $k_0 \in \{2, 3, \dots, n-1\}$. Assumim que p_j viatja cap a q_i en sentit negatiu. El punt p_{j+1} viatja cap a q_{i+k_0} en sentit negatiu o bé en sentit positiu, i pot estar en qualsevol dels dos arcs que uneixen p_j i q_{i+1} ; això dóna lloc a quatre casos (vegeu la Figura 2.6).

Sigui com sigui, hi ha un p_{j+k_1} , $k_1 \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ que viatja cap a q_{i+1} . En el cas a), si ho fa en sentit

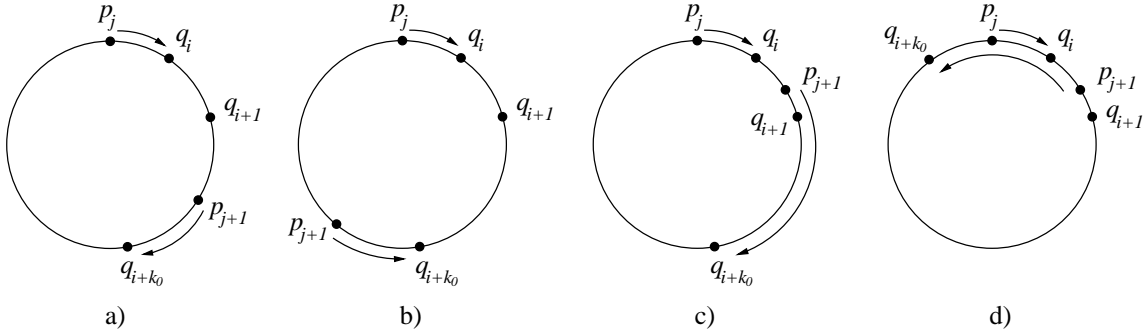


Figura 2.6: El punt p_{j+1} viatja cap al punt q_{i+k_0} .

positiu sobrepassa p_{j+1} o es creua amb ell, i si ho fa en sentit negatiu sobrepassa p_j . En el cas b), si ho fa en sentit positiu sobrepassa p_{j+1} i si ho fa en sentit negatiu sobrepassa p_j . En el cas c), si ho fa en sentit positiu sobrepassa p_{j+1} , es creua amb ell o p_{j+1} el sobrepassa, i si ho fa en sentit negatiu sobrepassa p_j o bé és sobrepassat per p_{j+1} . En el cas d), p_j i p_{j+1} es creuen o p_{j+1} sobrepassa p_j . En conseqüència, necessàriament p_{j+1} i q_{i+1} estan emparellats i, raonant anàlogament, q_{i+k} i p_{j+k} estan emparellats $\forall k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$.

Vegem ara (ii). Suposem que, durant el seu recorregut, hi ha un p_i i un p_k que es creuen o tals que un sobrepassa l'altre. Se'ns presenten dos casos, depenent de si viatgen o no en el mateix sentit.

Si viatgen en el mateix sentit, tenim la situació de la Figura 2.7. Observem que, emparellant p_i amb q_l i

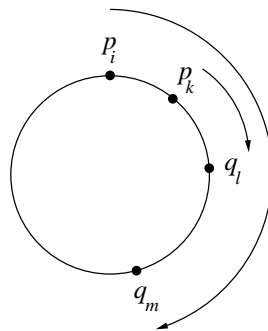


Figura 2.7: Els punts p_i i p_k viatgen en el mateix sentit.

p_k amb q_m , el valor de r_0 no empitjora i, a més, p_i deixa de sobrepassar p_k quan viatja cap a la seva parella.

Si viatgen en sentits oposats, hi ha tres situacions possibles, il·lustrades a la Figura 2.8. En totes elles, una reassignació de parelles no empitjora el valor de r_0 i fa que p_i i p_k deixin de sobrepassar-se o creuar-se. \square

La tècnica que apliquem per resoldre el problema és la següent: afirmem que en la solució p_1 i q_1 estan emparellats (i, pel lema anterior, també ho estan p_k i $q_k \forall k \in \{2, 3, \dots, n\}$); com que els p_j estan fixos en la

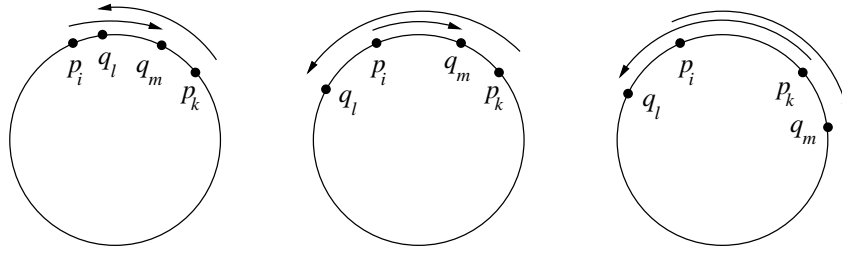


Figura 2.8: Els punts p_i i p_k viatgen en sentits oposats.

circumferència, basta conèixer la posició d'un dels q_i . Partint de q_1 i p_1 superposats, fem lliscar q_1 (i amb ell la resta de punts q_i) sobre la circumferència amb velocitat angular constant 1 rad/s i sentit positiu fins que torni a la posició inicial, de manera que totes les possibles solucions del problema queden parametritzades per $t \in [0, 2\pi)$. La gràfica distància-temps de la distància d_1 entre p_1 i q_1 calculada sobre la circumferència és la de la funció definida a trossos

$$d_1(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \pi], \\ 2\pi - t, & t \in (\pi, 2\pi), \end{cases}$$

i es pot trobar representada a la Figura 2.9.

Anàlogament, les funcions $d_i(t)$ de les distàncies entre p_i i q_i sobre la circumferència es poden calcular

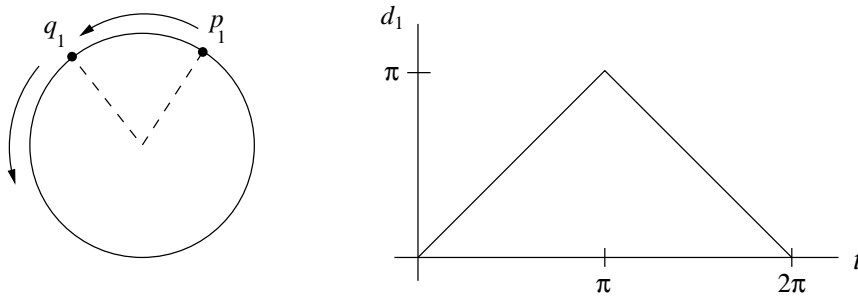


Figura 2.9: Gràfica de la funció $d_1(t)$.

en temps $\theta(1)$ perquè són desplaçaments de la funció d_1 , on el desplaçament ve donat per la distància entre p_i i q_i quan $t = 0$ i per la posició relativa d'aquests dos punts en el moment inicial, que determina si, quan els q_i comencen a lliscar sobre la circumferència, p_i i q_i s'allunyen o s'apropen. Així, tenim una col·lecció de

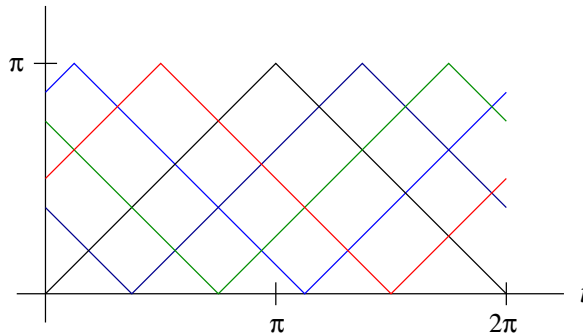


Figura 2.10: Gràfica de les funcions $d_1(t), \dots, d_n(t)$.

n funcions (vegeu la Figura 2.10), l'envolupant superior de les quals ens dona la distància entre la parella

més allunyada. L'objectiu del nostre problema és minimitzar aquest paràmetre.

Com que dues d'aquestes funcions, quan són diferents, es tallen en exactament dos punts, la complexitat de l'envolupant superior de les funcions $d_i(t)$ és $O(n)$ i pot ser calculada via dividir per vèncer en temps $O(n \log n)$ [11]. Després es pot recórrer en temps proporcional a la seva complexitat i trobar-ne el mínim. Hem demostrat:

Teorema 2.11. *El problema de calcular el mínim valor de r per al qual es pot inscriure un n -gon regular en la circumferència circumscrita a P' amb cada vèrtex a distància menor o igual que r d'un vèrtex diferent de P' es pot resoldre en temps $O(n \log n)$.*

Aquesta primera mesura que hem proposat no té en compte els angles del polígon d'entrada, que són alterats quan es realitza la inscripció, sinó que es fixa en les longituds dels costats; la seva interpretació és força clara: atès que dóna zero quan P és equilàter i és més gran com més diferents són les longituds dels costats de P , considerem que P és *més regular* com més petit sigui el valor trobat de r .

2.3.2 Minimització de la suma de desplaçaments

Una alternativa natural a la minimització de $\max_i d_i(t)$ com a mesura de regularitat de P és minimitzar $\sum_i d_i(t)$. Es pot comprovar que el Lema 2.10 també és vàlid per a aquest cas i, per tant, ens serveix la construcció feta en el problema anterior. Per poder calcular eficientment la funció $\sum_i d_i(t)$ n'hi ha prou amb observar que té una complexitat lineal (de fet, està formada per un màxim de $2n$ peces); per aquest motiu, es pot construir en temps $O(n \log n)$ mitjançant un algorisme de tipus dividir per vèncer [11], i després es pot recórrer en temps $O(n)$ per trobar-ne el mínim. Així:

Teorema 2.12. *El problema de calcular el valor de r per al qual es pot inscriure un n -gon regular en la circumferència circumscrita a P' amb cada vèrtex a distància menor o igual que r d'un vèrtex diferent de P' , i que minimitza la suma de les distàncies dels vèrtexs de P' als corresponents vèrtexs en posició regular, es pot resoldre en temps $O(n \log n)$.*

Aquest paràmetre està clarament relacionat amb l'anterior i posa l'accent també en la seqüència de longituds dels costats. Novament, val zero si P és equilàter i el criteri de regularitat és que P és *més regular* com més petit sigui el valor trobat de r .

2.4 Altres paràmetres relacionats

La idea de comparar el polígon convex d'entrada P amb un de regular del mateix nombre de costats pot donar lloc a altres mesures de regularitat que, malgrat que computacionalment resulten menys interessants que les vistes fins ara, també poden donar el tipus d'informació que busquem.

Es pot, per exemple, trobar el n -gon regular amb el mateix perímetre que P i comparar les àrees dels dos cossos. O també podem fer-ho al revés: comparar el perímetre de P amb el del n -gon regular que té la mateixa àrea. Finalment, en comptes de tot això, el que es pot contraposar directament són aquests dos polígons regulars associats a P , el que té la mateixa àrea i el que té el mateix perímetre.

Una altra aproximació possible sorgeix d'identificar el polígon P amb un punt $\vec{x}(P) \in \mathbb{R}^{2n}$ de la manera següent: si denotem per φ_i l'angle interior de P corresponent al vèrtex p_i , aleshores podem representar P com

$$\vec{x}(P) = (l_1, l_2, \dots, l_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

i el conjunt de tots els n -gons regulars queda parametritzat per la recta

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\pi(n-2)}{n}, \frac{\pi(n-2)}{n}, \dots, \frac{\pi(n-2)}{n} \right) + \lambda (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0).$$

Aleshores, es pot considerar que el polígon regular de n costats més semblant a P és el punt d'aquesta recta més proper a $\vec{x}(P)$ i calcular-lo. Després, es pot fixar algun criteri de comparació d'ambdós polígons que generi una mesura de regularitat per a P . Un paràmetre que seria raonable estudiar és la distància del punt $\vec{x}(P)$ a la recta descrita.

Hi ha una generalització del problema resolt a la Secció 2.3 que podria donar lloc a una mesura de regularitat interessant. Amb la mateixa notació que en l'apartat anterior però treballant amb la distància euclidiana, es tracta de trobar el mínim valor de r per al qual existeix un n -gon regular tal que cadascun dels seus vèrtexs està inclòs en una bola diferent del conjunt $\{B_i(r), i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ (vegeu l'exemple de la Figura 2.11). L'aparent alta complexitat d'aquest problema, causada pel major nombre de graus de llibertat que tenen els candidats a solució, ens ha empès a deixar el seu estudi per a més endavant.

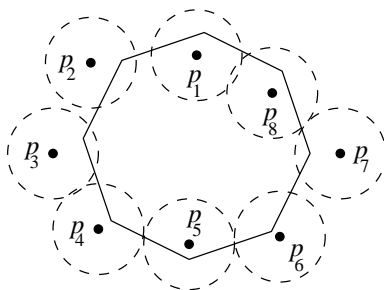


Figura 2.11: Exemple de radi vàlid per als vèrtexs p_1, p_2, \dots, p_8 .

Capítol 3

Inscripció i circumscripció

3.1 Introducció

Al capítol anterior, hem fixat com a referència un polígon regular del mateix nombre de costats que P ; tot i que aquesta tècnica pot proporcionar bons resultats en alguns casos, també té punts febles. Observeu, per exemple, la Figura 3.1, on queda clar que un polígon convex pot ser molt semblant a un polígon regular que té un nombre de costats diferent al seu. Cobrir aquests casos és la principal motivació d'aquest capítol.

Com ja hem comentat anteriorment, per tal que un criteri de comparació de dos polígons sigui significatiu

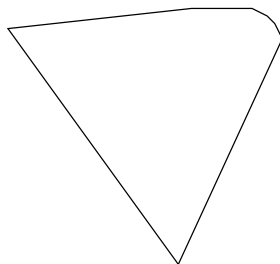


Figura 3.1: Heptàgon convex que és gairebé un triangle equilàter.

és necessari imposar condicions que facin que les magnituds d'ambdós cossos siguin semblants. Doncs bé, en aquest capítol imposablem que un dels dos polígons estigui contingut en l'altre, i l'objectiu és aconseguir-ho de manera que les seves mides siguin el més semblants possible o, més concretament, de manera que el polígon interior sigui tan gran com es pugui.

D'aquest problema d'emplaçaments maximals d'un polígon dins un altre, nosaltres n'estudiem dos casos particulars; a la Secció 3.2 suposem que el polígon exterior és regular i proposem algorismes per trobar la còpia més gran de P que hi està continguda; en canvi, a la Secció 3.3 el polígon regular és el de dins i donem mètodes per trobar la còpia més petita de P que el conté.

3.2 Inscripció

El problema que ens proposem resoldre és el següent: donat un polígon convex P de n costats, volem trobar el polígon regular R_E de m costats més petit que conté P , permetent translacions, rotacions i escalaments. Com que aquest problema és equivalent al de trobar la còpia de P més gran continguda en R_E , utilitzarem una formulació o l'altra en funció de la seva conveniència en cada situació.

En aquest cas, la mesura de regularitat associada al problema ve donada per la relació entre les àrees dels dos polígons quan aquests es troben en la posició òptima, és a dir, en la posició en la qual P està contingut en R_E i és màxim amb aquesta propietat. Si es considera la diferència àrea(R_E) – àrea(P), diem que P està *més a prop* de ser un m -gon regular com més petit sigui el valor obtingut. Si, en canvi, es pren àrea(P) / àrea(R_E), diem que P està *més a prop* de ser un m -gon regular com més proper a 1 sigui el valor obtingut.

La notació que fem servir al llarg de la secció és la que segueix: r_1, r_2, \dots, r_m són els vèrtexs de R_E donats en ordre positiu, s_j ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$) és el costat de R_E d'extrem r_j i r_{j+1} , i t_j ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$) és la recta que conté el costat s_j . A més, denotem per (x_i, y_i) les coordenades de p_i , i per (w_i, z_i) les coordenades de r_i .

3.2.1 Resolució amb un algorisme genèric

Aquest problema està resolt en el cas general, on R_E és un polígon convex qualsevol de m costats, a [1] i [2]. Els autors proposen un algorisme de temps $O(nm^2 \log m)$ on la idea principal és la següent: suposem, sense pèrdua de generalitat, que R_E conté l'origen; aleshores, cada aresta s_j de R_E està sobre una recta del tipus $a_j x + b_j y = 1$ i, per tal que P estigui contingut en R_E , tots els seus vèrtexs (x_i, y_i) han de complir $a_j x_i + b_j y_i \leq 1$.

D'altra banda, totes les posicions de P en el pla que són resultat dels moviments permesos es poden parametritzar a través de l'elecció d'un punt de referència arbitrari $p \in P$ i d'una *posició estàndard* de P en què p és a l'origen; així, qualsevol emplaçament de P s'interpreta com un moviment en relació amb aquesta posició estàndard i pot ser descompost en una translació de vector (u, v) , una rotació d'angle θ i una homotècia de raó ρ , aquests dos últims moviments amb centre $p \in P$, i ser identificat amb la quaterna (s, t, u, v) , on $s = \rho \cos \theta$ i $t = \rho \sin \theta$.

Si (x_i, y_i) són les coordenades del vèrtex p_i en la posició estàndard, es té que, en la posició parametritzada per (s, t, u, v) , les seves coordenades són $(s x_i - t y_i + u, t x_i + s y_i + v)$. En conseqüència, és necessari que es compleixi el sistema de mn inequacions lineals de la forma

$$L_{i,j} : (a_j x_i + b_j y_i)s + (-a_j y_i + b_j x_i)t + a_j u + b_j v \leq 1$$

per tal que R_E contingui la posició de P corresponent a (s, t, u, v) . Això implica que el domini de les possibles solucions és un políedre convex (i, clarament, fitat) en dimensió 4.

El punt (s, t, u, v) buscat, corresponent a l'emplaçament de P dins R_E en què P té mida màxima, és un vèrtex del políedre perquè és el punt del domini que maximitza la funció convexa $s^2 + t^2 = \rho^2$. Per aquest motiu, l'algorisme proposat consisteix a trobar en temps $O(nm^2 \log m)$, i mitjançant un pas a l'espai dual, els $O(nm^2)$ vèrtexs que té el políedre i retornar el que fa màxima la funció $s^2 + t^2$. Notem que el fet que els candidats a solució siguin vèrtexs del políedre té una traducció geomètrica segons la qual hi ha d'haver, com a mínim, quatre incidències entre vèrtexs de P i costats de R_E , ja que un vèrtex d'un políedre 4-dimensional és el resultat de la intersecció d'un mínim de quatre hiperplans, i cada hiperplà

$$(a_j x_i + b_j y_i)s + (-a_j y_i + b_j x_i)t + a_j u + b_j v = 1$$

representa el conjunt de totes les posicions de P tals que el seu vèrtex p_i està en la recta que conté el costat s_j de R_E .

Sembla natural pensar que el cost d'aquest algorisme genèric pot ser reduït aprofitant el fet que el polígon R_E és regular. En concret, si existeix un emplaçament de P dins R_E que és candidat a solució amb quatre contactes entre vèrtexs de P i costats de R_E de la forma $p_{i_1} \in s_{j_1}, p_{i_2} \in s_{j_2}, p_{i_3} \in s_{j_3}, p_{i_4} \in s_{j_4}$, aleshores

hi ha $m - 1$ emplaçaments on P té la mateixa mida i els quatre contactes entre vèrtexs de P i costats de R_E són de la forma $p_{i_1} \in s_{j_1+k}, p_{i_2} \in s_{j_2+k}, p_{i_3} \in s_{j_3+k}, p_{i_4} \in s_{j_4+k}, k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$. Per tant, un objectiu raonable és intentar reduir el cost de l'algorisme fins a $O(nm \log m)$.

3.2.2 Resolució per casos segons tipus de contactes

Una primera possibilitat per intentar trobar un algorisme més ràpid que el d'Agarwal *et al.* per al nostre cas particular és deixar de banda el políedre 4-dimensional a l'espai dual i aplicar tècniques potser menys poderoses, però en les quals tingui rellevància i es tregui profit del fet que R_E és regular.

Una via que dona resultats positius en certs casos és classificar els candidats a solució en diferents tipus i trobar-los per separat emprant procediments específics per a cada cas. En concret, tenint en compte la informació segons la qual a l'emplaçament òptim de P dins R_E hi ha un mínim de quatre contactes entre vèrtexs de P i costats de R_E , el que fem és dividir els candidats a solució en tres classes, segons si hi ha alguna incidència entre un costat del polígon interior i un costat del polígon exterior, alguna incidència entre un vèrtex del polígon interior i un vèrtex del polígon exterior, o cap incidència dels dos tipus anteriors. Com veurem de seguida, som capaços de millorar el temps d'execució de l'algorisme proposat a [1] i [2] per als candidats del primer tipus, expliquem un mètode més ràpid si $n = o(m \log m)$ per als candidats del segon tipus i detallem un algorisme del mateix nombre asimptòtic d'operacions per als candidats del tercer tipus.

Tipus 1: algun costat de P és incident a algun costat de R_E

Per començar, proposem algorismes per trobar candidats a solució en què algun costat de P és incident a algun costat de R_E . Notem que aquesta condició ja garanteix dues de les quatre incidències que hi ha d'haver entre vèrtexs del polígon interior i costats del polígon exterior.

En els diferents algorismes que expliquem, el polígon que realitza translacions, girs i escalaments és R_E . Per aquest motiu, l'expressió R_E sovint no denota un polígon concret, sinó un m -gon regular que es va modificant per tal d'assolir la mida i la posició òptimes. De la mateixa manera, quan les rectes t_j ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$) estan referides a un polígon concret, representen les rectes que contenen els costats s_j , però, en cas contrari, denoten un conjunt de m rectes mòbils, amb la característica que l'angle entre dues de consecutives és de $2\pi/m$.

Donades tres rectes t_i, t_j, t_k , hi ha un únic m -gon regular tal que s_ν està contingut en t_ν , per a $\nu \in \{i, j, k\}$. Això suggereix un algorisme per trobar els candidats a solució del primer tipus inspirat en el conegut mètode del peu de rei giratori (vegeu [25]). Es tracta de prendre ternes de rectes t_i, t_j, t_k , fer-les tangents a P i fer-les girar seguint el mètode mencionat. Aleshores, s'ha de fer una parada cada vegada que un costat de P és contingut en una de les rectes, calcular l'únic m -gon regular tal que s_ν està contingut en t_ν , per a $\nu \in \{i, j, k\}$, i examinar si aquest m -gon conté P o no; en cas afirmatiu, es guarda com a candidat a solució.

Malauradament, aquest algorisme és massa lent. Hi ha $O(m^2)$ ternes, ja que podem fixar que el primer element de la terna sigui t_1 perquè els costats del m -gon són indistingibles. A més, per a cada terna, el procés de fer girar les tres rectes al voltant de P consta de $3n$ passos, ja que no finalitza fins que les tres rectes recuperen la seva posició inicial i imputem cada pas al costat de P que esdevé contingut en una d'elles. A cada pas, s'ha de calcular en temps $O(m)$ l'únic m -gon regular determinat per les tres rectes i, posteriorment, s'ha de comprovar en temps $O(n + m)$ que el m -gon obtingut contingui P . Així, el cost de l'algorisme és $O(nm^2(n + m))$, és a dir, pitjor que el de l'algorisme genèric d'Agarwal *et al.*

Per tal de millorar-lo, observem que, a l'algorisme anterior, fixem tres costats de R_E que són incidents a P per tal de tenir el polígon R_E delimitat, però això genera massa combinacions de rectes t_i i, a més, no evita la comprovació que el m -gon regular conté P . Convé, doncs, treballar només amb dos costats de R_E

incident a P ; així, en un segon algorisme per trobar els candidats del tipus 1, fixem un costat de P que és incident a algun costat de R_E (podem suposar que aquest costat és s_1) i un altre costat de R_E que també és incident a P (per un vèrtex com a mínim). Trobem, si existeix, l' m -gon regular més petit amb aquestes condicions. Això dóna un total de $O(nm)$ candidats, la qual cosa suposa una reducció d'un factor respecte els $O(nm^2)$ candidats de l'algorisme anterior.

El càlcul d'aquests candidats es fa de la manera següent: partim d'una posició qualsevol de P i prenem les m rectes t_1, t_2, \dots, t_m orientades de manera que una d'elles és paral·lela a un costat de P . Fem les m rectes tangents a P i les anem girant seguint també el mètode del peu de rei giratori. Ens aturem cada vegada que una de les m rectes és incident a algun costat e_j de P . Suposem, per simplicitat, que aquest costat és horitzontal, que és incident a la recta t_1 i que $p_j = (0, 0)$. Guardem les abscisses $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ dels punts de tall de les altres rectes t_2, t_3, \dots, t_m amb t_1 (si alguna d'elles també és horitzontal en guardem l'ordenada); aquesta informació ens serà d'utilitat més endavant: si, per exemple, t_i deixa P a la seva esquerra, qualsevol polígon regular amb el costat s_1 incident a e_j i que contingui P ha de complir que l'abscissa del punt de tall entre t_1 i t_i és més gran o igual que α_i (vegeu la Figura 3.2). Un cop guardats $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$, busquem els

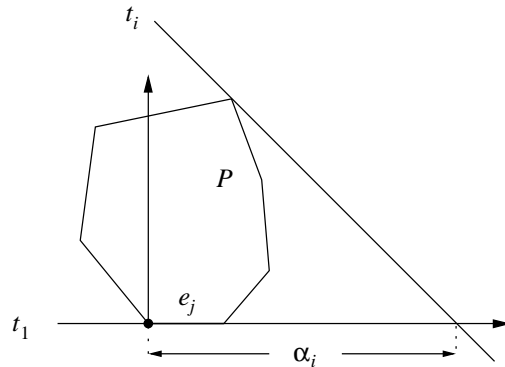


Figura 3.2: Significat del paràmetre α_i .

$m - 1$ candidats a solució associats a e_j , un per a cada s_i ($i \in \{2, 3, \dots, m\}$). Així doncs, s'ha de descriure un procediment per trobar, per a cada t_i , el possible candidat R_E a solució tal que s_1 és incident a e_j i s_i també és incident a P . Si existeix, direm que és el candidat del parell (e_j, s_i) .

El mètode per trobar el candidat, si existeix, d'un parell (e_j, s_i) és el següent: partim (vegeu la Figura 3.3) d'una recta t_1 incident al costat e_j de P i una recta t_i també incident a P en un vèrtex p_k (és trivial adaptar l'algorisme si t_i és incident a un costat de P). Suposem que s_1 té un extrem en el punt p_j ; el punt de tall

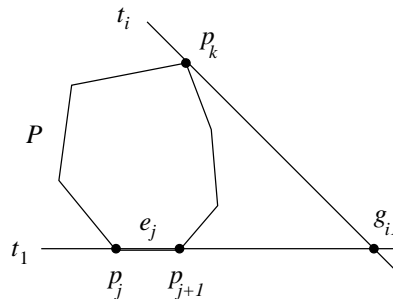


Figura 3.3: Les rectes t_1 i t_i són incidents a e_j i p_k , respectivament.

g_{i1} de t_i amb t_1 determina l'abscissa w_2 de l'altre extrem de s_1 i, per tant, un m -gon regular. Si $w_2 < x_{j+1}$, és a dir, el punt r_2 queda a l'esquerra del punt p_{j+1} , no hi ha candidat a solució pel parell (e_j, s_i) . En cas

contrari, dividim t_i en tres trossos: el costat s_i del m -gon, la semirecta t_{i0} de $t_i \setminus s_i$ que conté g_{i1} , i l'altra semirecta t_{i1} de $t_i \setminus s_i$. Es poden donar tres situacions: si $p_k \in s_i$ (vegeu la Figura 3.4a) podem continuar, i, si $p_k \in t_{i0}$ (cas il·lustrat a la Figura 3.4b), no hi ha candidat a solució. Si $p_k \in t_{i1}$, calculem l'homotècia de centre g_{i1} i raó més petita possible que, aplicada sobre l' m -gon, fa que $p_k \in s_i$ (Figura 3.4c). Continuem

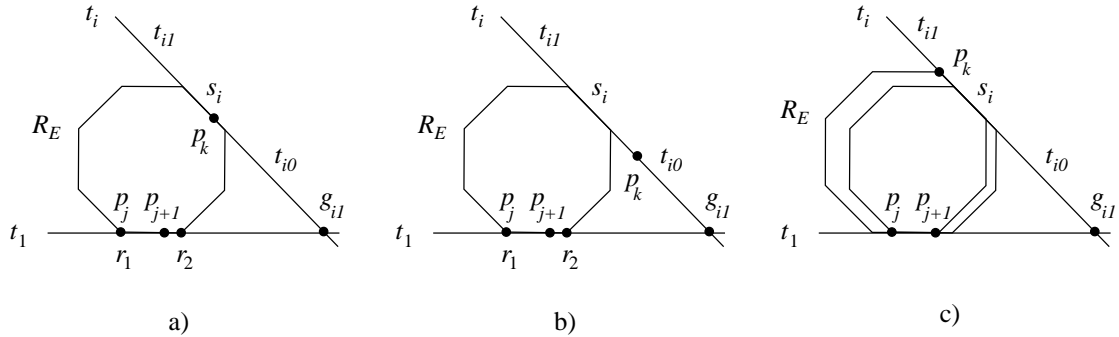


Figura 3.4: Possibles emplaçaments de p_k en relació amb s_i .

amb el proper pas de l'algorisme, a no ser que, si hem aplicat l'homotècia, e_j ja no estigui contingut en s_1 ; en aquest últim cas, no hi ha candidat.

Arribats a aquest punt, tenim el m -gon regular R_E més petit tal que s_1 conté e_j i s_i conté p_k (vegeu la Figura 3.5a). Siguin R_E^1 i R_E^2 les cadenes que uneixen s_1 amb s_i avançant sobre la frontera de R_E en sentit positiu i negatiu, respectivament. Comprovem en temps $O(m)$ si P és dins R_E comparant $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ amb les abscisses dels punts de tall de les rectes t_2, t_3, \dots, t_m amb t_1 . Si P és dins R_E , hem trobat el candidat del parell (e_j, s_i) . Si algun costat de R_E^1 incompleix la corresponent condició necessària perquè P estigui contingut en R_E , no hi ha candidat, ja que fer que aquell costat compleixi la condició obligaria a reduir la mida de P . Finalment, si els únics costats de R_E que no compleixen la condició pertanyen a R_E^2 , calculem l'homotècia de centre g_{i1} i raó més petita que fa que, aplicada sobre R_E , tots ells passin a complir-la. Obtenim així un nou m -gon regular (vegeu la Figura 3.5b), i comprovem si conté P ; en cas afirmatiu, és el candidat del parell (e_j, s_i) .

Abans de concloure, notem que el cas en què t_1 i t_i són paral·leles és més senzill perquè l'únic tipus de

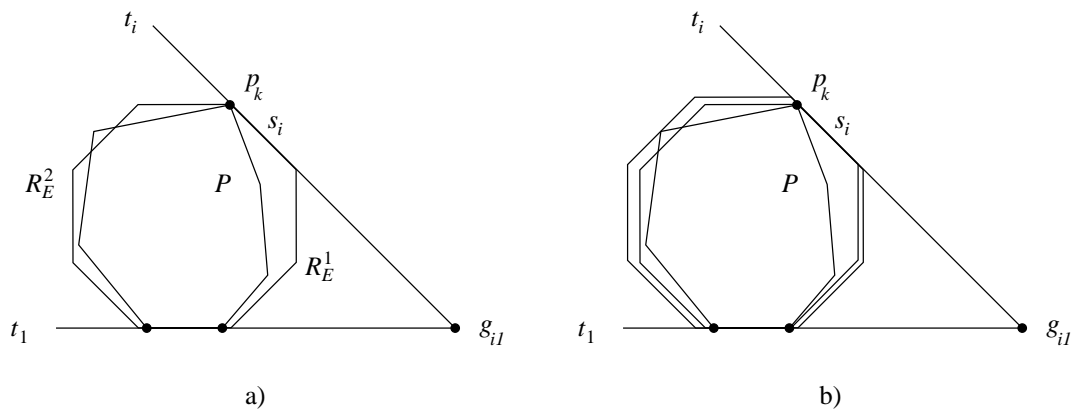


Figura 3.5: Últims passos de l'algorisme.

moviment que es pot aplicar a l' m -gon és una translació horitzontal. A més, hi ha certes propietats que ens fan notar que no cal buscar tots els candidats:

Observació 3.1. En l'òptim, no és possible que tots els costats de R_E que estan en contacte amb punts de P

siguin tals que la recta de suport a P que els conté deixa P per sobre d'ella, ja que, en aquest cas, podríem desplaçar infinitesimalment P en la direcció vertical i encongir R_E . Això redueix a la meitat el nombre de parells (e_j, s_i) per als quals buscarem candidat.

Observació 3.2. Si m és parell i el parell $(e_j, s_{m/2})$ té candidat, aquest és millor que els candidats dels parells (e_j, s_i) , $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, $i \neq m/2$. Si t_i i t_k deixen P a la seva esquerra, $k > i$ i el parell (e_j, s_k) té candidat, el candidat del parell (e_j, s_i) , si existeix, és pitjor, és a dir, no pot ser més petit. Si s_i i s_k deixen P a la seva dreta, la relació va al revés, això és, si $k > i$ i el parell (e_j, s_i) té candidat, el candidat del parell (e_j, s_k) , si existeix, té la mateixa mida o és més gran.

En efecte, la primera part és conseqüència del fet que la distància entre dos costats paral·lels d'un m -gon regular en determina la mida. Quant a la segona part, si t_i i t_k deixen P a la seva esquerra, $k > i$, el parell (e_j, s_k) té candidat (amb t_k incident a p_l) i en aquest candidat el costat s_i no és incident a P , fer s_i incident a P obliga a desplaçar l' m -gon regular cap a l'esquerra, i aconseguir que continuï contenint e_j i p_l (amb s_l incident a e_j) obliga a augmentar la mida de P . El raonament en el darrer cas és anàleg.

En l'algorisme explicat, s'efectuen passos del mètode del peu de rei giratori fins que cadascuna de les rectes t_i hagi girat un angle de $2\pi/m$ i ocupi la posició inicial de la recta següent en sentit positiu. Això fa que cada costat de P estigui contingut en alguna de les rectes en algun (i només un) moment del procés. Cada pas del mètode mencionat (se'n fan n) es realitza en $O(m)$ operacions que s'imputen al costat de P que esdevé contingut en una de les rectes. A més, abans de tornar a girar les m rectes t_i , també s'efectuen $O(m)$ operacions per calcular les α_i 's, i, per a cada costat de R_E , $O(m)$ operacions per trobar el candidat del parell. Hem vist:

Proposició 3.3. *Els candidats a solució del tipus 1 poden ser calculats en temps $O(nm^2)$.*

Finalment, proposem un altre algorisme en el qual n'hi ha prou amb fixar el costat e_j de P que és incident a un costat de R_E . De fet, resollem en temps òptim $O(n+m)$ un problema més general: donats un n -gon convex P i un m -gon convex R_E , trobar la còpia més gran de P dins R_E , permetent translacions i escalaments, però no rotacions.

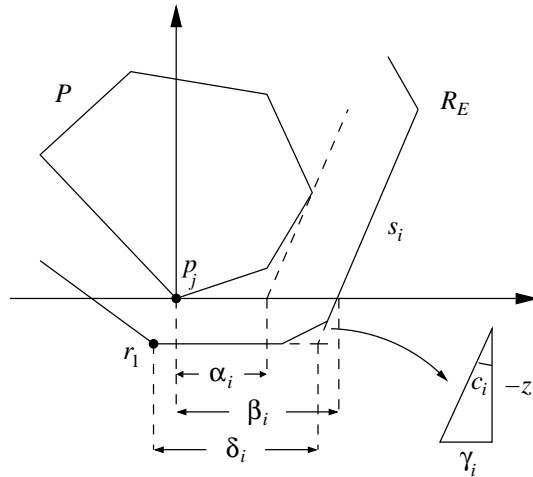
Momentàniament, R_E és un m -gon convex qualsevol; com en el cas anterior, és el polígon que realitza translacions i escalaments. Per simplicitat, suposem que el costat s_1 de R_E és horitzontal, que deixa R_E per sobre d'ell i que, si p_j és el vèrtex de P d'ordenada mínima (si n'hi ha dos, p_j és el d'abscissa mínima), aleshores $p_j = (0, 0)$; a més, denotem per l la longitud del costat s_1 . Una còpia de R_E amb l'orientació fixada queda definida pel valor de l i per les coordenades (w_1, z_1) de r_1 .

Seguint la mateixa idea que en el cas anterior, l'abscissa α_i del punt de tall entre l'eix horitzontal i cada t_i , quan aquesta és tangent a P , imposa una restricció per tal que P estigui contingut en R_E . Aquí deduïm la restricció que és vàlida si $\alpha_i > 0$ i t_i té pendent positiu, però tots els altres casos (inclòs aquell en el qual t_i també és horitzontal) són semblants i, més important, generen restriccions sobre w_1, z_1, l que tenen una forma determinada: inequacions lineals en les tres variables.

Estudiem el cas descrit. Suposem que tenim una còpia de R_E determinada. Sigui β_i l'abscissa del punt de tall entre s_i (o el seu perllongament) i l'eix horitzontal, δ_i la longitud del segment d'extrem r_1 i el punt de tall entre els perllongaments de s_1 i s_i , i γ_i la longitud del segment d'extrem (β_i, z_1) i el punt de tall entre els perllongaments de s_1 i s_i (vegeu la Figura 3.6). Una condició necessària per tal que R_E contingui P és que $\beta_i \geq \alpha_i$, és a dir,

$$\delta_i + w_1 + \gamma_i \geq \alpha_i.$$

El terme δ_i només depèn de la mida de R_E i compleix que $\delta_i = k_i \cdot l$, per alguna constant positiva k_i . Quant al terme γ_i , pot ser expressat com $\gamma_i = -\operatorname{tg} c_i \cdot z_1$, per un cert angle fix c_i (vegeu la Figura 3.6). Així

Figura 3.6: Significat dels paràmetres α_i , β_i , δ_i i γ_i .

doncs, és necessari que

$$k_i \cdot l + w_1 - \operatorname{tg} c_i \cdot z_1 \geq \alpha_i$$

perquè P estigui contingut en R_E . A més, les m restriccions corresponents als m costats de R_E són suficients, de manera que el nostre problema es transforma en un problema de programació lineal a \mathbb{R}^3 en què s'ha de minimitzar l ($l \geq 0$) sota m restriccions de la forma

$$A_i l + B_i w_1 + C_i z_1 + D_i \geq 0$$

i que es pot resoldre en temps $O(m)$ mitjançant un algorisme de cerca i poda (vegeu [8], [9], [14] i [15]).

Tornem al nostre problema de trobar candidats a solució del tipus 1. Novament, fem girar les rectes t_i al voltant de P seguint el mètode del peu de rei giratori. Cada vegada que un costat e_j de P és contingut en una de les rectes t_k , executem l'algorisme precedent amb l'orientació de R_E induïda per les rectes t_i . El candidat a solució que obtenim és millor (o igual) que el del cas més particular que hem estat estudiant fins ara, en què e_j és incident a s_k .

El pas inicial de fer que les rectes t_i siguin tangents a P es pot fer en $O(n + m)$. Després, per a cada costat de P , fem $O(m)$ operacions corresponents al mètode del peu de rei giratori i $O(m)$ operacions per resoldre el problema de programació lineal. Hem demostrat:

Proposició 3.4. *El millor candidat en què un costat de P i un costat de R_E són paral·lels i ambdós costats deixen els corresponents polígons en la direcció del mateix vector perpendicular, el qual és millor o igual que el millor candidat en què aquell costat de P és incident a aquell costat de R_E , pot ser calculat en temps $O(n + m)$. El conjunt dels millors candidats d'aquestes característiques pot ser calculat en temps $O(nm)$.*

Abans de passar a estudiar el tipus següent de candidat a solució, veurem amb un exemple que la cerca d'emplaçaments de P dins R_E en què un costat de P és incident a un costat de R_E està justificada perquè hi ha casos en què la posició òptima compleix aquesta característica:

Exemple 3.5. L'exemple de la Figura 3.7 mostra una situació en què la posició òptima és del tipus 1. Aquí, tant P com R_E són regulars: P és un octògon regular i R_E és un quadrat. L'optimalitat és conseqüència del fet que qualsevol quadrat que conté P té el costat més gran o igual que l'amplada de P .

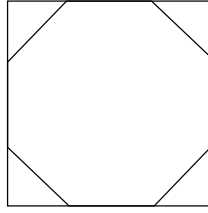


Figura 3.7: Exemple de posició òptima del tipus 1.

Tipus 2: algun vèrtex de P és incident a algun vèrtex de R_E

El segon tipus d'incidència que es pot donar en la solució és que un vèrtex del polígon interior coincideixi amb un vèrtex del polígon exterior. En el que segueix, busquem candidats a solució amb aquesta característica, que, com en el cas anterior, ja garanteix dues de les quatre incidències que hi ha d'haver entre vèrtexs de P i costats de R_E .

Aquí, fixarem R_E i trobarem, per a cada vèrtex de P amb un angle més petit o igual que $\pi(m-2)/m$, la posició més gran de P dins R_E amb aquell vèrtex incident en un vèrtex de R_E . Si $n \leq m$, això dóna un màxim de n candidats; en cas contrari, és fàcil veure que la combinació de n angles convexos amb suma igual a $\pi(n-2)$ que maximitza el cardinal del subconjunt dels que tenen valor més petit o igual que $\pi(m-2)/m$ consisteix en m angles iguals a $\pi(m-2)/m$ i $n-m$ angles iguals a π . Així, el nombre de candidats és sempre més petit o igual que $\min\{n, m\}$.

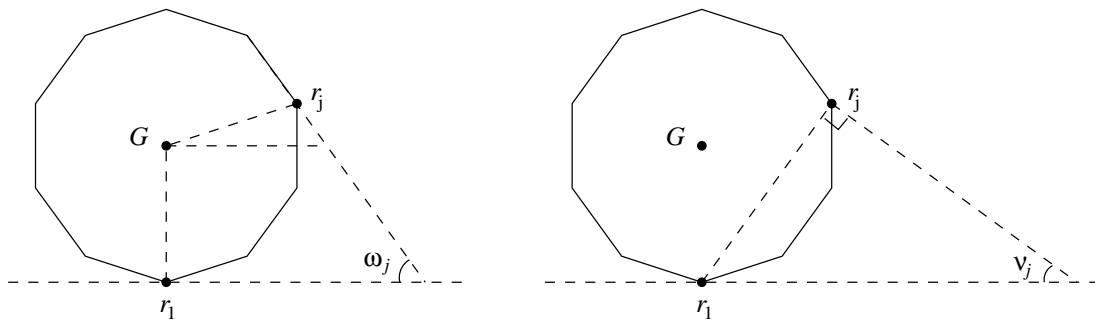
L'algorisme que expliquem ens obliga a distingir dos casos, en funció que m sigui parell o imparell.

Exposem primer el procediment pel cas en què m és parell. L'observació següent juga un paper important en la resolució del problema:

Lema 3.6. *La funció que dóna la distància de la frontera de R_E (recorreguda en sentit positiu partint de r_1) a r_1 és unimodal i té el màxim en $r_{m/2+1}$.*

Demostració. Emplacem R_E al pla de manera que $r_1 = (0,0)$, r_1 sigui el punt del polígon d'ordenada mínima i s_1 formi un angle de π/m amb l'horitzontal. Prenem $[m/4] + 1 \leq j < m/2 + 1$. Volem veure que, si recorrem el costat s_j des de r_j , la distància a r_1 creix. Una manera de fer-ho és demostrar que l'únic punt de s_j que pertany al cercle de centre r_1 i radi $d(r_1, r_j)$ és r_j . Per a tal fi, comparem l'angle ω_j que formen el perllongament de s_j i l'horitzontal amb l'angle ν_j que formen la perpendicular per r_j al segment d'extrem r_1, r_j i l'horitzontal (vegeu la Figura 3.8). L'objectiu és comprovar que $\omega_j \geq \nu_j$.

Signi G el centre de R_E . L'angle que forma el segment d'extrem G i r_j amb l'horitzontal és $\frac{2\pi}{m}(j-1) - \frac{\pi}{2}$,

Figura 3.8: Angles ω_j i ν_j .

i l'angle que forma aquest mateix segment amb el costat s_j és $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{m} (m-2)$. Per tant,

$$\omega_j = \pi - \left[\frac{2\pi}{m} (j-1) - \frac{\pi}{2} + \left(\pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{m} (m-2) \right) \right] = \pi - \frac{\pi}{m} - \frac{2\pi}{m} (j-1).$$

Quant a ν_j , és clar que

$$\nu_j = \pi - \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m} (j-1) \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m} (j-1).$$

Aleshores, com que, per a $j \leq m/2$, es té que $\frac{\pi}{m} (j-1) \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}$,

$$\nu_j = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m} (j-1) \leq \pi - \frac{\pi}{m} - \frac{2\pi}{m} (j-1) = \omega_j.$$

Si $1 \leq j < \lceil m/4 \rceil + 1$, també tenim que, si recorrem el costat s_j des de r_j , la distància a r_1 creix, ja que la perpendicular al segment d'extremes r_1 i r_j té pendent negatiu i, en canvi, el perllongament del costat s_j té pendent positiu (o infinit).

Fins aquí, hem vist que la funció que dóna la distància de la frontera a r_1 creix en la cadena d'origen r_1 i final $r_{m/2+1}$. La demostració que la mateixa funció és decreixent en la cadena d'origen $r_{m/2+1}$ i final r_1 és anàloga. \square

Denotem per R_E^d la cadena de la frontera de R_E on la distància a r_1 creix, i per R_E^e la cadena on la distància decreix. Considerem que $r_{m/2+1}$ pertany a R_E^d i R_E^e a la vegada.

Sigui $\text{còpies}(P)$ el conjunt de totes les còpies homotètiques de P , permetent rotacions, translacions i escalaments. Sigui també p_i un vèrtex de P d'angle φ_i , amb $\varphi_i \leq \pi(m-2)/m$. Definim la funció $P_i(\varphi)$ de la manera següent:

$$P_i : \begin{array}{ll} \left[0, \frac{\pi(m-2)}{m} - \varphi_i \right] & \rightarrow \text{còpies}(P), \\ \varphi & \mapsto P_i(\varphi) \end{array}$$

on $P_i(\varphi)$ és tal que p_i és incident a r_1 , e_i forma un angle φ amb s_1 , i $P_i(\varphi)$ és la còpia més gran de P dins R_E amb aquestes propietats. Des de $\varphi = 0$ fins a $\varphi = \pi(m-2)/m - \varphi_i$, la funció $P_i(\varphi)$ descriu un moviment de P dins R_E que anomenem *recorregut angular de centre p_i* , i en el qual P realitza una rotació de centre p_i combinada amb una homotècia del mateix centre que manté, per a cada orientació, la còpia homotètica de P més gran dins R_E amb p_i incident a r_1 (vegeu la Figura 3.9). Clarament, la posició més gran de P

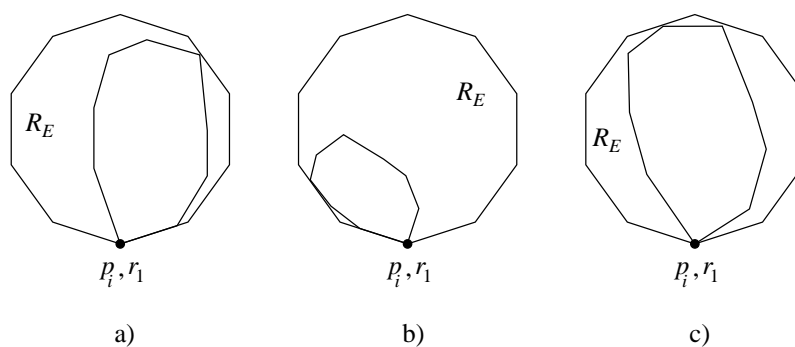


Figura 3.9: En a), la còpia de P és $P_i(0)$; en b), és $P_i(\pi(m-2)/m - \varphi_i)$; en c), és $P_i(\varphi)$, per a algun $\varphi \in (0, \pi(m-2)/m - \varphi_i)$.

dins R_E amb p_i incident en r_1 coincideix amb algun valor de $P_i(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi(m-2)/m - \varphi_i]$.

Fixat un valor $\varphi_0 \in [0, \pi(m-2)/m - \varphi_i]$, denotem per $p_h(\varphi_0)$ ($h \in \{1, 2, \dots, n\}$) la posició del vèrtex p_h en $P_i(\varphi_0)$. A més, diem que el parell (p_k, s_j) *domina* (o és el parell *dominant* de) el recorregut angular de centre p_i en φ_0 si existeix un valor $\varepsilon > 0$ tal que, per a tot $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \varepsilon] \subset [0, \pi(m-2)/m - \varphi_i]$, el

vèrtex $p_k(\varphi)$ de $P_i(\varphi)$ és incident al costat s_j de R_E . Notem que el parell dominant existeix per a tot φ_0 , però pot no ser únic.

Les propietats que segueixen donen informació rellevant sobre els recorreguts angulars:

Lema 3.7. *Si P efectua el recorregut angular de centre p_i , la seva mida descriu una funció unimodal amb un únic màxim local. Mentre la funció és creixent, els vèrtexs de P que estan en contacte amb R_E (a part de p_i) estan recolzats només a R_E^d ; mentre és decreixent, estan només a R_E^e ; en la posició que dona el màxim, hi ha vèrtexs de P a R_E^d i a R_E^e .*

Demostració. Sigui $\varphi \in [0, \pi(m-2)/m - \varphi_i]$ tal que tots els vèrtexs de $P_i(\varphi)$ que estan en contacte amb R_E (a part de p_i) estan recolzats només a R_E^d ; prenem el vèrtex d'un dels parells dominants en φ . Pel Lema 3.6, com que s'està movent sobre R_E^d en sentit positiu, la distància a p_i (i, amb ella, la mida de $P_i(\varphi)$) està creixent. En canvi, sempre que algun vèrtex de $P_i(\varphi)$ s'està movent sobre R_E^e en sentit positiu, la distància a p_i decreix. Ara només manca tenir en compte que, després d'haver-hi hagut contactes de vèrtexs de $P_i(\varphi)$ amb punts de R_E^e , ja no n'hi pot haver amb punts de R_E^d , precisament perquè els contactes amb R_E^e fan que la mida de $P_i(\varphi)$ disminueixi. \square

Lema 3.8. *La trajectòria que descriu cada vèrtex de P durant el recorregut angular de centre p_i és una poligonal continguda en R_E .*

Demostració. Sigui (p_k, s_j) un dels parells dominants a $\varphi = 0$; el recorregut angular de centre p_i comença amb el vèrtex p_k movent-se al llarg de s_j en sentit positiu i la resta de vèrtexs del polígon, excepte p_i que està fix, movent-se per mantenir la semblança amb P . El parell que domina el moviment canvia quan p_k passa a ser incident al costat s_{j+1} o bé quan un altre vèrtex toca la frontera de R_E i passa, juntament amb el costat de contacte, a dominar el moviment. Hem de veure que, quan un parell (p_l, s_ν) domina el moviment, tots els altres vèrtexs de P excepte p_i , que es mouen mantenint la semblança amb P , també descriuen trajectòries rectilínies. Suposem que (p_l, s_ν) és dominant a $\varphi \in [\varphi_\xi, \varphi_{\xi+1}]$; siguin $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in [\varphi_\xi, \varphi_{\xi+1}]$. Tots els vèrtexs de P realitzen la mateixa rotació de centre p_i i la mateixa homotècia del mateix centre per passar de $p_h(\varphi_0)$ a $p_h(\varphi_1)$, i també realitzen els mateixos moviments per convertir-se posteriorment en $p_h(\varphi_2)$. Ara bé, suposem que un punt (u_0, v_0) fa una rotació d'angle σ_1 i una homotècia de raó ρ_1 , ambdós moviments amb centre l'origen de coordenades, i es converteix en el punt (u_1, v_1) . Des de la seva posició inicial, suposem que (u_0, v_0) també fa una rotació d'angle σ_2 i una homotècia de raó ρ_2 amb centre l'origen de coordenades i es converteix en (u_2, v_2) . Una simple manipulació algebraica mostra que

$$\begin{aligned} (u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2) \text{ estan alineats} &\Leftrightarrow \frac{v_1 - v_0}{u_1 - u_0} = \frac{v_2 - v_0}{u_2 - u_0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho_1 \rho_2 \sin(\sigma_1 - \sigma_2) = \rho_1 \sin \sigma_1 - \rho_2 \sin \sigma_2, \end{aligned}$$

és a dir, que el fet que els tres punts estiguin alineats no depèn de (u_0, v_0) . En conseqüència, atès que $p_l(\varphi_0), p_l(\varphi_1)$ i $p_l(\varphi_2)$ estan alineats, tenim que $p_h(\varphi_0), p_h(\varphi_1)$ i $p_h(\varphi_2)$ també estan alineats per a tot $h \in \{1, 2, \dots, n\}$. \square

Amb tot el que hem vist fins ara estem en condicions de proposar un algorisme de temps $O(mn(n+m))$ que troba els millors candidats de tipus 2 per a m parell:

Per a cada p_i vèrtex de P amb angle $\varphi_i \leq \pi(m-2)/m$,

Pas 1: Calculem $P_i(0)$ i $P_i(\pi(m-2)/m - \varphi_i)$.

Pas 2: En $P_i(0)$, els vèrtexs $p_i(0), p_{i+1}(0)$ i r_2 estan alineats; en $P_i(\pi(m-2)/m - \varphi_i)$, els vèrtexs $p_i(\pi(m-2)/m - \varphi_i)$ i $p_{i+1}(\pi(m-2)/m - \varphi_i)$ estan alineats amb un punt d'algun costat s_l de R_E .

Fem una cerca dicotòmica entre els vèrtexs r_2 i r_{l+1} per trobar el vèrtex r_h ($h \in \{2, 3, \dots, l\}$) tal que:

- (i) en el valor φ_ξ de φ en què $p_i(\varphi_\xi)$, $p_{i+1}(\varphi_\xi)$ i r_h estan alineats, tots els vèrtexs de P que estan en contacte amb R_E (a part de p_i) estan recolzats només a R_E^d ;
- (ii) en el valor $\varphi_{\xi+1}$ de φ en què $p_i(\varphi_{\xi+1})$, $p_{i+1}(\varphi_{\xi+1})$ i r_{h+1} estan alineats, tots els vèrtexs de P que estan en contacte amb R_E (a part de p_i) estan recolzats només a R_E^e .

Pas 3: Calculem $P_i(\varphi)$, des de $\varphi = \varphi_\xi$ fins al valor de φ (més petit o igual que $\varphi_{\xi+1}$) en el qual hi ha vèrtexs de P en contacte amb R_E^d i vèrtexs de P en contacte amb R_E^e . Aquest valor de φ ens dona l'òptim del recorregut angular de centre p_i .

El primer i el segon pas es fan en temps $O(n+m)$ i $O((n+m)\log m)$, respectivament. Quant al tercer pas, depèn del nombre de canvis que es poden donar en el parell dominant. En primer lloc, com que l'angle que es recorre és menor o igual que π/m , cada vèrtex de P només pot formar un parell dominant amb dos costats diferents de R_E . A més, quan un parell deixa de ser dominant ja no ho pot tornar a ser perquè li ho impedeix el parell que l'ha substituït. En conseqüència, hi pot haver un màxim de $2n$ canvis en el parell dominant i, així, el cost del tercer pas és $O(n(m+n))$, ja que es pot calcular quan es donen aquests canvis en temps $O(n+m)$. Notem que, en general, des de $\varphi = 0$ fins a $\varphi = \pi(m-2)/m - \varphi_i$ hi pot haver $O(nm)$ parells dominants diferents, ja que cada vèrtex de P pot formar parell dominant amb cadascun dels costats de R_E . Així, a través de la restricció del càlcul de $P_i(\varphi)$ a un subinterval més petit aconseguim reduir la complexitat de l'algorisme en un factor.

En total, l'algorisme resol aquest cas en temps $O(\min\{n, m\}(n + \log m)(n + m))$. Hem demostrat:

Proposició 3.9. *Els candidats a solució del tipus 2 en el cas en què m és parell poden ser calculats en temps $O(mn(n+m))$.*

Passem a ocupar-nos del cas en el qual m és imparell. Siguin R_E^1 la cadena de r_1 a $r_{\frac{m+1}{2}}$, R_E^2 el segment d'extremes $r_{\frac{m+1}{2}}$ i el punt mig \bar{r} del costat $s_{\frac{m+1}{2}}$, R_E^3 el segment d'extremes \bar{r} i $r_{\frac{m+3}{2}}$ i R_E^4 la cadena de $r_{\frac{m+3}{2}}$ a r_1 . Siguin també v , w els punts de les cadenes R_E^1 i R_E^4 , respectivament, que estan a la mateixa distància de r_1 que \bar{r} (de seguida veurem que aquesta definició té sentit). Aquí, hem d'introduir una modificació en l'algorisme a causa del fet següent:

Lema 3.10. *La funció que dona la distància de la frontera de R_E (recorreguda en sentit positiu partint de r_1) a r_1 és creixent a R_E^1 , decreixent a R_E^2 , creixent a R_E^3 i, de nou, decreixent a R_E^4 . A més, $v \in s_{\frac{m-1}{2}}$ i $w \in s_{\frac{m+3}{2}}$.*

Demostració. Fem servir la mateixa notació que en la demostració per al cas en el qual m és parell. Com llavors, és clar que la funció és creixent a la cadena d'origen r_1 i final $r_{\lceil m/4 \rceil + 1}$. Per a $\lceil \frac{m}{4} \rceil + 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2}$, com que $\frac{\pi}{m}(j-1) \leq \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2m}$, també

$$\nu_j = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}(j-1) \leq \pi - \frac{3\pi}{2m} - \frac{2\pi}{m}(j-1) < \pi - \frac{\pi}{m} - \frac{2\pi}{m}(j-1) = \omega_j,$$

és a dir, la funció és creixent a la cadena d'origen $r_{\lceil m/4 \rceil + 1}$ i final $r_{\frac{m+1}{2}}$.

En canvi, per a $j = \frac{m+1}{2}$, tenim que

$$\nu_j = \frac{\pi}{2m} > 0 = \omega_j,$$

i, per tant, la funció decreix a R_E^2 .

Quant a la segona part, per tal de veure que $v \in s_{\frac{m-1}{2}}$, n'hi ha prou amb comprovar que $d(r_1, r_{\frac{m-1}{2}}) < d(r_1, \bar{r})$ (ja que $d(r_1, r_{\frac{m+1}{2}}) > d(r_1, \bar{r})$). Si el m -gon regular està inscrit en una circumferència de radi 1, $d(r_1, \bar{r}) = 1 + \cos(\pi/m)$ i, aplicant el Teorema del cosinus al triangle $\triangle Gr_1 r_{\frac{m-1}{2}}$,

$$1^2 = 1^2 + d^2(r_1, r_{\frac{m-1}{2}}) - 2d(r_1, r_{\frac{m-1}{2}}) \cos(3\pi/2m),$$

i, llavors, $d(r_1, r_{\frac{m-1}{2}}) = 2 \cos(3\pi/2m)$. Atès que, per a $0 < x \leq \pi/3$, es compleix que $\cos(3x/2) < \cos x$,

$$d(r_1, r_{\frac{m-1}{2}}) = 2 \cos(3\pi/2m) < 1 + \cos(\pi/m) = d(r_1, \bar{r}).$$

□

Com a resultat d'aquesta forma lleugerament diferent de la funció que dona la distància de la frontera a un vèrtex, en efectuar P el recorregut angular de centre p_i , la seva mida pot descriure una funció amb mínims locals. Els mínims locals apareixen quan el costat de R_E del parell dominant passa d'estar en una regió de la frontera de R_E on la distància a r_1 decreix (R_E^2 o bé R_E^4) a estar en una regió on creix (R_E^1 o bé R_E^3). Però no és possible passar d'un parell dominant (p_j, s_l) , $s_l \in R_E^4$ a un parell dominant on el costat de R_E pertany a R_E^1 o bé a R_E^3 , ja que això faria que la mida de P comencés a créixer i el vèrtex p_j deixés d'estar contingut en R_E . Així, ja no és difícil acabar de deduir que els mínims locals de la funció mida de P estan en correspondència amb valors de φ tals que el vèrtex de $P_i(\varphi)$ del parell dominant es troba en el punt \bar{r} .

L'algorisme que proposem és:

Per a cada p_i vèrtex de P d'angle φ_i , amb $\varphi_i \leq \pi(m-2)/m$,

Pas 1: Busquem si hi ha algun vèrtex p_j de P tal que la còpia de P en què p_i està sobre r_1 i p_j està sobre \bar{r} està continguda en R_E (vegeu la Figura 3.10).

Pas 2: Si no n'hi ha cap, executem l'algorisme exposat per al cas en què m és parell. Si n'hi ha algun (diem-li p_j), calculem $P_i(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_v, \varphi_{v+1}]$, on φ_v és el valor de φ on $p_i(\varphi_v)$, $p_j(\varphi_v)$ i v estan alineats, i φ_{v+1} és el valor de φ on $p_i(\varphi_{v+1})$, $p_j(\varphi_{v+1})$ i w estan alineats. Guardem el valor de $\varphi \in [\varphi_v, \varphi_{v+1}]$ per al qual la mida de $P_i(\varphi)$ és màxima.

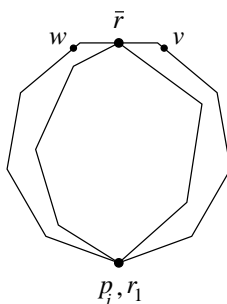


Figura 3.10: Exemple d'emplaçament de P dins R_E on hi ha un vèrtex de P incident a \bar{r} .

Vegem que l'algorisme és correcte. En el primer pas, detectem l'existència de mínims locals en la funció que descriu la mida de P . Si no n'hi ha, la funció és unimodal i podem aplicar l'algorisme per a m parell. Si n'hi ha algun, en la còpia de P continguda en R_E que li correspon hi ha un vèrtex p_j que està sobre \bar{r} . Notem que la mida de P en aquesta posició és més gran que la que té en qualsevol còpia en què p_i i p_j estan alineats amb un punt de la frontera de R_E que pertany, o bé a la cadena que uneix r_1 amb v , o bé a la que uneix w amb r_1 . Això justifica que només calculem el recorregut angular en un arc més petit.

Quant al cost, el primer pas es pot portar a terme en temps $O(n(n+m))$. El segon pas, si s'executa l'algorisme per al cas en què m és parell, té cost $O(n + \log m)(n+m)$. En cas contrari, els vèrtexs de P fan un moviment de rotació de centre p_i i angle menor que $3\pi/m$, i, per aquest motiu, només poden formar parell dominant amb un màxim de quatre costats diferents de R_E . La conclusió és:

Proposició 3.11. *Els candidats a solució del tipus 2 en el cas en què m és imparell poden ser calculats en temps $O(mn(n+m))$.*

Vegem finalment un exemple d'inscripció d'un n -gon convex en un m -gon regular en què la posició òptima és del tipus 2:

Exemple 3.12. Sigui P un octògon “allargat” i R_E un hexàgon regular (vegeu la Figura 3.11). L'optimalitat ve del fet que els dos vèrtexs que constitueixen el parell diametral de P són incidents a dos vèrtexs que també són parell diametral de R_E .

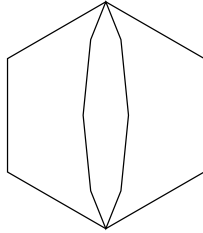


Figura 3.11: Exemple de posició òptima del tipus 2.

Tipus 3: quatre vèrtexs diferents de P són incidents a quatre costats diferents de R_E

Trobar els millors candidats a solució en què quatre vèrtexs diferents de P són incidents a quatre costats diferents de R_E i no hi ha incidències entre vèrtexs de P i vèrtexs de R_E , o entre costats de P i costats de R_E és més complicat que trobar els millors candidats de qualsevol dels tipus vistos fins ara. El motiu és que tant els contactes entre costats del polígon interior i costats del polígon exterior, com els contactes entre vèrtexs del polígon interior i vèrtexs del polígon exterior redueixen de quatre a dos el nombre de graus de llibertat del cos que es considera mòbil. En canvi, fixar que un vèrtex de P sigui incident a un costat de R_E només redueix un grau de llibertat. Això ens força a utilitzar tècniques una mica més sofisticades per a la resolució d'aquest cas.

El mètode que apliquem consisteix a, per a cada vèrtex p_j de P , trobar la còpia més petita de R_E tal que p_j és incident a s_1 . Com que els costats d'un m -gon regular són indistingibles, això genera un total de $O(n)$ candidats a solució.

Aprofitem la mateixa propietat que ja hem anat veient en casos anteriors: si s_1 és incident a P , el punt de tall entre t_1 i cada t_i , quan aquesta és tangent a P , imposa una restricció per tal que P estigui contingut en R_E . Aquí, però, hi ha una dificultat afegida: l'orientació de R_E no és fixa. Més concretament, els graus de llibertat són tres: la distància x entre p_j i r_1 , la longitud l del costat s_1 i l'angle σ que forma la recta que conté el costat e_{j-1} amb la recta t_1 (vegeu la Figura 3.12). Parlant amb més precisió, la variable x és una distància amb signe, i és positiva si r_1 queda a l'esquerra de p_j (des d'un sistema de referència en el qual l'eix d'abscisses és t_1) i negativa en cas contrari.

Suposem que tenim una còpia de R_E determinada. Deduïm la condició per tal que R_E contingui P que imposa s_i , en cas que t_i deixi P a la seva esquerra (des d'un sistema de referència en el qual l'eix d'abscisses és t_1). Siguin α_i la distància entre p_j i el punt de tall g_{i1} entre t_1 i la recta que té el mateix pendent que s_i i és tangent a P (per un vèrtex p_k), β_i la distància entre p_j i el punt de tall entre t_1 i el perllongament de s_i i δ_i la distància entre els punts r_1 i el punt de tall entre els perllongaments de s_1 i s_i (vegeu la Figura 3.12). Una condició necessària per tal que R_E contingui P és que $\beta_i \geq \alpha_i$, és a dir,

$$\delta_i - x \geq \alpha_i.$$

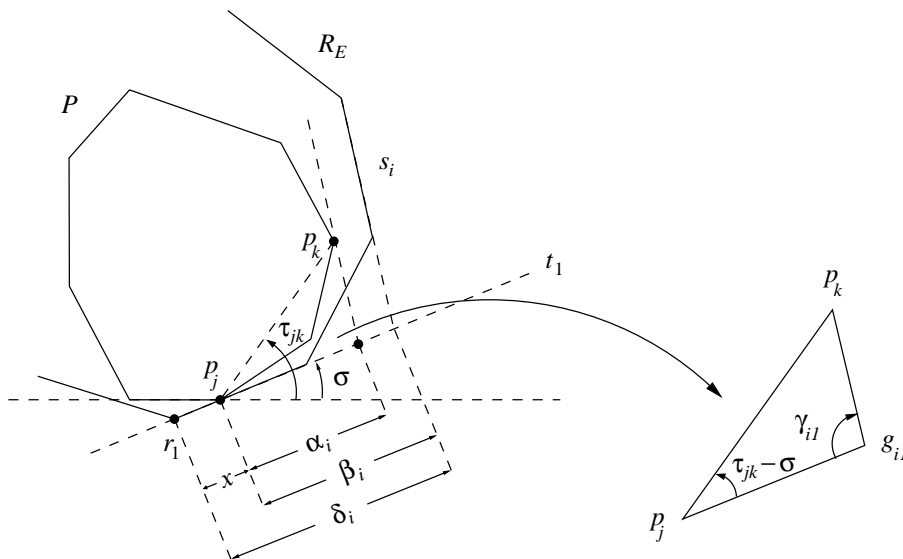


Figura 3.12: Significat dels paràmetres x , α_i , β_i i δ_i .

El terme δ_i només depèn de la mida de R_E i compleix que $\delta_i = k_i \cdot l$, per a alguna constant positiva k_i . Quant a α_i , és el terme de l'expressió que depèn de σ ; en efecte, siguin γ_{i1} l'angle que formen les rectes t_1 i t_i , i τ_{jk} l'angle que formen el perllongament del costat e_{j-1} i la recta que passa pels punts p_j i p_k . Aplicant el Teorema del sinus al triangle $\triangle p_j p_k g_{i1}$, tenim que

$$\frac{\alpha_i}{\sin(\pi - \gamma_{i1} - (\tau_{jk} - \sigma))} = \frac{d(p_j, p_k)}{\sin \gamma_{i1}}.$$

En conseqüència, α_i pot ser expressat com $\alpha_i = \tilde{k}_i \sin(\sigma + c_i)$, per a uns certs angle fix c_i i constant \tilde{k}_i .

Així, és necessari que

$$k_i \cdot l - x \geq \tilde{k}_i \sin(\sigma + c_i)$$

perquè P estigui contingut en R_E . Notem, però, que aquesta inequació només és vàlida mentre la recta que té el mateix pendent que s_i i és tangent a P , ho és pel vèrtex p_k . Suposem, doncs, que el vèrtex p_j té un angle interior φ_j . Aleshores, per tal que R_E contingui P , el costat s_i imposa i_ν condicions de la forma anterior:

$$\begin{aligned} k_{ii_1} \cdot l - x - \tilde{k}_{ii_1} \sin(\sigma + c_{ii_1}) &\geq 0, & \sigma \in [0, \sigma_{ii_1}], \\ &\vdots \\ k_{ii_\nu} \cdot l - x - \tilde{k}_{ii_\nu} \sin(\sigma + c_{ii_\nu}) &\geq 0, & \sigma \in [\sigma_{ii_{\nu-1}}, \pi - \varphi_j]. \end{aligned}$$

Hem vist, per tant, que trobar la còpia més petita de R_E que conté P tal que $p_j \in s_1$ es transforma en el problema de minimitzar l sota n_j condicions del tipus anterior, on $n_j = \sum_{i \neq 1} i_\nu$.

Una primera via per intentar abordar aquesta qüestió és esbrinar si el problema s'encabeix dins de la classe dels tipus *LP* (vegeu [24] i [13]) i si els algorismes que resolen eficientment aquest grup abstracte de problemes són aplicables al nostre cas. Si dotem l'espai de les solucions $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \pi - \varphi_j] \ni (l, x, \sigma)$ de l'ordre lexicogràfic habitual, denotem per H el conjunt de les n_j restriccions i definim una funció ω que retorna, per a cada subconjunt de H , el punt més petit que les compleix, ω és, de manera trivial, monòtona (si $F \subseteq G \subseteq H$, aleshores $\omega(F) \leq \omega(G)$) i local (si $F \subseteq G \subseteq H$, $\omega(F) = \omega(G)$ i $h \in H$, aleshores $\omega(G) < \omega(G \cup \{h\})$ implica que, també, $\omega(F) < \omega(F \cup \{h\})$) i, en conseqüència, el problema (que denotem

per (H, ω) de trobar el punt més petit que compleix les n_j condicions és de tipus LP.

Ara bé, per tal que (H, ω) pugui ser resolt en temps esperat $O(n_j)$ mitjançant l'algorisme aleatoritzat proposat a [24] i [13], és necessari que una certa magnitud, la *dimensió combinatòria* del problema, sigui constant. La dimensió combinatòria es defineix com el cardinal màxim d'una *base*, i una base de $G \subseteq H$ és un subconjunt minimal $B \subseteq G$ amb la propietat que $\omega(B) = \omega(G)$. La noció de dimensió combinatòria és subtil i, si les restriccions d'un problema tenen la forma $h_\xi(x^1, x^2, \dots, x^d) \geq 0$ i $\omega(G) = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^d)$ per a un cert $G \subseteq H$, no s'ha de confondre amb el nombre de restriccions de G tals que $h_\xi(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^d) = 0$. Vegeu, per exemple, la Figura 3.13 [4], on la regió factible està ombrejada, el punt d'ordenada mínima només és incident a la frontera de dos dels cons que donen les restriccions, però tots ells estan a la base.

Malauradament, el nostre problema també pot tenir dimensió combinatòria no constant. Encara que

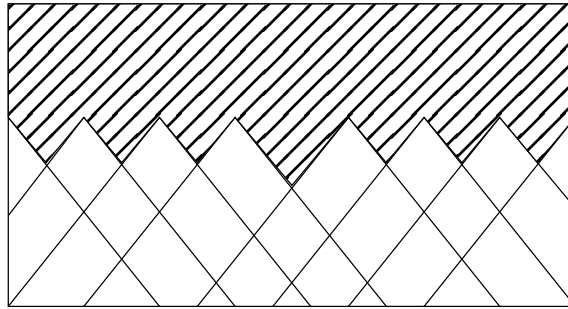


Figura 3.13: Problema de tipus LP on totes les restriccions estan a la base.

dividíssim el domini $[0, \pi - \varphi_j]$ en intervals més petits per tal de tenir, en cada interval, $m-1$ condicions (una per a cada costat de R_E) definides a tot arreu, també es podria donar el cas que un nombre lineal d'elles estiguessin en alguna base, a causa de les característiques de les superfícies del tipus $k_\xi \cdot l - x - \tilde{k}_\xi \sin(\sigma + c_\xi) = 0$. Concretament, la solució del problema (H, ω) podria estar en tres d'aquestes superfícies, però la regió factible delimitada per les tres restriccions corresponents podria contenir punts més petits que no són la solució del problema perquè no compleixen altres restriccions de H i que, en conseqüència, s'haurien d'afegir a la base i podrien forçar, al seu torn, la inclusió de més elements de H en la base.

Descartat l'ús de les eines per a problemes de tipus LP, un altre punt de vista possible és el de la minimització de l'envolupant superior d'un conjunt de n funcions en dues variables. En efecte, el problema de minimitzar l sota n_j condicions del tipus

$$k_\xi \cdot l - x - \tilde{k}_\xi \sin(\sigma + c_\xi) \geq 0, \quad \sigma \in [\sigma_\xi, \sigma_{\xi+1}],$$

és equivalent al de minimitzar $F(x, \sigma)$, on

$$F(x, \sigma) = \max_{\xi} f_{\xi}(x, \sigma) \quad \text{i} \quad f_{\xi}(x, \sigma) = \frac{x}{k_{\xi}} + \frac{\tilde{k}_{\xi}}{k_{\xi}} \sin(\sigma + c_{\xi}), \quad (x, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times [\sigma_{\xi}, \sigma_{\xi+1}],$$

ja que, en el nostre cas, $k_\xi > 0 \quad \forall \xi \in \{1, 2, \dots, n_j\}$. Per comoditat, escriurem $f_{\xi}(x, \sigma) = A_{\xi}x + B_{\xi} \sin \sigma + C_{\xi} \cos \sigma$, $(x, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times [\sigma_{\xi}, \sigma_{\xi+1}]$.

El problema de trobar la complexitat de l'envolupant superior d'un conjunt de k funcions en dues variables és força complicat. A [23], Schwartz *et al.* n'estudien alguns casos; entre altres teoremes, demostren que, sota certes condicions bastant restrictives, l'envolupant superior té complexitat $O(k)$ i pot ser calculada en temps $O(k \log k)$. Nosaltres ens proposem utilitzar aquest resultat.

En primer lloc, és necessari que les funcions estiguin definides a tot arreu. Per aquest motiu, dividim el domini $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi - \varphi_j]$ del nostre problema en dominis més petits de la forma següent: prenem els valors

$\sigma_\xi, \sigma_{\xi+1}$ i els renombrem, si cal, per tal que $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ denoti la seqüència ordenada de tots ells. D'aquesta manera, en cada domini $\mathbb{R}^+ \times [\sigma_\xi, \sigma_{\xi+1}]$, es tenen $m - 1$ funcions (una per a cada costat de R_E diferent de s_1) del tipus $f_\xi(x, \sigma) = A_\xi x + B_\xi \sin \sigma + C_\xi \cos \sigma$ definides a tot arreu i es busca el punt que minimitza la seva envolupant superior. Posteriorment es troba el millor de tots els valors obtinguts.

Si es pretén aplicar el resultat mencionat, la intersecció de cada parell de funcions també ha de satisfer certes propietats. En el nostre cas, la intersecció de dues de les funcions és una corba de la forma $ax + b \sin \sigma + c \cos \sigma = 0$, amb x, σ definits en un cert interval i $a \neq 0$, ja que les constants que acompanyen la variable x són diferents per a cada costat de R_E . Com que l'interval de definició de σ està estrictament inclòs en $[0, \pi]$, aquesta corba és buida o connexa, una de les condicions exigides. A més, en el darrer cas, per a cada σ_0 que pertany a l'interval de definició, l'equació $f_{\xi_k}(x, \sigma_0) = f_{\xi_l}(x, \sigma_0)$ té, com es demana, una única solució en x i les corbes $f_{\xi_k}(x, \sigma_0)$ i $f_{\xi_l}(x, \sigma_0)$ s'intersequen transversalment en aquest punt.

Finalment, l'última condició que s'ha de satisfer, i que també és trivial en el nostre cas, és que cada triple de funcions s'interseca, com a màxim, en un punt.

Així doncs, podem aplicar l'algorisme proposat a [23] per trobar, en $O(m \log m)$ operacions, l'envolupant superior de les $m - 1$ funcions definides en cada domini $\mathbb{R}^+ \times [\sigma_\xi, \sigma_{\xi+1}]$. Per tal de trobar la complexitat de tot l'algorisme, fem un anàlisi global, és a dir, no comptem el nombre d'operacions necessari per trobar la còpia més petita de R_E tal que un vèrtex fix p_j és incident a s_1 , sinó el temps en què s'efectua el càlcul dels n candidats corresponents a fer s_1 incident a cadascun dels vèrtexs de P . L'observació clau és la següent: si volem comptar quantes vegades computem l'envolupant superior de m funcions, hem de tenir en compte que, per al càlcul dels n candidats, les m rectes t_i donen una volta completa al voltant de P , i que s'ha de resoldre un problema nou de mida m cada vegada que una d'elles esdevé paral·lela a un costat del polígon interior. En conseqüència, s'han de calcular $O(nm)$ envolupants superiors de conjunts de m funcions i acabem de veure:

Proposició 3.13. *Els candidats a solució del tipus 3 poden ser calculats en temps $O(nm^2 \log m)$ mitjançant un algorisme alternatiu al d'Agarwal et al.*

Notem, a més, que en cap moment hem restringit la nostra cerca a candidats en què quatre vèrtexs diferents de P són incidents a quatre costats diferents de Q , de manera que aquest algorisme proporciona la solució general del problema, sigui aquesta del tipus que sigui. Així doncs, qualsevol rebaixa en el cost d'aquest algorisme, ideat inicialment per tractar només les solucions del tipus 3, es traduiria en una millora directa en la resolució del cas general.

Per acabar, vegem un exemple en què l'emplaçament òptim d'un rectangle en un octògon regular és tal que els quatre vèrtexs del rectangle es recolzen sobre quatre costats diferents de l'octògon:

Exemple 3.14. Sigui R_E un octògon regular tal que el doble de la seva apotema té longitud $\lambda_1 > 0$ i P un rectangle amb un dels costats molt curt i l'altre costat de longitud λ_2 més petita que el diàmetre del cercle inscrit a l'octògon però més gran que λ_1 . L'emplaçament òptim de P dins R_E té els quatre vèrtexs de P en contacte amb quatre costats diferents de R_E (vegeu la Figura 3.14).

En primer lloc, la millor posició en què un costat de P és incident a un costat de R_E consisteix a recolzar un dels costats curts de P sobre un dels costats de R_E , però això obliga a fer P més petit, ja que $\lambda_2 > \lambda_1$. D'altra banda, podem portar a terme dos tipus diferents de recorreguts angulars. Suposant que e_1 és un dels costats curts de P , el recorregut angular de centre p_1 és tal que $p_1(0)$ és incident a r_1 , $p_2(0)$ és incident a s_1 , $p_3(0)$ és incident a s_5 i $p_4(0)$ és incident a r_6 . Com que $p_4(0)$ és incident a $r_6 \in R_E^e$, quan s'inicia el recorregut angular la mida de P comença a decreixer, és a dir, el recorregut angular de centre p_1 assoleix el seu òptim en una posició que ja hem vist que és pitjor que la de la figura. Raonant semblantment, es comprova que el recorregut angular de centre p_2 tampoc aporta un candidat a solució millor que el de la

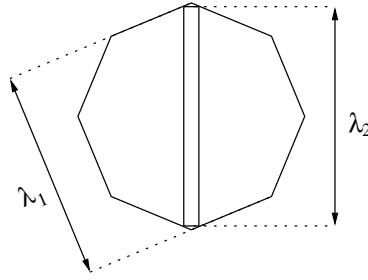


Figura 3.14: Exemple de posició òptima del tipus 3.

figura.

3.2.3 Simplificació de la complexitat de l'algorisme genèric

Un fet que ja hem aprofitat en la resolució anterior és la repetició de candidats a solució que es dona a causa que R_E és regular. Més concretament, de cada emplaçament de P dins R_E se'n poden obtenir $m - 1$ més, fent que P faci rotacions de centre el centre de R_E i angles $2\pi j/m$, $j \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$. Això suggereix que podem restringir les rotacions de P a angles inclosos a l'interval $[0, 2\pi/m)$.

Tornem a l'algorisme general de les referències [1] i [2]. Recordem que, per tal que una còpia de P estigui dins R_E , s'han de complir mn inequacions lineals $L_{i,j}$, una per cada parell format per un vèrtex de P i un costat de R_E . Afortunadament, restringir els angles de les rotacions de P redueix dràsticament el nombre de restriccions no redundants. Permetent només que P es traslladi i canviï de mida, n'hi ha prou amb una inequació per a cada costat de R_E , ja que, si la recta tangent a P que té el mateix pendent que el costat s_j de R_E toca un vèrtex p_{i_j} de P , que es compleixi la restricció $L_{i_j,j}$ implica que també es compleixen les restriccions $L_{k,j}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq i_j$. Si deixem que P comenci a fer un moviment de rotació, els canvis que es van produint en els vèrtexs de P que són el punt de contacte amb les rectes tangents a P que tenen el mateix pendent que algun costat de R_E van imposant noves inequacions del conjunt $\{L_{i,j} \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}\}$. En una rotació d'angle $2\pi/m$, cada vèrtex p_{i_j} que imposava en el moment inicial alguna restricció $L_{i_j,j}$ afegeix a la llista (si no hi era) la restricció $L_{i_j,j+1}$; els altres vèrtexs afegeixen una inequació, la corresponent al mateix costat que el del vèrtex següent en sentit positiu que sí que imposava una restricció en el moment inicial. Així doncs, si afegim les condicions $0 \leq t \leq \text{tg}(2\pi/m) \cdot s$ i denotem per μ_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) el nombre de restricció de la forma $L_{i,j}$ ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$) que eren a la llista en el moment inicial, només $\sum_{i=1}^n (\mu_i + 1) = m + n$ restriccions del tipus $L_{i,j}$ no esdevé redundant.

Com que la intersecció de $O(n + m)$ hiperplans a \mathbb{R}^4 té $O((n + m)^2)$ vèrtexos que poden ser calculats en temps $O((n + m)^2)$ (vegeu [20]), hem demostrat el resultat següent:

Teorema 3.15. *El problema de trobar el m -gon regular R_E més petit que conté un n -gon convex donat P , permetent translacions, rotacions i escalaments, pot ser resolt en temps $O((n + m)^2)$.*

3.3 Circumscripció

Passem ara a estudiar el cas en què el polígon interior és regular. El problema que s'ha de resoldre és: donat un polígon convex P de n costats, trobar el polígon regular R_I de k costats més gran contingut en P , permetent translacions, rotacions i escalaments.

Com en el problema anterior, les mesures de regularitat que proposem són, si P i R_I representen les còpies dels polígons originals en la posició òptima, la diferència àrea(P) - àrea(R_I) i el quocient

àrea(R_I)/àrea(P). Per a la primera, P està més a prop de ser un k -gon regular com més petit sigui el valor obtingut; per a la segona, P està més a prop de ser un k -gon regular com més proper a 1 sigui el valor obtingut.

Veiem també tres resolucions del problema; els procediments són gairebé idèntics als proposats per al cas de la inscripció.

3.3.1 Resolució amb un algorisme genèric

Evidentment, l'algorisme proposat a [1] i [2] també resol aquest problema. En aquest cas, el temps d'execució és $O(kn^2 \log n)$.

3.3.2 Resolució per casos segons tipus de contactes

Distingim els mateixos tres tipus de candidats a solució. Abans, però, introduïm la notació relativa a R_I : denotem els k vèrtexs de R_I donats en ordre positiu per r_1, r_2, \dots, r_k .

Tipus 1: algun costat de R_I és incident a algun costat de P

Troblem els millors candidats del tipus 1 seguint el millor dels mètodes proposats per al cas en què el regular és el polígon contenidor. Observem que ara són els costats del polígon interior els que són indistingibles i, en canvi, els que s'han de diferenciar són els del polígon exterior. Per tant, es poden calcular tots els candidats d'aquest tipus en temps $O(n^2 + k)$.

L'Exemple 3.5 descriu una circumscripció òptima del tipus 1 d'un quadrilàter convex a un octògon regular.

Tipus 2: algun vèrtex de R_I és incident a algun vèrtex de P

Els millors candidats del tipus 2 poden ser calculats en temps $O(n^2(n+k))$ utilitzant també recorreguts angulars. Ara, però, escollim un vèrtex qualsevol de R_I (per exemple, r_1) i trobem els $O(n)$ candidats a solució corresponents als emplaçaments més grans de R_I dins P en què r_1 és incident a algun vèrtex de P amb angle més gran o igual que $\pi(k-2)/k$. L'algorime és, no obstant, més senzill que en el cas anterior:

Lema 3.16. *Si p_i és un vèrtex de P amb angle $\varphi_i \geq \pi(k-2)/k$, es pot calcular $R_I(\varphi)$, $\varphi \in [0, \varphi_i - \pi(k-2)/k]$ amb r_1 incident a p_i en temps $O(n(n+k))$.*

Demostració. L'angle suplementari de l'angle interior d'un k -gon regular té valor $2\pi/k$. Això té com a conseqüència que, durant el recorregut angular de centre r_1 , el polígon R_I fa una rotació de centre r_1 d'angle màxim $2\pi/k$. Així, cada costat de P pot formar parell dominant amb un màxim de tres vèrtexs de R_I i això acaba la prova. \square

La conseqüència immediata d'aquest fet és que, quan el polígon regular és l'interior, es poden calcular els candidats a solució del tipus 2 amb el mateix cost que en el cas de la inscripció, però sense haver de restringir el càlcul dels recorreguts angulars a un angle més petit.

L'exemple que segueix mostra una inscripció d'un k -gon regular en un n -gon convex en la qual la posició òptima és del tipus 2:

Exemple 3.17. Sigui R_I un quadrat de costat unitat i P el rombe que també apareix a la Figura 3.15.

Sigui p_1 un dels vèrtexs de P d'angle més gran. Si d és la diagonal del quadrat i D_1 és la diagonal curta del rombe, tenim que $\sqrt{2} = d = D_1$. Si efectuem un recorregut angular de centre, per exemple, el vèrtex r_1 amb r_1 incident a p_1 , en $\varphi = 0$ (que coincideix amb la millor posició en què un costat de R_I és incident a

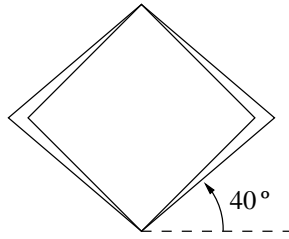


Figura 3.15: Exemple de posició òptima del tipus 2.

un costat de P) d forma un angle de 55° amb el costat e_2 . En canvi, quan r_3 és incident a p_3 l'angle és de 50° . Així, com que $|90 - 50| > |90 - 55|$, el valor de φ en què la diagonal del quadrat és més llarga es dona quan r_3 és incident a p_3 , és a dir, l'emplaçament de la figura.

Falta comprovar que no hi ha cap emplaçament amb els quatre vèrtexs de R_I incidents als quatre costats diferents de P que millori el de la figura. Observem en primer lloc que, per tal que dos vèrtexs no contigus de R_I siguin incidents a dos costats no contigus de P , és necessari que el centre de R_I estigui sobre la recta paral·lela i equidistant als dos costats. Aleshores, només és possible que els quatre vèrtexs de R_I siguin incidents als quatre costats diferents de P si el centre de R_I està sobre el baricentre de P . Novament, una anàlisi de l'angle que pot formar una diagonal de R_I amb el costat e_2 si el centre de R_I està sobre el baricentre de P i R_I està contingut en P dona com a conclusió que el millor emplaçament amb aquestes característiques és el de la figura.

Tipus 3: quatre vèrtexs diferents de R_I són incidents a quatre vèrtexs diferents de P

El mateix algorisme vist quan hem estudiat el problema de la inscripció resol també, en particular, l'obtenció dels millors candidats del tipus 3 i, en general, la de l'emplaçament òptim. En aquest cas, però, s'han de trobar els n candidats a solució corresponents a fixar un vèrtex de R_I i fer-lo incident als n costats de P . No és difícil veure que, com que l'angle interior de tots els vèrtexs de R_I val el mateix, el nostre algorisme computa ara, per a cada costat de P , $O(n)$ envolupants superiors de conjunts de $n - 1$ funcions. Per tant, els millors candidats del tipus 3 poden ser calculats en temps $O(n^3 \log n + k)$.

Vegem un exemple de posició òptima de tipus 3:

Exemple 3.18. Prenem l'Exemple 3.17 i només modifiquem l'angle que formen els costats del rombe amb l'horitzontal (vegeu la Figura 3.16). En aquest cas, tenim que $1,41 \approx \sqrt{2} = d > D_1 = 1 + 2 \cdot (0,5 \cdot \text{tg } 19^\circ) \approx$

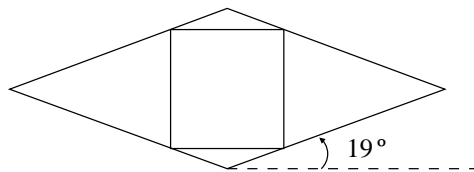


Figura 3.16: Exemple de posició òptima del tipus 3.

$1,34$ i, per tant, l'emplaçament de la figura és millor que aquell en el qual dos vèrtexs no contigus de R_I són incidents a p_1 i p_3 , respectivament. Si efectuem un recorregut angular de centre r_1 amb r_1 incident a p_1 , en $\varphi = 0$ la diagonal d forma un angle de 97° amb el costat e_2 ; quan r_3 és incident a p_3 , l'angle és de 71° . Per tant, el valor de φ en què d és més llarga és tal que r_3 és incident a p_3 , posició que ja hem descartat perquè és pitjor que la de la figura.

3.3.3 Simplificació de la complexitat de l'algorisme genèric

Com en el cas en el qual el polígon regular és l'exterior, aprofitem que n'hi ha prou amb permetre que R_I faci rotacions d'angles més petits que $2\pi/k$ per reduir el nombre de restriccions de tipus $L_{i,j}$ no redundants. Si en la posició prefixada la recta tangent a R_I que té el mateix pendent que el costat e_j de P toca un vèrtex r_{i_j} de R_I , quan R_I ha fet una rotació d'angle $2\pi/k$ aquesta mateixa recta és incident al vèrtex r_{i_j-1} . Així, afegint les condicions $0 \leq t \leq \text{tg}(2\pi/k) \cdot s$, el conjunt de les restriccions de tipus $L_{i,j}$ que continuen sent no redundants està format per $2n$ elements, dos per a cada costat de P . En conseqüència:

Teorema 3.19. *El problema de trobar el k -gon regular R_I més gran contingut en un n -gon convex donat P , permetent translacions, rotacions i escalaments, pot ser resolt en temps $O(n^2 + k)$.*

Capítol 4

Simetria radial

4.1 Introducció

Un aspecte que caracteritza els polígons regulars i que encara no ha estat tractat en aquesta memòria és la seva simetria radial. Per aquest motiu, en aquest capítol proposem mesures de regularitat relacionades amb la simetria de P . El mètode que fem és detectar diverses propietats dels polígons regulars que es deriven de la seva simetria i mesurar si P està *a prop o lluny* de complir-les.

Un fet que resulta interessant és que qualsevol n -gon regular pot ser dividit en n porcions de la mateixa àrea mitjançant n semirectes d'origen el centre del polígon i tals que l'angle entre dues de consecutives és $2\pi/n$. Aquesta és la idea de què ens servim a la Secció 4.2 per proposar tres noves mesures de regularitat que sorgeixen de fixar el mateix feix de semirectes en el baricentre de P i buscar l'angle de rotació del feix que fa que les àrees de les porcions en què queda dividit P siguin tan semblants com es pugui.

Com que l'algorisme que resol el problema anterior no utilitza que el feix de semirectes sigui concurrent precisament en el baricentre de P , és natural preguntar-se si és més convenient que el feix realitzi el moviment de rotació des d'algun altre punt del polígon. Així, amb la doble intenció de mesurar la simetria de P , però també de proposar altres punts significatius des dels quals el feix de semirectes pot fer una rotació, a la Secció 4.3 resolem tres problemes nous.

Aquests problemes estan relacionats amb una característica dels n -gons regulars que es deriva també de la seva simetria: els n segments que uneixen el centre del polígon amb tots els seus vèrtexs el divideixen en n triangles de la mateixa àrea. Inspirant-nos en aquesta propietat, busquem descomposicions de P en n triangles, on els triangles tinguin àrees tan semblants com sigui possible. Aquests triangles sempre són generats de la mateixa manera; concretament, mitjançant n segments que uneixen tots els vèrtexs de P amb un mateix punt.

4.2 Distribució equiangular

El nostre objectiu és resoldre el problema que segueix: donat un polígon convex P de n vèrtexs i un feix de n semirectes $\{t_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ amb origen en el baricentre del polígon i pendents $\{\text{tg } 2\pi i/n, i = 1, 2, \dots, n\}$ respectivament, el feix descompon l'àrea de P en n porcions (vegeu la Figura 4.1). Suposem que el feix pot fer un moviment de rotació al voltant del baricentre; volem trobar les posicions del feix que satisfan alguna d'aquestes tres condicions:

- (i) fer màxima la porció amb àrea més petita;

- (ii) fer mínima la porció amb àrea més gran;
- (iii) minimitzar la diferència entre l'àrea de la porció més gran i la de la porció més petita.

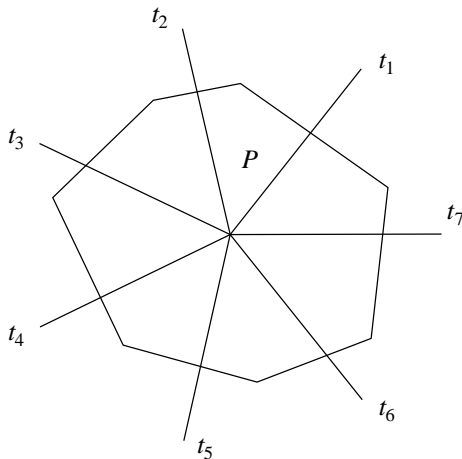


Figura 4.1: Heptàgon dividit en 7 porcions.

Calcularem aquestes posicions a partir del conjunt de funcions que donen l'àrea de les porcions en funció de l'angle de rotació del feix.

Sigui G el baricentre de P ; podem suposar que $G = (0, 0)$. Definim $a_1(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ com l'àrea de la porció de P delimitada per les semirectes t_1 i t_2 quan t_1 forma un angle φ amb l'horitzontal. A continuació, donem una caracterització de la funció $a_1(\varphi)$:

Lema 4.1. *La funció $a_1(\varphi)$ és contínua i consisteix en la concatenació d'un màxim de $2n + 5$ trossos de branques de funcions en $\operatorname{tg} \varphi$ del tipus quocient de dos polinomis de segon grau. Pot ser calculada en temps $O(n)$.*

Demostració. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que cap costat de P és vertical. Fixem $\varphi \in [0, 2\pi)$. Sigui $Q(\varphi)$ el punt de tall entre t_1 i la frontera de P , $R(\varphi)$ el punt de tall entre t_2 i la frontera de P i, per a $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, α_k l'angle que forma el vector $\overrightarrow{Gp_k}$ amb l'horitzontal, $d_k = d(G, p_k)$ i $y = m_k x + n_k$ l'equació de la recta que conté el costat e_k .

Distingim dos casos, en funció del nombre de costats diferents de P que tallen t_1 i t_2 .

Si t_1 i t_2 tallen dos costats diferents de P , tenim l'esquema de la Figura 4.2. Si t_1 talla el costat e_{i-1} i t_2 talla el costat e_j , aleshores

$$Q(\varphi) = \left(\frac{n_{i-1}}{\operatorname{tg} \varphi - m_{i-1}}, \frac{n_{i-1}}{\operatorname{tg} \varphi - m_{i-1}} \operatorname{tg} \varphi \right),$$

$$R(\varphi) = \left(\frac{n_j}{\operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) - m_j}, \frac{n_j}{\operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) - m_j} \operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) \right).$$

Notem que, per a tots els valors de φ per als quals $Q(\varphi) \in e_{i-1}$ i $R(\varphi) \in e_j$, l'àrea $a_1(\varphi)$ es pot calcular com la suma d'àrees següent:

$$a_1(\varphi) = a_{11}(\varphi) + a_{12}(\varphi) + a_{13}(\varphi),$$

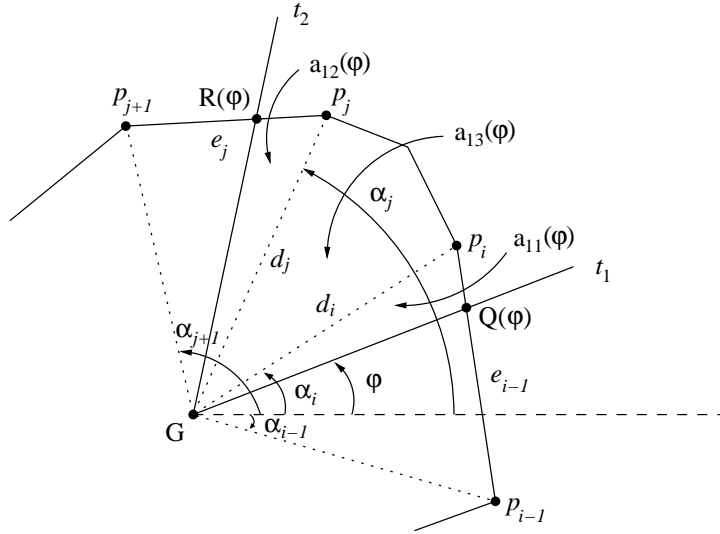


Figura 4.2: Primer cas: t_1 i t_2 tallen dos costats diferents de P .

on

$$\begin{aligned}
 a_{11}(\varphi) &= \frac{1}{2} d_i d(G, Q(\varphi)) \sin(\alpha_i - \varphi) = \\
 &= \frac{1}{2} d_i \sqrt{\left(\frac{n_{i-1}}{\operatorname{tg} \varphi - m_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{n_{i-1}}{\operatorname{tg} \varphi - m_{i-1}} \operatorname{tg} \varphi\right)^2} \sin(\alpha_i - \varphi) = \\
 &= \frac{1}{2} d_i \left| \frac{n_{i-1}}{\operatorname{tg} \varphi - m_{i-1}} \frac{1}{\cos \varphi} \right| \sin(\alpha_i - \varphi) = \frac{1}{2} d_i \frac{n_{i-1}}{\operatorname{tg} \varphi - m_{i-1}} \frac{1}{\cos \varphi} \sin(\alpha_i - \varphi) = \\
 &= \frac{d_i n_{i-1} (\sin \alpha_i - \cos \alpha_i \operatorname{tg} \varphi)}{2 (\operatorname{tg} \varphi - m_{i-1})} = \frac{A_1 \operatorname{tg} \varphi + B_1}{C_1 \operatorname{tg} \varphi + D_1}, \\
 a_{12}(\varphi) &= \frac{1}{2} d_j d(G, R(\varphi)) \sin(\varphi + 2\pi/n - \alpha_j) = \\
 &= \frac{1}{2} d_j \sqrt{\left(\frac{n_j}{\operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) - m_j}\right)^2 (1 + \operatorname{tg}^2(\varphi + 2\pi/n))} \sin(\varphi + 2\pi/n - \alpha_j) = \\
 &= \frac{d_j n_j (-\sin \alpha_j + \cos \alpha_j \operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n))}{2 (\operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) - m_j)} = \frac{A'_2 \operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) + B'_2}{C'_2 \operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) + D'_2} = \\
 &= \frac{A_2 \operatorname{tg} \varphi + B_2}{C_2 \operatorname{tg} \varphi + D_2}, \\
 a_{13}(\varphi) &= K \text{ constant.}
 \end{aligned}$$

Si t_1 i t_2 tallen el mateix costat de P , tenim l'esquema de la Figura 4.3. Si es tracta del costat e_i , llavors, per a tots els valors de φ per als quals $Q(\varphi), R(\varphi) \in e_i$,

$$\begin{aligned}
 Q(\varphi) &= \left(\frac{n_i}{\operatorname{tg} \varphi - m_i}, \frac{n_i}{\operatorname{tg} \varphi - m_i} \operatorname{tg} \varphi \right), \\
 R(\varphi) &= \left(\frac{n_i}{\operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) - m_i}, \frac{n_i}{\operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) - m_i} \operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) \right),
 \end{aligned}$$

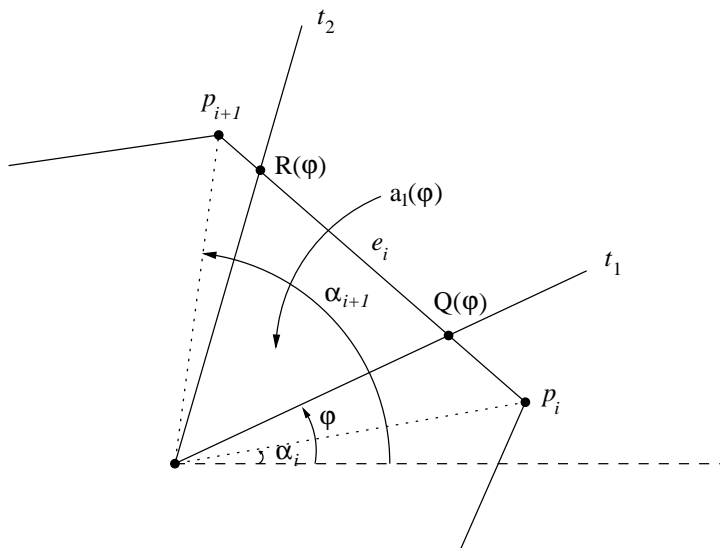


Figura 4.3: Segon cas: t_1 i t_2 tallen el mateix costat de P .

i $a_1(\varphi)$ és l'àrea d'un triangle:

$$\begin{aligned}
 a_1(\varphi) &= \frac{1}{2} d(G, Q(\varphi)) d(G, R(\varphi)) \sin(2\pi/n) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{n_i}{\operatorname{tg} \varphi - m_i} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{n_i}{\operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) - m_i} \frac{1}{\cos(\varphi + 2\pi/n)} \sin(2\pi/n) = \\
 &= \frac{n_i^2}{2(\operatorname{tg} \varphi - m_i)(\operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) - m_i)} (\operatorname{tg}(\varphi + 2\pi/n) - \operatorname{tg} \varphi) = \\
 &= \frac{n_i^2}{2(\operatorname{tg} \varphi - m_i)} \frac{\operatorname{tg}(2\pi/n) + \operatorname{tg}(2\pi/n) \operatorname{tg}^2 \varphi}{(\operatorname{tg}(2\pi/n) - m_i) + \operatorname{tg} \varphi (1 + \operatorname{tg}(2\pi/n) m_i)} = \\
 &= \frac{A_3 \operatorname{tg}^2 \varphi + B_3 \operatorname{tg} \varphi + C_3}{D_3 \operatorname{tg}^2 \varphi + E_3 \operatorname{tg} \varphi + F_3}.
 \end{aligned}$$

Si φ_0 és tal que t_1 o t_2 són verticals, aleshores $a_1(\varphi_0) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0^-} a_1(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0^+} a_1(\varphi)$, la qual cosa implica que $a_1(\varphi)$ és contínua en φ_0 . De fet, les expressions algebraiques que donen $a_1(\varphi)$ just abans i just després de φ_0 són la mateixa, tot i que, interpretant-les com una funció, hi ha un “salt” de branca.

Com que hi ha un canvi en la funció que dona $a_1(\varphi)$ cada vegada que t_1 o bé t_2 toquen un vèrtex de P , hi ha un salt de branca cada vegada que t_1 o t_2 són verticals i el recorregut no necessàriament comença amb t_1 o t_2 incident en un vèrtex, tenim que la funció $a_1(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, està composta per, com a molt, $2n + 5$ branques de funcions del tipus vist. A més, és trivial de veure que $a_1(\varphi)$ és contínua. \square

Definim ara $a_i(\varphi)$, $i \in \{2, \dots, n\}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ com l'àrea de la porció de P delimitada per les semirectes t_i i t_{i+1} quan t_1 forma un angle φ amb l'horitzontal. És clar que

$$a_i(\varphi) = a_1\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}(i-1)\right), \quad i \in \{2, \dots, n\}$$

i que, per aquest motiu, les funcions $a_i(\varphi)$, $i \in \{2, \dots, n\}$ també estan formades per trossos de branques de funcions en $\operatorname{tg} \varphi$ del tipus quocient de dos polinomis de segon grau. A més, per la simetria del feix, la solució a qualsevol dels tres subproblemes plantejats està inclosa en $[0, 2\pi/n)$. En conseqüència, podem considerar les n funcions $a_i(\varphi)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) en l'interval $[0, 2\pi/n]$, calcular-ne les envelopants superior i inferior, i recórrer-les per tal de maximitzar o minimitzar el paràmetre escollit. Notem que, si prenem la

funció $a_1(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, la dividim en n trossos tallant en $\varphi = 2\pi/n, 4\pi/n, \dots, (n-1)2\pi/n$ i traslladem horitzontalment tots aquests trossos de manera que siguin les gràfiques de n funcions definides en $[0, 2\pi/n]$, obtenim l'arranjament de les n funcions $a_i(\varphi)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) en l'interval $[0, 2\pi/n]$.

Podem fer una anàlisi de la complexitat de les envolupants superior i inferior de l'arranjament com a mínim de dues maneres diferents. Per començar, podem considerar que l'arranjament està format per n corbes $(a_1(\varphi), a_2(\varphi), \dots, a_n(\varphi))$ definides en tot l'interval $[0, 2\pi/n]$. Com que aquestes corbes són el resultat d'una divisió de $a_1(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, hi ha un màxim de $2n + 4$ valors $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n+4} \in [0, 2\pi/n]$ on l'expressió algebraica en $\text{tg } \varphi$ d'alguna de les $a_i(\varphi)$ canvia. Fem, també, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{2n+5} = 2\pi/n$. Entre dos d'aquests valors consecutius, φ_k i φ_{k+1} , es tenen n trossos de branques de funcions en $\text{tg } \varphi$ del tipus quocient de dos polinomis de segon grau. Necessitem saber en quants punts es poden tallar dos d'aquests trossos de funcions. L'exemple de la Figura 4.4 [21] mostra que els quatre possibles punts de tall entre dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ del tipus quocient de dos polinomis de segon grau poden estar en una sola branca de $f(x)$ i en una sola branca de $g(x)$.

D'aquesta manera, a cada interval $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ ($k \in \{0, 1, \dots, 2n+4\}$) tenim n funcions, cada parell de

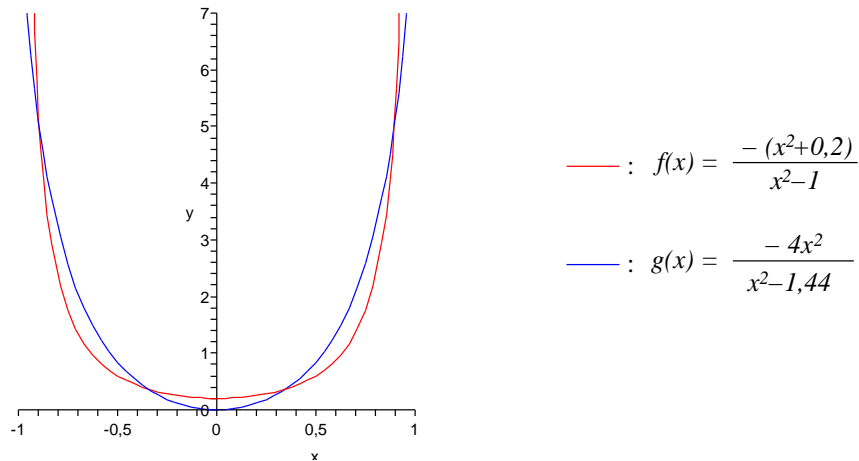


Figura 4.4: Exemple de nombre màxim de punts de tall.

les quals s'intersequen en un màxim de 4 punts. Això implica que la complexitat de les envolupants superior i inferior en cada interval d'aquest tipus és com a màxim $\lambda_4(n) = \Theta(n \cdot 2^{\alpha(n)})$, on $\lambda_s(k)$ denota la complexitat màxima de l'envolupant superior o inferior d'un conjunt de k corbes, cada parell de les quals s'intersequen un màxim de s vegades, i $\alpha(n)$ és la inversa funcional de la funció d'Ackerman i compleix $\alpha(n) \leq 4$ per a $n \leq 2^{2^{n-2}}$ amb 65536 dosos a la seqüència d'exponents (vegeu [11]). Llavors, la complexitat de les envolupants superior i inferior és $O(n \cdot \lambda_4(n))$ i l'esquema de dividir per vèncer permet calcular-les en temps $O(\lambda_4(n) n \log n)$ [11].

Aquest últim resultat es pot millorar fent una anàlisi diferent. Considerem que la nostra família de funcions no està formada per $a_i(\varphi)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, sinó per cadascuna de les funcions diferents en $\text{tg } \varphi$ definides en un cert interval inclòs en $[0, 2\pi/n]$, l'expressió algebraica de les quals coincideix amb la d'alguna $a_i(\varphi)$ en aquell interval. Dit d'una altra manera, dividim cada $a_i(\varphi)$ en dos trossos cada vegada que canvia la seva expressió algebraica. Així, a l'interval $[0, 2\pi/n]$ tenim un nombre lineal de funcions definides possiblement en intervals més petits, cada parell de les quals s'intersequen en un màxim de 4 punts. Això implica que la complexitat de les envolupants superior i inferior és com a màxim $\lambda_6(n) = O(n \cdot 2^{O(\alpha^2(n))})$ (vegeu [11]) i que aquestes poden ser calculades en temps $O(\lambda_6(n) \log n)$ [11] a través de l'esquema de dividir

per vèncer. Hem demostrat el resultat següent:

Teorema 4.2. *El problema de calcular els angles de rotació del feix de semirectes que compleixen alguna de les tres condicions exigides pot ser resolt en temps $O(\lambda_6(n) \log n)$.*

L'objectiu que hi ha darrera d'aquests problemes és mesurar si P és *molt o poc* simètric respecte el seu baricentre. És clar que, si P és regular, qualsevol angle de rotació del feix és tal que totes les porcions són iguals, però això no és cert en els altres casos:

Proposició 4.3. *Els únics n -gons per als quals la funció $a_1(\varphi)$ és constant són els regulars.*

Demostració. Fixem $\varphi \in [0, 2\pi)$. Si t_1 talla el costat e_{i-1} de P i t_2 en talla el costat e_j , aleshores, usant que

$$d_i = \frac{n_{i-1}}{\operatorname{tg} \alpha_i - m_{i-1} \cos \alpha_i} \frac{1}{\cos \alpha_i}, \quad d_j = \frac{n_j}{\operatorname{tg} \alpha_j - m_j \cos \alpha_j} \frac{1}{\cos \alpha_j},$$

s'obté fàcilment que

$$\frac{d}{d\varphi} a_{11}(\varphi) = -\frac{1}{2} d^2(G, Q(\varphi)), \quad \frac{d}{d\varphi} a_{12}(\varphi) = \frac{1}{2} d^2(G, R(\varphi))$$

i, en conseqüència,

$$\frac{d}{d\varphi} a_1(\varphi) = \frac{1}{2} (d^2(G, R(\varphi)) - d^2(G, Q(\varphi))).$$

Si t_1 i t_2 tallen el costat e_i de P , llavors, tenint en compte la fórmula alternativa per a $a_1(\varphi)$

$$a_1(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot d_{i+1} \cdot d(G, Q(\varphi)) \cdot \sin(\alpha_{i+1} - \varphi) - \frac{1}{2} \cdot d_{i+1} \cdot d(G, R(\varphi)) \cdot \sin(\alpha_{i+1} - (\varphi + 2\pi/n)),$$

es dedueix que, també,

$$\frac{d}{d\varphi} a_1(\varphi) = \frac{1}{2} (d^2(G, R(\varphi)) - d^2(G, Q(\varphi))).$$

Per tant, si la funció $a_1(\varphi)$ és constant, per a cada dos punts q, r de la frontera de P tals que l'angle que formen el segment d'extremes q, G i el d'extremes G, r és $2\pi/n$ es compleix que $d(G, q) = d(G, r)$. En particular, q és un vèrtex de P si, i només si, r també ho és. Això acaba la demostració, ja que P només té n vèrtexs. \square

Aquest resultat justifica la cerca de les orientacions del feix de semirectes (i), (ii), (iii), en què es persegueix de diverses maneres que les porcions tinguin àrees tan semblants com sigui possible. En els dos primers casos, la mesura de regularitat associada és el quocient d'aquestes porcions d'àrea mínima o màxima entre l'enèsima part de l'àrea de P , i diem que P és *més regular* com més proper a 1 sigui el valor obtingut. Quant a (iii), diem que P és *més regular* com més petit sigui el valor de la diferència entre l'àrea de la porció més gran i la de la porció més petita dividida per l'enèsima part de l'àrea de P .

4.3 Centres areals

Continuem buscant descomposicions de P en porcions d'àrees semblants. Aquí, però, les parts en què queda dividit P tenen forma de triangle, i aquests triangles s'obtenen a través de n segments que uneixen tots els vèrtexs de P amb un mateix punt (vegeu un exemple en la Figura 4.5).

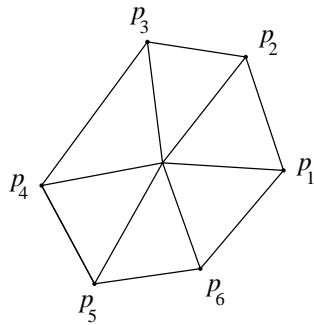


Figura 4.5: Hexàgon dividit en 6 triangles.

4.3.1 Minimització del triangle més gran

En el nostre primer paràmetre, el que busquem és que el triangle d'àrea més gran sigui el més petit possible. El problema que se'ns planteja és, doncs, donat un polígon convex P de n costats i vèrtexs p_1, p_2, \dots, p_n , trobar un punt q interior o a la frontera de P d'entre tots els que minimitzen el paràmetre $\max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{\text{àrea}(\triangle qp_i p_{i+1})\}$.

Evidentment, si P és regular el punt que minimitza aquest paràmetre és el seu centre i és tal que tots els triangles tenen la mateixa àrea. En conseqüència, la mesura de regularitat proposada consisteix a dividir el valor de l'àrea d'aquest triangle més gran (quan el punt que s'utilitza per fer les porcions és q) entre l'enèsima part de l'àrea de P i dir que P és *més regular* com més proper a 1 sigui el valor obtingut.

Caracterització de la solució

Una manera de resoldre el problema és utilitzar diagrames de Voronoi i, per a tal fi, necessitem definir una distància que s'adequi al nostre objectiu.

Donats un punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i un segment e , denotem per l_e la longitud de e i per r_e la recta que conté e . Definim la distància \tilde{d} entre (x, y) i e com

$$\tilde{d}((x, y), e) := \frac{1}{2} l_e d((x, y), r_e),$$

on $d((x, y), r_e)$ és la distància euclidiana entre (x, y) i r_e . Notem que $\tilde{d}((x, y), e)$ és l'àrea del triangle que té e com a base i (x, y) com a tercer vèrtex.

Donats dos segments que són dos costats d'un polígon convex, el lloc geomètric dels punts que estan a la mateixa distància \tilde{d} dels dos costats està format per dues rectes (anomenem-les *bisectors*) que passen pel punt on es tallen els perllongaments dels dos segments, si aquests no són paral·lels (vegeu la Figura 4.6). Si són paral·lels, com que no permetem que el polígon tingui angles plans (aquest és el cas degenerat perquè, o bé tots els punts del pla excepte una recta estan a distància més gran d'un dels dos costats, o bé tot \mathbb{R}^2 forma part del bisector), pot haver-hi un o dos bisectors, depenent de si les longituds dels dos costats són iguals o diferents, respectivament. En qualsevol dels dos casos, com que treballem a l'interior de P , n'hi ha prou amb considerar només el bisector que deixa els dos segments en semiplans diferents. Si e_i, e_j són dos costats del polígon, anomenem $D(e_i, e_j)$ el semiplà obert que té per frontera el bisector d'ambdós costats i conté e_i . Aleshores, donat un n -gon convex P amb costats $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, és trivial de veure que el conjunt $\mathcal{D} = \{D(e_i, e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ és un sistema de dominància admissible sobre E (vegeu la definició de sistema de dominància admissible a [16]). En conseqüència, podem definir de manera natural el diagrama de Voronoi llunyà que hi està associat, el qual compleix els axiomes de diagrama de Voronoi

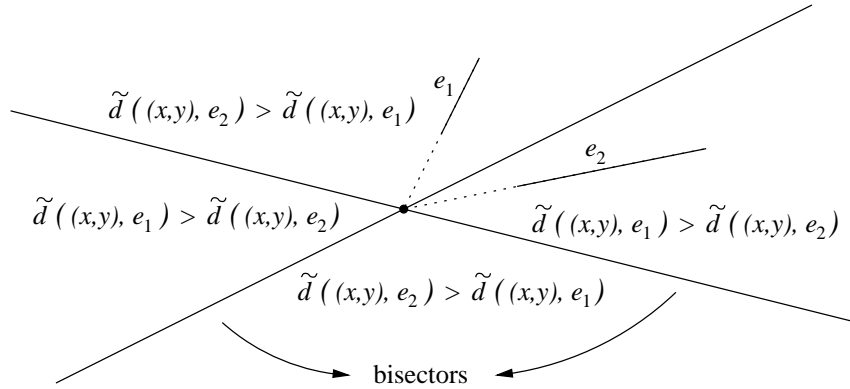


Figura 4.6: Dos segments, els seus bisectors i les regions en què queda dividit el pla.

llunyà abstracte i denotarem per FVD. Es pot trobar un exemple de l'aspecte que presenta aquest tipus de diagrama a la Figura 4.7. El teorema següent indica on s'ha de buscar la solució:

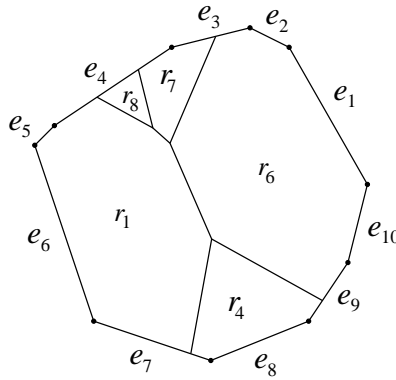


Figura 4.7: Exemple de diagrama FVD; r_i denota la regió del costat e_i .

Teorema 4.4. *El punt q que minimitza l'àrea del triangle més gran amb vèrtexs q i dos vèrtexs consecutius de la frontera de P es troba en un vèrtex del diagrama de Voronoi FVD o bé és el punt d'intersecció d'una aresta del diagrama amb la frontera del polígon.*

Demostració. Si q minimitza el paràmetre $\max_i \{ \text{àrea}(\triangle qp_i p_{i+1}) \}$, no és possible que hi hagi un sol triangle del tipus $\triangle qp_i p_{i+1}$ que tingui àrea màxima, ja que aleshores podríem acostar q cap a la recta que passa pel costat $p_i p_{i+1}$ i obtenir una solució millor. Si hi ha dos triangles d'àrea màxima i els dos costats corresponents no són paral·lels, q és sobre el bisector d'aquests dos costats i aquesta solució pot ser millorada viatjant sobre el bisector en el sentit que fa disminuir les àrees fins a topiar amb un costat del polígon o bé fins que una tercera àrea també assoleixi el valor màxim. Finalment, si hi ha dos triangles d'àrea màxima i els dos costats corresponents són paral·lels, el paràmetre que estem minimitzant és constant sobre el tros del bisector d'aquests dos costats que apareix al diagrama i es pot prendre com a solució un punt d'aquest tros de bisector que sigui un vèrtex del diagrama o bé que pertanyi a la frontera de P . \square

Resolució per força bruta

El resultat anterior suggereix un algorisme de força bruta i temps $O(n^3)$ que consisteix a prendre, d'una banda, totes les combinacions de tres costats de P i calcular el punt de tall dels bisectors corresponents

a parells dels costats, i, de l'altra, tots els parells de costats i trobar els punts de tall del seu bisector amb la frontera del polígon. Després s'han de calcular les àrees dels triangles més grans corresponents per determinar quin dels candidats és la solució del problema.

Resolució amb un algorisme genèric

El diagrama pot ser calculat en temps esperat $O(n \log n)$ mitjançant l'algorisme genèric de tipus incremental per a diagrames de Voronoi llunyans abstractes proposat a [16]. Un cop fet el càlcul del diagrama, per resoldre el problema basta descartar la part exterior al polígon, recórrer en temps $O(n)$ tots els vèrtexs del diagrama i totes les interseccions d'arestes amb costats del polígon i quedar-se amb el punt que minimitza l'àrea del triangle més gran.

Construcció *ad hoc* del diagrama

Tenint en compte la simplicitat del diagrama final, proposem un algorisme *ad hoc*, del tipus dividir per vèncer, que permet calcular el diagrama en temps $O(n \log n)$ de forma més senzilla. Abans, però, necessitem tres lemes (el primer dels quals és trivial) i introduir una mica de notació: denotem per r_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) la regió del costat e_i i per b_{ij} ($i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$) el bisector dels costats e_i i e_j .

Lema 4.5. *Les regions del diagrama FVD són convexes.*

Lema 4.6. *Les regions del diagrama FVD són no fitades.*

Demostració. Suposem que alguna regió r_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) és fitada. Prenem un punt interior \tilde{p} del costat e_i i tracem des d'ell una semirecta t_i que talli r_i en dos punts i tal que el segon punt de tall no sigui un vèrtex de r_i (vegeu la Figura 4.8a). Si q_2 és aquest segon punt de tall entre t_i i r_i , q_2 forma part d'un segment de r_i que és un tros d'un bisector entre e_i i un altre costat del polígon. La contradicció ve del fet que no és possible que r_i i e_i estiguin, dels dos semiplans que tenen per frontera el bisector, en el mateix. \square

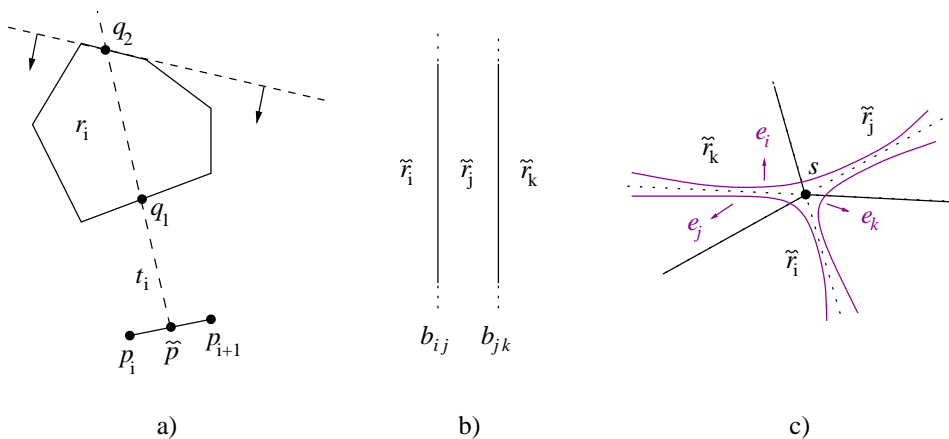


Figura 4.8: Demostracions dels Lemes 4.6 i 4.7.

Lema 4.7. *Si considerem un cercle que contingui tots els vèrtexs del diagrama FVD, l'ordre en què apareixen les regions a la frontera del cercle és el mateix que l'ordre circular dels costats respectius.*

Demostració. Observem en primer lloc que podem construir el cercle, ja que el diagrama és un graf planar i cada costat del polígon té com a molt una regió de Voronoi.

Demostrem que el resultat és cert per a cada tres costats del polígon. Considerem les regions del diagrama final r_i, r_j, r_k . El diagrama parcial dels costats e_i, e_j, e_k pot presentar dues formes.

Si els tres bisectors entre parelles de costats són paral·lels, el diagrama està format per un únic bisector i dues regions, i, per tant, no es pot parlar d'ordre circular. En efecte, suposem que el diagrama parcial dels costats e_i, e_j, e_k consisteix en tres regions $\tilde{r}_i, \tilde{r}_j, \tilde{r}_k$ separades per dues rectes paral·leles. Per comoditat, suposem que les dues rectes són verticals i que \tilde{r}_i és la regió de l'esquerra, \tilde{r}_j és la regió del mig i \tilde{r}_k és la regió de la dreta (vegeu la Figura 4.8b). Aleshores, el bisector b_{ij} indica que e_j està contingut en la regió \tilde{r}_i , mentre que el bisector b_{jk} indica que e_j està contingut en la regió \tilde{r}_k .

Si els tres bisectors entre parelles de costats no són paral·lels, el diagrama consisteix en tres semirectes, concurrents en un punt s , que divideixen l'espai en tres regions $\tilde{r}_i, \tilde{r}_j, \tilde{r}_k$ convexes. L'ordre en què apareixen r_i, r_j, r_k a la frontera del cercle al diagrama complet és el mateix ordre circular segons el qual s veu les regions $\tilde{r}_i, \tilde{r}_j, \tilde{r}_k$. Tal com s'observa a la Figura 4.8c (on hem traçat en magenta la frontera de la regió del pla on es troba cada costat), el diagrama parcial reproduïx l'ordre circular dels costats e_i, e_j, e_k . \square

Com a conseqüència dels Lemes 4.6 i 4.7, tenim que l'1-esquelet del diagrama és un arbre i que, si separem (qualsevol subcadena connexa de) la frontera del polígon en dues cadenes (la blava i la vermella) tallant per vèrtexs, hi ha una única poligonal en el diagrama que separa les regions corresponents als costats vermells de les dels costats blaus. Aquest últim fet és clau per al nostre algorisme, que consisteix a trencar (un tros connex de) la frontera del polígon en dues cadenes del mateix nombre de costats (la blava i la vermella) tallant per vèrtexs, trobar recursivament els diagrames de les dues cadenes i fusionar-los. Ens hem d'assegurar que aquesta última etapa es faci en temps lineal.

Contràriament a allò que es podria pensar, trencar (un tros connex de) la frontera del polígon en una cadena blava i una de vermella mitjançant una recta vertical no assegura que la poligonal que separa les regions dels costats blaus de les dels costats vermells sigui y -monòtona (vegeu la Figura 4.9). No obstant, això no és un obstacle per a la seva construcció.

Trobem l'inici de la cadena de la manera següent: suposem que un dels vèrtexs (o l'únic) pels quals hem

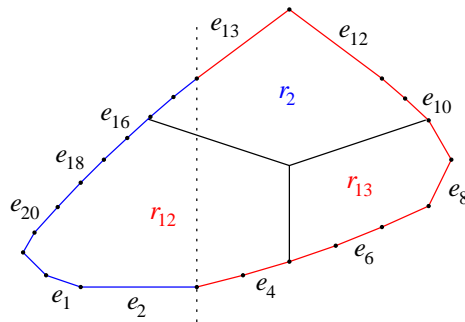


Figura 4.9: Exemple que la poligonal separadora no és sempre y -monòtona.

trencat (un tros de) la frontera del polígon és p_i , i que el costat e_{i-1} és blau. Si e_{i-1} (respectivament, e_i) no té regió en el diagrama monocromàtic, avancem en sentit negatiu (respectivament, positiu) per la seva cadena fins a trobar el primer costat e_j (respectivament, e_k) que sí que en tingui; tots els anteriors tampoc tindran regió en el diagrama final. Calculem el bisector dels costats e_j (blau) i e_k (vermell); si passa per la intersecció de la regió de e_j en el diagrama blau amb la regió de e_k en el diagrama vermell, la semirecta del bisector que passa per aquesta intersecció inicia la poligonal. Si no, un dels dos costats (suposem que e_j , que és blau) no té regió al diagrama final i avancem en sentit negatiu per la cadena blava fins a trobar un costat que té regió al diagrama blau. Trobem el bisector d'aquest costat amb e_k i tornem a comprovar si

passa per la intersecció de les dues regions corresponents. I seguim procedint d'aquesta manera fins a trobar la semirecta inicial de la poligonal. Remarquem que, si aquesta és part del bisector dels costats $e_{\tilde{j}}$ (blau) i $e_{\tilde{k}}$ (vermell), tots els costats que hem anat descartant ($e_l, l = \tilde{j} + 1, \dots, \tilde{k} - 1$) no tornaran a ser tractats perquè segur que no tenen regió al diagrama final a causa del Lema 4.7.

Un cop trobada la semirecta inicial de la poligonal, procedim de la manera habitual (vegeu [20]): si es tracta del bisector $b_{\tilde{k}\tilde{j}}$ dels costats $e_{\tilde{j}}$ (blau) i $e_{\tilde{k}}$ (vermell), el perllonguem per saber si toca abans la frontera de la regió del costat $e_{\tilde{j}}$ en el diagrama blau o la de la regió de $e_{\tilde{k}}$ en el vermell (vegeu la Figura 4.10). Si,

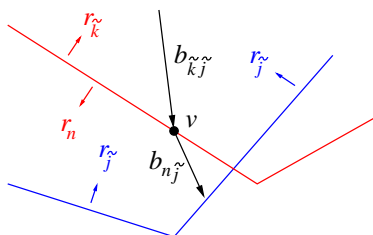


Figura 4.10: Construcció de la poligonal separadora.

per exemple, toca abans la frontera de la regió de $e_{\tilde{k}}$ en un punt v que també és frontera de la regió de e_n (en el mateix diagrama vermell), partint de v la poligonal segueix prenent el sentit del bisector $b_{n\tilde{j}}$ de e_n i $e_{\tilde{j}}$ que s'endinsa cap a la regió de e_n en el diagrama vermell. Tornem a calcular de quina regió surt abans aquest nou bisector, i continuem així fins a completar la poligonal.

Per poder garantir que la construcció de la poligonal separadora es fa en temps proporcional al nombre d'arestes dels dos diagrames parcials, és a dir, en temps $O(n)$, hem de fer encara dues remarques:

Observació 4.8. No és possible que, si seguim la poligonal de punta a punta, en algun moment sigui frontera de la regió d'un costat e_l , després ho sigui d'altres corresponents a costats del seu mateix color i més tard ho torni a ser de e_l . En efecte, si passés això, o bé la regió de e_l en el diagrama final no seria connexa, o bé algun costat tindria regió fitada.

Observació 4.9. Quan reconstruïm la frontera de la regió d'un costat mitjançant la poligonal, hem de visitar les arestes d'aquella regió per saber per on la talla la poligonal. Encara que haguem de fer aquesta operació moltes vegades (per a molts trossos de la poligonal), s'ha d'aprofitar el fet que la regió final és convexa (d'acord amb el Lema 4.5) i no visitar arestes innecessàriament, és a dir, visitar-les en ordre positiu o negatiu (segons el tipus de gir que està fent la poligonal) començant cada vegada on s'ha acabat en el pas anterior.

Com a conclusió, hem demostrat:

Teorema 4.10. *El diagrama de Voronoi FVD associat a la distància \tilde{d} d'un n -gon convex P pot ser calculat en temps $O(n \log n)$.*

Resolució en temps lineal

Finalment, aquest problema també es pot resoldre en temps $O(n)$ tot submergint-lo a \mathbb{R}^3 de la manera següent: situem el polígon en el pla $z = 0$ i, per a cada costat del polígon e_i , colloquem un pla Π_i que passi pel costat i que formi un angle α_i amb el pla on està el polígon de tal manera que $\text{tg } \alpha_i = l_i$. Donat un punt q de l'interior del polígon i un costat e_i , la distància \tilde{d} del punt al costat ve donada per la coordenada z del punt de Π_i la projecció del qual sobre el pla xy és q . Així, minimitzar $\max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{ \text{àrea}(\triangle qp_i p_{i+1}) \}$, correspon a prendre, per a cada Π_i , el semiespai superior que defineix, afegir-hi n semiespais de frontera

vertical, per tal d'assegurar que la projecció sobre el pla xy dels punts del domini estigui inclosa en el polígon, i calcular el punt amb coordenada z mínima de la intersecció de tots aquests semiespais. Aquest és un problema de programació lineal a \mathbb{R}^3 que es pot resoldre en temps $O(n)$ mitjançant un algorisme de cerca i poda (vegeu [8], [9], [14] i [15]). Així:

Teorema 4.11. *El problema de trobar un punt q interior o a la frontera de P que minimitza el paràmetre $\max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{ \text{àrea}(\triangle qp_i p_{i+1}) \}$ pot ser resolt en temps $O(n)$.*

4.3.2 Maximització del triangle més petit

Suposem que el que volem ara és que el triangle d'àrea més petita sigui el més gran possible. Aleshores, hem de trobar un punt q' interior o a la frontera de P d'entre tots els que maximitzen el paràmetre $\min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{ \text{àrea}(\triangle q' p_i p_{i+1}) \}$.

Es pot deduir fàcilment que, si definim el diagrama de Voronoi proper VD associat a la distància \tilde{d} , algun d'aquests punts òptims és un vèrtex del diagrama. A més, VD és un diagrama de Voronoi proper abstracte i pot ser calculat en temps $O(n \log n)$ utilitzant l'algorisme del tipus dividir per vèncer proposat a [12]. Per tal d'adaptar aquest algorisme genèric al nostre cas, observem:

Lema 4.12. *Cada costat de P pertany a la seva regió de Voronoi, que és convexa.*

I aquesta propietat garanteix que l'1-esquelet de la part del diagrama interior al polígon és un arbre (vegeu l'exemple de la Figura 4.11) i que, si separem una subcadena connexa de la frontera del polígon en una cadena blava i una cadena vermella tallant per vèrtexs, hi ha una única poligonal en el diagrama que separa les regions corresponents als costats vermells de les dels costats blaus. Així, es pot aplicar el mateix

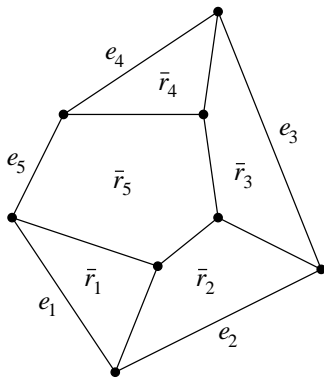


Figura 4.11: Exemple de diagrama VD; \bar{r}_i denota la regió del costat e_i .

algorisme que en el problema anterior, el qual també calcula el diagrama en temps $O(n \log n)$ perquè les Observacions 4.8 i 4.9 també són vàlides per aquest diagrama. Notem que aquí, si un dels vèrtexs pels quals hem trencat un tros de la frontera del polígon és p_i , aleshores el primer segment de la poligonal separadora segur que és part del bisector dels costats e_{i-1} i e_i .

Novament, però, q' es pot calcular en temps $O(n)$ plantejant el mateix problema de programació lineal que en el cas anterior, amb les úniques diferències que ara prenem, per a cada Π_i , el semiespai inferior que defineix, i que el que busquem és el punt amb coordenada z màxima de la intersecció dels semiespais. En conseqüència:

Teorema 4.13. *El problema de trobar un punt q' interior o a la frontera de P que maximitza el paràmetre $\min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{ \text{àrea}(\triangle q' p_i p_{i+1}) \}$ pot ser resolt en temps $O(n)$.*

Quant a la mesura de regularitat associada al problema, aquí també considerem que P és *més regular* com més proper a 1 sigui el quocient de l'àrea del triangle més petit entre l'enèsima part de l'àrea de P (quan el punt que s'empra per dividir P en triangles és q').

4.3.3 Minimització de la diferència entre els triangles

Finalment, suposem que pretenem fer mínima la diferència entre les àrees del triangle més gran i el triangle més petit. Dit amb altres paraules, volem trobar un punt q'' interior o a la frontera de P d'entre tots els que minimitzen el paràmetre

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{\text{àrea}(\Delta q'' p_i p_{i+1})\} - \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{\text{àrea}(\Delta q'' p_i p_{i+1})\}.$$

Clarament, si P és regular en el seu centre aquest paràmetre val zero, i és per això que el criteri de regularitat és en aquest cas que P és *més regular* com més petit és el valor del paràmetre en q'' .

Caracterització de la solució

Si, com en els casos anteriors, volem resoldre el problema fent ús de diagrames de Voronoi, necessitem definir quins són els candidats a q'' . El teorema següent delimita la solució:

Teorema 4.14. *El punt q'' que minimitza la diferència entre les àrees dels triangles més gran i més petit amb vèrtexs q i dos vèrtexs consecutius de la frontera de P es troba en un vèrtex del diagrama VD, en un vèrtex del diagrama FVD, en el punt d'intersecció d'una arista del diagrama VD amb una arista del diagrama FVD, o bé en el punt d'intersecció d'una arista d'un dels dos diagrames amb la frontera de P .*

Demostració. Suposem que el punt solució q'' és tal que hi ha un únic triangle $\Delta q'' p_j p_{j+1}$ d'àrea màxima i un únic triangle $\Delta q'' p_k p_{k+1}$ d'àrea mínima. Diem que q'' es desplaça seguint la direcció β si avança sobre una recta que forma un angle β amb l'horitzontal. Aleshores, hi ha un interval obert de direccions de longitud π tal que, si q'' es desplaça seguint una direcció de l'interval, l'àrea del triangle $\Delta q'' p_j p_{j+1}$ disminueix; anàlogament, hi ha un interval obert de direccions de longitud π tal que, si q'' es desplaça seguint una direcció de l'interval, l'àrea del triangle $\Delta q'' p_k p_{k+1}$ augmenta. Com que l'única situació en què la intersecció d'aquests dos intervals és buida no és possible perquè P és convex, hi ha alguna direcció tal que, si q'' es desplaça seguint-la, l'àrea de $\Delta q'' p_j p_{j+1}$ disminueix i l'àrea de $\Delta q'' p_k p_{k+1}$ augmenta. Per tant, podem millorar la solució fent que q'' es desplaci seguint aquesta direcció fins que el nombre de triangles d'àrea màxima o el nombre de triangles d'àrea mínima augmenti.

Suposem, per exemple, que ara hi ha un nou triangle $\Delta q'' p_m p_{m+1}$ que també té àrea mínima (vegeu la Figura 4.12). Demostrarem que encara podem millorar la solució. Si q''_1 és el punt del bisector b_{km} a distància λ de q'' en el sentit que fa augmentar les àrees de $\Delta q'' p_k p_{k+1}$ i $\Delta q'' p_m p_{m+1}$ (o en qualsevol dels dos sentits, si e_k i e_m són paral·lels), aleshores

$$\text{àrea}(\Delta q''_1 p_k p_{k+1}) - \text{àrea}(\Delta q'' p_k p_{k+1}) = \frac{1}{2} l_k \lambda \sin \alpha_k = c_1 \lambda,$$

on α_k és l'angle que forma b_{km} amb la recta que conté el costat e_k i c_1 és una constant (vegeu la Figura 4.13). Anàlogament,

$$\text{àrea}(\Delta q''_1 p_j p_{j+1}) - \text{àrea}(\Delta q'' p_j p_{j+1}) = c_2 \lambda,$$

on c_2 és una constant. Llavors,

$$(\text{àrea}(\Delta q''_1 p_j p_{j+1}) - \text{àrea}(\Delta q''_1 p_k p_{k+1})) - (\text{àrea}(\Delta q'' p_j p_{j+1}) - \text{àrea}(\Delta q'' p_k p_{k+1})) = (c_2 - c_1) \lambda.$$

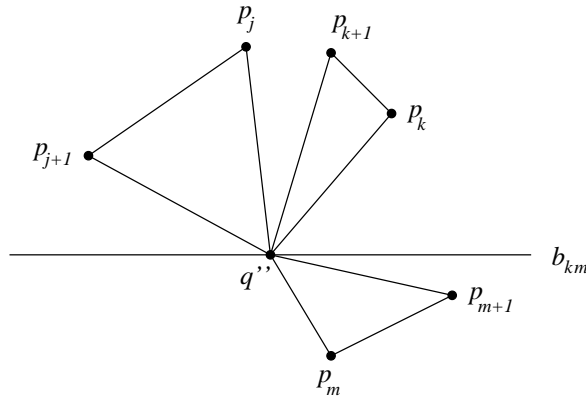


Figura 4.12: Dos triangles d'àrea mínima i un triangle d'àrea màxima.

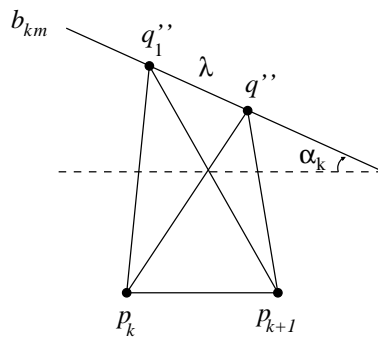


Figura 4.13: Triangles $\triangle q''p_kp_{k+1}$ i $\triangle q_1''p_kp_{k+1}$.

Si $c_2 - c_1 \leq 0$, triem el sentit del bisector b_{km} que coincideix amb el del vector $\overrightarrow{q''q_1''}$. En cas contrari, si q_2'' és el punt de b_{km} a distància λ de q'' en el sentit que fa disminuir les àrees de $\triangle q''p_kp_{k+1}$ i $\triangle q''p_m p_{m+1}$,

$$(\text{àrea}(\triangle q_2''p_jp_{j+1}) - \text{àrea}(\triangle q_2''p_kp_{k+1})) - (\text{àrea}(\triangle q''p_jp_{j+1}) - \text{àrea}(\triangle q''p_kp_{k+1})) = (c_1 - c_2) \lambda$$

i triem el sentit del bisector b_{km} que coincideix amb el del vector $\overrightarrow{q''q_2''}$.

En conseqüència, la solució millora si fem que q'' es desplaci seguint el sentit del bisector b_{km} escollit, fins que el nombre de triangles d'àrea màxima augmenti, el nombre de triangles d'àrea mínima augmenti o bé arribem a la frontera del polígon. \square

Intersecció dels dos diagrames

El teorema anterior suggereix una possible via per resoldre el problema, que consisteix a fer una exploració de tots els candidats a solució per tal de trobar q'' . Com ja hem vist a les pàgines anteriors, la construcció dels dos diagrames es pot portar a terme en temps $O(n \log n)$, i els vèrtexs d'un dels dos diagrames i els punts d'intersecció dels diagrames amb la frontera de P poden ser trobats en temps $O(n)$.

Ara bé, el problema sorgeix quan s'han d'avaluar totes les interseccions d'una aresta del diagrama VD amb una aresta del diagrama FVD, ja que podria passar el mateix que quan es tracta de diagrames de Voronoi de punts associats a la mètrica euclidiana (vegeu [10]), és a dir, que hi hagi exemples en què el diagrama VD i el diagrama FVD s'intersequin en $\Omega(n^2)$ punts. Això implicaria que la complexitat en temps d'aquest algorisme és $\Omega(n^2)$.

Resolució en temps lineal

Com en els dos casos anteriors, la cerca de q'' es pot plantejar com un problema de programació lineal, en aquest cas a \mathbb{R}^4 , i resoldre's en temps $O(n)$ mitjançant un algorisme de cerca i poda (vegeu [8], [9], [14] i [15]).

Per a cada $i = 1, 2, \dots, n$, denotem per Π_i^+ el semiespai superior definit per Π_i ; podem suposar que té la forma

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i \geq 0.$$

Anàlogament, el semiespai inferior definit per Π_i té la forma

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i \leq 0$$

i el denotem per Π_i^- . Donat un punt $q_0 = (x_0, y_0)$ de P , l'àrea del triangle més gran de la forma $\triangle q_0 p_i p_{i+1}$ ve donada per la coordenada z del punt de $\bigcap_i \Pi_i^+$ la projecció del qual sobre el pla xy és (x_0, y_0) , i l'àrea del triangle més petit de la forma $\triangle q_0 p_i p_{i+1}$ ve donada per la coordenada z del punt de $\bigcap_i \Pi_i^-$ la projecció del qual sobre el pla xy és (x_0, y_0) . Per tant, l'objectiu del problema és minimitzar la distància vertical entre $\bigcap_i \Pi_i^+$ i $\bigcap_i \Pi_i^-$, i això és equivalent a trobar la quaterna (x, y, z, h) tal que (x, y) és un punt de P , es compleixen les restriccions

$$\begin{aligned} a_i x + b_i y + c_i z + d_i &\leq 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ a_i x + b_i y + c_i(z + h) + d_i &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

i h és mínim.

Hem provat, doncs:

Teorema 4.15. *El problema de trobar un punt q'' interior o a la frontera de P que minimitza el paràmetre*

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{ \text{àrea}(\triangle q'' p_i p_{i+1}) \} - \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{ \text{àrea}(\triangle q'' p_i p_{i+1}) \}$$

pot ser resolt en temps $O(n)$.

Capítol 5

Resum i conclusions

Al llarg d'aquesta memòria, hem plantejat possibles mesures de regularitat, totes elles justificades, per a un n -gon convex qualsevol que han donat lloc a problemes de geometria discreta i computacional. A més, hem estat capaços d'oferir algorismes per al seu càlcul de complexitat baixa (i, en alguns casos, òptima) i, per tant, realitzables. Els mètodes proposats són, en algunes ocasions, l'aplicació de resultats més generals, en d'altres, algorismes *ad hoc*, i, en d'altres, un estudi acurat permet transformar el problema que s'ha de resoldre en un altre problema d'optimització geomètrica que té una solució eficient coneguda.

Al Capítol 2, hem proposat un mètode per trobar el polígon cíclic que té la mateixa seqüència ordenada de longituds dels costats que un polígon donat, i hem resolt en temps $O(n \log n)$ el problema de fer lliscar els vèrtexs d'un n -gon inscrit fins que es col·loquin en posició regular tot minimitzant el desplaçament màxim o la suma dels desplaçaments de tots els vèrtexs.

Al Capítol 3, hem descrit algorismes de temps quadràtic que permeten trobar l'emplaçament de mida màxima d'un polígon dins d'un altre en el cas que un dels dos sigui regular.

Finalment, al Capítol 4 hem resolt diferents variants de dos problemes. Al primer, es té un feix de semirectes concurrents en un punt del polígon i es vol trobar l'angle de rotació del feix que fa que les semirectes divideixin l'àrea del polígon en porcions tan semblants com sigui possible; hem proposat mètodes que troben aquests angles realitzant $O(\lambda_6(n) \log n)$ operacions. Al segon, la partició del polígon es fa mitjançant n segments que uneixen tots els seus vèrtexs amb un punt i hem trobat algorismes que calculen en temps $O(n)$ certs punts del polígon des dels quals aquestes divisions del n -gon són equilibrades.

Una primera conclusió que es pot extreure del treball, sobretot del Capítol 2, és que l'aplicació directa d'algorismes genèrics a casos particulars (de mètodes per a n -gons convexos arbitraris al cas en què el polígon és regular, de mètodes per a diagrames de Voronoi abstractes a un diagrama en concret...) no sempre és eficient. En efecte, si el procediment per al cas general no es basa en un estudi casuístic, sinó que es tracta d'un mètode compacte i abstracte (com el de [1] i [2], en què es treballa amb un politop de 4 dimensions a l'espai dual), la seva aplicació a un determinat cas pot tenir la mateixa complexitat que l'algorisme original, i esdevé necessari estudiar-lo amb més cura per tal de realitzar-hi modificacions que en rebaixin el cost o pensar nous mètodes.

Una altra idea que ha anat sortint al llarg d'aquest treball és que no sembla que hi hagi un criteri *definitiu* de regularitat entre tots els que hem proposat. Com hem anat veient, cada mesura estudia sobretot un aspecte concret del polígon i, per aquest motiu, sembla necessari avaluar-ne més d'una per obtenir una bona descripció de la regularitat del n -gon convex. Això ens indica també que seria convenient disposar de resultats experimentals, és a dir, aplicar els diferents coeficients de regularitat a una bateria de polígons convexos per veure quines combinacions proporcionen resultats que s'acosten més a la intuïció que hom té

sobre què vol dir que un polígon sigui molt o poc regular. Nosaltres hem considerat adequat que la naturalesa d'aquest estudi fos teòrica, ja que, a banda del fet que s'emmarca dins d'un programa de postgrau orientat a la recerca, el nostre interès se centra en els aspectes teòrics, així que la cerca de resultats experimentals queda com un possible treball futur.

Bibliografia

- [1] Pankaj K. Agarwal, Nina Amenta, Boris Aronov i Micha Sharir. Largest Placements and Motion Planning of a Convex Polygon. A *Second International Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics*, pp. 28–37, 1996.
- [2] Pankaj K. Agarwal, Nina Amenta i Micha Sharir. Largest Placement of One Convex Polygon inside Another. *Discrete & Computational Geometry*, 19:95–104, 1998.
- [3] Oswin Aichholzer, Erik D. Demaine, Jeff Erickson, Ferran Hurtado, Mark Overmars, Michael Soss i Godfried T. Toussaint. Reconfiguring Convex Polygons. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 20:85–95, 2001.
- [4] Nina Amenta. *Helly Theorems and Generalized Linear Programming*. Tesi doctoral. Universitat de Califòrnia, Berkeley, 1993.
- [5] Nick Barnes, Gareth Loy, David Shaw i Antonio Robles-Kelly. Regular Polygon Detection. *Proceedings of the Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV 2005)*, Xina, 2005.
- [6] Laurence Boxer. Computing Deviations from Convexity in Polygons. *Pattern Recognition Letters*, 14:163–167, 1993.
- [7] Erik D. Demaine i Joseph O’Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.
- [8] Martin E. Dyer. Linear Time Algorithms for Two- and Three-Variable Linear Programs. *SIAM Journal of Computing*, 13:31–45, 1984.
- [9] Martin E. Dyer. On a Multidimensional Search Technique and Its Application to the Euclidean One-Centre Problem. *SIAM Journal of Computing*, 15:725–738, 1986.
- [10] Jesús García-López, Pedro A. Ramos i Jack Snoeyink. Fitting a Set of Points by a Circle. *Discrete & Computational Geometry*, 20:389–402, 1998.
- [11] Leonidas Guibas i Micha Sharir. Combinatorics and Algorithms of Arrangements. Capítol a *New Trends in Discrete and Computational Geometry*, János Pach, editor, pp. 9–36. Springer-Verlag, 1993.
- [12] Rolf Klein. *Concrete and Abstract Voronoi Diagrams*. Springer-Verlag, 1989.
- [13] Jiří Matoušek, Micha Sharir i Emo Welz. A Subexponential Bound for Linear Programming. *Algorithmica*, 16:498–516, 1996.
- [14] Nimrod Megiddo. Linear-Time Algorithms for Linear Programming in \mathbb{R}^3 and Related Problems. *SIAM Journal of Computing*, 12:759–776, 1983.

- [15] Nimrod Megiddo. Linear Programming in Linear Time When the Dimension Is Fixed. *Journal of the ACM*, 31:114–127, 1984.
- [16] Kurt Mehlhorn, Stefan Meiser i Ronald Rasch. Furthest Site Abstract Voronoi Diagrams. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 11:583–616, 2001.
- [17] Pavel Pech. Computations of the Area and Radius of Cyclic Polygons Given by the Lengths of Sides. Capítol a *Automated Deduction in Geometry*, pp. 44–58. Springer-Verlag, 2006.
- [18] Giulia Piccioli, Enrico De Micheli, Pietro Parodi i Marco Campani. Robust Method for Road Sign Detection and Recognition. *Image and Vision Computing*, 14:209–223, 1996.
- [19] Iosif Pinelis. Cyclic Polygons with Given Edge Lengths: Existence and Uniqueness. *Journal of Geometry*, 82:156–171, 2005.
- [20] Franco P. Preparata i Michael I. Shamos. *Computational Geometry: An Introduction*. Springer-Verlag, 1985.
- [21] Abdó Roig. Comunicació personal (2007).
- [22] Peter Schreiber. On the Existence and Constructibility of Inscribed Polygons. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 34:195–199, 1993.
- [23] Jacob T. Schwartz i Micha Sharir. On the Two-Dimensional Davenport-Schinzel Problem. *Journal of Symbolic Computation*, 10:371–393, 1990.
- [24] Micha Sharir i Emo Welzl. A Combinatorial Bound for Linear Programming and Related Problems. *Proceedings of the Ninth Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 1992)*, França, 1992.
- [25] Godfried T. Toussaint. Solving Geometric Problems with the Rotating Calipers. *Proceedings of the Mediterranean Electrotechnical Conference (MELECON'83)*, Grècia, 1983.
- [26] Godfried T. Toussaint, editor. *Computational Morphology*. North-Holland Publishing Company, 1988.
- [27] Joviša Žunić i Paul L. Rosin. A Convexity Measurement for Polygons. *Proceedings of the Thirteenth British Machine Vision Conference (BMVC 2002)*, Regne Unit, 2002.