



Escola Tècnica Superior d'Enginyers
de Camins, Canals i Ports de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

TESI DE MASTER

Master

Master en Ingeniería Estructural y de la Contrucción.

Título

Cálculo simplificado de flechas instantáneas y diferidas en elementos a flexión de hormigón armado.

Autor

Noemí Duarte Gómez

Tutor

**Antonio R. Marí Bernat
Jesús M.Bairán García**

Intensificación

Tecnología

Fecha

Enero 2010

Índex General

Agradecimientos.....	i
Resumen.....	iii
Abstract.....	v
Notación.....	vii
Índice de texto.....	ix
1. Introducción.....	1
2. Estado del Conocimiento.....	9
3. Método propuesto para cálculo simplificado de deformaciones diferidas.....	61
4. Verificación del método de cálculo de flechas propuesto.	89
5. Conclusiones y perspectivas de futuro.	99
Referencias.....	105

Agradecimientos

Hace poco más de un año me incorporé al equipo de trabajo del profesor Antonio Marí. Mi madre siempre me dice que soy muy afortunada con las amistades que tengo, que la vida me sonrío en este aspecto. Este último año he tenido que darle toda la razón y esto se lo debo agradecer a mi tutor de tesina de máster y actual jefe, Antonio Marí por casi todo en general. En éste último año el ritmo de trabajo ha sido álgido pero ha sabido recompensarme y motivarme en infinidad de ocasiones. A mi otro tutor, Jesús Bairán, le agradezco la paciencia ante mis dudas existenciales y sobretodo a la tranquilidad que genera.

A las *nenas* del departamento Anna y Denise por su ilusión, su ayuda y amistad diaria y claro está a los chicos Oriol, Edison, Raúl y Rolando y Steffen pese a estar lejos. También agradezco a Eva la energía que desprende.

No me puedo olvidar de Juan Carlos la persona que me abrió las puertas del despacho 201, ni de mis amigos y ex-compañeros de trabajo Jordi, Núria y David que me animaron y cuidaron en los primeros años de máster y que todavía siguen allí.

Agradezco a todos mis amigos la paciencia, a resaltar los ánimos des de Londres de mi gran amiga Silvia.

La familia, como no, siempre a pie de guerra para ayudar con lo que sea, son geniales.

I a l'Oriol agrair-li el ser-hi sempre per tot, compartint, fent-me la vida molt més fàcil.

Resumen

Actualmente, el cálculo de las deformaciones se ha convertido en uno de los aspectos claves en el diseño de piezas de hormigón armado, principalmente a causa de la reducción en el espesor de losas y el aumento de las longitudes de vano. A los efectos visuales negativos que el incremento de flechas origina se deben sumar los daños en tabiques u otro tipo de elementos no estructurales, siendo estos los problemas más comunes relacionados con las deformaciones.

Los métodos de cálculo no lineales basados en un análisis paso a paso en el tiempo, de elementos lineales tipo viga, permiten determinar con rigor las curvaturas seccionales. La deformación total del elemento se obtiene mediante la integración numérica de todas las curvaturas seccionales a lo largo del elemento. Estos métodos debido a los requerimientos de tiempo y conocimiento necesarios, no suelen ser utilizados en diseño. Métodos simplificados, correctamente ajustados, son generalmente las herramientas incorporadas en las normativas a fin de realizar las verificaciones de los estados límites de servicio.

Las deformaciones instantáneas están directamente relacionadas con la rigidez del elemento, por ello cuando las cargas de servicio producen fisuración en la pieza, los sistemas de análisis deben ser más precisos.

Las deformaciones a largo plazo, especialmente las producidas en piezas fisuradas o esbeltas de hormigón armado, pueden causar daños en elementos no estructurales, debiendo ser estimadas con mayor precisión en la fase de diseño. La respuesta de una pieza fisurada a lo largo del tiempo, es compleja, ya que los fenómenos de fluencia y retracción conllevan modificaciones de la posición del eje neutro de la pieza, y la curvatura diferida se ve significativamente afectada por las cuantías de armadura dispuestas a tracción y compresión.

En este trabajo, se proponen dos métodos simplificados para el cálculo de las deformaciones instantáneas y diferidas en elementos sometidos a flexión, los cuales están basados en el comportamiento mecánico de elementos de hormigón armado, e incorporan de forma explícita, los parámetros más importantes que gobiernan el comportamiento instantáneo y el diferido de éstos.

Para los métodos simplificados de cálculo de flechas diferidas, se considera que bajo carga sostenida la tensión en la armadura de tracción es constante, de acuerdo con lo observado experimentalmente y los resultados obtenidos de la simulación numérica de secciones fisuradas en el tiempo.

Los resultados en las dos fórmulas simplificadas propuestas, se ajustan muy bien con aquellos obtenidos en análisis no lineal, realizado sobre un gran número de vigas virtuales. También se han obtenido resultados satisfactorios, para el método simplificado de cálculo de deformaciones a largo plazo, comparándolo con los resultados existentes de 217 ensayos realizados en vigas bajo carga sostenida, disponibles en la bibliografía.

Abstract

Nowadays calculation of reinforced concrete deflections is becoming a critical factor in design methodologies due to the reduction of the thickness of slabs and increasing of span lengths. Apart from the visible sags effects, that tends to reduce confidence on the safety of the structure, damage of partitions or finishes are the commonest form of problem related to deflections.

Non-linear time-dependent analysis methods based on fibre beam linear elements provide the determination of sectional curvatures. The total element deflection can be obtained as the numerical integration of curvatures across the monitoring sections. Those methods are not often used in the design approaches because of their high time-consume and expert knowledge requirements. Simplified methods providing enough accuracy are generally provided in codes to verify the serviceability limit.

The instantaneous deflections are directly influenced by the stiffness of the element, thus when the service load conditions induce cracking of concrete more accurate analysis approaches are needed.

Long-term deflections, especially in cracked and slender R/C flexural members, may cause delayed damage in non-structural elements, so they must be accurately estimated at the design stage. The time-dependent response of cracked sections is complex, since creep and shrinkage produce a shift of the neutral axis, and the delayed curvature is significantly affected by the amounts of tensile and compressive reinforcements.

In this work, two simplified methods for the calculation of instantaneous deflections and long-term curvatures and deflections in flexural members are proposed, which are based on the mechanics of reinforced concrete, and explicitly incorporates the most important parameters governing the instantaneous and time dependent behaviour of RC sections and elements.

For the long-term simplified method, constant stress in the tensile reinforcement under sustained load is assumed, according to experimental observations and to the results of numerical simulations on the time-dependent behaviour of cracked sections.

The results of both simplified proposed formulas fit very well those obtained by a general non-linear and time-dependent analysis of a large number of hypothetical beams. Good agreement has also been obtained, for the simplified long term deflection method with the results of 217 previously tested beams under sustained load, available in the literature.

Notación

A	Area de la sección de hormigón
A_{cr}	Area de la sección fisurada
A_s	Armadura de tracción
A'_s	Armadura de compresión.
b	Ancho de la sección.
c_0	Profundidad del bloque de compresiones triangular para $t=t_0$.
c	Profundidad del bloque de compresiones triangular para $t>t_0$.
d	Canto útil.
d'	Recubrimiento mecánico de la armadura comprimida.
d_2	Profundidad del eje de rotación para cualquier instante t . En $t=t_0$, $d_2=x_0$.
E_c	Módulo de elasticidad del hormigón.
E_s	Módulo de elasticidad del acero.
f_{ck}	Resistencia a compresión del hormigón.
f_{ct}	Resistencia a tracción del hormigón.
f_{cm}	Resistencia a la compresión media del hormigón.
h	Altura de la sección.
I	Inercia de la sección de hormigón
I_g	Inercia bruta de la sección de hormigón
I_{cr}	Inercia de la sección de hormigón fisurada
$J(t, t_0)$	Función de fluencia
$c(\tau, t - \tau)$	Función de fluencia reducida
k_s	Coefficientes de condiciones de apoyo para el cálculo de deformaciones de retracción.
M	Momento flector. Positivo produce tracción en la fibra inferior.
M_{cr}	Momento de fisuración de la sección.
M_a	Máximo momento de la combinación más desfavorable en servicio.
x_0	Posición de la fibra neutra en t_0 . En $t=t_0$ $x_0=c_0$.
x	Posición de la fibra neutra para $t>t_0$.
Y	Momento estático de la sección de hormigón
y	Flecha
Y_{inst}	Flecha instantánea
Y_g	Flecha instantánea por cargas permanentes.
Y_{g+q}	Flecha instantánea por cargas permanentes y sobrecargas.
Y_{φ}	Flecha por fluencia
Y_{sh}	Flecha por retracción
y_I	Flecha calculada en estado 1 (sin fisurar) en relación al Método Bilineal del CEB.
y_{II}	Flecha calculada en estado 2 (fisurada) en relación al Método Bilineal del CEB.
k_s	Coefficiente para la flecha por retracción, en función de las vinculaciones de apoyo y la distribución de cargas.
z	Brazo mecánico de la sección
ΔC_c	Variación de la compresión en el hormigón en el tiempo.
ΔC_s	Variación de la compresión en la armadura comprimida en el tiempo.
$\Delta \epsilon_s$	Incremento de deformación de compresión en la armadura comprimida para $t>t_0$.
$\Delta \epsilon_c$	Incremento de deformación de la fibra más comprimida de hormigón para $t>t_0$.
$\Delta \psi$	Incremento de curvatura para $t>t_0$.
$\Delta \psi_{cr}$	Incremento de curvatura por retracción.
$\Delta \psi_{sh}$	Incremento de curvatura por retracción.

$\Delta\sigma_s$	Incremento de tensión en la armadura traccionada para $t > t_0$.
$\Delta\sigma'_s$	Incremento de tensión en la armadura comprimida para $t > t_0$.
Δy	Flecha diferida
Δy_{cr}	Flecha diferida por fluencia.
Δy_{sh}	Flecha diferida por retracción.
ΔT	Variación de tracción en la armadura traccionada con el tiempo.
α	Relacion entre el modulo de elasticidad del acero y hormigón.
β	Factor de interpolación del Método Bilineal del CEB
χ	Coefficiente de envejecimiento.
$\epsilon(t)$	Deformación total para un tiempo t en un punto dado de la estructura.
$\epsilon_m(t)$	Deformación de la fibra de referencia de la sección en el tiempo.
$\epsilon^m(t)$	Deformación mecánica.
$\epsilon^{nm}(t)$	Deformación no mecánica $\epsilon^{nm}(t) = \epsilon_{cr}(t) + \epsilon_{sh}(t) + \epsilon_a(t) + \epsilon_T(t)$.
$\epsilon_{cr}(t)$	Deformación por fluencia en cualquier instante de tiempo t .
ϵ_{crb}	Deformación por fluencia básica
ϵ_{crd}	Deformación por fluencia de secado
$\epsilon_{sh}(t)$	Deformación por retracción en cualquier instante de tiempo t .
ϵ_{shd}	Deformación por retracción de secado.
ϵ_{sha}	Deformación por retracción autógena.
$\epsilon_a(t)$	Deformación por envejecimiento para un tiempo t .
$\epsilon_T(t)$	Deformación térmica para un tiempo t .
ϵ_{c0}	Deformación instantánea en la fibra más comprimida de hormigón para $t = t_0$.
$\epsilon_c(t)$	Deformación instantánea en la fibra más comprimida de hormigón para $t > t_0$.
$\epsilon_s(t)$	Deformación en la armadura traccionada para $t > t_0$.
$\varphi(t, t_0)$	Coefficiente de fluencia para un tiempo t , cuando la carga se aplica en $t = t_0$.
ρ_m'	Cuantía media de armadura a compresión dispuesta a lo largo del elemento.
ρ_m	Cuantía media de armadura a tracción dispuesta a lo largo del elemento.
σ_{c0}	Tensión en la fibra mas comprimida del hormigón en $t = t_0$.
σ_{s0}	Tensión en la armadura traccionada en $t = t_0$.
σ_{s1}	Tensión en la armadura traccionada cuando la sección no está fisurada
σ_{s2}	Tensión en la armadura traccionada cuando la sección está fisurada
σ'_{s0}	Tensión en la armadura comprimida en $t = t_0$.
σ_c	Tensión en la fibra mas comprimida del hormigón en $t > t_0$.
σ_s	Tensión en la armadura traccionada en $t > t_0$.
σ'_s	Tensión en la armadura comprimida en $t > t_0$.
ξ	Factor de interpolación usado en el Método Bilineal.
ψ_0	Curvatura instantanea.
ψ	Curvatura para $t > t_0$.
ψ_1	Curvatura calculada en estado 1 (sin fisurar) en relación al Método Bilineal del CEB.
ψ_2	Curvatura calculada en estado 2 (fisurada) en relación al Método Bilineal del CEB.

Índice de texto

1. Introducción	1
1.1 La importancia del control de las deformaciones.....	1
1.2 El estado límite de deformación: Solicitación y respuesta.	3
1.2.1 Flecha instantánea, diferida, activa y total.	4
1.2.2 Flechas máximas admisibles.	4
1.2.3 Esbeltez límite.	5
1.3 Objetivos de la tesina. Contenido del documento	7
2. Estado del Conocimiento	9
2.1 Deformaciones instantáneas y diferidas del hormigón.	9
2.1.1 Retracción.	10
2.1.2 Fluencia.	14
2.1.3 Principio de superposición de las deformaciones diferidas.....	20
2.2 Comportamiento instantáneo y diferido de una sección de hormigón armado.	23
2.2.1 Fase elástica	23
2.2.2 Fase fisurada en flexión simple.....	29
2.3 Comportamiento instantáneo y diferido de vigas y losas unidireccionales de hormigón armado..	40
2.3.1 Comportamiento instantáneo	40
2.3.2 Comportamiento diferido	47
2.4 Cálculos simplificados de flechas. Tratamiento en diferentes normativas.....	48
2.4.1 Vigas no fisuradas.	48
2.4.2 Vigas fisuradas.	50
2.5 Cálculo de flechas mediante un modelo numérico de análisis no lineal (CONS).....	56
2.6 Conclusiones respecto al estado del conocimiento.....	59
3. Método propuesto para cálculo simplificado de deformaciones diferidas.	61
3.1 Introducción.....	61
3.2 Estudio paramétrico realizado mediante el método general.	62
3.2.1 Objetivo y alcance del estudio	62
3.2.2 Influencia de las cuantías a tracción y compresión.....	62
3.2.3 Variación de la posición del eje neutro de deformaciones, del bloque de compresiones y posición del punto de giro de la sección.....	65
3.2.4 Conclusiones del estudio paramétrico.....	69
3.2 Método seccional propuesto para el cálculo de curvaturas diferidas.	70
3.2.1 Desarrollo de la formulación.....	70

3.2.2 Validación de la formulación.	76
3.3 Propuestas de cara a la normativa para el cálculo de flechas.	77
3.3.1 Introducción.....	77
3.3.2 Propuesta de formulación para el cálculo de flechas instantáneas.....	78
3.3.3 Propuesta de formulación para el cálculo de flechas totales.	81
3.3.4 Ejemplos de aplicación del método propuesto para flechas.	83
3.4 Conclusiones sobre el método propuesto.	87
4. Verificación del método de cálculo de flechas propuesto.	89
4.1 Verificación numérica.	89
4.1.1 Verificación numérica de la formulación para deformaciones diferidas.	89
4.1.2 Verificación numérica de la formulación para deformaciones totales.....	93
4.2 Verificación experimental.....	94
4.2.1 Base de datos utilizada.	94
4.2.2 Resultados y conclusiones.	96
4.3 Conclusiones de la verificación numérica y experimental.....	98
5. Conclusiones y perspectivas de futuro.	99
5.1 Conclusiones.....	99
5.1.1. Conclusiones derivadas del estudio del comportamiento de vigas y losas de hormigón armado en situación de servicio.	99
5.1.2. Conclusiones derivadas de las características y precisión del método simplificado desarrollado.	100
5.2 Perspectivas de futuro.....	102
Referencias	105
ANEJOS	109

1. Introducción

1.1 La importancia del control de las deformaciones.

La seguridad, asociada a la resistencia y estabilidad, ha sido clásicamente el único requisito en el diseño estructural. Sin embargo, hoy en día, la durabilidad, la funcionalidad y el aspecto estético son requisitos ineludibles, que condicionan los proyectos de estructuras, como respuesta a las nuevas exigencias sociales de calidad.

La optimización de los materiales y el generalizado aumento de las luces conducen a mayores esbelteces de los elementos estructurales, en especial en el ámbito de los forjados para edificación.

Conocido es el criterio general de diseño de las actuales normativas de hormigón: dimensionar para estado límite último (equilibrio, agotamiento, inestabilidad, etc.) y verificar los estados límite de servicio (fisuración, deformación, vibraciones, etc). Éste procedimiento de diseño permite optimizar materiales así como aumentar las esbelteces de las piezas mejorando su estética, sin embargo implica la aparición de fisuras para las cargas de carácter permanente y sobrecargas en las combinaciones de servicio. La fisuración de los elementos conlleva una pérdida de su rigidez, que supone un incremento de las deformaciones instantáneas.

Conocidos son también los fenómenos de retracción y fluencia del hormigón, así como los efectos que estas deformaciones diferidas introducen en las piezas de hormigón armado. Una correcta modelización del fenómeno de retracción y fluencia,

mediante formulaciones ajustadas es tal vez uno de los primeros aspectos para minimizar los errores en fase de proyecto.

El control de las deformaciones, instantáneas o diferidas, puede condicionar el proyecto de cualquier estructura. Así en puentes una correcta estimación de la flecha evita problemas de acumulaciones de agua, vibraciones excesivas, o en el caso más desfavorable, problemas de colapso como en el puente de Palaos situado en el mar de Filipinas, Figura 1. El puente de 241 m se construyó por el método de avance en voladizo en 1977, siendo récord en su tipología, y colapso en 1996, tres meses después de realizarse su rehabilitación. La rehabilitación del puente fue motivada por el incremento de flechas sufrido durante 18 años. La flecha prevista en proyecto era de 0.65 m siendo la fecha real de 1.40 m. Bazant [2] realizó un detallado estudio sobre el incremento de deformaciones sufrido por la estructura siendo las conclusiones básicas: utilización de modelos muy imprecisos para la cuantificación del coeficiente de fluencia y retracción, consideración de fluencia y retracción uniformes y no consideración del arrastre por cortante en servicio, así como el intentar evitar la construcción de estructuras sensibles a las deformaciones diferidas como son los puentes con rótula en centro luz construidos por avance en voladizo.

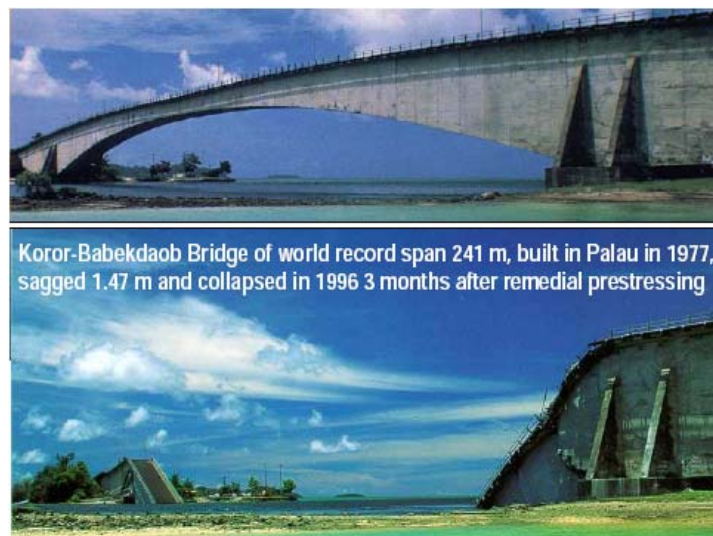


Figura 1 Colapso puente Palaos

En edificios, donde las luces son notoriamente más reducidas, las deformaciones diferidas no producen colapsos generalmente pero si implican daños sobre elementos no estructurales como tabiquería, así como vibraciones no deseadas en forjados o incluso excesiva torsión en las vigas extremas de los forjados.

Los problemas y patologías derivados de las deformaciones excesivas en edificación son numerosos. En los últimos años más del 30% de los forjados de edificación han sufrido problemas de patología asociados a su excesiva deformación.

A nivel de diseño es deseable disponer de métodos simples que permitan estimar con buena aproximación las deformaciones. Para ello es necesario que las formulaciones estén basadas en los principios mecánicos que rigen el comportamiento estructural observado e incorporen explícitamente los parámetros más importantes

que lo gobiernan. De esta manera es posible diseñar las dimensiones o armaduras que permitan evitar problemas de deformaciones excesivas desde la fase de diseño así como ajustar diseños más económicos.



Figura 2 Fisuras en edificios por deformación excesiva de forjados

1.2 El estado límite de deformación: Solicitación y respuesta.

Los desplazamientos de cualquier estructura en su plano se pueden resumir en: desplazamiento longitudinal de acortamiento o alargamiento, giros y desplazamientos transversales.

Limitar flechas excesivas en estructuras, evitar vibraciones, o bien garantizar rigideces mínimas y conservar gálibos de paso, son aspectos que justifican la inclusión del estados límite de deformaciones dentro de los estados límites de servicio en las actuales normativas. El estado límite de deformaciones se centra básicamente en los desplazamientos transversales (flechas) por los problemas que de ellos se derivan.

La comprobación del estado límite de servicio se realiza a partir de los valores característicos de las acciones y conlleva por una parte, la cuantificación de flecha de la estructura diseñada y por otra la comparación de la flecha obtenida con unas flechas máximas admisibles en función del tipo estructural, su uso y su funcionalidad.

Los criterios de flechas máximas admisibles, basados en la gran base de datos de estructuras existentes en la actualidad, proporcionan límites de deformaciones a estructuras convencionales. Para estructuras no convencionales como puentes de gran luz o estructuras singulares, el proyectista, generalmente conocedor de la tipología, debe realizar un estudio detallado de su diseño con métodos de cálculo adecuados que podrían incluir el análisis no-lineal por geometría y/o por el material.

1.2.1 Flecha instantánea, diferida, activa y total.

Las flechas se clasifican tradicionalmente como:

- **Flecha Instantánea.** Llamamos flechas instantáneas a las que aparecen bajo cargas de corta duración. Su valor depende de la rigidez a flexión de las secciones de la pieza considerada (EI). Este módulo tomará distintos valores en función del estado de fisuración en que se encuentre la pieza en el momento de la actuación de dicha carga. Este estado de fisuración depende de la relación M/M_k , siendo M el momento de fisuración de la pieza y M_k el momento de servicio actuante.
- **Flecha Diferida.** Son las que aparecen en el transcurso del tiempo bajo cargas de larga duración. Estas flechas, que vienen a sumarse a las instantáneas, están originadas por efectos reológicos, de retracción y fluencia, en el hormigón. En materiales no susceptibles a efectos reológicos, por ser muy pequeños o despreciables, como el acero, no se contempla este aspecto. En piezas de hormigón armado la flecha diferida incluye el efecto de la coacción generada por las armaduras, al no sufrir retracción y fluencia.
- **Flecha Total.** Es la debida a la totalidad de las cargas instantáneas actuantes más la flecha diferida producida por las cargas permanentes.
- **Flecha Activa.** Se entiende por flecha activa de un elemento estructural en relación con otro no estructural aquella flecha que se produce en una determinada pieza o zona de la estructura a partir del instante en que se construye el elemento que puede experimentar daños por dicha flecha. Su valor es igual a la flecha total menos la flecha que se haya producido hasta el instante en que se ha construido el elemento susceptible de sufrir daños. En la práctica donde resulta más importante calcular la flecha activa es en los forjados, por su influencia en los daños a elementos no estructurales, como por ejemplo tabiques.

1.2.2 Flechas máximas admisibles.

Los valores admisibles dependen de la tipología estructural y de la función que debe cumplir la estructura analizada. Se proporcionan generalmente como una limitación a la relación canto luz del elemento.

Las flechas activas máximas para evitar problemas de fisuración en la tabiquería está entorno a $L/400$, siendo L la luz del elemento.

Flechas admisibles en edificios

La Instrucción EHE-08 establece límites orientativos para la flecha total de edificios convencionales. En términos relativos a la longitud L del elemento que se comprueba, la flecha total debe ser menor al menor de los valores $L/250$ y $L/500+1\text{cm}$. La flecha activa debe limitarse a $L/400$.

El EC-2 propone valores de $L/250$ para la flecha total y de $L/500$ para la flecha activa mientras que el MC-90 sólo recomienda limitar la flecha total a $L/300$.

EL ACI propone valores de $L/480$ para las flechas activas en forjados susceptibles de dañar elementos no estructurales y de $L/240$ cuando no hay posibilidad de daño. También limita la flecha instantánea a $L/360$ en aquellos forjados que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales con posibilidad de daño.

Flechas admisibles en puentes

Los aspectos que condicionan las limitaciones de flechas en puentes son la posible modificación de la rasante teórica, el encharcamiento de agua y las vibraciones. A diferencia de las estructuras de edificación no existen valores máximos de flechas totales en el caso de puentes de hormigón armado.

Las vibraciones en puentes de hormigón armado, son normalmente poco importantes, aunque deben verificarse en aquellas estructuras singulares con rigideces pequeñas y paso de peatones.

La normativa EHE-08 [3] propone para puentes de luces grandes de hormigón pretensado, en que las flechas sean importantes, la posibilidad de contraflechar el elemento. Esta contraflecha está limitada por los valores de la Tabla 1.

	Autopistas, autovías y vías rápidas	Carreteras con circulación rápida	Carreteras con circulación lenta
Puentes isostáticos de un vano	$L/1750$	$L/1000$	$L/700$
Puentes de varios vanos isostáticos	$L/3500$	$L/2000$	$L/1400$
Puentes continuos	$L/1400$	$L/750$	$L/500$

Tabla 1 Valores máximos de la variación de la cota de rasante (EHE-08)

Estas limitaciones evitan que la posición de la rasante teórica varíe mucho durante la vida útil de la estructura. La contraflecha se obtendrá con la condición de que la variación de la cota de rasante estimada entre las situaciones inicial y final, con respecto de la rasante teórica, quede dentro indicados en la Tabla 1.

1.2.3 Esbeltez límite.

Los cálculos simplificados de algunas normativas proporcionan una esbeltez límite que exime al proyectista del cálculo de flechas en estructuras de edificación convencionales.

La Tabla 2 presenta un resumen comparativo de dichas esbelteces en diferentes normativas de amplio uso.

Se deben destacar ciertas discrepancias en cuanto a la esbeltez límite a considerar en función de las normativas. A nivel europeo EC-2 [4] y EHE-08 siguen el mismo criterio siendo el Código Modelo de 1990 (MC-90) [5] menos conservador. La norma ACI-318 [6] diferencia entre las esbelteces mínimas de elementos tipo viga de las de elementos tipo losa, siendo las esbelteces de losas mayores por su incremento de rigidez debido a los efectos de de deformación transversal (efecto Poisson). Sin embargo. El ACI-318 no hace distinción entre elementos en función de su cuantía de armado.

SISTEMA ESTRUCTURAL	Elementos fuertemente armados(*)				Elementos débilmente armados(**)			
	EHE-08	EC-2	MC-90	ACI	EHE-08	EC-2	MC-90	ACI
Viga biapoyada	14	14	18	16	20	20	25	16
Losa biapoyada	14	14	18	20	20	20	25	20
Vano exterior viga	18	18	23	18,5	26	26	32	18,5
Vano exterior losa unidireccional	18	18	23	24	26	26	32	24
Vano interior viga	20	20	25	21	30	30	35	21
Vano interior losa unidireccional	20	20	25	28	30	30	35	28
Recuadro interior de losa sobre apoyos	17	17	21	28	24	24	30	28
Recuadro exterior de losa sobre apoyos	17	17	21	24	24	24	30	24
Voladizos	6	6	7	8	8	8	10	8

Tabla 2 Esbelteces límite en diversas normativas en función de la cuantía y para $f_{ck}=30$ MPa.

(*) Elementos con una cuantía del 1,5%

(**) Elementos con una cuantía del 0,5%

La EHE-08 y el EC-2 recogen una formulación simplificada para encontrar la esbeltez límite en función de la cuantía de armado del elemento así como de la resistencia f_{ck} del hormigón.

$$\frac{L}{d} = K \left[11 + 1,5\sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2\sqrt{f_{ck}} \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{3/2} \right] \quad \text{si } \rho \leq \rho_0 \quad [1.1]$$

$$\frac{L}{d} = K \left[11 + 1,5\sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \sqrt{f_{ck}} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right] \quad \text{si } \rho > \rho_0 \quad [1.2]$$

1.3 Objetivos de la tesina. Contenido del documento

El diseño actual de las estructuras de hormigón armado requiere formulaciones simplificadas que proporcionen valores lo más ajustados posibles al cálculo de deformaciones, ya que un error en su cuantificación, aunque no significa la ruina de la estructura, puede implicar la pérdida de funcionalidad de ésta con sus consecuentes problemas de uso.

El análisis numérico permite mediante programas de análisis no lineal la inclusión de métodos de análisis paso a paso en el tiempo que permiten reproducir de manera ajustada fenómenos reales complejos. Éstos métodos, pese a ser una herramienta muy potente a nivel de comprobación están todavía alejados de ser implementados en la fase más práctica de un proyecto.

Diversos autores como Ghali [7], Favre [8], Branson [9], Murcia [10], Marí *et al.* [11] han realizado trabajos para proporcionar métodos de cálculo simplificados de flechas, muchos de ellos recogidos en normativas de vigente aplicación como son el EC-2, la EHE-08 o el Código Modelo MC-90, éste último en plena revisión.

Éste trabajo de investigación surge como parte de la revisión que se está llevando a cabo del MC-90 y en concreto de la modificación del capítulo 7.6.5 *Estado límite de deformaciones* cuya revisión está siendo realizada por el grupo de trabajo GT4.1 "Serviceability Models" de la Federation Internationale du Beton (FIB).

El objetivo del trabajo es desarrollar y verificar una formulación que, siendo fácil de utilizar en la fase de proyecto, sea rigurosa y permita considerar los parámetros que intervienen de forma más relevante en la deformación de estructuras como son: la cuantía de armaduras, el grado de fisuración, las condiciones ambientales, el tipo y edad del hormigón o la duración de la carga. La formulación se verificará con simulaciones numéricas y con resultados experimentales existentes en la bibliografía.

La formulación propuesta parte de las ecuaciones de comportamiento seccional instantáneo y diferido y proporciona un paso directo de la curvatura instantánea a la curvatura diferida, a partir de simplificaciones basadas en un estudio paramétrico realizado previamente mediante el programa de análisis no lineal CONS realizado por Marí [12] y [13].

El paso de curvatura instantánea a diferida a nivel seccional permite proponer una formulación simplificada a nivel elemento basada en una interpolación de las diversas curvaturas diferidas de la pieza, a lo largo de su longitud.

La validación de la formulación propuesta se realiza mediante resultados de ensayos de vigas bajo carga instantánea y duradera, así como con ensayos virtuales utilizando el modelo de análisis no lineal CONS para cálculo instantáneo y diferido.

El método propuesto se describe íntegramente en el capítulo 3 previa exposición detallada del estado del conocimiento en el capítulo 2.

La verificación numérica y experimental del método se expone en el capítulo 4.

En el capítulo 5 se plasman las conclusiones extraídas y se proponen perspectivas de futuros trabajos en base a los resultados obtenidos.

Se adjuntan a modo de anejo las bases de datos experimentales (anejo A) así como las numéricas (anejo B).

Finalmente en el anejo C se adjunta el artículo *Long-term deflections in cracked reinforced concrete flexural members* publicado por ELSEVIER en la revista Engineering and Structures en el que los autores Marí, Bairán y Duarte [11] presentan el método de cálculo de flechas diferidas desarrollado en la tesina.

2. Estado del Conocimiento

2.1 Deformaciones instantáneas y diferidas del hormigón.

Una estructura de hormigón sometida a la acción de cargas externas, presenta unas deformaciones instantáneas producidas por la actuación directa de la carga y unas deformaciones diferidas generadas por la reología del material.

Cuando una probeta de hormigón se somete a un proceso de carga de compresión duradera posterior y descarga se obtiene el siguiente gráfico, deformación-tiempo, en el que se pueden diferenciar las deformaciones de tipo instantáneo y las de carácter diferido.

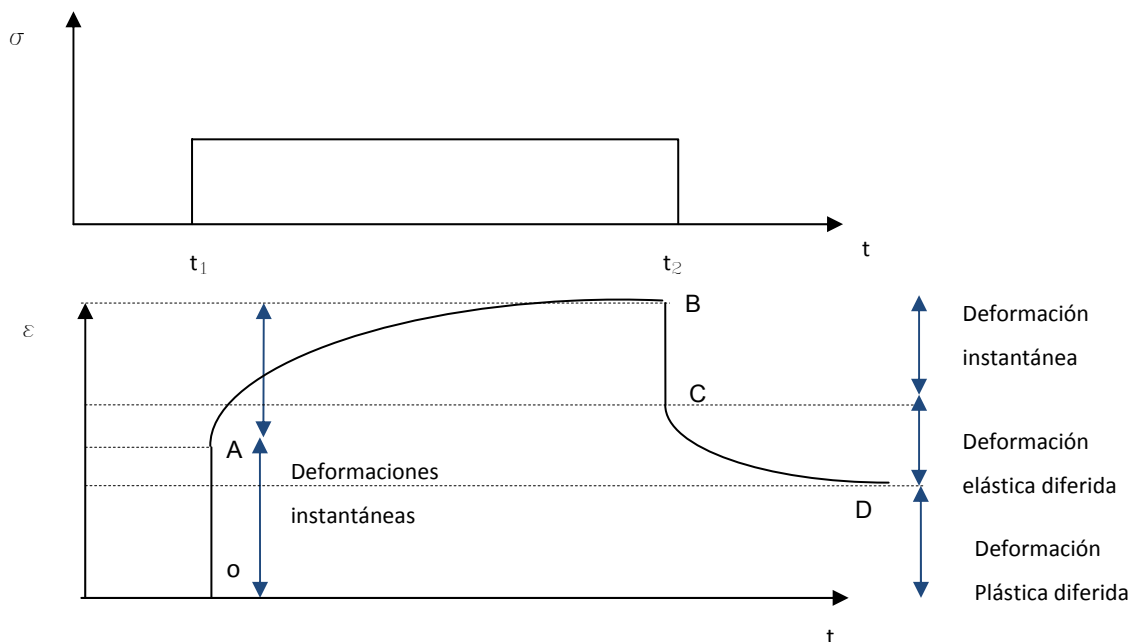


Figura 3 Curvas tensión-tiempo y deformación-tiempo en una probeta de hormigón

La deformación OA que es la deformación instantánea de tipo elástico que se produce al cargar la probeta con una tensión σ_1 en el instante t_1 . Al mantener la tensión en el intervalo (t_1, t_2) la deformación no se mantiene constante si no que aumenta con el tiempo dado el carácter visco-elástico del material. La deformación incrementa siguiendo la curva AB.

Al realizar la descarga en t_2 no se recupera toda la deformación instantánea ($AO \neq BC$) ya que el hormigón varía su módulo con el tiempo. Al descargar y dejar pasar el tiempo se sigue recuperando parte de la deformación según una curva CD, pero tampoco se recupera toda la deformación diferida. A este fenómeno se le conoce como envejecimiento del hormigón.

Las deformaciones obtenidas en el ensayo de carga y descarga de una probeta se pueden clasificar según la Tabla 3.

Deformaciones	Dependientes de tensión		Independientes de la tensión
	Instantáneas	Diferidas. Fluencia	
Reversibles	Elásticas	Elásticas diferidas	Termo higrométricas
Irreversibles	Remanentes	Plásticas diferidas	Retracción

Tabla 3 Clasificación de las deformaciones del hormigón.

Las deformaciones diferidas del hormigón se han tratado tradicionalmente separando aquellas producidas por los fenómenos de retracción de aquellas producidas por la fluencia. Ésta división encuentra su razón de ser en la separación de los procesos relacionados con estados tensionales, de los procesos independientes de éstos. Pese a ello, se debe siempre recordar que ambos fenómenos están acoplados y que la aplicación del principio de superposición, ver capítulo 2.1.3, no es más que una herramienta para modelizar el fenómeno real, mucho más complejo, de una forma asequible en la práctica.

2.1.1 Retracción.

La retracción es la deformación diferida que desarrolla una pieza en contacto con el aire cuando no se ve sometida a carga exterior. Generalmente, a no ser que la pieza se encuentre sumergida, la retracción del hormigón es una deformación que reduce el volumen inicial de la pieza.

Los diversos tipos de retracción son los siguientes:

- Retracción plástica: Se produce antes de finalizar el fraguado del hormigón, cuando éste aun se encuentra en estado plástico.
- Retracción autógena: Se encuentra a medio camino entra la plástica y la de secado. La retracción se produce como consecuencia de la eliminación del agua de los poros capilares por la hidratación de la pasta de cemento de las zonas

internas del hormigón durante el proceso de endurecido. Los valores típicos para la retracción autógena son de $40 \cdot 10^{-6}$ al cabo de un mes de edad del hormigón y de $100 \cdot 10^{-6}$ pasados 5 años. La retracción autógena aumenta con el contenido de cemento.

- Retracción por secado: Producida por el intercambio de humedad entre el hormigón y el medio donde se encuentra. Es la componente principal de la retracción y se desarrolla sobre el hormigón endurecido. Se produce por la pérdida del agua absorbida durante el proceso de hidratación de la pasta de cemento y también por la pérdida de agua intercrystalina.
- Retracción por carbonatación: No contemplada en las formulaciones ya que generalmente afecta a una capa muy superficial del elemento. El proceso de hidratación de la pasta de cemento deja una cierta proporción de cal libre, es decir, sin participar en el proceso químico de fraguado. Esta cal libre es susceptible de combinarse con el CO_2 del aire, produciendo carbonato de calcio Ca(OH)_2 , combinación química que tiene un carácter contractivo, por lo cual el espesor de hormigón afectado por él disminuye su volumen inicial, generándose la denominada retracción por carbonatación. En general, el espesor afectado es pequeño, alcanzando sólo algunos milímetros en la zona cercana a la superficie en contacto con el aire. Sin embargo, por el confinamiento que produce el hormigón interior adyacente, esa capa queda sometida a tensiones de tracción, pudiendo fisurarse. La retracción por carbonatación incrementa con la disminución de la humedad relativa.

En la siguiente tabla se indican los parámetros que afectan a la retracción por secado así como su efecto, siendo la humedad la variable estrella.

Variable	Efecto sobre la retracción de secado al aumentar variable
Humedad	Disminuye
Edad	Disminuye
Espesor	Disminuye
Árido/cemento	Disminuye
Agua/cemento	Aumenta
Temperatura	Aumenta
Resistencia fc	Disminuye

Tabla 4 Variables influyen sobre deformaciones de retracción

El tipo de árido influye bastante en el valor de la retracción. Áridos ligeros proporcionan valores más altos de retracción que áridos normales.

La retracción en hormigones de alta resistencia [14], es algo menor a la de hormigones convencionales (HC). Debido a la baja relación agua/cemento y a la finura de su microestructura, el HAR presenta una retracción autógena mucho mayor que los HC, en cambio la retracción de secado es muy baja debido a la escasa presencia de agua libre. Debido a la gran cantidad de cemento dispuesto en los HAR [15] es muy importante el tipo de endurecimiento, cemento de endurecimiento lento, normal o rápido. En las primeras edades la retracción autógena de los hormigones de alta resistencia es mayor.

Tratamiento de la retracción en las normativas

Se analizan las funciones de retracción incorporadas en la EHE-08, en el MC-90, en el EC-2 y en el ACI-209R-92. Todas estas normativas suponen que la retracción se inicia una vez terminado el proceso de curado.

MC-90

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \varepsilon_{sh0} \cdot \beta_s(t - t_s)$$

$$\beta_s(t - t_s) = \sqrt{\left(\frac{t - t_s}{350 \cdot (h_0 / h_{ref})^2 + (t - t_s)}\right)} \text{ función de retracción}$$

siendo $h_{ref} = 100 \text{ mm}$

$$\varepsilon_{sh0} = \varepsilon_s \cdot (f_{cm}) \cdot \beta_{HR} \text{ coeficiente básico de retracción}$$

$$\beta_{HR} = -1,55 \cdot \left(1 - \left(\frac{RH}{100}\right)^3\right) \text{ para } 40\% < RH < 99\%$$

$$\beta_{HR} = 0,25 \quad \text{para } RH > 90\%$$

EC-2

La deformación de retracción es la suma de la autógena y de secado.

$$\varepsilon_{sh} = \varepsilon_{shd} + \varepsilon_{sha}$$

El desarrollo de la retracción de secado con el tiempo

$$\varepsilon_{shd}(t) = \beta_{shd}(t, t_s) \cdot k_h \cdot \varepsilon_{sh0}$$

$$\varepsilon_{sh0} = 0,85 \cdot \left[(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{f_{cmo}}\right) \right] \cdot 10^{-6} \cdot \beta_{RH}$$

$$\beta_{RH} = 1,55 \cdot \left[1 - \left(\frac{RH}{RH_0}\right)^3 \right]$$

siendo la función de desarrollo de la retracción de secado en el tiempo

$$\beta_{shd}(t, t_s) = \frac{t - t_s}{(t - t_s) + 0,04 \sqrt{h_0^3}}$$

Para la retracción autógena se define

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sha}(t) &= \beta_{sha}(t) \cdot \varepsilon_{sha}(\infty) \\ \varepsilon_{sha}(\infty) &= 2,5(fck - 10) \cdot 10^{-6} \\ \beta_{sha}(t) &= 1 - \exp(-0,2t^{0,5})\end{aligned}$$

EHE-08

Sigue la misma formulación propuesta por el EC-2.

ACI-209R-92

El ACI-209-92 [16] propone una formulación puramente empírica basada en un modelo realizado a partir de datos experimentales del año 1968.

No diferencia explícitamente entre retracción autógena y de secado.

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \frac{(t - t_c)}{35 + (t - t_c)} \cdot \varepsilon_{shu} \quad \text{para elementos con curado normal siendo } t_c > 7 \text{ días}$$

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \frac{(t - t_c)}{50 + (t - t_c)} \cdot \varepsilon_{shu} \quad \text{para elementos con curado al vapor } t_c > 1 \text{ días}$$

$$\varepsilon_{shu} = -(780 \cdot \gamma_{MC} \cdot \gamma_{RH} \cdot \gamma_{VS} \cdot \gamma_{SL} \cdot \gamma_{FA} \cdot \gamma_{CC} \cdot \gamma_{AC}) \cdot 10^{-6}$$

Siendo:

γ_{MC} el factor de corrección del curado

γ_{RH} factor para la humedad relativa

γ_{SH} el ratio volumen-superficie

γ_{SL} factor de la consistencia del hormigón

γ_{FA} porcentaje de finos

γ_{CC} porcentaje de cemento

γ_{SL} porcentaje de contenido de aire.

La Tabla 4 muestra las variables más destacables en el fenómeno de retracción. La siguiente tabla indica si estas variables quedan recogidas en los modelos normativos presentados:

Variable	EC-2	EHE-08	MC-90	ACI-209R
Humedad	X	X	X	X
Edad	X	X	X	X
Espesor	X	X	X	X
Árido/cemento	X	X	X	X
Agua/cemento				
Temperatura				
Resistencia fc	X	X	X	
Humedad	X	X	X	X

Tabla 5 Variables utilizadas en los modelos de retracción

2.1.2 Fluencia.

La fluencia se define como el aumento de deformación en el tiempo que sufre un material al estar sometido a un estado tensional constante (carga exterior mantenida en el tiempo). Si lo que se mantiene constante es la deformación, entonces habrá una disminución progresiva del estado tensional con el tiempo, lo cual es sólo otra manifestación del mismo fenómeno, al que se denomina relajación.

Si el fenómeno de fluencia se produce a la vez que el de retracción, es decir, si la probeta se encuentra cargada a la vez que retrae, entonces la fluencia se puede calcular, de forma simplificada, como la diferencia entre la deformación total obtenida menos la deformación que tendría el mismo espécimen bajo las mismas condiciones sin carga aplicada, es decir se consideran fenómenos de carácter aditivo. La aditividad de ambos fenómenos en realidad no es cierta, ya que retracción y fluencia no son fenómenos de carácter independiente, es más, la retracción del hormigón tiende a amplificar la fluencia del elemento.

Neville [17] propone dos clasificaciones de los fenómenos producidos por la fluencia: una producida por los efectos que la fluencia introduce y otra clasificación en función de las causas que la producen.

La primera clasificación, por sus efectos, define tres tipos de fluencia en función de si la deformación es o no recuperable:

- Fluencia primaria o deformación diferida recuperable tras un proceso de descarga.
- *Fluencia secundaria* o deformación diferida no recuperable.
- *Fluencia terciaria* que sería en la que se englobarían las deformaciones diferidas producidas por estados tensionales superiores a $0,45f_{ck}$ (concepto de fluencia no lineal).

La clasificación según las causas que la provocan, clasificación más utilizada, define dos tipos de fluencia:

- La fluencia básica, ϵ_{crb} , es la que se produce en una probeta sellada, sin intercambio de humedad con el exterior, sometida a tensión constante.
- La fluencia de secado, ϵ_{crd} , o efecto Pickett, se define como la fluencia adicional obtenida cuando la probeta se ve sometida a un proceso de secado simultáneo a la aplicación de la carga sostenida.

La siguiente figura esquematiza los dos tipos de fluencia. El valor de la deformación de fluencia, en cada instante de tiempo t , se puede expresar como suma de ambas.

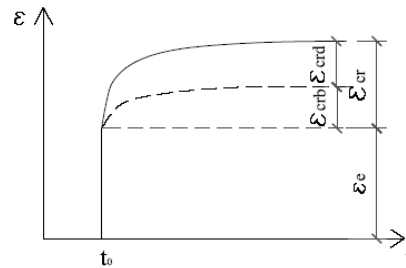


Figura 4 Fluencia básica y de secado

Los fenómenos que explican la fluencia básica son mecanismos físicos de restructuración interna de la microestructura de la pasta de cemento, como los delizamientos de las hojas de C-S-H, microfisuraciones, etc. que conllevan pérdidas de volumen.

El origen o mecanismo del efecto Pickett, pese a no estar perfectamente definido actualmente, se descompone en una parte estructural y otra intrínseca. La parte estructural o aparente se debe a la microfisuración inducida por el secado, Wittmann [18]. En una probeta sometida a retracción se produce en primer lugar el secado de la zona próxima a la superficie, mientras el núcleo permanece húmedo, generándose un estado de tensiones autoequilibradas que producen tracciones en la superficie y compresiones en el núcleo. Las tracciones de superficie pueden generar microfisuración y por ello se pueden obtener valores de retracción inferiores. Si existe una carga aplicada de compresión, la microfisuración no se produce y se llega a medir la totalidad de la retracción, es decir se mide una fluencia superior a la que se mediría si la probeta se encontrase sellada (fluencia básica). La parte de tipo intrínseco está íntimamente relacionada al bombeo del agua intersticial al aplicar una tensión que acelera el proceso de secado del espécimen.

Variables relacionadas con el fenómeno de fluencia

Son muchos los factores que afectan al fenómeno de fluencia del hormigón: resistencia del hormigón, condiciones ambientales, tipo de cemento, tipo de árido, tamaño y forma del elemento, tipo de carga, edad del hormigón, instante de aplicación de la carga (t_0) y duración de ésta, etc.

Neville [17] proporciona una de las más completas clasificaciones de los principales factores que influyen en la fluencia siendo las variables más importantes las resumidas en la siguiente tabla:

Variable	Efecto sobre la fluencia al aumentar variable
Humedad	Disminuye
Espesor	Disminuye
Nivel de tensión	Aumenta
Tipo de árido	Depende del tipo de árido
Agua/cemento	Aumenta
Temperatura	Aumenta
Curado	Disminuye
t_0	Disminuye

Tabla 6 Variables influyen sobre deformaciones de fluencia

Las variables con mayor incidencia son la humedad relativa del ambiente y el nivel de tensión al que está sometido el espécimen y el instante de aplicación de la carga. La importancia de la humedad relativa radica en la afectación directa de éste parámetro sobre el valor de las deformaciones por fluencia de secado.

El componente del hormigón que realmente fluye es la pasta de cemento hidratada. El árido, de carácter reológico inerte, se opone a la fluencia de la pasta. Así pues en función de las características del árido (porosidad, resistencia, etc.) el valor de fluencia será uno u otro.

En el comportamiento diferido del hormigón trabajando a bajas tensiones, como es habitual bajo cargas de servicio ($\sigma_c < 0.45f_{ck}$), se puede considerar lineal entre la tensión aplicada y la deformación diferida obtenida, siendo $\varphi(t, t_0)$ el coeficiente de proporcionalidad. Para tensiones elevadas, y debido a los fenómenos de microfisuración excesiva del hormigón, la proporcionalidad deja de ser válida, entrando en el rango de fluencia no lineal.

Éste trabajo se centra exclusivamente en el estudio de la fluencia en el rango de tensiones lineales, $\sigma_c < 0.45f_{ck}$, ya que esto permite la aplicación del principio de superposición, como se verá posteriormente.

Por otro lado, no representa una limitación significativa ya que niveles de tensión permanentes superiores a $0.45f_{ck}$ en hormigón armado no son muy habituales. Algunas normativas como el ACI o el EC-2 prohíben que se alcancen tensiones superiores a dichos niveles.

Fluencia a bajas tensiones.

En la siguientes figuras se grafican las curvas de evolución de las deformaciones instantáneas y diferidas al aplicar un nivel de tensión inferior a $\sigma_c < 0.45f_{ck}$ en diferentes instantes de tiempo.

Se observa el efecto de envejecimiento del hormigón en la disminución de la deformación instantánea y diferida con el tiempo, por el aumento del módulo de elasticidad con la edad (envejecimiento).

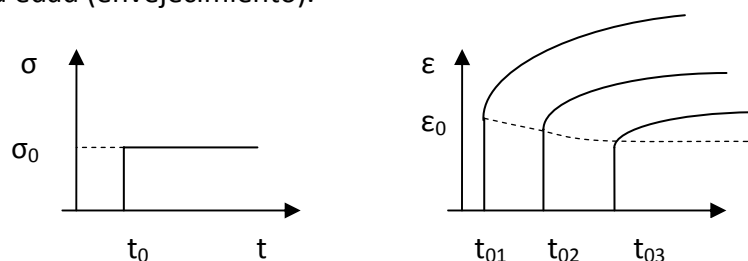


Figura 5 Evolución de la deformación para diversos instantes de carga

Éste mismo efecto se produce si efectuamos una descarga del hormigón en un tiempo $t > t_0$. Al descargar se produce una deformación instantánea de recuperación, ϵ_{e1} , seguida por una gradual recuperación de la deformación diferida ϵ_{d1} .

No se recupera la deformación en su totalidad existiendo para tiempo infinito una deformación de carácter remanente asociada a fenómenos plásticos. La fluencia no tiene carácter reversible principalmente por la existencia de la fluencia de secado.

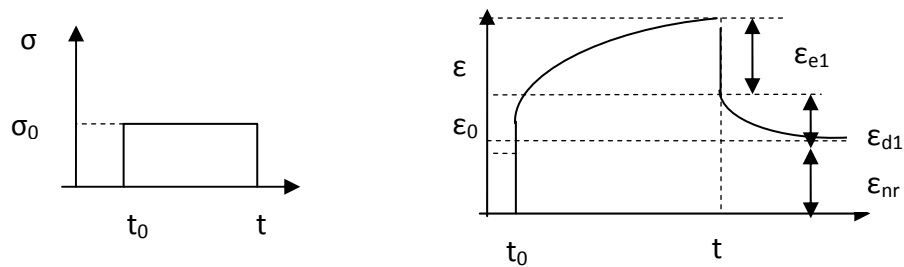


Figura 6 Evolución de la deformación en un proceso de descarga.

Para piezas no fisuradas sometidas a flexión no sólo fluye la parte comprimida. Los ensayos de l'Hermitte, recogidos por Neville [19], muestran un comportamiento diferido similar a tracción que a compresión.

La fluencia en HAR [14], a diferencia de la retracción puede llegar a presentar valores hasta de un 50% menos por la disminución de la fluencia de secado. La fluencia básica es similar a la de los HC.

Tratamiento de la fluencia en las normativas.

El tratamiento que las diversas normativas, realizan de las deformaciones diferidas de fluencia, pasa por el ajuste de una función $J(t, t_0)$ a partir de datos experimentales con probetas ensayadas a la edad de 28 días, siendo $E_c(t_0)$ el módulo de elasticidad del hormigón a esa edad. Todas las normativas proponen formulaciones para la predicción de la fluencia dentro del rango de comportamiento lineal, es decir tensiones inferiores a $0,45 f_{ck}$.

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad [2.1]$$

$$J(t, t_0) = \left[\frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \text{ siendo } \varphi(t, t_0) \text{ el coeficiente de fluencia} \quad [2.2]$$

$$\text{para } J(t_0, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} \quad [2.3]$$

Las variables consideradas en cada modelo de ajuste de fluencia pueden ser diferentes en función de la normativa.

Para edades de carga diferentes a los 28 días se aplicaran las expresiones anteriores ajustando el valor del coeficiente de fluencia obtenido de las normativas según la siguiente expresión:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{28}(t, t_0) \cdot \frac{E_c(t_0)}{E_c(28)} \quad [2.4]$$

Se presentan las funciones de fluencia incorporadas en la EHE-08, en el EC2, en el MC-90 y en la ACI-209.

MC-90

La deformación por fluencia de una probeta para una tensión constante aplicada se define:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t - t_0) \text{ siendo } \varphi_0 \text{ el coeficiente básico de fluencia}$$

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0)$$

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH / RH_0}{0,46 \cdot (h / h_0)^{1/3}}$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5,3}{(f_{cm} / f_{cm0})^{0,5}}$$

$$\beta_c(t - t_0) = \left[\frac{(t - t_0) / t_1}{\beta_H + (t - t_0) / t_1} \right]^{0,3} \text{ la funcion del desarrollo de la fluencia con el tiempo}$$

$$\beta_H = 150 \left[1 + \left(1,2 \frac{RH}{RH_0} \right)^{18} \right] \frac{h}{h_0} + 250 \leq 1500$$

Para tener en cuenta el tipo de cemento en la formulación se puede modificar la edad de puesta en carga t_0 mediante la siguiente expresión:

$$t_0 = t_{0T} \left[\frac{9}{2 + \left(\frac{t_{0T}}{t_{1T}} \right)^{1,2}} + 1 \right]^\alpha$$

siendo t_{0T} la edad del hormigón a la puesta en carga y t_{1T} igual a 1 día. El coeficiente α depende del tipo de cemento y es -1 para cementos SL, 0 para normales y 1 para RS.

EC2 y EHE-08

El coeficiente de fluencia puede obtenerse mediante la siguiente formulación:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \beta_c(t - t_0)$$

φ_0 Coeficiente básico de fluencia, dado por la expresión:

$$\varphi_0 = \varphi_{HR} \beta(f_{cm}) \beta(t_0)$$

φ_{HR} Coeficiente de influencia de la humedad relativa (HR):

$$\varphi_{HR} = 1 + \frac{1 - HR/100}{0.1 \cdot \sqrt[3]{e}} \quad \text{si } f_{cm} \leq 35 \text{ N/mm}^2$$

$$\varphi_{HR} = \left[1 + \frac{1 - HR/100}{0.1 \cdot \sqrt[3]{e}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2 \quad \text{si } f_{cm} > 35 \text{ N/mm}^2$$

$\beta(f_{cm})$ Factor que permite tener en cuenta el efecto de la resistencia del hormigón en el coeficiente básico de fluencia:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{ck} + 8}}$$

f_{ck} en N/mm²

$\beta(t_0)$ Factor de influencia de la edad de carga (t_0) en el coeficiente básico de fluencia.

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + t_0^{0,2}}$$

$\beta_c(t - t_0)$ Función que describe el desarrollo de la fluencia con el tiempo.

$$\beta_c(t - t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{0,3}$$

siendo:

$$\beta_H = 1,5 \left[1 + (0,012 \cdot HR)^{18} \right] e + 250 \leq 1500 \quad f_{cm} \leq 35 \text{ N/mm}^2$$

$$\beta_H = 1,5 \left[1 + (0,012 \cdot HR)^{18} \right] e + 250 \leq 1500 \cdot \alpha_3 \quad f_{cm} > 35 \text{ N/mm}^2$$

y donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tienen en cuenta la influencia de la resistencia del hormigón.

$$\alpha_1 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7} \quad \alpha_2 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,2} \quad \alpha_3 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,5}$$

ACI-209R-92

La función de fluencia también queda definida a partir de ajustes experimentales.

$$v_t = \frac{t^{0,60}}{10+t^{0,60}} \cdot v_u$$

$$v_u = 2,35 \cdot \gamma_c$$

$\gamma_c = \gamma_{la} \cdot \gamma_\lambda \cdot \gamma_{vs} \cdot \gamma_\psi \cdot \gamma_a$ factores de corrección aplicables

Siendo los factores detallados:

γ_{la} factor de corrección por edad de carga diferente a 7 días.

γ_λ factor de corrección por humedad relativa

γ_{vs} factor de corrección por tamaño de la pieza

γ_ψ factor de corrección por contenido de árido fino

γ_a factor de corrección por contenido de aire

La Tabla 6 proporcionaba las variables básicas del fenómeno de fluencia. La siguiente tabla indica si éstas variables quedan recogidas en los modelos normativos presentados:

Variable	EC2	EHE-08	MC-90	ACI-209R
Humedad	X	X	X	X
Espesor	X	X	X	X
Nivel de tensión				
Puesta en carga	X	X	X	X
Tipo de árido				X
Agua/cemento				
Temperatura	X	X	X	
Curado	X	X		X

Fig 1 Variables utilizadas en los modelos de fluencia.

2.1.3 Principio de superposición de las deformaciones diferidas.

La ecuación constitutiva uniaxial para las deformaciones diferidas del hormigón, considerando un comportamiento visco-elástico de éste, se conoce como la ecuación de Volterra, aunque fue introducida en el hormigón por McHenry en 1943, y se define de la siguiente manera:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) \cdot (1 + \varphi(t, t_0)) + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E(\tau)} d\sigma(\tau) + \varepsilon_{sh}(t, t_0) \quad [2.5]$$

Esta expresión, además de desacoplar las deformaciones de carácter tensional de las atensionales, lleva implícito el principio de superposición de deformaciones, es decir, la deformación en el tiempo t se puede obtener a partir de la suma de todas las deformaciones ocurridas entre t_0 y t de forma independiente. La ecuación también considera el envejecimiento del material con el tiempo al ser el módulo de elasticidad dependiente del tiempo.

Se ha comprobado experimentalmente que el principio de superposición es válido en los rangos de tensiones inferiores a $0,45f_{ck}$, tensiones propias de las estructuras en servicio. Para niveles más avanzados de carga los resultados experimentales y numéricos divergen.

La dificultad que conlleva la solución de ésta ecuación, si lo que se conoce es la deformación a lo largo del tiempo, es que la tensión $\sigma(t)$ es una incógnita que se encuentra en la formulación integral. Ello hace que la ecuación sea muy compleja y que sólo se pueda resolver analíticamente en casos muy simples. Si por el contrario, lo que se conoce es la variación de tensiones $\sigma(t)$ la solución de la ecuación (2.5) se limita a resolver una integral.

Para secciones en que el historial de tensiones es nulo, es decir, para tensiones que se mantienen constantes en el tiempo la integral desaparece y la expresión 2.5 se simplifica.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) \cdot (1 + \varphi(t, t_0)) + \varepsilon_{sh}(t, t_0) \quad [2.6]$$

Como se verá, los fenómenos de fluencia y retracción en secciones de hormigón armado conllevan redistribuciones tensionales, a nivel sección, que modifican el valor de la tensión en el hormigón con el paso del tiempo, siendo de aplicación la ecuación (2.5).

Con el paso del tiempo han surgido diversos métodos de cálculo simplificado para sortear la resolución de la integral de Volterra evitando así conocer la evolución del plano de tensiones en el intervalo de tiempo deseado y a su vez, evitando la resolución de dicha integral cuya resolución numérica no es simple. Éstos métodos aunque simplificados deben proporcionar una respuesta ajustada.

Para este trabajo se utiliza el método del coeficiente de envejecimiento propuesto por Trost [20] en 1967 y finalmente formulado por Bazant [21].

Método del módulo efectivo ajustado a la edad (AAEMM)

La simplificación y a la vez el atractivo del método reside en la substitución de los diversos intervalos de tiempo, en que se divide el historial de tensiones, en un único intervalo (t_0, t) o salto, considerando además el fenómeno de envejecimiento del hormigón.

Esto se consigue introduciendo un coeficiente de envejecimiento (χ) pudiéndose reescribir la ecuación (2.5) por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) \cdot (1 + \varphi(t, t_0)) + \chi \left(\frac{\Delta\sigma(t, t_0)}{E(t_0)} (1 + \varphi(t, t_0)) \right) + \varepsilon_{sh}(t, t_0) \quad [2.7]$$

Las variaciones tensionales que se producen en el hormigón por efecto de la retracción y la fluencia tienen generalmente una evolución similar al de la siguiente figura:

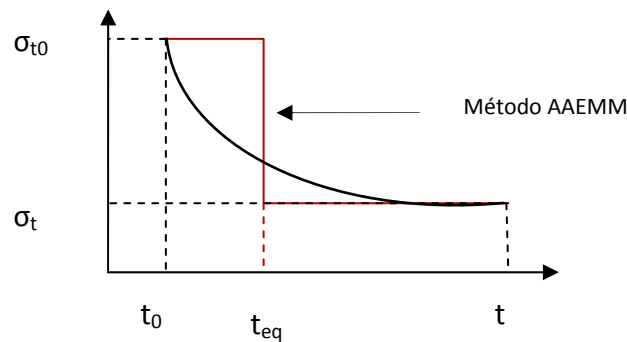


Figura 7 Definición gráfica método del módulo efectivo ajustado a la edad

Si sólo son conocidos los estados tensionales del inicio y final de un intervalo de tiempo dado, la ecuación (2.7) nos permite determinar la deformación diferida como si todo el incremento de tensión se produjese en t_0 y fuera sostenido hasta t .

El inconveniente de evaluar el incremento, o decremento en éste caso, del estado tensional en t_0 , es la no consideración del envejecimiento del material. A medida que va variando el historial de tensiones con el tiempo el hormigón incrementa su módulo de deformación. En la ecuación 2.7 el coeficiente χ introduce un ajuste en la evaluación de la edad del hormigón, modificando el valor del módulo de elasticidad en función del tipo de curva que sigue la variación tensional. Si por ejemplo consideramos una variación lineal de tensiones entonces por relaciones geométricas el valor del coeficiente de envejecimiento debe ser de $\chi=0.5$.

Generalmente la curva que define la variación de tensiones obtenida por efecto de la retracción y fluencia es muy similar en todos los casos. Así pues, a partir de datos empíricos el coeficiente χ se ajusta, para intervalos (t_0, t) superiores a 1 año, con la siguiente expresión.

$$\chi(t_0, \infty) = \frac{\sqrt{t_0}}{1 + \sqrt{t_0}} \quad [2.8]$$

Si consideramos valores de t_0 superiores a 7 días, valores típicos de puesta en carga de estructuras de hormigón, el valor del coeficiente de envejecimiento χ oscila entre 0,6 y 0,9, considerándose 0,8 un valor medio.

Por lo tanto, el método del coeficiente de envejecimiento se puede interpretar gráficamente, cómo si todo el incremento de tensión se aplicase en un tiempo (t_{eq}, t_0) , Figura 7, produciéndose la misma deformación que produciría la variación real.

Como se verá en el capítulo 3, éste método es una de las hipótesis de partida de la formulación seccional simplificada propuesta para el cálculo de flechas diferidas.

2.2 Comportamiento instantáneo y diferido de una sección de hormigón armado.

Las secciones de hormigón armado están formadas por dos materiales, hormigón y acero, que presentan un comportamiento reológico diferente. La adherencia entre ambos materiales, considerada perfecta, compatibiliza la diferencia de deformaciones diferidas existente entre ambos materiales.

El desarrollo de la fluencia y retracción conlleva una modificación del estado tensional de la sección en el tiempo, por efecto de las redistribuciones de tensiones (autoequilibradas) que se producen entre hormigón y acero.

Estas redistribuciones tensionales tienden a descomprimir el hormigón y a incrementar la tensión de la armadura de compresión mientras que la armadura traccionada aumenta su tensión sólo ligeramente.

En éste capítulo se analizan los comportamientos instantáneos y diferidos de secciones de hormigón armado fisuradas y sin fisurar, haciendo especial hincapié en los comportamientos de las fisuradas. Asimismo, se aborda el estudio de los mecanismos de redistribuciones tensionales producidos por las deformaciones diferidas y se definen los parámetros que rigen el comportamiento de la sección a largo plazo.

2.2.1 Fase elástica

2.2.1.1 Comportamiento instantáneo.

Antes de fisurar el comportamiento instantáneo (t_0) de una sección de hormigón armado se considera elástico. La sección de hormigón trabaja íntegramente y la distribución de las tensiones responde al clásico modelo de Bernoulli. Para el caso de flexión simple la fibra neutra pasa por el centro de gravedad de la sección homogeneizada. La carga aplicada sobre la sección se reparte entre hormigón y acero teniendo en cuenta la relación entre sus rigideces.

El plano de deformaciones mecánicas instantáneas, de una sección cualquiera de hormigón armado, sometida a esfuerzos normales o momentos, queda definido por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} N_{ext} \\ M_{ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & EY \\ EY & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m(t_0) \\ \psi(t_0) \end{bmatrix} \quad [2.9]$$

Siendo A , I , Y el área, inercia y momento estático de la sección homogeneizada respectivamente y E el módulo de elasticidad del hormigón en el instante t_0 . La matriz de deformaciones mecánicas queda definida por ε_m y ψ , deformación mecánica de la fibra neutra y curvatura de la sección respectivamente.

Aplicando las ecuaciones constitutivas de los materiales sobre el plano de deformaciones calculado se obtienen las tensiones instantáneas a partir de las siguientes expresiones:

$$\sigma_c(t_0) = E_c(t_0) \cdot (\varepsilon_m(t_0) + \psi(t_0) \cdot y) \quad [2.10]$$

$$\sigma_s(t_0) = E_s(t_0) \cdot (\varepsilon_m(t_0) + \psi(t_0) \cdot y_s) \quad [2.11]$$

Siendo y y y_s la posición de las fibras de hormigón y acero respecto de la fibra neutra.

2.2.1.2 Comportamiento diferido

En una sección de hormigón en masa, sometida a flexión simple, supuesto que no existe fisuración por tracción excesiva, el incremento de curvatura por efecto de la fluencia se obtiene directamente multiplicando la curvatura instantánea por el coeficiente de fluencia $\varphi(t, t_0)$, ya que no existe ninguna coacción a la libre deformación del hormigón. Cada una de las fibras de hormigón, en que se divide la sección, se deforma proporcionalmente a su deformación instantánea.

Las siguientes expresiones permiten determinar los incrementos de deformación y curvatura en cada instante de tiempo t para secciones en que la tensión permanece constante en el tiempo.

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) \quad [2.12]$$

$$\Delta\psi(t) = \psi(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) \quad [2.13]$$

En hormigón armado, la evolución del plano de deformaciones con el tiempo (en un intervalo entre t_0 y t) deja de ser proporcional a $\varphi(t, t_0)$.

Al encontrarse la sección sin fisurar, fase elástica, la sección completa se ve sometida a los fenómenos diferidos de fluencia y retracción.

La presencia de armadura en la sección supone una coacción a la libre deformación de ésta. La adherencia entre hormigón y acero, compatibiliza la diferencia de deformaciones diferidas existentes, hecho que conlleva una redistribución tensional entre ambos materiales. Se generan así unos esfuerzos internos autoequilibrados (N_0, M_0) que deben ser considerados en la determinación del plano de deformaciones final de la sección.

$$\begin{bmatrix} N_{ext} \\ M_{ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & EY \\ EY & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m(t_0) \\ \psi(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_0 \\ M_0 \end{bmatrix} \quad [2.14]$$

En la siguiente figura se detallan de manera simplificada los mecanismos de redistribución de esfuerzos asociados a la fluencia y retracción de una sección de hormigón armado no fisurada. La presencia de armadura reduce el valor de la curvatura $\Psi(t)$, siendo la cota superior de dicha curvatura la asociada a la de la sección fluyendo libremente.

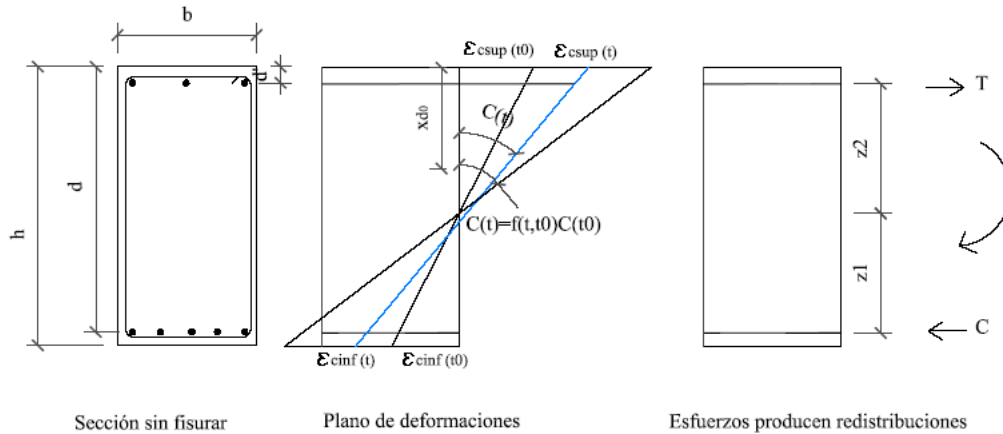


Figura 8 Variación plano de deformaciones y redistribución esfuerzos por fluencia.

La coacción frente a las deformaciones impuestas producida por la armadura genera unas tensiones en la misma que, integradas, dan lugar a unos esfuerzos “ficticios” (N_0 y M_0) que hay que introducir, con signo contrario, como acciones sobre la sección, para mantener el equilibrio con las fuerzas exteriores. Para el caso de armadura simétrica ($EY=0$) se obtienen:

$$M_{ext} = EI \cdot \psi(t_0) + M_0 \quad [2.15]$$

$$M_0 = -\Delta \varepsilon_{cr}(d) \cdot E_s \cdot A_s \cdot z \quad [2.16]$$

Además, cuando a nivel estructura se producen deformaciones diferidas incompatibles con los apoyos, se generan esfuerzos hiperestáticos que se superponen a los isostáticos a lo largo del tiempo.

La redistribución de esfuerzos conlleva una variación en el tiempo de la tensión en el hormigón y acero no siendo de aplicación en éstos casos la expresión 2.6, ya que el historial de tensiones no es nulo.

Como se vio en el apartado 2.1 el método del coeficiente de envejecimiento permite evaluar el incremento de deformación en el hormigón mediante un solo paso

de tiempo, considerando que todo el incremento de tensión se produce en el intervalo (t_0, t_{eq}) .

$$\Delta\varepsilon(t_0, t) = \varepsilon(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) + \frac{1 + \chi\varphi(t, t_0)}{E(t_0)} \Delta\sigma(t, t_0) + \varepsilon sh(t, t_0) \quad [2.17]$$

La tradición existente en el cálculo de flechas diferidas de diversas normativas, como se verá en apartados posteriores, no contempla la restricción de la armadura en el cálculo de la flecha diferida para piezas no fisuradas ni tampoco el posible incremento de curvatura producido por la retracción, siendo de aplicación las ecuaciones 2.12 y 2.13.

Mediante modelos de análisis paso a paso en el tiempo, como es el programa de análisis no lineal CONS, descrito en el apartado 2.5 de éste mismo capítulo, se realiza un estudio comparativo para evaluar la importancia de las redistribuciones tensionales en las secciones no fisuradas de hormigón armado en función de la cuantía de armado.

La Figura 9 muestra la evolución del plano de deformaciones en el tiempo, entre $t_0=7$ días y $t=10.000$ días, por efecto de la fluencia en dos secciones de hormigón armado HA-30 no fisuradas de 0,60 metros de canto y 0,30 metros de ancho con cuantías de armado a tracción $\rho=0,6\%$ y $\rho=1,5\%$ respectivamente y relaciones entre cuantías de armado a tracción y a compresión $\rho'/\rho=0$ y $\rho'/\rho=1$.

Los tres planos graficados son:

- Plano de deformaciones a t_0 obtenido del CONS, plano de color azul.
- Plano de deformaciones a t_{10000} obtenido del CONS, color rojo.
- Plano de deformaciones a t_{10000} considerando la ecuación (2.14), es decir, despreciando las redistribuciones tensionales existentes por presencia de armadura, línea discontinua de color negro.

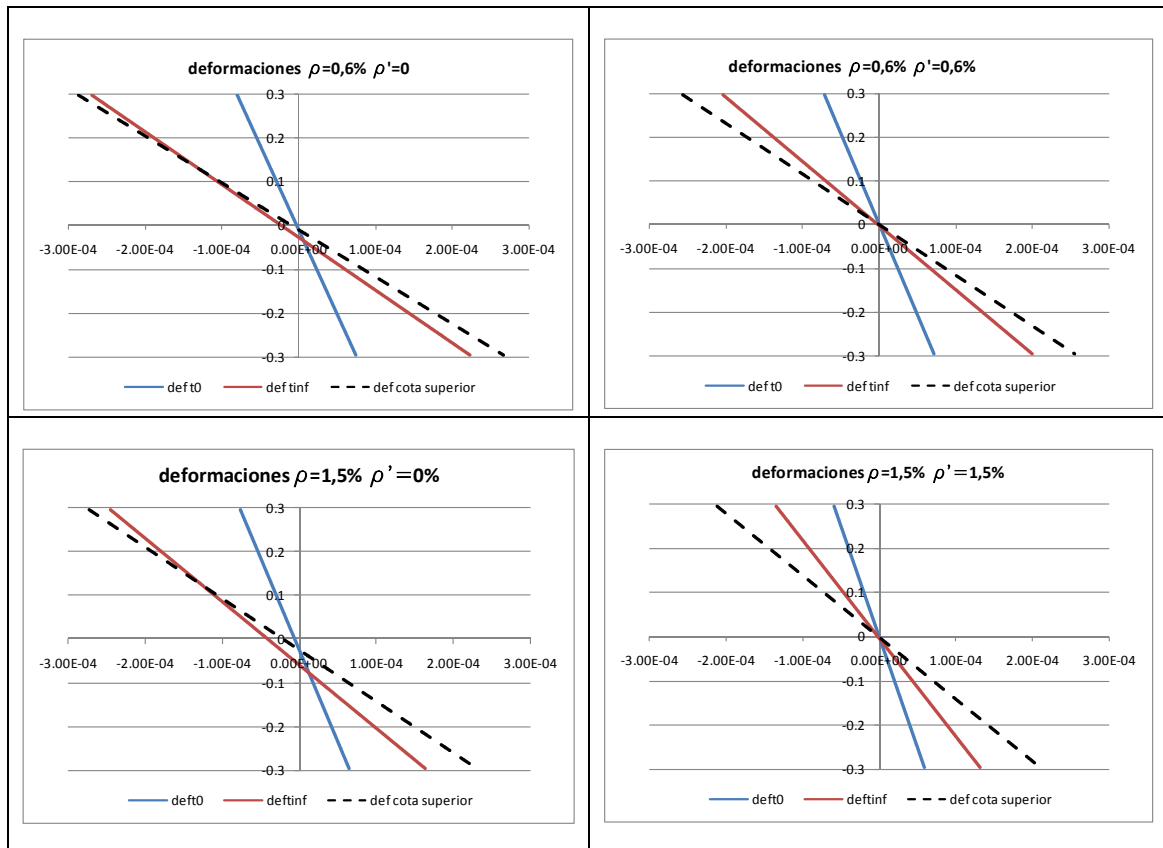


Figura 9 Evolución del plano de deformaciones en una sección de HA-30 de h=0.60 y b=0.30, t0=7 días, t=10.000 días, HR60%. Sin retracción. $\varphi(7,10.000)=2.6$

En la siguiente tabla se detallan las curvaturas instantáneas, las curvaturas diferidas, suponiendo que no existe coacción a la libre deformación del hormigón por parte de la armadura, y las curvaturas diferidas considerando que existe redistribución de esfuerzos, de los casos analizados.

	$\rho=0.006 \rho'=0$	$\rho=0.006 \rho'=\rho$	$\rho=0.015 \rho'=\rho$	$\rho=0.015 \rho'=\rho$
Curvatura inst CONS $\Psi(t_0)$	2.57E-04	2.38E-04	2.34E-04	1.96E-04
Curvatura diferida CONS $\Psi(t)$	8.21E-04	6.72E-04	6.81E-04	4.43E-04
Curvatura diferida $\Psi(t)=\Psi(t_0)\cdot(1+\varphi(t,t_0))$	9.22E-04	8.52E-04	8.39E-04	7.02E-04
Variación Ψ %	12.37%	26.85%	23.28%	58.50%

Tabla 7 Sin retracción

Con carácter general, al considerar la coacción a la libre deformación del hormigón que ejerce la armadura, los valores de las curvaturas a t_{10000} son menores que los obtenidos al no considerar la presencia de armadura. Para cuantías bajas de armadura las diferencias son del 15% mientras que en secciones fuertemente armadas las divergencias pueden llegar a ser de un 60%.

Otra observación a extraer de la Figura 9, al considerar el efecto de coacción que la armadura ejerce (plano de color rojo), es como para disposiciones simétricas de armado la posición de la fibra neutra se mantiene constante en el intervalo de tiempo

(t_0 , t_{10000}), mientras que para disposiciones asimétricas la fibra neutra tiende a desplazarse hacia la zona con mayor cuantía.

Los incrementos de curvatura por fluencia, dependen de la cuantía de armadura dispuesta a compresión y tracción, así como del valor del coeficiente de fluencia, siendo generalmente superiores al 150%. En presencia de poca armadura el incremento puede llegar a ser de un 250% mientras que en piezas fuertemente armadas el incremento es del orden del 100%.

Se realiza el mismo análisis para secciones sometidas a retracción y fluencia. La retracción induce sobre el elemento una deformación de acortamiento de carácter atensional que se debe sumar a la deformación obtenida por fluencia.

Con carácter general en una sección sometida simplemente al fenómeno de retracción, el hormigón tiende a traccionarse y las armaduras a comprimirse. Adicionalmente en casos con fuerte asimetría se debe considerar el incremento de curvatura que la retracción introduce.

En las siguientes figuras se vuelven a comparar los tres planos de deformaciones definidos en la Figura 9.

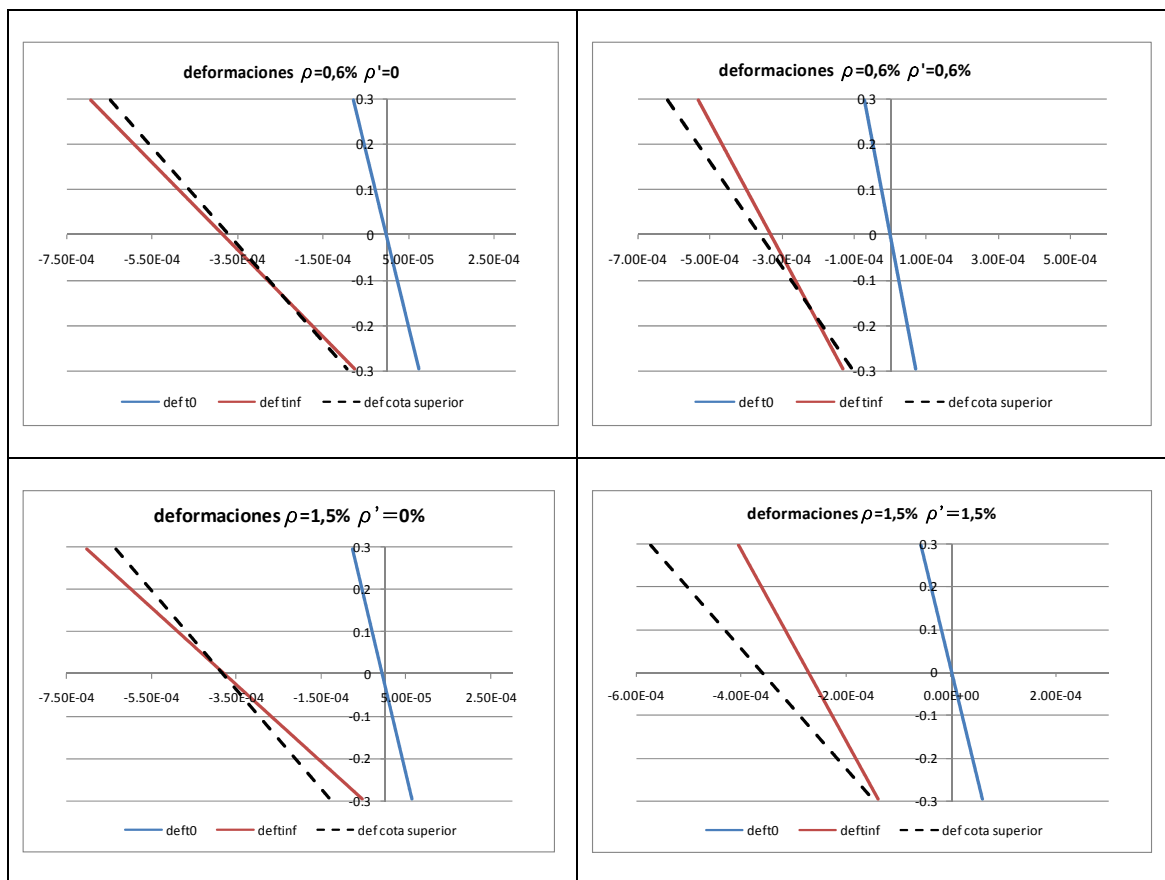


Figura 10 Evolución del plano de deformaciones en una sección de HA-30 de $h=0.60$ y $b=0.30$, $t_0=7$ días, $t=10.000$ días, HR60%. Con retracción. $\varphi(7,10.000)=2.6$, $\epsilon_{sh}=-3.6 \cdot 10^{-4}$ mm/ml

En la Tabla 8 se realiza un estudio comparativo de las curvaturas obtenidas en la Figura 10 añadiendo dos casos adicionales correspondientes a $\rho'/\rho= 0.3$.

	$\rho=0.006$ $\rho'/\rho=0$	$\rho=0.006$ $\rho'/\rho=0$	$\rho=0.006$ $\rho'/\rho=0.3(*)$	$\rho=0.015$ $\rho'/\rho=0$	$\rho=0.015$ $\rho'/\rho=0.3(*)$	$\rho=0.015$ $\rho'/\rho=1$
Curvatura inst CONS	2.57E-04	2.38E-04	2.51E-04	2.34E-	2.20E-04	1.96E-04
Curvatura dif CONS (fluencia+retraccion)	1.03E-03	6.72E-04	9.03E-04	1.08E-	8.16E-04	4.43E-04
Curvatura diferida $\Psi(t)=\Psi(t_0)\cdot\varphi(t,t_0)$	9.22E-04	8.52E-03	9.00E-04	8.39E-	7.89E-04	7.02E-03
Variación Ψ %	-10.27%	26.85%	-0.34%	-22.36%	-3.22%	58.50%

Tabla 8 Con retracción

(*) Relaciones de ρ'/ρ mínimas según EHE-08 en forjados unidireccionales (tabla 42.3.5)

De la Tabla 8 se extraen las siguientes conclusiones: dado que no existe fisuración al existir simetría en la disposición del armado la retracción no induce un incremento de curvatura; en cambio si la sección presenta asimetría de armado, la retracción produce una curvatura generalmente del mismo signo que el producido por las cargas para la cual la sección fue diseñada, incrementándose la curvatura diferida de la sección.

Como se dijo anteriormente, la mayoría de las normativas desprecian las armaduras en el cálculo de las deformaciones diferidas cuando no hay fisuración. De este modo, la siguiente expresión proporciona el paso de flecha instantánea a diferida en secciones no fisuradas según el Código Modelo del 90, EHE-08, EC-2 y diversas normativas de vigente aplicación.

$$y_{dif}(t) = y_{ins}(1 + \varphi(t, t_0)) \quad [2.18]$$

Ésta simplificación proporciona de manera general resultados del lado de la seguridad, incluso dando soluciones muy conservadoras en secciones con cuantías elevadas armadas simétricamente. En cambio en secciones singulares que presenten fuerte asimetría de armado, y en función del valor de la deformación de retracción, ϵ_{sh} , la aplicación de dichas formulaciones podría dejar del lado de la inseguridad.

2.2.2 Fase fisurada en flexión simple

2.2.2.1 Comportamiento instantáneo

Las hipótesis de trabajo adoptadas para el cálculo de las deformaciones instantáneas de una sección fisurada, son las de considerar que el hormigón no tiene resistencia a tracción (ver ecuación constitutiva) y la de que secciones planas han de permanecer planas una vez deformadas.

Al fisurar, el hormigón libera sus tensiones produciéndose un aumento de la tensión en el acero en la sección dónde se produce la fisura, para mantener el equilibrio de fuerzas y momentos interiores y exteriores. En secciones fisuradas

flectadas la parte de hormigón no fisurada trabaja comprimida y la armadura absorbe todas las tracciones.

La fisuración del hormigón implica una pérdida de rigidez de la sección, quedando la sección fisurada caracterizada por unas nuevas propiedades mecánicas.

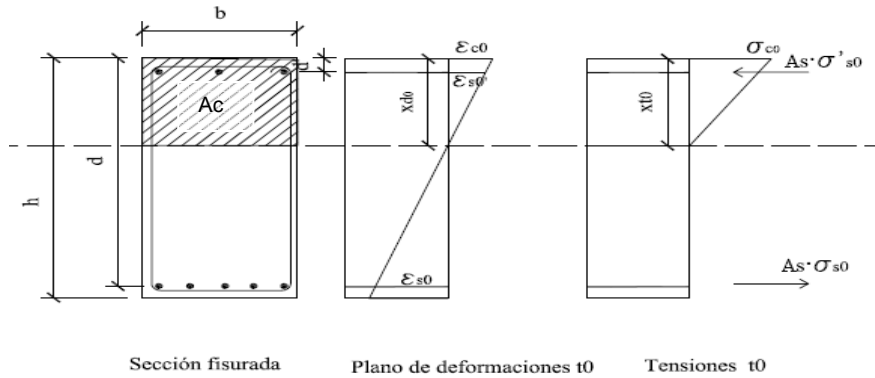


Figura 11 Plano de deformaciones y tensiones instantáneas en una sección fisurada.

La nueva posición de la fibra neutra mecánica instantánea, en secciones fisuradas sometidas a flexión simple, se obtiene a partir de establecer el equilibrio de esfuerzos y compatibilidad de deformaciones sobre una sección constituida por una área de hormigón A_c , en compresión, y las armaduras A'_s y A_s . La siguiente expresión es válida para secciones rectangulares y en T cuando la cabeza de compresiones se sitúa dentro de la cabeza de ésta.

$$\frac{x}{d} = \alpha \rho \left(1 + \frac{\rho'}{\rho} \right) \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \left(1 + \frac{\rho' d'}{\rho d} \right)}{\alpha \rho \left(1 + \frac{\rho'}{\rho} \right)^2}} \right) \quad [2.19]$$

Queda implícito en la ecuación la independencia de la posición de la fibra neutra con el momento de sollicitación. No es así para secciones flexocomprimidas donde existe una variación de la posición de la fibra neutra en función del par (N,M).

De forma simplificada, la siguiente expresión aproxima a la general con un error estimado inferior al 5%, para secciones rectangulares o asimilables.

$$\frac{x_0}{d} = \frac{0.18 + 1.8 \alpha \rho}{1 + \frac{\rho' d'}{\rho d}} \quad [2.20]$$

En el gráfico siguiente se analiza la variación de la posición de la fibra neutra en función de las cuantías de armado en una sección de ancho $b=0.3$ y canto $h=0.50$ m. Al aumentar la cuantía de tracción la zona comprimida de hormigón crece mientras que al aumentar la cuantía de compresión ésta disminuye sensiblemente.

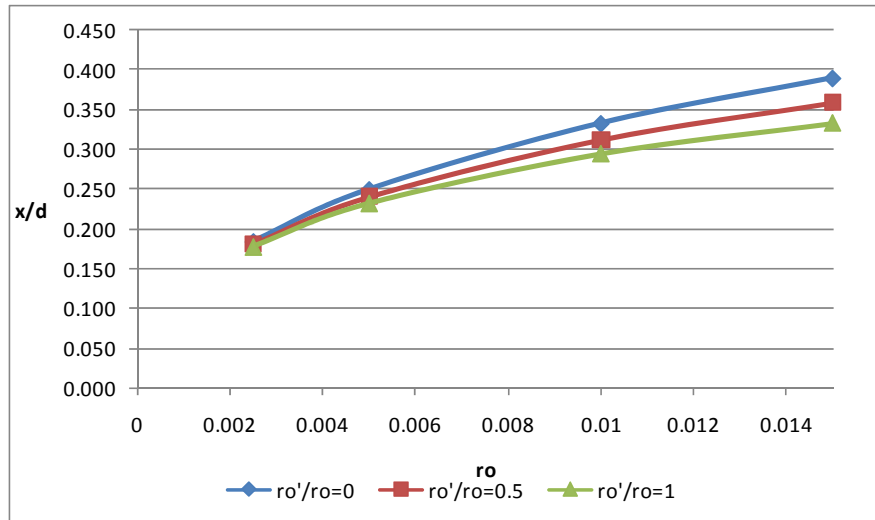


Figura 12 Variación de la posición de la fibra neutra en función del armado de la sección fisurada

Una vez determinada la posición de la fibra neutra, el cálculo del plano de deformaciones instantáneas de una sección cualquiera de hormigón armado fisurada, sometida a flexión simple, queda definido por la expresión 2.21 considerando $N=0$. Para el caso de sección fisurada las propiedades mecánicas de la sección, se corresponden con el área (A_{cr}), inercia (I_{cr}) y momento estático (Y_{cr}) de la nueva sección fisurada homogeneizada. El módulo de elasticidad E sigue siendo el módulo de elasticidad instantáneo del hormigón.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA_{cr} & EY_{cr} \\ EY_{cr} & EI_{cr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m(t_0) \\ \psi(t_0) \end{bmatrix} \quad [2.21]$$

Conocida la deformación de cada una de las fibras de la sección y entrando dentro de la ecuación constitutiva del hormigón se obtienen las tensiones en hormigón y acero.

2.2.2.1 Comportamiento diferido

A diferencia de las secciones sin fisurar donde toda la sección fluye y retrae, la fluencia y retracción en una sección fisurada afectan sólo al área de hormigón en compresión (no se considera la resistencia a tracción del hormigón).

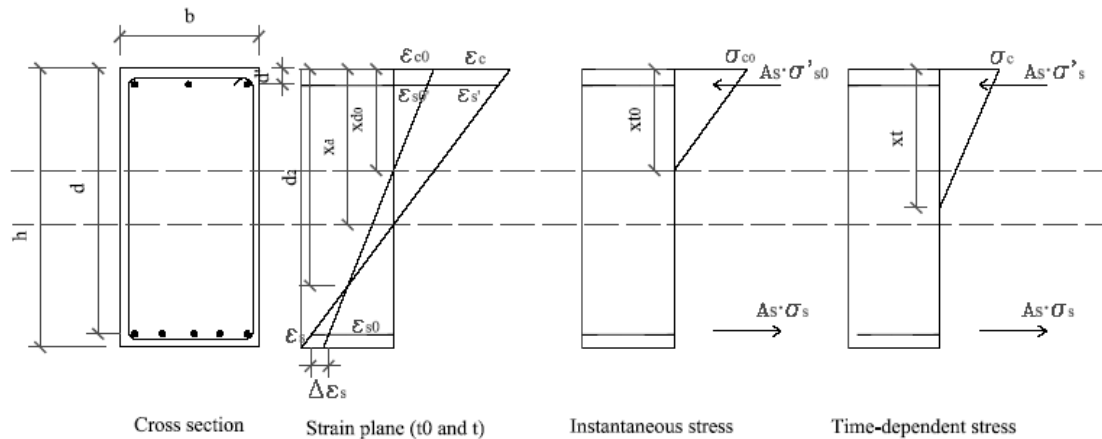


Figura 13 Plano de deformaciones y tensiones instantáneas y diferidas en una sección fisurada.

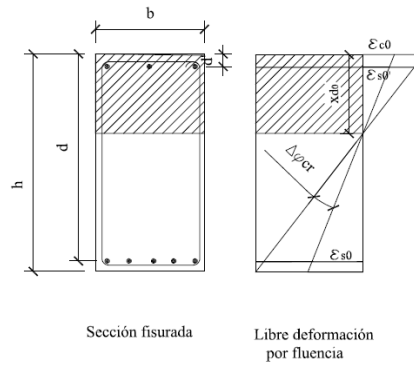
Al estado tensional producido por las cargas exteriores (estado tensional en t_0) se debe sumar el estado tensional producido por las redistribuciones tensionales generadas por las deformaciones diferidas de retracción y fluencia, obteniéndose generalmente una evolución del plano de tensiones y deformaciones como el representado en Figura 13. Estas redistribuciones tensionales sumadas al histórico de tensiones de la sección deben verificar la hipótesis de planeidad de Bernoulli.

La correcta comprensión de los mecanismos de redistribuciones tensionales, que la fluencia y retracción generan sobre la sección de hormigón fisurada, es imprescindible para entender la evolución de la sección con el tiempo, así como para abordar posteriormente un estudio analítico que permita extraer una formulación simplificada, que recoja los parámetros fundamentales del comportamiento mecánico de la sección en el tiempo, entre otros.

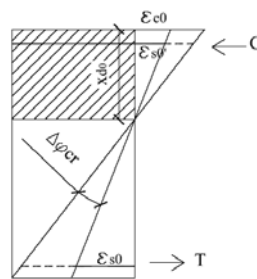
Redistribuciones tensionales por fluencia en una sección de hormigón armado fisurada.

En una sección de hormigón fisurada sólo la parte de hormigón comprimida (parte absorbe las compresiones) fluye. La obtención de los efectos estructurales que la fluencia introduce en una sección de hormigón fisurada en un intervalo de tiempo (t_0, t) se puede abordar mediante los siguientes cuatro pasos.

1. Se deja fluir la sección de hormigón libremente, esto es $\Delta\epsilon(t) = \epsilon(t_0) \cdot \varphi(t, t_0)$.



2. Se impone compatibilidad de deformaciones entre hormigón y acero. Para verificar que $\Delta\epsilon(t)_c = \Delta\epsilon(t)_s$ debe imponerse sobre la barra un esfuerzo de tracción o compresión según indica la figura.

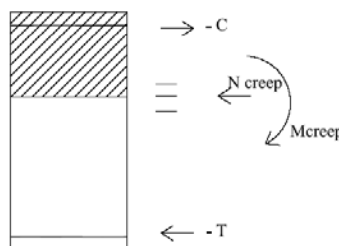


$$C = A'_s \cdot E_s \cdot \Delta\epsilon_{cr}(d')$$

$$T = A_s \cdot E_s \cdot \Delta\epsilon_{cr2}(d)$$

Compatibilidad de deformaciones

3. Se restituye el equilibrio aplicando los hipotéticos esfuerzos obtenidos en el apartado anterior sobre la sección de hormigón armado fisurada homogeneizada pero cambiados de signo.



$$N_{cr} = -C + T$$

$$M_{cr} = C \cdot z_1 + T \cdot z_2$$

Restitución del equilibrio

4. Se obtienen las tensiones sobre hormigón y acero. Las tensiones sobre el hormigón serán las obtenidas de combinar las sollicitaciones externas (en éste caso momento flector positivo) con el par de esfuerzos (N_{cr} , M_{cr}), mientras que para obtener las tensiones en el acero además se deben sumar las tensiones que los axiles C y T inducen.

Como resultas, el fenómeno de fluencia acaba produciendo una variación de la posición de la fibra neutra, que para el caso de flexión simple positiva se traduce en un movimiento hacia la parte inferior de la sección, motivado por la aparición gradual de

los esfuerzos autoequilibrados (N_{cr} y M_{cr}) que tienden a descomprimir la fibra superior del hormigón y a comprimir fibras anteriormente traccionadas Figura 14. Generalmente esta variación de la fibra neutra es del orden de $1.3 x_0/d$ e implica que el área de hormigón en compresión también varía en el intervalo de $t-t_0$.

Respecto a la armadura a compresión (A'_s), ésta aumenta su compresión mientras que la armadura traccionada (A_s) tiende a traccionarse ligeramente ya que generalmente el momento M_{cr} compensa la tracción del paso 2.

Si se representan gráficamente estas observaciones se puede comprobar, Figura 13, como la sección al fluir no gira respecto de la fibra neutra instantánea si no que el punto de giro se encuentra próximo a la armadura traccionada.

A modo de ejemplo se analiza mediante el programa CONS, una sección rectangular de hormigón armado HA-25 de $h=0.50$ m de canto y $b=0.30$ m de ancho con unas cuantías de armadura $\rho=0.010$ y $\rho'=0.005$, sometida a un momento flector de $75 \text{ KN}\cdot\text{m}$, mayor que el de fisuración, y se deja fluir en el tiempo $HR=60\%$.

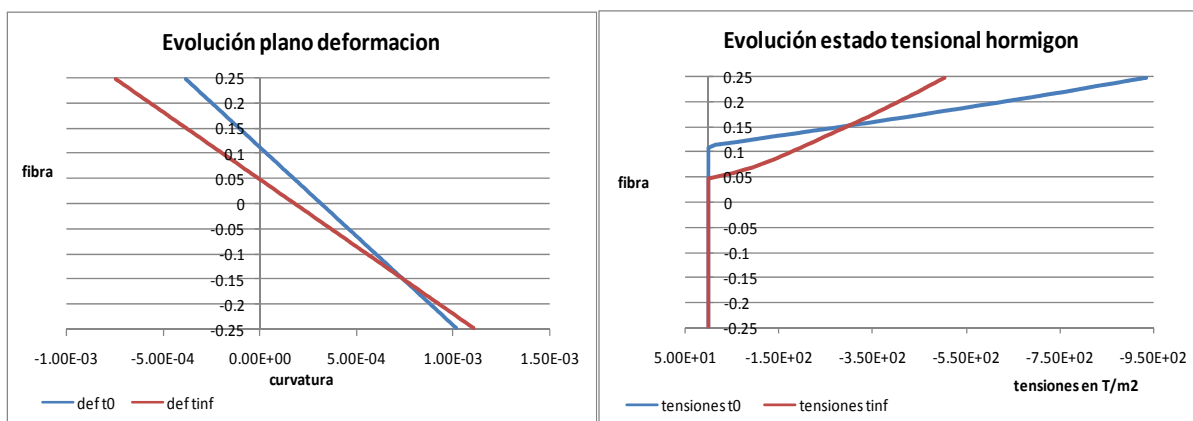


Figura 14 Evolución plano de deformaciones y tensiones en una sección de $b=0,3$ $h=0,50$ y $\rho=0,010$ y $\rho'=0'005$ debido a la fluencia ($HR=60\%$)

Las variaciones tensiones en las armaduras A'_s y A_s son:

	$\sigma(t_0)$	$\sigma(t_{inf})$	$\Delta\sigma$	
A's	-38 MPa	-89 MPa	-131.44%	Más comprimida
A_s	135 MPa	142 MPa	4.71%	Más traccionada

Tabla 9 Resdistribuciones tensionales por fluencia si $\rho=0.010$

Analizando la misma sección modificando solamente la cuantía a tracción, siendo el valor de $\rho=0.015$.

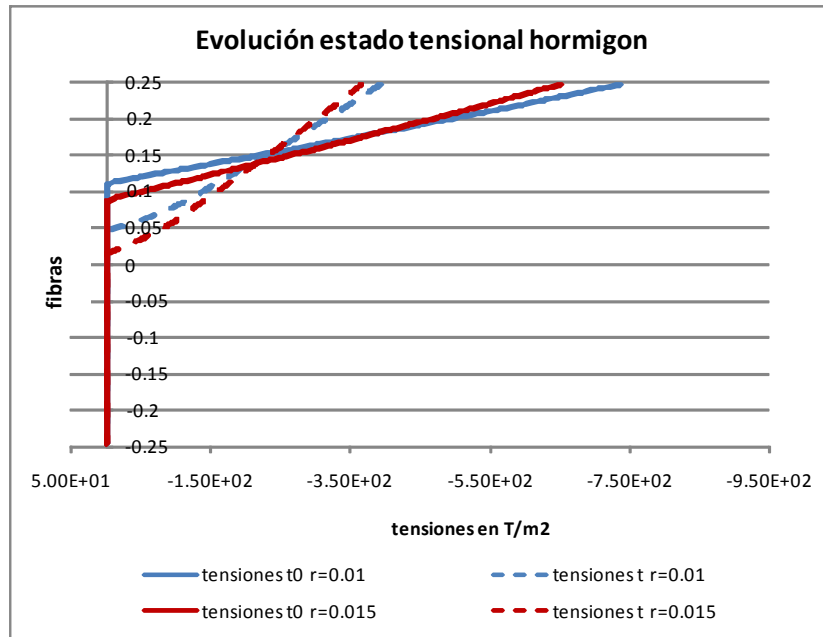


Figura 15 Evolución plano de deformaciones y tensiones en una sección de $b=0,3$ $h=0,50$ en función de los valores de cuantía a tracción

$\rho=0.015$	$\sigma(t0)$	$\sigma(tinf)$	$\Delta\sigma$	
A's	-36 MPa	-84 MPa	-133%	Más comprimida
As	94 MPa	99 MPa	5.07%	Más traccionada

Tabla 10 Resdistribuciones tensionales por fluencia si $\rho=0.015$

Del análisis se observa como la posición de la fibra neutra fisurada depende de la cuantía de armadura dispuesta. Las redistribuciones tensionales son sensiblemente mayores para $\rho=0.015$, y como la posición del punto de giro de la sección al fluir se sitúa cerca de la armadura traccionada.

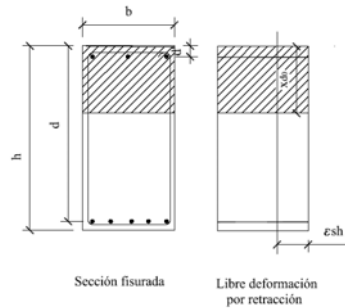
En el apartado referente al estudio paramétrico, capítulo 3, se analizan con más detalle la influencia de las cuantías de armado en las deformaciones diferidas.

Redistribuciones tensionales por retracción en una sección de hormigón armado fisurada.

La retracción afecta la parte de hormigón no fisurada generando una deformación impuesta de acortamiento de carácter atensional.

A modo resumido los cuatro pasos para obtener el efecto de las redistribuciones por retracción, en una sección fisurada, son:

1. Libre acortamiento del hormigón

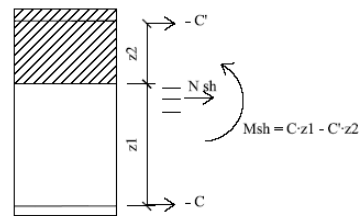


2. Restitución de la compatibilidad de deformaciones. Aparición de unos hipotéticos esfuerzos axiales sobre el acero de valor :

$$C' = A'_s \cdot E_s \cdot \Delta \epsilon_{sh}$$

$$C = A_s \cdot E_s \cdot \Delta \epsilon_{sh}$$

3. Restitución del equilibrio seccional



Restitución del equilibrio

4. Obtención del estado tensional, siguiendo los mismos criterios que para la fluencia. Para piezas flectadas fisuradas el M_{sh} tiende a tener el sentido representado ya que generalmente la cuantía a tracción supera a la de compresión y el brazo $z_1 > z_2$.

Para ilustrar este fenómeno, se analizan mediante el programa CONS dos secciones de hormigón armado HA-25 ($h=0.50$ m de canto y $b=0.30$ m de ancho) con simetría y asimetría de armado no cargadas para no acoplar los fenómenos de fluencia y retracción, y la dejamos retraer (HR=60%). Los resultados se observan en la siguiente figura:

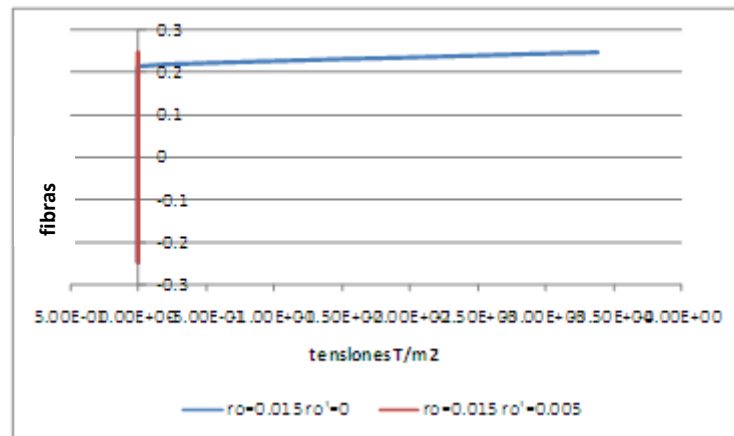


Figura 16 Redistribuciones tensionales en el hormigón por retracción en una sección de $b=0.3$ y $h=0.5$ y $\rho=0.015$ si $\rho'=0$ y $\rho'=0.005$.

Para secciones con armado asimétrico parte de la sección queda comprimida por efecto del momento que la asimetría de armado introduce. Al disponer una cuantía mínima de armadura en la parte superior la sección pasa a quedar totalmente fisurada.

Variación del plano de deformaciones producido por las redistribuciones tensionales de fluencia y retracción.

Fluencia y retracción implican redistribuciones a nivel seccional generalmente de carácter complementario. Mientras que a causa de las redistribuciones por fluencia la fibra neutra de la sección tiende a bajar, la retracción introduce en la sección un axil de tracción y un momento (normalmente de igual signo al que las cargas gravitatorias producen sobre la sección) que pueden incluso acabar traccionando la sección en su totalidad.

El comportamiento diferido de una sección ante fluencia y retracción supone un acoplamiento de ambos efectos. Dependiendo del valor del coeficiente de fluencia versus el valor de la deformación de retracción o de la cuantía de la armadura a tracción o a compresión, podemos obtener movimientos de la fibra neutra ascendentes o descendentes.

Se demuestra en el estudio paramétrico realizado, en el capítulo 3, que en los casos más habituales el comportamiento diferido de la sección queda gobernado por la fluencia en lugar de la retracción.

El cambio que las deformaciones diferidas introducen en la sección en el intervalo de tiempo (t_0, t) se obtiene con las siguientes expresiones:

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}A_{cr} & \bar{E}Y_{cr} \\ \bar{E}Y_{cr} & \bar{E}I_{cr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_m(t_0) \\ \Delta \psi(t_0) \end{bmatrix} \quad [2.22]$$

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{creep} \\ M_{creep} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{sh} \\ M_{sh} \end{bmatrix} \quad [2.23]$$

Siendo las propiedades seccionales A_{cr} , Y_{cr} e I_{cr} el área, el primer y segundo momento de inercia de la sección homogeneizada en el instante t , y siendo N_{φ} , M_{φ} , N_{sh} y M_{sh} los esfuerzos autoequilibrados que retracción y fluencia introducen sobre el hormigón. Estas propiedades deben ser calculadas con el módulo de deformación ajustado en el tiempo $\bar{E}(t_0, t)$. La utilización del método del coeficiente de envejecimiento, ecuación 2.7, permite considerar la existencia de un historial de cargas variables en el intervalo (t_0, t) , producido por el desarrollo de la fluencia y la retracción en el tiempo, y evaluarlas en un sólo instante t .

$$\bar{E}(t, t_0) = E(t_0) / [1 + \chi \cdot \varphi(t, t_0)] \quad [2.24]$$

Las variaciones de tensión en hormigón y acero se obtienen a partir de los incrementos de deformación calculados con la ecuación 2.22.

$$\Delta\sigma_c(t_0) = \overline{E}_c(t_{0,t}) \cdot (\Delta\varepsilon_m + \Delta\psi \cdot y_c) \quad [2.25]$$

$$\Delta\sigma_s(t_0) = E_s(\Delta\varepsilon_m + \Delta\psi \cdot y_s) \quad [2.26]$$

Siendo y e y_s la posición de las fibras de hormigón y acero respecto de la fibra neutra de la sección fisurada.

En la siguiente figura obtenida mediante el programa CONS, se analiza la variación de posición de la fibra neutra de tensiones y deformaciones en una sección HA-25 de $b=0.3$ y $h=0.5$ con unas cuantías de armadura $\rho=0.005$ y $\rho'=0$ sometida sólo a fluencia y al efecto combinado de fluencia y retracción. La carga externa es un momento positivo de $68 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y la humedad del 60%.

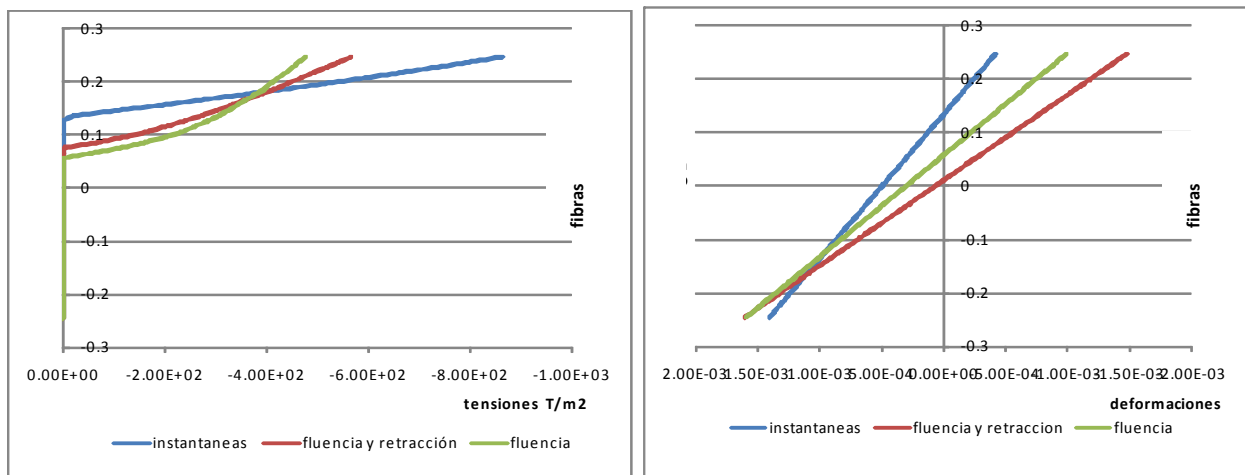


Figura 17 Redistribuciones tensionales en el hormigón por retracción en una sección de $b=0.3$ y $h=0.5$ y $\rho=0.015$ si $\rho'=0$ y $\rho'=0.005$.

Se observa cómo la posición de la fibra neutra de tensiones se desplaza menos al existir retracción y fluencia, por efecto de las redistribuciones que la retracción induce. La fibra neutra de deformaciones sin embargo se sitúa más baja al existir retracción, siendo el incremento de curvatura poco notable respecto al que sólo induce la deformación diferida de fluencia. Esto se debe a las deformaciones de tipo no mecánico asociadas a la retracción que suponen un desplazamiento de compresión ε_{sh} de la fibra neutra.

El comportamiento diferido de la sección al acoplarse retracción y fluencia es variable en función de las cuantías de armado como demuestran los siguientes gráficos, en los que se ha analizado mediante el programa CONS una sección $b=0.30$ y $h=0.50$ con una $\rho=0.01$ y ρ'/ρ variable (0,0.5,1) sometida a un momento de $60 \text{ kN}\cdot\text{m}$ a los 7 días en un ambiente que presenta una humedad relativa del 60%.

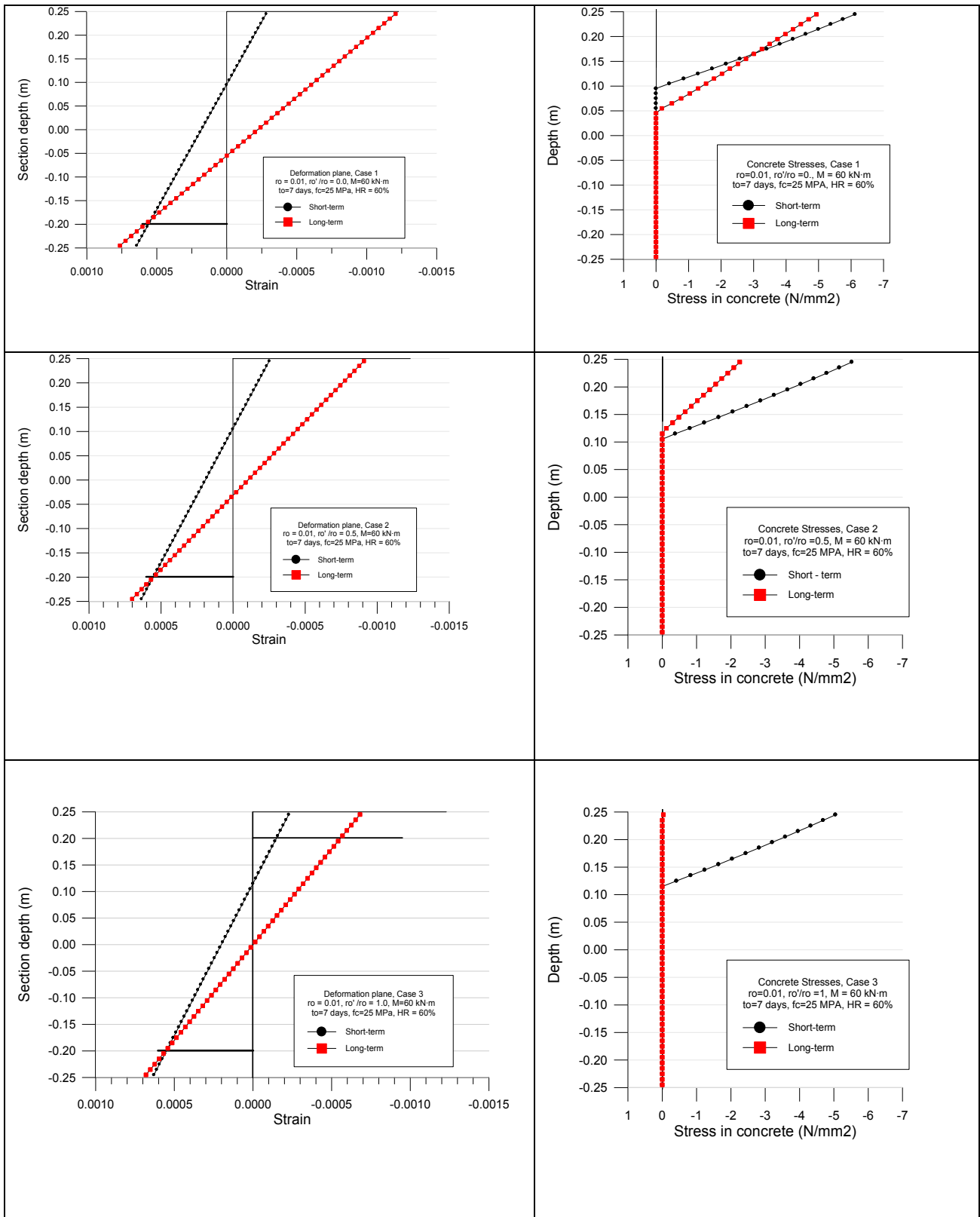


Figura 18 Planos de deformaciones instantáneas y diferidos y tensiones en el hormigón.

La Figura 18 muestra la influencia de la cuantía de armadura a compresión sobre el incremento de curvatura por deformaciones diferidas. Para relaciones p'/p igual a la unidad se obtiene una curvatura diferida menor. La coacción a la libre deformación del hormigón, por parte de la armadura, llega a suponer la aparición de esfuerzos

autoequilibrados que incluso llegan a descomprimir e incluso a fisurar toda la sección, para cuantías de armado elevadas como en el tercer caso de la Figura 18.

2.3 Comportamiento instantáneo y diferido de vigas y losas unidireccionales de hormigón armado.

En los apartados anteriores se ha estudiado el comportamiento instantáneo y diferido de secciones de hormigón armado fisuradas y sin fisurar, como paso previo al cálculo de flechas, analizando los incrementos de curvatura de carácter instantáneo y diferido.

Suponiendo que las deformaciones debidas a cortante y axil son despreciables, las deformaciones producidas por flexión simple, en elementos fisurados y sin fisurar, se obtienen a partir de la integración de las curvaturas de las diversas secciones a lo largo de la longitud del elemento.

En este capítulo se describen los comportamientos instantáneos y diferidos de elementos flectados.

2.3.1 Comportamiento instantáneo

2.3.1.1 Vigas no fisuradas

Los parámetros que controlan las deformaciones instantáneas en una viga de hormigón armado sin fisurar son: el módulo de elasticidad del hormigón (E_c), la inercia de la sección transversal (I), la luz de la pieza, las condiciones de apoyo del elemento y el tipo de carga.

En el caso más simple de elemento de sección constante la siguiente expresión proporciona la curvatura instantánea:

$$y = \frac{K \cdot M_a \cdot l^2}{EI_g} \quad [2.27]$$

siendo k el factor asociado a las condiciones de apoyo y al tipo de carga. Para el caso de viga biapoyada y con carga uniformemente repartida $k=5/48$.

De manera aproximada para el cálculo de las deformaciones instantáneas en vigas no fisuradas se puede utilizar la inercia transversal bruta (I_g), siendo recomendable el uso de la inercia homogeneizada (I_h) sobretodo en secciones con importantes asimetrías de armado.

Para elementos con distribuciones de carga especiales o bien para aquellos elementos con sección variable la deformación se debe obtener integrando dos veces la ley de curvaturas ($y''(x)$) a lo largo de la pieza.

2.3.1.2 Vigas fisuradas

La formación de fisuras en un elemento es un fenómeno discreto, iniciándose al superar el momento de diseño (M_d) al momento de fisuración (M_{cr}) y propagándose en el elemento con el aumento de la carga. En un elemento flectado para un momento dado, superior a M_{cr} se dice que el proceso de fisuración está estabilizado cuando cualquier pequeño aumento de carga se traduce en un ensanchamiento de las fisuras existentes en la zona del elemento donde se ha superado el M_{cr} .

La aparición de fisuras conlleva una pérdida de rigidez en el elemento que supone un incremento de sus flechas. La cuantificación de ésta pérdida depende entre otros parámetros del grado de fisuración. Fenómenos como el *tension stiffening*, rigidización en tracción del hormigón debido a la contribución del hormigón entre fisuras, deben ser considerados en el cálculo de la nueva rigidez de la pieza para no sobreestimar las deformaciones instantáneas.

Como se puede ver en la Figura 19, la sección más débil en una viga fisurada se encuentra justo en la fisura, siendo la rigidez de esta sección la rigidez fisurada calculada en el apartado 2.2.2. El hormigón situado entre dos fisuras colabora resistiendo tracciones, gracias al mecanismo de adherencia existente entre hormigón y acero. La rigidez de la viga pasa a ser una rigidez promediada entre las rigideces brutas y fisuradas del elemento.

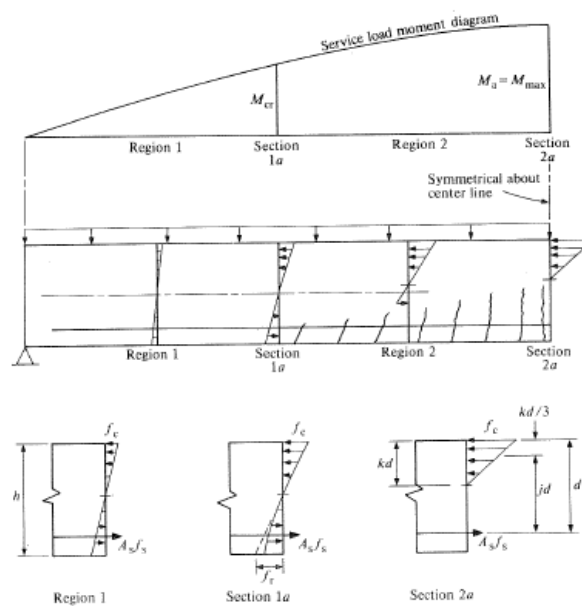


Figura 19 Diversas secciones en una viga de hormigón armado fisurada. [9]

Comportamiento de elementos fisurados sometidos a flexión.

En un elemento de hormigón armado de sección constante, sometido a momento flector de valor superior al momento de fisuración de la sección, existen secciones fisuradas y no fisuradas.

En una sección no fisurada existe compatibilidad de deformaciones entre hormigón y acero ($\varepsilon_s = \varepsilon_c$).

En las secciones transversales fisuradas, al liberar el hormigón sus tracciones se produce un incremento de tracción importante sobre la armadura que será la encargada de transmitir dichas tensiones de tracción. El repentino incremento de tracción se traduce en desplazamientos relativos diferentes entre el acero y del hormigón entre dos fisuras consecutivas.

La base del mecanismo del efecto de contribución del hormigón entre fisuras, *tension stiffening*, es la transferencia de parte del esfuerzo de tracción de las armaduras de la sección fisurada, al hormigón en tracción, por las tensiones de adherencia generadas al existir desplazamientos relativos entre los dos materiales.

Aunque el modelo que mejor representa el fenómeno del *tension stiffening* es el de un tirante de hormigón armado sometido a un aumento paulatino de tracción, se analizara un elemento sometido a flexión pura por ser más representativo del estudio llevado a cabo.

En la siguiente figura se esquematiza el comportamiento en servicio de una viga sometida a un momento flector de valor $M > M_{cr}$. Se observa como la fisuración provoca una variación de la posición de la fibra neutra entre una sección fisura y otra sin fisurar, así como una modificación de las propiedades mecánicas de las secciones a lo largo del elemento.

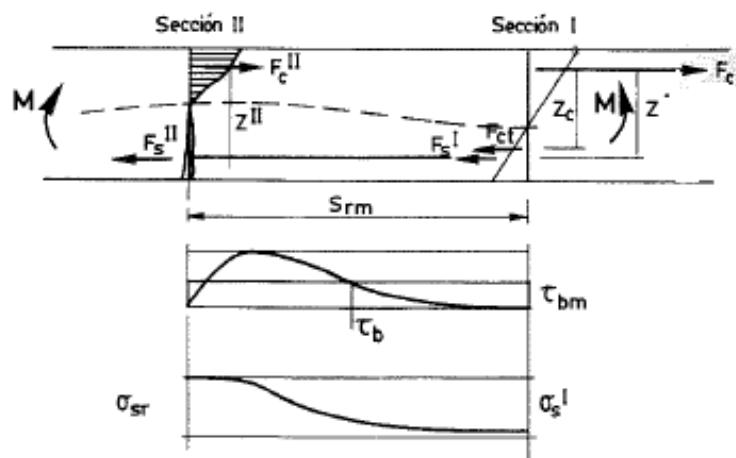


Figura 20 Tramo de viga de hormigón armado sometida a momento constante.

Cuando $\sigma_c = f_{ctk}$ se forma la primera fisura y toda la tracción del hormigón pasa a ser absorbida por el acero. El incremento de tensión de la barra supone un incremento de deformación elevado que abre la fisura. Al tratarse de un elemento y no de una sección aislada, el aumento de deformación en el acero se ve parcialmente impedido por las secciones adyacentes no fisuradas impidiendo que se genere una fisura de ancho importante.

La ecuación que define la distancia l_{rm} , longitud de transferencia necesaria, se obtiene de plantear equilibrio entre tensiones y esfuerzos entre una sección fisurada y otra próxima sin fisurar, considerando la aparición de tensiones tangenciales de adherencia entre ellas. Estas tensiones de adherencia son variables a lo largo de la longitud de reparto y dependen de diversas variables. De manera simplificada se considera una tensión de adherencia media τ_{bm} :

$$\sigma_{II} \cdot As - \sum u \cdot l_{rm} \cdot \tau_{bm} = \sigma_I \cdot As \quad [2.28]$$

$$\sigma_{II} \cdot As \cdot z_{II} = \sigma_I \cdot As \cdot z_I + A_{ceff} \cdot \sigma_{ctm} \cdot z_c \quad [2.29]$$

siendo σ_{II} la tensión en el acero considerando sección fisurada y σ_I la tensión en el acero en una sección sin fisurar a una distancia $l_{rm}/2$. Un parámetro importante es la cuantificación del área de hormigón en tracción (A_{ceff}) a considerar en la ecuación 2.29. Ensayos fotoeléctricos demuestran cómo en la fase de formación de fisuras el área de hormigón traccionado entre fisuras varía, siendo el reparto inicialmente lineal hasta anularse en el eje neutro. Cuando se alcanza la fisuración estabilizada las isolíneas de tracciones no se abren tanto, quedando concentradas cerca de la barra. El área A_{ceff} depende del recubrimiento geométrico de la armadura y del espaciamiento entre barras.

Combinando las expresiones 2.28 y 2.29 se obtiene la expresión que proporciona la separación mínima entre fisuras:

$$l_{rm} = \frac{K \cdot \phi \cdot f_{ct}}{4 \cdot \tau_{bm} \cdot \rho_{eff}} \quad [2.30]$$

siendo σ_{II} la tensión en el acero considerando sección fisurada y σ_I la tensión en el acero en una sección sin fisurar a una distancia l_{rm} .

De la expresión anterior se observa como para pequeñas cuantías geométricas relativas del área eficaz a tracción (ρ_{eff}) la separación entre fisuras tiende a ser grande mientras que para cuantías elevadas la separación l_{rm} disminuye. Otra observación extraída de la formulación anterior es que para la misma cuantía diámetros de armadura mayores suponen separaciones mayores.

Inicialmente, para valores próximos al momento de fisuración, la fisuración no se encuentra estabilizada siendo la separación entre fisuras superior a la longitud de transferencia, generándose nuevas fisuras para pequeños incrementos de la carga. Cuando la separación entre fisuras llega a su límite, longitud de transferencia, un incremento de carga no se traduce en una nueva fisura si no en un ensanchamiento de las existentes. La imposibilidad de transmitir parte de los incrementos de tracción al hormigón traccionado por tensiones tangenciales hace que la fisura aumente, al incrementar la deformación del acero. Se produce un paulatino deterioro de la adherencia hormigón-acero con el aumento del ancho de fisura encontrándose su mínimo al plastificar el acero, momento en que la contribución del hormigón traccionado pasa a ser nula.

La separación media entre fisuras, s_{rm} , puede tomar valores entre l_{rm} y $2l_{rm}$, en función de si el proceso de fisuración está o no estabilizado, siendo el valor admitido

para fisuración estabilizada $s_{sm} = \frac{4}{3} \cdot l_{rm}$

La deformación de la barra traccionada no es constante, siendo $\Delta\varepsilon_s$ la disminución de la deformación por la contribución del hormigón traccionado entre fisuras y ε_s la deformación del acero en la sección fisurada.

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \Delta\varepsilon_s \quad [2.31]$$

Se ha observado experimentalmente que la variación de $\Delta\varepsilon_s$ es tipo hiperbólico con la relación $\sigma_{cr} / \sigma_{s2}$, teniendo como asíntota la rigidez de sección fisurada.

$$\Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon_{s \max} \cdot \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{s2}} \quad [2.32]$$

De la Figura 22 se desprende que el valor máximo de *tension stiffening* se obtiene al formarse la primera fisura.

$$\Delta\varepsilon_{s \max} = \varepsilon_{s2} - \varepsilon_{cr} \approx \varepsilon_{s2} = \frac{\sigma_{s2}}{E_s} \quad [2.33]$$

Operando con las expresiones 2.31, 2.32 y 2.33 se obtiene el valor de la deformación media a partir de la tensión σ_{s2} y la tensión en el acero al producirse la primera fisura σ_{cr} .

$$\varepsilon_{sm} = (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_{s1} + \zeta \cdot \varepsilon_{s2} \quad [2.34]$$

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{s2}} \right)^2 \quad [2.35]$$

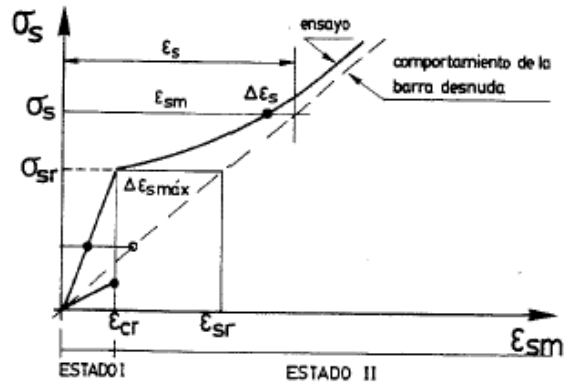


Figura 21 Relación tensión-deformación media acero armado

El siguiente gráfico relaciona el momento aplicado en una viga con la curvatura media considerando el *tension stiffening*.

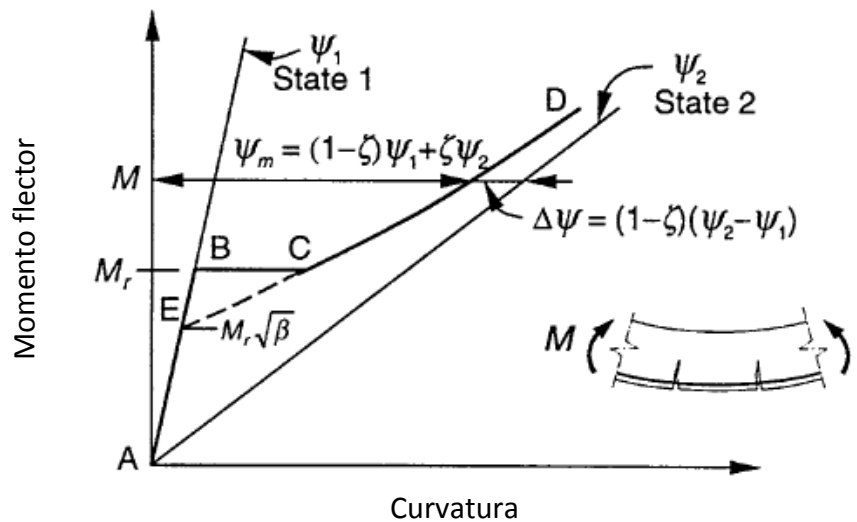


Figura 22 Relación fuerza axial-desplazamiento en una pieza sometida a flexión. [1]

La expresión 2.34 puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\psi_m = (1 - \zeta) \cdot \psi_1 + \zeta \cdot \psi_2 \quad [2.36]$$

$$\zeta = 1 - \left(\frac{\sqrt{\beta} \cdot M_{cr}}{M} \right)^2 = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \quad [2.37]$$

siendo Ψ_m la curvatura media, Ψ_1 la curvatura de la sección no fisurada y Ψ_2 la curvatura de la sección fisurada producida por la aplicación del momento flector M . El momento M_{cr} , momento de fisuración, se obtiene de la sección homogeneizada.

Conocidas las curvaturas Ψ_1 (sección no fisurada) y Ψ_2 (sección fisurada sin considerar hormigón en tracción) el coeficiente ζ permite obtener la curvatura media por interpolación de ellas. Se obtiene así una curvatura media de la sección que considera el efecto de la contribución del hormigón en tracción entre fisuras.

Un aspecto importante es la dependencia del factor de interpolación del nivel de carga de la sección.

Los coeficientes β_1 y β_2 consideran el grado de adherencia de la barra y el tipo de carga aplicada respectivamente. Para barras de alta adherencia el factor β_1 es igual a la unidad mientras que para barras lisas $\beta_1=0.5$. Las cargas de tipo cíclico y de larga duración (incluidas las deformaciones por retracción) afectan a la adherencia del hormigón, siendo β_2 igual a la unidad para cargas instantáneas y β_2 igual a 0.5 para cíclicas y de larga duración.

La justificación del factor β_2 para cargas de larga duración es demostrada entre otros por Bischoff [22]. Supongamos un tirante de hormigón armado sometido a una carga creciente de tracción. El diagrama fuerza axil-deformación media de la barra queda representado en azul. Si al mismo tirante le aplicamos una deformación de retracción antes de aplicar la carga entonces, como se ha visto en el capítulo 2.2.2.1, el acero tiende a comprimirse y el hormigón a traccionarse por compatibilidad de deformaciones. El elemento se ve sometido a una presolicitación de tipo reológico que desplaza la respuesta del tirante (gráfico verde).

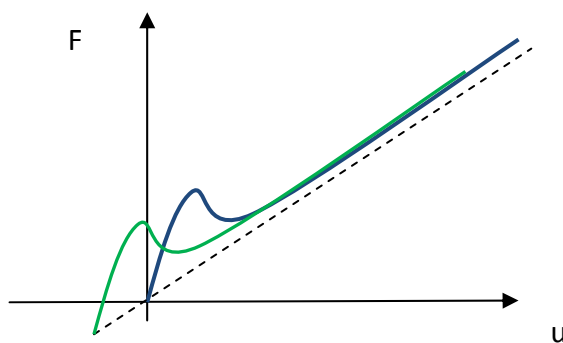


Figura 23 Efecto de la retracción

El segmento AEC de Figura 22 considera el efecto de presolicitaciones de tipo reológico, para estos casos el valor de β_2 es igual a 0,5 reduciendo la contribución por *tension stiffening*.

Las cargas de tipo cíclico también reducen el efecto de rigidización del hormigón en tracción.

Finalmente, y modo de conclusiones, se puede afirmar a partir del estudio realizado por Favre et al.[8], que el factor que gobiernan el *tension stiffening* y por ello la curvatura media Ψ_m en secciones fisuradas es la cuantía de armadura dispuesta a

tracción. La cuantía a compresión también controla la curvatura media pero en menor medida.

Determinación de las flechas instantáneas a partir de curvaturas

Generalmente el cálculo de flechas en elementos flectados se debe realizar a partir de métodos que consideren la variación de la ley de curvaturas medias (Ψ_m) a lo largo del elemento, ya que éste se comporta como un elemento de rigidez variable.

El problema de cálculo de flechas se complica un grado más si la pieza es hiperestática.

Una manera exacta de calcular las deformaciones de cualquier elemento de manera general es a partir de las curvaturas medias (Ψ_m) de las diversas secciones que constituyen la pieza, aplicando métodos como el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) o bien mediante doble integración de curvaturas.

$$F_j D_j = \int \psi M_{ij} dl \quad \text{ó} \quad y = \iint_L \psi dL$$

Conocidas las curvaturas el cálculo de los desplazamientos pasa a ser un problema geométrico.

Ghali en [1] propone como método más efectivo para el cálculo de desplazamientos el *Unit Load Theory*, basado en el Principio de los Trabajos Virtuales.

2.3.2 Comportamiento diferido

2.3.2.1 Vigas no fisuradas

En el capítulo 2.2.1.2, comportamiento diferido de secciones en fase elástica, se demostró como la curvatura diferida de secciones no fisuradas de hormigón armado, dependía de los valores de retracción y fluencia así como del armado de la sección. Para cuantías medias y altas el fenómeno de fluencia supone una modificación de la posición de la fibra neutra de la sección para disposiciones asimétricas de armado, mientras que la retracción puede aumentar la curvatura por efecto de la asimetría. La armadura, en definitiva, ejerce coacciones a la libre deformación del hormigón por retracción y fluencia, generando un estado de tensiones autoequilibradas, que modifican las curvaturas seccionales de la pieza.

Al las deformaciones instantáneas de la pieza se les debe añadir las deformaciones diferidas mediante un cálculo análogo. Conocidos los incrementos de curvatura, $\Delta\Psi_{sm}$, que las deformaciones diferidas introducen en las secciones y mediante los métodos generales descritos, en el apartado anterior, se obtienen los incrementos de desplazamientos diferidos.

Tradicionalmente en la gran mayoría de normativas, en los elementos de hormigón no fisurados, se desprecia el efecto de coacción que la armadura ejerce

sobre el hormigón al querer este fluir o retraer, así como los incrementos de curvatura introducidos por la retracción al existir asimetrías de armado.

2.3.2.2 Vigas fisuradas

Obtenidas las $\Delta\psi_{sm}$ por deformaciones diferidas se procede de la misma manera que para piezas no fisuradas considerando que cualquier elemento de hormigón armado fisurado se comporta como un elemento de rigidez variable.

Se determinan las deformaciones mediante los métodos de doble integración de curvaturas o PTV.

2.4 Cálculos simplificados de flechas. Tratamiento en diferentes normativas.

El diseño de estructuras requiere herramientas versátiles que ajusten al máximo la respuesta real de la pieza sin por ello degenerar en cálculos tediosos.

Los métodos planteados en las diferentes normativas plantean simplificaciones al problema del cálculo de las deformaciones basados en la observación del fenómeno real.

Se analizan los cálculos simplificados de las siguientes normativas: MC-90, EHE-08, EC-2 y ACI-318.

2.4.1 Vigas no fisuradas.

Normativas como el MC-90 o el EC-2 proponen la siguiente expresión para el cálculo de piezas no fisuradas:

$$y_{tot} = y_{inst} + y_{diferida} = y_{inst}(1 + \varphi(t, t_0)) \quad [2.38]$$

Las limitaciones de ésta formulación son la no consideración de las restricciones que la armadura ejerce a la libre deformación de la sección, ni el incremento de curvatura inducido por la retracción.

A modo de ejemplo se consideran cuatro vigas de hormigón armado biapoyadas, de sección $b=0,30$ y $h=0,60$ y $r=50$ mm, sometida a un momento inferior al de fisuración, a la que se deja fluir y retraer en el tiempo. En la Figura 24 se comparan las flechas totales considerando retracción y fluencia y sólo fluencia, obtenidas del programa CONS, con las flechas totales calculadas con la ecuación 2.38.

VIGA	ρ	ρ'/ρ	ϕ	HR (%)	Y_{tot} CONS (creep)	Y_{tot} CONS (sh+creep)	Y_{tot} simplificado	Δy
501	0,006	0	1,76	80	2,58	3,05	2,84	-7,4%
503	0,012	0,5	1,76	80	1,96	2,30	2,50	8%
301	0,006	0	2,54	50	3,13	4,12	3,65	-12,8%
303	0,012	0,5	2,54	50	2,27	2,93	3,20	8,4%

Tabla 11 Datos de vigas de hormigón armado no fisuradas y comparación de flechas totales en mm.

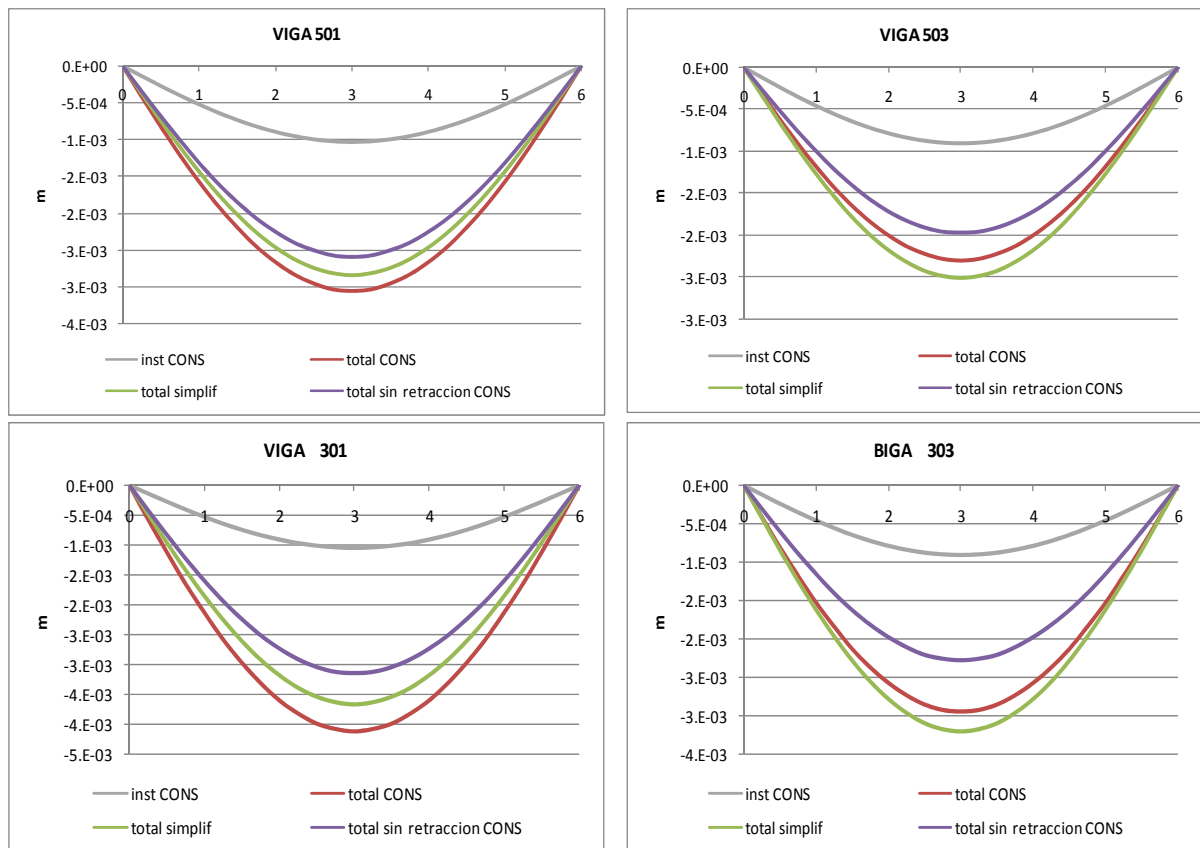


Figura 24 Comparación de flechas en vigas no fisuradas cargadas a t=28 días y con humedades relativas del 80% y 50%, obtenidas mediante el CONS y los métodos de cálculo simplificado.

En la Figura 24 se observa como en todos los casos la flecha simplificada es mayor que la flecha total del CONS sólo considerando fluencia. Sin embargo, al introducir la retracción en el cálculo, en aquellos casos en que no existe cuantía a compresión, la flecha total del análisis numérico es mayor que la flecha total calculada de forma simplificada. Para cuantías de compresión próximas a valores $\rho'=0.5\rho$ la flecha simplificada pasa a ser ligeramente mayor que la total del CONS. Estos resultados siguen el mismo patrón definido en el análisis seccional de piezas no fisuradas, apartado 2.2.1.2, y se justifica en la no consideración en la formulación simplificada de: las coacciones impuestas por la armadura a la libre deformación del hormigón, así cómo, de la curvatura diferida que la retracción introduce al existir asimetrías de armado.

2.4.2 Vigas fisuradas.

Se analizan los tratamientos normativos propuestos por el EC-2, por la EHE-08 por el MC-90 y ACI.

Eurocódigo 2.

El EC-2 propone una formulación para el cálculo de las deformaciones instantáneas basada en las formulaciones del *Método Bilineal* de Ghali y Favre [1].

$$y_{inst} = y_{II} \cdot \zeta + (1 - \zeta) \cdot y_I \quad [2.39]$$

Éste método simplificado surge como extrapolación del cálculo de curvaturas promedio de secciones a flechas. En la fórmula anterior y_{II} es la flecha considerando inercia fisurada y y_I la flecha calculada considerando inercia sin fisurar, en todo el elemento. El parámetro ζ es el factor de interpolación de la ecuación 2.35.

La simplificación del método radica en que la flecha instantánea se calcula solamente a partir de una sección del elemento, es decir el factor de interpolación ζ , que depende del estado de carga, se calcula considerando el momento flector y las cuantías de la sección determinante del elemento.

Las secciones determinantes que rigen la deformación están generalmente situadas en las zonas de máximas curvaturas. Para vigas biapoyadas la sección determinante se encuentra en el centro de vano, para ménsulas se encuentra en las secciones de empotramiento y para estructuras hiperestáticas como vigas continuas depende de donde se produzca la máxima curvatura.

Obtenidas las flechas instantáneas con el método bilineal, las deformaciones diferidas por retracción y fluencia se calculan por separado.

La flecha total considerando la fluencia se calcula de forma simplificada considerando un módulo de elasticidad menor o módulo de elasticidad ajustado a la edad:

$$E_{eff} = \frac{E}{(1 + \varphi(t, t_0))} \quad [2.40]$$

Que es lo mismo que multiplicar la y_{inst} de la expresión 2.39 por $(1 + \varphi(t, t_0))$.

Para la deformación debida a la retracción el EC-2 propone la siguiente expresión:

$$\Delta\psi_{sh} = \varepsilon_{sh} \cdot n \cdot \frac{S}{I} \quad [2.41]$$

Siendo S el momento estático interpolado de la armadura traccionada respecto al centro de gravedad de la sección e I el momento de inercia interpolado. A partir de la

curvatura interpolada de retracción y conocidas las condiciones de contorno del elemento se obtiene la flecha producida por la retracción.

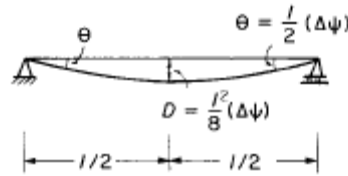


Figura 25 Flecha producida por retracción en una viga biapoyada

La limitación de la formulación de flechas diferidas propuestas por la EC-2 se encuentra en la no separación del comportamiento diferido de las secciones fisuradas de las no fisuradas. El EC-2 propone multiplicar directamente la flecha instantánea por $(1 + \varphi(t, t_0))$, factor de amplificación de la flecha instantánea propio de secciones no fisuradas.

De forma general se puede afirmar que el EC-2 conduce a flechas del lado de la seguridad.

MC-90

Método Bilineal

El Método Bilineal propuesto por el CEB [23] propone una interpolación lineal entre la flecha calculada considerando la sección sin fisurar (y_I) y la sección fisurada (y_{II}). La expresión es la misma que la planteada por el EC-2, ecuación 2.39.

El factor de interpolación propuesto se basa en una relación lineal de M/M_{cr} en lugar de cuadrática y depende del estado de carga.

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)$$

Las deformaciones instantáneas y_I y y_{II} se calculan por separado. Para el cálculo de las deformaciones diferidas y_I y y_{II} se utiliza el módulo de elasticidad ajustado a la edad (ecuación 2.24).

La consideración de los efectos de coacción que la armadura introduce ante las deformaciones de retracción y fluencia, se introducen en el cálculo mediante unos factores de corrección k menores a la unidad. Estos coeficientes multiplican directamente a la flecha instantáneas o diferida independientemente de si el estado es sin fisurar o fisurado. Los coeficientes k , no adimensionales, han sido tabulados por Ghali y Favre en [1].

Igual que en el EC-2 la simplificación del método radica en que la flecha instantánea se calcula solamente a partir de la sección *determinante* del elemento.

Formulación simplificada

El Código Modelo MC-90 propone un cálculo simplificado que proporciona el valor de la flecha total.

La formulación se basa en un ajuste paramétrico del *Método Bilineal* a partir de secciones rectangulares realizado por Farve et al. [8]. La flecha total se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$a = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot (1 - 20\rho'_{cm}) \cdot a_c \tag{2.42}$$

siendo h y d, altura y canto de la pieza respectivamente, ρ'_{cm} la cuantía geométrica media de armadura a compresión, η es un factor de corrección que permite tener en cuenta los efectos de la fisuración y la fluencia, y depende la cuantía geométrica dispuesta a tracción en todo el elemento, y a_c es la flecha elástica instantánea calculada con la inercia bruta de la sección.

ρ_m [%]	0,15	0,20	0,30	0,50	0,75	1,00	1,50
η	10,0	8,0	6,0	4,0	3,0	2,5	2,0

Tabla 12 Valores del factor de corrección η

Para obtener una aproximación realista de la cuantía a tracción se debe interpolar a partir de la ley de momentos flectores del elemento, que es equivalente a considerar una interpolación de curvaturas si suponemos la sección de hormigón constante a lo largo de todo el elemento.

$$\rho_m = \rho_A \frac{l_A}{l} + \rho_B \frac{l_B}{l} + \rho_C \frac{l_C}{l} \tag{2.43}$$

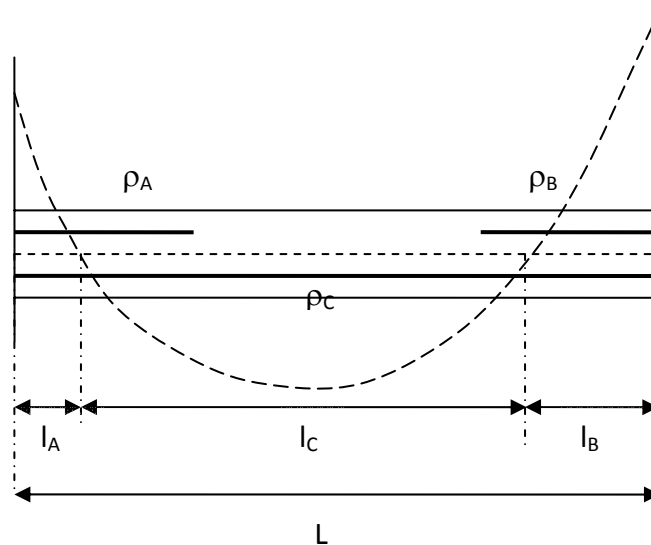


Figura 26 Ley de momentos flectores para determinar η

Según Ghali esta formulación recoge sólo los efectos diferidos de la fluencia, siendo necesario añadir el término de la flecha que la retracción introduce. En cambio el MC-90 no realiza ninguna aclaración al respecto, siendo la flecha total la obtenida según la expresión 2.42.

ACI 318

Para el cálculo de flechas el ACI-318 propone utilizar los métodos o formulaciones usuales de deformaciones.

Para elementos no fisurados las rigideces a utilizar en el cálculo son las brutas (EI_b), mientras que en elementos fisurados, al existir variación de la posición de la fibra neutra a lo largo del elemento, se deben utilizar rigideces interpoladas entre las brutas y fisuradas.

El cálculo de flechas instantáneas se basa en las formulaciones propuestas por Branson en 1963 para elementos fisurados.

Según Branson [9] la inercia equivalente de cualquier sección fisurada se define como una interpolación entre la inercia de la sección sin fisurar, I_I , y la inercia fisurada I_{II} .

$$I_{eq} = I_I - (I_I - I_{II}) \cdot \left(1 - \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^m\right) = I_I \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^m + I_{II} \cdot \left(1 - \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^m\right) \quad [2.44]$$

La potencia m fue ajustada inicialmente a 4 y posteriormente más experimentación permitió ajustarla a 3.

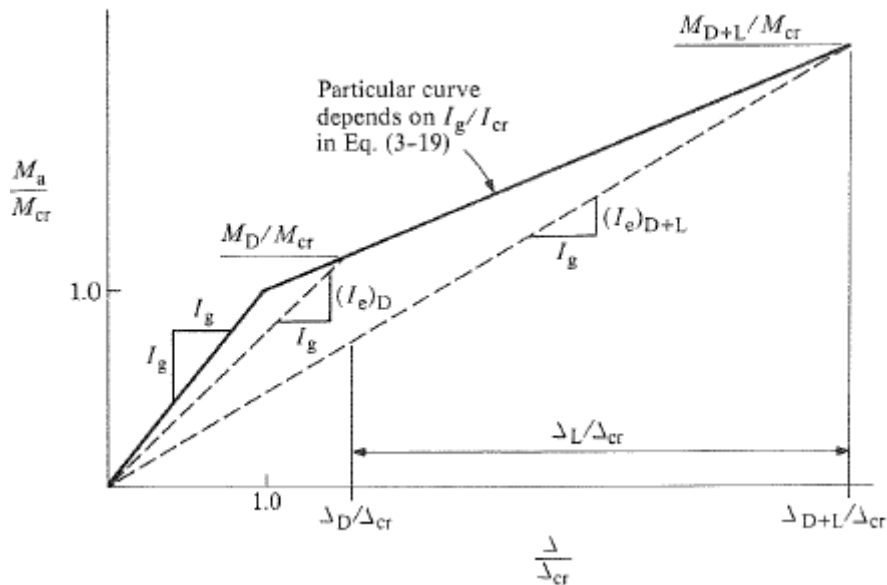


Figura 27 M-D según la formulación de Branson. Deformation of concrete structures

$$I_{eq} = I_I \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 + I_{II} \cdot \left(1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right) \quad [2.45]$$

La flecha máxima de un elemento se obtiene a partir del momento de inercia equivalente de la sección determinante del elemento, considerando que la inercia se mantiene constante en toda la viga.

Para elementos continuos, el momento efectivo de inercia se puede tomar como el promedio de valores obtenidos de la ecuación (2.45) para las secciones críticas de momento positivo y negativo. Para elementos prismáticos biapoyados y continuos la sección determinante es la de centro de luz mientras que en voladizos es la sección de apoyo.

Par el cálculo de flechas diferidas en hormigón armado, el método simplificado propuesto por el ACI-318 consiste en multiplicar las flechas instantáneas por un factor de amplificación:

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'} \quad [2.46]$$

donde:

ρ' es el valor de la cuantía de armadura a compresión a la mitad de la luz en vigas simplemente apoyadas y continuas y en voladizos la sección de empotramiento.

ξ Coeficiente función de la duración de la carga que se toma de los valores indicados seguidamente:

5 o más años	2,0
1 año	1,4
6 meses	1,2
3 meses	1,0
1 mes	0,7
2 semanas	0,5

Estos valores ajustan a la expresión obtenida por Morán [15]:

$$\xi = 0.683 + 0.289 \cdot \ln(t) \quad [2.47]$$

siendo t la edad expresada en meses.

El método simplificado de flechas del ACI-318 [24] está basado en una campaña experimental realizada en 1972 sobre un número reducido de vigas, 21 ensayos en total, sometidas a humedades relativas bajas.

La flecha total es la suma de las instantáneas y diferidas calculadas.

EHE-08

Al igual que el EC-2 y el ACI-318 las formulaciones propuestas en la instrucción española EHE-08 separan el cálculo las flechas instantáneas de las de carácter diferido.

El cálculo de flechas instantáneas, al igual que en la noma ACI-318, se basa en las formulaciones propuestas por Branson, ecuación 2.45.

$$I_{eff} = I_I \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 + I_{II} \cdot \left(1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right)$$

La flecha máxima de un elemento se obtiene a partir del momento de inercia equivalente o efectivo de la sección determinante del elemento, considerando que la inercia se mantiene constante en toda la viga.

La sección determinante, igual que en el EC-2 o MC-90, depende de las condiciones de apoyo del elemento siendo de manera general:

- a) En elementos simplemente apoyados la sección central.
- b) En elementos en voladizo, la sección de arranque.
- c) En vanos internos de elementos continuos

$$I_e = 0,50 I_{ec} + 0,25 I_{ee1} + 0,25 I_{ee2}$$

donde:

- I_{ec} Inercia equivalente de la sección de centro de vano.
- I_{ee} Inercia equivalente de la sección de apoyos.

- d) En vanos extremos, con continuidad solo en uno de los apoyos,

$$I_e = 0,75 I_{ec} + 0,25 I_{ee}$$

El incremento de flecha producido por retracción y fluencia se calcula a partir de la formulación simplificada propuesta en el ACI mejorando la propuesta americana al tener en cuenta la edad del instante de la carga y no sólo la duración de la misma.

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 \rho'}$$

ρ' es el valor de la cuantía de armadura a compresión en la sección de referencia.

ξ Coeficiente función de la duración de la carga que se toma de los valores indicados seguidamente:

5 o más años	2,0
1 año	1,4
6 meses	1,2
3 meses	1,0
1 mes	0,7

2 semanas 0,5

Para edad j de carga y t de cálculo de la flecha, el valor de ξ a tomar en cuenta para el cálculo de λ es $\xi_{(t)} - \xi_{(j)}$.

En el caso de que la carga se aplique por fracciones P_1, P_2, \dots, P_n , se puede adoptar como valor de ξ el dado por:

$$\xi = (\xi_1 P_1 + \xi_2 P_2 + \dots + \xi_n P_n) / (P_1 + P_2 + \dots + P_n)$$

La flecha total es la suma de la instantánea mas la diferida

$$y_{tot} = y_{inst} + y_{diferida} \quad [2.48]$$

Como alternativa al método simplificado del articulado, para el cálculo de flechas diferidas, la EHE-08 propone la utilización de otra formulación basada en el comportamiento mecánico de la sección ante retracción y fluencia desarrollada por Marí [3]. Ésta propuesta encuentra su base en las mismas consideraciones del método propuesto en ésta tesina.

Las flechas diferidas resultantes de las deformaciones por fluencia y retracción se pueden estimar, salvo justificación más precisa, de la siguiente manera:

$$y_{\phi} = y_g \frac{\phi \cdot \frac{x}{d}}{1 + 12 \cdot n \cdot \rho'} \quad [2.49]$$

$$y_{ret} = k_b \frac{\epsilon_r}{d} \cdot \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{1 + 12 \cdot n \cdot \rho'} \quad [2.50]$$

2.5 Cálculo de flechas mediante un modelo numérico de análisis no lineal (CONS).

El modelo numérico CONS desarrollado por Marí [12] está basado en una idealización de las estructuras mediante elementos lineales tipo barra con 6 grados de libertad por nodo, discretizando la sección transversal en filamentos. Permite considerar el comportamiento no lineal de los materiales y la geometría, así como el comportamiento diferido y el proceso evolutivo de construcción. Asume que la hipótesis de planeidad de las secciones y no considera las deformaciones producidas por cortante. La no linealidad de los materiales por fisuración y plastificación, así como los efectos estructurales producidos por las deformaciones diferidas, son considerados en el análisis estructural.

La deformación total en cualquier punto de la estructura $\epsilon(t)$ es suma de las deformaciones de tipo mecánico y no mecánico:

En la resolución de un problema estructural general, no es posible conocer a 'priori' la historia de tensiones (o deformaciones) en cada punto de la estructura, por lo que el análisis numérico debe realizarse discretizando el tiempo en intervalos Δt , en los que se producen incrementos o decrementos de tensión.

Cualquiera que sea la función de la integral de la ecuación 2.48, se puede transformar en una relación incremental utilizando fórmulas de cuadratura de diferentes niveles.

La función de fluencia reducida es aproximada en CONS por una serie de Dirichlet:

$$c(\tau, t - \tau) = \sum_{i=1}^m a_i(\tau) [1 - e^{-\lambda_i(t-\tau)}] \quad [2.54]$$

siendo los valores m , λ_i and $a_i(\tau)$ coeficientes que deben ser ajustados a partir de ensayos. Los coeficientes $a_i(\tau)$ son parámetros de envejecimiento que dependen de la edad del hormigón en el instante de aplicación de la carga. Los parámetros son coeficientes que gobiernan la forma de la función mientras que los valores de m indican el número de términos de la serie. En éste trabajo se considera que usando tres términos de la serie ($m=3$) y $\lambda_i = 10^{-i}$ la precisión de la respuesta es suficiente. Los modelos de retracción y fluencia adoptados son los incluidos en el CEB-FIP Model Code de 1990.

La utilización de series de Dirichlet permite obtener los incrementos de deformación de fluencia en un instante de tiempo dado, a partir de los datos almacenados del instante anterior, no siendo necesario almacenar todo el historial de tensiones y deformaciones. A nivel numérico se traduce en una solución a los problemas de almacenaje de datos.

El cálculo estructural se realiza mediante un análisis paso a paso en el tiempo. El dominio temporal se divide en intervalos de tiempo y se realiza un proceso de avance paso a paso en el que los incrementos de desplazamientos y deformaciones se van acumulando sobre los obtenidos en escalones anteriores. En cada escalón de tiempo se actualizan las propiedades de los materiales, la matriz de rigidez y el vector de cargas, a la vez que se evalúan los incrementos de deformaciones diferidas que han tenido lugar durante el más reciente intervalo de tiempo.

Métodos iterativos como Newton-Raphson o Newton-Raphson Modificado o control de desplazamientos, combinado con análisis de tipo incremental son las herramientas implementadas para abordar la solución del problema no-lineal.

El modelo permite obtener desplazamientos en nodos, fuerzas internas en elementos, tensiones y deformaciones en cada filamento en que se descompone la sección, reacciones etc. El análisis exclusivamente seccional se realiza mediante un elemento ménsula de longitud unidad sometido a flexión en su extremo libre. El modelo descrito ha sido comprobado experimentalmente por Marí y Valdés [25], y ha servido como herramienta de cálculo en el análisis de puentes y pilas esbeltas por Marí [26] y [27] y Chacón *et. al* [28].

Para poder reproducir el comportamiento de sección fisurada aislada el programa CONS ha sido modificado para no considerar la resistencia a tracción del hormigón así como el fenómeno de *tension stiffening*. El programa modificado ha sido la herramienta utilizada en el estudio paramétrico de tipo seccional que se describe a modo de conclusiones en el capítulo 3.1.

2.6 Conclusiones respecto al estado del conocimiento.

En este capítulo se han descrito los fenómenos asociados a deformaciones diferidas. Se han definido los conceptos de retracción y fluencia así como las variables que gobiernan su desarrollo.

Se ha descrito el comportamiento instantáneo y diferido de secciones no fisuradas y fisuradas de hormigón armado en servicio, para posteriormente abordar el comportamiento a nivel elemento, introduciéndose el concepto de *tension stiffening*.

La introducción del fenómeno de *tension stiffening* en el cálculo de flechas se realiza a partir de la consideración de curvaturas medias de secciones. Estas curvaturas medias se obtienen a partir de la interpolación de las curvaturas de la sección en sus dos posibles estados: sección fisurada y sin fisurar. El factor de interpolación depende del estado de carga a la que se encuentra sometida la sección. Para piezas con un momento de sollicitación próximo al de fisuración, la contribución del hormigón entre fisuras es muy elevada, mientras que para secciones con momentos de diseño del orden de 2-2.5 veces el momento de fisuración, la curvatura media tiende a ser la fisurada.

La gran mayoría de formulaciones, sean de carácter empírico o analítico, recogen el fenómeno del *tension stiffening* para el cálculo de las flechas instantáneas. El EC-2 y el MC-90 incorporan el Método Bilineal para el cálculo de flechas instantáneas, mientras que el ACI-318 o la EHE-08 proponen el cálculo de una rigidez equivalente de la pieza, fórmula de Branson.

El cálculo de las flechas diferidas mediante métodos simplificados presenta mayores discrepancias entre normativas. Algunas de ellas como el MC-90 basan sus formulaciones en ajustes empíricos de ecuaciones analíticas que recogen algunas de las principales variables que gobiernan el problema; en cambio otras como el ACI-318 están basadas en campañas experimentales realizadas para humedades relativas habituales, no siendo extrapolables a hormigones de alta resistencia o condiciones ambientales extremas.

Se concluye la necesidad de desarrollar un método simplificado que, basado en la mecánica del hormigón armado, contemple los parámetros que gobiernan el comportamiento diferido de flechas y pueda servir en la fase de proyecto para tomar decisiones sobre cantos o cuantías mínimas o para verificar el estado límite de deformación en hormigones de hasta 100 MPa, en cualquier ambiente.

3. Método propuesto para cálculo simplificado de deformaciones.

3.1 Introducción

Tal como se ha mostrado en el estado del conocimiento, son numerosos los factores que influyen en la deformación de las estructuras de hormigón, debido a su comportamiento no lineal y diferido y a la existencia de materiales con propiedades mecánicas y reológicas diferentes.

La formulación de un método simplificado que sea a la vez ajustado al comportamiento experimentalmente observado y fácil de utilizar en fase de proyecto, requiere una identificación de los parámetros más influyentes en su comportamiento y una cuantificación de estas influencias. Esta identificación se aborda desde dos perspectivas: una numérica y otra analítica. En la primera se analizan un número considerable de secciones mediante el programa de análisis no lineal y diferido de estructuras de hormigón CONS, ya citado con anterioridad, realizándose un estudio de la influencia de diversos parámetros en la respuesta seccional en servicio bajo cargas duraderas.

Los resultados del estudio nos permiten realizar una serie de simplificaciones en el planteamiento analítico que se realiza en la segunda fase, de forma que gracias a ellas se puede alcanzar el objetivo perseguido: formular un método simplificado de cálculo de flechas diferidas conociendo y acotando el error cometido.

3.2 Estudio paramétrico realizado mediante el método general.

3.2.1 Objetivo y alcance del estudio

El objetivo del estudio paramétrico se centra en el análisis del comportamiento de secciones de hormigón armadas fisuradas sometidas a deformaciones diferidas de retracción y fluencia. Se pretende cuantificar algunos de los aspectos definidos en el capítulo 2.2.2 como son: la posición del punto de giro de la sección al actuar retracción y fluencia, valores típicos de incrementos de tensión en armaduras traccionadas y comprimidas, variación de la posición de la fibra neutra, variación del bloque de compresiones por efecto de la retracción y fluencia. En definitiva se busca encontrar los parámetros básicos que determinan el comportamiento diferido de la sección.

El análisis paramétrico se ha realizado mediante el programa numérico de análisis no lineal CONS Marí [12]. Para éste propósito el programa ha sido modificado, con el fin de no considerar la resistencia a tracción del hormigón, ni el fenómeno de tension stiffening. Esta modificación permite realizar un estudio de la sección fisurada sin que exista interacción con las secciones adyacentes.

Se han analizado un total de 72 casos de secciones armadas sometidas a flexión simple con diversas cuantías.

Los parámetros considerados son:

- Resistencia del hormigón 25 MPa.
- Tres cuantías a tracción ($\rho=0.005, 0.01, 0.015$).
- Tres cuantías a compresión ($\rho/\rho'=0,0.5,1$)
- Dos edades de carga t_0 (7 y 28 días)
- Dos humedades relativas (HR60% y HR80%)
- Dos deformaciones instantáneas de la fibra superior del hormigón ($\epsilon_{c0}/\epsilon_{sh}=0.5$ y 1.00), lo que equivale a definir dos niveles de carga permanente.

Todas las secciones tienen las mismas características geométricas ($b=0.30$ m, $h=0.50$ m), recubrimientos ($d/h=0.9$, $d'/h=0.1$) y resistencia de acero $f_y=500$ MPa.

En el anejo B, base de datos numérica, se incluye la entrada de datos de las secciones analizadas.

3.2.2 Influencia de las cuantías a tracción y compresión.

La tensión en la armadura a tracción por efecto de la retracción y fluencia, permanece casi constante en todos los casos analizados. La casi invariabilidad de la tensión también fue observada experimentalmente por Stevens [29] y Neville [30] entre otros. Los valores máximos del incremento de tracción alrededor del 6% se corresponden con secciones con armadura a compresión nula, se observa también

cómo para $\rho'=0$ el incremento de tensión es casi constante, independientemente de la cuantía a tracción.

Los incrementos mínimos de los casos analizados corresponden a cuantías de armadura a tracción y compresión elevados. Para éstos casos se llegan a obtener decrementos en lugar de incrementos siendo el valor mínimo -1.5%. Ésta situación corresponde a secciones en que la fuerte cuantía de armado así como la relación entre ϵ_{sh} y ϵ_{cr} hace que las redistribuciones de tensiones internas acaben traccionando e incluso fisurando el hormigón por efecto de la retracción.

El incremento medio de tracción en la armadura traccionada, en los 72 casos analizados, es de un 2,1%.

La Figura 29 muestra el incremento de tensión en la armadura traccionada en función de las cuantías de armado para los casos correspondientes a $t=28$ días, humedad relativa del 60% y relaciones instantáneas de la fibra superior del hormigón $\epsilon_{c0}/\epsilon_{sh}=1$.

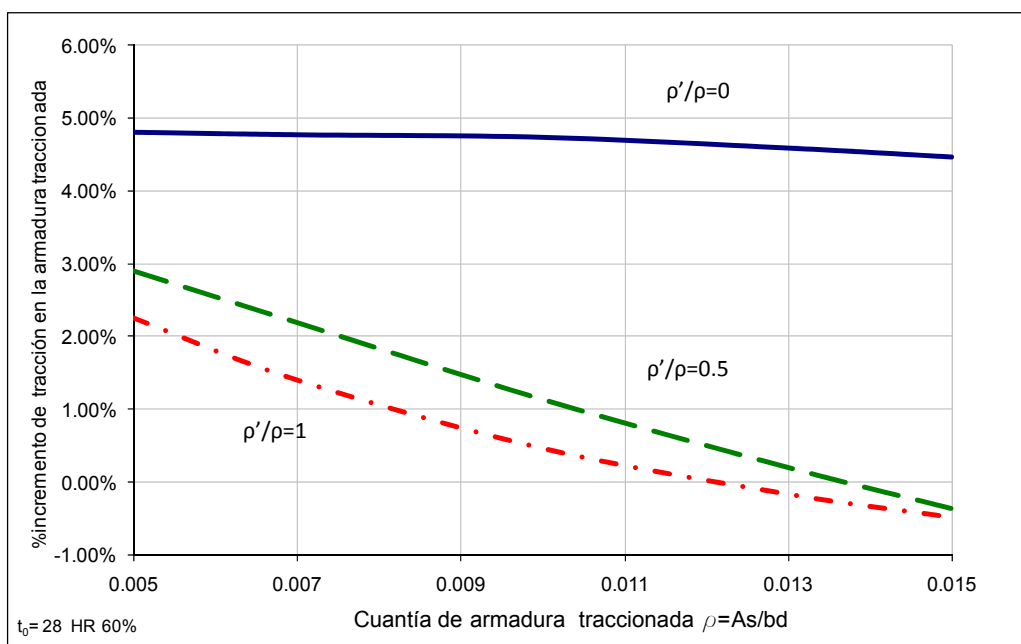


Figura 29 Incremento de tensión en la armadura de tracción. Marí et.al [31].

Si analizamos las modificaciones de tensiones en el hormigón se comprueba cómo éstas se reducen drásticamente. En secciones sin armadura a compresión las variaciones son del 15% para $\rho=0.015$ y 35% para $\rho=0.005$. Para secciones con $\rho=0.01$ las variaciones son del 20%.

Al disponer armadura a compresión la reducción puede llegar a ser del 100% (secciones en que el hormigón se tracciona por efecto de la retracción) encontrándose el valor medio de reducción de su tensión, para diversas cuantías de ρ' , entre el 70-80%.

Al igual que la Figura 29, la figura 29 muestra la reducción de compresión en el hormigón para los casos correspondientes a $t=28$ días, humedad relativa del 60% y relaciones instantáneas de la fibra superior del hormigón $\epsilon_{c0}/\epsilon_{sh}=1$.

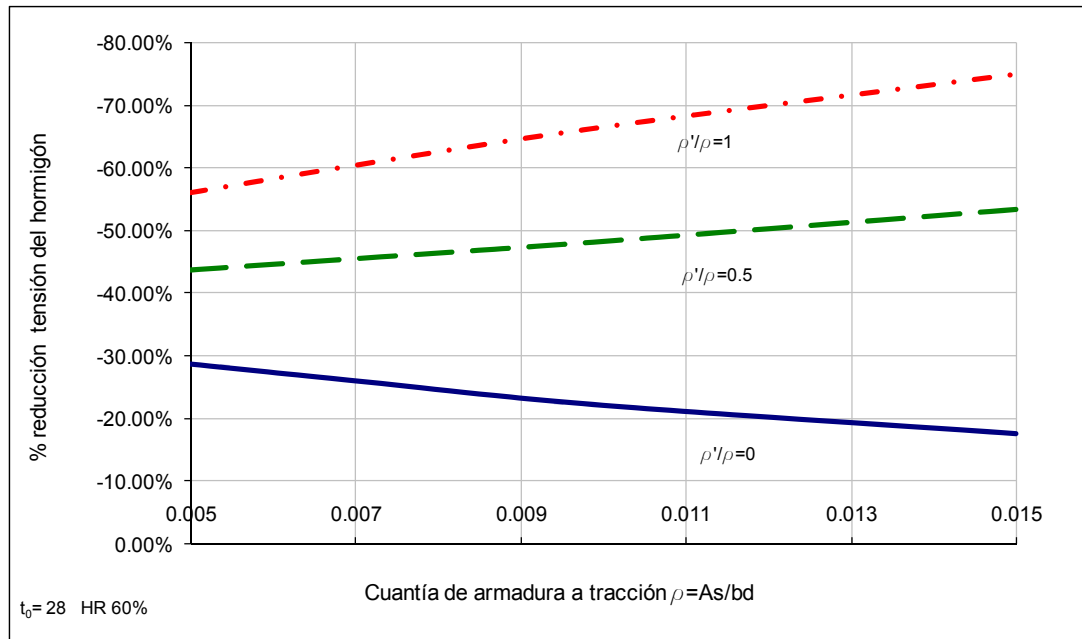


Figura 30 Reducción de la tensión en el hormigón en función de las cuantías a tracción y compresión. Marí et.al. [31]

El incremento de compresión en la armadura comprimida es elevado reduciéndose con el aumento de ésta. En la Figura 31 se alcanzan valores del 330%, pero para casos en que la relación entre la deformación de retracción y la tensión inicial del hormigón es mayor los incrementos pueden llegar a ser de hasta el 500%.

Cabe observar que estos aumentos de compresión, tan significativos, no comportan en ninguno de los casos estudiados tensiones superiores a 230 MPa ya que las tensiones iniciales de la armadura son muy bajas. En secciones donde la tensión inicial de la armadura comprimida sea elevada se deberá comprobar la no plastificación de ésta por redistribuciones tensionales de carácter diferido.

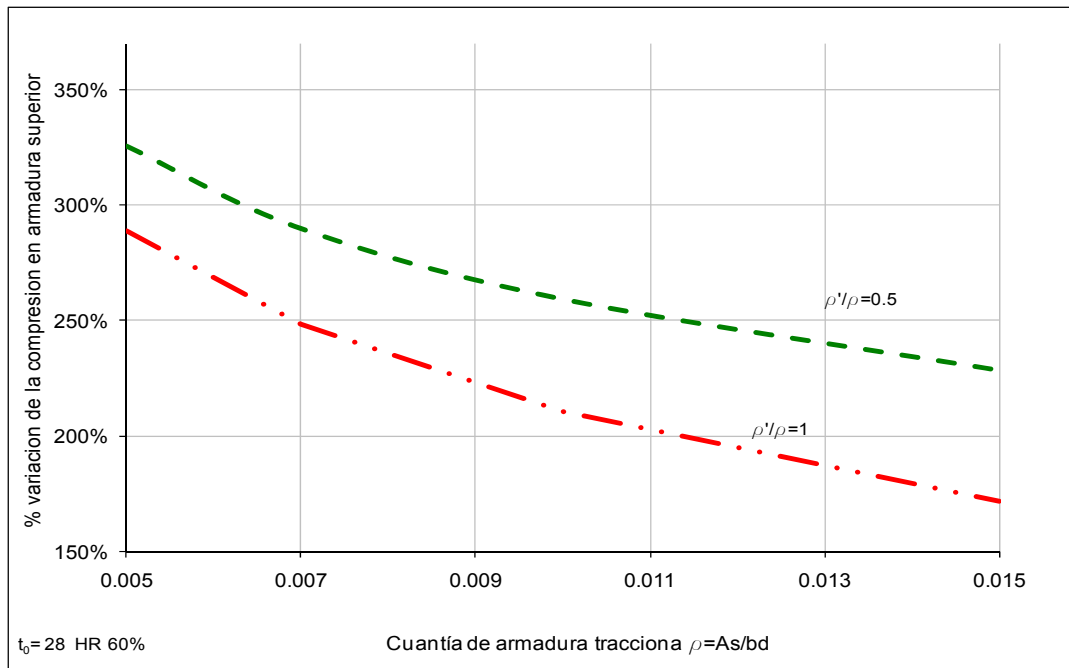


Figura 31 Incremento de compresión en la armadura comprimida. Marí et.al. [31]

3.2.3 Variación de la posición del eje neutro de deformaciones, del bloque de compresiones y posición del punto de giro de la sección.

Los incrementos medios de curvatura por deformaciones diferidas, obtenidos del estudio paramétrico, se sitúan entorno al 40%. Para una misma cuantía de armadura a tracción la curvatura diferida disminuye al aumentar la armadura dispuesta a compresión. Para relaciones $\rho'/\rho=1$ los incrementos de curvatura diferida se sitúan sobre el 30% de incremento.

Uno de los parámetros importantes que rigen el paso de la curvatura instantánea a la diferida es la posición del punto de giro de la sección (d_2). Como se ha comprobado en las figuras anteriores, así como de lo expuesto en el capítulo 2.2.2, el incremento de tensión de la armadura traccionada es pequeño y consecuentemente lo es su desplazamiento. Esto es un claro indicador de que el punto de rotación de la sección fisurada no se encuentra en el eje neutro instantáneo, como en el caso de secciones no fisuradas, si no que se haya próximo a la armadura traccionada.

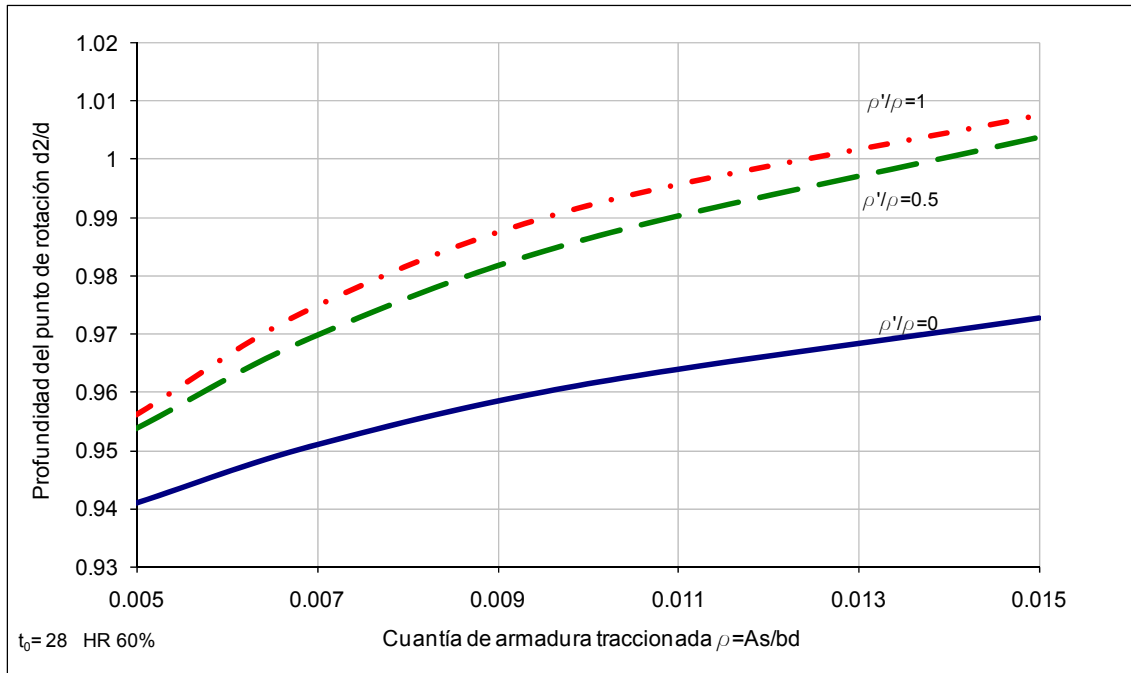


Figura 32 Profundidad del punto de rotación (d_2/d). Marí et.al. [31]

La Figura 32 muestra la relación d_2/d en función de las cuantías de armado para aquellas secciones del estudio sometidas a HR=60% y aplicación de carga $t_0=28$ días. Se observa cómo d_2/d varía de 0.94 a 1.01 con un promedio de 0.98 para todos los casos analizados. La sección prácticamente rota respecto a la armadura traccionada. El aumento de la cuantía de tracción desplaza el punto d_2 hacia d , incluso llegando a obtener valores de d_2 ligeramente superiores a d para cuantías elevadas y relaciones $\rho'/\rho=1$. Relaciones $d_2/d > 1$ implican decrementos de tensión en la armadura traccionada, ver Figura 29, y se produce en aquellas secciones en que el bloque de compresiones tiende a subir por efecto de la retracción en lugar de desplazarse hacia la armadura traccionada. Son secciones en que el efecto diferido de la retracción neutraliza al efecto de la fluencia.

Las disposiciones habituales de armado en secciones sometidas a flexión simple, vigas, losas etc., tienden a tener relaciones de $\rho'/\rho < 0.5$, pues generalmente no es necesario disponer más que armadura mínima a compresión, y por ello las relaciones d_2/d son inferiores a la unidad y el bloque de compresiones tiende a bajar.

La evolución del bloque de compresiones con el tiempo depende de la cuantía de armadura y de la relación existente entre retracción y fluencia. Para secciones poco armadas la relación toma valores próximos al 1.3. Para secciones con fuerte armado, la coacción de la armadura a la deformación por retracción, puede hacer disminuir el bloque de compresiones, incluso traccionarlo por completo en ciertos casos (Figura 18). El valor medio de la relación c/c_0 de los casos estudiados, sin considerar aquellos casos en que la sección pasa a estar totalmente traccionada, es de 1,25.

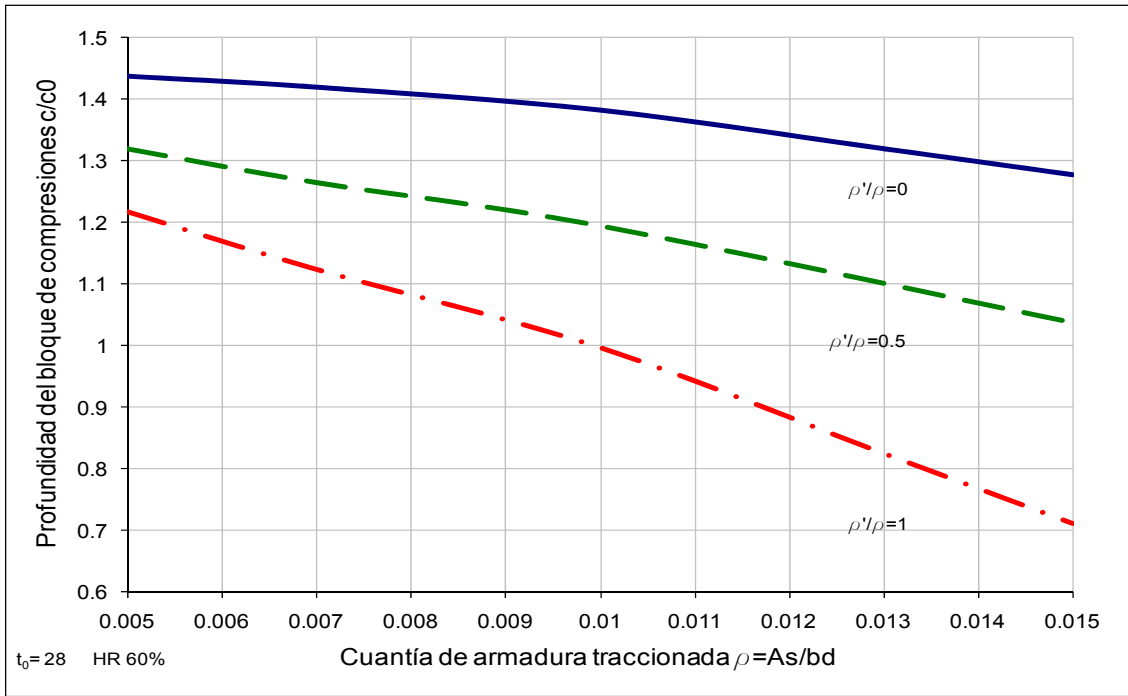


Figura 33 Evolución del bloque de compresiones (c/c_0). Marí et.al. [31]

La figura 33 analiza la evolución de la posición de la fibra neutra en función de las cuantías de armado de tracción y compresión, para los casos correspondientes a $t_0=28$ días y HR 60%. Se observa un comportamiento casi paralelo de las curvas en función de la relación ρ'/ρ , es decir el efecto que tiene la cuantía a compresión en la variación de la posición de la fibra neutra es el mismo para cualquier cuantía a tracción. Así para relaciones $\rho'/\rho=1$ y $\rho=0.015$ la relación x/x_0 posición fibra neutra diferida respecto a la instantánea, es un 11.2% más baja que para $\rho=0.005$.

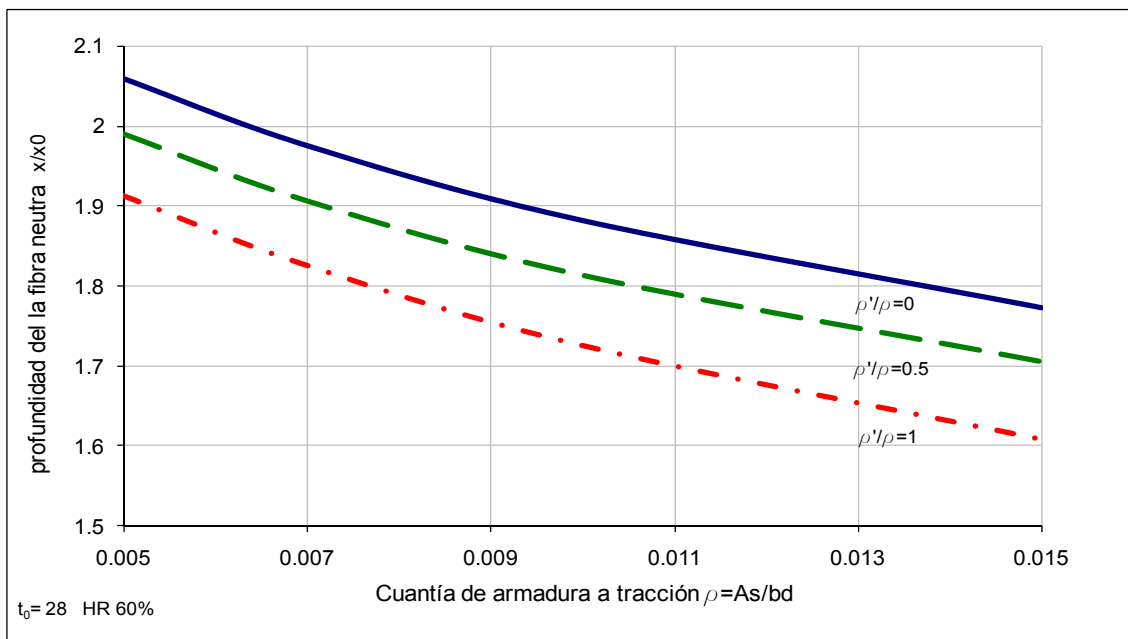


Figura 34 Evolución de la posición de la fibra neutra (x/x_0). Marí et.al. [31]

Sobre la posición de la fibra neutra se debe realizar una observación importante: las deformaciones de fluencia pese a ser tratadas como deformaciones no mecánicas,

están asociadas a estados tensionales, y por ello en una sección que sólo presenta fluencia, la posición de la fibra neutra y el bloque de compresiones coinciden, no siendo así al existir retracción.

La Figura 35 muestra una sección $b=0.30$, $h=0.5$ y un recubrimiento $r=0.05$ con una $\rho=0.005$ $\rho'/\rho=0$ y un coeficiente de fluencia de 3.16, analizada mediante el programa de análisis no lineal. Se observa cómo para $t=0$ y $t=10.000$, el bloque de compresiones coincide con la posición de la fibra neutra.

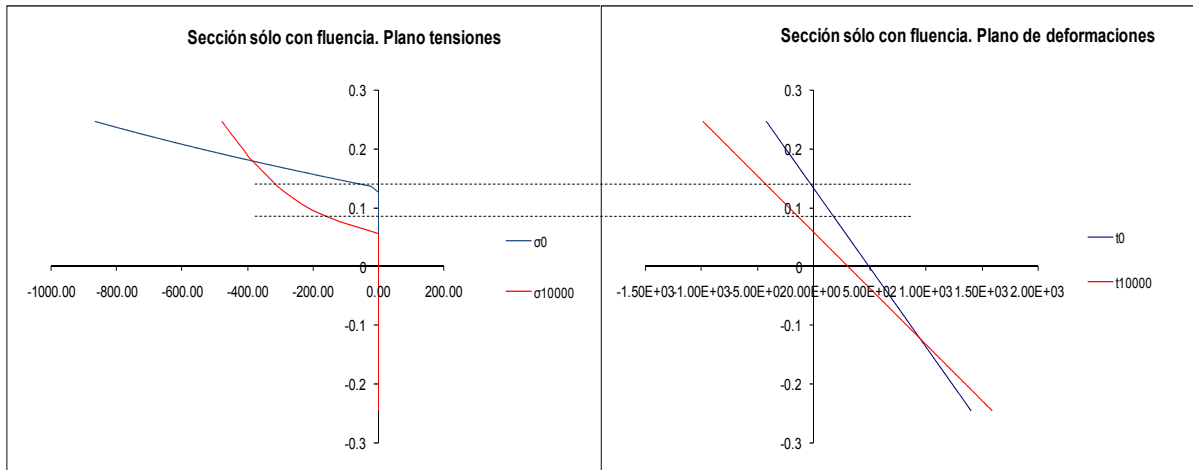


Figura 35 Planos de tensiones y deformaciones en la sección sometida a fluencia.

Al introducir en el cálculo la retracción, $\epsilon_{sh}=4.095 \cdot 10^{-4}$ m/m, se observa cómo para $t=10.000$ días el eje neutro y el bloque de compresiones no coinciden. La deformación de retracción al ser una deformación de carácter atensional desplaza la posición de la fibra neutra.

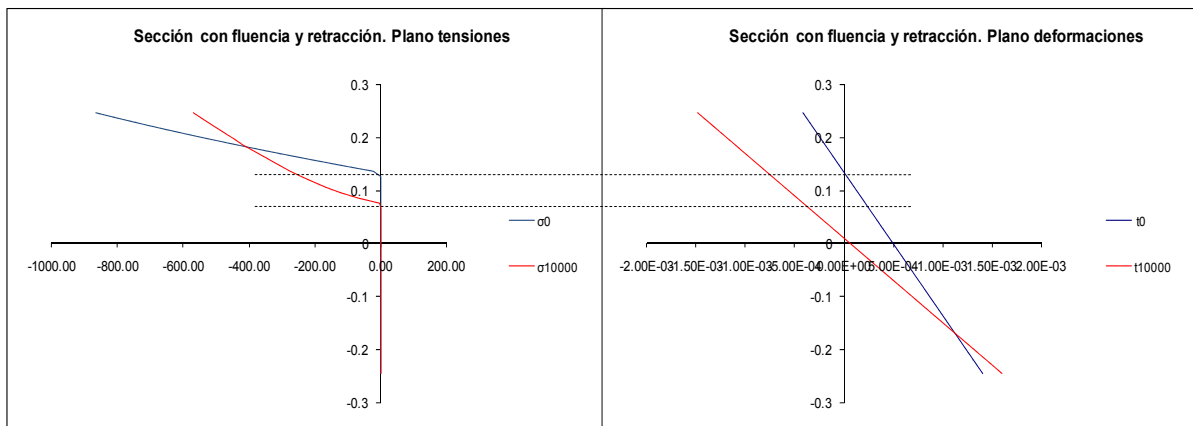


Figura 36 Plano de deformaciones y tensiones en la sección sometida a fluencia y retracción

La relación existente entre el bloque de compresiones y la posición de la fibra neutra, al existir retracción, es:

$$c = x \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_{sh}}{\epsilon_c}\right) \quad [3.1]$$

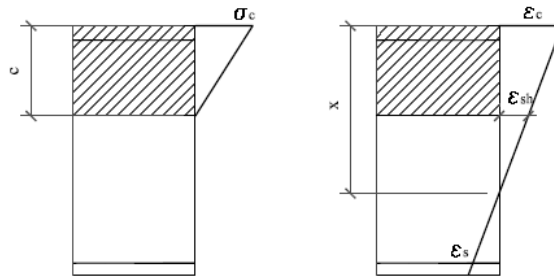


Figura 37 Relación entre bloque de compresiones y posición fibra neutra en una sección sometida a retracción y fluencia

para un $t=t_0$, la profundidad del bloque de compresiones coincide con la fibra neutra de la sección.

Otra observación a extraer de las Figura 35 y Figura 36 sobre la evolución de la profundidad del bloque de compresiones es cómo al existir retracción ésta es menor, es decir el bloque de compresiones se desplaza menos hacia la armadura traccionada, comportamiento ya definido en el capítulo de 2.2.2.

A medida que se desarrolla la fluencia se produce una paulatina evolución de las tensiones en el hormigón. El hormigón se descarga y el bloque de compresiones se desplaza hacia la armadura traccionada. Mediante un análisis paso a paso en el tiempo como el realizado mediante el programa numérico CONS, se puede captar la evolución del bloque de compresiones en el tiempo. Con el paso del tiempo nuevas fibras de hormigón se incorporan al bloque de compresiones, siendo evaluado en ese instante el valor del coeficiente de fluencia a aplicar a la deformación diferida de dicha fibra. La compatibilidad de deformaciones entre las diferentes fibras que forman la sección hace que existan también redistribuciones tensionales para garantizar la hipótesis de planeidad de la sección. Lo anteriormente expuesto explica que el diagrama de tensiones para t_{10000} de la Figura 35 no sea lineal. Cuanta menos variación sufre el bloque de compresiones, más lineal es el diagrama de tensiones a tiempo infinito. Esta alteración de la linealidad del diagrama de tensiones sólo se puede captar con programas de análisis numérico. Como se verá posteriormente la consideración de diagramas tensionales lineales permiten abordar el problema de las redistribuciones de tensiones sin generar errores significativos.

3.2.4 Conclusiones del estudio paramétrico

Las conclusiones básicas a extraer del estudio paramétrico realizado de secciones de hormigón armado fisuradas son:

- Una sección de hormigón fisurada sometida a flexión simple que fluye y retrae bajo carga permanente, incrementa su curvatura inicial encontrándose el punto de giro, d_2 , de la sección muy próximo a la armadura traccionada. Del análisis paramétrico se obtiene un valor medio de $d_2=0.98d$.
- Consecuentemente el aumento de tensión en la armadura traccionada es pequeño, siendo el valor medio obtenido del 2.1%.

- Con el desarrollo de la fluencia y retracción las fibras de hormigón más comprimidas se descargan, por efecto de las redistribuciones tensionales. La descarga media obtenida es del orden del 70-80%. Cuanta más cuantía de armadura y en función de la relación ρ'/ρ mayor es la descarga.
- En función de las cuantías de armado dispuestas, así como de la relación existente entre el valor de la deformación de retracción y la fluencia, la profundidad del bloque de compresiones (c) varía. Para secciones sometidas a niveles habituales de flexión, con cuantías de armado a compresión inferiores a $\rho' < 0.5\rho$, el bloque de compresiones tiende a desplazarse hacia la armadura traccionada, siendo las redistribuciones por fluencia predominantes a las de retracción. Los valores medios obtenidos son $c/c_0 = 1.25$.
- Cuando se disponen fuertes cuantías de armado y las relaciones de $\rho'/\rho = 1$, las redistribuciones tensionales producidas por la retracción pueden llegar a traccionar la sección completa.

3.2 Método seccional propuesto para el cálculo de curvaturas diferidas.

3.2.1 Desarrollo de la formulación.

A partir del estudio paramétrico realizado y basándose en el comportamiento mecánico de una sección de hormigón fisurada, se propone una formulación simplificada para el cálculo del incremento de curvatura que las deformaciones diferidas de retracción y fluencia producen en la sección.

Partiendo de un cálculo lineal, los planos de tensiones y deformaciones en el instante t_0 , instante de aplicación de la carga, y tiempo infinito (t), son los representados en la Figura 38. En ellos queda representado el comportamiento observado en el estudio paramétrico.

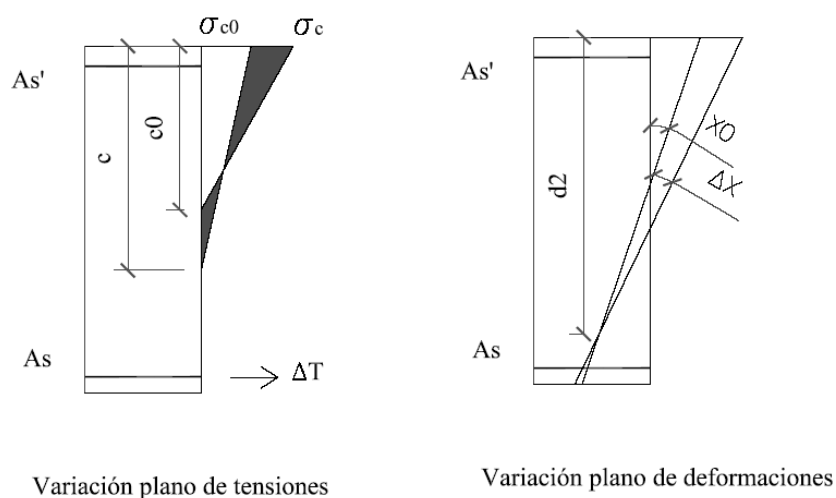


Figura 38 Variación del plano de deformaciones y del plano de tensiones en una sección de hormigón armado.

El hormigón entre t_0 y t se descarga y la profundidad del bloque de compresiones baja, desplazándose hacia la armadura traccionada. El punto de rotación d_2 se encuentra próximo a la armadura traccionada, que casi no incrementa su deformación. La relación $c/c_0 > 1$, siendo su valor medio 1.25.

En la formulación, y partiendo de los resultados obtenidos en el 3.2.4, se han adoptado las siguientes hipótesis:

- La sección se encuentra fisurada y sometida a momento constante.
- Las secciones planas permanecen planas tras la deformación.
- Se considera adherencia perfecta entre la armadura y el hormigón.
- Se considera un comportamiento elástico y lineal del hormigón y el acero en servicio. No se considera la resistencia a tracción del hormigón.
- Para considerar el efecto de la fluencia bajo tensiones de carácter variable en el tiempo se considera el método del modulo efectivo ajustado a la edad a través del coeficiente de envejecimiento (AAEMM).
- La deformación y tensión en la armadura a tracción se mantienen constantes con el tiempo.
- Sólo retrae la zona de hormigón en compresión.

Para cualquier instante de tiempo se puede expresar el equilibrio de fuerzas de manera incremental:

$$\Delta C_c + \Delta C_s + \Delta T = \frac{1}{2} \sigma_c b c - \frac{1}{2} \sigma_{c0} b c_0 + A'_s \Delta \sigma'_s - A_s \Delta \sigma_s = 0 \quad [3.2]$$

siendo

- ΔC_c variación de compresión con el tiempo.
- ΔC_s variación de la compresión en la armadura comprimida con el tiempo.
- ΔT variación de la fuerza en la armadura traccionada con el tiempo.
- c_0 profundidad del bloque de compresiones en t_0 .
- c profundidad del bloque de compresiones para $t > t_0$.
- σ_{c0} tensión máxima en el hormigón para $t = t_0$.
- σ_c tensión máxima en el hormigón para $t > t_0$.
- $\Delta \sigma_s$ incremento de tensión en la armadura traccionada en $t > t_0$.
- $\Delta \sigma'_s$ incremento de tensión en la armadura comprimida en $t > t_0$.

De acuerdo con la hipótesis adoptada, la tensión y deformación en la armadura se mantienen constantes. La ecuación 3.2 se puede reescribir:

$$\sigma_c = \frac{2}{b \cdot c} \left(\frac{\sigma_{c0} b c_0}{2} + \Delta \sigma'_s \cdot A'_s \right) \quad [3.3]$$

Por compatibilidad de deformaciones, el incremento de curvatura y deformación en la fibra más comprimida se pueden expresar:

$$\Delta\psi = \frac{\Delta\varepsilon_c}{d_2} = \frac{\Delta\varepsilon'_s}{d_2 - d'} \quad [3.4]$$

$$\Delta\varepsilon_c = \frac{\Delta\varepsilon'_s}{d_2 - d'} = \frac{\Delta\sigma'_s}{E_s} \frac{d_2}{d_2 - d'} \quad [3.5]$$

siendo:

$\Delta\psi$ incremento de curvatura en un instante $t > t_0$.

$\Delta\varepsilon'_s$ incremento de deformación en la armadura comprimida en un $t > t_0$.

$\Delta\varepsilon_c$ incremento de deformación en la fibra más comprimida de hormigón en un $t > t_0$.

d_2 profundidad del punto de giro. En $t = t_0$, $d_2 = x_0$, es decir la posición de la fibra neutra coincide con la profundidad del bloque de compresiones.

d canto de la sección.

d' recubrimiento de la armadura comprimida.

El método del coeficiente de envejecimiento, expuesto en el apartado 2.8, permite obtener el incremento de deformación en el hormigón entre dos instantes de tiempo, evaluando todo el historial de tensiones variables, cómo si estas se produjesen en un t_{eq} comprendido entre t_0 y t .

La expresión 3.6 proporciona el incremento de deformación en el hormigón, considerando la variación de tensiones que introducen las redistribuciones tensiones de carácter diferido:

$$\Delta\varepsilon_c = \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} \varphi + \frac{\Delta\sigma_c}{E_{c0}} (I + \chi\varphi) + \varepsilon_{sh} = \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} \varphi + \frac{\sigma_c - \sigma_{c0}}{E_{c0}} (I + \chi\varphi) + \varepsilon_{sh} \quad [3.6]$$

siendo

$\Delta\sigma_c$ incremento de tensión en el hormigón des de t_0 hasta $t > t_0$.

φ fluencia del hormigón para un instante $t \geq t_0$.

ε_{sh} deformación de retracción para un instante $t \geq t_0$.

χ coeficiente de envejecimiento para un instante $t \geq t_0$. Para este trabajo se considera un valor de $\chi = 0,8$.

Una observación importante sobre la ecuación 3.6 es que el valor del coeficiente de fluencia φ relaciona la deformación de fluencia entre el instante t y el t_0 , pudiendo ser $t_0 \neq 28$ días. Cuando $t_0 = 28$ días el coeficiente de fluencia φ coincide con el coeficiente de fluencia obtenido de las normativas. Para $t_0 \neq 28$ días el coeficiente de

fluencia φ de la ecuación (3.6) y el obtenido del cálculo de las normas, evaluado para $t_0=28$ días se relacionan según la expresión (2.4):

$$\varphi(t, t_0) = \varphi(t, t_0)_{28} \cdot \frac{E_c(t_0)}{E_c(28)}$$

Substituyendo las ecuaciones (3.4) y (3.5) en la (3.6), considerando que $\Delta\varepsilon'_s = 0$, que $d_2=d$, y realizando diversas operaciones se obtiene la siguiente expresión para el cálculo del incremento de curvatura de secciones de hormigón fisuradas:

$$\Delta\psi = \frac{\Delta\sigma'_s}{E_s(d-d')} = \frac{\varepsilon_{c0} \cdot \left(\varphi - \varphi\chi - 1 + \frac{c_0}{c} (1 + \chi\varphi) \right) + \varepsilon_{sh}}{d \left(1 + \alpha \rho' \frac{2(1 + \chi\varphi) \left(1 - \frac{d'}{d} \right)}{\left(\frac{c}{c_0} \right) \cdot \left(\frac{c_0}{d} \right)} \right)} \quad [3.7]$$

siendo

$\rho' = A'_s / bd$ cuantía geométrica de la armadura a compresión.
 $\alpha = E_s / E_{c0}$ ratio entre el modulo de deformación del acero y el hormigón en t_0 .

En la expresión (3.7) se observa cómo el incremento de curvatura depende de valores conocidos: el coeficiente de fluencia φ , del valor de ε_{sh} , de la deformación del hormigón en t_0 , del coeficiente de envejecimiento y de la profundidad del bloque de compresiones en t_0 . El único valor no conocido "a priori" es el valor del bloque de compresiones c .

A partir del estudio paramétrico realizado la ecuación (3.7) se puede simplificar considerando que la relación de profundidades del bloque de compresiones $c/c_0 = 1.25$. De las hipótesis planteadas se adopta $\chi = 0,8$.

Adicionalmente en aras de la simplicidad, se han considerado los siguientes valores para los términos del denominador.

- Profundidad inicial de la fibra neutra, $c_0/d = 0.30$, por tratarse del valor medio de todas las secciones analizadas en el estudio paramétrico, y por ser un valor habitual en secciones fisuradas sometidas a flexión simple.
- ratio $d'/d = 0.1$.
- coeficiente de fluencia $\varphi = 2.0$, por considerarse un valor medio entre hormigones normales y de alta resistencia.

La expresión (3.8) se obtiene substituyendo los valores anteriores en la ecuación (3.7):

$$\Delta\psi \cong \frac{\varepsilon_{c0} \cdot (0.84\varphi - 0.20) + \varepsilon_{sh}}{d(1+12\alpha\rho')} = \frac{\varepsilon_{c0} \cdot 0.84\varphi - 0.20}{d} + \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \cdot \frac{1}{1+12\alpha\rho'} \quad [3.8]$$

El incremento de curvatura diferida está compuesto por dos sumandos: un término relacionado con la fluencia ($\Delta\psi_{cr}$) y otro asociado al incremento de curvatura producido por la retracción. $\Delta\psi_{sh}$.

Considerando

$$\frac{\varepsilon_{c0}}{d} = \frac{\varepsilon_{c0}}{c_0} \cdot \frac{c_0}{d} = \psi_0 \frac{c_0}{d} \quad [3.9]$$

siendo para t_0 $c_0=x_0$

La ecuación (3.8) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\Delta\psi = \Delta\psi_{cr} + \Delta\psi_{sh} = \psi_0 \frac{x_0}{d} \frac{0.84\varphi - 0.2}{1+12\alpha\rho'} + \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \frac{1}{1+12\alpha\rho'} \quad [3.10]$$

siendo el ratio x_0/d función de las cuantías de armadura a tracción y compresión, ecuación (2.20).

Se obtiene por tanto una formulación simplificada que depende de los parámetros anteriormente citados, coeficiente de fluencia, valor de ε_{sh} , profundidad del bloque de compresiones, más la curvatura instantánea de la sección y las cuantías de armadura de tracción y compresión. Esta formulación se basa además, en el comportamiento mecánico descrito en el estado del conocimiento y validado en el estudio paramétrico realizado.

La dependencia directa de la variación de curvatura diferida del coeficiente de fluencia φ así como del valor de retracción, hacen que la expresión (3.10) sea independiente de la ecuación utilizada para evaluar la función de fluencia o retracción, independizándose de los errores que éstas puedan introducir, o incluso pudiéndose ajustar con datos experimentales.

Un aspecto importante de la expresión (3.10) es que ha sido ajustada a partir de relaciones $c/c_0 = 1.25$, es decir, suponiendo que la profundidad del bloque de compresiones aumenta con el tiempo. Esta simplificación es correcta para la gran mayoría de secciones sometidas a flexión simple, pero como se ha visto, Figura 18, ciertas cuantías y relaciones ρ'/ρ , conllevan disminuciones importantes del bloque de compresiones llegando incluso a quedar toda la sección traccionada.

Las secciones en que el bloque de compresiones se reduce significativamente presentan incrementos de curvatura diferida mucho menores, encontrándose el límite en $\Delta\psi = 0$ en aquellas secciones en que la sección pasa a estar totalmente fisurada.

Las secciones fuertemente armadas con niveles de tensión inicial bajos pueden llegar a traccionarse completamente por efecto de las redistribuciones tensionales de retracción. Es por tanto de interés conocer el momento mínimo al que debe estar sometida la sección para que las redistribuciones tensionales de retracción no superen a las de fluencia.

En el momento en que la sección fisura en su totalidad, el momento exterior pasa a ser resistido íntegramente por las armaduras. Del equilibrio de fuerzas y momentos, así como de la compatibilidad de deformaciones, se obtiene la curvatura de la sección en función de las armaduras A_s y A'_s .

$$A'_s \sigma'_s - A_s \sigma_s = 0 \quad [3.11]$$

$$M = A_s \sigma_s (d - d') = A'_s \sigma'_s (d - d') \quad [3.12]$$

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\sigma_s}{E_s (d - x)} = \frac{\sigma'_s}{E_s (x - d')} \quad [3.13]$$

$$x = \frac{A_s d + A'_s d'}{A_s + A'_s} \quad [3.14]$$

La curvatura en una sección completamente fisurada:

$$\psi = \frac{\varepsilon_s}{d - x} = \frac{\sigma_s}{E_s (d - x)} = \frac{M}{E_s (d - d')^2} \frac{A_s + A'_s}{A_s \cdot A'_s} \quad [3.15]$$

La sección está totalmente fisurada cuando en un instante de tiempo t , la fibra más comprimida del hormigón pasa a traccionarse, es decir cuando la variación de tensión en el hormigón por deformaciones diferidas iguala a la tensión instantánea del hormigón $\Delta\sigma_c = -\sigma_{c0}$.

Partiendo de la expresión de deformaciones en el tiempo propuesta en el método del coeficiente de envejecimiento y considerando las ecuaciones de compatibilidad (3.13), la deformación en el hormigón para cualquier instante de tiempo t es:

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}}(1 + \varphi) - \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}}(1 + \chi\varphi) + \varepsilon_{sh} = \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}}\varphi(1 - \chi) + \varepsilon_{sh} = \frac{\sigma_s'}{E_s} \frac{x}{x - d'} \quad [3.16]$$

Sustituyendo σ_s' y de las ecuaciones (3.13) y (3.15) en la ecuación (3.16) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} \varphi (1 - \chi) + \varepsilon_{sh} \geq M \frac{A_s d + A_s' d'}{E_s (A_s' (d - d'))^2} \quad [3.17]$$

adimensional al que debe estar sometida la sección para evitar que ésta se fisure por efecto de las redistribuciones tensionales de retracción y fluencia.

$$0.2 \varphi + 2.5 \frac{E_c \varepsilon_{sh}}{f_c} \geq 2.5 \frac{\mu}{\alpha} \frac{\rho + \rho' \frac{d'}{d}}{\left(\rho' \left(1 - \frac{d'}{d}\right)\right)^2} \quad [3.18]$$

3.2.2 Validación de la formulación.

Los 72 casos analizados en el estudio paramétrico han servido de base para la validación de las formulaciones propuestas, ecuaciones (3.10) y (3.15). Las curvaturas diferidas de las 72 secciones calculadas mediante el programa de análisis no lineal CONS se han comparado con las obtenidas del método simplificado. En la Figura 39 quedan representados gráficamente los resultados. El error medio es del -1.7%, la desviación estándar del 2.6%. El error máximo, por exceso, es del 3.5%, siendo el mínimo del -7.75%. En las secciones donde las redistribuciones seccionales acaban por traccionar toda la sección se ha aplicado la ecuación (3.15). Los errores en estos casos son mínimos ya que la formulación propuesta reproduce el comportamiento seccional real.

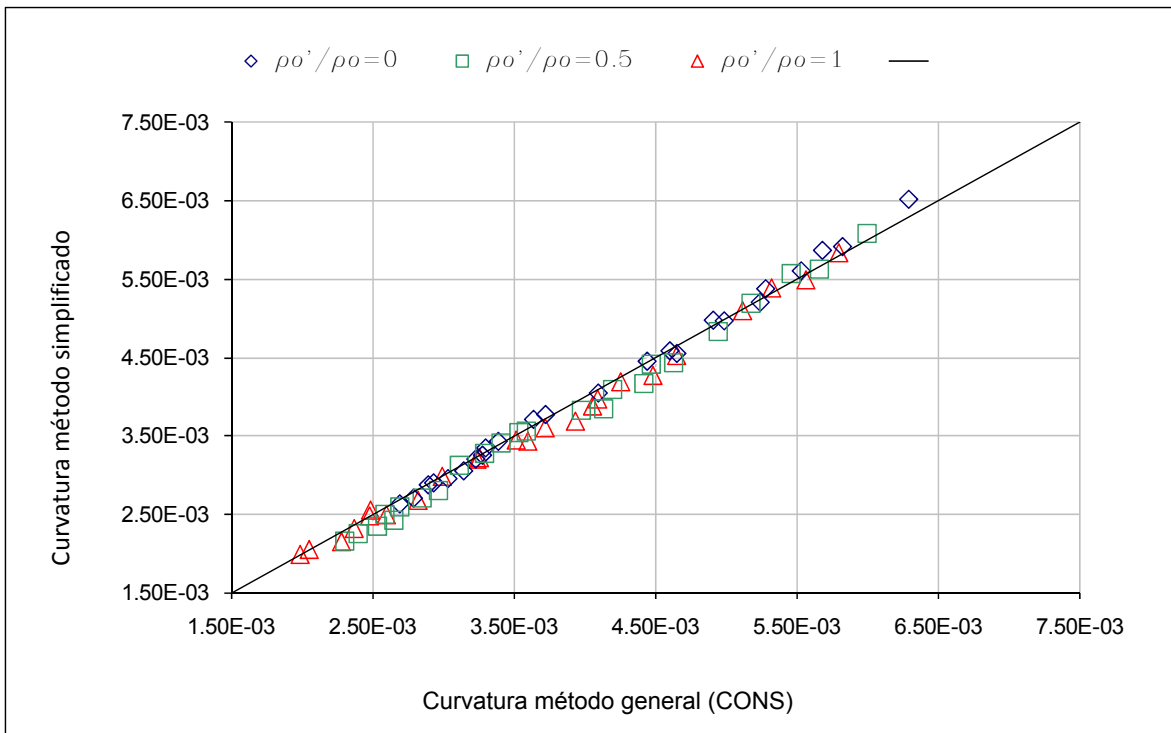


Figura 39 Comparación de los resultados obtenidos mediante el método simplificado y el modelo de análisis no-lineal.

La formulación propuesta en la ecuación (3.10) parte del equilibrio de fuerzas, de la compatibilidad de deformaciones y de las ecuaciones constitutivas del hormigón y el acero, considerando que el incremento de tensión en el acero es nulo. Por ello, el equilibrio de momentos no se verifica de manera estricta. Se ha analizado posteriormente el error cometido al no considerar equilibrio de momentos siendo éste del 2.24%.

El error cometido se ha obtenido calculando el momento interno por integración de las tensiones obtenidas en el modelo, tanto en el hormigón como en el acero, y comparándolo con el momento externo aplicado.

3.3 Propuestas de cara a la normativa para el cálculo de flechas.

3.3.1 Introducción

Los métodos simplificados encuentran su ámbito de aplicación en elementos de inercia constante sometidos a flexión simple o flexocomprimidos. Para elementos de sección variable o solicitados por distribuciones de carga poco habituales, se debe recurrir, para el cálculo de deformaciones, a procedimientos generales o cálculos numéricos.

La revisión que se está realizando del Código Modelo MC-90 incluye una nueva propuesta de método simplificado para el cálculo de deformaciones instantáneas y diferidas, que mejore la actual formulación, proporcionando una metodología basada

en el comportamiento mecánico de las secciones y que incluya los parámetros más determinantes en el cálculo de deformaciones.

Las propuestas definidas en éste capítulo para el cálculo de deformaciones son las incluidas en dicha revisión del MC-90.

3.3.2 Propuesta de formulación para el cálculo de flechas instantáneas.

La versión actual del Código Modelo no propone ninguna formulación simplificada para el cálculo de flechas instantáneas, sino que proporciona una formulación directamente para el cálculo de flechas totales (ecuación 2.42).

La futura revisión del Código modelo incluirá la siguiente propuesta para la determinación de las flechas instantáneas basada en las formulaciones habituales de cálculo de flechas:

$$y_{inst} = k \cdot \frac{M \cdot l^2}{E_c \cdot I_{eff}} \quad [3.19]$$

La rigidez efectiva del elemento, I_{eff} , se obtiene a partir de la expresión (3.20). Esta formulación es equivalente a realizar una interpolación de curvaturas.

$$I_{eff} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{\xi \cdot I_I + (1 - \xi) \cdot I_{II}} \quad [3.20]$$

Donde I_I es la inercia de la sección sin fisurar e I_{II} la inercia de la sección fisurada. El coeficiente de interpolación se define como:

$$\xi = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2 \quad [3.21]$$

Donde:

- M_{cr} el momento de fisuración de la sección considerando la inercia bruta del elemento.
- M el momento máximo al que está sometida la sección. Es importante subrayar que M no es necesariamente siempre el momento correspondiente a la carga para la cual se desea calcular la flecha, sino el máximo momento que puede actuar sobre la sección en la combinación característica. Se trata de un aspecto importante pues se pueden producir casos en que bajo cargas permanentes el momento $M < M_{cr}$ y sin embargo, la pieza se fisure bajo la actuación de sobrecargas.
- β factor que considera el tipo de carga al que está sometida la sección. Para cargas de tipo instantáneo es igual a la unidad, mientras que para cargas cíclicas o permanentes toma el valor de 0.5.

Tanto I_I como I_{II} son valores medios de inercia bruta (o homogeneizada en casos de cuantías elevadas) e inercia fisurada a lo largo de la pieza respectivamente. Se debe tener en cuenta que las vigas de hormigón armado se proyectan generalmente

optimizando los armados en función de la ley de momentos. Como consecuencia, la posición de la fibra neutra instantánea varía a lo largo del elemento debido a las diversas disposiciones de armado.

El método propuesto para el cálculo de las inercias promedio consiste en determinar unas cuantías medias de armadura a compresión y tracción en función de las diversas disposiciones de armado (ajustadas a la ley de momentos). A partir de ρ_m y ρ'_m se calcula la posición de la fibra neutra "promediada".

Las cuantías de armadura medias se calculan a partir de las siguientes expresiones

$$\rho_m = \rho_A \frac{l_A}{l} + \rho_B \frac{l_B}{l} + \rho_C \frac{l_C}{l} \quad [3.22]$$

$$\rho'_m = \rho'_A \frac{l_A}{l} + \rho'_B \frac{l_B}{l} + \rho'_C \frac{l_C}{l} \quad [3.23]$$

siendo

$\rho_A, \rho'_A,$	Cuantías de armadura a tracción a compresión en el apoyo A
l_A	Longitud de la viga en la zona de influencia del momento negativo en el apoyo A.
l_B	Longitud de la viga en la zona de influencia del momento negativo en el apoyo B.
l_C	Longitud de la viga en la zona influencia del momento positivo
ρ_B, ρ'_B	Cuantías de armadura a tracción a compresión en el apoyo B

Se debe verificar $l=l_A+l_B+l_C$, siendo l la longitud del elemento.

Los valores de l_A, l_B y l_C se deben obtener de la ley de momentos, aunque de manera simplificada los siguientes valores pueden ser adoptados para los casos estipulados:

- En vigas empotradas-apoyadas, y para vanos extremos de vigas continuas, ratios $l_A/l=0.25$ y $l_B/l=0.75$ para el apoyo empotrado y apoyado respectivamente.
- En vigas biempotradas $l_A/l=l_B/l=0.20$, and $l_C/l=0.60$.
- En vanos interiores de vigas continuas $l_A/l=l_B/l=0.15$, and $l_C/l=0.70$.

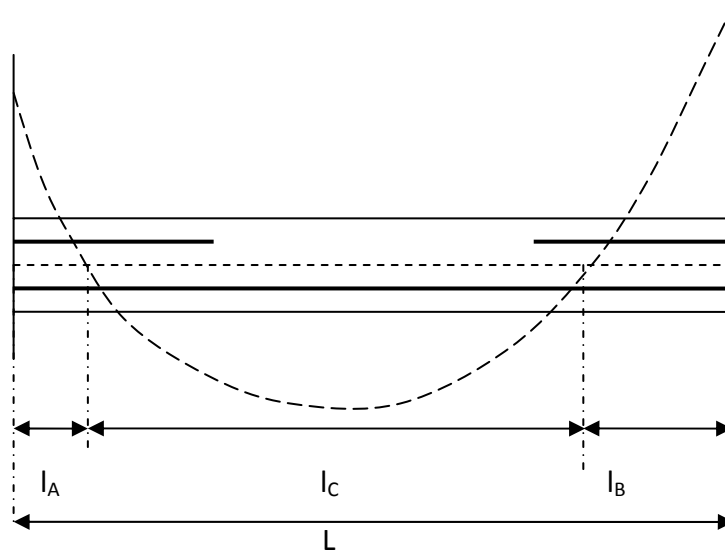


Figura 40 Ley de momentos para definir l_A , l_B y l_C .

A partir de ρ_m y ρ'_m se calcula la posición de la fibra neutra promediada mediante la expresión general (2.19) o mediante la expresión simplificada de ésta, aplicable a secciones rectangulares o asimilables.

$$\frac{x}{d} = \frac{0.18 + 1.8 \alpha \rho_m}{1 + \frac{\rho'_m d'}{\rho_m d}} \quad [3.24]$$

Conocida la posición de la fibra neutra, la inercia fisurada se obtiene mediante la siguiente expresión. Ésta se obtiene obtenida de calcular el momento de inercia de la sección considerando sólo la zona de hormigón comprimida y las armaduras A_s y A'_s homogeneizadas respecto al centro de gravedad de la sección fisurada determinante.

Para el caso de secciones rectangulares esta es:

$$I_{II} = \alpha \left(A_s (d - x)(d - x/3) + A'_s (x - d')(x/3 - d') \right) \quad [3.25]$$

En la ecuación (3.25) las armaduras A_s y A'_s se expresan a partir de las cuantías medias de las expresiones (3.22) y (3.23).

$$A_s = \rho_m \cdot bd \quad \text{y} \quad A'_s = \rho'_m \cdot bd$$

Una aproximación directa a la inercia fisurada media de un elemento, expresión (3.25), a partir de las cuantías medias ρ_m y ρ'_m puede obtenerse de la siguiente ecuación:

$$I_{II} = \frac{bd^3}{12} \left[0.12 + 5.4 \alpha \rho_m \left(1 + \frac{\rho'_m \cdot d'}{\rho_m \cdot d} \right) \right] \quad [3.26]$$

Donde ρ_m , ρ'_m son las cuantías medias de armadura de tracción y compresión de la sección obtenida según las expresiones (3.22) y (3.23) respectivamente.

El procedimiento descrito en este apartado introduce ciertas mejoras en comparación con el planteado por Branson para el cálculo de flechas instantáneas. La formulación de Branson para el caso de vigas biempotradas implica calcular tres inercias fisuradas, secciones de empotramiento y sección de centro luz, mientras que el cálculo de la I_{II} con el método propuesto sólo se debe realizar una sola vez a partir de ρ_m y ρ'_m .

La validez del método se comprueba en el capítulo 4 siendo en general una muy buena aproximación para el cálculo de flechas instantáneas.

3.3.3 Propuesta de formulación para el cálculo de flechas totales.

Las flechas totales, definidas en el estado del conocimiento, son la suma de las instantáneas mas las diferidas. Su determinación es el objetivo de la comprobación del estado límite de deformaciones.

La formulación propuesta para el cálculo de flechas totales en piezas de hormigón armado no fisuradas es relación clásica:

$$y_{tot} = y_{inst} + y_{diferida} = y_{inst} (1 + \varphi(t, t_0)) \quad [3.27]$$

Como se observó en el estado del conocimiento, esta formulación al no considerar la coacción que las armaduras realizan a la libre deformación del hormigón, proporciona resultados conservadores. En piezas fuertemente armadas y con disposiciones simétricas de armado los resultados son muy conservadores, aunque este tipo de secciones no son muy habituales en flexión simple.

En elementos en que el momento de sollicitación supera el de fisuración la flecha total se calcula

$$y_{tot} = y_{inst} + y_{diferida} = y_{inst} + y_{cr} + y_{sh} \quad [3.28]$$

El método simplificado propuesto para el cálculo de flechas diferidas en piezas fisuradas, en dicha revisión, encontrándose actualmente en aprobación por parte del grupo de trabajo GT4.1 "Serviceability Models" de la Federation Internationale du Beton (FIB), se basa en el planteado por Marí et.al [31].

En el apartado 3.2.1 se desarrolla el método propuesto a nivel sección para determinar el incremento de curvatura en una sección de hormigón armada fisurada.

$$\Delta\psi = \Delta\psi_{cr} + \Delta\psi_{sh} = \psi_0 \frac{x_0}{d} \frac{0.84\varphi - 0.2}{1 + 12\alpha\rho'} + \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \frac{1}{1 + 12\alpha\rho'}$$

A partir de esta curvatura, la flecha se obtiene como:

$$\Delta y_g = \Delta y_{cr} + \Delta y_{sh} = y_{inst} \frac{x_0}{d} \frac{0.84\varphi - 0.20}{1 + 12 \alpha \rho_m'} + \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \frac{1}{1 + 12 \alpha \rho_m'} k_{sh} \frac{l^2}{8} \quad [3.29]$$

siendo

l longitud del vano del elemento.
 ε_{sh} is the shrinkage strain at the moment of evaluation of the deflection
 k_{sh} constante que depende de las condiciones de apoyo. Siendo:

$k_{sh} = 4.0$ para voladizos
 $k_{sh} = 1.0$ para vigas biapoyadas
 $k_{sh} = 0.7$ para vanos extremos en vigas continuas
 $k_{sh} = 0.5$ para vanos intermedios de vigas continuas.

Los diseños actuales de elementos de hormigón armado, trabajando a flexión, limitan el nivel de tensión en el hormigón a 0.4-0.45 f_{ck} , siendo los valores de los momentos de cargas permanentes en servicio del orden de 1.5 a 2 veces el momento de fisuración, en función de la cuantía de armadura dispuesta y la resistencia f_{ctk} del hormigón. La aplicación de sobrecargas puede incrementar la relación M/M_{cr} hasta valores comprendidos entre el 2.5 a 4 M_{cr} .

Como se vio en el estado del conocimiento, la degradación de la contribución del hormigón entre fisuras es función del nivel de cargas, y por ello, la rigidez del elemento fisurado disminuye con el aumento de la carga aplicada. La rigidez efectiva del elemento para relaciones $M/M_{cr}=2.5$ a 3.5 puede disminuir hasta un 80%, siendo su valor I_{eff} próximo al valor I_{II} , calculado según lo contemplado en el apartado 3.3.2. En definitiva, el comportamiento diferido del elemento tiende a asimilarse al comportamiento diferido de su sección fisurada determinante.

El primer término de la expresión (3.29) corresponde al incremento de flecha producido por fluencia. La posición de la fibra neutra x_0 es la calculada a partir de ρ_m y ρ_m' . El segundo término corresponde al aumento de flecha producido por la retracción.

Aunque el cálculo del incremento de flecha producida por fluencia es aplicable a cualquier tipo de sollicitación, por ser el incremento proporcional a la flecha instantánea, la formulación del incremento de flecha producido por retracción se determina para vigas sometidas a carga uniformemente repartida.

El factor k_{sh} se determina a partir de la integración de curvaturas que la retracción induce en el elemento, considerando el patrón de fisuración de éste, que a su vez depende del tipo de carga aplicada. Para las cargas permanentes habituales en estructuras de edificación (peso propio, pavimentos, etc.) el valor de k_{sh} toma los valores definidos en la ecuación (3.24). Para otras tipologías de carga, cargas puntuales por ejemplo, el valor de k_{sh} se debe obtener por integración de curvaturas, Ghali [1].

3.3.4 Ejemplos de aplicación del método propuesto para flechas.

En este apartado se desarrollan dos ejemplos de cálculo de deformaciones mediante el método propuesto, comparándose los resultados con los obtenidos mediante un modelo de análisis no lineal.

3.3.4.1. Viga biapoyada

Se considera una viga biapoyada de 8 metros de luz, de sección rectangular. Las dimensiones de la viga son: $b=0.30$ m., $h=0.65$ m., $\rho=0.6\%$, $\rho'=0.15\%$, $d=0.6$ m., $d'=0.05$ m. La viga está sometida a una carga uniformemente repartida de valor $q=17$ kN/m aplicada en un $t=t_0$. Otros datos de interés son: $E_s=200$ GPa ; $E_c(t_0)=30.0$ GPa; $\varphi(t,t_0)=2.3$; $\chi(t,t_0)=0.8$ $\epsilon_{cs}(t,t_0)=-356 \times 10^{-6}$; $f_{ct}=2.5$ MPa, $\alpha=6.67$.

El momento de fisuración es $M_{cr} = 52.8$ kN·m y el momento en el centro de luz es 136.0 kN·m, esto es $M/M_{cr}=2.57$. La deformación instantánea elástica, calculada con la inercia bruta del elemento es de 4.4 mm.

La deformación instantánea según lo propuesto en el apartado 3.3.2 se calcula considerando unas cuantías medias ρ_m y ρ'_m iguales a las de la sección de centro luz ya que elemento está simplemente apoyado en sus extremos. La inercia es $I_I=758879$ cm⁴, considerando la sección homogeneizada. A partir de la relación $x/d=0.246$, $A_s=1080$ mm², $A'_s=270$ mm² se determina la inercia fisurada $I_{II}=179162$ cm⁴, según la ecuación (3.25). El factor de interpolación, considerando $\beta=1$, para la determinación de la inercia efectiva vale $\zeta=0.849$, siendo $I_{eff}=202523$ cm⁴. La flecha instantánea es:

$$y_{inst} = \frac{5}{384} \frac{17 \cdot 8000^4}{30000 \cdot 202523 \cdot 10^4} = 14.92 \text{ mm}$$

Según el método Bilineal del CEB, incluido en el EC-2, la deformación instantánea del elemento fisurado, considerando las cuantías de armado, es de 14.78 mm, siendo $y_I=4.05$ mm y $y_{II}=16.7$ mm las deformaciones considerando inercia sin fisurar y fisurada respectivamente. El factor de interpolación, considerando $\beta=1$, vale $\zeta=0.849$.

En [23] se propone para el coeficiente ζ una dependencia lineal de M_{cr}/M en lugar de la cuadrática obtenida de la relación analítica de $\sigma-\epsilon$ de la Figura 21. Este ajuste del parámetro ζ es empírico. Para este caso $\zeta=0.61$, considerando $\beta=1$, siendo por tanto el valor de la flecha instantánea 11.8 mm.

Aplicando la fórmula de Branson, la flecha instantánea obtenida es $y=13.78$ mm siendo la inercia equivalente 219360 cm⁴ algo superior a la obtenida por el método simplificado propuesto.

El valor de la flecha instantánea obtenida en el centro de luz, mediante el programa de análisis no lineal CONS, es 14.4 mm, siendo la relación entre la flecha calculada con el método simplificado y ésta de 1.03 .

Aumentando la carga a $q=22$, siendo $M/M_{cr}=3.33$ y repitiendo el proceso se obtiene con el método propuesto ($\zeta =0.91$):

$$y_{inst} = \frac{5}{384} \frac{22 \cdot 8000^4}{30000 \cdot 192314.76 \cdot 10^4} = 20.33 \text{ mm}$$

El valor de la flecha instantánea obtenida en el centro de luz, mediante el programa de análisis no lineal CONS, es 20.2 mm, reduciéndose el error a un 1.006.

Cálculo de flechas bajo cargas de larga duración y cíclicas.

Se parte de los mismos datos de la sección anterior.

Las deformaciones totales producidas por las cargas de tipo permanente se calculan

$$y_{tot} = y_{inst} + \Delta y$$

El incremento de flecha que la fluencia y la retracción producen se calcula según el método propuesto mediante:

$$\Delta y = \Delta y_{cr} + \Delta y_{sh} = y_{inst} \frac{x_0}{d} \frac{0.84\varphi - 0.20}{1 + 12 \alpha \rho'_m} + \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \frac{1}{1 + 12 \alpha \rho'_m} k_{sh} \frac{l^2}{8}$$

siendo en este caso la y_{inst} calculada considerando un factor $\beta=0.5$ para considerar los efectos que las cargas de larga duración tienen sobre la degradación del *tension stiffening*.

Considerando un factor de interpolación $\zeta =0.92$ para el cálculo de la I_{eff} cuyo valor es de 190500 cm^4 , la flecha y_{inst} , calculada mediante el método propuesto considerando $q=17 \text{ KN/ml}$, es de 15.8 mm.

Las flechas instantáneas calculadas con el EC-2 considerando $\beta=0.5$ son de 15.7 mm siendo $y_i=4.05 \text{ mm}$ y $y_{II} =16.7 \text{ mm}$. La formulación de Branson proporciona un valor de 15.2 mm (considerando como momento máximo aplicado el de la carga de precarga).

Para simular en el modelo de cálculo no lineal la degradación del *tension stiffening* en el hormigón se precarga el elemento con una carga de 22 KN/ml y que posteriormente se descarga a 17 KN/ml. El valor de la flecha obtenida con el programa CONS es de 15.6 mm.

El incremento de flecha por fluencia es:

$$\Delta y_{cr} = y_{inst} \frac{x_0}{d} \frac{0.84\varphi - 0.20}{1 + 12 \alpha \rho'_m} = 15.8 \cdot 0.246 \cdot \frac{0.84 \cdot 2.25 - 0.20}{1 + 12 \cdot 6.67 \cdot 0.0015} = 5.99 \text{ mm}$$

El incremento de flecha por retracción es:

$$\Delta y_{sh} = \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \frac{1}{1+12\alpha\rho'} \cdot k_s \frac{l^2}{8} = \frac{0.000356}{0.60} \cdot \frac{1000}{1+12 \cdot 6.67 \cdot 0.0015} \frac{64}{8} = 4.23 \text{ mm}$$

La flecha total calculada mediante el método aproximado es

$$y_{tot} = 15.8 + 5.99 + 4.23 = 26 \text{ mm}$$

La flecha total obtenida del CONS es de 25.5 mm, siendo la relación $y_{simpl}/y_{CONS} = 1.02$.

Para validar el modelo se realiza el mismo cálculo en este caso ante carga puntual en lugar de uniformemente repartida. Se aplica una carga Q en el centro de luz de valor 68 KN produciendo un M=136 kN·m.

La flecha instantánea producida por las cargas de larga duración es

$$y_{inst} = \frac{68000 \cdot 8000^3}{48 \cdot 30000 \cdot 190500 \cdot 10^4} = 12.69 \text{ mm}$$

La flecha instantánea obtenida de CONS, precargando también el elemento para simular la degradación del *tension stiffening* producida por las cargas cíclicas y de larga duración, es de 11.9 mm.

La flecha debida a la fluencia

$$\Delta y_{cr} = y_{inst} \frac{x_0}{d} \frac{0.84 \cdot \varphi - 0.20}{1+12 \alpha \rho'} = 12.69 \cdot 0.246 \cdot \frac{0.84 \cdot 2.25 - 0.20}{1+12 \cdot 6.67 \cdot 0.0015} = 4.7 \text{ mm}$$

La flecha debida a retracción es de 4.23 mm como en el caso anterior.

La flecha total calculada mediante el método, en el caso de carga puntual, aproximado es:

$$y_{tot} = 12.69 + 4.7 + 4.23 = 21.6 \text{ mm}$$

La flecha total obtenida del CONS es de 20.6 mm, siendo el ratio $y_{simpl}/y_{CONS} = 1.05$.

3.3.4.2. Viga biempotrada

Cálculo de flechas de carácter instantáneo.

Sea una viga biempotrada de 6 metros de luz. Las dimensiones de la viga son: b=0.30 m., h=0.40 m., $\rho=0.8\%$, $\rho'=0.20\%$, d=0.35 m., d'=0.05 m. La viga está sometida a

una carga uniformemente repartida de valor $q=25$ kN/m aplicada en un $t=t_0$. El armado de la viga en empotramiento es $A_s=840$ mm² ($\rho =0.008$) and $A'_s=210$ mm² ($\rho'/\rho=0.25$), el armado en centro de luz es $A_s=420$ mm² ($\rho=0.004$) and $A'_s=0$ mm². Otros datos de interés son: $E_s=200$ GPa ; $E_c(t_0)=30.0$ GPa ; $\varphi(t,t_0)=2.25$; $\chi(t,t_0)=0.8$ $\epsilon_{cs}(t,t_0)=-353E-6$; $f_{ct}=2.65$ MPa, $\alpha=6.67$.

El momento de fisuración de la sección es $M_{cr} = 20$ kN·m, el momento en el empotramiento es 75 kN·m, esto es $M/M_{cr}=3.75$ y el momento en el centro de luz es de 37.5 kN·m ($M/M_{cr}=1.875$). La deformación instantánea elástica, calculada con la inercia bruta del elemento es de 1.4 mm.

Previo paso al cálculo de flechas del elemento se deben determinar las cuantías medias ρ_m y ρ'_m .

$$\rho_m = 0.20 \cdot 0.008 + 0.60 \cdot 0.004 + 0.20 \cdot 0.008 = 0.0056 \quad (A_s = 580 \text{ mm}^2)$$

$$\rho'_m = 0.20 \cdot 0.002 + 0.60 \cdot 0.000 + 0.20 \cdot 0.002 = 0.0008 \quad (A'_s = 84 \text{ mm}^2)$$

A partir de las cuantías de armadura medias calculadas se determinan: la inercia sin fisurar $I_i=169880$ cm⁴, la posición de la fibra neutra $x/d= 0.242$ y finalmente la inercia fisurada $I_{II}= 33541$ cm⁴, según la ecuación (3.25). El factor de interpolación, considerando $\beta=1$, para la determinación de la inercia efectiva vale $\zeta =0.93$, siendo $I_{eff}=36495.40$ cm⁴. La flecha instantánea es

$$y_{inst} = \frac{1}{384} \frac{25 \cdot 6000^4}{30000 \cdot 36495.4 \cdot 10^4} = 7.7 \text{ mm}$$

Aplicando la fórmula de Branson, la flecha instantánea obtenida es $y=6.03$ mm siendo la inercia equivalente 46634 cm⁴.

El mismo cálculo realizado con el método bilineal incorporado en el EC-2 proporciona una deformación $y= 7.6$ mm, siendo $y_i=1.65$ mm $y_{II}=8.4$ mm.

El valor de la flecha instantánea obtenida en el centro de luz, mediante el programa de análisis no lineal CONS, es 7.4 mm, siendo la relación entre la flecha calculada con el método simplificado propuesto y ésta de 1.04.

Cálculo de flechas bajo cargas de larga duración y cíclicas.

Para el cálculo de la flecha instantánea se ha considerado un valor de $\beta=0.5$, el factor de interpolación $\zeta =0.96$.

$$y_{inst} = \frac{1}{384} \frac{25 \cdot 6000^4}{30000 \cdot 34653 \cdot 10^4} = 8.11 \text{ mm}$$

El incremento de flecha por fluencia es:

$$\Delta y_{cr} = y_{inst} \frac{x_0}{d} \frac{0.84 \cdot \varphi - 0.20}{1 + 12 \alpha \rho'} = 8.11 \cdot 0.242 \cdot \frac{0.84 \cdot 2.7 - 0.20}{1 + 12 \cdot 6.67 \cdot 0.0008} = 3.81 \text{ mm}$$

El incremento de flecha por retracción es:

$$\Delta y_{sh} = \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \frac{1}{1 + 12 \alpha \rho'} \cdot k_s \frac{l^2}{8} = \frac{0.000353}{0.40} \cdot \frac{1000}{1 + 12 \cdot 6.67 \cdot 0.0008} \cdot 0.5 \cdot \frac{36}{8} = 1.9 \text{ mm}$$

La flecha total calculada mediante el método aproximado es

$$y_{tot} = 8.11 + 3.81 + 1.9 = 13.82 \text{ mm}$$

La flecha total obtenida del CONS es de 14.3 mm, siendo la relación $y_{simpl}/y_{CONS} = 0.97$.

3.4 Conclusiones sobre el método propuesto.

En este capítulo se ha planteado y validado una propuesta para el cálculo de flechas diferidas a partir de las flechas instantáneas del elemento. La formulación propuesta, de carácter analítico, se basa en el comportamiento seccional de una pieza de hormigón armado fisurada sometida a carga sostenida en el tiempo. La ecuación propuesta incluye los parámetros que controlan el incremento de flecha por fluencia y retracción como son, el coeficiente de fluencia, valor de la retracción, cuantías de armado y posición de la fibra neutra inicial, siendo por ello de aplicación en fase de proyecto para el cálculo de las flechas diferidas para cualquier ambiente y resistencia de hormigón hasta 100 MPa.

La validación de la formulación propuesta, a nivel sección, queda justificada en el apartado 3.2.2.

En el apartado 3.3.3 se plantea de manera adicional una formulación simplificada para el cálculo de flechas instantáneas. La formulación expuesta se basa en la propuesta para el cálculo de flechas instantáneas, en actual discusión, para su probable inclusión en la nueva edición del Código Modelo.

Los ejemplos resueltos al final del capítulo proporcionan una muestra de la facilidad de aplicación y precisión del método de cálculo simplificado de flechas totales. Se demuestra que el método propuesto proporciona resultados satisfactorios, que se ajustan mejor que otros métodos simplificados, a los resultados obtenidos a partir de un modelo general basado en un análisis no-lineal.

4. Verificación del método de cálculo de flechas propuesto.

4.1 Verificación numérica.

La validación numérica, del método propuesto para el cálculo de deformaciones, consiste en la comparación de los resultados obtenidos del análisis de diversas vigas mediante el programa de análisis no lineal CONS [12] y la formulación simplificada propuesta.

Se han realizado dos niveles de validación: en un primer nivel se verifica el método propuesto para el cálculo de deformaciones diferidas, tomando como dato de partida la flecha instantánea calculada por el programa CONS. Posteriormente, se ha realizado otro estudio comparativo para la verificación del método propuesto del cálculo de flechas totales.

Este proceder nos permite validar los métodos simplificados de cálculo, de flechas instantáneas y diferidas, por separado pudiendo cuantificar el error cometido en cada uno de ellos.

En los siguientes apartados se detallan las bases de datos generadas así como los resultados obtenidos del análisis numérico.

4.1.1 Verificación numérica de la formulación para deformaciones diferidas.

En la verificación numérica realizada para deformaciones diferidas se ha diferenciado entre hormigones de resistencias normales (HA- 30) y de alta resistencia (HA-75).

Vigas con hormigón de resistencia convencional (HA-30)

La validación numérica, del método propuesto para el cálculo de deformaciones diferidas, consiste en la comparación de los resultados obtenidos del análisis de 32 vigas, con diferentes condiciones de apoyo, ambientes de exposición y edades de carga. En la siguiente tabla quedan definidos los datos geométricos, condiciones de apoyo, cuantías y cargas de los casos analizados.

viga	apoyos	h	b	l/h	l	d	d'	ρ -c.l.	ρ' / ρ	ρ -sup	ρ' / ρ	carga1	carga2	Ma/Mcr
1	a-a	600	300	10	6000	540	60	0.006	0	0	0	30	20	2.35
2	a-a	600	300	10	6000	540	60	0.006	0.5	0	0	30	20	2.35
3	a-a	600	300	10	6000	540	60	0.012	0.25	0	0	50	30	3.59
4	e-a	500	300	12	6000	450	50	0.006	0	0.006	1	25	20	2.74
5	e-a	500	300	12	6000	450	50	0.007	0	0.007	1	30	20	3.21
6	e-a	500	300	12	6000	450	50	0.008	0	0.008	0.5	30	20	3.21
7	e-e	400	300	15	6000	360	40	0.004	0	0.008	0.167	30	20	3.38
8	e-e	400	300	15	6000	360	40	0.006	0	0.006	0.5	25	15	2.94

Tabla 13 Definición geométrica y cuantías de armadura de las vigas analizadas (HA-30).

donde

a-a viga biapoyada

e-a viga empotrada-biapoyada

e-e viga empotrada-empotrada

carga 1 carga uniformemente repartida, en kN/ml, con la que se presolicita al elemento (permanente+sobrecarga)

carga 2 carga permanente en kN/ml, uniformemente repartida

M_a/M_{cr} relación entre el momento máximo que solicita la viga y el momento de fisuración.

Para considerar en el modelo numérico el efecto que el máximo momento en servicio (cargas permanentes más sobrecargas), produce en la reducción del *tension stiffening*, se ha presolicitado el elemento con la carga 1 y posteriormente se ha descargado dejando como carga sostenida en el tiempo la carga 2. La flecha total del elemento se ha evaluado para un $t=10000$ días.

La Tabla 14 proporciona los valores del coeficiente de fluencia y el valor de la retracción, evaluados en $t=10000$ días, utilizados por el modelo. La formulación introducida en el programa CONS para la evaluación de los parámetros de fluencia y retracción es la definida por el MC-90.

La Tabla 15 es una tabla resumen de los resultados obtenidos. En ella se proporcionan los valores medios y las desviaciones estándar de los errores obtenidos de comparar la flecha total obtenida a $t=10000$ días con el programa CONS y con el

método simplificado, tomando en este caso como dato de partida la flecha instantánea de CONS, es decir

$$y_{tot} = y_{instCONS} + y_{diferidaSIMPLIFICADA} \quad [4.1]$$

Los resultados obtenidos se han comparado con las formulaciones simplificadas existentes en el MC-90 y con el ACI-318.

viga	t ₀ =28 HR80%		t ₀ =28 HR50%		t ₀ =7 HR80%		t ₀ =7 HR50%	
	φ	ε _{sh}	φ	ε _{sh}	φ	ε _{sh}	φ	ε _{sh}
1	1.76	2.22E-04	2.45	3.97E-04	2.05	2.42E-04	2.85	4.32E-04
2	1.76	2.22E-04	2.45	3.97E-04	2.05	2.42E-04	2.85	4.32E-04
3	1.76	2.22E-04	2.45	3.97E-04	2.05	2.42E-04	2.85	4.32E-04
4	1.77	2.21E-04	2.47	3.97E-04	2.06	2.41E-04	2.87	4.33E-04
5	1.77	2.21E-04	2.47	3.97E-04	2.06	2.41E-04	2.87	4.33E-04
6	1.77	2.21E-04	2.5	3.97E-04	2.06	2.41E-04	2.919	4.34E-04
7	1.78	2.19E-04	2.5	3.97E-04	2.05	2.41E-04	2.919	4.34E-04
8	1.78	2.19E-04	2.5	3.97E-04	2.05	2.41E-04	2.919	4.34E-04

Tabla 14 Valores de los coeficientes de fluencia y retracción para las vigas analizadas (HA-30).

t ₀	HR	Método simplificado		MC-90		ACI	
		media	dev	media	dev	media	dev
28	80	1.008	0.021	0.976	0.134	1.807	0.109
28	50	1.042	0.039	0.815	0.103	1.511	0.114
7	80	1.030	0.042	0.977	0.093	1.782	0.080
7	50	1.056	0.053	0.830	0.075	1.475	0.107
total		1.034	0.044	0.899	0.126	1.644	0.185

Tabla 15 Comparación de medias y desviaciones estándar de la relación Ysimp/Ycons con diversos métodos. (HA-30)

Se observa como de manera general, los resultados obtenidos del método simplificado para el cálculo de flechas diferidas son excelentes. Los resultados obtenidos del MC-90 también presentan medias muy buenas aunque la dispersión aumenta. El ACI proporciona resultados conservadores sobretodo en aquellos ambientes de exposición con humedades relativas altas.

Vigas con hormigones de alta resistencia (HR-75)

Siguiendo el mismo criterio que en vigas de resistencia normal, se han estudiado dos edades diferentes de carga (7 y 28 días) y dos tipos de ambientes de exposición (HR=80% and HR=50%). Las definiciones geométrica, armado y carga se detallan en la Tabla 17, siendo la nomenclatura par las condiciones de apoyo la misma aplicada en la Tabla 13. Igual que en el caso de vigas de resistencia normal se ha precargado la viga para simular el efecto de degradación de la rigidez ante cargas cíclicas.

viga	apoyos	h	b	l/h	l	d	d'	ρ -cl	ρ '/ ρ	ρ -sup	ρ '/ ρ	carga1	carga2	Ma/Mcr
1	a-a	600	300	10	6000	540	60	0.008	0.25	0	0	45	25	2.24
2	a-a	600	300	10	6000	540	60	0.01	0.5	0	0	45	25	2.24
3	a-a	600	300	10	6000	540	60	0.012	0.25	0	0	50	25	2.24
4	e-a	500	300	12	6000	450	50	0.006	0	0.009	1	35	20	2.51
5	e-a	500	300	12	6000	450	50	0.007	0	0.007	1	35	20	2.51
6	e-a	500	300	12	6000	450	50	0.01	0	0.01	0.5	35	20	2.51
7	e-e	400	300	15	6000	360	40	0.008	0	0.01	0.5	40	20	2.99
8	e-e	400	300	15	6000	360	40	0.01	0	0.015	0.5	40	20	2.99

Tabla 16 Definición geométrica y cuantías de armadura de las vigas analizadas (HA-75).

En la siguiente tabla se detallan los valores del coeficiente de fluencia y retracción.

viga	t ₀ =28 HR80%		t ₀ =28 HR50%		t ₀ =7 HR80%		t ₀ =7 HR50%	
	φ	ϵ_{sh}	φ	ϵ_{sh}	φ	ϵ_{sh}	φ	ϵ_{sh}
1	1.19	1.20E-04	1.66	2.03E-04	1.4	1.23E-04	1.94	2.21E-04
2	1.19	1.20E-04	1.66	2.03E-04	1.4	1.23E-04	1.94	2.21E-04
3	1.19	1.20E-04	1.66	2.03E-04	1.4	1.23E-04	1.94	2.21E-04
4	1.2	1.20E-04	1.67	2.02E-04	1.41	1.23E-04	1.92	2.21E-04
5	1.2	1.20E-04	1.67	2.02E-04	1.41	1.23E-04	1.92	2.21E-04
6	1.2	1.20E-04	1.67	2.02E-04	1.41	1.23E-04	1.92	2.21E-04
7	1.21	1.20E-04	1.7	2.01E-04	1.43	1.30E-04	1.99	2.21E-04
8	1.21	1.20E-04	1.7	2.01E-04	1.43	1.30E-04	1.99	2.21E-04

Tabla 17 Comparación de medias y desviaciones estándar de la relación Y_{simp}/Y_{cons} con diversos métodos. (HA-75)

Se comprueba como para el caso de vigas de hormigón armado de alta resistencia los resultados siguen el mismo patrón de comportamiento que en hormigones normales. En este caso a diferencia de los resultados de la Tabla 15, el método simplificado proporciona curvaturas sensiblemente inferiores a las obtenidas mediante el análisis numérico (relaciones $Y_{simp}/Y_{cons} < 1$). Estos resultados son lógicos ya que en algunos casos las relaciones M_a/M_{cr} de la Tabla 16 son más pequeñas que las relaciones M_a/M_{cr} de la Tabla 13, es decir el comportamiento frente a deformaciones diferidas tiende a ser menos próximo al de sección fisurada. Pese a ello los resultados muestran un buen ajuste con una dispersión mínima.

t ₀	HR	Método simplificado		MC-90		ACI	
		media	dev	media	dev	media	dev
28	80	0.943	0.029	1.398	0.419	1.831	0.210
28	50	0.971	0.034	1.175	0.311	1.515	0.237
7	80	0.971	0.028	1.249	0.345	1.865	0.203
7	50	1.002	0.031	1.057	0.246	1.549	0.228
total		0.985	0.127	1.219	0.343	1.690	0.264

Tabla 18 Comparación de medias y desviaciones estándar de la relación Y_{simp}/Y_{cons} (HA-75)

4.1.2 Verificación numérica de la formulación para deformaciones totales.

En fase de proyecto, la comprobación del estado límite de deformaciones pasa por el control de las deformaciones totales, garantizando que éstas se encuentren dentro de unos límites establecidos en función de la normativa. Validado el buen ajuste de la formulación simplificada para el cálculo diferido de flechas, se realiza un estudio sobre 8 vigas de hormigón de resistencia normal (HA-30) para verificar la formulación simplificada propuesta para el cálculo de flechas instantáneas, apartado 3.3.2. Para ésta comprobación se comparan de nuevo los resultados obtenidos del programa CONS con los del método simplificado propuesto.

Las vigas de 7.5 metros de luz presentan el siguiente patrón de cargas y las siguientes características geométricas y disposiciones de armado.

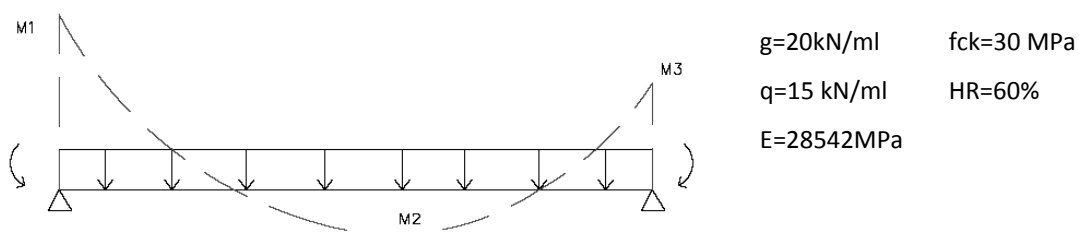


Figura 41 Esquema de cargas aplicadas

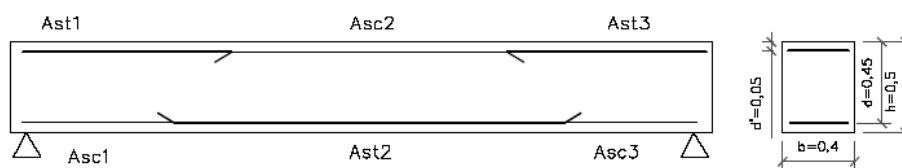


Figura 42 Disposición de armado

Viga		M1	M3	As _{t1}	As _{c1}	As _{t2}	As _{c2}	As _{t3}	As _{c3}
1	Simp	0.0	0.0	0	0	1600	0	0	0
	Gen								
2	Simp	82.0	82.0	600	0	1200	0	600	0
	Gen								
3	Simp	123.0	123.0	900	0	900	0	900	0
	Gen								
4	Simp	164.0	164.0	1200	0	600	0	1200	0
	Gen								
5	Simp	82.0	0.0	600	0	1400	0	0	0
	Gen								
6	Simp	164.0	0.0	1200	0	1200	0	0	0
	Gen								
7	Simp	246.0	0.0	1800	0	1000	0	0	0
	Gen								
8	Simp	123.0	82.0	900	0	1000	0	600	0

Tabla 19 Valores de los momentos y armados de las vigas del estudio

El cálculo de vigas biapoyadas con momentos aplicados en los extremos reproduce la ley de momentos de una viga biempotrada o empotrada-apoyada, pudiéndose comparar las flechas instantáneas del método simplificado con las obtenidas del modelo no lineal, sin considerar el efecto de las redistribuciones de esfuerzos ocasionadas por el hiperestatismo de la pieza en un análisis no lineal.

Viga		y_{g_0}	$y(g+q)_0$	ratio t_0	ycr	ysh	ydif(cr+sh)	ratio dif	ytot	ratio totales
1	Simp	19.65	34.39	0.98	9.36	5.58	14.94	1.09	49.33	1.01
	Gen	20.60	35.22				13.73		48.95	
2	Simp	15.28	26.75	1.06	6.49	4.82	11.31	1.08	38.06	1.08
	Gen	14.45	24.80				10.47		35.27	
3	Simp	10.85	19.00	0.97	4.47	4.31	8.78	1.06	27.78	1.00
	Gen	11.34	19.52				8.30		27.82	
4	Simp	5.25	9.19	0.89	2.21	2.80	5.01	1.04	14.20	0.94
	Gen	5.96	10.31				4.80		15.11	
5	Simp	18.16	31.78	1.04	8.10	5.25	13.35	1.10	45.13	1.06
	Gen	17.90	30.60				12.10		42.70	
6	Simp	14.86	26.00	1.04	6.40	4.90	11.30	1.11	37.30	1.06
	Gen	14.56	25.00				10.14		35.14	
7	Simp	10.37	18.14	0.92	4.47	4.52	8.99	1.08	27.13	0.97
	Gen	11.50	19.80				8.30		28.10	
8	Simp	13.82	24.18	1.03	5.68	4.59	10.27	1.08	34.45	1.05
	Gen	13.60	23.40				9.50		32.90	
				media	0.99			1.08		1.02
				dev.s	0.07			0.02		0.05

Tabla 20 Valores de los coeficientes de fluencia y retracción para las vigas analizadas (HA-30).

En la Tabla 20 se resumen los valores obtenidos de las deformaciones instantáneas calculadas con el programa CONS y el método simplificado. La media y la desviación estándar obtenidas para la relación y_{SIMPL}/y_{CONS} en t_0 son muy buenas.

La relación y_{SIMPL}/y_{CONS} en $t=10.000$ días sigue proporcionando unos resultados excelentes con una dispersión de resultados mínima.

4.2 Verificación experimental.

4.2.1 Base de datos utilizada.

En 1988, Bernard Espion [32] publica una base de datos en la que se incluyen 217 resultados, procedentes de 29 campañas experimentales diferentes, sobre vigas biapoyadas de hormigón armado sometidas a cargas de larga duración. La gran mayoría de estudios se basan en secciones rectangulares, existiendo algunos ensayos realizados en secciones en T. Las campañas realizadas se dividen según su procedencia

sea de Estados Unidos o de otros lugares. En el anejo A se reproduce la base de datos utilizada.

Las campañas experimentales sobre secciones rectangulares procedentes de Estados Unidos son las correspondientes a Washa y Fluck [33, 34], Branson y Metz [35], Pauw y Meyers [36] entre otros, siendo las de Yu y Winter [37] campañas sobre vigas en T. Las campañas europeas con mayor peso en la base de datos fueron realizadas por Faber [38], Jaccoud y Favre [39], Hajek [40] y Bakoss [41].

En total se trata de una base de datos con 117 vigas de sección rectangular, 64 losas y 36 secciones en T, que cubre un amplio rango dimensiones geométricas, tipos de carga, edades de carga y duración de carga aplicada.

La finalidad de dicha base de datos era el estudio y validación de los método simplificados para el cálculo de flechas diferidas, en particular del propuesto por el ACI-318, incluyéndose además una primera comparativa con el Método Bilineal propuesto por el CEB.

La humedades relativas de los ensayos cubren los rangos de ambientes de exposición secos y húmedos, siendo un 34.5% de los ensayos realizados en condiciones de humedades bajas ($HR \leq 50\%$) y un 66.5% en humedades elevadas. Analizando la base de datos se observa como la gran mayoría de las campañas experimentales procedentes de Estados Unidos se realizaron en ambientes secos mientras que las realizadas fuera presentan humedades medias entorno al 65%. Esta diferencia es la que justifica la separación de las campañas experimentales en función de su procedencia.

En [32] se incluyen los datos geométricos, armados, resistencias, cargas aplicadas etc., de los ensayos incluidos en la base de datos. La siguiente tabla resumen muestra los valores extremos de los principales parámetros de los tests incluidos en la base de datos generada.

	Mínimo	Máximo
Luz (mm)	1000	7925
Canto (mm)	75	350
Luz/canto	7.5	69
f_c (MPa)	9.8	45.7
ρ (%)	0.30	3.90
ρ' (%)	0	1.67
t_0 (días)	7	232
$t-t_0$ (días)	60	3101

Tabla 21 Valores principales máximos y mínimos de la base de datos de Espion

El tipo de carga aplicado en la gran mayoría de los ensayos consistía en una carga de tipo permanente, peso propio mas carga sostenida, aplicada en un instante t_0 . Adicionalmente en algunos ensayos se añade en un $t > t_0$ otra carga sostenida de tipo puntual, en la mayoría de casos, o uniformemente repartida.

El nivel de carga, expresado como relación M/M_{cr} , varía en cada campaña experimental. El rango de cargas aplicadas oscila entre $M/M_{cr}=4$, para las campañas de Washa y Fluck y $M/M_{cr}=2.5$ para las campañas de Pauw y Meyers. El valor medio se sitúa entorno al $M/M_{cr}=3$.

Los resultados obtenidos proporcionan valores de flechas instantáneas y de flechas totales, siendo la diferencia el valor de las diferidas.

El método simplificado de cálculo de flechas diferidas se ha comparado con dicha base de datos.

4.2.2 Resultados y conclusiones.

La validación del método propuesto para el cálculo de flechas diferidas ha consistido en la comparación de los resultados obtenidos experimentalmente con los obtenidos de la formulación simplificada. Como dato de partida se han considerado las flechas instantáneas experimentales garantizando así que el error obtenido es exclusivo del método de cálculo diferido.

A partir de los datos de resistencia a compresión y humedad relativa, se ha utilizado el Código Modelo para obtener los valores de resistencia a tracción del hormigón, coeficientes de fluencia y valor de la deformación de retracción necesario para la formulación simplificada propuesta y que no figuran en la base de datos.

Adicionalmente se comparan los resultados experimentales con otros métodos. Los valores de método CEB-bilineal y ACI-318 son los correspondientes a los obtenidos por Espion y Halleux en [42].

La siguiente tabla muestra el error y la desviación estándar para la propuesta y los diversos modelos de normativas existentes.

Método	Propuesto	CEB Bilineal	MC90-Simp	ACI
Media (simpl/experimental)	0.951	0.905	0.703	1.114
Desviación estándar	0.195	0.215	0.312	0.375

Tabla 22 Media y desviación estándar de los ratios deformación total teórica y deformación total calculada con experimentalmente.

El histograma de errores también es representativo de la validación del método.

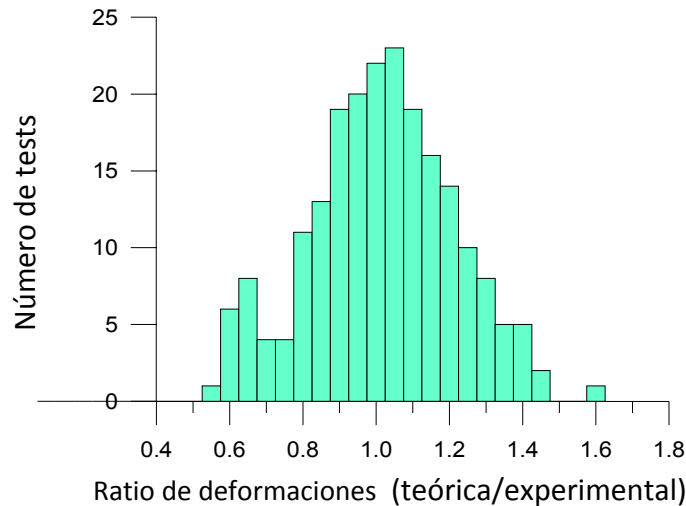


Figura 43 Histograma número de test-ratio de deformaciones

Los resultados obtenidos en la Tabla 21 validan el método propuesto al ser los valores de media y desviación 0.950 y 0.192 respectivamente. Se observa que el método propuesto es el que mejor ajusta la población de ensayos con un error medio inferior al 5% y con la menor desviación de todos. El histograma de la Figura 43 muestra como el 90% de los resultados se encuentran a ± 0.35 del valor medio. Estos valores son más que aceptables en un método simplificado ya que a la incertidumbre propia del método se le debe añadir el error incluido en la determinación del coeficiente de fluencia, el valor de la retracción, fruto de la incertidumbre en las condiciones ambientales de los ensayos, entre otras razones, o el de la resistencia a tracción del hormigón. De hecho, repitiendo los cálculos para unos valores de retracción y fluencia un 10% superiores a los proporcionados por las formulaciones del MC-90, se obtienen unos valores de media y desviación estándar de 0.996 y 0.206 respectivamente.

La formulación del método Bilineal del CEB también presenta resultados muy buenos con una desviación estándar algo superior, aunque la propuesta simplificada del método que actualmente figura en el MC-90 proporciona deformaciones muy bajas (media $\gamma_{MC-90}/\gamma_{experim}=0.703$) y desviaciones estándar con mucha dispersión, probablemente por el hecho de que la formulación no incluye la deformación por retracción. Finalmente el método del ACI es el más conservador, quedando del lado de la seguridad, presentando por ello una gran dispersión.

Espion y Halleux [42], obtienen resultados muy parecidos a los mostrados en la Tabla 22 para la formulación del ACI, analizando la base de datos generada. La formulación del ACI, para deformaciones diferidas, fue calibrada a partir de una campaña experimental realizada sobre vigas biapoyadas en ambientes de exposición secos. Efectivamente si de los 217 casos que constituyen la base experimental se eliminan aquellos casos con humedades relativas superiores al 50% los resultados mejoran reduciéndose la dispersión notablemente.

4.3 Conclusiones de la verificación numérica y experimental.

Las verificaciones experimental y numérica confirman el buen ajuste de la formulación propuesta para el cálculo de flechas diferidas. Los valores medios, de las relaciones $\gamma_{\text{simp}}/\gamma_{\text{CONS}}$ son muy buenos, superiores al 0.95 en la verificación numérica, entorno al 1.03 en la verificación experimental con hormigones de resistencia normal y entorno al 0.97 para hormigones de alta resistencia. La desviación estándar de resultados de la verificación numérica es muy baja, menor que 0.05, siendo la desviación estándar en la verificación experimental de 0.195.

El aumento de la dispersión de resultados del método simplificado, en la verificación experimental, encuentra su explicación en la más que posible inexactitud entre los coeficientes de fluencia y valores de retracción estimados a partir de los datos de humedades relativas, existentes en la base de datos, y los valores reales.

El método simplificado del MC-90 al no considerar la retracción en la formulación de flechas diferidas proporciona una mala aproximación sobretudo en aquellos casos en que la deformación por retracción es importante. Además la formulación no es válida para secciones en T.

Finalmente el método simplificado del ACI-318 proporciona resultados muy conservadores en la verificación numérica, siendo las relaciones $Y_{\text{general}}/Y_{\text{simpl}}$ superiores a 1.5. En la verificación experimental la relación se reduce a 1.12 aumentando en este caso la desviación estándar. La disminución del error medio cometido en la verificación experimental se reduce respecto a la numérica por diversas causas: existencia de un elevado número de ensayos con humedades relativas muy bajas (HR=30% y 40%) y además por diferencias en los intervalos de evaluación de las deformaciones totales. En la verificación numérica el intervalo $t-t_0$ se sitúa sobre los 10.000 días, mientras que en los ensayos, Tabla 21, los intervalos son variables con un mínimo de 60 días y un máximo de 8.5 años, aspecto que afecta al valor del coeficiente de función de la duración de la carga.

5. Conclusiones y perspectivas de futuro.

5.1 Conclusiones

De los estudios y análisis realizados en este trabajo pueden derivarse las siguientes conclusiones.

5.1.1. Conclusiones derivadas del estudio del comportamiento de vigas y losas de hormigón armado en situación de servicio.

1. En situación de servicio, la gran mayoría de los elementos solicitados a flexión de hormigón armado se encuentran fisurados incluso bajo la acción de las cargas permanentes, por lo que las flechas a corto y especialmente a largo plazo, son muy superiores a las obtenidas elásticamente.
2. Las flechas instantáneas dependen en gran medida de la relación entre el máximo momento flector, M_a , que solicita la sección crítica en situación de servicio, y el momento de fisuración de la sección, M_{cr} . Para valores de M_a próximos a M_{cr} , la flecha depende enormemente de cómo se considere la contribución del hormigón traccionado entre fisuras, por lo que los distintos métodos de cálculo de flechas instantáneas dan valores bastante diferentes en este rango. Sin embargo para momentos elevados, esta influencia es casi despreciable.
3. En piezas sin fisurar, que en hormigón armado a flexión son escasas, las secciones giran respecto del eje que pasa por el centro de gravedad de la sección y las flechas diferidas son proporcionales a las instantáneas. En estos casos, la influencia de la armadura es reducida excepto cuando se trata de cuantías altas ($\rho \geq 0.01$), siendo su

efecto más importante en la contribución al momento de inercia homogeneizado de la sección y, por tanto al momento de fisuración. Los incrementos de curvaturas medios en piezas no fisuradas son superiores al 150%.

4. Cuando la pieza está fisurada, el eje de giro varía, aproximándose a la posición de la armadura traccionada, la cual apenas incrementa su deformación y tensión en el tiempo. En tal caso, la curvatura diferida es también proporcional a la instantánea pero el factor de proporcionalidad es menor que el coeficiente de fluencia, interviniendo de forma decisiva la cuantía de armadura de tracción y la de compresión. La cuantía de armadura de tracción influye en que define la profundidad de la zona comprimida y, por tanto, la parte de sección que fluye; por tanto, a mayor cuantía, mayor curvatura de fluencia. La armadura de compresión coacciona la libre deformación por fluencia y retracción del hormigón y, por tanto, a mayor cuantía, menor curvatura diferida. Los incrementos de curvatura medios en secciones fisuradas se sitúan entorno al 50%.

5. La flecha de fluencia siempre es del mismo signo y proporcional a la instantánea. Sin embargo, la flecha de retracción no es proporcional a la instantánea, pudiendo considerarse como el resultado de una curvatura uniforme a lo largo de la pieza, fruto de la retracción de la parte no fisurada, cuyo signo depende del signo del momento solicitante.

6. Tanto la retracción como la fluencia reducen las tensiones de compresión en el hormigón y aumentan las tensiones en la armadura de compresión a lo largo del tiempo, pudiendo éstas llegar a ser considerables. Para fuertes cuantías de armadura, la sección puede llegar a fisurar en su totalidad por efecto de las deformaciones impuestas impedidas.

7. Los métodos numéricos de análisis no lineal en el tiempo, como el programa CONS utilizado en esta tesina, basados en la discretización en capas o fibras de las secciones, adoptando hipótesis de deformación plana, adherencia perfecta y comportamiento no lineal instantáneo y viscoelástico del hormigón, han demostrado ser capaces de predecir con suficiente precisión el comportamiento instantáneo y diferido de vigas de hormigón armado. Por ello se consideran adecuados para ser utilizados como laboratorio virtual de cara a verificar el método simplificado desarrollado en esta tesina

5.1.2. Conclusiones derivadas de las características y precisión del método simplificado desarrollado.

8. Se ha desarrollado un método simplificado de cálculo de flechas instantáneas y diferidas, basado en la mecánica estructural de las estructuras de hormigón armado y en el comportamiento experimentalmente observado de las mismas, que conjuga sencillez de uso y una precisión mas que suficiente para tratarse de un método simplificado.

9. El método propuesto para el cálculo de flechas diferidas, utiliza en su formulación explícitamente las variables más importantes que influyen en las deformaciones instantáneas y diferidas del hormigón armado: nivel de carga, coeficiente de fluencia, deformación de retracción, cuantías de armadura de tracción y de compresión y, para la flecha por retracción, el canto, la luz de la viga y sus condiciones de contorno.

10. Debido al carácter explícito de la formulación desarrollada, el método para el cálculo de flechas instantáneas y diferidas, puede ser utilizado en la fase de diseño, de cara a determinar dimensiones o cuantías mínimas que permitan garantizar la satisfacción del estado límite de deformaciones, sin la necesidad de realizar cálculos complejos.

11. El campo de aplicación del método es muy amplio, pues es válido para hormigones convencionales y de alta resistencia, para estructuras situadas en ambientes diversos o cargadas a diversas edades y para evaluar flechas en cualquier instante, pues todos estos factores están implícitos en los valores del coeficiente de fluencia φ y en la deformación de retracción libre ϵ_{cs}

12. Los resultados obtenidos se ha comparado con las flechas instantáneas y diferidas obtenidas mediante un modelo numérico general de análisis no lineal, de carácter riguroso y previamente contrastado con resultados experimentales, que ha sido utilizado como laboratorio virtual de simulación de ensayos. La base de datos de vigas analizadas es representativa de un amplio abanico de situaciones reales y contempla diversos niveles de carga, dimensiones de las vigas, características de los materiales, cuantías de armaduras, condiciones ambientales y edad de carga. Los resultados obtenidos son excelentes, siendo el valor medio de la relación entre las flechas totales obtenidas con el método simplificado y el método numérico de 1.02 y la desviación típica de 0.05.

13. Se ha aplicado el método simplificado para flechas diferidas a un gran número de vigas y losas ensayadas bajo carga duradera, disponibles en una completa base de datos experimental existente, y los resultados se han comparado con los experimentales. La aproximación es también muy buena (media 0.951 y desviación típica 0.195), aunque con menor precisión y mayor dispersión que en la comparación con los resultados del análisis numérico, debido a la variabilidad en la evaluación de los parámetros de fluencia y retracción y a la incertidumbre en el conocimiento de las variables ambientales y de todo tipo en los experimentos.

14. Los resultados del método propuesto para flechas diferidas mejoran sensiblemente los obtenidos por el método simplificado del actual Código Modelo 1990, del American Concrete Institute (ACI) y son comparables con ligera mayor precisión a los del método bilineal del CEB, que es un método no simplificado.

15. Como conclusión final, cabe destacar que la precisión, sencillez y amplitud del campo de aplicación del método propuesto y verificado en esta tesina, lo hace especialmente apto para su inserción en códigos de diseño de estructuras de hormigón

armado. De hecho, esta formulación, en su parte diferida, ya había sido desarrollada por el tutor de esta tesina y adoptada por la Instrucción Española del Hormigón Estructural (EHE), en su reciente revisión (EHE-08). Sin embargo, se decidió desarrollar esta tesina como trabajo justificativo de dicha formulación, que abordase el tema teórico con suficiente profundidad, para ajustar y verificar experimentalmente la misma. En esta tesina se ha ampliado la formulación al campo instantáneo, se han ajustado mejor y justificado teóricamente las fórmulas propuestas y se ha realizado la verificación experimental y numérica de las mismas.

5.2 Perspectivas de futuro

Las perspectivas de futuro que éste trabajo genera son:

1. Verificar las fórmulas derivadas para las flechas instantáneas, con las disponibles experimentalmente, especialmente bajo niveles de carga próximos a la fisuración, donde los modelos de cuantificación de la contribución del hormigón traccionado entre fisuras son dispares.
2. Extender la formulación desarrollada al caso de piezas sometidas a flexocompresión, como soportes y elementos con pretensado parcial. En estos casos, el acoplamiento entre el esfuerzo axial y el momento flector no permite considerar la deformación de la armadura de tracción constante a lo largo del tiempo, debiendo plantearse alguna simplificación adicional para tener en cuenta la variación del eje de giro en el tiempo.
3. Estudiar en detalle el efecto de las deformaciones diferidas en la contribución del hormigón traccionado entre fisuras, y especialmente bajo niveles de carga próximos a la fisuración, donde la flecha es muy sensible a esta contribución. Los factores β utilizados en las formulaciones para tener en cuenta los efectos de cargas repetidas o duraderas son muy simplistas y poco rigurosos.
4. Extender, en la medida de lo posible, la formulación propuesta, tanto para flechas instantáneas como diferidas, al caso de forjados bidireccionales.
5. Verificar el método propuesto para el caso de cargas aplicadas en distintos instantes, de cara a conocer su adecuación para obtener la flecha activa.
6. Estudiar la influencia de cargas repetidas un gran número de veces, como suele ocurrir en puentes carreteros y de ferrocarril, en las flechas, que aumentan con el número de ciclos de carga debido a la pérdida progresiva de la adherencia entre hormigón y acero y a la acumulación de deformaciones plásticas en el hormigón.
7. Estudiar las flechas diferidas en elementos sometidos a fuertes compresiones en el hormigón, por encima del umbral de linealidad, como puede ocurrir en jácenas

planas de edificación, especialmente cuando durante construcción, siendo el hormigón aún joven, se someten a fuertes cargas permanentes.

8. Estudiar la influencia del cortante en las deformaciones instantáneas y diferidas, especialmente cuando hay fisuración y fuertes tensiones tangenciales.

9. Estudiar los efectos de las deformaciones impuestas por retracción o variaciones térmicas, impedidas por coacciones externas, que generan tracciones que podrían reducir la carga de fisuración e incluso pre-fisurar las vigas. Este es el caso de pórticos con soportes rígidos o con juntas muy distanciadas.

10. Realizar una profunda búsqueda bibliográfica y, a ser posible, una campaña de inspecciones, para correlacionar flechas con daños estructurales, tipos estructurales, tipos de tabiquería y otros parámetros, a fin de evaluar o mejorar, en su caso, las limitaciones de flecha existentes.

Referencias

1. Ghali A. and Favre R., Concrete Structures: Stresses and Deformations. Chapman and Hall, 1994.
2. Bazant Z., Explanation of Excessive Long-Time Deflections of Collapsed Record-Span Box Girder Bridge in Palau. in SEDUREC. Instituto Torroja. 2009
3. Hormigón Comisión Permanente del Hormigón, Instrucción Española del Hormigón Estructural. EHE-08 Ministerio de Fomento. Centro de Publicaciones. Madrid, 2008.
4. CEN, Eurocode2. Design of Concrete Structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings. En1992-1-1. Euro.Comm.Stand. Brussels, 2004.
5. CEB-FIP, CEB-FIP Model Code 90. Telford, ed. B.d.I. nº213/214. London, 1993
6. ACI-318-08, Building Code Requeriments for Structural Concrete and Commentary. American Concrete Institute, 2008.
7. Ghali A. and Favre R., Concrete Structures: Stresses and Deformations. Chapman and Hall, 1994.
8. Favre B. and Charif H., Basic Model and Simplified Calculations of Deformations according to the CEB-FIP Model Coe. ACI Structural Journal, 1994. 91(2): p. 169-177.
9. Branson D.E., Deformation of Concrete Structures. McGraw-Hill. New York, 1977.
10. Murcia J., Análisis aproximado en el tiempo de secciones de hormigón armado en servicio. Propuesta de un nuevo factor de cálculo de flechas diferidas. Hórmigon y Acero, 1991. 183: p. 19-25.
11. Marí A., Bairán J., and Duarte N., Long-term deflections in cracked reinforced flexural members. Engineering Structures, 2010. Accepted for publication.
12. Marí A., Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames, Structural Engineering and Structural Mechanics. SESM Report, nº 84-12, 1984, Department of Civil Engineering. University of California. Berkeley, California.
13. Marí A., Numerical simulation of the segmental construction of three dimensional concrete frames. Engineering Structures, 2000. 22: p. 585-596.
14. ACHE, Recomendaciones para el proyecto de estructuras de hormigón de alta resistencia. Comisión 1. Grupo de Trabajo 1/2. Bases de proyecto para hormigón de alta resistencia, 2004
15. Montoya P., Meseguer A., and Morán F., Hormigón Armado. Gustavo Gili. Barcelona, 2000.
16. ACI-209R-92, Prediction of Creep, Shrinkage and temperature effects in concrete structures. American Concrete Institute Committee 209, 1992.

17. Neville A.M., Properties of Concrete. John Wiley & Sons Inc, 1994.
18. Bazant Z.P. and Wittmann F.H., Creep and Shrinkage in Concrete Structures. John Wiley and Sons. New York, 1988.
19. Neville A.M., Creep of Concrete: Plain Reinforced and Prestressed. North-Holland Publishing Company, 1970.
20. Trost H., Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech und Relaxations Probleme bei Beton und Spannbeton. Beton und Stahlbetonbau, 1967, 10.
21. Bazant Z., Prediction of concrete creep effects using age-adjusted modulus method. ACI Journal 1972, 69.
22. Bischoff P., Effects of shrinkage on tension stiffening and cracking in reinforced concrete. Can. J. Civ. Eng., 2001. 28(2): p. 363-374.
23. CEB, CEB Manual on Cracking and Deformation. Comité Euro-International du Béton, ed. B.d.I. nº158-E. Laussane, 1985.
24. ACI C., 435, Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members. 1966, American Concrete Institute: Detroit. p. 29.
25. Marí A.R. and Valdes M., Long-Term behaviour of continuous precast concrete girder bridge model. ASCE J. Bridge Eng, 2000. 5(1): p. 22-30.
26. Marí A.R. and Montaner J., Continuous Precast Concrete Girder and Slab Bridge Decks, Proc. ICE-Strucs. and Buildings, 2000(140): p. 195-207.
27. Marí A.R., Mirambell E., and Estrada I., Effects of construction process and slab prestressing on the serviceability behaviour of composite bridges. J.Cont.Steel Res, 2000. 59: p. 135-163.
28. Chacón R., Mirambell E., and Marí A., Long-term response of concrete-encased composite columns, Proc. ICE-Strucs. and Buildings, 2000(160): p. 273-285.
29. Stevens R., Deflections of Reinforced Concrete Beams.Proc.ICE Part 2: Research & Theory. 1972
30. Neville A., Dilger W., and Brooks J., Creep of Plain and Structural Concrete. Construction Press, 1983.
31. Marí A., Bairan J., and Duarte N., Long-term deflections in cracked reinforced flexural members. Engineering Structures, 2009. 29: p. 1722-1738.
32. Espion B., Long Term Sustained Loadings tests on Reinforced Concrete Beams: A Selected Data Base. Bull. Serv.G.Civil, 1988. 87: p. 88-1.
33. Washa G.W. and Fluck P.G., Effect of compressive reinforcement on the plastic flow of reinforcement concrete beams. in Proc. ACI. 1952
34. Washa G.W. and Fluck P.G., Effect of sustained overload on the strenght and plastic flow of the reinforced concrete beams. in Proc. ACI. 1953
35. Branson D.E. and Metz G.A., Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams. Alabama Highway Research Report, 1963.

36. Pauw A. and Meyers B.L., Effect of creep and shrinkage on the behaviour of reinforced concrete members. ACI Journal, 1964. Special Publication: p. 130-159.
37. YU W.W. and WINTER G., Instantaneous and long-time deflections of reinforced concrete beams under working loads. in Proc. ACI. 1960.
38. Faber.O, Elasticity, plasticity and shrinkage. in Publication préliminaire du 1er Congrès de l'A.I.P.C. Paris. 1932.
39. Jaccoud J.P. and Favre R., Flèche des structures en béton armé, Verification expérimentale d'une méthode de calcul. Paris. 1982.
40. Hajek J., Fecko L., and Nürnbergerova T., Long-term deformation of reinforced concrete slabs under different loading levels (in slovak). Stavebnicky Casopis, 1983. 31: p. 517-530.
41. Bakoss S.L., et al., Long-term deflections of reinforced concrete beams. Magazine of Concrete Research, 1982. 34(121): p. 517-530.
42. Espion B. and Halleux P., Long Term Deflections of Reinforced Concrete Beams: Reconsideration of Their Variability. ACI Structural Journal, 1990. 87(2): p. 232-236.

ANEJOS

Anejo A: Base de datos experimental

Anejo B: Base de datos numérica

Anejo C: Artículo publicado por ELSEVIER

Anejo A: Base de datos experimental

Se adjunta en éste capítulo parte de la documentación incluida en [32], en concreto se adjunta los capítulos 4 y 5 del documento original, correspondientes a la base generada para los cálculos y a los resultados obtenidos.

CHAPTER 4

Data for the computations

4. DATA FOR THE COMPUTATIONS

The notations used in this report are in general agreement with those recommended by ACI [51]. For each set of experimental results kept for this study, a series of five tables summarizes the data necessitated by the computations. S.I. units have been used.

Table 1 : Gross Section

type : - R = rectangular section;
 - T = T shaped section;
 - IT = inverted T section;
 - RHB = rectangular hollow box section.

b : section width (upper or compressed fiber).
 h : total depth.

Table 2 : Reinforcement

nature : round or deformed;
 A_s : area of tensile reinforcement;
 d : distance from extreme compression fiber to centroid of tension reinforcement;
 A_s/bd : tensile reinforcement ratio ρ ;
 A'_s : area of compression reinforcement;
 d" : distance from extreme tensile fiber to centroid of compression reinforcement;
 A'_s/bd'' : compression reinforcement ratio $\rho'' \approx \rho' = A'_s/bd''$;

Table 3 : Strength

R.H. : relative humidity (given or assumed);
 f'_c : concrete strength at age t'; when the cube strength $f'_{c,cub}$ was the only reported compressive strength, it was assumed that $f'_c = 0.85 f'_{c,cub}$.

Table 4 : Loading

l : span length;
 l/h : span / depth ratio;
 t_l : age at loading;

- M_d : maximum bending moment due to dead load constituted by the beam's own weight and by the uniform sustained loading if applied at the same age;
- M_q : maximum moment due to additional sustained loading constituted by concentrated loading or by uniform loading if applied at a different age than the dead load;
- K_d, K_q : factors entering elastic deflection formulae : depending on the statical system and loading distribution .

Table 5 : Total deflection

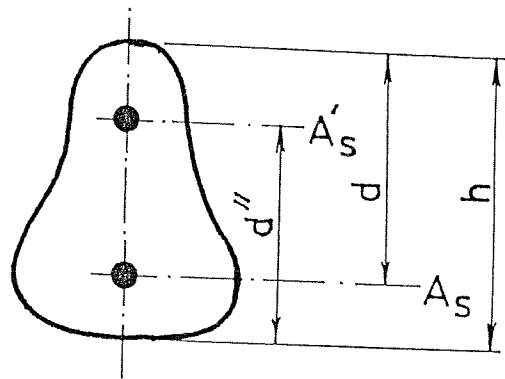
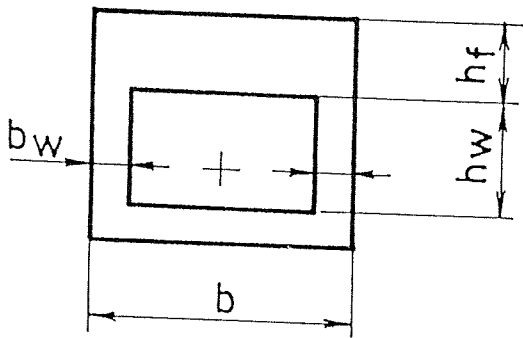
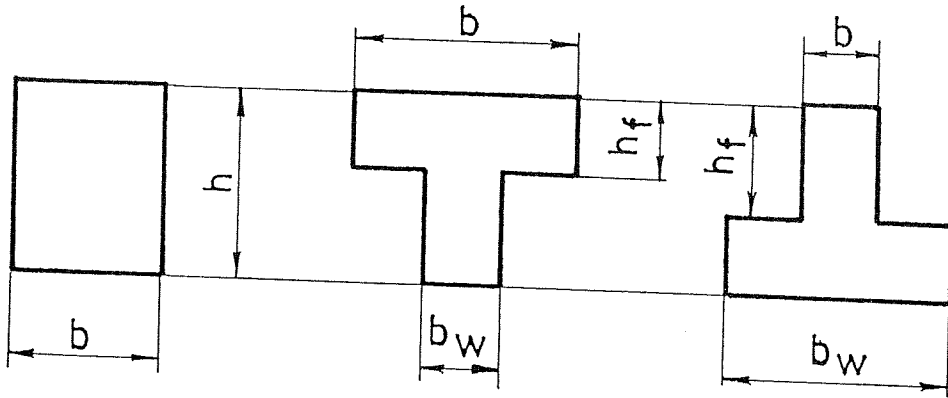
- a(i) : instantaneous or immediate measured deflection under $M_d + M_q$;
- a(t) : total measured deflection at age t under $M_d + M_q$.

Remarks

1°) The concrete mechanical description has been limited to the value of the concrete strength for the following reasons :

- the values of the modulus of rupture and the concrete modulus are evaluated by using code formulae (see Chapter 5);
- the CEB model for predicting the time-dependent deformations of concrete does not require the detailed knowledge of the concrete composition, but only of its strength.

2°) The time-dependent evolution of the deflection has been limited to the last value reported for the total deflection under sustained loading. We do not intend to comment here on the pattern of the predicted time-dependent evolution of the deflection and we assume that a variability appraisal may be gained by comparing measured and computed deflections at one age t per experiment, even if this age varies from one experiment to another.



Tests : FABER + GLANVILLE and THOMAS

Faber [3]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement						
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	A's (mm ²)	d" (mm)	A's/bd" (%)
1	R	50.8	127	round	35.6	114.3	0.67			
2	R	50.8	127	round	35.6	114.3	0.67			
3	R	50.8	127	round	35.6	114.3	0.67			
4	R	50.8	127	round	35.6	114.3	0.67			
5	R	50.8	127	round	35.6	114.3	0.67	35.6	114.3	0.67
6	R	50.8	127	round	35.6	114.3	0.67	35.6	114.3	0.67

Beam	3.Strength			4.Loading						
	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	M _q (N.m)	K _q
1	55	28	20.1	4572	36	28	383	0.104		
2	55	28	20.1	4572	36	28	383	0.104	153	0.083
3	55	28	20.1	4572	36	28	383	0.104	305	0.083
4	55	28	20.1	4572	36	28	383	0.104	458	0.083
5	55	28	19.3	4572	36	35	383	0.104		
6	55	28	19.3	4572	36	35	383	0.104	153	0.083

Beam	5. Total deflection		
	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
1	7.6	619	24.0
2	8.9	1825	30.7
3	10.2	1825	38.4
4	12.7	1825	39.8
5	7.3	473	21.5
6	9.4	1721	26.8

Glanville and Thomas [6]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement				3.Strength		
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)
X49	R	101.6	209.6	round	400	177.8	2.19	65	24	24.0
88D	R	101.6	209.6	round	400	177.8	2.19	65	25	28.1
77L	R	101.6	209.6	round	400	177.8	2.19	65	7	15.4

Beam	4.Loading							5. Total deflection		
	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	M _q (N.m)	K _q	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
X49	1830	8.7	24	219	0.104	5984	0.107	1.42	220	3.48
88D	1830	8.7	25	219	0.104	5984	0.107	1.57	225	3.63
77L	1830	8.7	7	219	0.104	5984	0.107	1.83	285	4.70

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement						
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	A's (mm ²)	d" (mm)	A's/bd" (%)
7	R	76.2	152.4	deform	124	136.5	1.19			
8	R	76.2	152.4	deform	124	136.5	1.19			
3	R	76.2	152.4	deform	63	136.5	0.60			
4	R	76.2	152.4	deform	61	136.5	0.58			
66	R	76.2	152.4	deform	93.5	136.5	0.90			
67	R	76.2	152.4	deform	93	136.5	0.89			
2	R	76.2	152.4	deform	62	136.5	0.60			0.61
1	R	76.2	152.4	deform	64	136.5	0.61			
63	R	76.2	152.4	deform	32	136.5	0.30			
68	R	76.2	152.4	deform	32	136.5	0.31			
61	R	76.2	152.4	deform	70	136.5	0.67			
62	R	76.2	152.4	deform	70	136.5	0.67			
64	R	76.2	152.4	deform	128	136.5	1.23			
65	R	76.2	152.4	deform	125	136.5	1.20			
10	R	76.2	152.4	deform	128	136.5	1.23			1.21
9	R	76.2	152.4	deform	125	136.5	1.20			
69	R	76.2	152.4	deform	30	136.5	0.29			
70	R	76.2	152.4	deform	30	136.5	0.29			
6	R	76.2	152.4	deform	63	136.5	0.61			0.61
5	R	76.2	152.4	deform	62	136.5	0.60			

Beam	3.Strength			4.Loading						
	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	M _q (N.m)	K _q
7	50	28	29.5	3050	20	90			1589	0.107
8	50	28	30.4	3050	20	90			1589	0.107
3	50	28	37.8	3050	20	93			912	0.107
4	50	28	35.2	3050	20	93			912	0.107
66	50	28	27.3	3050	20	168	549	0.104	1864	0.107
67	50	28	28.8	3050	20	181	549	0.104	1864	0.107
2	50	28	38.3	3050	20	92			1589	0.107
1	50	28	38.7	3050	20	92			1589	0.107
63	50	28	26.8	3050	20	189	549	0.104	844	0.107
68	50	28	28.3	3050	20	177	549	0.104	844	0.107
61	50	28	27.1	3050	20	186	549	0.104	1815	0.107
62	50	28	24.7	3050	20	194	549	0.104	1815	0.107
64	50	28	28.3	3050	20	166	549	0.104	3129	0.107
65	50	28	27.0	3050	20	182	549	0.104	3129	0.107
10	50	28	28.9	3050	20	90			3178	0.107
9	50	28	28.4	3050	20	90			3178	0.107
69	50	28	26.4	3050	20	174	549	0.104	1226	0.107
70	50	28	30.3	3050	20	179	549	0.104	1226	0.107
6	50	28	33.8	3050	20	91			2502	0.107
5	50	28	33.8	3050	20	91			2502	0.107

Beam	5. Total deflection		
	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
7	2.77	579	10.23
8	2.82	579	9.68
3	0.97	586	5.37
4	1.07	586	5.67
66	8.57*	326	12.26*
67	8.50*	326	12.51*
2	3.94	592	8.58
1	4.42	592	10.39
63	4.71*	340	7.79*
68	4.15*	326	7.56*
61	10.63*	340	14.19*
62	10.71*	340	14.67*
64	11.26*	326	15.18*
65	12.00*	326	16.60*
10	8.26	579	14.68
9	8.64	579	17.71
69	12.89*	326	17.18*
70	12.31*	326	16.62*
6	9.19	586	15.55
5	9.42	586	17.95

* = measures "with Σ "; 0.8 mm has been added to take account of the deflection due to dead load

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)
A/D	R	305	77	deform	285	58.7	1.59	40*	28	33.7
A/S	R	305	77	deform	285	58.7	1.59	40*	28	30.3
B/D	R	305	77	deform	285	58.7	1.59	40*	28	28.6
B/S	R	305	77	deform	285	58.7	1.59	40*	28	31.8
C/D	R	305	77	deform	285	58.7	1.59	40*	28	28.8
C/S	R	305	77	deform	285	58.7	1.59	40*	28	28.7
D/D	R	305	77	deform	143	58.7	0.80	40*	28	20.3
D/S	R	305	77	deform	143	58.7	0.80	40*	28	18.9
E/D	R	305	77	deform	143	58.7	0.80	40*	28	18.2
E/S	R	305	77	deform	143	58.7	0.80	40*	28	19.0
F/D	R	305	77	deform	143	58.7	0.80	40*	28	19.8
F/S	R	305	77	deform	143	58.7	0.80	40*	28	17.6
G/D	R	305	77	deform	143	58.7	0.80	40*	28	18.9
G/S	R	305	77	deform	143	58.7	0.80	40*	28	18.8
H/D	R	305	77	deform	143	58.7	0.80	40*	28	23.3
H/S	R	305	77	deform	143	58.7	0.80	40*	28	21.1

(*) After MAYER [50]

Beam	4.Loading					5. Total deflection		
	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
A/D	5330	69.1	6	2022	0.104	63.2	1825	188.5
A/S	5330	69.1	6	2022	0.104	51.3	1825	150.4
B/D	5330	69.1	6	2022	0.104	38.1	1825	139.7
B/S	5330	69.1	6	2022	0.104	37.1	1825	101.6
C/D	5330	69.1	6	2022	0.104	42.4	1825	135.4
C/S	5330	69.1	6	2022	0.104	43.7	1825	115.3
D/D	3810	49.4	6	1014	0.104	32.5	1825	83.3
D/S	3810	49.4	6	1014	0.104	22.4	1825	55.4
E/D	3810	49.4	6	1014	0.104	20.6	1825	67.3
E/S	3810	49.4	6	1014	0.104	22.4	1825	56.6
F/D	3810	49.4	6	1014	0.104	29.7	1825	83.3
F/S	3810	49.4	6	1014	0.104	30.2	1825	71.9
G/D	2290	29.7	6	1009	0.104	6.1	1825	23.6
G/S	2290	29.7	6	1009	0.104	5.3	1825	17.3
H/D	2290	29.7	6	1009	0.104	7.1	1825	23.6
H/S	2290	29.7	6	1009	0.104	6.6	1825	17.3

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement						
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	A's (mm ²)	d" (mm)	A's/bd" (%)
A1/A4	R	203.2	304.8	deform	852	257.2	1.63	852	257.2	1.63
A2/A5	R	203.2	304.8	deform	852	257.2	1.63	400	258.7	0.76
A3/A6	R	203.2	304.8	deform	852	257.2	1.63			
B1/B4	R	152.4	203.2	deform	400	157.2	1.67	400	157.2	1.67
B2/B5	R	152.4	203.2	deform	400	157.2	1.67	200	157.2	0.83
B3/B6	R	152.4	203.2	deform	400	157.2	1.67			
C1/C4	R	304.8	127	deform	516	101.6	1.67	516	101.6	1.67
C2/C5	R	304.8	127	deform	516	101.6	1.67	258	101.6	0.83
C3/C6	R	304.8	127	deform	516	101.6	1.67			
D1/D4	R	304.8	127	deform	516	101.6	1.67	516	101.6	1.67
D2/D5	R	304.8	127	deform	516	101.6	1.67	258	101.6	0.83
D3/D6	R	304.8	127	deform	516	101.6	1.67			
E1/E4	R	304.8	76.2	deform	284	58.7	1.59	284	58.7	1.59
E2/E5	R	304.8	76.2	deform	284	58.7	1.59	142	58.7	0.79
E3/E6	R	304.8	76.2	deform	284	58.7	1.59			

Beam	3.Strength			4.Loading				5. Total deflection			
	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
A1/A4	50*	14	25	6096	20	14	25634	0.104	13.46	927	23.62
A2/A5	50*	14	25	6096	20	14	25634	0.104	15.75	927	32.26
A3/A6	50*	14	25	6096	20	14	25634	0.104	17.02	927	44.70
B1/B4	50*	14	20.8	6096	30	14	7259	0.104	23.37	927	51.05
B2/B5	50*	14	20.8	6096	30	14	7259	0.104	24.89	927	65.02
B3/B6	50*	14	20.8	6096	30	14	7259	0.104	26.42	927	86.36
C1/C4	50*	14	20.3	6340	49.9	14	6014	0.104	40.13	927	80.01
C2/C5	50*	14	20.3	6340	49.9	14	6014	0.104	43.43	927	100.58
C3/C6	50*	14	20.3	6340	49.9	14	6014	0.104	47.75	927	140.72
D1/D4	50*	14	22.1	3810	30	14	6023	0.104	11.94	927	27.69
D2/D5	50*	14	22.1	3810	30	14	6023	0.104	14.22	927	33.78
D3/D6	50*	14	22.1	3810	30	14	6023	0.104	17.78	927	48.51
E1/E4	50*	14	20.6	5334	70	14	1972	0.104	59.44	927	123.95
E2/E5	50*	14	20.6	5334	70	14	1972	0.104	55.88	927	128.78
E3/E6	50*	14	20.6	5334	70	14	1972	0.104	62.99	927	184.91

(*) after MAYER [50]

Ulitskij and Pusinov [10]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)
B-17	R	80	100	round	62,3	86,5	0,9	65	28	9,9
B-18	R	80	100	round	62,3	86,5	0,9	65	28	9,9
B-19	R	80	100	round	62,3	86,5	0,9	65	28	9,9
B-20	R	80	100	round	62,3	86,5	0,9	65	28	9,9
B-41	R	80	100	deform	157	85,4	2,3	65	28	11,2
B-42	R	80	100	deform	157	85,4	2,3	65	28	11,2
B-43	R	80	100	deform	157	85,4	2,3	65	28	11,2
B-44	R	80	100	deform	157	85,4	2,3	65	28	11,2

Beam	4.Loading					5. Total deflection		
	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _q (N.m)	K _q	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
B-17	1000	10	28	789	0,107	1,85	210	3,75
B-18	1000	10	28	697	0,107	1	210	3,17
B-19	1000	10	28	804	0,107	1,9	210	3,9
B-20	1000	10	28	726	0,107	1,08	210	3,25
B-41	1000	10	28	1815	0,107	2,9	200	6,06
B-42	1000	10	28	1736	0,107	2,52	200	6,47
B-43	1000	10	28	1707	0,107	3,5	200	7,95
B-44	1000	10	28	1628	0,107	2,7	200	6,08

Shkerbells [15]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)
B-1	R	70	100	round	57	87	0,93	73	28	12,5
B-2	R	70	100	round	101	84,5	1,7	73	28	12,5
B-3	R	70	100	round	157	86,3	2,6	73	28	12,5
B-4	R	70	100	round	226	83	3,9	73	28	12,5

Beam	4.Loading					5. Total deflection		
	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _q (N.m)	K _q	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
B-1	2000	20	28	785	0,107	3,75	328	8,84
B-2	2000	20	28	1030	0,107	4,6	328	10,28
B-3	2000	20	28	1472	0,107	5,86	328	11,69
B-4	2000	20	28	1864	0,107	6,92	328	13,16

Tests : P.C.A. + SATTLER + HADDAD

P.C.A. [18]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b	h	nature	As	d	As/bd	R.H.	t'	f'c
	(mm)	(mm)		(mm ²)	(mm)	(%)	(%)	(days)	(N/mm ²)	
20NA	R	152	305	deform	398	254	1.03	50*	28	12.2
40NA	R	152	305	deform	849	254	2.20	50*	28	26.9
60NA	R	152	305	deform	1019	254	2.64	50*	28	37.4

(*) after MAYER [50]

Beam	4.Loading							5. Total deflection		
	l	l/h	t _i	M _d	K _d	M _q	K _q	a(i)	t	a(t)
	(mm)		(days)	(N.m)		(N.m)		(mm)	(days)	(mm)
20NA	3048	10	28	1324	0.104	10325	0.108	3.4	270	8.1
40NA	3048	10	28	1324	0.104	22267	0.108	4.25	270	10.0
60NA	3048	10	28	1324	0.104	29641	0.108	4.9	270	9.9

Sattler [11]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b	h	nature	As	d	As/bd	R.H.	t'	f'c
	(mm)	(mm)		(mm ²)	(mm)	(%)	(%)	(days)	(N/mm ²)	
a1/a2	R	100	160	deform	100	134	0.75	55	32	26.7
b	R	1000	74.5	deform	346	56	0.62	55	32	26.7

Beam	4.Loading							5. Total deflection		
	l	l/h	t _i	M _d	K _d	M _q	K _q	a(i)	t	a(t)
	(mm)		(days)	(N.m)		(N.m)		(mm)	(days)	(mm)
a1/a2	4000	25	32	726	0.104	1962	0.104	15.83*	116	32.21*
b	2100	28.2	51	922	0.104	3610	0.104	5.91*	116	13.93*

* = 1.2 mm (for a1/a2) and 0.4 mm (for b) have been added to take account of the deflection due to dead load

Haddad [20]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b	h	nature	As	d	As/bd	R.H.	t'	f'c
	(mm)	(mm)		(mm ²)	(mm)	(%)	(%)	(days)	(N/mm ²)	
1a	R	180	350	deform	819	318	1.43	50	28	26.2
2a	R	180	350	deform	318	310	0.57	50	28	26.2

Beam	4.Loading							5. Total deflection		
	l	l/h	t _i	M _d	K _d	M _q	K _q	a(i)	t	a(t)
	(mm)		(days)	(N.m)		(N.m)		(mm)	(days)	(mm)
1a	4300	12.3	28	3581	0.104	28331	0.097	5.85	360	11.05
2a	4300	12.3	28	3581	0.104	28331	0.097	11.8	360	18.95

Yu and Winter [19]

Beam	1. Gross section				2.Reinforcement							
	type	b (mm)	h (mm)	bw (mm)	hf (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	A's (mm ²)	d" (mm)	A's/bd" (%)
A	T	305	305	152.5	63.5	deform	400	258.8	0.51			
B	T	305	305	152.5	63.5	deform	400	258.8	0.51	200	265.4	0.25
C	T	305	305	152.5	63.5	deform	400	258.8	0.51	400	265.4	0.49
D	T	610	305	152.5	63.5	deform	774	245.9	0.52			
E	T	305	305	152.5	63.5	deform	400	249.2	0.53			
F	T	305	203	152.5	50.8	deform	400	157.2	0.83			

Beam	3.Strength			4.Loading				5. Total deflection			
	R.H. (%)	t' (days)	f'c N/mm ²	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
A	34*	28	25.4	6100	20	28	29891	0.104	34.0	298	68.0
B	34*	28	26.8	6100	20	28	29930	0.104	31.5	298	56.8
C	34*	28	24.3	6100	20	28	29793	0.104	30.2	298	52.0
D	34*	28	25.4	6100	20	28	54622	0.104	30.4	298	67.5
E	34*	28	29.4	4270	14	28	28017	0.104	12.9	298	29.5
F	34*	28	29.4	6100	30	28	17658	0.104	55.9	298	101.0

(*) After MAYER [50]

Figarovskij [21]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement				3.Strength		
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	R.H. (%)	t' (days)	f'c N/mm ²
P1-1k	R	180	250	round	151	233	0,36	70	28	18,3
P1-2k	R	180	250	round	151	233	0,36	70	28	18,3
P2-1k	R	180	250	round	201	228	0,49	70	28	17,5
P2-2k	R	180	250	round	201	228	0,49	70	28	17,5
P3-1k	R	180	250	round	251	229	0,61	70	28	25,4
P3-2k	R	180	250	round	251	229	0,61	70	28	25,4

Beam	4.Loading					5. Total deflection		
	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _q (N.m)	K _q	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
P1-1k	3000	12	28	4807	0,107	1,65	251	5,23
P1-2k	3000	12	28	7946	0,107	4,79	251	9,26
P2-1k	3000	12	28	7358	0,107	2,58	159	5,97
P2-2k	3000	12	28	10497	0,107	5,35	159	9,03
P3-1k	3000	12	28	7652	0,107	2,3	164	4,8
P3-2k	3000	12	28	11576	0,107	4,98	164	7,62

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)
1	R	127	190.5	round	258	158.8	1.28	82*	35	19.8
2	R	127	190.5	deform	142	160.3	0.70	82*	35	19.8
3	R	127	190.5	round	258	158.8	1.28	82*	35	19.8
4	R	127	190.5	deform	142	160.3	0.70	82*	35	19.8
5	R	127	190.5	round	258	158.8	1.28	82*	35	19.8
6	R	127	190.5	deform	142	160.3	0.70	82*	35	19.8
7	R	127	190.5	round	258	158.8	1.28	82*	35	37.0
8	R	127	190.5	deform	142	160.3	0.70	82*	35	37.0
9	R	127	190.5	round	258	158.8	1.28	82*	35	37.0
10	R	127	190.5	deform	142	160.3	0.70	82*	35	37.0
11	R	127	190.5	round	258	158.8	1.28	82*	35	37.0
12	R	127	190.5	deform	142	160.3	0.70	82*	35	37.0

(*) After MAYER [50]

Beam	4.Loading					5. Total deflection		
	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
1	6400	33.6	49	4709	0.104	15.7	1783	57.8
2	6400	33.6	49	4709	0.104	18.0	1783	61.3
3	4800	25.2	49	4709	0.104	7.9	1783	33.0
4	4800	25.2	49	4709	0.104	8.9	1783	33.9
5	3200	16.8	49	4709	0.104	3.3	1783	13.0
6	3200	16.8	49	4709	0.104	4.6	1783	14.4
7	6400	33.6	53	4709	0.104	15.2	1787	54.1
8	6400	33.6	53	4709	0.104	20.6	1787	65.4
9	4800	25.2	53	4709	0.104	7.9	1787	26.4
10	4800	25.2	53	4709	0.104	8.8	1787	29.7
11	3200	16.8	53	4709	0.104	2.8	1787	10.4
12	3200	16.8	53	4709	0.104	4.3	1787	14.0

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement						
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	A's (mm ²)	d" (mm)	A's/bd" (%)
BI-1	R	105	202	deform	78,5	177	0,42			
BI-2	R	101	203	deform	78,5	178	0,43			
BI-3	R	103	201	deform	78,5	176	0,43			
B'I-1	R	102	205	deform	78,5	180	0,43			
B'I-2	R	104	200	deform	78,5	175	0,43			
B'I-3	R	101	201	deform	78,5	176	0,44			
BII-1	R	102	212	deform	254	187	1,33			
BII-2	R	102	212	deform	254	187	1,33			
BII-3	R	102	210	deform	254	185	1,34			
BIII-1	R	103	204	deform	254	179	1,38	50	162	0,3
BIII-2	R	104	206	deform	254	181	1,36	50	160	0,3
BIII-3	R	101	205	deform	254	180	1,4	50	165	0,3

Beam	3.Strength			4.Loading						
	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	M _q (N.m)	K _q
BI-1	80	28	34,6	2000	10	20	255	0,104	3208	0,115
BI-2	80	28	34,6	2000	10	20	255	0,104	3355	0,115
BI-3	80	28	34,6	2000	10	20	255	0,104	3600	0,115
B'I-1	80	28	34,6	2000	10	20	255	0,104	3159	0,115
B'I-2	80	28	34,6	2000	10	20	255	0,104	3227	0,115
B'I-3	80	28	34,6	2000	10	20	245	0,104	3306	0,115
BII-1	80	28	34,6	2000	10	20	265	0,104	6985	0,115
BII-2	80	28	34,6	2000	10	20	265	0,104	7112	0,115
BII-3	80	28	34,6	2000	10	20	265	0,104	7014	0,115
BIII-1	80	28	34,6	2000	10	20	255	0,104	6916	0,115
BIII-2	80	28	34,6	2000	10	20	265	0,104	7338	0,115
BIII-3	80	28	34,6	2000	10	20	255	0,104	6818	0,115

Beam	5. Total deflection		
	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
BI-1	2,24	295	4,03
BI-2	2,57	295	3,84
BI-3	3,63	295	5,3
B'I-1	2,35	325	4,09
B'I-2	2,55	325	4,03
B'I-3	1,11	325	1,95
BII-1	3,33	295	4,78
BII-2	2,01	295	3,44
BII-3	4,26	295	5,91
BIII-1	3,76	315	4,67
BIII-2	3,27	315	4,32
BIII-3	3,83	315	5,07

Branson and Metz [23]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)
SB3/B	R	101.6	127	deform	214	101.6	2.07	50	28	35.4
SB3/M	R	101.6	127	deform	214	101.6	2.07	50	28	31.3

Beam	4.Loading					5. Total deflection		
	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
SB3/B	2743	21.6	28	1238	0.104	3.89	88	7.70
SB3/M	2743	21.6	28	1238	0.104	3.99	88	7.50

Pauw and Meyers [26]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)
R1	R	177.8	216	deform	400	165.1	1.36	50	28	33.8
R2	R	177.8	216	deform	568	165.1	1.93	50	28	33.6
R3	R	177.8	216	deform	568	165.1	1.93	50	28	38.9
R4	R	177.8	216	deform	774	165.1	2.64	50	28	38.7

Beam	4.Loading						5. Total deflection			
	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	M _q (N.m)	K _q	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
R1	2286	10.6	28	591	0.104	7176	0.107	2.44	178	4.89
R2	2286	10.6	28	591	0.104	11228	0.107	3.22	178	6.16
R3	2286	10.6	28	591	0.104	9643	0.107	3.71	148	6.64
R4	2286	10.6	28	591	0.104	14607	0.107	4.66	148	7.89

Moenaert and Pfeffermann [27]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b	h	nature	As	d	As/bd	R.H.	t'	f'c
	(mm)	(mm)		(mm ²)	(mm)	(%)	(%)	(days)	(N/mm ²)	
P2	R	120	285	deform	952	247	3.21	60	28	23.8
P6	R	120	286	deform	952	247	3.21	60	28	23.8
P3a	R	121	282	deform	984	244	3.28	60	28	20.0
P6a	R	123	284	deform	986	246	3.31	60	28	20.0

Beam	4.Loading					5. Total deflection		
	l	l/h	ti	Mq	Kq	a(i)	t	a(t)
	(mm)		(days)	(N.m)		(mm)	(days)	(mm)
P2	4000	14	28	55181	0.097	17.6	243	33.7
P6	4000	14	28	55181	0.097	18.6	243	35.5
P3a	4000	14	28	48138	0.097	19.4	151	35.9
P6a	4000	14	28	48138	0.097	20.7	151	43.4

Corley and Sozen [28]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b	h	nature	As	d	As/bd	R.H.	t'	f'c
	(mm)	(mm)		(mm ²)	(mm)	(%)	(%)	(days)	(N/mm ²)	
C1	R	76.2	152.4	deform	142	136.5	1.37	50	28	24.1
C3	R	76.2	109.5	deform	142	92.1	2.02	50	28	24.1
C4	R	76.2	109.5	deform	213	92.1	3.04	50	28	24.1

Beam	4.Loading						5. Total deflection			
	l	l/h	ti	Md	Kd	Mq	Kq	a(i)	t	a(t)
	(mm)		(days)	(N.m)		(N.m)		(mm)	(days)	(mm)
C1	1829	12	28	115	0.104	2276	0.115	3.05	728	7.37
C3	1829	16.7	28	82	0.104	2276	0.115	7.87	728	17.27
C4	1829	16.7	28	82	0.104	2276	0.115	6.10	728	15.49

Lutz et al. [29]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement						
	type	b	h	nature	As	d	As/bd	A's	d"	A's/bd"
	(mm)	(mm)		(mm ²)	(mm)	(%)	(mm ²)	(mm)	(%)	
SR	R	101,6	203,2	deform	258	171,5	1,48			
DR	R	101,6	203,2	deform	258	171,5	1,48	258	177,8	1,43

Beam	3.Strength			4.Loading				5. Total deflection			
	R.H.	t'	f'c	l	l/h	ti	Mq	Kq	a(i)	t	a(t)
	(%)	(days)	N/mm ²	(mm)		(days)	(N.m)		(mm)	(days)	(mm)
SR	40	28	34,1	1829	9	28	7963	0,107	4,1	170	8,8
DR	40	28	34,1	1829	9	28	7963	0,107	4,2	170	6,8

Beam	1. Gross section					
	type	b (mm)	h (mm)	bw (mm)	hf (mm)	hw (mm)
1-12	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
13-15	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
16-18	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
19-21	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
19A-21A	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
22-24	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
25-27	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
28-30	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
31-33	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
34-36	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
37-39	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
40-42	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
43-45	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
46-48	R.H.B.	457	191	102	51	114.6
49-51	R.H.B.	457	191	102	51	114.6
52-54	R.H.B.	457	191	102	51	114.6
55-57	R.H.B.	457	191	102	51	114.6
67-69	R.H.B.	457	241	102	102	113.6
82-83	R.H.B.	457	241	102	102	113.6

Beam	2.Reinforcement						3.Strength			
	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	A's (mm ²)	d" (mm)	A's/bd" (%)	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)
1-12	round	570	213	0.59	63	219	0.06	78	28	29.9
13-15	round	570	213	0.59	63	219	0.06	78	28	29.9
16-18	round	570	213	0.59	284	213	0.29	78	28	29.9
19-21	round	570	213	0.59	535	213	0.55	78	28	29.9
19A-21A	round	570	213	0.59	63	219	0.06	78	28	29.9
22-24	deform	396	214	0.41	63	219	0.06	78	28	29.9
25-27	round	652	205	0.70	63	219	0.06	78	28	29.9
28-30	round	787	205	0.84	63	219	0.06	78	28	29.9
31-33	round	570	213	0.59	63	219	0.06	78	28	45.1
34-36	round	570	213	0.59	63	219	0.06	78	28	24.0
37-39	round	570	213	0.59	535	213	0.55	78	28	24.0
40-42	deform	396	214	0.41	63	219	0.06	78	28	24.0
43-45	round	570	213	0.59	63	219	0.06	78	28	45.7
46-48	round	396	164	0.53	63	168	0.08	78	28	29.9
49-51	round	396	164	0.53	381	164	0.51	78	28	29.9
52-54	deform	252	165	0.33	63	168	0.08	78	28	29.9
55-57	round	396	164	0.53	63	168	0.08	78	28	45.1
67-69	round	570	213	0.59	63	219	0.06	78	28	29.9
82-83	round	570	213	0.59	63	219	0.06	78	28	29.9

Beam	4. Loading					5. Total deflection		
	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
1-12	6706	27.8	28	16098	0.104	11.7	1028	31.8
13-15	6706	27.8	28	16098	0.104	11.7	822	29.5
16-18	6706	27.8	28	16098	0.104	11.9	804	25.9
19-21	6706	27.8	28	16098	0.104	11.9	832	28.2
19A-21A	6706	27.8	28	16098	0.104	10.9	705	24.4
22-24	6706	27.8	28	16098	0.104	14.7	832	35.1
25-27	7315	30.4	28	19169	0.104	17.0	817	35.1
28-30	7925	32.9	28	22514	0.104	21.6	813	48.3
31-33	6706	27.8	28	16098	0.104	9.7	817	20.3
34-36	6706	27.8	28	16098	0.104	14.5	797	47.2
37-39	6706	27.8	28	16098	0.104	15.5	804	40.4
40-42	6706	27.8	28	16098	0.104	17.5	790	53.1
43-45	6706	27.8	28	16098	0.104	14.5	785	35.6
46-48	5486	28.7	28	8721	0.104	11.4	783	25.7
49-51	5486	28.7	28	8721	0.104	12.2	783	24.4
52-54	5486	28.7	28	8721	0.104	15.5	778	32.5
55-57	5486	28.7	28	8721	0.104	7.6	778	19.3
67-69	6706	27.8	28	12645	0.104	8.4	510	18.8
82-83	6706	27.8	28	16098	0.104	13.2	155	25.9

Beam	1. Gross section				
	type	b	h	bw	hf
		(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
B.80-5.3	T	203	203	101	63
B.8-10	T	203	203	101	63
B.11-10	T	203	203	101	63
B.28-10	T	203	203	101	63
B.70-10	T	203	203	101	63
B.120-10	T	203	203	101	63
B.81-15	T	203	203	101	63

Beam	2.Reinforcement						
	nature	As	d	As/bd	A's	d"	A's/bd"
		(mm ²)	(mm)	(%)	(mm ²)	(mm)	(%)
B.80-5.3	deform	544	174	1,54	64	174	0,18
B.8-10	deform	544	174	1,54	64	174	0,18
B.11-10	deform	544	174	1,54	64	174	0,18
B.28-10	deform	544	174	1,54	64	174	0,18
B.70-10	deform	544	174	1,54	64	174	0,18
B.120-10	deform	544	174	1,54	64	174	0,18
B.81-15	deform	544	174	1,54	64	174	0,18

Beam	3.Strength			4.Loading				
	R.H.	t'	f'c	l	l/h	ti	Mq	Kq
	(%)	(days)	N/mm ²	(mm)		(days)	(N.m)	
B.80-5.3	57	80	29,3	1520	7,5	80	8962	0,083
B.8-10	57	8	18,8	1520	7,5	8	16910	0,083
B.11-10	57	11	21,5	1520	7,5	11	16910	0,083
B.28-10	57	28	19,5	1520	7,5	28	16910	0,083
B.70-10	57	70	25,9	1520	7,5	70	16910	0,083
B.120-10	57	120	27,3	1520	7,5	120	16910	0,083
B.81-15	57	81	29,4	1520	7,5	81	25365	0,083

Beam	5. Total deflection		
	a(i)	t	a(t)
	(mm)	(days)	(mm)
B.80-5.3	1,12	280	1,8
B.8-10	2,26	208	4,95
B.11-10	2,49	211	5,03
B.28-10	2,46	228	4,65
B.70-10	2,52	270	3,45
B.120-10	2,41	195	2,85
B.81-15	3,66	281	5,69

Programme N°1 [37]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b	h	nature	As	d	As/bd	R.H.	t'	f'c
	(mm)	(mm)		(mm ²)	(mm)	(%)	(%)	(days)	(N/mm ²)	
480	R	1200	150	round	1407	132	0.888	60	77	34.6
600	R	1200	150	round	2212	132	1.396	60	77	36.3

Beam	4.Loading					5. Total deflection		
	l	l/h	t _i	Md	Kd	a(i)	t	a(t)
	(mm)		(days)	(N.m)		(mm)	(days)	(mm)
480	4800	32	77	14126	0.104	8.5	1677	16.3
600	6000	40	77	22073	0.104	17.1	1677	31.2

Programme N°7 [43]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement			3.Strength			
	type	b	h	nature	As	d	As/bd	R.H.	t'	f'c
	(mm)	(mm)		(mm ²)	(mm)	(%)	(%)	(days)	(N/mm ²)	
M 1/2	R	1200	120	round	905	100	0.752	60	28	29.0
M 4/14	R	1200	120	round	905	100	0.752	60	28	29.0
M 11/15	R	1200	120	round	905	100	0.752	60	28	29.0
M 5/8	R	1200	120	round	905	100	0.752	60	28	29.0
1K 2/5	R	1200	120	deform	402	102	0.327	60	28	29.0
1K 7/18	R	1200	120	deform	402	102	0.327	60	28	29.0
1K 1/6	R	1200	120	deform	402	102	0.327	60	28	29.0
1K 12/13	R	1200	120	deform	402	102	0.327	60	28	29.0
2K 5/6	R	1200	120	deform	402	102	0.327	60	28	29.0
2K 10/14	R	1200	120	deform	402	102	0.327	60	28	29.0

Beam	4.Loading					5. Total deflection		
	l	l/h	t _i	Md	Kd	a(i)	t	a(t)
	(mm)		(days)	(N.m)		(mm)	(days)	(mm)
M 1/2	3540	29.5	232	9880	0.104	5.9	1132	9.2
M 4/14	3540	29.5	232	12310	0.104	9.4	1132	13.2
M 11/15	3540	29.5	232	15900	0.104	13	1132	18.1
M 5/8	3540	29.5	232	20650	0.104	18.2	1132	25.5
1K 2/5	3540	29.5	232	9850	0.104	9.1	1132	13.1
1K 7/18	3540	29.5	232	12170	0.104	14	1132	22.7
1K 1/6	3540	29.5	232	15660	0.104	22.5	1132	32.5
1K 12/13	3540	29.5	232	20210	0.104	30.9	1132	89.7
2K 5/6	3540	29.5	232	12270	0.104	8.5	1132	16.3
2K 10/14	3540	29.5	232	20190	0.104	31.3	1132	42.3

Tests : JACCOUD and FAVRE [42]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement						
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	A's (mm ²)	d" (mm)	A's/bd" (%)
A1	R	600	120	deform	314	95	0.55	57	100	0.10
A2	R	600	120	deform	314	95	0.55	57	100	0.10
A3	R	600	120	deform	314	95	0.55	57	100	0.10
A4	R	600	120	deform	314	95	0.55	57	100	0.10
A5	R	600	120	deform	314	95	0.55	57	100	0.10
C12	R	750	160	deform	565	131	0.58	57	134	0.06
C22	R	750	160	deform	565	131	0.58	57	134	0.06
C13	R	750	160	deform	565	131	0.58	57	134	0.06
C14	R	750	160	deform	565	131	0.58	57	134	0.06
C24	R	750	160	deform	565	131	0.58	57	134	0.06
C15	R	750	160	deform	565	131	0.58	57	134	0.06

Beam	3.Strength			4.Loading						
	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	M _q (N.m)	K _q
A1	60	15	21.1	3100	25.8	15	4949	0.104		
A2	60	15	24.9	3100	25.8	15	4949	0.104		
A3	60	15	20.2	3100	25.8	15	4949	0.104		
A4	46	15	37.2	3100	25.8	15	4949	0.104		
A5	46	15	33.4	3100	25.8	15	4949	0.104		
C12	60	28	28.8	3100	19.4	28	3540	0.104	6100	0.108
C22	60	28	29.4	3100	19.4	28	3540	0.104	6100	0.108
C13	60	28	32.9	3100	19.4	28	3540	0.104	9300	0.108
C14	60	28	30.9	3100	19.4	28	3540	0.104	12520	0.108
C24	60	28	32.0	3100	19.4	28	3540	0.104	12520	0.108
C15	60	28	29.3	3100	19.4	28	3540	0.104	15730	0.108

Beam	5. Total deflection		
	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
A1	8.42	380	18.4
A2	6.16	380	17.5
A3	8.12	380	17.5
A4	2.24	380	8.05
A5	3.12	380	9.55
C12	1.9	538	8.33
C22	2.0	393	7.00
C13	4.6	538	13.56
C14	7.0	538	17.50
C24	7.75	538	18.13
C15	10.0	538	20.75

Tests : DING DAJUNG [44]

1. Gross section					
Beam	type	b	h	bw	hf
		(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
b-1	R	122	99		
b-2	R	119	99		
b-3	R	122	99		
C-1	R	101	162		
C-2	R	100	158		
C-3	R	81	160		
L-1	R	62	152		
L-2	T	156	152	60	40
L-3	T	247	152	60	40
L-4	R	81	201		
L-5	IT	80	202	187	140
L-6	IT	85	201	300	140

Beam	2.Reinforcement			3.Strength			
	nature	As	d	As/bd	R.H.	t'	f'c
		(mm ²)	(mm)	(%)	(%)	(days)	(N/mm ²)
b-1	round	144	84.5	1.39	80	30	20.9
b-2	round	334	81.9	3.43	80	30	20.9
b-3	round	85	79.3	0.88	80	30	20.9
C-1	round	201	134.3	1.48	80	30	20.9
C-2	round	111	133.3	0.83	80	30	20.9
C-3	deform	113	137.0	1.02	80	30	21.6
L-1	deform	154	117.0	2.12	80	30	25.4
L-2	deform	154	119.0	0.83	80	30	25.4
L-3	deform	154	112.5	0.55	80	30	25.4
L-4	deform	157	173.8	1.12	80	30	25.4
L-5	deform	157	173.0	1.13	80	30	25.4
L-6	deform	157	171.0	1.08	80	30	25.4

Beam	4.Loading					5. Total deflection		
	l	l/h	t _i	M _q	K _q	a(i)	t	a(t)
	(mm)		(days)	(N.m)		(mm)	(days)	(mm)
b-1	2880	29	30	1942	0.107	14.72	2220	29.42
b-2	2880	29	30	3541	0.107	17.95	2220	38.81
b-3	2880	29	30	1378	0.107	12.89	2220	28.11
C-1	2880	18	30	4316	0.107	8.86	2220	16.36
C-2	2880	18	30	2992	0.107	9.15	2220	16.84
C-3	2880	18	30	2904	0.107	8.45	2055	16.62
L-1	2880	19	30	3280	0.107	15.53	561	30.43
L-2	2880	19	30	3385	0.107	12.70	561	23.44
L-3	2880	19	30	3483	0.107	11.80	561	21.20
L-4	2880	14.4	30	2975	0.107	8.73	561	20.34
L-5	2880	14.4	30	6092	0.107	7.89	561	18.13
L-6	2880	14.4	30	6298	0.107	7.26	561	18.32

F.R.F.C. [45]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement						
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	A's (mm ²)	d" (mm)	A's/bd" (%)
I-72	R	150	280	deform	308	250	0.82			
I-81	R	150	280	deform	308	250	0.82			
I-91	R	150	280	deform	308	250	0.82			
II-52	R	150	280	deform	770	236	2.17			
II-59	R	150	280	deform	770	236	2.17			
II-70	R	150	280	deform	770	236	2.17			
II-80	R	150	280	deform	770	236	2.17			
II-90	R	150	280	deform	770	236	2.17			
III-43	R	150	280	deform	1232	233	3.52			
III-67	R	150	280	deform	1232	233	3.52			
III-77	R	150	280	deform	1232	233	3.52			
IV-52	R	150	280	deform	770	236	2.17	462	248	1.24
IV-70	R	150	280	deform	770	236	2.17	462	248	1.24
IV-80	R	150	280	deform	770	236	2.17	462	248	1.24
IV-90	R	150	280	deform	770	236	2.17	462	248	1.24

Beam	3.Strength			4.Loading					5. Total deflection		
	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _q (N.m)	K _q	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
I-72	60	28	33.5	2800	10	28	21500	0.107	6.02	1638	10.29
I-81	60	28	33.5	2800	10	28	24250	0.107	7.39	1372	11.98
I-91	60	28	33.5	2800	10	28	27180	0.107	8.94	1342	15.02
II-52	60	28	29.8	2800	10	28	33950	0.107	7.27	1426	13.49
II-59	60	28	29.8	2800	10	28	38300	0.107	7.69	1569	14.10
II-70	60	28	29.8	2800	10	28	45850	0.107	9.36	1499	17.56
II-80	60	28	29.8	2800	10	28	52260	0.107	10.72	1513	20.24
II-90	60	28	29.8	2800	10	28	58660	0.107	13.10	1519	24.23
III-43	60	28	34.3	2800	10	28	42190	0.107	7.08	1600	14.51
III-67	60	28	34.3	2800	10	28	65300	0.107	10.58	1600	23.88
III-77	60	28	34.3	2800	10	28	75490	0.107	13.84	1600	28.74
IV-52	60	28	32.0	2800	10	28	37610	0.107	5.98	800	10.52
IV-70	60	28	32.0	2800	10	28	51340	0.107	8.80	800	13.90
IV-80	60	28	32.0	2800	10	28	58200	0.107	11.16	1000	16.96
IV-90	60	28	32.0	2800	10	28	65530	0.107	12.85	1000	19.28

Bakoss et al. [41]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement				3.Strength		
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	R.H. (%)	t' (days)	f'c N/mm ²
1B2	R	100	150	deform	226	130	1,74	60	28	39

Beam	4.Loading						5. Total deflection			
	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	M _q (N.m)	K _q	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
1B2	3750	25	28	615	0,104	3250	0,107	8,94	528	25,02

Christiansen [40]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement						
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	A's (mm ²)	d" (mm)	A's/bd" (%)
L1/L2	R	170	280	deform	452	249	1,07	39	252	0,09
L3/L4	R	170	280	deform	452	249	1,07	39	252	0,09
L5	R	170	280	deform	452	249	1,07	39	252	0,09
L7	R	170	280	deform	452	249	1,07	226	249	0,53
L8	R	170	280	deform	452	249	1,07	226	249	0,53
L9/L10	R	170	280	deform	452	249	1,07	452	249	1,07

Beam	3.Strength			4.Loading						
	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _d (N.m)	K _d	M _q (N.m)	K _q
L1/L2	55	14	26,1	7500	26,8	20	8033	0,104		
L3/L4	55	14	27,6	7500	26,8	20	8033	0,104	21571	0,099
L5	55	16	25,2	7500	26,8	23	8033	0,104	5675	0,099
L7	55	14	23,6	7500	26,8	20	8033	0,104	22394	0,099
L8	55	14	23,6	7500	26,8	174	8033	0,104	22404	0,099
L9/L10	55	16	31	7500	26,8	22	8033	0,104	22951	0,099

Beam	5. Total deflection		
	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
L1/L2	5,6	2933	39
L3/L4	44,9	3052	101
L5	14,2	3025	56
L7	47,5	3028	88
L8	45,8	2856	76
L9/L10	41,6	3123	69

Clarke et al. [46]

Beam	1. Gross section			2.Reinforcement						
	type	b (mm)	h (mm)	nature	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)	A's (mm ²)	d" (mm)	A's/bd" (%)
A1	R	100	154	deform	157,1	132	1,2			
A2	R	100	152	deform	157,1	130	1,2			
B1	R	100	152	deform	157,1	130	1,2	157,1	132	1,2
B2	R	100	154	deform	157,1	132	1,2	157,1	134	1,2

Beam	3.Strength			4.Loading				5. Total deflection			
	R.H. (%)	t' (days)	f'c (N/mm ²)	l (mm)	l/h	t _i (days)	M _q (N.m)	K _q	a(i) (mm)	t (days)	a(t) (mm)
A1	40	28	25,9	2100	13,6	28	3500	0,107	4,89	208	11,83
A2	40	28	25,9	2100	13,6	28	3500	0,107	5,09	208	11,92
B1	40	28	25,9	2100	13,6	28	3500	0,107	4,78	208	8,77
B2	40	28	25,9	2100	13,6	28	3500	0,107	4,3	208	8,55

CHAPTER 5

Computed and measured deflections

5. COMPUTED AND MEASURED DEFLECTIONS

The following table gives, for each experiment kept for this study, the values of the instantaneous and long-term deflections computed according to ACI and CEB methods. For greater convenience, the measured deflections have also been added.

The equations used in both methods have been recalled in the paper submitted for publication and won't be repeated here. We only have to mention in addition the code formulae used for predicting the tensile strength and elastic modulus of concrete.

ACI 318-83 Building Code

$$E_c = 57000 \sqrt{f'_c} \quad (\text{in psi}) = 5000 \sqrt{f'_c} \quad (\text{in MPa})$$

$$f_r = 7.5 \sqrt{f'_c} \quad (\text{in psi}) = 0.62 \sqrt{f'_c} \quad (\text{in MPa})$$

$$f'_c(t) = \frac{t}{4 + 0.85 t} f'_c(28) \quad \text{with } t \text{ in days.}$$

CEB Model Code MC-78

$$f_{ct} = 0.30 \sqrt[3]{(f'_c - 8 \text{ MPa})^2} \quad \text{average tensile strength in MPa}$$

$$f_{cm} = f_{ct} \left(0.6 + \frac{0.4}{\sqrt[4]{h}} \right) \quad \text{not } < f_{ct} \quad \text{average bending tensile strength}$$

in MPa, with h (total depth) in m.

$$E_c = 9500 \sqrt[3]{f'_c} \quad (\text{in MPa})$$

$$f'_c(t_1) = f'_c(t_2) \cdot \left(\frac{t_1 \cdot (t_2 + 47)}{t_2 \cdot (t_1 + 47)} \right)^{1/2.45} \quad \text{with } t \text{ in days.}$$

Reference	Beam	t _i	Instantaneous deflection			t	Long-term deflection		
			measured	comp. ACI	comp. CEB		measured	comp. ACI	comp. CEB
		(days)	(mm)	(mm)	(mm)	(days)	(mm)	(mm)	(mm)
Faber	1	28	7,6	4,32	9,46	619	24	11,14	22,61
Faber	2	28	8,9	10,09	13,93	1825	30,7	30,21	30,55
Faber	3	28	10,2	16,32	18,28	1825	38,4	48,86	37,27
Faber	4	28	12,7	22,25	22,62	1825	39,8	66,62	43,98
Faber	5	35	7,3	4,39	9,14	473	21,5	9,3	16,73
Faber	6	35	9,4	10,08	13,51	1721	26,8	25,17	23,11
Glanville	X49	24	1,42	1,81	1,64	220	3,48	4,03	3,29
Glanville	88D	25	1,57	1,74	1,59	225	3,63	3,88	3,17
Glanville	77L	7	1,83	2	1,8	285	4,7	4,66	4,08
Gilkey	7	90	2,77	4,15	3,41	579	10,23	10,42	8,21
Gilkey	8	90	2,82	4,06	3,33	579	9,68	10,19	8,15
Gilkey	3	93	0,97	1,25	1,19	586	5,37	3,13	3,48
Gilkey	4	93	1,07	1,29	1,22	586	5,67	3,24	3,56
Gilkey	66	168	8,57	9,53	7,91	326	12,26	20,62	11,86
Gilkey	67	181	8,5	9,36	7,75	326	12,51	20,02	11,56
Gilkey	2	92	3,94	3,87	3,73	592	8,58	8,39	9,32
Gilkey	1	92	4,42	3,81	3,87	592	10,39	9,58	10,52
Gilkey	63	189	4,71	4,63	7,11	340	7,79	9,95	12,91
Gilkey	68	177	4,15	4,28	6,68	326	7,56	9,19	12,73
Gilkey	61	186	10,63	11,1	9,51	340	14,19	23,92	13,85
Gilkey	62	194	10,71	11,54	9,9	340	14,67	24,7	14,01
Gilkey	64	166	11,26	12,66	10,74	326	15,18	27,43	15,21
Gilkey	65	182	12	12,99	11,06	326	16,6	27,73	15,22
Gilkey	10	90	8,26	10,25	8,32	579	14,68	19,89	12,44
Gilkey	9	90	8,64	11,05	9,19	579	17,71	27,71	16,56
Gilkey	69	174	12,89	9,61	12	326	17,18	20,67	18,65
Gilkey	70	179	12,31	8,14	10,79	326	16,62	17,43	17,83
Gilkey	6	91	9,19	11,67	9,78	586	15,55	25,22	16,2
Gilkey	5	91	9,42	11,92	10,28	586	17,95	29,97	18,66
Washa	A/D	6	63,2	51,6	36,25	1825	188,5	154,8	137,88
Washa	A/S	6	51,3	53,8	38,58	1825	150,4	161,3	141,69
Washa	B/D	6	38,1	54,9	39,81	1825	139,7	164,6	143,74
Washa	B/S	6	37,1	52,8	37,53	1825	101,6	158,4	139,96
Washa	C/D	6	42,4	54,8	39,67	1825	135,4	164,2	143,49
Washa	C/S	6	43,7	54,8	39,74	1825	115,3	164,4	143,62
Washa	D/D	6	32,5	14,66	13,92	1825	83,3	43,97	54,84
Washa	D/S	6	22,4	15,75	15	1825	55,4	47,23	56,23
Washa	E/D	6	20,6	16,32	15,56	1825	67,3	48,95	56,95
Washa	E/S	6	22,4	15,67	14,92	1825	56,6	46,99	56,13
Washa	F/D	6	29,7	15,04	14,3	1825	83,3	45,11	55,33
Washa	F/S	6	30,2	16,83	16,06	1825	71,9	50,47	57,58
Washa	G/D	6	6,1	5,6	5,35	1825	23,6	16,8	20,14
Washa	G/S	6	5,3	5,63	5,38	1825	17,3	16,89	20,18
Washa	H/D	6	7,1	4,48	4,19	1825	23,6	13,42	18,66
Washa	H/S	6	6,6	5	4,75	1825	17,3	15,01	19,37
Washa	A1/A4	14	13,46	15,05	12,22	927	23,62	29,49	23,44
Washa	A2/A5	14	15,75	15,41	12,64	927	32,26	34,82	27,68
Washa	A3/A6	14	17,02	15,87	13,15	927	44,7	43,52	35,23
Washa	B1/B4	14	23,37	25,12	20,73	927	51,05	48,97	44,86
Washa	B2/B5	14	24,89	25,32	21,03	927	65,02	56,43	50,23
Washa	B3/B6	14	26,42	25,57	21,37	927	86,36	70,1	59,68
Washa	C1/C4	14	40,13	42,5	34,39	927	80,01	82,89	70,65
Washa	C2/C5	14	43,43	43,15	35,16	927	100,58	96,2	81,04
Washa	C3/C6	14	47,75	43,98	36,09	927	140,72	120,57	100,26
Washa	D1/D4	14	11,94	15,16	12,14	927	27,69	29,57	25,44
Washa	D2/D5	14	14,22	15,37	12,41	927	33,78	34,26	29,1
Washa	D3/D6	14	17,78	15,63	12,73	927	48,51	42,86	35,8

Washa	E1/E4	14	59,44	51,4	40,93	927	123,95	101,31	93,13
Washa	E2/E5	14	55,88	51,72	41,5	927	128,78	116,2	103,73
Washa	E3/E6	14	62,99	52,11	42,16	927	184,91	142,88	122,07
Ulitskij	B-17	28	1,85	1,6	1,49	210	3,75	3,53	2,47
Ulitskij	B-18	28	1	1,39	1,31	210	3,17	3,06	2,2
Ulitskij	B-19	28	1,9	1,63	1,52	210	3,9	3,6	2,51
Ulitskij	B-20	28	1,08	1,46	1,37	210	3,25	3,21	2,29
Ulitskij	B-41	28	2,9	2,11	1,86	200	6,06	4,62	3,47
Ulitskij	B-42	28	2,52	2,02	1,77	200	6,47	4,42	3,33
Ulitskij	B-43	28	3,5	1,99	1,74	200	7,95	4,35	3,28
Ulitskij	B-44	28	2,7	1,9	1,66	200	6,08	4,14	3,13
Sattler	a1/a2	32	15,83	14,05	12,47	116	32,21	28,1	22,88
Sattler	b	51	5,91	5,47	6,6	116	13,93	10,94	13,48
Shkerbelis	B-1	28	3,75	6,73	6,21	328	8,84	15,78	10,38
Shkerbelis	B-2	28	4,6	6,59	5,93	328	10,28	15,46	10,81
Shkerbelis	B-3	28	5,86	6,91	6,18	328	11,69	16,2	11,91
Shkerbelis	B-4	28	6,92	7,92	7,02	328	13,16	18,56	14,37
PCA	20NA	28	3,4	3,76	3,39	270	8,1	8,57	6,89
PCA	40NA	28	4,25	4,37	3,67	270	10	9,98	8,19
PCA	60NA	28	4,9	4,85	4,12	270	9,9	11,07	9,19
Haddad	1a	28	5,85	6,11	5,07	360	11,05	14,51	10,21
Haddad	2a	28	11,8	12,12	10,59	360	18,95	28,77	17,86
Yu	A	28	34	32,14	25,28	298	68	74,4	48,19
Yu	B	28	31,5	29,14	24,78	298	56,8	63,14	43,99
Yu	C	28	30,2	29,41	25,12	298	52	60,26	41,62
Yu	D	28	30,4	32,46	28,73	298	67,5	75,13	51,91
Yu	E	28	12,9	13,92	11,84	298	29,5	32,22	23,46
Yu	F	28	55,9	52,89	45,17	298	101	122,42	90,1
Figarovskij	P1-1k	28	1,65	0,92	2,78	251	5,23	2,09	4,88
Figarovskij	P1-2k	28	4,79	3,6	5,3	251	9,26	8,14	8,04
Figarovskij	P2-1k	28	2,58	2,92	4,08	159	5,97	6,15	6,19
Figarovskij	P2-2k	28	5,35	5,75	6,16	159	9,03	12,12	8,78
Figarovskij	P3-1k	28	2,3	2,02	3,14	164	4,8	4,28	5,21
Figarovskij	P3-2k	28	4,98	4,84	5,25	164	7,62	10,25	7,86
Hajnal-Konyi	1	49	15,7	24,99	24,12	1783	57,8	74,49	43,08
Hajnal-Konyi	2	49	18	34,58	31,31	1783	61,3	103,08	55,57
Hajnal-Konyi	3	49	7,9	14,06	13,57	1783	33	41,9	24,23
Hajnal-Konyi	4	49	8,9	19,45	17,61	1783	33,9	57,98	31,26
Hajnal-Konyi	5	49	3,3	6,25	6,02	1783	13	18,62	10,77
Hajnal-Konyi	6	49	4,6	8,64	7,83	1783	14,4	25,77	13,89
Hajnal-Konyi	7	53	15,2	17,45	20,22	1787	54,1	52,01	38,22
Hajnal-Konyi	8	53	20,6	21,31	21,07	1787	65,4	63,54	46,95
Hajnal-Konyi	9	53	7,9	9,82	11,37	1787	26,4	29,26	21,5
Hajnal-Konyi	10	53	8,8	11,99	11,85	1787	29,7	35,74	26,41
Hajnal-Konyi	11	53	2,8	4,36	5,05	1787	10,4	13	9,55
Hajnal-Konyi	12	53	4,3	5,33	5,27	1787	14	15,89	11,74
Ulitskij	BI-1	20	2,24	1,53	1,87	295	4,03	3,55	4,33
Ulitskij	BI-2	20	2,57	1,86	2,13	295	3,84	4,29	4,6
Ulitskij	BI-3	20	3,63	2,24	2,48	295	5,3	5,21	5,08
Ulitskij	B'I-1	20	2,35	1,44	1,76	325	4,09	3,38	4,18
Ulitskij	B'I-2	20	2,55	1,71	2,02	325	4,03	4,01	4,56
Ulitskij	B'I-3	20	1,11	1,88	2,15	325	1,95	4,43	4,69
Ulitskij	BII-1	20	3,33	3,04	2,43	295	4,78	7,06	4,38
Ulitskij	BII-2	20	2,01	3,11	2,49	295	3,44	7,21	4,46
Ulitskij	BII-3	20	4,26	3,15	2,52	295	5,91	7,3	4,52
Ulitskij	BIII-1	20	3,76	3,34	2,68	315	4,67	7,28	4,67
Ulitskij	BIII-2	20	3,27	3,46	2,79	315	4,32	7,55	4,82
Ulitskij	BIII-3	20	3,83	3,27	2,62	315	5,07	7,12	4,57
Branson	SB3/B	28	3,89	2,52	1,97	88	7,7	5,03	5,95
Metz	SB3/M	28	3,99	2,83	2,24	88	7,5	5,67	6,21

Pauw	R1	28	2,44	2,05	1,89	178	4,89	4,41	4,85
Pauw	R2	28	3,22	3,64	2,96	178	6,16	7,81	6,45
Pauw	R3	28	3,71	2,75	2,23	148	6,64	5,72	5,17
Pauw	R4	28	4,66	3,96	3,23	148	7,89	8,25	6,76
Moenaert	P2	28	17,6	18,07	16,7	243	33,7	40,66	31,6
Moenaert	P6	28	18,6	18,07	16,7	243	35,5	40,66	31,59
Moenaert	P3a	28	19,4	16,34	14,94	151	35,9	34,16	26,46
Moenaert	P6a	28	20,7	16,12	14,73	151	43,4	33,69	26,16
Corley	C1	28	3,05	3,01	2,44	728	7,37	7,95	5,95
Corley	C3	28	7,87	7,68	6,68	728	17,27	20,31	15,22
Corley	C4	28	6,1	5,96	5,22	728	15,49	15,76	13,14
Lutz	SR	28	4,1	3,19	2,63	170	8,8	6,8	5,47
Lutz	DR	28	4,2	3,03	2,44	170	6,8	5	3,96
Hollington	1-12	28	11,7	14,96	16,81	1028	31,8	40,7	29,93
Hollington	13-15	28	11,7	14,96	16,81	822	29,5	39,46	29,55
Hollington	16-18	28	11,9	14,92	16,69	804	25,9	36,8	27,99
Hollington	19-21	28	11,9	14,86	16,54	832	28,2	34,61	26,62
Hollington	19A-21A	28	10,9	14,96	16,81	705	24,4	38,6	29,25
Hollington	22-24	28	14,7	17,46	16,49	832	35,1	46,11	33,56
Hollington	25-27	28	17	23,68	24,16	817	35,1	62,32	41,45
Hollington	28-30	28	21,6	31,18	29,64	813	48,3	82,03	50,82
Hollington	31-33	28	9,7	10,31	14,64	817	20,3	27,15	27,6
Hollington	34-36	28	14,5	17,15	17,85	797	47,2	45,03	30,47
Hollington	37-39	28	15,5	16,97	17,55	804	40,4	39,35	27,27
Hollington	40-42	28	17,5	20,67	18,96	790	53,1	54,2	35,23
Hollington	43-45	28	14,5	10,15	14,56	785	35,6	26,6	27,47
Hollington	46-48	28	11,4	8,13	13,21	783	25,7	21,17	24,64
Hollington	49-51	28	12,2	8,12	13,1	783	24,4	18,95	22,86
Hollington	52-54	28	15,5	8,8	11,31	778	32,5	22,9	28,14
Hollington	55-57	28	7,6	4,53	10,81	778	19,3	11,78	22,65
Hollington	67-69	28	8,4	8,95	12,32	510	18,8	21,99	22,72
Hollington	82-83	28	13,2	14,96	16,81	155	25,9	30,9	25,21
Hajek 1	480	77	8,5	3,41	3,03	1677	16,3	10,06	10,35
Hajek 1	600	77	17,1	11,79	9,08	1677	31,2	34,79	30,11
Dilger	B.80-5.3	80	1,12	1,06	0,78	280	1,8	2,26	1,35
Dilger	B.8-10	8	2,26	2,07	1,92	208	4,95	4,4	3,67
Dilger	B.11-10	11	2,49	2,05	1,9	211	5,03	4,37	3,56
Dilger	B.28-10	28	2,46	2,07	1,92	228	4,65	4,39	3,32
Dilger	B.70-10	70	2,52	2,04	1,86	270	3,45	4,34	2,89
Dilger	B.120-10	120	2,41	2,04	1,85	195	2,85	3,9	2,41
Dilger	B.81-15	81	3,66	3,06	2,48	281	5,69	6,51	3,62
Hajek 7	M 1/2	232	5,9	2,59	6,74	1132	9,2	7,08	12,49
Hajek 7	M 4/14	232	9,4	4,67	9,38	1132	13,2	12,78	15,81
Hajek 7	M 11/15	232	13	9,28	13,28	1132	18,1	25,4	20,68
Hajek 7	M 5/8	232	18,2	16,15	18,45	1132	25,5	44,2	27,09
Hajek 7	1K 2/5	232	9,1	2,58	3,7	1132	13,1	7,06	15,84
Hajek 7	1K 7/18	232	14	4,81	8,45	1132	22,7	13,17	21,45
Hajek 7	1K 1/6	232	22,5	10,84	15,61	1132	32,5	29,66	29,82
Hajek 7	1K 12/13	232	30,9	21,69	24,96	1132	89,7	59,35	40,69
Hajek 7	2K 5/6	232	8,5	4,95	8,66	1132	16,3	13,54	21,69
Hajek 7	2K 10/14	232	31,3	21,64	24,9	1132	42,3	59,21	40,64
Christiansen	L1/L2	20	5,6	6,6	6,74	2933	39	19,2	27,06
Christiansen	L3/L4	20	44,9	48,05	41,48	3052	101	139,93	85,44
Christiansen	L5	23	14,2	19,45	16,41	3025	56	56,65	42,92
Christiansen	L7	20	47,5	49,58	43,29	3028	88	127,84	76,9
Christiansen	L8	174	45,8	48,31	42,59	2856	76	124,56	62,75
Christiansen	L9/L10	22	41,6	47,75	40,52	3123	69	110	66,74
Jaccoud	A1	15	8,42	3,79	5,8	380	18,4	8,84	16,22
Jaccoud	A2	15	6,16	2,92	4,43	380	17,5	6,81	15,13
Jaccoud	A3	15	8,12	4,04	6,15	380	17,5	9,43	16,5

179	Jaccoud	A4	15	2,24	1,88	1,75	380	8,05	4,38	7,17
	Jaccoud	A5	15	3,12	1,98	1,82	380	9,55	4,62	7,4
180	Jaccoud	C12	28	1,9	1,44	1,41	538	8,33	3,57	8,22
	Jaccoud	C22	28	2	1,42	1,29	393	7	3,36	7,83
	Jaccoud	C13	28	4,6	2,36	3,05	538	13,56	5,87	11,12
	Jaccoud	C14	28	7	5,11	5,9	538	17,5	12,69	14,87
	Jaccoud	C24	28	7,75	4,89	5,68	538	18,13	12,13	14,71
	Jaccoud	C15	28	10	8,59	8,69	538	20,75	21,32	18,58
	Ding	b-1	30	14,72	15,3	13,92	2220	29,42	45,89	25,33
	Ding	b-2	30	17,95	18,13	16,61	2220	38,81	54,4	33,87
	Ding	b-3	30	12,89	16,12	16	2220	28,11	48,36	27,71
	Ding	C-1	30	8,86	9,79	8,96	2220	16,36	29,4	16,31
190	Ding	C-2	30	9,15	9,72	9,46	2220	16,84	29,16	16,1
	Ding	C-3	30	8,45	9,75	8,14	2055	16,62	29,25	15,32
	Ding	L-1	30	15,53	14,11	12,08	561	30,43	35,84	22,25
	Ding	L-2	30	12,7	10,7	8,98	561	23,44	27,18	15,13
	Ding	L-3	30	11,8	11,16	9,32	561	21,2	28,35	15,13
	Ding	L-4	30	8,73	3,71	3,11	561	20,34	9,43	6,66
	Ding	L-5	30	7,89	7,27	6,61	561	18,13	18,46	12,71
	Ding	L-6	30	7,26	4,69	5,62	561	18,32	11,91	12,22
	Bakoss	1B2	28	8,94	13,05	10,34	528	25,02	32,85	24,31
	FRFC	I-72	28	6,02	6,72	5,6	1638	10,29	19,84	11,19
	FRFC	I-81	28	7,39	7,75	6,52	1372	11,98	22,35	12,51
	FRFC	I-91	28	8,94	8,81	7,49	1342	15,02	25,36	13,98
	FRFC	II-52	28	7,27	6,72	5,94	1426	13,49	19,49	12,98
	FRFC	II-59	28	7,69	7,6	6,78	1569	14,1	22,31	14,59
	FRFC	II-70	28	9,36	9,11	8,25	1499	17,56	26,59	17,26
	FRFC	II-80	28	10,72	10,39	9,49	1513	20,24	30,37	19,56
	FRFC	II-90	28	13,1	11,67	10,73	1519	24,23	34,12	21,85
	FRFC	III-43	28	7,08	6,24	5,65	1600	14,51	18,38	13,46
	FRFC	III-67	28	10,58	9,68	9,01	1600	23,88	28,49	20,26
	FRFC	III-77	28	13,84	11,19	10,49	1600	28,74	32,94	23,26
	FRFC	IV-52	28	5,98	6,86	6,07	800	10,52	13,83	9,68
	FRFC	IV-70	28	8,8	9,39	8,55	800	13,9	18,93	13,11
	FRFC	IV-80	28	11,16	10,65	9,79	1000	16,96	22,02	14,95
	FRFC	IV-90	28	12,85	11,99	11,11	1000	19,28	24,8	16,79
	Clarke	A1	28	4,89	4,92	4,02	208	11,83	10,81	8,72
	Clarke	A2	28	5,09	5,11	4,19	208	11,92	11,25	9,04
	Clarke	B1	28	4,78	4,89	3,94	208	8,77	8,56	6,63
	Clarke	B2	28	4,3	4,71	3,77	208	8,55	8,25	6,4

Anejo B: Base de datos numérica

B.1: Base de datos del estudio paramétrico

A continuación se proporcionan los datos de las 72 secciones calculadas

Caso	fc(MPa)	HR(%)	t0(dias)	$\epsilon_{c0}/\epsilon_{sh}$	ro	ro2/ro	φ	ϵ_{csh}	E(t0)	σ_0
1	25	60	7	1	0.005	0	2.8	0.0004095	24060	9.85161
2	25	60	7	1	0.005	0.5	2.8	0.0004095	24060	9.85161
3	25	60	7	1	0.005	1	2.8	0.0004095	24060	9.85161
4	25	60	7	1	0.01	0	2.8	0.0004095	24060	9.85161
5	25	60	7	1	0.01	0.5	2.8	0.0004095	24060	9.85161
6	25	60	7	1	0.01	1	2.8	0.0004095	24060	9.85161
7	25	60	7	1	0.015	0	2.8	0.0004095	24060	9.85161
8	25	60	7	1	0.015	0.5	2.8	0.0004095	24060	9.85161
9	25	60	7	1	0.015	1	2.8	0.0004095	24060	9.85161

Caso	fc(MPa)	HR(%)	t0(dias)	$\epsilon_{c0}/\epsilon_{sh}$	ro	ro2/ro	φ	ϵ_{csh}	E(t0)	σ_0
10	25	60	7	2	0.005	0	2.8	0.00040946	24060	4.9258
11	25	60	7	2	0.005	0.5	2.8	0.00040946	24060	4.9258
12	25	60	7	2	0.005	1	2.8	0.00040946	24060	4.9258
13	25	60	7	2	0.01	0	2.8	0.00040946	24060	4.9258
14	25	60	7	2	0.01	0.5	2.8	0.00040946	24060	4.9258
15	25	60	7	2	0.01	1	2.8	0.00040946	24060	4.9258
16	25	60	7	2	0.015	0	2.8	0.00040946	24060	4.9258
17	25	60	7	2	0.015	0.5	2.8	0.00040946	24060	4.9258
18	25	60	7	2	0.015	1	2.8	0.00040946	24060	4.9258

Caso	fc(MPa)	HR(%)	t0(dias)	$\epsilon_{c0}/\epsilon_{sh}$	ro	ro2/ro	φ	ϵ_{csh}	E(t0)	σ_0
19	25	60	28	1	0.005	0	2.4	0.00037459	27264	10.2128
20	25	60	28	1	0.005	0.5	2.4	0.00037459	27264	10.2128
21	25	60	28	1	0.005	1	2.4	0.00037459	27264	10.2128
22	25	60	28	1	0.01	0	2.4	0.00037459	27264	10.2128
23	25	60	28	1	0.01	0.5	2.4	0.00037459	27264	10.2128

24	25	60	28	1	0.01	1	2.4	0.00037459	27264	10.2128
25	25	60	28	1	0.015	0	2.4	0.00037459	27264	10.2128
26	25	60	28	1	0.015	0.5	2.4	0.00037459	27264	10.2128
27	25	60	28	1	0.015	1	2.4	0.00037459	27264	10.2128

Caso	fc(MPa)	HR(%)	t0(dias)	$\epsilon_{c0}/\epsilon_{sh}$	ro	ro2/ro	φ	ϵ_{csh}	E(t0)	σ_0
28	25	60	28	2	0.005	0	2.4	0.00037459	27264	5.10641
29	25	60	28	2	0.005	0.5	2.4	0.00037459	27264	5.10641
30	25	60	28	2	0.005	1	2.4	0.00037459	27264	5.10641
31	25	60	28	2	0.01	0	2.4	0.00037459	27264	5.10641
32	25	60	28	2	0.01	0.5	2.4	0.00037459	27264	5.10641
33	25	60	28	2	0.01	1	2.4	0.00037459	27264	5.10641
34	25	60	28	2	0.015	0	2.4	0.00037459	27264	5.10641
35	25	60	28	2	0.015	0.5	2.4	0.00037459	27264	5.10641
36	25	60	28	2	0.015	1	2.4	0.00037459	27264	5.10641

Caso	fc(MPa)	HR(%)	t0(dias)	$\epsilon_{c0}/\epsilon_{sh}$	ro	ro2/ro	φ	ϵ_{csh}	E(t0)	σ_0
37	25	80	7	1	0.005	0	2.21	0.00025487	24060	6.13217
38	25	80	7	1	0.005	0.5	2.21	0.00025487	24060	6.13217
39	25	80	7	1	0.005	1	2.21	0.00025487	24060	6.13217
40	25	80	7	1	0.01	0	2.21	0.00025487	24060	6.13217
41	25	80	7	1	0.01	0.5	2.21	0.00025487	24060	6.13217
42	25	80	7	1	0.01	1	2.21	0.00025487	24060	6.13217
43	25	80	7	1	0.015	0	2.21	0.00025487	24060	6.13217
44	25	80	7	1	0.015	0.5	2.21	0.00025487	24060	6.13217
45	25	80	7	1	0.015	1	2.21	0.00025487	24060	6.13217

Caso	fc(MPa)	HR(%)	t0(dias)	$\epsilon_{c0}/\epsilon_{sh}$	ro	ro2/ro	φ	ϵ_{csh}	E(t0)	σ_0
46	25	80	7	0.6	0.005	0	2.21	0.00025487	24060	10.2203
47	25	80	7	0.6	0.005	0.5	2.21	0.00025487	24060	10.2203
48	25	80	7	0.6	0.005	1	2.21	0.00025487	24060	10.2203
49	25	80	7	0.6	0.01	0	2.21	0.00025487	24060	10.2203
50	25	80	7	0.6	0.01	0.5	2.21	0.00025487	24060	10.2203
51	25	80	7	0.6	0.01	1	2.21	0.00025487	24060	10.2203
52	25	80	7	0.6	0.015	0	2.21	0.00025487	24060	10.2203
53	25	80	7	0.6	0.015	0.5	2.21	0.00025487	24060	10.2203
54	25	80	7	0.6	0.015	1	2.21	0.00025487	24060	10.2203

Caso	fc(MPa)	HR(%)	t0(dias)	$\epsilon_{c0}/\epsilon_{sh}$	ro	ro2/ro	φ	ϵ_{csh}	E(t0)	σ_0
55	25	80	28	1	0.005	0	1.9	0.00023316	27264	6.35687
56	25	80	28	1	0.005	0.5	1.9	0.00023316	27264	6.35687
57	25	80	28	1	0.005	1	1.9	0.00023316	27264	6.35687
58	25	80	28	1	0.01	0	1.9	0.00023316	27264	6.35687
59	25	80	28	1	0.01	0.5	1.9	0.00023316	27264	6.35687
60	25	80	28	1	0.01	1	1.9	0.00023316	27264	6.35687
61	25	80	28	1	0.015	0	1.9	0.00023316	27264	6.35687
62	25	80	28	1	0.015	0.5	1.9	0.00023316	27264	6.35687
63	25	80	28	1	0.015	1	1.9	0.00023316	27264	6.35687

Caso	fc(MPa)	HR(%)	t0(dias)	ϵ_{c0} / ϵ_{sh}	ro	ro2/ro	ϕ	ϵ_{csh}	E(t0)	σ_0
64	25	80	28	0.6	0.005	0	1.9	0.00023316	27264	10.5948
65	25	80	28	0.6	0.005	0.5	1.9	0.00023316	27264	10.5948
66	25	80	28	0.6	0.005	1	1.9	0.00023316	27264	10.5948
67	25	80	28	0.6	0.01	0	1.9	0.00023316	27264	10.5948
68	25	80	28	0.6	0.01	0.5	1.9	0.00023316	27264	10.5948
69	25	80	28	0.6	0.01	1	1.9	0.00023316	27264	10.5948
70	25	80	28	0.6	0.015	0	1.9	0.00023316	27264	10.5948
71	25	80	28	0.6	0.015	0.5	1.9	0.00023316	27264	10.5948
72	25	80	28	0.6	0.015	1	1.9	0.00023316	27264	10.5948

B.2: Verificación numérica de la formulación para deformaciones diferidas

En este apartado se proporcionan todos los resultados obtenidos de la verificación numérica del apartado 4.1.1 *Verificación numérica de la formulación para deformaciones diferidas*.

Hormigones de Resistencia Convencional (HA-30)

HR=80% t₀=28 días

viga	Método general (CONS)			Metodo simplificado				MC-90			ACI	
	yinst	ytot	incr	ycr	ysh	ytot	ratios	yc	ytot	ratio	ytot	ratio
1	7.72	12	1.55	2.48	1.85	12.05	1.00	2.19	10.93	0.91	23.16	1.93
2	7.52	11	1.46	1.85	1.48	10.85	0.99	2.19	10.28	0.93	20.60	1.87
3	7.22	11.3	1.57	2.39	1.48	11.08	0.98	3.28	9.41	0.83	19.78	1.75
4	2.55	4.53	1.78	0.73	1.37	4.65	1.03	1.18	5.71	1.26	7.29	1.61
5	4.28	6.93	1.62	1.29	1.35	6.91	1.00	1.57	6.78	0.98	12.15	1.75
6	4.55	7.36	1.62	1.53	1.43	7.51	1.02	1.57	6.26	0.85	13.22	1.80
7	4.95	7.57	1.53	1.32	1.34	7.61	1.00	1.48	7.71	1.02	14.72	1.94
8	3.27	5.35	1.64	1.01	1.30	5.58	1.04	1.11	5.47	1.02	9.62	1.80

HR=50% t₀=28 días

viga	Método general (CONS)			Metodo simplificado				MC-90			ACI	
	yinst	ytot	incr	ycr	ysh	ytot	ratios	yc	ytot	ratio	ytot	ratio
1	7.72	14.30	1.85	3.60	3.31	14.63	1.02	2.19	10.93	0.76	23.16	1.62
2	7.52	12.70	1.69	2.69	2.64	12.86	1.01	2.19	10.28	0.81	20.60	1.62
3	7.22	13.50	1.87	3.47	2.64	13.33	0.99	3.28	9.41	0.70	19.78	1.46
4	2.55	5.59	2.19	1.07	2.47	6.08	1.09	1.18	5.71	1.02	7.29	1.30
5	4.28	8.36	1.95	1.87	2.42	8.58	1.03	1.57	6.78	0.81	12.15	1.45
6	4.55	8.89	1.95	2.26	2.56	9.37	1.05	1.57	6.26	0.70	13.22	1.49
7	4.95	8.94	1.81	1.93	2.43	9.31	1.04	1.48	7.71	0.86	14.72	1.65
8	3.27	6.45	1.97	1.48	2.36	7.12	1.10	1.11	5.47	0.85	9.62	1.49

HR=50% $t_0=28$ días

viga	Método general (CONS)			Metodo simplificado				MC-90			ACI	
	yinst	ytot	incr	ycr	ysh	ytot	ratios	yc	ytot	ratio	ytot	ratio
1	8.47	13.50	1.59	3.41	2.02	13.90	1.03	2.48	12.39	0.92	25.41	1.88
2	8.23	12.20	1.48	2.47	1.57	12.27	1.01	2.48	11.64	0.95	22.54	1.85
3	7.33	12.50	1.71	2.94	1.57	11.84	0.95	3.72	10.66	0.85	20.08	1.61
4	3.31	5.67	1.71	1.17	1.48	5.96	1.05	1.33	6.46	1.14	9.47	1.67
5	4.69	7.62	1.62	1.74	1.45	7.87	1.03	1.78	7.68	1.01	13.32	1.75
6	4.94	8.00	1.62	2.06	1.54	8.54	1.07	1.78	7.10	0.89	14.35	1.79
7	5.55	8.63	1.55	1.83	1.47	8.85	1.03	1.67	8.74	1.01	16.50	1.91
8	3.63	5.94	1.64	1.38	1.42	6.44	1.08	1.25	6.20	1.04	10.68	1.80

HR=50% $t_0=7$ días

viga	Método general (CONS)			Metodo simplificado				MC-90			ACI	
	yinst	ytot	incr	ycr	ysh	ytot	ratios	yc	ytot	ratio	ytot	ratio
1	8.47	16.10	1.90	4.92	3.60	16.99	1.06	2.48	12.39	0.77	25.41	1.58
2	8.23	14.20	1.73	3.56	2.80	14.59	1.03	2.48	11.64	0.82	22.54	1.59
3	7.33	14.50	1.98	4.24	2.80	14.37	0.99	3.72	10.66	0.74	20.08	1.38
4	3.31	6.53	1.97	1.69	2.65	7.66	1.17	1.33	6.46	0.99	9.47	1.45
5	4.69	9.22	1.97	2.51	2.60	9.80	1.06	1.78	7.68	0.83	13.32	1.44
6	4.94	9.76	1.98	2.69	2.78	10.40	1.07	1.78	8.23	0.84	14.35	1.47
7	5.55	10.30	1.86	2.67	2.61	10.84	1.05	1.67	8.71	0.85	16.43	1.60
8	3.38	7.69	2.28	1.90	2.57	7.85	1.02	1.25	6.20	0.81	9.94	1.29

Hormigones de Alta Resistencia (HA-75)HR=80% $t_0=28$ días

viga	Método general (CONS)			Metodo simplificado				MC-90			ACI	
	yinst	ytot	incr	ycr	ysh	ytot	ratios	yc	ytot	ratio	ytot	ratio
1	6.14	8.47	1.38	1.22	1.00	8.36	0.99	2.11	8.58	1.01	18.42	2.20
2	4.60	6.52	1.42	0.74	0.76	6.09	0.93	2.11	6.59	1.01	11.96	1.96
3	4.36	6.40	1.47	0.85	0.84	6.05	0.95	2.11	6.04	0.94	11.94	1.97
4	1.41	2.54	1.80	0.24	0.73	2.39	0.94	1.21	5.31	2.09	3.94	1.65
5	1.52	2.82	1.86	0.27	0.75	2.55	0.90	1.21	5.23	1.85	4.32	1.69
6	1.32	2.60	1.97	0.27	0.78	2.37	0.91	1.21	4.10	1.58	3.80	1.61
7	2.05	3.24	1.58	0.40	0.70	3.15	0.97	1.14	4.24	1.31	5.95	1.89
8	1.35	2.42	1.79	0.28	0.68	2.31	0.96	1.14	3.37	1.39	3.86	1.67

HR=50% $t_0=28$ días

viga	Método general (CONS)			Metodo simplificado				MC-90			ACI	
	yinst	ytot	incr	ycr	ysh	ytot	ratios	yc	ytot	ratio	ytot	ratio
1	6.14	9.55	1.56	1.82	1.69	9.66	1.01	2.11	8.58	0.90	18.42	1.91
2	4.60	7.36	1.60	1.10	1.28	6.98	0.95	2.11	6.59	0.90	11.96	1.71
3	4.36	7.38	1.69	1.28	1.42	7.05	0.96	2.11	6.04	0.82	11.94	1.69
4	1.41	3.18	2.26	0.33	1.24	2.98	0.94	1.21	5.31	1.67	3.94	1.32
5	1.52	3.39	2.23	0.39	1.27	3.19	0.94	1.21	5.23	1.54	4.32	1.35
6	1.32	3.19	2.42	0.41	1.31	3.04	0.95	1.21	4.10	1.28	3.80	1.25
7	2.05	3.79	1.85	0.60	1.18	3.83	1.01	1.14	4.24	1.12	5.95	1.55
8	1.35	2.88	2.13	0.42	1.15	2.92	1.01	1.14	3.37	1.17	3.86	1.32

HR=80% $t_0=7$ días

viga	Método general (CONS)			Metodo simplificado				MC-90			ACI	
	yinst	ytot	incr	ycr	ysh	ytot	ratios	yc	ytot	ratio	ytot	ratio
1	7.07	9.78	1.38	1.81	1.03	9.91	1.01	2.39	9.72	0.99	21.21	2.14
2	5.52	7.73	1.40	1.10	0.75	7.37	0.95	2.39	7.47	0.97	14.35	1.95
3	4.67	7.02	1.50	1.15	0.84	6.66	0.95	2.39	6.85	0.98	12.79	1.92
4	2.91	4.47	1.54	0.58	0.74	4.23	0.95	1.37	6.01	1.35	8.14	1.92
5	2.96	4.58	1.55	0.65	0.77	4.38	0.96	1.37	5.92	1.29	8.40	1.92
6	1.10	2.30	2.09	0.29	0.79	2.18	0.95	1.37	4.64	2.02	3.17	1.45
7	2.77	4.19	1.51	0.69	0.76	4.22	1.01	1.29	4.81	1.15	8.05	1.91
8	1.81	3.05	1.69	0.48	0.73	3.02	0.99	1.29	3.82	1.25	5.18	1.71

HR=50% $t_0=7$ días

viga	Método general (CONS)			Metodo simplificado				MC-90			ACI	
	yinst	ytot	incr	ycr	ysh	ytot	ratios	yc	ytot	ratio	ytot	ratio
1	7.07	11.11	1.57	2.65	1.85	11.56	1.04	2.39	9.72	0.88	21.21	1.83
2	5.52	8.75	1.59	1.61	1.35	8.48	0.97	2.39	7.47	0.85	14.35	1.69
3	4.67	8.14	1.74	1.68	1.51	7.86	0.97	2.39	6.85	0.84	12.79	1.63
4	2.91	5.19	1.78	0.84	1.33	5.08	0.98	1.37	6.01	1.16	8.14	1.60
5	2.96	5.35	1.81	0.94	1.37	5.27	0.99	1.37	5.92	1.11	8.40	1.59
6	1.10	2.92	2.65	0.42	1.42	2.94	1.01	1.37	4.64	1.59	3.17	1.08
7	2.77	4.89	1.77	1.02	1.29	5.08	1.04	1.29	4.81	0.98	8.05	1.59
8	1.81	3.65	2.02	0.71	1.25	3.76	1.03	1.29	3.82	1.05	5.18	1.38

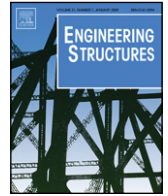
Anejo C: Artículo publicado por ELSEVIER

Se aneja el artículo publicado. La versión incorporada es la de publicación *on-line* existente en la página web de Elsevier, por encontrarse el artículo, en formato revista, en fase de edición final.



Contents lists available at ScienceDirect

Engineering Structures

journal homepage: www.elsevier.com/locate/engstruct

Long-term deflections in cracked reinforced concrete flexural members

Antonio R. Marí*, Jesús M. Bairán, Noemi Duarte

Universitat Politècnica de Catalunya, Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona, Spain

ARTICLE INFO

Article history:

Received 30 July 2009

Received in revised form

29 October 2009

Accepted 1 December 2009

Available online xxxx

Keywords:

Reinforced concrete

Deflections

Time

Creep

Shrinkage

Section

Cracking

Simplified method

Non-linear analysis

ABSTRACT

Long-term deflections, especially in cracked and slender R/C flexural members, may cause delayed damage in non-structural elements, so they must be accurately estimated at the design stage. The time-dependent response of cracked sections is complex, since creep and shrinkage produce a shift of the neutral axis, and the delayed curvature is significantly affected by the amounts of tensile and compressive reinforcements. In this paper, a simplified method for the calculation of long-term curvatures and deflections in flexural members is proposed, which is based on the mechanics of reinforced concrete, and explicitly incorporates the most important parameters governing the time-dependent behavior of RC sections and elements. Constant stress in the tensile reinforcement under sustained load is assumed, according to experimental observations and the results of numerical simulations on the time-dependent behavior of cracked sections. The results of the simplified proposed formulae fit very well those obtained by a general non-linear and time-dependent analysis of a large number of hypothetical beams. Good agreement has also been obtained with the results of 217 previously tested beams under sustained load, available in the literature. Better approximation and lower scatter than the long-term deflections calculated with other widely used simplified methods have been obtained. It is concluded that, in order to accurately predict the delayed deflections at any time of the service life of normal and high strength concrete structures, loaded at any age, creep coefficient and shrinkage strain must explicitly appear in the simplified formulae, as those derived in the proposed method.

© 2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Long-term deflections of reinforced concrete beams due to creep and shrinkage of concrete may be significant, especially for cracked beams, and can cause damage in structural and non-structural elements. Creep and shrinkage of concrete are influenced by the environmental conditions, the size of the element, the water/cement ratio, the type of cement, and the curing conditions. Creep also depends on the level of applied stress, on the duration of the sustained load and on the age of concrete at the instant of loading. In addition, deflections due to creep and shrinkage depend on the cracking level, on the amount of tensile and compressive steel, on the geometry and support conditions of the structure and on the construction sequence, among other factors.

The accurate prediction of deflections is, therefore, a complex problem which requires the use of non-linear and time-dependent analytical methods when all mechanical and formal aspects are to be considered explicitly. These methods are, in general,

time consuming and require great effort. However, at the design stage, simple but reliable methods which take into account the most important parameters influencing the long-term deflections may be very useful to adequately design the structure. For that purpose, many simplified methods have been developed [1–7], some of which have been incorporated into International and National Codes and Recommendations. Disparity in the origin and number of parameters explicitly accounted for in these methods can lead to significant differences in the predicted deflections, as reported by Espion and Halleux [8], who studied the variability of the ACI and CEB methods, using a large number of experimental results [9].

Therefore, it seems reasonable to look for a simplified method that combines accuracy, theoretical consistency and simplicity and that can be used satisfactorily for design purposes. In this paper a simplified method for the computation of long-term deflections of reinforced concrete beams and one way slabs has been developed which satisfies the above requirements. The method is based on the principles of mechanics of reinforced concrete structures and on the observed behavior of constitutive materials. The analytical derivation of the proposed formulae provides valuable information about the influence of each parameter on the predicted deflections. Thus it can be used not only for computations of deflections but also to establish slenderness limits or other design parameters.

* Corresponding author.

E-mail addresses: antonio.mari@upc.edu, antonio.mari@upc.es (A.R. Marí), jesus.miguel.bairan@upc.edu (J.M. Bairán), noemi.duarte@upc.edu (N. Duarte).

Notation

A_s	Tensile reinforcement area.
A'_s	Compressive reinforcement area.
b	Width of a rectangular cross section.
c_0	Depth of the concrete compressive triangular block at $t = t_0$
c	Depth of the concrete compressive triangular block at $t > t_0$
d	Effective depth of the section.
d'	Mechanical cover of the compressive reinforcement.
d_2	Depth of the rotation axis at any time. For $t = t_0$, $d_2 = x_0$
E_c	Modulus of Elasticity of concrete.
E_s	Modulus of elasticity of steel.
f_c	Compressive concrete strength.
f_{ct}	Tensile concrete strength.
h	Height of the cross section.
k_{sh}	Shrinkage deflection coefficient, depending on the support condition and load distribution.
M	Bending moment. A positive moment produces tension at the bottom fibre.
M_{cr}	Cracking moment of a section.
M_a	Maximum bending moment under the most unfavorable load combination at service
x_0	Depth of the neutral axis at time $t = t_0$. In time $t = t_0$, $x_0 = c_0$
x	Depth of the neutral axis at time $t > t_0$.
y	Deflection.
y_g	Instantaneous deflection due to permanent loads.
y_I	Deflection calculated in state I (uncracked) according to the CEB Bilinear Model.
y_{II}	Deflection calculated in state II (cracked) according to the CEB Bilinear Model.
k_s	Shrinkage deflection coefficient, depending on the support condition and load distribution.
ΔC_c	Variation of compressive concrete force with time.
ΔC_s	Variation of force in the compressive reinforcement with time.
$\Delta \varepsilon_s$	Increment of strain in the compressive reinforcement at $t > t_0$
$\Delta \varepsilon_c$	Increment of strain in the most compressed concrete fibre at $t > t_0$
$\Delta \psi$	Increment of curvature at time $t > t_0$
$\Delta \psi_{cr}$	Increment of curvature due to creep.
$\Delta \psi_{sh}$	Increment of curvature due to shrinkage.
$\Delta \sigma_s$	Increment of stress in the tensile reinforcement at $t > t_0$
$\Delta \sigma'_s$	Increment of stress in the compressive reinforcement at $t > t_0$
Δy_g	Delayed deflection
Δy_{cr}	Delayed deflection due to creep
Δy_{sh}	Delayed deflection due to shrinkage
ΔT	Variation of force in the tensile reinforcement with time
α	Ratio between the modulus of elasticity of steel and concrete
χ	Concrete aging coefficient
$\varepsilon(t)$	Total strain at a given time and point in a structure
$\varepsilon^m(t)$	Mechanical strain (instantaneous stress-produced strain)
$\varepsilon^{nm}(t)$	Non-mechanical strain $\varepsilon^{nm}(t) = \varepsilon_{cr}(t) + \varepsilon_{sh}(t) + \varepsilon_a(t) + \varepsilon_T(t)$
$\varepsilon_{cr}(t)$	Creep strain at time t
$\varepsilon_{sh}(t)$	Shrinkage strain at time t

$\varepsilon_a(t)$	Aging strain at time t
$\varepsilon_T(t)$	Thermal strain at time t
ε_{c0}	Instantaneous strain in the most compressed concrete fibre (t_0)
$\varepsilon_c(t)$	Strain in the most compressed concrete fibre at $t > t_0$
$\varepsilon_s(t)$	Strain in the tensile reinforcement at $t > t_0$
$\varphi(t, t_0)$	Creep coefficient at time t , when loading age is $t = t_0$
ρ'_m	Average amount of compressive reinforcement along the element
ρ_m	Average amount of tensile reinforcement along the element
σ_{c0}	Maximum concrete stress at $t = t_0$
σ_{s0}	Maximum tensile steel stress at $t = t_0$
σ'_{s0}	Maximum compressive steel stress at $t = t_0$
σ_c	Maximum concrete stress at $t > t_0$
σ_s	Maximum tensile steel stress at $t > t_0$
σ'_s	Maximum compressive steel stress at $t > t_0$
ξ	Interpolation parameter used in the CEB Bilinear Model
ψ_0	Instantaneous curvature
ψ	Curvature at $t > t_0$

2. Time-dependent flexural behavior of cracked reinforced concrete sections under sustained loading

2.1. General

Consider a reinforced concrete section, with tensile and compressive reinforcements, such as indicated in Fig. 1, which is cracked and subjected to a constant bending moment applied at the concrete age $t = t_0$. The assumptions of plane sections and perfect bond between concrete and the reinforcement are considered. The strains and stresses distributions under the applied bending moment, and the curvature produced, are shown also in Fig. 1 for $t = t_0$ and $t > t_0$.

Due to creep and shrinkage of concrete, the section curvature will increase with time and reinforcement strains will be equal to those of the surrounding concrete. However, since neither creep nor shrinkage take place in the steel, the reinforcement partially constrains the free deformation of concrete. Any increment of strain in the steel will produce an increment of stress and redistributions of stresses between concrete and steel will take place, necessary to maintain equilibrium of normal forces at any time. In addition, a shift of the neutral axis depth will take place along the time, in order to equilibrate the constant applied bending moment. Therefore, the final state of stresses, strains and curvature will be a result of the equilibrium and compatibility, accounting for the instantaneous and time-dependent **behavior** of the materials.

For given environmental conditions, creep strains depend on the age of loading and on the applied stress level. Since the stresses vary along the time, a step by step analysis is necessary in order to take into account the effects of the stress history on the time-dependent sectional response. In addition, the constraints generated by the reinforcements to the deformation of the concrete by creep and shrinkage, may produce tensile stresses and even cracks in concrete and, therefore, a deep modification of the section **behavior**, that must be **analyzed** by means of a non-linear iterative procedure.

Several models for the non-linear and **time-dependent** analysis of reinforced concrete flexural members have been developed, which take into account the materials non-linearities and the effects of creep and shrinkage of concrete. Sectional analyses with

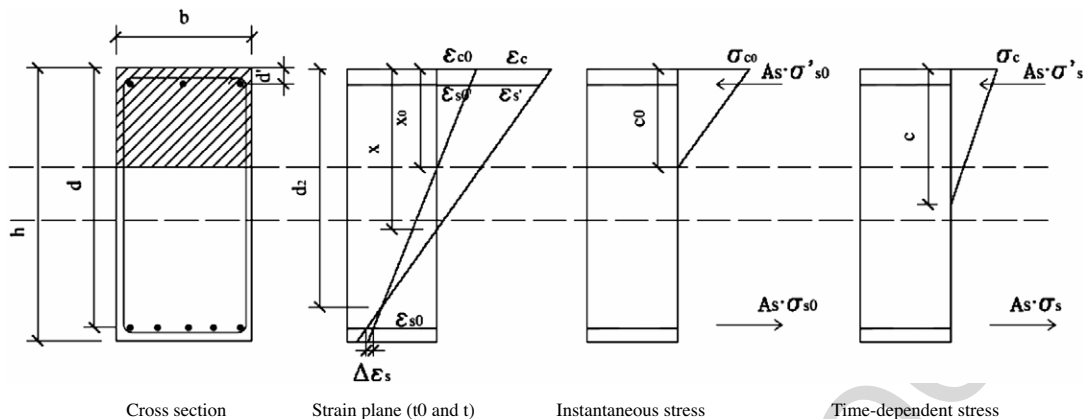


Fig. 1. Deformations and stresses in a reinforced concrete section.

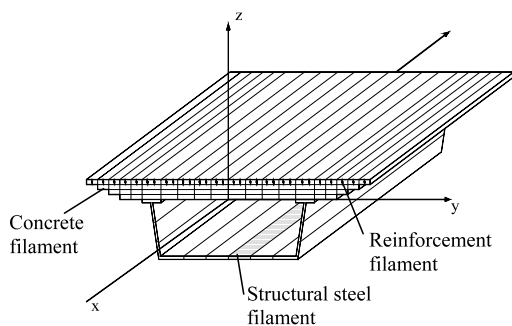


Fig. 2. Filamented beam element.

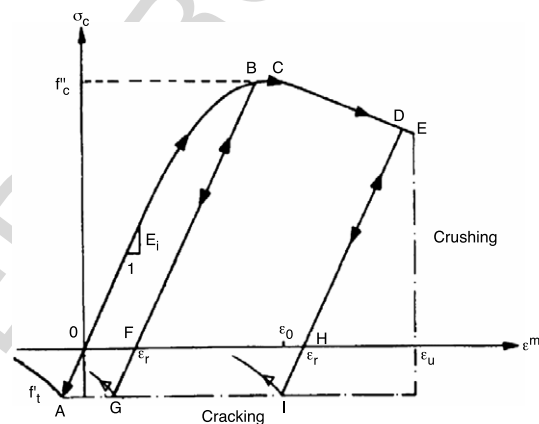


Fig. 3. Concrete stress-strain adopted.

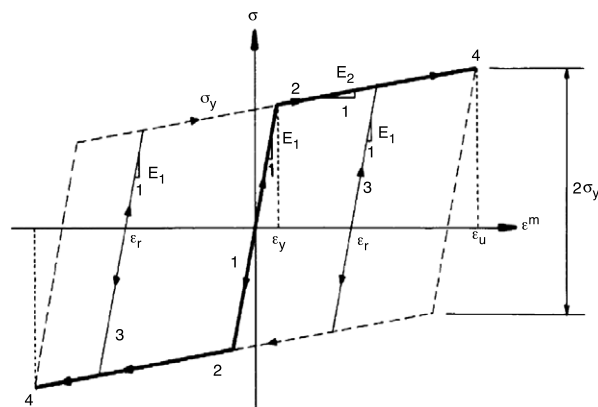


Fig. 4. Reinforcing steel stress-strain.

different levels of accuracy have been performed, among others, by Favre et al. [10], Clarke et al. [11], Gilbert [12], Ghali and Favre [13], Murcia [14], Jianguo Nie [15] and Chiorino [16]. At the structural level, general methods based on layer filament beam elements, which include material non-linearities such as cracking, yielding, crushing and load reversals, second order effects, time-dependent effects of creep and shrinkage and their interactive effects, have been developed by Kang and Scordelis [17], Ghali and Elbadry [18], Marí [19,20], Cruz [21] and Ulm [22].

2.2. Brief description of the numerical non-linear model used

The analytical model developed by Marí [20] has been used to study the influence of several parameters on the delayed behavior of reinforced concrete sections under sustained loading.

The model, implemented in a computer program called CONS, is based on the displacement formulation of the Finite Element Method (FEM), using a beam element with the cross section divided into fibres or filaments subjected to a uniaxial stress state (Fig. 2). It is assumed that plane sections remain plane and the deformations due to shear strains are neglected. The materials non-linearities due to cracking and yielding, and the structural effects of the delayed deformations are taken into account in the structural analysis under loads and imposed deformations.

The total strain at a given time and point in the structure $\varepsilon(t)$, is taken as the direct sum of mechanical strain $\varepsilon^m(t)$, and non-mechanical strain $\varepsilon^{nm}(t)$, consisting of creep strain $\varepsilon_{cr}(t)$, shrinkage strain $\varepsilon_{sh}(t)$, aging strain $\varepsilon_a(t)$, and thermal strain $\varepsilon_T(t)$.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^m(t) + \varepsilon^{nm}(t) \quad (1)$$

$$\varepsilon^{nm}(t) = \varepsilon_{cr}(t) + \varepsilon_{sh}(t) + \varepsilon_a(t) + \varepsilon_T(t). \quad (2)$$

The instantaneous non-linear behavior of concrete in compression has been considered by means of a parabolic model with a post-peak descending branch and load reversal (Fig. 3). A smeared crack

approach is used and tension stiffening is considered in the tensile stress-strain branch of concrete. The evolution of concrete mechanical properties due to aging with time have been considered according to the Eurocode EC-2. For the reinforcing steel, a bilinear stress-strain relationship is assumed with load reversals (Fig. 4).

Creep strain $\varepsilon_{cr}(t)$ of concrete is evaluated by an age-dependent integral formulation based on the principle of superposition. Thus,

$$\varepsilon_{cr}(t) = \int_0^t c(\tau, t - \tau) \cdot \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3)$$

where $c(\tau, t - \tau)$ is the specific creep function, dependent on the age at loading τ , and $\sigma(\tau)$ is the stress applied at instant τ . Numerical creep analysis may be performed by subdividing the

total time interval of interest into time intervals Δt , separated by time steps. The integral [3] can then be approximated by a finite sum involving incremental stress change over the time steps. The adopted form for the specific creep function $c(\tau, t - \tau)$ is a Dirichlet series:

$$c(\tau, t - \tau) = \sum_{i=1}^m a_i(\tau) [1 - e^{-\lambda_i(t-\tau)}] \quad (4)$$

in which the values of m , λ_i and $a_i(\tau)$ are coefficients to be determined through adjustment of experimental or empirical creep formulae, as recommended by international codes, by a least square fit. In this work it is considered that sufficient accuracy is obtained using three terms of the series ($m = 3$), and adopting $\lambda_i = 10^{-i}$. The creep and shrinkage models used are those provided by the CEB-FIP Model Code.

The use of a Dirichlet series allows obtaining the creep strain increment at a given instant by a recurrent expression that only requires to store the stress and an internal variable of the last time step, thus avoiding the need to store the entire stress history.

The structural analysis strategy consists of a time step-by-step procedure, in which the time domain is divided into a discrete number of time intervals. A time step forward integration is performed in which increments of displacements, strains and other structural quantities are successively added to the previous totals as we march forward in the time domain. At each time step, the structure is analyzed under the external applied loads and under the imposed deformations, such as creep, originated during the previous time interval and geometry.

Several strategies have been implemented to solve the non-linear problem. Iterative procedures such as Newton-Raphson and Modified Newton or displacement control, combined with incremental analyses are used to trace the structural response along the structure service life throughout the elastic, cracked and ultimate load levels.

Nodal displacements, element internal forces, stresses and strains at each concrete and steel filament, curvature and elongation of each section, support reactions and other response parameters are provided by the model, after convergence is reached. Single cross sections can be analyzed by considering a cantilever beam of unit length subjected to a bending moment at the free end. The described model was experimentally checked by Marí and Valdés [23], and has been widely used for the non-linear analysis bridges decks and slender columns by Marí [24,25], and Chacón et al. [26].

2.3. Application to the non-linear time-dependent analysis of a rectangular cross section

As an example, a rectangular section subjected to a sustained load is analyzed by means of the above described model to obtain its time-dependent behavior. In order to show the complexity of the delayed behavior, three sections are analyzed, having the same amount of tensile reinforcement, but different amounts of compressive reinforcement ($\rho'/\rho = 0$, $\rho'/\rho = 0.5$ and $\rho'/\rho = 1.0$). The section has 300 mm width, 500 mm total depth and 50 mm mechanical cover of the reinforcement. In all cases, tensile reinforcement ratio is $\rho = 0.01$ ($A_s = 1350 \text{ mm}^2$). Concrete characteristic strength at 28 days is 25 MPa and bending strength is 500 MPa. The section is subjected to a sustained bending moment of 60 kN m, applied at the age of 7 days, which produces concrete cracking. Relative humidity is $HR = 60\%$. Tension stiffening is not considered in this sectional analysis in order to obtain results which can be easily comparable to those obtained by the simplified method presented later.

The creep and shrinkage models used are those provided by the CEB-FIP Model Code are used. Accordingly, the final creep

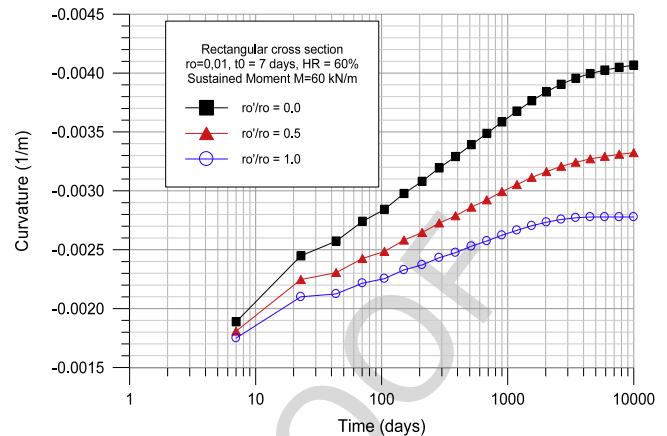


Fig. 5. Evolution of curvature with time.

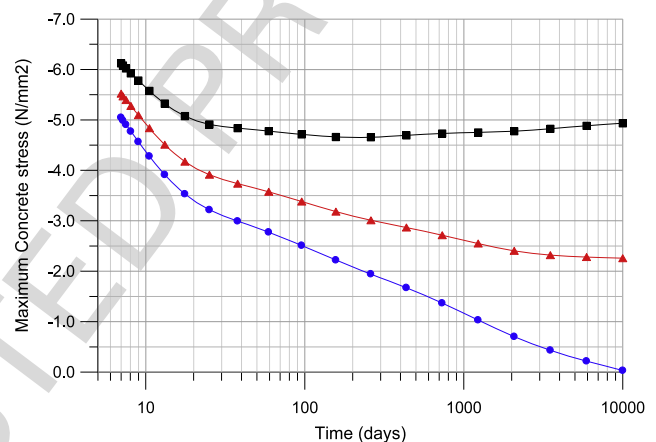


Fig. 6. Evolution of the maximum concrete stress with time.

coefficient is $\varphi = 3.17$ and the effective shrinkage strain after loading is $\varepsilon_{sh} = -0.000409$.

Fig. 5 shows the evolution of the section curvature with time, where the influence of the compressive reinforcement is evident. It can be seen that for the case with $\rho'/\rho = 1$, the curvature remains practically constant after 5000 days. The restraint to the concrete deformation produced by the large amount of compressive reinforcement, reduces the concrete compressive stresses and even cause cracking through the whole section depth.

Fig. 6 shows the reduction of the maximum concrete stress with time, showing that for the case with $\rho'/\rho = 1$ the maximum compressive concrete stress vanishes.

Fig. 7 shows the deformation plane as well as the concrete stresses distribution at short and long term. It can be seen that while the neutral axis increases with time in all cases, the depth of the compression stresses in concrete increases in the first case, remains constant in the second and reduces (even vanishes) in the third case because of the large tensile stresses caused by the shrinkage and creep.

Fig. 8 shows the evolution of the strains at the level of the compressive and tensile reinforcements. It is seen that while the strain at the compressive reinforcement significantly increases, the strain at the tensile reinforcement practically remains constant with time regardless of the reinforcement scheme. Due to that, the increment of curvature and the increment of compressive strains have similar shapes.

From the above results, it can be concluded that the evaluation of long-term curvatures, and thus long-term deflections, is not an obvious task. Thus, the availability of a simplified method for the evaluation of long-term deflection capable to capture the above

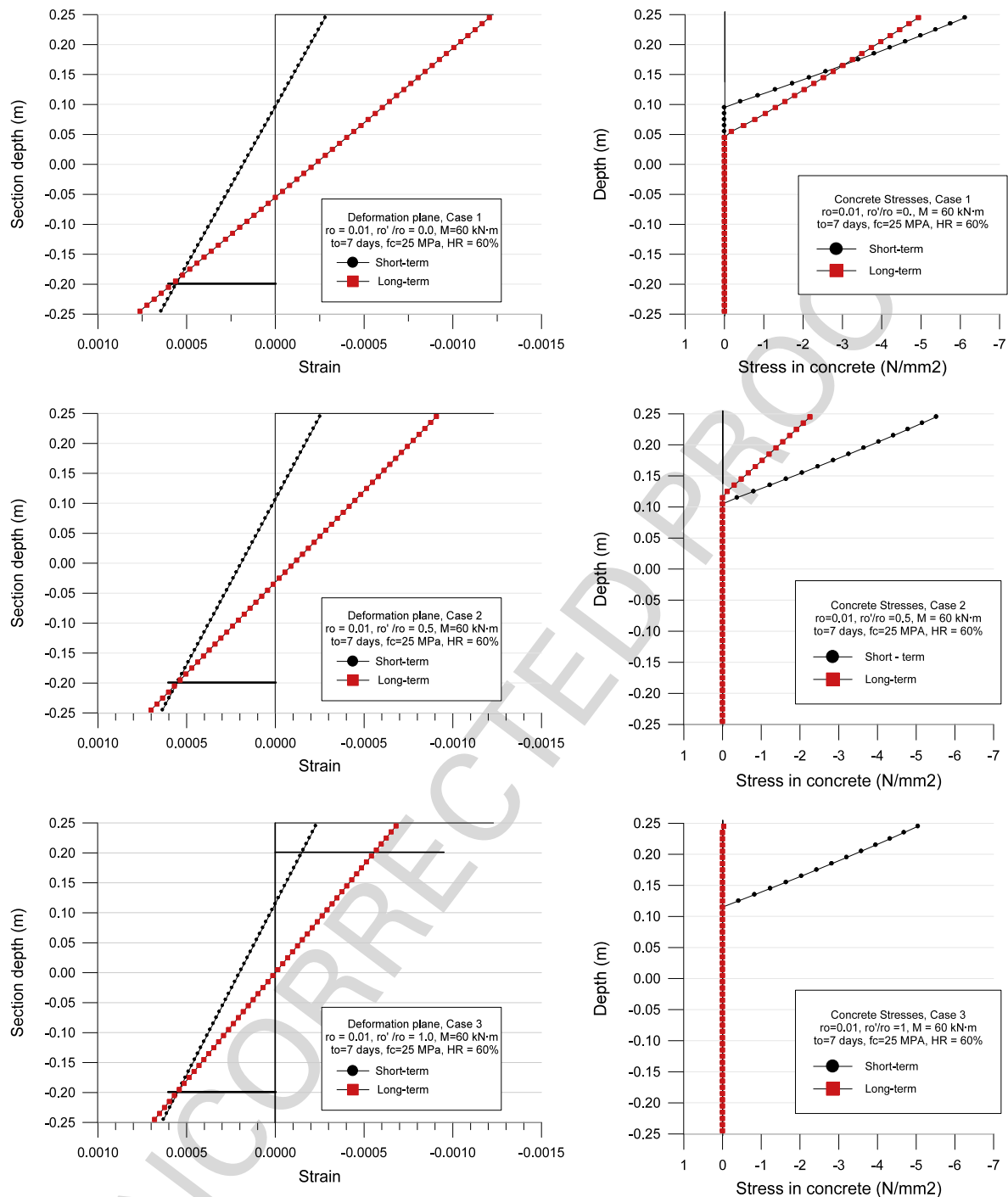


Fig. 7. Plane of strains and concrete stresses at short and long term.

behavior, at least for the most common cases, would be of a great interest for design purposes.

2.4. Parametric study

In order to check whether the above results can be generalized to most common rectangular reinforced concrete sections, a parametric study has been made, by means of the numerical model described above. The following parameters have been considered, resulting in a total of 144 cases:

- concrete strength of 25 MPa
- three amounts of tensile reinforcement ($\rho = 0.005, 0.01$ and 0.015)

- three of compressive reinforcement ($\rho'/\rho = 0, 0.5$ and 1)
- two ages of concrete at loading (7 and 28 days)
- two relative humidity level (60% and 80%)
- two instantaneous mechanical concrete strain, $\varepsilon_{c0}/\varepsilon_{sh} = 0.5$ and 1.0 .

It is worth noticing that different load levels are implicitly being considered through the variations of instantaneous concrete strains.

All the sections have the same dimensions (b, h), reinforcement cover ($d/h = 0.9, d'/h = 0.1$), and steel strength ($f_y = 500$ MPa). In the following some representative results are graphically presented, for the case of $\varepsilon_{c0}/\varepsilon_{sh} = 1.0, t_0 = 28$ and $HR = 60\%$.

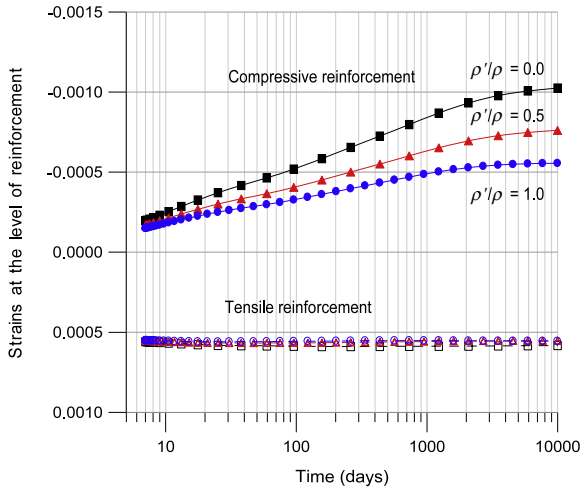


Fig. 8. Evolution of steel stresses with time.

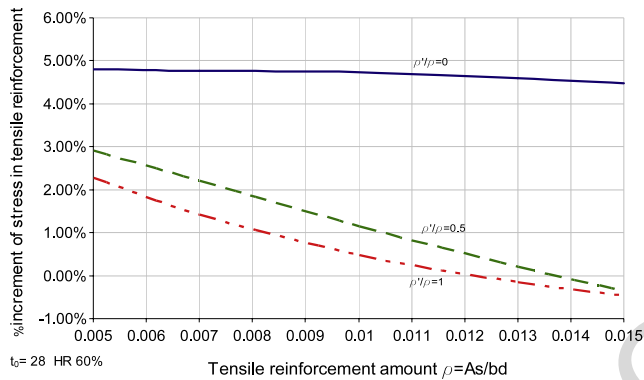


Fig. 9. Variation of the stress in the tensile reinforcement.

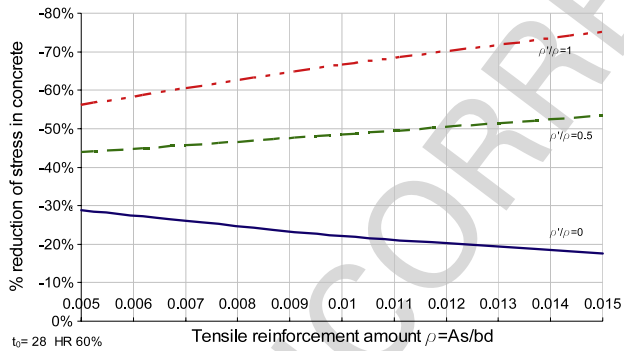


Fig. 10. Variation of maximum concrete stress with time.

Fig. 9 shows the variation of the stress in the tensile reinforcement, which remains practically constant with time, as experimentally observed and reported by Stevens [27] and Neville [28], among other researchers. It is also observed that the more amount of compressive reinforcement the less variation of stress at the tensile reinforcement. The average stress increment is 2.1%, the maximum is 4.8% and, for highly reinforced sections in compression, the stress in tensile reinforcement even decreases.

On the other hand, as shown in Fig. 10, concrete stresses reduce drastically, being the amount of reduction highly dependent on the amount of compressive reinforcement (approximately 20% for $\rho' = 0$ and 70% for $\rho' = \rho$).

Fig. 11 shows the ratio of the rotation axis (d_2) and the effective depth, as defined in Fig. 1. It can be seen that d_2/d varies from 0.94 to 1.01, with an average of 0.98, what indicates that practically

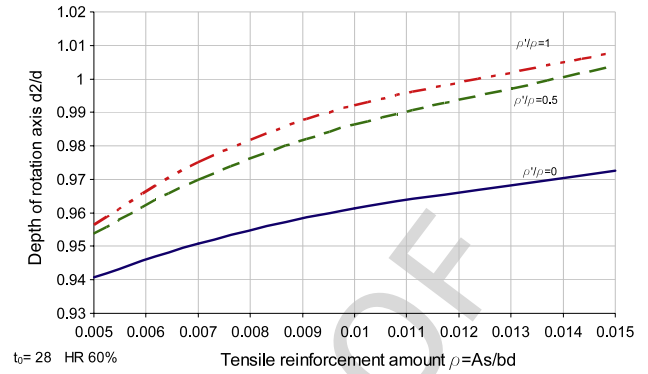


Fig. 11. Ratio between the depth of the rotation plane and the effective depth (d_2/d).

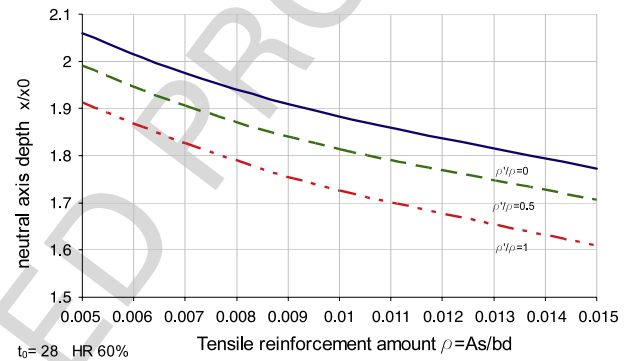


Fig. 12. Shift of the neutral axis depth due to creep and shrinkage.

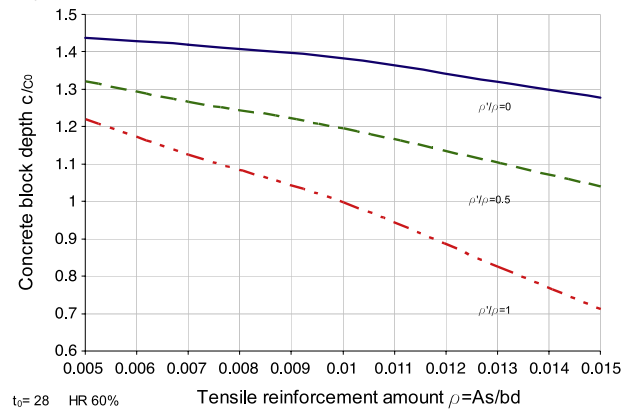


Fig. 13. Ratio between the final and the initial depth of the concrete block.

the section rotates with respect to the tensile reinforcement, consistently with the small variation of stress in that reinforcement observed in the above results.

Fig. 12 shows the shift of the neutral axis with time, as a function of the tensile and compressive reinforcements. A significant shift is produced in all cases, although it cannot be considered independent of the amount of steel. It can be observed, that the three curves corresponding to different ρ'/ρ are quite parallel which means that the effect of the amount of compressive reinforcement, on the shift of the neutral axis, is the same for any tensile reinforcement.

Finally, Fig. 13 shows the ratio between the long-term and the instantaneous depth of the concrete block in compression. It varies from 0.7 for highly reinforced sections in compression to 1.3 for sections without compressive reinforcement, with an average of 1.20.

The above results indicate that it is quite exact to assume that the stress at the tensile reinforcement remains constant with time,

thus allowing the development of a simplified method to obtain the long-term curvature, without significant loss of accuracy.

3. Simplified method for the calculation of long-term curvature in cracked RC sections

3.1. Derivation of equations of the long-term curvature in cracked sections

In order to derive a simplified method to obtain the long-term curvature, the following assumptions are considered:

- the section is cracked and subjected to a constant bending moment
- plane sections before deformation remain plane after deformation
- perfect bond exists between reinforcing steel and the surrounding concrete
- a **linear elastic behavior** is considered for concrete and steel at service loads, but no tensile strength is assumed for concrete
- the Age Adjusted Effective Modulus Method (AAEMM) [3] is adopted to consider creep under variable stresses
- the strain and stress at the tensile reinforcement remain constant with time
- shrinkage is considered to take place only at the uncracked zone of the concrete section.

At any time, the variation of the internal forces provides the following equation from equilibrium conservancy:

$$\Delta C_c + \Delta C_s + \Delta T = \frac{1}{2} \sigma_c b c - \frac{1}{2} \sigma_{c0} b c_0 + A'_s \Delta \sigma'_s - A_s \Delta \sigma_s = 0 \quad (5)$$

where:

- ΔC_c variation of compressive concrete force with time
- ΔC_s variation of force in the compressive reinforcement with time
- ΔT variation of force in the tensile reinforcement with time
- c_0 depth of the concrete compressed zone at $t = t_0$
- c depth of the concrete compressed zone at $t > t_0$
- σ_{c0} maximum concrete stress at $t = t_0$
- σ_c maximum concrete stress at $t > t_0$
- $\Delta \sigma_s$ increment of stress in the tensile reinforcement at $t > t_0$
- $\Delta \sigma'_s$ increment of stress in the compressive reinforcement at $t > t_0$.

According to the assumption of constant strain and stress in the tensile reinforcement, the increment of stress $\Delta \sigma_s = 0$. Thus, Eq. (5) can be rewritten as:

$$\sigma_c = \frac{2}{b \cdot c} \left(\frac{\sigma_{c0} b c_0}{2} + \Delta \sigma'_s \cdot A'_s \right) \quad (6)$$

According to the plain section deformation assumption, the compatibility of strains and the increment of curvature are given by the following expressions:

$$\Delta \psi = \frac{\Delta \varepsilon_c}{d_2} = \frac{\Delta \varepsilon'_s}{d_2 - d'} \quad (7)$$

$$\Delta \varepsilon_c = \frac{\Delta \varepsilon'_s}{d_2 - d'} = \frac{\Delta \sigma'_s}{E_s} \frac{d_2}{d_2 - d'} \quad (8)$$

where:

- $\Delta \psi$ increment of curvature at time $t > t_0$
- $\Delta \varepsilon_s$ increment of strain in the compressive reinforcement, at $t > t_0$
- $\Delta \varepsilon_c$ increment of strain in the most compressed concrete fibre at $t > t_0$
- d_2 depth of the rotation axis at any time. For $t = t_0$, $d_2 = x_0$

- d effective depth of the section
- d' mechanical cover of the compressive reinforcement.

According to the AAEMM, the increment of concrete strain with time, will be given by:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_c &= \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} \varphi + \frac{\Delta \sigma_c}{E_{c0}} (1 + \chi \varphi) + \varepsilon_{sh} \\ &= \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} \varphi + \frac{\sigma_c - \sigma_{c0}}{E_{c0}} (1 + \chi \varphi) + \varepsilon_{sh} \end{aligned} \quad (9)$$

where

- $\Delta \sigma_c$ increment of concrete stress from t_0 to $t > t_0$
- φ creep coefficient at time $t \geq t_0$
- ε_{sh} shrinkage strain at time $t \geq t_0$
- χ aging coefficient at time $t \geq t_0$ taken as $\chi = 0, 8$ in this work.

Note that the creep coefficient of the Eq. (9) relates the creep strain at time t and the instantaneous strain at the age of loading t_0 and not the instantaneous strain at 28 days.

By substituting Eqs. (7) and (8) into Eq. (9), taking into account that for $\Delta \varepsilon_s = 0$, $d_2 = d$, after several re-arrangements the following value of the increment of curvature is obtained:

$$\Delta \psi = \frac{\Delta \sigma'_s}{E_s (d - d')} = \frac{\varepsilon_{c0} \cdot (\varphi - \varphi \chi - 1 + \frac{c_0}{c} (1 + \chi \varphi)) + \varepsilon_{sh}}{d \left(1 + \alpha \rho' \frac{2(1 + \chi \varphi) \left(1 - \frac{d'}{d} \right)}{\left(\frac{c}{c_0} \right) \cdot \left(\frac{c_0}{d} \right)} \right)} \quad (10)$$

where

- $\rho' = A'_s / b d$ geometric ratio of compressive reinforcement
- $\alpha = E_s / E_{c0}$ ratio between the modulus of elasticity of concrete and steel.

Eq. (10) can be simplified adopting a value for the ratio between the final and the initial depths of the concrete stress block $c/c_0 = 1.25$, according to the results of the previous parametric study. In addition, conservative values for other parameters affecting the second term of the denominator, which slightly influence the value of the increment of curvature, $\Delta \psi$, are adopted for the sake of simplicity. These values are:

- initial relative neutral axis depth, $c_0/d = 0.30$
- **aging** coefficient $\chi = 0.8$
- **ratio** between covers of compressive and tensile reinforcements $d'/d = 0.1$
- creep coefficient $\varphi = 2.0$, which is considered an average value for normal and high strength concrete.

Thus, substituting the above values in Eq. (10), the following approximate expression is obtained for the increment of curvature:

$$\begin{aligned} \Delta \psi &\cong \frac{\varepsilon_{c0} \cdot (0.84\varphi - 0.20) + \varepsilon_{sh}}{d (1 + 12\alpha \rho')} \\ &= \frac{\varepsilon_{c0}}{d} \cdot \frac{0.84\varphi - 0.20}{1 + 12\alpha \rho'} + \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \cdot \frac{1}{1 + 12\alpha \rho'} \end{aligned} \quad (11)$$

where it can be seen that the delayed curvature can be considered composed by the sum of two terms, named the creep curvature $\Delta \psi_c$ and the shrinkage curvature $\Delta \psi_s$.

Taking into account that:

$$\frac{\varepsilon_{c0}}{d} = \frac{\varepsilon_{c0}}{x_0} \cdot \frac{x_0}{d} = \psi_0 \frac{x_0}{d} \quad (12)$$

where

- x_0 is the instantaneous ($t = t_0$) neutral axis depth
- $\psi_0 = \varepsilon_{c0}/x_0$ is the instantaneous curvature ($t = t_0$),

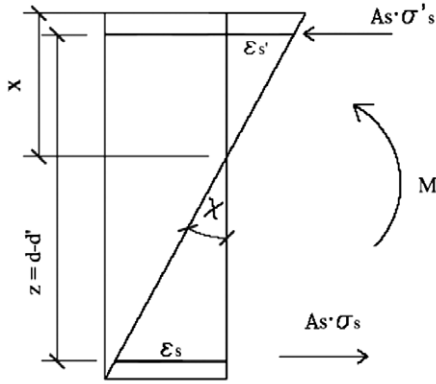


Fig. 14. Stresses in a fully cracked bent section.

Eq. (11) can be rewritten as:

$$\Delta\psi = \Delta\psi_c r + \Delta\psi_{sh} = \psi_0 \frac{x_0}{d} \frac{0.84\varphi - 0.2}{1 + 12\alpha\rho'} + \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \frac{1}{1 + 12\alpha\rho'} \quad (13)$$

The ratio between the instantaneous neutral axis depth and the effective depth, x_0/d , is also a function of $\alpha\rho$ and ρ'/ρ , as shown by the well known following equation:

$$\frac{x_0}{d} = \alpha\rho \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right) \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2\left(1 + \frac{\rho' d'}{\rho d}\right)}{\alpha\rho \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right)^2}}\right) \quad (14)$$

which can be approached, with an error less than 5%, by:

$$\frac{x_0}{d} = \frac{0.18 + 1.8\alpha\rho}{1 + \frac{\rho' d'}{\rho d}} \quad (15)$$

As it can be observed, the increment of curvature is a function of the instantaneous curvature ψ_0 , the creep coefficient φ , the ratio between the shrinkage strain and the effective depth, the equivalence coefficient between concrete and steel $\alpha = E_s/E_c$, and the amounts of tensile and compressive reinforcements.

Eq. (13) is valid assuming that part of the cross section is in compression. However, as seen in Section 2 (Fig. 7), in highly reinforced sections, the restriction created by the reinforcement to creep and shrinkage strains cause tensile stresses in the concrete compressive zone. These tensile stresses may balance the compressive stresses due to the bending moment and even produce cracks crossing the entire section. In that case, no further increment of curvature takes along the time, since concrete is fully cracked.

In order to obtain the curvature at the instant when the section becomes fully cracked, equilibrium and compatibility equations of the section are set, taking into account that in this state the bending moment is resisted only by the tensile and the compressive reinforcements (Fig. 14).

$$A_s'\sigma_s' - A_s\sigma_s = 0 \quad (16)$$

$$M = A_s\sigma_s (d - d') = A_s'\sigma_s' (d - d') \quad (17)$$

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\sigma_s}{E_s(d-x)} = \frac{\sigma_s'}{E_s(x-d')} \quad (18)$$

Solving Eqs. (16), (17) and (18) the neutral axis x , and the curvature ψ at the instant when the section is fully cracked, become:

$$x = \frac{A_s d + A_s' d'}{A_s + A_s'} \quad (19)$$

$$\psi = \frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\sigma_s}{E_s(d-x)} = \frac{M}{E_s(d-d')^2} \frac{A_s + A_s'}{A_s \cdot A_s'} \quad (20)$$

In order to identify whether this phenomenon takes place, an equation relating the design parameters, such as dimensions, applied bending moment, area of the compressive reinforcement creep coefficient, shrinkage strain and materials properties, is searched.

The section is fully cracked when at a certain instant t , the maximum concrete compressive stress vanishes, $\sigma_c = 0$ or, in other words, when the variation of concrete stress due to creep and shrinkage $\Delta\sigma_c = -\sigma_{c0}$. According to the AAEMM, and taking into account the strain compatibility (Eq. (18)), the concrete strain at any instant, ε_c , is

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} (1 + \varphi) - \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} (1 + \chi\varphi) + \varepsilon_{sh} \\ &= \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} \varphi (1 - \chi) + \varepsilon_{sh} = \frac{\sigma_s' x}{E_s x - d'} \end{aligned} \quad (21)$$

Substituting σ_s' and x from Eqs. (17) and (19), respectively, into Eq. (21), the following expression is obtained:

$$\frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} \varphi (1 - \chi) + \varepsilon_{sh} \geq M \frac{A_s d + A_s' d'}{E_s (A_s' (d - d'))^2} \quad (22)$$

For design purposes, assuming $\chi = 0.8$, $\sigma_{c0} \leq 0.4f_c$, being $A_s = \rho \cdot b \cdot d$, $A_s' = \rho' \cdot b \cdot d$, and after certain re-arrangements, the following dimensionless equation is obtained:

$$0.2\varphi + 2.5 \frac{E_c \varepsilon_{sh}}{f_c} \geq 2.5 \frac{\mu}{\alpha} \frac{\rho + \rho' \frac{d'}{d}}{\left(\rho' \cdot \left(1 - \frac{d'}{d}\right)\right)^2} \quad (23)$$

which is the searched condition, where $\mu = M/(f_c \cdot b \cdot d^2)$ is the non-dimensional minimum bending moment that avoids cracking in the whole section due to creep and shrinkage.

As a matter of example, Eqs. (20) and (22) are checked with cases 2 and 3 studied in Section 2.3. The sections have been analyzed by the general non-linear **time-dependent** method and the results are shown in Fig. 7. The two sections have the same amount of tensile reinforcement, $\rho = 0.01$ ($A_s = 1350 \text{ mm}^2$), but different amounts of compressive reinforcement ($\rho'/\rho = 0.5$ and $\rho'/\rho = 1.0$). The section has 300 mm width, 500 mm total depth and 50 mm mechanical cover of the reinforcement. Concrete characteristic strength at 28 days is 25 MPa. The section is subjected to a sustained bending moment of 60 kN m, greater than the cracking moment, at the age of 7 days, ($f_c = 19.5 \text{ MPa}$), producing an instantaneous compressive strain in the top concrete fibre $\varepsilon_{c0} = \sigma_{c0}/E_{c0} = 0.002273$, and a strain in the tensile reinforcement $\varepsilon_{s0} = 0.0005511$.

Relative humidity is $HR = 60\%$, the creep coefficient is $\varphi = 3.17$ and the effective shrinkage strain after loading is $\varepsilon_{sh} = -0.000409$. The long-term compressive and tensile strains are $\varepsilon_c = 0.000694$ and $\varepsilon_s = 0.000556$, respectively.

With this values, Eq. (22) is not satisfied for the case with $\rho'/\rho = 0.5$ but is satisfied for the case of $\rho'/\rho = 1.0$, what is consistent with the results of the non-linear analysis shown in Fig. 7.

For case 2 $\rho = 0.01$ ($A_s = 1350 \text{ mm}^2$) and $\rho' = 0.005$ ($A_s = 675 \text{ mm}^2$):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} \varphi (1 - \chi) + \varepsilon_{sh} &= 0.000908 < M \frac{A_s d + A_s' d'}{E_s (A_s' (d - d'))^2} \\ &= 0.002638. \end{aligned} \quad (24)$$

Therefore, cracking is not extended in the whole section.

For case 3 $\rho = 0.01$ and $\rho' = 0.01$:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} \varphi (1 - \chi) + \varepsilon_{sh} &= 0.000908 > M \frac{A_s d + A_s' d'}{E_s (A_s' (d - d'))^2} \\ &= 0.000694. \end{aligned} \quad (25)$$

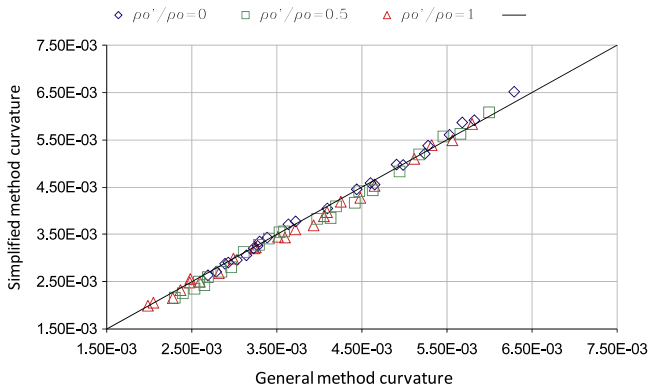


Fig. 15. Comparison between the results obtained by the simplified method and the numerical non-linear model.

Therefore, cracking is extended through the whole section.

For case 3, the long-term curvature obtained from the general method is (see Fig. 7), $\chi = (0.000694 + 0.000556)/0.45 = 0.00277 \text{ m}^{-1}$ while using the proposed method (Eq. (20)), the curvature is the same, as expected.

$$\psi = \frac{M}{E_s (d - d')^2} \frac{A_s + A'_s}{A_s \cdot A'_s}$$

$$= \frac{60 \cdot (1350 + 1350) \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^8 \cdot (0.40)^2 \cdot 1350^2 \cdot 10^{-12}} = 0.002777 \text{ m}^{-1}.$$

Eq. (13) has been derived taking into account the equilibrium of forces, the strain compatibility and the constitutive equations of the steel and concrete at short and long term, together with the assumption of constant stress in the tensile reinforcement. As a consequence, equilibrium of moments is not strictly fulfilled. In order to check the error made, the internal moment produced by stresses has been compared with the applied moment in all cases studied, obtaining a maximum error of 2.24%.

3.2. Verification of the proposed equation for long-term curvature

In order to verify the accuracy of the proposed simplified method, the cases analyzed in Section 3 were also studied by applying Eqs. (13) and (21). The results were compared with those obtained by the general method, and plotted in Fig. 15, where excellent agreement is observed. The mean error was -1.7% , the standard deviation was 2.6% , the maximum overestimating error was 3.5% and the minimum underestimating error was -7.75% .

4. Simplified method for the calculation of long-term deflections in reinforced concrete beams

Deflections due to bending moments can be obtained by integrating the curvature of the sections along the beam length, accounting for the support conditions. The above expressions for the delayed curvature have been derived for cracked sections. However, along a reinforced concrete beam, there are parts cracked and parts not cracked whose delayed behavior is different. In order to take into account this fact, an interpolation between the delayed deflection calculated in state I (uncracked) and that obtained in state II (cracked) can be done, as adopted by the CEB Bilinear Model [29]. However, for design purposes, sufficient accuracy can be obtained if the creep curvature of the cracked sections is used for the calculation of deflections, which approaches well the behavior of beams when cracking is widely extended.

In addition, the amount of reinforcement may change along the beam length and, therefore, the derivation of deflections must take this fact into account.

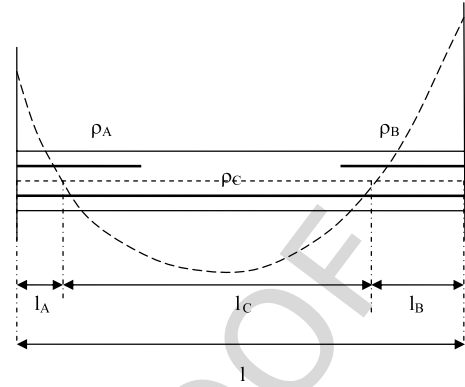


Fig. 16. Bending moment diagram defining l_1 , l_2 and l_3 .

According to the above considerations, the long-term deflections due to a permanent load will be the sum of the instantaneous deflection plus the increment of deflection due to creep and shrinkage.

If the member is not cracked under the most unfavorable service load combination, the delayed deflection may be considered as that produced instantaneously by the permanent load y_g , multiplied by the creep coefficient, and the deflection due to shrinkage can be neglected.

$$y = y_g + \Delta y_g = y_g (1 + \varphi). \quad (24)$$

If the beam cracks under the most unfavorable service load combination, the delayed deflection, Δy_g , will be the sum of the creep deflection Δy_{cr} , and the shrinkage deflection, Δy_s .

$$\Delta y_g = \Delta y_{cr} + \Delta y_{sh}. \quad (25)$$

The creep deflection will be obtained by multiplying the instantaneous deflection due to permanent loads, y_g , by the above average creep curvature factor:

$$\Delta y_{cr} = y_g \frac{x_0}{d} \frac{0.84\varphi - 0.20}{1 + 12\alpha\rho'} \quad (26)$$

where expression (15) may be used to approximate x_0/d .

In simply supported elements, the values of the reinforcement amounts at midspan section may be used to obtain the creep deflection. In continuous or fixed end members, an average value of the reinforcement amounts ρ and ρ' can be used, (see Fig. 16) as proposed by Favre [29] and included in the simplified method of the CEB Model Code [5], as follows:

$$\rho_m = \rho_A \frac{l_A}{l} + \rho_B \frac{l_B}{l} + \rho_C \frac{l_C}{l} \quad (27)$$

where

- ρ_A reinforcement amount at the end support A
- l_A length of the beam with negative bending moment law at support A
- ρ_B reinforcement amount at the end support B
- l_B length of the beam with negative bending moment at support B
- ρ_C reinforcement amount at midspan
- l_C length of the beam with positive bending moment law.

In any case: $l = l_A + l_B + l_C$.

In general, approximate values of l_A , l_B and l_C provide satisfactory results. The following default values can be adopted:

- For beams supported at one end and fixed at the other, and for end spans of continuous beams, $l_A / l = 0.25$ and $l_B / l = 0.75$.
- For beams with both ends fixed, $l_A / l = l_B / l = 0.20$, and $l_C / l = 0.60$.
- For interior spans of continuous beams, $l_A / l = l_B / l = 0.15$, and $l_C / l = 0.70$.

The deflection due to shrinkage is obtained by integrating the shrinkage curvature $\Delta\psi_s$ (second term of Eq. (13)), along the beam length, taking into account the support conditions. In a simplified way a constant curvature can be considered, assuming the same reinforcement amounts indicated for the creep curvature factor. The deflection due to shrinkage becomes:

$$\Delta y_s = \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \frac{1}{1 + 12\alpha\rho'} \cdot k_{sh} \frac{l^2}{8} \quad (28)$$

where “ l ” is the span length of the beam, and k_s is a constant which depends on the support conditions and load distribution. Approximate values of k_s are:

$k_{sh} = 4.0$ for cantilevers

$k_{sh} = 1.0$ for simply supported beams

$k_{sh} = 0.7$ for end spans of continuous beams

$k_{sh} = 0.5$ for intermediate spans of continuous beams and beams fixed at both ends.

The total deflection will be, then:

$$y = y_{inst} + \Delta y_{cr} + \Delta y_{sh}. \quad (29)$$

The above expressions have been derived for rectangular sections, however they can be applied to most typical sections (T, double T, I, box, Π , etc.) when the neutral axis depth is less than the flange depth.

The proposed method for calculation of creep deflections is applicable to arbitrary loads, since creep deflections are proportional to the instantaneous deflections due to permanent loads (Eq. (26)), which already take into account the type of loading. However, shrinkage deflections in cracked members depend on the distribution of cracks along the beam and, therefore, on the type of loading. The factors k_{sh} of Eq. (28) correspond to beams subjected to distributed loads, which are the most common type of permanent loads (dead loads, pavement, etc.) for current building structures. For other types of loads, such as point loads, k_{sh} should be obtained by integration of shrinkage curvatures, taking into account the position of cracks (on top or bottom) of each section and the support conditions of the element, as reported by Ghali and Favre [13].

5. Examples

5.1. Simply supported beam

Let us consider a simply supported beam of 8 m span, (extracted from [12], example 9.1). The dimensions and reinforcement data are: $b = 0.30$ m, $h = 0.65$ m, $\rho = 0.6\%$, $\rho' = 0.15\%$, $d = 0.6$ m, $d' = 0.05$ m. A uniformly distributed load $q = 17$ kN/m is applied at time t_0 . Other data are: $E_s = 200$ GPa; $E_c(t_0) = 30.0$ GPa; $\varphi(t, t_0) = 2.5$; $\chi(t, t_0) = 0.8$; $\varepsilon_{cs}(t, t_0) = -250 \times 10^{-6}$; $f_{ct} = 2.5$ MPa.

The cracking moment is $M_{cr} = 52.8$ kN m and the bending moment at midspan is 136.0 kN m. The instantaneous elastic deflection is 4.4 mm. according to the CEB Bilinear Model the obtained instantaneous deflection is 14.3 mm, being $y_I = 4.05$ mm and $y_{II} = 16.7$ mm the deflections in the uncracked and cracked states, respectively, taking into account the amount of reinforcement. The time-dependent deflections will be 8.9 mm and 9.1 mm for states I and II, respectively. Therefore, lower and upper bounds of the total deflection will be

$$y_I = 4.05 + 8.9 = 12.95 \text{ mm}$$

$$y_{II} = 16.7 + 9.1 = 25.80 \text{ mm}$$

and the interpolation between states I and II, using the interpolation parameter

$$\xi = 1 - 0.5 \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right) = 0.81.$$

05 Provides a probable value of the total deflection of

$$y_{tot} = (1 - \xi) \cdot y_I + \xi \cdot y_{II} \\ = (1 - 0.81) \cdot 12.95 + 0.81 \cdot 25.80 = 23.4 \text{ mm}$$

According to the proposed method, the relative depth of neutral axis is:

$$\frac{x_0}{d} = \frac{0.18 + 1.8 \cdot 0.04}{1 + \frac{0.0015 \cdot 50}{0.006 \cdot 600}} = 0.247.$$

The creep deflection will be

$$\Delta y_c = y_g \frac{x_0}{d} \frac{0.84 \cdot \varphi - 0.20}{1 + 12\alpha\rho'} \\ = 14.3 \cdot 0.247 \cdot \frac{0.84 \cdot 2.5 - 0.20}{1 + 12 \cdot 6.67 \cdot 0.0015} = 6.0 \text{ mm}.$$

The shrinkage deflection is

$$\Delta y_s = \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \frac{1}{1 + 12\alpha\rho'} \cdot k_s \frac{l^2}{8} \\ = \frac{0.00025}{0.60} \cdot \frac{1000}{1 + 12 \cdot 6.67 \cdot 0.0015} \cdot \frac{64}{8} = 3.0 \text{ mm}$$

and the total deflection

$$y_{tot} = 14.3 + 6.0 + 3.0 = 23.3 \text{ mm}$$

which is 99.5% of the deflection obtained by Ghali and Favre [12] (23.4 mm) and is 99.1% of the deflection obtained by a numerical non-linear model (23.5 mm).

In order to check the validity of the proposed method under the application of point loads, let us consider that the same beam is subjected to a point load $Q = 68$ kN, applied at the centre of the span, producing the same maximum bending moment of 136 kN m than the above distributed load of 17 kN m. The instantaneous deflection obtained according to the CEB Bilinear Method is 22.8 mm, being $y_I = 6.5$ mm and $y_{II} = 26.7$ mm the deflections in the uncracked and cracked states, respectively, taking into account the amount of reinforcement. The time-dependent deflections will be 13.7 mm and 12.6 mm for states I and II, respectively. Therefore, lower and upper bounds of the total deflection will be:

$$y_I = 6.5 + 13.7 = 20.2 \text{ mm}$$

$$y_{II} = 26.7 + 12.6 = 39.3 \text{ mm}.$$

The total deflection will be:

$$y_{tot} = (1 - \xi) \cdot y_I + \xi \cdot y_{II} \\ = (1 - 0.81) \cdot 20.2 + 0.81 \cdot 39.3 = 35.7 \text{ mm}.$$

According to the proposed method, (the depth of the neutral axis remains $x/d = 0.247$),

The creep deflection will be

$$\Delta y_c = y_g \frac{x_0}{d} \frac{0.84 \cdot \varphi - 0.20}{1 + 12\alpha\rho'} \\ = 22.8 \cdot 0.247 \cdot \frac{0.84 \cdot 2.5 - 0.20}{1 + 12 \cdot 6.67 \cdot 0.0015} = 9.6 \text{ mm}.$$

Since all the member is subjected to single curvature, the shrinkage deflection will be the same than in the distributed load, $\Delta y_s = 3.0$ mm, and the total deflection will be:

$$y_{tot} = 22.8 + 9.6 + 3.0 = 35.4 \text{ mm}$$

which results 99.2% of that obtained by the Bilinear CEB method.

Table 1

Geometrical definition and steel reinforcement ratios of the C30/37 beams analyzed.

Beam	Boundary conditions	h	b	l/h	l	d	d'	r -span	r'/r	r -sup	r'/r	Load1	Load2	M_a/M_{cr}
1	Hinged + hinged	600	300	10	6000	540	60	0.006	0	0	0	30	20	2.35
2	Hinged + hinged	600	300	10	6000	540	60	0.006	0.5	0	0	30	20	2.35
3	Hinged + hinged	600	300	10	6000	540	60	0.012	0.25	0	0	50	30	3.59
4	Fixed + hinged	500	300	12	6000	450	50	0.006	0	0.006	1	25	20	2.74
5	Fixed + hinged	500	300	12	6000	450	50	0.007	0	0.007	1	30	20	3.21
6	Fixed + hinged	500	300	12	6000	450	50	0.008	0	0.008	0.5	30	20	3.21
7	Fixed + fixed	400	300	15	6000	360	40	0.004	0	0.008	0.167	30	20	3.38
8	Fixed + fixed	400	300	15	6000	360	40	0.006	0	0.006	0.5	25	15	2.94

Table 2

Creep and shrinkage values for the different combinations studied (C30/37).

Beam	$t_0 = 28$ HR80%		$t_0 = 28$ HR50%		$t_0 = 7$ HR80%		$t_0 = 7$ HR50%	
	Creep	Shrinkage	Creep	Shrinkage	Creep	Shrinkage	Creep	Shrinkage
1	1.76	2.22E-04	2.45	3.97E-04	2.05	2.42E-04	2.85	4.32E-04
2	1.76	2.22E-04	2.45	3.97E-04	2.05	2.42E-04	2.85	4.32E-04
3	1.76	2.22E-04	2.45	3.97E-04	2.05	2.42E-04	2.85	4.32E-04
4	1.77	2.21E-04	2.47	3.97E-04	2.06	2.41E-04	2.87	4.33E-04
5	1.77	2.21E-04	2.47	3.97E-04	2.06	2.41E-04	2.87	4.33E-04
6	1.77	2.21E-04	2.5	3.97E-04	2.06	2.41E-04	2.919	4.34E-04
7	1.78	2.19E-04	2.5	3.97E-04	2.05	2.41E-04	2.919	4.34E-04
8	1.78	2.19E-04	2.5	3.97E-04	2.05	2.41E-04	2.919	4.34E-04

Table 3

Comparison of the results obtained by different simplified formulations with the numerical non-linear model for normal strength concrete.

t_0	HR	Simplified method		MC-90		ACI	
		Mean	Dev	Mean	Dev	Mean	Dev
28	80	1.008	0.021	0.976	0.134	1.178	0.083
28	50	1.042	0.039	0.815	0.103	0.985	0.081
7	80	1.030	0.042	0.977	0.093	1.162	0.080
7	50	1.056	0.053	0.830	0.075	0.961	0.075

5.2. Beam with fixed ends

Consider a beam of 6 m length, of rectangular cross section with dimensions $b = 0.30$ m, $h = 0.40$ m ($d = 0.35$ m, $d' = 0.05$ m), fixed at both ends. Concrete strength is 30 MPa, creep coefficient is $\varphi = 2.5$, shrinkage strain is $\varepsilon_{sh} = 0.00035$, $E_s = 200$ GPa; $E_c(t_0) = 30.0$ GPa; and $f_{ct} = 2.5$ MPa.

The beam is reinforced with $A_s = 840$ mm² ($\rho = 0.008$) and $A'_s = 210$ mm² ($\rho'/\rho = 0.25$) at supports and $A_s = 420$ mm² ($\rho = 0.004$) and $A'_s = 0$ mm² at midspan. The beam is loaded with a permanent load of 20 kN/m. The elastically calculated bending moments are 30 kN m at midspan, 60 kN m at supports, and the cracking moment is 20 kN m. The instantaneous deflection at midspan is 3.49 mm and the total deflection is 6.83 mm (both values obtained by the general method). The steel–concrete elastic modulus ratio is $\alpha = 6.67$.

Average amounts of tensile and compressive reinforcements are:

$$\rho_m = 0.20 \cdot 0.008 + 0.60 \cdot 0.004 + 0.20 \cdot 0.008 = 0.0056$$

$$\rho'_m = 0.20 \cdot 0.002 + 0.60 \cdot 0.000 + 0.20 \cdot 0.002 = 0.0008.$$

Instantaneous neutral axis depth:

$$\frac{x_0}{d} = \frac{0.18 + 1.8 \cdot 6.67 \cdot 0.0056}{1 + \frac{0.0008 \cdot 50}{0.0056 \cdot 350}} = 0.242.$$

The creep deflection will be:

$$\begin{aligned} \Delta y_c &= y_g \frac{x_0}{d} \frac{0.84 \cdot \varphi - 0.20}{1 + 12\alpha\rho'} \\ &= 3.49 \cdot 0.242 \cdot \frac{0.84 \cdot 2.5 - 0.20}{1 + 12 \cdot 6.67 \cdot 0.0008} = 1.50 \text{ mm.} \end{aligned}$$

The shrinkage deflection is:

$$\begin{aligned} \Delta y_s &= \frac{\varepsilon_{sh}}{d} \frac{1}{1 + 12\alpha\rho'} \cdot k_s \frac{l^2}{8} \\ &= \frac{0.00035}{0.35} \cdot \frac{1000}{1 + 12 \cdot 6.67 \cdot 0.0008} \cdot 0.5 \frac{36}{8} = 2.1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

And the total deflection will be $y_{tot} = 3.4 + 1.5 + 2.1 = 7.00$ mm which represents 1.02 times de deflection obtained by the general method (6.83 mm).

Let us consider now the same beam, subjected to a point load of 50 kN at the centre of the span, producing an elastic bending moment of 37.5 kN m at supports and at midspan. The instantaneous and the total deflections calculated by the General Method are 1.92 mm and 5.06 mm, respectively.

According to the proposed method, the following values are obtained.

Creep deflection:

$$\begin{aligned} \Delta y_c &= y_g \frac{x_0}{d} \frac{0.84 \cdot \varphi - 0.20}{1 + 12\alpha\rho'} \\ &= 1.92 \cdot 0.242 \cdot \frac{0.84 \cdot 2.5 - 0.20}{1 + 12 \cdot 6.67 \cdot 0.0008} = 0.83 \text{ mm.} \end{aligned}$$

The shrinkage deflection will be the same than for distributed load, $\Delta y_s = 2.1$ mm.

Total deflection = 1.92 + 0.83 + 2.10 = 4.85 mm, which is 96% of that obtained by the general method.

6. Comparison with theoretical results obtained by the numerical non-linear model

6.1. Normal strength beams (C30/37)

A total of 40 beams, with different boundary conditions (see Table 1), have been studied, taking into account several combinations of the age of concrete at loading (7 and 28 days) and relative humidity (HR50%, HR60% and HR80%), as shown in Table 2.

Table 2 shows the values of the creep coefficient and the long-term shrinkage strain corresponding to the cases studied.

All the beams have been analyzed by means of the non-linear and time-dependent model described in Section 2, including

1 tension stiffening, and their results compared with those obtained
2 by the proposed simplified method (Table 3).

3 In order to account for the cracking produced by the maximum
4 service load level (permanent load + live load) a **preloading**
5 has been simulated, assuming a load level producing a bending
6 moment at the critical section of about 2.5 times the cracking
7 moment. Subsequently, the live load is removed and the beam is
8 subjected to the permanent loads which are sustained for 10 000
9 days.

10 The results have been also compared with those obtained
11 by means of the simplified formulations proposed in the MC-
12 90 and the ACI code. Table 4 shows the mean value and the
13 standard deviation of the ratio between the deflections obtained
14 by the proposed method and by the general method for all cases,
15 considering the age of loading and the relative humidity.

16 It can be observed that, in general, excellent agreement is
17 obtained in all cases with the simplified method proposed.
18 For normal strength concrete, ACI proposal also provides good
19 accuracy, but with a higher scatter of the results. In addition,
20 ACI provides better results for dry environments (50%), but
21 overestimates the deflections in wet conditions.

22 6.2. High strength concrete beams (C75/90)

23 Two different ages of loading (7 and 28 days) and relative
24 humidity (80% and 50%) situations have been studied for the
25 high strength beams. The geometric and loading conditions of the
26 beams studied are shown in Table 5, where load 1 refers to the
27 preloading and load 2 refers to the sustained load, while Table 6
28 shows the creep coefficient and shrinkage strain.

29 Following the same procedure than in the normal strength
30 beams, the results obtained by the proposed simplified method
31 and by the simplified CEB and ACI methods are compared with
32 those obtained by the general method, as shown in Table 6.
33 The same conclusions than for normal strength concrete can be
34 drawn, but in this case the scatter of the results obtained by the
35 proposed method is much lower than the rest, indicating that the
36 formulation includes the most important parameters governing
37 the long-term deflections.

38 7. Comparison with experimental results of simply supported 39 beams

40 7.1. Data base

41 In Ref. [8], Espion [9] provides detailed information on 217
42 test corresponding to 29 different research programs performed
43 around the world. These tests reported long-term deflections of
44 reinforced concrete simply supported beams and slabs, although
45 in all cases the instantaneous deflections were also recorded.
46 The information provided is sufficient for computations, so that
47 the deflections obtained by the simplified method proposed
48 can be compared to those measured experimentally. The 217
49 results cover a wide range of geometrical dimensions, loading
50 levels and distributions, concrete strengths, reinforcement ratios,
51 environmental conditions, ages at loading and durations of
52 sustained loading. The data base includes 117 rectangular beams,
53 64 rectangular slabs, and 36 beams with T, I or box sections.
54 34.5% of the tests were performed in rather “dry” environmental
55 conditions, while 66.5% of them were conducted in “humid”
56 conditions.

57 7.2. Presentation of results

58 The delayed deflections have been calculated for the 217
available experiments. The CEB-FIP Model Code 1990 has been

07

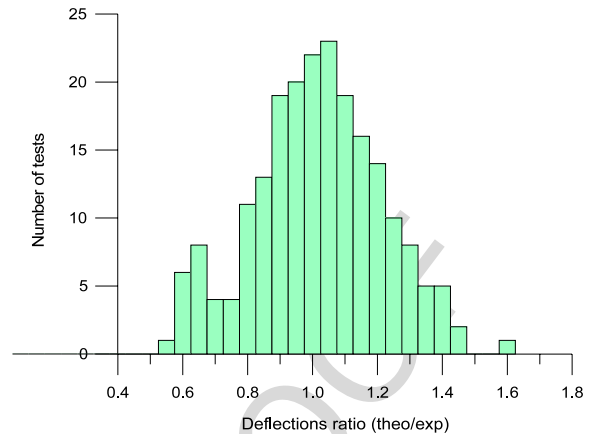


Fig. 17. Histogram of the ratio between the theoretical and the experimental deflections obtained with the proposed formulation.

used to predict the tensile strength, the modulus of elasticity and
the development of the compressive strength of the concrete with
time, as well as the creep coefficient and the shrinkage strain.
For each experiment the ratio between the computed and the
measured value was obtained. Then, the mean value and the
standard deviation of the distribution were computed for each
method. The results from the CEB bilinear method using the CEB-
FIP Model Code 1978 to predict the materials properties and from
the ACI method were provided by Espion [9].

59 7.3. Discussion of the results

60 A comparison between the mean value and the standard
61 deviation of the ratio between the experimentally measured total
62 deflections and those predicted by the proposed method, by the
63 simplified method of the Model Code 1990, by the bilinear method
64 of the CEB and by the ACI method, are presented in Table 7.
65 Fig. 17 shows the histogram of the results obtained with the
66 proposed method. It can be observed that the proposed method
67 provides the best predictions with less scatter. The mean value is
0.950, and the standard deviation is 0.192. The scatter obtained
shows that the 90% confidence interval limits are ± 0.35 about
the mean. Such results are more than acceptable for a simplified
method, given the uncertainties of the phenomena involved in
the deflection problem. Namely, longitudinal modulus of concrete
and tensile strength which are relevant in the cracked behavior
of concrete were estimated from analytical formulae. Moreover,
some tests (about 30%) were not performed under controlled
humidity conditions. Therefore, the actual value of the creep
coefficient and the shrinkage strain may have varied from the
theoretical ones. In fact, new calculations have been made with
the proposed method, increasing the shrinkage strain and the creep
coefficient in a 10% of that obtained from MC1990, provide a mean
ratio to the experimental ones of 0.996, with very similar standard
deviation (0.206).

68 Table 4 also shows that the results of the simplified method
69 of the Model Code 1990 provides very low values of deflections
70 (mean ratio = 0.703) and large scatter, probably due to the fact
71 that this method does not include deflections due to shrinkage. The
72 CEB Bilinear method provide similar results but less accurate than
73 the proposed method. Finally the ACI method is conservative and
74 shows the maximum scatter of all.

75 In 30 of the 36 experiments documented in the data base related
76 to beams with sections other than rectangular, the neutral axis
77 depth was found to lay in the flange. In such cases expression
78 (20) valid for rectangular sections with a width equal to the
79 flange width was applied, obtaining good agreement with the
80 experimental results, and the rest were eliminated.

Table 4
Geometrical definition and steel reinforcements ratios of the C75/90 beams analyzed.

Beam	Boundary conditions	h	b	l/h	l	d	d'	r -span	r'/r	r -sup	r'/r	Load1	Load2	M_u/M_{cr}
1	Hinged + hinged	600	300	10	6000	540	60	0.008	0.25	0	0	45	25	2.24
2	Hinged + hinged	600	300	10	6000	540	60	0.01	0.5	0	0	45	25	2.24
3	Hinged + hinged	600	300	10	6000	540	60	0.012	0.25	0	0	50	25	2.24
4	Fixed + hinged	500	300	12	6000	450	50	0.006	0	0.009	1	35	20	2.51
5	Fixed + hinged	500	300	12	6000	450	50	0.007	0	0.007	1	35	20	2.51
6	Fixed + hinged	500	300	12	6000	450	50	0.01	0	0.01	0.5	35	20	2.51
7	Fixed + fixed	400	300	15	6000	360	40	0.008	0	0.01	0.5	40	20	2.99
8	Fixed + fixed	400	300	15	6000	360	40	0.01	0	0.015	0.5	40	20	2.99

Table 5
Creep and shrinkage values for the different combinations studied (C75/90).

Beam	$t_0 = 28$ HR80%		$t_0 = 28$ HR50%		$t_0 = 7$ HR80%		$t_0 = 7$ HR50%	
	Creep	Shrinkage	Creep	Shrinkage	Creep	Shrinkage	Creep	Shrinkage
1	1.19	1.20E-04	1.66	2.03E-04	1.4	1.23E-04	1.94	2.21E-04
2	1.19	1.20E-04	1.66	2.03E-04	1.4	1.23E-04	1.94	2.21E-04
3	1.19	1.20E-04	1.66	2.03E-04	1.4	1.23E-04	1.94	2.21E-04
4	1.2	1.20E-04	1.67	2.02E-04	1.41	1.23E-04	1.92	2.21E-04
5	1.2	1.20E-04	1.67	2.02E-04	1.41	1.23E-04	1.92	2.21E-04
6	1.2	1.20E-04	1.67	2.02E-04	1.41	1.23E-04	1.92	2.21E-04
7	1.21	1.20E-04	1.7	2.01E-04	1.43	1.30E-04	1.99	2.21E-04
8	1.21	1.20E-04	1.7	2.01E-04	1.43	1.30E-04	1.99	2.21E-04

Table 6
Comparison of the results obtained by different simplified formulations with the numerical non-linear model for high strength concrete (C75/90).

t_0	HR	Simplified method		MC-90		ACI	
		Mean	Dev	Mean	Dev	Mean	Dev
28	80	0.943	0.029	1.398	0.419	1.184	0.140
28	50	0.971	0.034	1.175	0.311	0.978	0.155
7	80	0.971	0.028	1.249	0.345	1.205	0.135
7	50	1.002	0.031	1.057	0.246	1.000	0.148

Table 7
Mean and standard deviation values for distribution of ratios between the theoretical and the predicted total deflections.

Method	Proposed	CEB bilinear	MC90-Simp	ACI
Mean	0.951	0.905	0.703	1.114
Standard deviation	0.195	0.215	0.312	0.375

8. Conclusions

A simplified method for the prediction of long-term deflections in reinforced concrete beams and one way slabs has been presented. The proposed method is based on the mechanics of concrete structures and explicitly incorporates the amounts of tensile and compressive reinforcements, the creep coefficient and the shrinkage strain of concrete. Thus, the most important parameters influencing the long-term deflections of reinforced concrete beams, such as the concrete strength, the environmental conditions, the age of concrete at loading, the duration of loading and the constraining effects of the compressive reinforcement are taken into account.

A simplified expression for the delayed curvature of cracked reinforced concrete sections has been developed, assuming that the strain of the tensile reinforcement remains constant with time, as observed experimentally. Such assumption, which can be applied to sections with arbitrary shape, greatly simplifies the problem, and has been shown to be suitably accurate. Excellent agreement has been obtained when comparing the proposed delayed curvature with that obtained by a non-linear and time-dependent sectional analysis, applied to a large number of cases, representative of most common situations.

The expressions of the delayed curvature have been used to derive a formula for the long-term deflections in beams and one

way slabs, taking into account the variations of reinforcement along the element and the boundary conditions. First, the method has been checked against the results of non-linear analyses of beams with different boundary conditions, age at loading, relative humidity, cross section, amount of reinforcement and concrete strength (normal and high strength), and those obtained by the CEB basic model and the ACI method. The proposed method provides results with better accuracy and less scatter than the simplified CEB methods. The ACI provides similar results in terms of mean value but much higher scatter.

Additionally, the method has been validated using a set of 217 experimental results including different cross section shapes, slenderness ratios, reinforcement amounts, material properties, load levels, ages at loading, duration of load and environmental conditions. The ratio between the predicted and the actual measured deflections was 0.95 with a standard deviation of 0.195. Again better agreement and less scatter has been obtained with the proposed method than with the Basic Model Code, the CEB Bilinear and the ACI methods.

The method has been shown to be applicable to beams with cross section other than rectangular, such as T or box, if the neutral axis lies on the flange, to beams made of normal and high strength concrete and loaded under different types of loading. An equation relating the design parameters (geometry, reinforcement, loads and material properties), which allows identifying whether the restriction created by the reinforcement results in cracks crossing the whole section has been also provided, as well as the value of the delayed curvature for such cases. These facts and the simplicity and accuracy of the method, makes it suitable for design purposes in a large variety of beams and slabs designed in engineering practice.

References

- [1] ACI Committee 435. Deflections of reinforced concrete flexural members (ACI 453.2R-66). ACI J Proc 1968;65(6):433–44. [Re-approved 1984].
- [2] Bakoss SL, Gilbert RI, Faulkens KA, Pulmano VA. Long term deflections of reinforced concrete beams. Mag Conc Res 1982;121(34):203–12.
- [3] Bazant ZP. Predictions of concrete effects using age adjusted effective modulus method. ACI J 1972;69:212–7.
- [4] Branson DE. Deformations of concrete structures. New York: McGraw-Hill; 1977.
- [5] CEB-FIP. CEB-FIP model code 1990. Bull. d'Inf. N°213/214. Thomas Telford; 1993.
- [6] CEN. Eurocode 2. Design of Concrete Structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings. En1992-1-1, Euro. Comm. Stand., Brussels. 2004.
- [7] ACI 318-08. Building code requirements for structural concrete and commentary. American Concrete Institute; 2008.

- [8] Espion B, Halleux P. Long term deflections of reinforced concrete beams: Reconsideration of their variability. *ACI Struct J* 1990;2(87):232–6.
- [9] Espion B. Long term sustained loading tests on reinforced concrete beams: A selected data base. *Bull. Serv. G. Civil, Univ. L. de Bruxelles*; 1988, p. 88–1.
- [10] Favre R, Charif H. Basic model and simplified calculations of deformations according to the CEB-FIP model code 1990. *ACI Struct J* 1994;2(91):169–77.
- [11] Clarke G, Scholz H, Alexander M. New method to predict the creep deflections of cracked reinforced concrete flexural members. *ACI Mat J* 1988;2(85): 95–102.
- [12] Gilbert RI. *Time effects in concrete structures*. Netherlands: Elsevier; 1988.
- [13] Ghali A, Favre R. *Concrete structures: Stresses and deformations*. 2nd ed. Chapman and Hall; 1994.
- [14] Murcia J. Approximate time dependent analysis of reinforced concrete sections. Proposal of a new factor for the calculation of long term deflections. *Hormigón y Acero*, vol. 181. 1991. p. 9–17 [in Spanish].
- [15] Jianguo N, Chun SC. Deflection of cracked RC beams under sustained loads. *ASCE J Struct Eng* 2000;6(126):708–16.
- [16] Chiorino MA. A rational approach to the analysis of structural effects to creep. In: Gardner, Weiss, editors. *ACI SP-227 shrinkage and creep of concrete*. 2005. p. 107–37.
- [17] Kang YJ, Scordelis AC. Nonlinear analysis of prestressed concrete frames. *ASCE J Struct Div* 1980;ST2(106):445–62.
- [18] Ghali A, Elbadry MM. *User's manual and computer program CPF: Cracked plane frames in prestressed concrete*. Res. report CE85-2. Alberta, Canada: Dept. of Civil Eng., Univ. of Calgary; 1985.
- [19] Marí AR. *Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames*. Report UCB-SESM-84/12. Berkeley, USA: Univ. of California; 1984.
- [20] Marí AR. Numerical simulation of the segmental construction of three dimensional concrete frames. *Eng Struct* 2000;(22):585–96.
- [21] Cruz PJS, Marí AR, Roca P. Nonlinear time-dependent analysis of segmentally constructed structures. *ASCE J Struct Eng* 1998;3(124):278–87.
- [22] Ulm FJ, Clement JL, Guggenberger J. Recent advances in 3-D nonlinear FE-analysis of R/C and P/C beam structures. In: *Proc. ASCE Struc. Cong. XII*. 1994. p. 427–1433.
- [23] Marí AR, Valdés M. Long-term behaviour of continuous precast concrete girder bridge model. *ASCE J Bridge Eng* 2000;5(1):22–30.
- [24] Marí AR, Montaner J. Continuous precast concrete girder and slab bridge decks. *Proc ICE-Struct Build* 2000;(140):195–207.
- [25] Marí AR, Mirambell E, Estrada I. Effects of construction process and slab prestressing on the serviceability behaviour of composite bridges. *J Construct Steel Res* 2003;59:135–63.
- [26] Chacón R, Mirambell E, Marí AR. Long-term response of concrete-encased composite columns. *Proc ICE-Struct Build* 2007;(160):273–85.
- [27] Stevens RF. Deflections of reinforced concrete beams. *Proc ICE Part 2, Research & Theory* 1972;207–24.
- [28] Neville AM, Dilger WH, Brooks JJ. *Creep of plain and structural concrete*. Construction Press; 1983.
- [29] Favre R, Beeby AW, Falkner H, Koprna M, Shiessl P. *CEB manual on cracking and deformations*, CEB, Fed. Inst. Tech., Lausanne, Switzerland, 1985.