



Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i
Aeroespacial de Castelldefels

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

TREBALL DE FI DE CARRERA

TÍTOL DEL TFC: Diàmetre unilateral en digrafs de doble pas

TITULACIÓ: Enginyeria Tècnica Aeronàutica, especialitat Aeronavegació

AUTOR: Mireia Gomis Garcia

DIRECTOR: Cristina Dalfó Simó

DATA: 29 de juny de 2012

Títol: Diàmetre unilateral en digrafs de doble pas

Autor: Mireia Gomis Garcia

Director: Cristina Dalfó Simó

Data: 29 de juny de 2012

Resum

En termes generals, l'objectiu d'aquest treball és estudiar el diàmetre unilateral en els problemes (Δ, D) i (Δ, N) per al cas de digrafs de doble pas. Un digraf és una xarxa constituïda per vèrtexs i per arestes amb direcció (anomenades arcs). En el cas de grafs les arestes no tenen direcció. Un digraf de doble pas consta de N vèrtexs i un conjunt d'arcs de la forma $(i, i + a)$ i $(i, i + b)$, amb a i b enters positius anomenats "passos", és a dir, que el vèrtex i és adjacent cap als vèrtexs $i + a$ i $i + b$ (les operacions s'han d'entendre sempre mòdul N). Aquest digraf es denota $G(N; a, b)$. El diàmetre d'un graf és la mínima distància possible que hi ha entre dos dels vèrtexs més allunyats entre si. En el diàmetre d'un digraf hem de tenir en compte que els arcs tenen direcció. El diàmetre unilateral d'un digraf és el mínim entre el diàmetre (amb direccions) del digraf i el diàmetre (amb direccions) del seu digraf convers (obtingut canviant totes les direccions dels arcs).

El problemes (Δ, D) i (Δ, N) han estat molt estudiats en grafs i en digrafs, però no en el cas dels digrafs de doble pas considerant el diàmetre unilateral. En el nostre context, el primer problema consisteix a trobar el màxim nombre de vèrtexs N per a un diàmetre unilateral D^* i el grau $\Delta = 2$ donats, és a dir, trobar quins són els dos passos d'un digraf de doble pas que fan que el nombre de vèrtexs N sigui màxim per a aquests diàmetre unilateral i grau. El segon problema consisteix a trobar el mínim diàmetre unilateral D^* en digrafs de doble pas per a un nombre de vèrtexs N i el grau $\Delta = 2$ donats, és a dir, trobar quins són els dos passos d'un digraf de doble pas que fan que el diàmetre unilateral D^* sigui mínim per a aquests nombre de vèrtexs i grau.

Title: Unilateral Diameter in Double-step Digraphs

Author: Mireia Gomis Garcia

Director: Cristina Dalfó Simó

Date: June, 29th 2012

Overview

The main objective of this research work is to study the unilateral diameter in the (Δ, D) and (Δ, N) problems for double-step digraphs. A digraph is a network consisting of vertices and directed edges (called arcs). In the case of a graph, edges have no direction. A double-step digraph consists in a set of N vertices and arcs of the forms $i + a$ and $i + b$, with a and b positive integers called "steps", that is, there exist arcs from the vertex i to the vertices $i + a$ and $i + b$ (all the operations are modulo N). This digraph is denoted by $G(N; a, b)$. The diameter of a graph is the shortest path between two of the farthest vertices. In the diameter of a digraph, we must consider that the edges have directions. The unilateral diameter of a digraph is the minimum between the diameter (with directions) of the digraph and the diameter (with directions) of its converse digraph (obtained by changing the directions of all arcs) .

The (Δ, D) and (Δ, N) problems have been extensively studied for graphs and digraphs, but not in the case of double-step digraphs considering the unilateral diameter. In our context, the first problem is to find the maximum number of vertices given an unilateral diameter D^* and a degree $\Delta = 2$, that is, to find out the two steps of a double-step digraph that maximize the number of vertices N for these unilateral diameter and degree. The second problem is to find the minimum unilateral diameter D^* for a double-step digraph given a number of vertices N and a degree $\Delta = 2$, namely, to find out the two steps of a double-step digraph that minimize the unilateral diameter D^* for these number of vertices and degree.

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ	1
1. CAPÍTOL 1. TEORIA DE GRAFS	2
1.1. Introducció a la teoria de grafs	2
1.1.1. El problema dels ponts de Königsberg	2
1.2. Grafs	4
1.3. Grafs de doble pas	5
1.4. Digrafs	5
1.3.1 Distància unilateral	6
2. CAPÍTOL 2. DIGRAFS DE DOBLE PAS	9
2.1 Des d'un digraf a una <i>L</i> -forma	9
2.2 Des d'una <i>L</i> -forma a un digraf	11
3. CAPÍTOL 3. ELS PROBLEMES (Δ, D^*) I $(\Delta, N)^*$	13
3.1 Exemple del càlcul de D^* per a $N = 6$	15
3.2 Esquema del programa per calcular el diàmetre unilateral D^*	17
3.3 Programa realitzat amb el compilador lliure Free Basic	18
3.3.1 Dades obtingudes amb el programa	21
4. CAPÍTOL 4. EL DIÀMETRE UNILATERAL EN FUNCÍO DE LES DIMENSIONS DE LES <i>X</i>-FORMES	23
5. CAPÍTOL 5. CONCLUSIONS	29
BIBLIOGRAFIA	33

ÍNDIX DE FIGURES

Fig. 1.1 Representació de Königsberg i els set ponts [5]	2
Fig. 1.2 Croquis del riu Pregel de Königsberg [5]	3
Fig. 1.3 Simplificació del problema de Königsberg mitjançant un graf [17]	3
Fig. 1.4 Aresta e i vèrtexs u i v	4
Fig. 1.5 Graf de Petersen	4
Fig. 1.6 Els passos d'un graf de doble pas $G(N; \pm a, \pm b)$ i l'exemple $G(9; \pm 2, \pm 3)$	5
Fig. 1.7 Arc a i vèrtexs u i v	6
Fig. 1.8 El cicle dirigit C_5	6
Fig. 1.9 El cicle dirigit C_{2n} i el seu convers	7
Fig. 1.10 El cicle dirigit C_{2n+1} i el seu convers	7
Fig. 2.1 Els passos d'un digraf de doble pas $G(N; a, b)$ i l'exemple $G(8; 1, 3)$	9
Fig. 2.2 Una L -forma genèrica i la tessellació del digraf de doble pas $G(8; 1, 3)$	10
Fig. 2.3 Distàncies entre els 0 de diferents L -formes	11
Fig. 3.1 El digraf $G(11; 1, 4)$ i la seva X -forma	14
Fig. 4.1 El nombre triangular $T_5 = 15$	23
Fig. 4.2 El cas $l + h$ senar	24
Fig. 4.3 Exemple del cas $l + h$ senar per al digraf $G(43; 1, 4)$	24
Fig. 4.4 El cas $l + h$ parell	25
Fig. 4.5 Exemple del cas $l + h$ parell per al digraf $G(44; 1, 5)$	26
Fig. 5.1 Els digrafs de doble pas New Amsterdam (esquerra) i Manhattan (dreta)	31

ÍNDIX DE TAULES

Taula 3.1 Relació entre el diàmetre unilateral i el nombre de vèrtexs	13
Taula 3.2 Càlcul del diàmetre unilateral d'un digraf de doble pas amb 6 vèrtexs	16
Taula 3.3 Valors obtinguts amb el programa realitzat (en negreta els valors corresponents al problema (Δ, D^*))	21
Taula 5.1 Alguns resultats dels problemes (Δ, D^*) i $(\Delta, N)^*$	29
Taula 5.2 Resum de resultats dels problemes (Δ, D) , (Δ, N) , (Δ, D^*) i $(\Delta, N)^*$..	31

ÍNDIX DE GRÀFIQUES

Gràfica 5.1 Diàmetre unilateral en funció del nombre de vèrtexs	30
--	----

INTRODUCCIÓ

L'objectiu d'aquest treball és estudiar el diàmetre unilateral D^* en els problemes (Δ, D) i (Δ, N) per al cas de digrafs de doble pas. Per dur a terme aquesta tasca, en el primer capítol es fa una introducció a la teoria de grafs, on s'expliquen tant els seus orígens com els conceptes de grafs, grafs de doble pas i digrafs. En el segon capítol s'introdueixen els digrafs en els quals s'han resolt els problemes (Δ, D^*) i $(\Delta, N)^*$, els digrafs de doble pas, així com també les seves L -formes associades. En el tercer capítol s'analitzen i es resolen els problemes (Δ, D^*) i $(\Delta, N)^*$ gràcies a la realització d'un programa amb el compilador lliure Free Basic. En el quart capítol es tracten les X -formes dels digrafs de doble pas que hem utilitzat per resoldre els problemes (Δ, D^*) i $(\Delta, N)^*$ de forma generalitzada. Finalment, en el cinquè i últim capítol presentem les conclusions i els resultats obtinguts dels dos problemes estudiats.

La resolució d'aquests problemes resulta molt interessant degut al gran nombre d'aplicacions que tenen els grafs i els digrafs en moltes àrees diferents, com ara: la química (l'estudi de les molècules, la construcció dels enllaços en química, l'estudi dels àtoms...), la biologia, l'enginyeria elèctrica i civil, les xarxes de comunicacions, la computació, l'economia, la sociologia (per exemple, per mesurar el prestigi dels actors o per explorar els mecanismes de difusió), la investigació operativa, etc. Els grafs i els digrafs també s'utilitzen en el modelatge de les xarxes de transport (com ara les dels trens, les xarxes aeroportuàries o d'altres), les xarxes d'activitat i la teoria de jocs. Per a més informació i detall sobre les aplicacions de la teoria de grafs, vegeu Shrinivas, Vetrivel i Elango [15].

CAPÍTOL 1. TEORIA DE GRAFS

1.1. Introducció a la teoria de grafs

Com expliquen Biggs, Lloyd i Wilson [5] en el seu llibre de teoria de grafs, mentre que la creació de moltes de les branques de les matemàtiques va estar motivada per problemes fonamentals de càlcul, moviment i mesura, els orígens de la teoria de grafs van ser més modestos. Els problemes que van conduir al desenvolupament de la teoria de grafs van ser sovint poc més que puzles, dissenyats per posar a prova l'enginy més que no pas per estimular la imaginació. Tot i l'aparent trivialitat dels puzles, van captar l'interès dels matemàtics, amb el resultat que la teoria de grafs ha esdevingut un tema en el qual s'ha obtingut resultats teòrics d'una sorprenent varietat i profunditat.

1.1.1. El problema dels ponts de Königsberg

Königsberg és el nom que rebia l'actual ciutat russa de Kaliningrad, que durant el segle XVIII formava part de Prússia Oriental. Aquesta ciutat està travessada pel riu Pregel que l'illa Kneiphof divideix en dues branques. Al segle XVIII, per tal de permetre als ciutadans de Königsberg desplaçar-se fàcilment des d'una part de la ciutat fins a una altra, el riu va ser travessat per set ponts connectant les dues ribes amb l'illa enmig del riu.



Fig. 1.1 Representació de Königsberg i els set ponts [5]

Els habitants de la ciutat de Königsberg solien entretenir-se intentant, sense gaire èxit, trobar un itinerari al voltant de la ciutat que passés una sola vegada per cada pont. Com que tots els seus intents van fracassar molts d'ells van arribar a creure que era una tasca impossible, i no va ser fins la dècada del 1730 que el problema es va tractar des d'un punt de vista matemàtic. Finalment, l'any 1736, un dels matemàtics més brillants de la història, Leonhard Euler, es va interessar pel problema dels ponts, va iniciar una investigació i posteriorment en va publicar la seva solució en *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Euler va ser capaç de demostrar que era impossible trobar un camí que travessés cada un dels set ponts un sol cop.

Primer, Euler va fer un croquis del problema, etiquetant els quatre terrenys al voltant del riu Pregel com A, B, C i D i els set ponts com a, b, c, d, e, f i g, com es mostra a la **Fig. 1.2**.

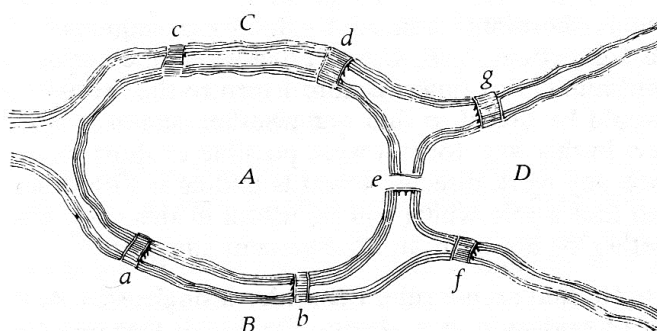


Fig. 1.2 Croquis del riu Pregel de Königsberg [5]

Per aconseguir resoldre el problema, Euler va simplificar aquesta imatge transformant-la en un graf. Va canviar els quatre terrenys al voltant del riu (A, B, C i D) per quatre punts i els set ponts (a, b, c, d, e, f, i g) per línies connectant els punts anteriors, tal i com s'observa a la **Fig. 1.3**. Per conèixer més detalls sobre aquest problema i altres de la teoria de grafs, consulteu Biggs, Lloyd i Wilson [5].

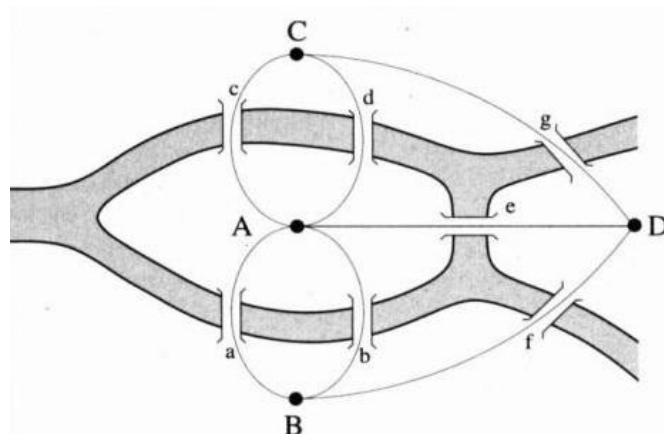


Fig. 1.3 Simplificació del problema de Königsberg mitjançant un graf [17]

1.2. Grafs

Un graf $G = (E, V)$ és una estructura combinatòria constituïda per un conjunt $V = V(G)$ d'elements anomenats vèrtexs i un conjunt $E = E(G)$ d'arestes, les quals estan formades per parells no ordenats de vèrtexs diferents.

Si existeix una arista $e = \{u, v\} = uv$ que relaciona els vèrtexs u i v aleshores es diu que els vèrtexs u i v són adjacents. Si no hi ha cap arista entre els vèrtexs u i v , aleshores diem que u i v són vèrtexs independents. Dues arestes són independents si no tenen cap vèrtex en comú. Els vèrtexs es representen per punts i les arestes per línies que uneixen parelles de vèrtexs, com es mostra a la **Fig. 1.4**.

L'ordre del graf G és el nombre de vèrtexs de G i la mida de G és el nombre de les seves arestes. El grau d'un vèrtex és el nombre de vèrtexs adjacents que té. Si tots els vèrtexs d'un graf tenen el mateix grau, el graf es diu regular. Un graf és connex si i només si existeix un camí entre qualsevol parell de vèrtexs. Si un graf és connex, el seu diàmetre és la mínima distància entre dos dels vèrtexs més allunyats entre si. Per a més detalls sobre grafs, vegeu Comellas, Fàbrega, Sánchez i Serra [9].

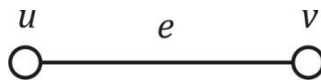


Fig. 1.4 Arista e i vèrtexs u i v

Com a exemple de graf, representem el graf de Petersen a la **Fig. 1.5**, el qual té ordre 10, mida 15, diàmetre 2 i és regular de grau 3.

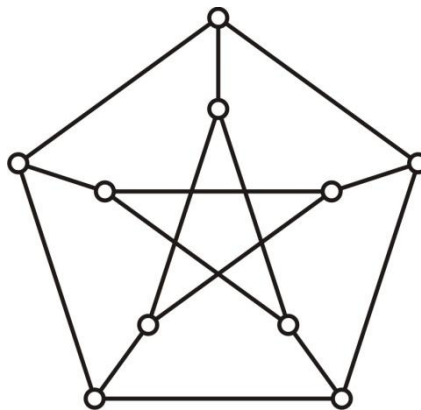


Fig. 1.5 Graf de Petersen

1.3. Grafs de doble pas

Un graf de doble pas $G(N; \pm a, \pm b)$ consta de N vèrtexs, que denotem $0, 1, \dots, N-1$, i un conjunt d'arestes de la forma $(i, i \pm a)$ i $(i, i \pm b)$, amb a i b enters positius anomenats "passos", tals que $1 \leq a, b \leq \lfloor N/2 \rfloor$, és a dir, que el vèrtex i és adjacent als vèrtexs $i \pm a$ i $i \pm b$ (les operacions s'han d'entendre sempre mòdul N). Que dos nombres x i y siguin congruents mòdul z , vol dir que $\frac{x-y}{z}$ és un enter i s'escriu $x \equiv y \pmod{z}$.

Una condició necessària i suficient perquè un graf de doble pas sigui connex és la següent: $G(N; \pm a, \pm b)$ és connex si i només si $\text{mcd}(N, a, b) = 1$, és a dir, si N, a, b són nombres primers entre ells (Fiol, Yebra, Alegre i Valero [11]).

Representem els passos d'un graf de doble pas i, com a exemple, el graf de doble pas $G(9; \pm 2, \pm 3)$ a la **Fig. 1.6**. Per a més informació sobre els grafs de doble pas, vegeu Yebra, Fiol, Morillo i Alegre [16].

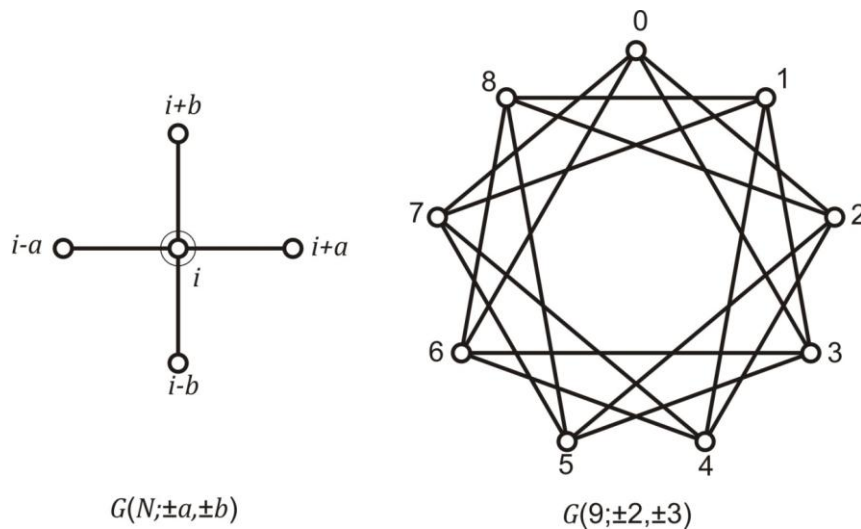


Fig. 1.6 Els passos d'un graf de doble pas $G(N; \pm a, \pm b)$ i l'exemple $G(9; \pm 2, \pm 3)$

1.4. Digrafs

Un digraf $G = (A, V)$ és una estructura combinatòria constituïda per un conjunt de vèrtexs $V = V(G)$ i un conjunt d'arcs $A = A(G)$, els quals estan formats per parells ordenats de vèrtexs diferents. Si existeix un arc $a = (u, v)$, aleshores es diu que el vèrtex u és adjacent cap al vèrtex v o que v és adjacent des de u . Com en el cas de grafs, l'ordre del digraf G és el nombre dels seus vèrtexs i la mida de G és el nombre dels seus arcs. Els vèrtexs es representen per punts i

els arcs per línies amb direcció que uneixen parelles de vèrtexs, tal i com es mostra a la **Fig. 1.7**.

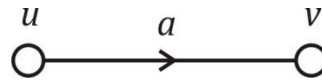


Fig. 1.7 Arc a i vèrtexs u i v

El diàmetre d'un digraf és la mínima distància entre dos dels vèrtexs més allunyats entre si seguint les direccions dels arcs. En un digraf, hem de distingir entre el grau de sortida d'un vèrtex u (nombre d'adjacències des de u) i el grau d'entrada (nombre d'adjacències cap a u). Si tots els vèrtexs tenen el mateix grau de sortida i el mateix grau d'entrada el digraf és regular.

Com a exemple de digraf, vegeu el cicle dirigit C_5 a la **Fig. 1.8**, el qual té ordre 5, mida 5, diàmetre 4 i és regular amb grau de sortida i d'entrada 1. Per a més detalls sobre digrafs vegeu Comellas, Fàbrega, Sànchez i Serra [9].

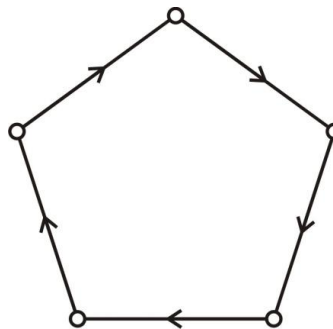


Fig. 1.8 El cicle dirigit C_5

1.3.1 Distància unilateral

Donat un digraf $G = (A, V)$, la distància unilateral entre dos vèrtexs $u, v \in V$ es defineix com

$$\text{dist}_G^*(u, v) = \min\{\text{dist}_G(u, v), \text{dist}_G(v, u)\} = \min\{\text{dist}_G(u, v), \text{dist}_{\bar{G}}(u, v)\}, \quad (1.2)$$

on dist_G és la distància estàndard (direccional) en el digraf G i $\text{dist}_{\bar{G}}$ és la distància en el digraf convers \bar{G} , és a dir, del digraf en el qual canviem la direcció de tots els arcs. A partir d'aquest concepte, podem definir ara l'excentricitat unilateral ecc^* d'un vèrtex u , el radi unilateral r^* de G i el diàmetre unilateral D^* de G de la forma següent:

$$\text{ecc}^*(u) = \max_{v \in V} \{\text{dist}_G^*(u, v)\}, \quad (1.3)$$

$$r^* = \min_{u \in V} \{\text{ecc}^*(u)\}, \quad (1.4)$$

$$D^* = \max_{u \in V} \{ecc^*(u)\}. \quad (1.5)$$

Observem que, òbviament, aquests paràmetres estan fitats inferiorment pel paràmetre corresponent del graf subjacent al digraf (que s'obté a partir de G canviant els arcs per arestes sense direcció). Algunes construccions de digrafs amb un gran nombre de vèrtexs, donats el grau màxim i el diàmetre unilateral (és a dir, el problema (Δ, D^*) per a digrafs en general) van ser proposades per Gómez, Canale i Muñoz [12,13].

Com a exemple, si tenim $G = C_N$, el cicle dirigit (camí tancat) de N vèrtexs, aleshores $D^*(C_N) = \lfloor N/2 \rfloor$.

En efecte, considerem els casos N parell i N senar:

a) Cicle dirigit amb $N = 2n$ (parell) i el seu convers

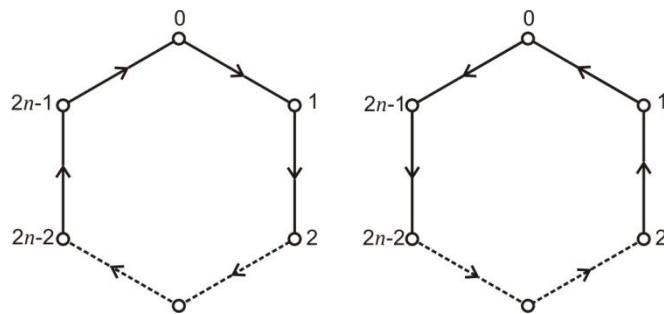


Fig. 1.9 El cicle dirigit C_{2n} i el seu convers

Per determinar el valor del diàmetre unilateral D^* del cicle dirigit C_{2n} , calculem la distància des del vèrtex 0 al vèrtex més allunyat alhora en G i en \bar{G} . Aquesta distància és n , per tant, $D^* = n = \frac{N}{2} = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$.

b) Cicle dirigit amb $N = 2n + 1$ (senar) i el seu convers

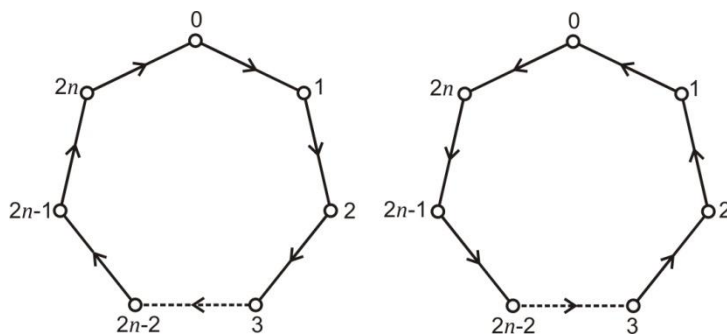


Fig. 1.10 El cicle dirigit C_{2n+1} i el seu convers

Per determinar el valor del diàmetre unilateral D^* del cicle dirigit C_{2n+1} , calculem la distància des del vèrtex 0 al vèrtex més allunyat alhora en G i en \bar{G} , i tenim $D^* = \left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$.

CAPÍTOL 2. DIGRAFS DE DOBLE PAS

Un digraf de doble pas consta de N vèrtexs, que denotem $0, 1, \dots, N-1$ i un conjunt d'enllaços unidireccionals o arcs de la forma $(i, i+a)$ i $(i, i+b)$, amb a i b enters positius anomenats "passos", és a dir, que el vèrtex i és adjacent cap als vèrtexs $i+a$ i $i+b$ (les operacions s'han d'entendre sempre mòdul N). Aquesta xarxa es denota $G(N; a, b)$. Un digraf és fortament connex si existeix un camí dirigit (és a dir, tenint en compte les direccions dels arcs) entre qualsevol parell de vèrtexs. Més concretament, $G(N; a, b)$ és fortament connex si i només si $\text{mcd}(N, a, b) = 1$, és a dir, si N, a, b són nombres primers entre ells, cosa que van demostrar Fiol, Yebra, Alegre i Valero [11].

A la **Fig. 2.1** representem els passos d'un digraf de doble pas $G(N; a, b)$ i, com a exemple, el digraf de doble pas $G(8; 1, 3)$.

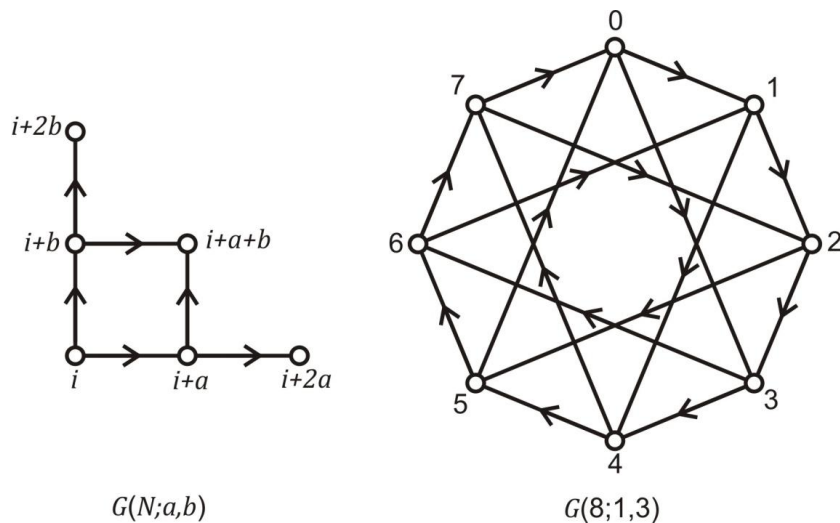


Fig. 2.1 Els passos d'un digraf de doble pas $G(N; a, b)$ i l'exemple $G(8; 1, 3)$

2.1 Des d'un digraf a una L -forma

Anem a veure que cada digraf $G(N; a, b)$ amb $\text{mcd}(N, a, b) = 1$ té associada una L -forma caracteritzada pels paràmetres l, h, w, y , tals que $\text{mcd}(l, h, w, y) = 1$ (vegeu la **Fig. 2.2** (esquerra)).

Considerem el digraf $G(N; a, b)$ que se suposa fortament connex, és a dir, $\text{mcd}(N, a, b) = 1$. Considerem també el pla dividit en quadrats unitaris (centrats en els punts de coordenades enteres que formen un reticle). A partir d'un quadrat - o punt reticular - marcat amb el zero, sumem $a \pmod{N}$ quan ens movem horitzontalment al quadrat següent, i $b \pmod{N}$ quan ens movem verticalment. Llavors, el pla queda recobert pels enters mòdul N , com es

mostra a la **Fig. 2.2** (dreta) amb l'exemple de la tessellació del digraf de doble pas $G(8;1,3)$. Observem que, d'aquesta manera, cada vèrtex d'un digraf $G(N; a, b)$ queda associat a un punt del reticle.

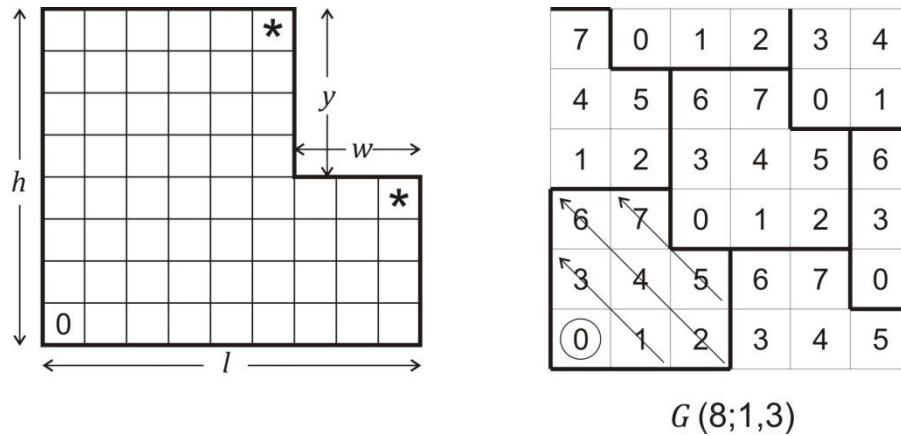


Fig. 2.2 Una L -forma genèrica i la tessellació del digraf de doble pas $G(8;1,3)$

Ara escollim un vèrtex inicial, per exemple el 0 encerclat a la **Fig. 2.2** (dreta), etiquetem aquest vèrtex i també tots els vèrtexs des d'1 fins a $N - 1$ que estiguin a distància mínima del 0 en el digraf corresponent. La numeració es pot fer seguint un simple algorisme que considera les diagonals successives, tal com es mostra de nou a la **Fig. 2.2** (dreta). Amb aquest mètode obtenim una rajola que tessella (recobreix) periòdicament el pla. Brawer i Shokley [6] van demostrar que les rajoles sempre són L -formes, és a dir, rajoles en forma de L . La rajola obtinguda en el nostre exemple es mostra també a la figura esmentada. Per la simetria del digraf, la L -forma obtinguda no depèn del vèrtex inicial i , per tant, representa el digraf de forma unívoca. Aleshores, una L -forma queda caracteritzada per les seves dimensions (l, h, w, y) , amb $l, h \geq 1$, $0 \leq w \leq l$, $1 \leq y \leq h$, vegeu de nou la **Fig. 2.2** (esquerra). Observem que, aleshores, el diàmetre D del digraf correspon a la mínima distància des del 0 fins als vèrtexs marcats amb asterisc (els més llunyans de 0), és a dir,

$$D = \max \{l - w - 1 + h - 1, h - y - 1 + l - 1\}. \quad (2.1)$$

2.2 Des d'una L -forma a un digraf

A partir d'una L -forma amb dimensions (l, h, w, y) , amb $\text{mcd}(l, h, w, y) = 1$, i àrea $N = lh - wy$, es poden obtenir els passos a i b del digraf corresponent amb N vèrtexs de la forma següent: a partir de les distàncies entre els 0 de diferents L -formes trobem (vegeu la **Fig. 2.3**):

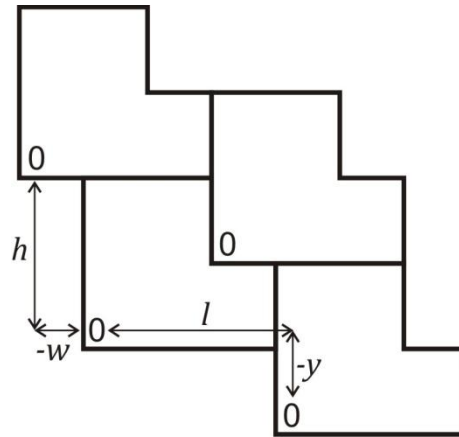


Fig. 2.3 Distàncies entre els 0 de diferents L -formes

$$la + wb = \alpha N (= 0 \pmod{N}) \quad (2.2)$$

$$-ya + hb = \beta N (= 0 \pmod{N}) \quad (2.3)$$

En forma matricial, tenim:

$$\begin{pmatrix} l & -w \\ -y & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha N \\ \beta N \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} l & -w \\ -y & h \end{pmatrix},$$

$$\det M = lh - wy = N,$$

$$M^{-1} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} h & w \\ y & l \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & w \\ y & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Per tant, els passos són:

$$a = \alpha h + \beta w, \quad (2.4)$$

$$b = \alpha y - \beta l. \quad (2.5)$$

Observem que els valors dels passos a i b no són únics, depenen de α i β , els quals s'han d'escollir de manera que es compleixi la condició $\text{mcd}(N, a, b) = 1$. Si això no és possible, els passos a i b no existeixen i, per tant, el digraf no existeix.

CAPÍTOL 3. ELS PROBLEMES (Δ, D^*) I $(\Delta, N)^*$

El problema (Δ, D^*) consisteix a trobar digrafs de doble pas $G(N; a, b)$ amb màxim nombre de vèrtexs N per a un diàmetre unilateral D^* i el grau $\Delta = 2$ donats, és a dir, trobar quins són els dos passos d'un digraf de doble pas que fan que el nombre de vèrtexs sigui màxim per a aquests diàmetre i grau. El problema $(\Delta, N)^*$ consisteix a trobar el diàmetre unilateral D^* mínim possible en digrafs de doble pas per a un nombre de vèrtexs N i el grau $\Delta = 2$ donats, és a dir, trobar quins són els dos passos d'un digraf de doble pas que fan que el diàmetre sigui mínim per a aquests nombre de vèrtexs i grau. Els noms vénen per equivalència als problemes (Δ, D) i (Δ, N) en grafs i digrafs, és a dir, els mateixos problemes però considerant el diàmetre estàndard en lloc del diàmetre unilateral.

En el problema (Δ, D^*) , observem que un digraf $G(N; a, b)$ amb diàmetre unilateral D^* té un nombre de vèrtexs N fitat superiorment de la forma següent:

$$N \leq M(2, D^*) = 2(1 + 2 + \dots + D^* + 1) - 1 = (D^*)^2 + 3D^* + 1 \quad (3.1)$$

on $M(2, D^*)$ és una fita, de manera semblant a la fita de Moore que hi ha per a grafs (vegeu Biggs [4]). Ara la rajola òptima, d'àrea $M(2, D^*)$, és en forma de papallona (o X-forma) i tessel·la el pla com es veu a la **Fig. 3.1**. Aleshores, segons el mètode utilitzat a l'apartat 2.2, trobem que els passos són: $a = \alpha(D^* + 1) + \beta D^*$ i $b = \alpha - \beta(D^* + 1)$. Donant els valors $\alpha = 1$ i $\beta = -1$, obtenim els passos $a = 1$ i $b = D^* + 2$.

Amb l'expressió (3.1), sabem que si el diàmetre unilateral D^* és 1, aleshores el màxim nombre de vèrtexs N és 5; si D^* és 2, aleshores N és 11; si D^* és 3, aleshores N és 19; etc. Vegeu la **Taula 3.1**.

D^*	0	?	?	?	1	?	?	?	?	?	2	?	?	?	?	?	?	?	3
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Taula 3.1 Relació entre el diàmetre unilateral i el nombre de vèrtexs

Problema. Què passa quan el nombre de vèrtexs està entre aquests nombres que assolixen la fita? Per exemple, quin és el mínim diàmetre unilateral si el nombre de vèrtexs és 8 o 15? Hem fet un programa d'ordinador que explora exhaustivament el diàmetre unilateral per a valors de N no molt grans.

A partir dels resultats obtinguts, hem trobat famílies infinites de digrafs amb diàmetre mínim, és a dir, hem resolt el problema $(\Delta, N)^*$ per a alguns valors de N .

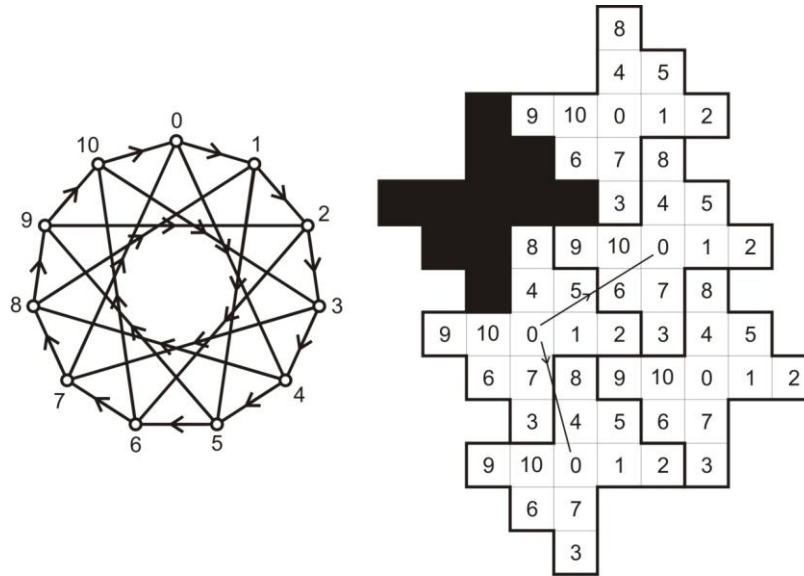


Fig. 3.1 El digraf $G(11; 1,4)$ i la seva X -forma

3.1 Exemple del càlcul de D^* per a $N = 6$

Considerem un digraf de doble pas amb 6 vèrtexs i calculem, per a totes les combinacions de passos a i b possibles el diàmetre unilateral D^* , és a dir, el mínim entre el diàmetre del digraf G i el diàmetre del seu digraf convers \bar{G} :

a	b	G	\bar{G}	Distància a G	Distància a \bar{G}	D^*
1	2			$dist_G(0,1) = 1$ $dist_G(0,2) = 1$ $dist_G(0,3) = 2$ $dist_G(0,4) = 2$ $dist_G(0,5) = 3$	$dist_{\bar{G}}(0,1) = 3$ $dist_{\bar{G}}(0,2) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,3) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,4) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,5) = 1$	2
1	3			$dist_G(0,1) = 1$ $dist_G(0,2) = 2$ $dist_G(0,3) = 1$ $dist_G(0,4) = 2$ $dist_G(0,5) = 3$	$dist_{\bar{G}}(0,1) = 3$ $dist_{\bar{G}}(0,2) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,3) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,4) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,5) = 1$	2
1	4			$dist_G(0,1) = 1$ $dist_G(0,2) = 2$ $dist_G(0,3) = 3$ $dist_G(0,4) = 1$ $dist_G(0,5) = 2$	$dist_{\bar{G}}(0,1) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,2) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,3) = 3$ $dist_{\bar{G}}(0,4) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,5) = 1$	3
1	5			$dist_G(0,1) = 1$ $dist_G(0,2) = 2$ $dist_G(0,3) = 3$ $dist_G(0,4) = 2$ $dist_G(0,5) = 1$	$dist_{\bar{G}}(0,1) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,2) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,3) = 3$ $dist_{\bar{G}}(0,4) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,5) = 1$	3
2	3			$dist_G(0,1) = 3$ $dist_G(0,2) = 1$ $dist_G(0,3) = 1$ $dist_G(0,4) = 2$ $dist_G(0,5) = 2$	$dist_{\bar{G}}(0,1) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,2) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,3) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,4) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,5) = 3$	2

2	4		$dist_G(0,1) = \infty$ $dist_G(0,2) = 1$ $dist_G(0,3) = \infty$ $dist_G(0,4) = 1$ $dist_G(0,5) = \infty$	$dist_{\bar{G}}(0,1) = \infty$ $dist_{\bar{G}}(0,2) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,3) = \infty$ $dist_{\bar{G}}(0,4) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,5) = \infty$	∞
2	5		$dist_G(0,1) = 2$ $dist_G(0,2) = 1$ $dist_G(0,3) = 3$ $dist_G(0,4) = 2$ $dist_G(0,5) = 1$	$dist_{\bar{G}}(0,1) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,2) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,3) = 3$ $dist_{\bar{G}}(0,4) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,5) = 2$	3
3	4		$dist_G(0,1) = 2$ $dist_G(0,2) = 2$ $dist_G(0,3) = 1$ $dist_G(0,4) = 1$ $dist_G(0,5) = 3$	$dist_{\bar{G}}(0,1) = 3$ $dist_{\bar{G}}(0,2) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,3) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,4) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,5) = 2$	2
3	5		$dist_G(0,1) = 3$ $dist_G(0,2) = 2$ $dist_G(0,3) = 1$ $dist_G(0,4) = 2$ $dist_G(0,5) = 1$	$dist_{\bar{G}}(0,1) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,2) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,3) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,4) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,5) = 3$	2
4	5		$dist_G(0,1) = 3$ $dist_G(0,2) = 2$ $dist_G(0,3) = 2$ $dist_G(0,4) = 1$ $dist_G(0,5) = 1$	$dist_{\bar{G}}(0,1) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,2) = 1$ $dist_{\bar{G}}(0,3) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,4) = 2$ $dist_{\bar{G}}(0,5) = 3$	2

Taula 3.2 Càlcul del diàmetre unilateral d'un digraf de doble pas amb 6 vèrtexs

Per tant els passos més eficients són:

- $a = 1$ i $b = 2$
- $a = 1$ i $b = 3$
- $a = 2$ i $b = 3$
- $a = 3$ i $b = 4$
- $a = 3$ i $b = 5$
- $a = 4$ i $b = 5$

Totes aquestes combinacions de passos a i b fan que el diàmetre unilateral D^* sigui mínim; en aquest cas $D^* = 2$.

3.2 Esquema del programa per calcular el diàmetre unilateral D^*

Per a cada valor de N en un cert interval, per exemple, des de $N = 5$ fins a $N = 271$, volem saber quins són els valors dels passos a i b que assoleixen el diàmetre unilateral mínim D^* i quin és aquest diàmetre. Aleshores, l'esquema lògic d'un possible programa seria el següent:

1. Per a cada N , des de $N = 5$ fins a $N = 271$, feu:
2. Inicialitzeu el diàmetre mínim com a $D[N] = \lfloor N/2 \rfloor$ (diàmetre unilateral del digraf-cicle $G(N; 1,1)$) i els passos corresponents $a[N] = b[N] = 1$.
3. Per a cada valor de a (des de $a = 1$ fins a $a = N - 1$) i cada valor de b (des de $b = a + 1$ fins a $b = N - 1$) (ja que per simetria, només cal provar els valors de a i b tals que $a < b$), feu:
4. Si el màxim comú divisor de a i b no és 1, passeu al següent parell de passos (a, b) segons el pas 3;
5. Altrament, per inicialitzar, poseu $k = 1$ i marqueu el vèrtex 0 com a assolit en el conjunt $[0, N - 1] = 0, 1, \dots, N - 1$.
6. Per a aquest valor de k , calculeu els vèrtexs assolits a distància unilateral k , és a dir, els que són de la forma

$$\pm(ma + nb) \pmod{N}$$
 amb $m, n \geq 0$ enters tals que $m + n = k$.
7. Marqueu aquests vèrtexs calculats com a assolits en $[0, N - 1]$.
8. Si encara no s'han marcat tots els vèrtexs de $[0, N - 1]$, incrementeu el valor de la k en una unitat, $k = k + 1$ i torneu al pas 6.
9. Altrament, si $k < D[N]$ (k és el diàmetre unilateral del digraf $G(N; a, b)$) guardeu el nou valor $D[N] = k$ i els passos corresponents $a[N] = a$ i $b[N] = b$ com a valors òptims (de moment).

10. Si no s'han provat tots el parells de passos, proveu un altre parell (a, b) segons el pas 3.
11. Altrament, imprimiu els valors $D[N]$ (diàmetre mínim per a N vèrtexs) i els passos del dígraf $a[N]$ i $b[N]$.
12. Si $N < 271$, proveu un altre valor de N segons el pas 1.

3.3 Programa realitzat amb el compilador lliure Free Basic

Seguint l'esquema de l'apartat anterior hem fet el programa següent en Free Basic:

```

Dim N As Integer      'Nombre de vèrtexs
Dim D As Integer      'Diàmetre
Dim a As Integer      'a i b passos que es van provant
Dim b As Integer
Dim k As Integer      'Valor actual del diàmetre
Dim m As Integer      'Nombre de vèrtexs explorats com a assolits o no
Dim y As Integer
Dim z As Integer
Dim S As Integer      'Suma de (les etiquetes de) tots els vèrtexs del dígraf
Dim r As Integer
Dim p As Integer      'p i q passos amb què s'assoleix el diàmetre mínim
Dim q As Integer
Dim i As Integer
Dim mcd As Integer
Dim div1 As Integer
Dim div2 As Integer
Dim div3 As Integer

```

```

print "Problema (A,N)* per a la distància unilateral en
dígrafs de doble pas"
print ""

```

```

'Nombre de vèrtexs a considerar

```

```

For N = 5 To 1000

```

```

'Valor inicial del diàmetre. El signe \ fa la divisió entera

```

```

D=N\2

```

```

'Parella de passos a considerar

```

```

For a=1 to N\2

```

```

For b=a+1 to N-a

```


'Càlcul del mcd (N, a, b)

```
If (a>b) then
  For i=1 to a-1
    if (a Mod i=0) then div1 = i
    if (b Mod i=0) then div2 = i
    if (N Mod i=0) then div3 = i
    if (div1 = div2 and div2 = div3) then mcd=div1
  Next i
```

```
Elseif (a<b) then
  For i=1 to b-1
    if (a Mod i=0) then div1 = i
    if (b Mod i=0) then div2 = i
    if (N Mod i=0) then div3 = i
    if (div1 = div2 and div2 = div3) then mcd=div1
  Next i
```

```
end if
```

```
if (mcd=1) then
```

'Calcula la suma de (les etiquetes de) tots els vèrtexs

```
S=N*(N-1)/2
```

```
Dim X(0 To N-1) As Integer
```

'Crea un vector de N elements $X(r)$, $r = 0, 1, \dots, N - 1$, i marca els vèrtexs com a "no assolits des del 0" posant $X(r) = r$

```
For r=0 to N-1
```

```
  X(r)=r
```

```
Next r
```

'Des de la distància $k = 1$

```
k=1
```

```
Do Until (S=0 or k=N\2)
```

'Calcula els vèrtexs assolits des del 0 en un nombre $k = m + n$ de passos, que són de la forma $y \equiv ma + nb \pmod{N}$

```
For m=0 to k
```

```
  z=(k-m)*a+m*b
```

```
  y=z-(z\N)*N
```

'Si el vèrtex y encara no s'ha assolit, es resta y de S i es defineix $X(y) = 0$

```
For r=1 to N-1
```

```
  if y=X(r) then S=S-y:X(r)=0
```

```
Next r
```

```
Next m
```

```

'Calcula els vèrtexs assolits des del 0 en un nombre  $k = m + n$ 
de passos, que són de la forma  $y \equiv -ma - nb \pmod{N}$ 
For m=0 to k
  z=- (k-m) *a-m*b
  y=z-(z\N-1)*N

  'Si el vèrtex y encara no s'ha assolit, es resta y de S i es
  defineix  $X(y) = 0$ 
  For r=1 to N-1
    if y=X(r) then S=S-y:X(r)=0
  Next r
Next m

'Suma una unitat al valor de k i torna a començar per explorar els
vèrtexs a la nova distància k des del 0
k +=1
Loop

'Si s'escau, actualitza el valor del diàmetre i els passos corresponents
if k-1<D then p=a:q=b:D=k-1

  End if

'Següent parella de passos
Next b
Next a

print N;D;p;q

  Open "Dades.dat" For Output As #1
  Print #1, N;D;p;q;
  Print #1,

Next N
Close #1

Sleep

```

A la **Taula 3.3** hi ha les dades obtingudes amb aquest programa per a $5 \leq N \leq 274$, on els valors del problema (Δ, D^*) estan en negreta.

3.3.1 Dades obtingudes amb el programa

Presentem les dades obtingudes amb el programa per a valors de N de 5 fins a 274.

N	D^*	a	b	N	D^*	a	b	N	D^*	a	b	N	D^*	a	b	N	D^*	a	b
5	1	1	2	59	7	1	5	113	11	1	6	167	12	1	12	221	14	1	13
6	2	1	2	60	7	1	6	114	11	1	8	168	12	1	12	222	15	1	13
7	2	1	2	61	8	1	5	115	12	1	6	169	12	1	10	223	14	1	14
8	2	1	2	62	7	1	7	116	10	1	9	170	13	1	9	224	14	1	14
9	2	1	2	63	7	1	7	117	10	1	9	171	13	1	9	225	14	1	15
10	3	1	2	64	7	1	8	118	11	1	7	172	14	1	9	226	15	1	14
11	2	1	3	65	7	1	6	119	10	1	8	173	14	1	9	227	14	1	12
12	3	1	2	66	8	1	6	120	10	1	10	174	15	1	7	228	15	1	12
13	3	1	2	67	8	1	6	121	10	1	11	175	12	1	11	229	15	1	10
14	3	1	3	68	9	1	6	122	11	1	10	176	13	1	11	230	15	1	11
15	3	1	3	69	7	1	7	123	11	1	11	177	13	1	11	231	15	1	11
16	3	1	4	70	8	1	7	124	12	1	10	178	14	1	11	232	16	1	11
17	3	1	3	71	7	1	8	125	10	1	9	179	12	1	12	233	14	1	13
18	4	1	3	72	8	1	6	126	11	1	9	180	13	1	10	234	15	1	13
19	3	1	4	73	8	1	8	127	11	1	8	181	12	1	13	235	15	1	13
20	4	1	3	74	9	1	5	128	11	1	8	182	13	1	13	236	16	1	13
21	4	1	3	75	9	1	5	129	10	1	10	183	13	1	13	237	14	1	14
22	5	1	3	76	8	1	7	130	11	1	10	184	14	1	13	238	15	1	14
23	4	1	3	77	8	1	6	131	10	1	11	185	14	1	13	239	14	1	15
24	4	1	4	78	9	1	6	132	11	1	11	186	13	1	11	240	15	1	12
25	4	1	5	79	8	1	8	133	11	1	11	187	13	1	11	241	15	1	11
26	5	1	3	80	8	1	8	134	11	1	9	188	14	1	9	242	16	1	11
27	4	1	4	81	8	1	9	135	11	1	8	189	13	1	10	243	16	1	11
28	5	1	4	82	9	1	8	136	12	1	8	190	14	1	10	244	17	1	11
29	4	1	5	83	8	1	7	137	12	1	8	191	13	1	12	245	17	1	11
30	5	1	5	84	9	1	6	138	13	1	8	192	13	1	12	246	15	1	13
31	5	1	4	85	9	1	7	139	11	1	10	193	14	1	12	247	15	1	13
32	5	1	4	86	10	1	6	140	11	1	10	194	13	1	13	248	16	1	13
33	6	1	3	87	8	1	8	141	12	1	10	195	13	1	13	249	16	1	10
34	5	1	5	88	9	1	8	142	11	1	11	196	13	1	14	250	17	1	10
35	5	1	4	89	8	1	9	143	11	1	9	197	13	1	11	251	15	1	12
36	5	1	6	90	9	1	7	144	11	1	12	198	14	1	11	252	15	1	14
37	6	1	4	91	9	1	7	145	12	1	9	199	14	1	10	253	16	1	11
38	6	1	6	92	10	1	7	146	12	1	12	200	14	1	10	254	15	1	15
39	5	1	5	93	10	1	7	147	13	1	7	201	15	1	10	255	15	1	15
40	6	1	4	94	11	1	5	148	13	1	12	202	15	1	10	256	15	1	16
41	5	1	6	95	9	1	8	149	11	1	10	203	13	1	12	257	16	1	15
42	6	1	6	96	9	1	8	150	12	1	10	204	14	1	12	258	16	1	16
43	6	1	4	97	9	1	7	151	12	1	8	205	14	1	12	259	15	1	13
44	6	1	5	98	9	1	9	152	12	1	9	206	15	1	9	260	16	1	13
45	6	1	5	99	9	1	9	153	11	1	11	207	13	1	13	261	16	1	13
46	7	1	5	100	9	1	10	154	12	1	11	208	14	1	11	262	17	1	13
47	6	1	6	101	10	1	6	155	11	1	12	209	13	1	14	263	16	1	11
48	6	1	6	102	10	1	10	156	12	1	12	210	14	1	14	264	16	1	12
49	6	1	5	103	9	1	8	157	12	1	12	211	14	1	14	265	15	1	14
50	7	1	5	104	10	1	7	158	13	1	12	212	15	1	14	266	16	1	14
51	7	1	4	105	10	1	7	159	12	1	10	213	15	1	14	267	16	1	14
52	8	1	4	106	11	1	7	160	12	1	10	214	16	1	14	268	17	1	14
53	6	1	6	107	9	1	9	161	12	1	9	215	14	1	12	269	15	1	15
54	7	1	5	108	10	1	9	162	13	1	9	216	14	1	12	270	16	1	15
55	6	1	7	109	9	1	10	163	13	1	9	217	15	1	12	271	15	1	16
56	7	1	7	110	10	1	10	164	12	1	11	218	15	1	12	272	16	1	13
57	7	1	7	111	10	1	7	165	12	1	11	219	14	1	11	273	16	1	13
58	8	1	7	112	10	1	8	166	13	1	11	220	14	1	13	274	17	1	11

Taula 3.3 Valors obtinguts amb el programa realitzat (en negreta els valors corresponents al problema (Δ, D^*))

Aquest programa és el resultat final obtingut de diverses modificacions i millores a partir de l'esquema de l'apartat 3.2.

Una de les millores més destacades ha estat analitzar només aquells parells de passos i nombre de vèrtexs que són primers entre ells, és a dir, $\text{mcd}(N, a, b) = 1$. En els casos en què no es compleix aquesta condició no es pot arribar a tots els vèrtexs i per tant no té sentit buscar el diàmetre, tal i com s'observa a l'exemple de l'apartat 3.1 (**Taula 3.2**).

Tal i com es mostra a la **Taula 3.3**, el digraf de doble pas amb 6 vèrtexs té un diàmetre unilateral $D^* = 2$ i com a passos $a = 1$ i $b = 2$, una de les possibilitats obtingudes a l'exemple de l'apartat 3.1. El programa ens en dóna només una, que correspon a la primera que troba, ja que les altres possibilitats no milloren el diàmetre unilateral D^* .

CAPÍTOL 4. EL DIÀMETRE UNILATERAL EN FUNCIO DE LES DIMENSIONS DE LES X-FORMES

Primer, definim els nombres triangulars T_n per calcular el nombre de vèrtexs en una de les dues "meitats" d'una X-forma. Aquests nombres corresponen als vèrtexs assolits a distància menor o igual que D^* des del vèrtex 0 o bé cap al vèrtex 0. Per a $n = 1, 2, \dots$, el nombre triangular és $T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$. Com a exemple, vegeu T_5 a la **Fig. 4.1**.

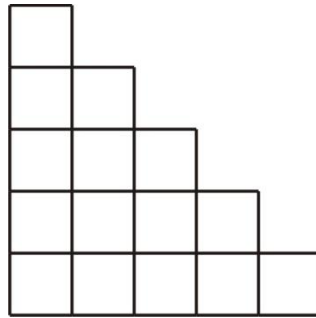


Fig. 4.1 El nombre triangular $T_5 = 15$

Resultat 1: Si $N = lh - 1$ amb $l \leq h$, el digraf de doble pas $G(N; a, b)$ amb $a = 1$ i $b = l$ té diàmetre unilateral

$$D^* = \left\lfloor \frac{l+h}{2} \right\rfloor - 1. \quad (4.1)$$

Demostració: Considerem dos casos:

a) $l + h$ senar: La rajola que tessella és la de la **Fig. 4.2**. La seva àrea és:

$$N = lh - 1 = 2(T_\alpha - T_{\alpha-l}) - 1 = 2 \left(\frac{(\alpha+1)\alpha}{2} - \frac{(\alpha-l+1)(\alpha-l)}{2} \right) - 1.$$

Aleshores,

$$lh = \alpha^2 + \alpha - (\alpha^2 - \alpha l - \alpha l + l^2 + \alpha - l) = 2\alpha l - l^2 + l,$$

$$h = 2\alpha - l + 1,$$

$$\alpha = \frac{l+h-1}{2} = \left\lfloor \frac{l+h}{2} \right\rfloor.$$

El diàmetre (unilateral) és la distància a partir del vèrtex marcat amb un 0 a un dels vèrtexs més llunyans (marcats amb un *), per tant, $D^* = \alpha - 1 = \lfloor \frac{l+h}{2} \rfloor - 1$.

A partir de la X-forma construïm una L-forma amb $w = y = 1$, posant la "meitat" inferior de la X-forma a sobre de la "meitat" superior.

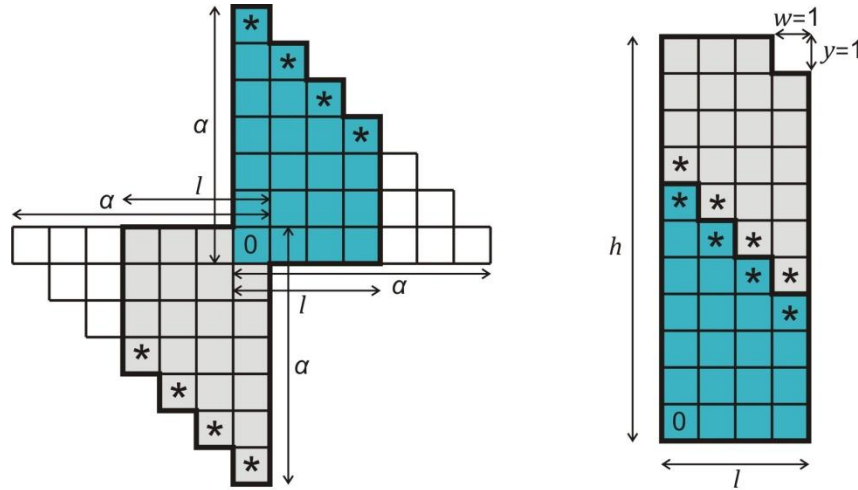


Fig. 4.2 El cas $l + h$ senar

Prenem com a exemple el digraf $G(43; 1,4)$ i obtenim la seva L-forma, representada a la Fig. 4.3, que, com s'observa, la rajola que tessella és del mateix tipus que la de la Fig. 4.2.

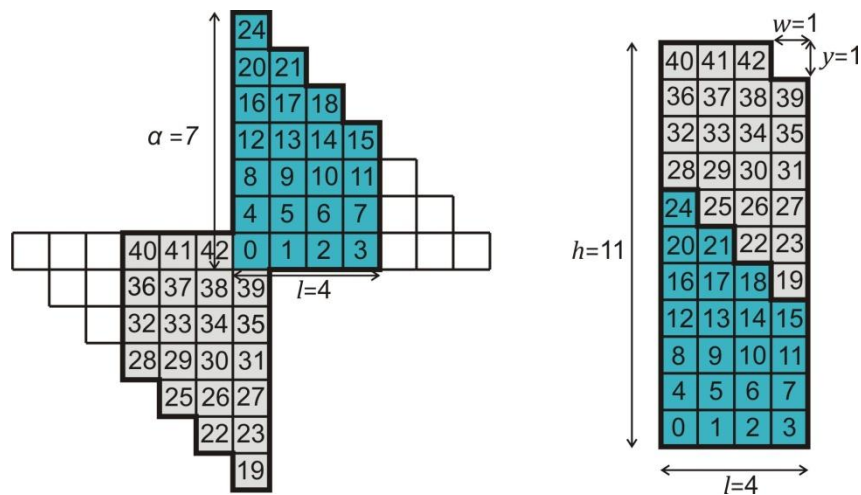


Fig. 4.3 Exemple del cas $l + h$ senar per al digraf $G(43; 1,4)$

El diàmetre unilateral és la distància a partir del vèrtex marcat amb un 0 a un dels vèrtexs més llunyans (per exemple, el vèrtex 24), per tant, $D^* = 7 - 1 = \left\lfloor \frac{4+11}{2} \right\rfloor - 1 = 6$. Aquest resultat del diàmetre unilateral D^* coincideix amb el resultat obtingut amb el programa desenvolupat per al càlcul del D^* i els passos a i b de l'apartat 3.3.

b) $l + h$ parell: La rajola que tessela està representada a la **Fig. 4.4**. La seva àrea és:

$$N = lh - 1 = 2(T_\alpha - T_{\alpha-l}) - l - 1 = 2\left(\frac{(\alpha + 1)\alpha}{2} - \frac{(\alpha - l + 1)(\alpha - l)}{2}\right) - l - 1.$$

Aleshores,

$$lh = \alpha^2 + \alpha - (\alpha^2 - \alpha l - \alpha l + l^2 + \alpha - l) - l = 2\alpha l - l^2,$$

$$h = 2\alpha - l,$$

$$\alpha = \frac{l+h}{2} = \left\lfloor \frac{l+h}{2} \right\rfloor.$$

El diàmetre unilateral és $D^* = \alpha - 1 = \left\lfloor \frac{l+h}{2} \right\rfloor - 1$.

Com en el cas anterior, a partir de la X -forma construïm una L -forma amb $w = y = 1$, posant la "meitat" inferior de la X -forma a sobre de la "meitat" superior.

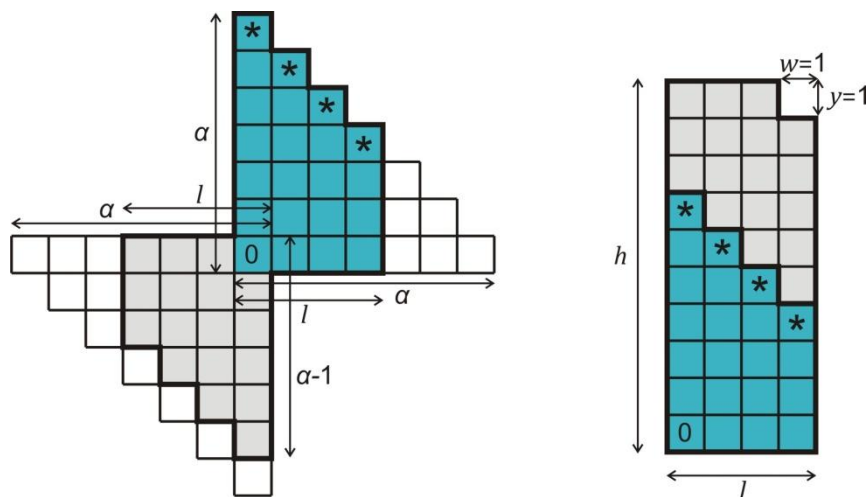


Fig. 4.4 El cas $l + h$ parell

Prenem ara com a exemple el digraf $G(44; 1,5)$ i obtenim la seva L -forma, representada a la **Fig. 4.5**, que com s'observa, la rajola que tessella és del mateix tipus que la de la **Fig. 4.4**.

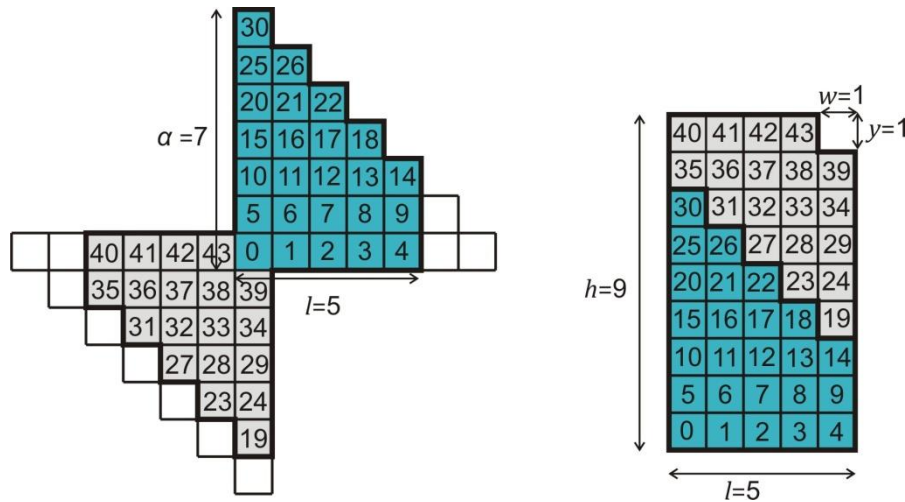


Fig. 4.5 Exemple del cas $l + h$ parell per al digraf $G(44; 1,5)$

El diàmetre unilateral és la distància a partir del vèrtex marcat amb un 0 a un dels vèrtexs més llunyans (per exemple, el vèrtex 30), per tant, $D^* = 7 - 1 = \left\lfloor \frac{5+9}{2} \right\rfloor - 1 = 6$. Aquest resultat del diàmetre unilateral D^* coincideix amb el resultat obtingut amb el programa desenvolupat per al càlcul del D^* i els passos a i b de l'apartat 3.3.

A partir de les construccions proposades, podem treure el resultat següent sobre el problema $(\Delta, N)^*$ per als digrafs de doble pas amb distància unilateral. Definim r com el subíndex del nombre triangular T_r dels quadrats que no s'omplen (mostrats en blanc a la **Fig. 4.2**).

Resultat 2:

- Si $r < \frac{1}{2} (\sqrt{8k+9} - 1)$, el digraf de doble pas $G(N; a, b)$, amb nombre de vèrtexs $N = k^2 + 3k + 1 - r(r+1)$ i passos $a = 1$ i $b = l = k + 1 - r$, té diàmetre unilateral mínim $D^* = k$.
- Si $r < \sqrt{k+1}$, el digraf de doble pas $G(N; a, b)$, amb nombre de vèrtexs $N = k^2 + 2k - r^2$ i passos $a = 1$ i $b = l = k + 1 - r$, té diàmetre unilateral mínim $D^* = k$.

Demostració:

- a) El nombre de vèrtexs és $N = hl - 1 = (k + 1 + r + 1)(k + 1 - r) - 1 = k^2 + 3k + 1 - r(r + 1)$. El nombre de quadrats que no s'omplen ha de ser més petit o igual que $2k + 1$. Això ve del fet que la diferència entre el nombre de vèrtexs per a un diàmetre k i l'anterior $k - 1$ és:

$$\left. \begin{array}{l} N_k = k^2 + 3k + 1 \\ N_{k-1} = (k - 1)^2 + 3(k - 1) + 1 \end{array} \right\} N_k - N_{k-1} = 2k + 2.$$

Per tant, el nombre de quadrats que no s'omplen ha de ser més petit que $2k + 2$, és a dir, més petit o igual que $2k + 1$. Aleshores $2T_r \leq 2k + 1$. Com que $2T_r$ és un nombre parell, tenim que

$$2T_r \leq 2k \Leftrightarrow T_r \leq k \Leftrightarrow T_r = \frac{(r + 1)r}{2} < k + 1.$$

Per tant, $r^2 + r - (2k + 2) < 0$. Resolem l'equació següent:

$$r^2 + r - (2k + 2) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{8k + 9}}{2} \Rightarrow r = \frac{-1 + \sqrt{8k + 9}}{2}.$$

Aleshores, tenim que $r < \frac{-1 + \sqrt{8k + 9}}{2}$.

- b) El nombre de vèrtexs és $N = hl - 1 = (k + 1 + r)(k + 1 - r) - 1 = k^2 + 2k - r^2$. El nombre de quadrats que no s'omplen és $T_r + T_{r-1} + k + 1$ i, com abans, ha de ser menor o igual que $2k + 1$.

$$\begin{aligned} T_r + T_{r-1} + k + 1 &= \frac{(r + 1)r}{2} + \frac{r(r - 1)}{2} + k + 1 = r^2 + k + 1 \leq 2k + 1 \\ &\Leftrightarrow r^2 \leq k \Rightarrow r \leq \sqrt{k} \Leftrightarrow r < \sqrt{k + 1}. \end{aligned}$$

En particular, si prenem $r = 0$ en el cas a), obtenim la solució del problema (Δ, D^*) que ja coneixem.

També podem fixar r i veiem que, per a tot k suficientment gran, tenim una família infinita de digrafs amb diàmetre mínim per al seu nombre de vèrtexs, és a dir, que resolen el problema $(\Delta, N)^*$. Vegeu-ne alguns exemples a la **Taula 5.1** del capítol següent.

Ara només cal demostrar que els passos són, efectivament, $a = 1$ i $b = l$. Ara la nostra rajola té dimensions $l, h, w = 1$ i $y = 1$. Segons el mètode de l'apartat 2.2, obtenim els passos $a = h\alpha + \beta$ i $b = \alpha + l\beta$. Donant els valors $\alpha = 0$ i $\beta = 1$, els passos són $a = 1$ i $b = l$.

CAPÍTOL 5. CONCLUSIONS

En aquest apartat s'exposen les diferents conclusions a què s'ha arribat a partir dels resultats obtinguts.

Hem elaborat la taula següent a partir dels resultats 1 i 2 obtinguts al capítol anterior:

Problema	$l + h$	r	l	h	$N = lh - 1$	D^*
(Δ, D^*)	senar	0	$k + 1$	$k + 2$	$k^2 + 3k + 1$	k
$(\Delta, N)^*$	senar	1	k	$k + 3$	$k^2 + 3k - 1$	k
$(\Delta, N)^*$	senar	2	$k - 1$	$k + 4$	$k^2 + 3k - 5$	k
$(\Delta, N)^*$	senar	≥ 3	\vdots	\vdots	\vdots	k
$(\Delta, N)^*$	parell	0	$k + 1$	$k + 1$	$k^2 + 2k$	k
$(\Delta, N)^*$	parell	1	k	$k + 2$	$k^2 + 2k - 1$	k
$(\Delta, N)^*$	parell	2	$k - 1$	$k + 3$	$k^2 + 2k - 4$	k
$(\Delta, N)^*$	parell	≥ 3	\vdots	\vdots	\vdots	k

Taula 5.1 Alguns resultats dels problemes (Δ, D^*) i $(\Delta, N)^*$

En aquesta taula només s'ha calculat les variables per tres valors concrets de r , per $r = 0$, $r = 1$ i $r = 2$. No obstant, donat que s'ha trobat la solució generalitzada es poden trobar totes les variables per valors de $r \geq 3$, sempre i quan es compleixin les dues condicions determinades al **Resultat 2** de l'apartat anterior:

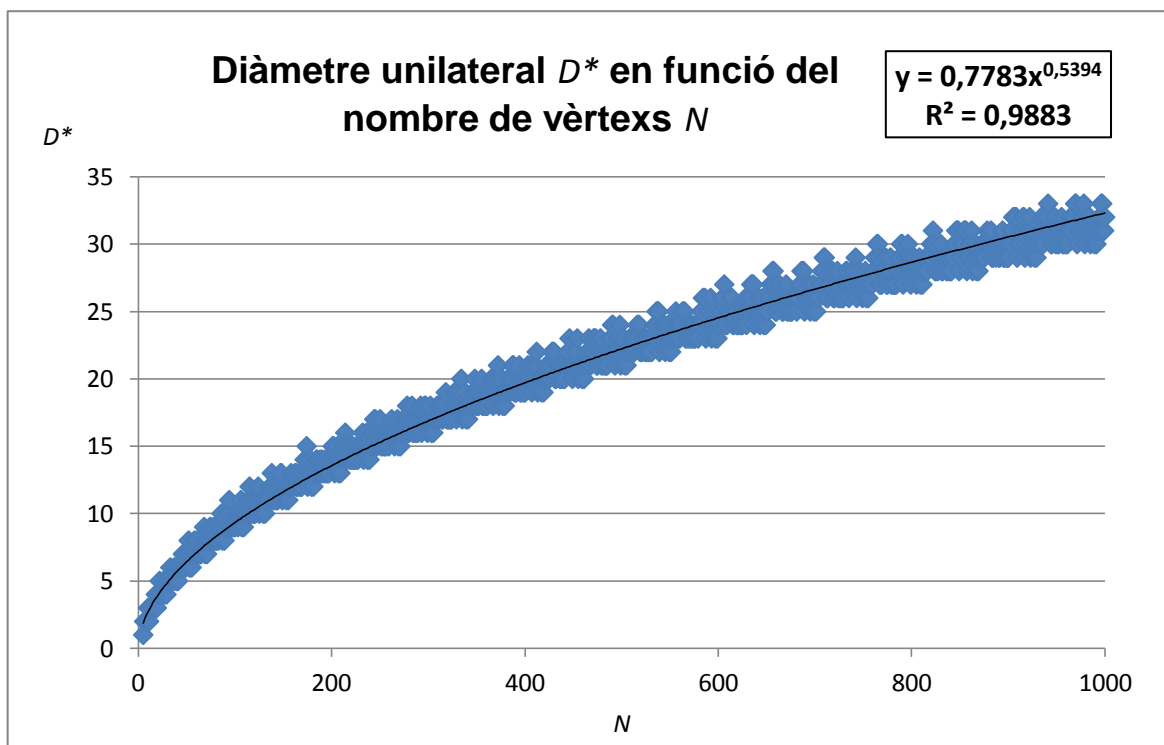
- $r < \frac{1}{2} (\sqrt{8k + 9} - 1)$ pel cas $l + h$ senar
- $r < \sqrt{k + 1}$ pel cas $l + h$ parell

Mitjançant les dades de $N = 5$ fins a $N = 1000$ obtingudes amb el programa realitzat amb el compilador lliure Free Basic hem pogut analitzar el comportament del diàmetre unilateral en funció del nombre de vèrtexs del dígraf de doble pas.

Tal i com s'aprecia a la **Gràfica 5.1**, el diàmetre unilateral D^* respecte el nombre de vèrtexs N té una tendència potencial, seguint l'equació:

$$y = 0,7783x^{0,5394} \quad (5.1)$$

Amb aquest tipus de tendència obtenim un valor de R^2 (coeficient que indica el grau d'ajust de la regressió als valors reals obtinguts) molt proper a 1, per tant aquesta funció potencial s'ajusta bastant bé al comportament real del diàmetre unilateral D^* en funció del nombre de vèrtexs N .



Gràfica 5.1 Diàmetre unilateral en funció del nombre de vèrtexs

Com ja s'ha comentat anteriorment els problemes (Δ, D) i (Δ, N) en grafs i digrafs han estat àmpliament estudiats però, en canvi, els problemes (Δ, D^*) i $(\Delta, N)^*$ en digrafs de doble pas tenint en compte el diàmetre unilateral analitzats en aquest treball no havien estat tractats fins ara.

Presentem doncs una taula amb els resultats coneguts, tant els que hem trobat nosaltres com els que ja s'havien obtingut i els problemes que queden oberts.

	(Δ, D)	(Δ, N)	(Δ, D^*)	$(\Delta, N)^*$
Graf de doble pas	Yebra, Fiol, Morillo, Alegre [16]	Bermond, Iliades, Peyrat [3], Beivide, Herrada, Balcázar, Arruabarrena [2]	-	-
Digraf de doble pas	Fiol, Yebra, Alegre, Valero [11]	Fiol, Yebra, Alegre, Valero [11], Esqué, Aguiló, Fiol [10], Aguiló, Fiol [1]	Aquest TFC	Aquest TFC
Digraf New Amsterdam	Morillo, Fiol, Fàbrega [14]	TFC Clavijo, Comas [7]	Problema obert	Problema obert
Digraf Manhattan	Morillo, Fiol, Fàbrega [14]	TFC Clavijo, Comas [7]	Problema obert	Problema obert

Taula 5.2 Resum de resultats dels problemes (Δ, D) , (Δ, N) , (Δ, D^*) i $(\Delta, N)^*$

Observem que en el cas dels grafs, el diàmetre i el diàmetre unilateral són iguals i els problemes (Δ, D^*) i $(\Delta, N)^*$ coincideixen, respectivament, amb els problemes (Δ, D) i (Δ, N) . Aquest tipus de problemes s'han resolt també per a alguns digrafs de doble pas concrets, com són el digraf Manhattan i el digraf New Amsterdam (vegeu la **Fig. 5.1**).

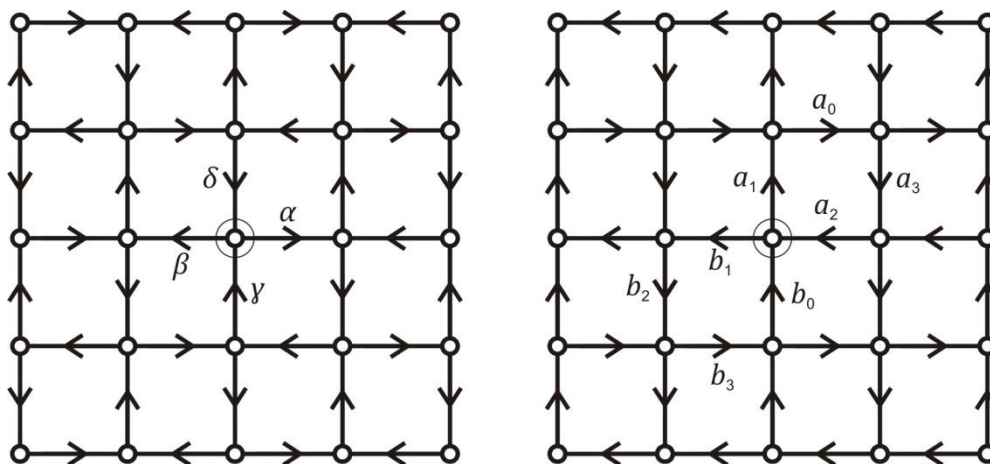


Fig. 5.1 Els digrafs de doble pas New Amsterdam (esquerra) i Manhattan (dreta)

El nom del digraf de doble pas Manhattan ve del fet que el seus arcs segueixen les direccions dels carrers i les avingudes de Manhattan (o de l'Eixample de Barcelona). Un digraf Manhattan M té un conjunt de vèrtexs (amb ordre múltiple de 4) $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$ amb $V_j = i$, $0 \leq i \leq N - 1$, $i \equiv j \pmod{4}$, i cada vèrtex i és adjacent als vèrtexs $i + a_j$ i $i + b_j \pmod{N}$, on $a_j \equiv 3$, $b_j \equiv 1 \pmod{N}$ i

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \pmod{N}, \quad (5.2)$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \equiv 0 \pmod{N}, \quad (5.3)$$

$$a_0 + a_2 \equiv b_0 + b_2 \pmod{N}. \quad (5.4)$$

El digraf Manhattan és el digraf línia del digraf anomenat New Amsterdam. Aquest nom ve del fet que el nom anterior de l'illa de Manhattan era New Amsterdam. Un digraf línia (per exemple, el Manhattan) s'obté d'un altre digraf (per exemple, el New Amsterdam) substituint els arcs del digraf original per vèrtexs en el segon digraf i les adjacències d'arcs per adjacències de vèrtexs. La definició del digraf New Amsterdam és la següent: un digraf New Amsterdam té un conjunt de vèrtexs (amb ordre parell) $V = V_0 \cup V_1$ amb $V_0 = \{0, 2, \dots, N - 2\}$ i $V_1 = \{1, 3, \dots, N - 1\}$. Cada vèrtex $i \in V_0$ és adjacent als vèrtexs (mòdul N) $i + \alpha$, $i + \beta \in V_1$ per a alguns enters senars diferents α , β , i cada vèrtex $j \in V_1$ és adjacent als vèrtexs (mòdul N) $j + \gamma$, $j + \delta \in V_0$ per a alguns enters senars γ , δ tals que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 0 \pmod{N}$. Aquest digraf està representat a la **Fig. 5.1** (esquerra). Per a més informació sobre aquests dos digrafs, consulteu Morillo, Fiol i Fàbrega [14] i Comellas, Dalfó i Fiol [8].

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. Aguiló, M.A. Fiol, An efficient algorithm to find optical double loop networks, *Discrete Math.* **138** (1995) 15-29.
- [2] R. Beivide, E. Herrada, J.L. Balcázar, A. Arruabarrena, Optimal Distance Networks of Low Degree for Parallel Computers, *IEEE T. Comput.* **40** (1991) 1109-1124.
- [3] J.C. Bermond, G. Iliades, C.Peyrat, *An optimization problem in distributed loop computer networks*, Third Int. Conf. on Comb. Math., New York, June 1985.
- [4] N.L. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd ed. 1993.
- [5] N.L. Biggs, E.K. Lloyd, R.J. Wilson, *Graph theory: 1736-1936*, Oxford University Press, New York, reprinted 1998.
- [6] A. Brawer, J. Shokley, On a problem of Frobenius, *J. Reine Angew. Math.* **211** (1962) 215-220.
- [7] H. Clavijo, J. Comas, *El problema grau-nombre de vèrtexs en les xarxes Manhattan*, Treball de Fi de Carrera (Aeronàutica), Directora: Cristina Dalfó, Universitat de Catalunya, juliol 2012.
- [8] F.Comellas, C. Dalfó, M.A. Fiol, Multidimensional Manhattan street networks, *SIAM J. Discrete Math.* **22** (2008) 1428-1447.
- [9] F. Comellas, J. Fàbrega, A. Sànchez, O. Serra, *Matemàtica discreta*, Edicions UPC, Barcelona, 2001.
- [10] P. Esqué, F. Aguiló, M.A. Fiol, Double commutative-step digraphs with minimum diameters, *Discrete Math.* **114** (1993) 147-157
- [11] M.A. Fiol, J.L.A. Yebra, I. Alegre, M. Valero, A discrete optimization problem in local networks and data alignment. *IEEE Trans. Comput.* **C-36** (1987) 702-713.
- [12] J. Gómez, E.A. Canale, X.Muñoz, On the unilateral (Δ, D^*) -problem, *Networks* **36** (2000), no. 3, 164-171.
- [13] J. Gómez, E.A. Canale, X.Muñoz, Unilaterally connected large digraphs and generalized cycles, *Networks* **42** (2003), no. 4, 181-188.
- [14] P. Morillo, M.A. Fiol, J. Fàbrega, The diameter of directed graphs associated to plane tessellations, *Ars Combin.* **20A** (1985) no. 4, 17-27.

[15] S.G. Shrinivas, S.Vetrivel, Dr. N.M. Elango, Applications of Graph Theory in Computer Science an Overview, *International Journal of Engineering Science and Technology* **2** (2010) 4610-4621.

[16] J.L.A. Yebra, M.A. Fiol, P. Morillo, I. Alegre, The diameter of unidirected graphs associated to plane tesselations, *Ars Combin.* **20B** (1985), no. 4, 159-171.

[17] <http://physics.weber.edu/carroll/honors/konigsberg.htm>