TREBALL DE Fi DE MÀSTER

Màster en Matemàtica Aplicada

Títol: Relació entre el grup de Thompson i el teorema dels quatre colors

Autor: Eric López Platón

Director: José Burillo Puig

Codirector: Oriol Serra Albó

Departament: Matemàtica Aplicada IV

Convocatòria: Febrer 2011

Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Relació entre el grup de Thompson i el teorema dels quatre colors

Eric López Platón

Director: José Burillo Puig

Codirector: Oriol Serra Albó

Gener de 2011

Agraïments

M'agradaria donar les gràcies a totes aquelles persones que han col·laborat, directament o indirecta, en aquest treball, i l'han fet possible.

Primer de tot, al Pep, per oferir-me el projecte, i per totes les idees i consells que m'ha donat, tant sobre el treball com moltes altres coses. I, sobretot, per recordar-me que més important que la meta és el camí.

També a l'Oriol Serra, per la seva ajuda i el seu optimisme amb el treball.

A l'Esther, per la seva ajuda explícita, però sobretot per la implícita, i per tot el suport que m'ha donat.

Al Carlos Luna, la motivació i les idees del qual em van encaminar en els primers passos del projecte.

A tots els meus companys de despatx, inclosos els que no són del despatx, per la bona acollida i l'ambient de treball que m'han mostrat.

I també a tota aquella gent que m'ha volgut escoltar, i m'ha demanat que els expliqués què feia. Especialment a tota aquella gent que no ho feia amb l'objectiu d'entendre-ho.

Resum

L'objectiu d'aquest treball és estudiar la relació que hi ha entre el Teorema dels Quatre Colors i els grups de Thompson. Principalment, es construeix el procés que permet passar d'un mapa a un (o més) elements del grup F, i com a partir d'un element del grup en podem obtenir un mapa. També es veu en quin sentit això permet definir una equivalència en el sentit de les coloracions.

Després, usant aquesta equivalència que s'ha construït, es realitzen alguns intents de demostració que, malgrat no funcionar, ajuden a entendre aquesta relació i a entendre el Grup de Thompson. S'estudia per quin motiu aquests intents fracassen, i es veuen possibles vies que resten obertes en aquest sentit.

Índex

Introducció

El Teorema dels Quatre Colors és un dels teoremes clàssics de la teoria de grafs, i va donar lloc a tota la teoria de coloracions de grafs. El teorema afirma, intuïtivament, que tot mapa pla es pot pintar amb quatre colors, cada regió d'un color, de manera que dues regions adjacents tinguin colors diferents. En llenguatge modern, tot graf planar és 4-colorable.

El teorema, ja enunciat durant la dècada de 1850, sembla cert intuïtivament, però de seguida es va veure que una demostració es resistia. Una demostració deguda a Kempe a 1879 va estar acceptada durant 11 anys, fins que Heawood va trobar un error insalvable, i el teorema va quedar obert un altre cop. Al mateix temps, Heawood va demostrar el teorema dels 5 colors, amb una demostració senzilla basada en les idees de Kempe.

El teorema quedà obert fins 1976, quan Appel i Haken van proposar una demostració que feia servir eines informàtiques. Aquest fet va donar lloc a una gran controvèrsia, doncs aquesta demostració realitzada per ordinador no era comprovable a mà. Això va fer que en aquell moment, en el qual els ordinadors no eren tan habituals, es dubtés que fos correcte.

El teorema s'accepta avui dia com a vàlid. Tanmateix, l'interès per trobar una demostració habitual, és a dir, que es pugui escriure i que pugui ser comprovada pels matemàtics en un període de temps raonable, segueix existint.

D'altra banda, el Grup de Thompson F va ser introduït per Richard Thompson el 1965 en el camp de la lògica, però va adquirir un gran interès des del punt de vista de la teoria de grups, i ha estat llargament estudiat des d'aleshores. Un dels principals motius d'aquest interès són les diverses interpretacions possibles que presenta. És un grup infinit però finitament presentat. Una d'aquestes possibles interpretacions és com a parells d'arbres binaris.

Sense usar per a res el Grup de Thompson, Robin Thomas explica a [5] un resultat equivalent al Teorema dels Quatre colors, degut a H.Kauffman, relacionant amb possibles associacions de productes escalars. En aquesta construcció, assigna a cada possible associació un arbre binari, i passa de parells d'arbres com aquests a grafs cúbics, usant un teorema de Tait per a veure que 3-aresta-acolorir aquests grafs és equivalent al Teorema dels Quatre Colors. La construcció completa es pot veure a [4].

Aquesta construcció va motivar la idea de la possible existència d'una relació entre el Teorema dels Quatre Colors i el grup de Thompson F. Així, l'objectiu principal d'aquest treball era, inicialment, estudiar aquesta relació, i veure si es pot definir alguna equivalència.

Aquest objectiu s'ha satisfet, i un cop vista l'equivalència que ens permet 4-acolorir tot mapa si demostrem que podem 3-aresta-acolorir tots els elements del grup de Thompson (en la seva representació com a parells d'arbres binaris) hem realitzat alguns intents preliminars d'obtenir una demostració del Teorema usant el grup de Thompson. Tot i no haver trobat aquesta demostració, hem vist perquè aquests intents fallaven, i hem entès quines opcions obre aquest treball.

A la primera secció estudiem el Teorema dels Quatre Colors, aclarim algunes definicions prèvies, i en fem una petita introducció històrica. Tot seguit, veiem l'intent de demostració de Kempe, les idees darrera la demostració d'Appel i Haken, i algun resultat proper.

A la segona secció construïm el procés que ens permet passar de la $4-$coloració de mapes a l'aresta coloració d'elements del grup de Thompson, durant la secció entesos simplement com a parells d'arbres binaris. Veiem doncs el teorema de Tait i el de Whitney, i alguns altres resultats, que ens permeten definir aquesta equivalència.

A la tercera secció estudiem el Grup de Thompson F, amb les seves tres interpretacions, com a un grup d'aplicacions de l'interval $[0, 1]$, com a parells d'arbres binaris, i les seves dues presentacions més usades, la infinita i la finita, tot veient les equivalències entre totes aquestes interpretacions.

A la quarta secció aprofitem el que hem vist anteriorment per a fer diversos intents de demostració del Teorema dels Quatre Colors, concretament de la seva versió equivalent per al Grup de Thompson, usant l'estructura algebraica del grup. Per a tots aquests intents, veiem perquè no funcionen, i finalment veiem algun resultat addicional.

A la darrera secció resumim les conclusions extretes del treball, i veiem alguns dels possibles camins que resten oberts per a ser estudiats a l'hora d'intentar demostrar el Teorema dels Quatre Colors usant el grup de Thompson.

1 El Teorema dels Quatre Colors

En aquest capítol, estudiarem el Teorema dels Quatre Colors: què diu, una mica d'història, i una visió preliminar de la seva demostració original.

Aquest teorema va ser enunciat per primer cop a mitjans del segle XIX, i va estar obert fins al 1976. Fins i tot llavors, la seva demostració va aixecar molta polèmica, com veurem més endavant.

Això, juntament a la seva senzilla formulació, fa que sigui un resultat molt conegut.

1.1 Enunciat del teorema

Tot seguit, veurem què diu exactament el teorema. És sabut que el teorema parla de coloracions de mapes. Així que hauríem de començar per la definició de mapa.

Definició 1.1. Un *mapa* és un graf planar i connex que no conté cap istme. Un *istme* és una aresta que limita a les dues bandes amb la mateixa regió.

Aquest és el concepte que tots tenim intuitivament de mapa, amb la condició que una regió no pot limitar amb ella mateixa. En aquest cas, en aquell tros no hi hauria frontera. Aquest fet, a més, ens evita l'aparició d'arestes de tall.

Farem algunes observacions sobre aquesta definició:

Observació. El fet que el graf sigui connex no és necessari per al teorema, però es pot considerar així, ja que si no ho fos, podríem acolorir les diverses components connexes per separat.

A més, això és també cert encara que una de les components connexes del graf estigui a l'interior d'una de les regions.

Observació. Per a considerar dues regions adjacents, aquestes han de compartir un segment efectiu de frontera. El contacte només en un vèrtex no el considerem una adjacència.

I ara que sabem què és un mapa, podem definir el què és una coloració.

Definició 1.2. Una *k-coloració* d'un mapa és una assignació de colors a les regions del mapa de manera que apareixen com a molt k colors i que dues regions adjacents tenen assignats colors diferents.

Un mapa es diu *k-acolorible* si n'existeix una k coloració.

Amb aquestes dues definicions, l'enunciat del teorema és clar.

Teorema 1.3 (dels quatre colors)**.** *Tot mapa és* 4*-acolorible.*

Tot seguit, però, en veurem un enunciat equivalent per a grafs. Tot i que l'anterior és més visual i divulgatiu, i de fet és el que va motivar l'enunciat original, actualment, els problemes de coloracions es presenten en termes de grafs.

Aquests dos resultats són equivalents usant dualitat, ja que el dual d'un mapa és un graf planar i viceversa. A més, podem fer una definició anàloga de coloració:

Definició 1.4. Una k-*coloració* d'un graf és una assignació de colors als vèrtexs del graf de manera que apareixen com a molt k colors i que dos vèrtexs adjacents tenen assignats colors diferents.

Un graf es diu k-*acolorible* si n'existeix una k coloració.

I amb aquesta definició, l'enunciat del teorema és també anàleg.

Teorema 1.5 (dels quatre colors)**.** *Tot graf planar és* 4*-acolorible.*

Observació. La condició que una regió no limiti amb ella mateixa vol dir, traduïda a grafs, que no hi hagi llaços, és a dir, arestes amb el mateix inici i final.

1.2 Història del Teorema i de la Demostració

Tot seguit veurem una mica d'història del Teorema dels Quatre Colors, des de la seva formulació fins a la seva demostració, passant per alguns intents de demostració anteriors que finalment es van demostrar incorrectes.

El Teorema va ser formulat al 1852 per Francis Guthrie quan, tot acolorint un mapa d'Anglaterra, va veure que quatre colors eren suficients. Va plantejar aquest problema al seu germà, que estudiava amb el professor Augustus De Morgan. La primera referència publicada, però, no va ser fins al 1879 per Arthur Cayley, tot i que en aquest cas la presentava com una conjectura de De Morgan.

El mateix 1879 Kempe en va donar una prova, i l'any següent, 1880, Tait en va donar una altra. Aquestes demostracions van seguir vigents durant 11 anys, fins que al 1890 Heawood va demostrar que la primera era falsa, i al 1891 Petersen ho demostrava per a l'altra.

En el procés, a més, Heawood va demostrar el Teorema dels Cinc Colors que veurem més endavant.

Des d'aleshores es van demostrar diversos resultats equivalents i algunes conjectures que, de ser certes, demostrarien el teorema. En particular, s'han donat algunes generalitzacions, com el Teorema dels Snarks o la conjectura de Hadwiger.

Va ser al 1976 quan Appel i Haken, de la Universitat d'Illinois van donar-ne una prova, utilitzant l'ajuda d'ordinadors i amb el mètode de descàrrega. Més endavant veurem una idea de la prova. A més, aquesta prova passava per comprovar 1936 mapes particulars. Anys més tard, al 1995, Robin Thomas va reduir aquesta fita a 633 mapes.

En tot cas, el fet que aquesta prova fos per ordinador, i que no fos comprovable a mà, va aixecar bastanta polèmica en aquell context, en què els ordinadors no eren tan comuns com avui dia, Per això, encara avui, es cerquen proves alternatives que no requereixin dels càlculs per ordinador. Però, fins al moment, no se n'ha trobat cap.

1.3 El teorema dels Cinc Colors

Com hem comentat en l'apartat anterior, durant els diversos intents de trobar una demostració per al Teorema de Quatre Colors al segle XIX, Heawood va trobar una demostració per al teorema dels Cinc Colors, que és molt assequible.

És clar que el Teorema dels Quatre Colors implica el dels Cinc Colors, però tot i així, en un moment que no se sabia res sobre la certesa del primer, era un resultat interessant. Tot i que com ja hem dit, són equivalents, farem la prova en termes de grafs, per a correspondre's amb la notació actual i facilitar-ne la comprensió.

Teorema 1.6 (dels Cinc Colors)**.** *Tot graf planar té una 5-coloració.*

Demostració. Sigui G un graf planar amb R cares. Farem la demostració per inducció en $|V(G)|$, és a dir, el nombre de vèrtexs. Sigui $|E(G)|$ el nombre d'arestes.

Primer de tot, podem assumir que G és connex i no té arestes dobles. És connex ja que si hi hagués diverses components connexes les podríem acolorir per separat. D'altra banda, no té arestes dobles ja que aquestes no afecten a la coloració, i per tant podem no considerar-les. Per motius obvis, també podem assumir que té com a mínim tres vèrtexs.

De la mateixa manera, podem assumir que no és un arbre, ja que es poden acolorir trivialment amb dos colors. Per tant, podem assumir que hi ha com a mínim una cara a més de l'externa. Per tant, per la fórmula d'Euler, $|V(G)| + R = |E(G)| + 2$. D'altra banda, com que cada aresta incideix en com a molt dues regions, i la vora de cada regió té longitud com a mínim tres, tenim que $2|E(G)| \geq 3R$. Ara, com la suma dels graus dels diferents vèrtexs és dues vegades el nombre d'arestes, obtenim $\sum_{i=1}^{|V(G)|} d_i = 2|E(G)| \leq 6|V(G)| - 12 < 6|V(G)|$, on els d_i són els graus dels vèrtexs.

Per tant, algun dels d_i és necessariament menor que 6. Sigui v el corresponent vèrtex. Si el seu grau és estrictament menor que 5, considerem $G\backslash v$ el graf resultat de treure v i les seves arestes adjacents de G. Per hipòtesi d'inducció, aquest graf té una 5 coloració. Ara, aquesta coloració s'estén trivialment a una coloració en tot G.

Si v té grau exactament 5, considerem el subgraf J format pels veïns de v. En aquest graf existeixen com a mínim dos vèrtexs no adjacents, doncs si tots fossin adjacents entre ells formarien un K_5, fet que contradiria la planaritat de J, i per tant la de G. Considerem aquests dos vèrtexs no adjacents, v_1 i v_2. Considerem el graf H definit a partir de $G\backslash v$ identificant v_1 i v_2. És clar que H és un graf sense llaços. A més, és planar, ja que malgrat no estar connectats directament, ho estaven mitjançant v, fet que permet fer aquesta identificació sense afectar la planaritat.

Per hipòtesi d'inducció, H admet una 5-coloració. Aquesta coloració indueix una 5 coloració de $G\backslash v$ on v_1 i v_2 tenen assignat el mateix color. Per tant, els veïns de v estan acolorits usant 4 colors, i assignant a v el color restant, obtenim una 5-coloració de G.

□

1.4 La prova de Kempe i el seu error

Tot seguit, veurem la prova que va donar originalment Kempe del Teorema dels Quatre Colors. Recordem que aquesta prova es va considerar certa durant onze anys, fins que Heawood va donar el contraexemple que veurem tot seguit. Tot i així, la veurem per interès històric, així com també perquè alguns dels arguments que dóna van ser utilitzats, temps després, per a la prova d'Appel i Haken del Teorema dels Quatre Colors. A més, alguns d'aquests arguments són anàlegs als usats en la prova del Teorema dels Cinc Colors que ja hem vist doncs, de fet, aquest resultat es va concloure de la prova següent, un cop va ser clar que aquesta no demostrava el Teorema dels Quatre Colors.

Veurem abans una observació i una definició que ens seran útils diverses vegades durant la demostració:

Observació. Si tenim un graf 4-acolorit, i prenem el subgraf format pels vèrtexs de dos colors, aquest subgraf pot tenir diverses components connexes. En una component connexa d'aquest subgraf, podem permutar ambdós colors, sense afectar a la coloració de la resta de components, i per tant de la resta del graf.

Definició 1.7. En un graf acolorit, una *Cadena de Kempe* entre dos vèrtexs és un camí de l'un a l'altre format només per vèrtexs acolorits en un dels seus dos colors.

Clarament, aquest camí estarà format per colors alternats.

I ara, ja, ens tornem a centrar en el teorema:

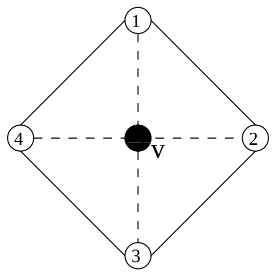
Teorema 1.8. *Tot graf planar és 4-acolorible.*

Demostració. (A.B.Kempe, 1879)

La idea de la prova és la mateixa que a la prova del Teorema dels Cinc Colors. La demostració es fa per inducció, i es veu de la mateixa manera que $\sum_{i=1}^{|V(G)|} d_i < 6|V(G)|$ i que per tant hi ha com a mínim un vèrtex de grau estrictament menor que 6. Sigui v aquest vèrtex, de grau mínim en el graf. Ara, el pas d'inducció consisteix en acolorir el graf $G\backslash v$, usant quatre colors, per hipòtesi d'inducció, i després veure com això indueix una coloració de G.

En el cas que v tingui grau 1, 2 ó 3, si tenim una 4-coloració de $G\backslash v$, podem acolorir G trivialment assignant a v un color que no tingui cap dels seus veïns. De la mateixa manera, si v té grau 4 ó 5 però algun dels colors disponibles no apareix en la coloració dels seus veïns, també podem estendre la coloració de $G\backslash v$ a una coloració de G, assignant a v un dels colors disponibles.

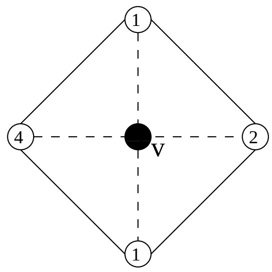
Ens centrarem, primer, en el cas que v tingui grau quatre. Com ja hem observat, la situació al voltant de v és necessàriament la següent:



On, de fet, els vèrtexs adjacents a v poden estar o no connectats entre ells, però aquest és el cas més complicat, i se'n poden deduir els altres. Considerem els parells de vèrtexs que no estan connectats, és a dir, els acolorits 1 i 3 o els acolorits 2 i 4. Pot ser que entre algun d'aquests parells existeixi una Cadena de Kempe. El que és clar és que no hi pot haver una cadena entre cada parell, doncs aquestes cadenes es creuarien necessàriament en un vèrtex, i aquest no es podria acolorir.

Així doncs, prenem un dels parells no connectats mitjançant una Cadena de Kempe. Podem suposar que són els acolorits 1 i 3. Llavors, utilitzant l'observació anterior, podem modificar el colors de 3 a 1, permutant aquests dos colors a tota la component connexa corresponent, sense afectar al vèrtex adjacent a v acolorit amb 1.

Per tant, la situació passa a ser la de la imatge següent.



I podem acolorir v, per tant obtenint una 4-coloració de tot el graf G.

Ara passem al cas on v té grau 5. Com ja hem dit, considerem només la situació en què tots quatre colors apareixen entre els veïns de v. Es poden donar dues situacions:

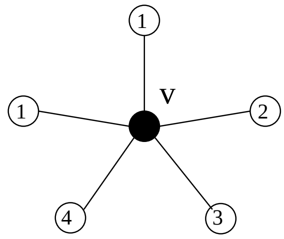


Figura 1: Cas 1

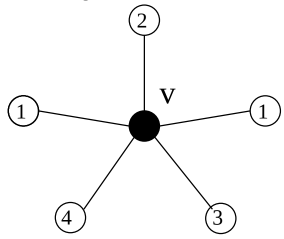
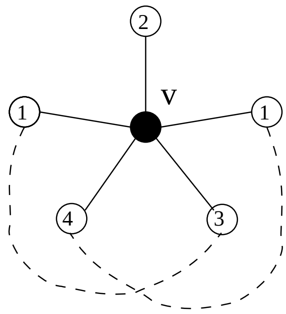


Figura 2: Cas 2

El Cas 1 es pot resoldre fàcilment de manera anàloga al cas de grau 4, repetint l'argument de les Cadenes de Kempe, novament amb els parells 1 i 3 ó 2 i 4.

En canvi, si ens trobem en el cas 2, aquest argument pot no funcionar. Busquem Cadenes de Kempe entre els vèrtexs acolorits 2 i 3, i entre els vèrtexs acolorits 2 i 4. Si alguna de les dues no existeix, permutant els colors en una de les components, com abans, podrem acolorir tots els veïns de v amb 3 colors, i assignar el color restant a v, acolorint així tot G. Si ambdues existeixen, és impossible que hi hagi una Cadena de Kempe entre els nodes acolorits 1 i els seus nodes oposats, és a dir, les mostrades a la figura.

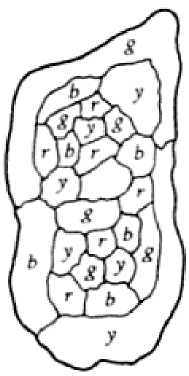


Per tant, podem permutar els colors 1, per a esdevenir respectivament 3 i 4, sense modificar la coloració de la resta dels veïns, de manera que cap dels veïns de v té assignat el color 1, i per tant acolorint v amb 1 obtenim una coloració de tot G.

□

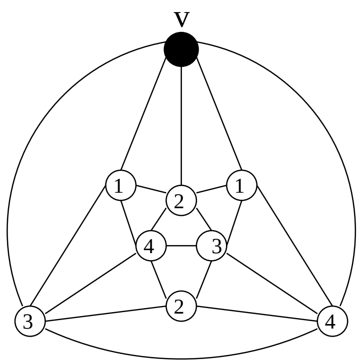
Aquesta demostració va ser acceptada i molt aclamada en el seu moment. No va ser fins onze anys més tard, el 1890, que Heawood va trobar-hi un error. En el darrer cas possible, quan assumeix que les dues cadenes originals impedeixen la creació de dues cadenes des dels vèrtexs acolorits amb 1, omet una possibilitat.

Tot i que, de bon principi, és cert que aquestes dues cadenes no poden existir, al canviar el color en una d'elles, les cadenes originals poden desaparèixer, i aparèixer l'altra Cadena de Kempe partint d'un vèrtex 1. Aquest és el contraexemple original trobat per Heawood.

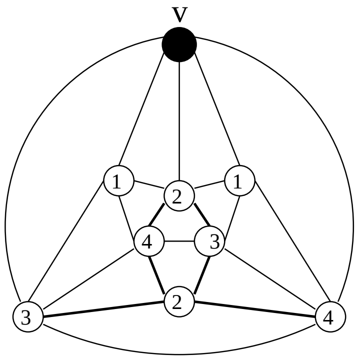


Tot i així, des d'aleshores s'han trobat altres exemples amb menys vèrtexs. En particular, l'exemple que utilitzarem per a il·lustrar l'error de la demostració, és degut a Fritsch (1998) i és minimal en el nombre de vèrtexs. No és, però, l'únic amb aquesta propietat.

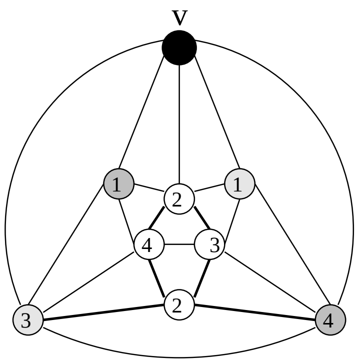
Vegem tot seguit el graf, amb una possible coloració llevat del vèrtex v, en el qual intentarem aplicar l'argument de Kempe.



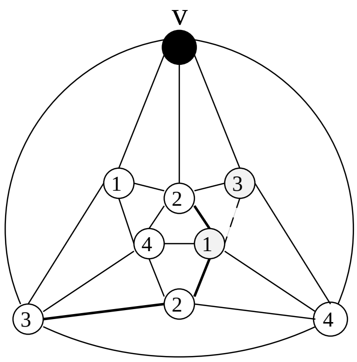
Vegem ara, resaltades, les dues Cadenes de Kempe inicials, una amb els parells $2, 3$ i una amb els parells 2, 4. Observem que aquestes dues cadenes es creuen, però això no afecta l'argument. L'existència d'aquestes cadenes ens impedeix permutar els colors 2, 3 o 4 al voltant de v, reduint el nombre de colors i així podent acolorir tot el graf.



Tal i com Kempe observa correctament, l'existència d'aquestes dues cadenes impedeix l'existència de cadenes des dels vèrtexs acolorits amb un 1, els què estan ratllats a la figura.

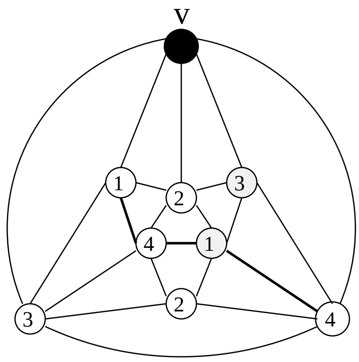


Però ara necessitem permutar els colors dels dos vèrtexs acolorits amb 1. Si modifiquem el de la dreta, hem de modificar també el vèrtexs adjacent amb un 3, i arribem a aquesta situació:



El problema, però, és que aquesta modificació ha eliminat una de les cadenes de Kempe, la

2, 3. Això, en particular, permet que aparegui una Cadena de Kempe dels colors 1, 4, que abans no existia, i que impedeix modificar el color de l'altre vèrtex acolorit amb un 1.



I per tant no podem estendre aquesta coloració a una 4-coloració de tot el graf, mostrant així l'error en la demostració de Kempe.

Tot i així, el tipus de contraexemple és molt concret, i en un mateix graf, una coloració diferent pot no donar lloc a aquest error. Això fa que els arguments de Kempe se segueixin usant a nivell algorísmic, i de fet formin part de la demostració definitiva del Teorema dels Quatre Colors, com veurem tot seguit.

1.5 La Prova d'Appel i Haken

Per acabar aquesta secció introductòria sobre el Teorema dels Quatre Colors, veurem les idees de la demostració donada per Appel i Haken, al 1989. Tot i que ho veurem més endavant, és equivalent demostrar el teorema per a tot graf planar que només per a triangulacions. És per això que aquesta demostració tracta amb aquest tipus de grafs.

La idea inicial de la demostració és anàloga a la demostració de Kempe. Consisteix en una inducció forta, que ens permet acolorir el graf a partir d'una coloració parcial. És a dir, retirem un vèrtex del graf, acolorim per hipòtesi d'inducció el subgraf restant, i demostrem que aquesta coloració, o una modificació, indueix una coloració del graf complet.

Aquest era, però, l'argument de Kempe, i com ja hem vist no funcionava si el grau d'aquest vèrtex era 5. Per a aquest cas, doncs, cal un concepte més ampli. Sigui G una triangulació.

Definició 1.9. Una *configuració* és un subgraf connex de G, amb el grau de cada vèrtex (a G) fixat. És a dir, coneixem el subgraf, però també quantes arestes hi ha entre ell i la resta del graf.

Ara repetim l'argument de Kempe, però per a configuracions enlloc de per a vèrtexs. És a dir, es retira la configuració, es 4-acoloreix la resta del graf, i es demostra que aquesta coloració es pot estendre a una 4-coloració de tot G.

Donada una configuració, com que es coneix el nombre d'arestes que comparteix amb la resta de G, i com que G és una triangulació, els vèrtexs adjacents a la configuració formen un cicle.

Definició 1.10. Anomenem *anell* (d'una configuració) al cicle format pels vèrtexs adjacents a la configuració.

Donada una configuració, el què realment ens interessa és veure que per a qualsevol coloració del seu anell, o bé la podem estendre a una coloració de la configuració, o bé podem modificar la coloració de G per a després poder-la estendre.

Definició 1.11. Una configuració tal que qualsevol 4-coloració del seu anell es pot estendre a una coloració de la configuració, si cal, modificant la coloració del graf, es diu que és una *configuració reduïble.*

El problema és, per suposat, veure que qualsevol graf conté una d'aquestes configuracions.

Definició 1.12. Un conjunt de configuracions tal que qualsevol graf conté una d'aquestes configuracions s'anomena *conjunt inevitable.*

Així doncs, trobar un conjunt inevitable de configuracions reduïbles acabaria la prova. Però per a configuracions amb anells prou grans, la quantitat de possibles coloracions de l'anell fa que es requereixi l'ajuda d'un ordinador per a comprovar la reduïbilitat. D'altra banda, a l'hora de trobar un conjunt inevitable, s'utilitza principalment el mètode de descàrrega, que no discutirem en aquest treball. Aquesta part principal que requereix càlculs per ordinador.

A part, calen alguns detalls tècnics necessaris a la demostració, però aquestes són les idees bàsiques, i aquesta demostració, degut a les parts que requerien anàlisi per ordinador, va portar una gran controvèrsia.

Més endavant s'ha millorat i s'ha reduït la llista d'elements del conjunt inevitable de configuracions reduïbles, que inicialment tenia 1936 elements.

2 Equivalències. Del Teorema dels Quatre Colors al Grup de Thompson

En aquesta secció veurem i estudiarem tota la sèrie de resultats que ens permeten passar des dels mapes, tal i com els hem vist anteriorment, a la coloració d'elements del Grup de Thompson.

Veurem una gran quantitat de resultats i pot resultar complicat seguir-ne el fil. És per això que al final de la secció hi haurà un resum de les conclusions, per a facilitar-ne la comprensió.

Com aquesta secció es troba abans que la dedicada al grup de Thompson, per ara ens limitarem a intentar obtenir una equivalència entre els mapes i les parelles d'arbres binaris amb el mateix nombre de fulles. A la següent secció estudiarem el grup de Thompson i veurem com aquestes parelles d'arbres en són una possible representació.

2.1 Els mapes cúbics.

Els teoremes que veurem a continuació parlen de mapes cúbics, és a dir, mapes regulars de grau tres. És per això que el primer què hem de veure és que el Teorema dels Quatre Colors és equivalent al teorema restringit a aquests grafs. Veurem primer la definició.

Definició 2.1. Un mapa es diu *cúbic* si el graf que el dóna és cúbic, és a dir, tal que tots els seus vèrtexs tenen grau 3.

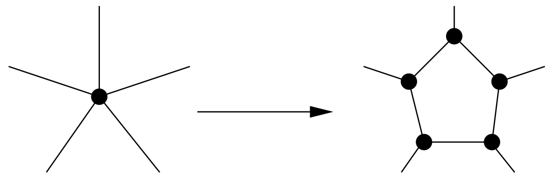
I tot seguit veurem l'equivalència al Teorema dels Quatre Colors.

Teorema 2.2. *Són equivalents:*

1. *Tot mapa és 4-acolorible.*
2. *Tot mapa cúbic és 4-acolorible.*

Demostració. El fet que (1) $\Rightarrow$ (2) és clar, ja que tot mapa cúbic és en particular un mapa. Falta veure que (2) $\Rightarrow$ (1). Per a fer-ho considerem un vèrtex amb grau superior a 3. Observem que no en podem tenir de grau inferior, ja que els de grau 1 no limitarien regions, i els de grau 2 serien senzillament més parts de la mateixa frontera. Si en tenim un de grau superior a 3, el podem substituir per un polígon, com es veu a la figura.

Ara, però, podem observar que les úniques adjacències que varien són amb la cara poligonal que hem creat. Les regions originals, en canvi, conserven les mateixes adjacències entre elles. A més, el nou mapa és cúbic. Per (2), podem acolorir aquest mapa cúbic, però si després tornem al graf original i conservem els colors, com que les adjacències són les mateixes, tindrem una 4-coloració del graf que volíem.



□

Com ja hem comentat anteriorment, la formulació clàssica del teorema és amb mapes, i així és també per als resultats d'aquesta secció. Però, novament, recordem la construcció dual, amb grafs. En aquest cas, el dual d'un graf cúbic és una triangulació, ja que el dual d'un vèrtex de grau tres és una regió amb tres arestes a la frontera, és a dir, un triangle. Podem doncs reformular la definició i el resultat anteriors.

Definició 2.3. Un graf planar es diu *triangulació* si totes les seves cares són triangles.

I, anàlogament, el teorema:

Teorema 2.4. *Són equivalents:*

1. *Tot graf planar és 4-acolorible.*

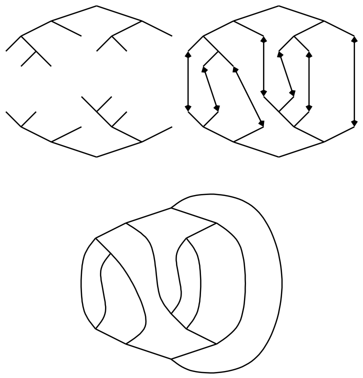
2. *Tota triangulació és 4-acolorible.*

2.2 Dels arbres binaris als Mapes Cúbics

Ara que ja hem vist que ens podem centrar en els mapes cúbics, podem veure una de les impliacions. Comencem pel pas dels parells d'arbres cap als mapes cúbics, per una banda per ser més senzill que el recíproc, però sobretot perquè aquesta construcció és la que aporta la idea principal que origina aquest treball. Hem vist que un element del grup de Thompson es pot entendre, en particular, com a dos arbres binaris. Però, si tenim dos arbres binaris qualssevol, amb el mateix nombre de fulles, i els unim com s'explica tot seguit, obtindrem sempre un graf cúbic.

Tot seguit unim les fulles mitjançant una aresta. De la mateixa manera unim les arrels. Observem que hem unit les arestes (convertint-les en una de sola), i no hi hem posat cap vèrtex addicional.

I d'aquesta manera obtenim el graf següent.



Aquest senzill procediment ens permet obtenir, si tenim un element del grup de Thompson, un mapa cúbic. És clar que serà cúbic ja que tots els vèrtexs tenen grau 3 per ser part d'un arbre binari, llevat de les arrels, que tindràn grau tres perquè les hem unit mitjançant una aresta.

2.3 El Teorema de Tait.

Un cop ja treballem amb mapes cúbics, el teorema de Tait ens permet passar de la coloració definida fins ara, la de les regions, a l'aresta-coloració del graf, com veurem tot seguit. Aquesta és, realment, la coloració amb la que ens interessarà treballar en el grup de Thompson.

Definició 2.5. Una *aresta-coloració* d'un graf és una assignació de colors a les arestes de manera que dues arestes que coincideixen en un dels extrems tenen colors diferents.

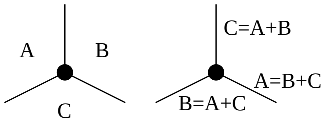
Observació. De fet, una aresta-coloració d'un graf és una coloració dels vèrtexs del seu graf línia.

Definició 2.6. Un graf és *k-aresta-acolorible* si es pot aresta-acolorir usant k colors.

Amb això, ja tenim prou informació per a veure el teorema de Tait.

Teorema 2.7 (Tait)**.** *El teorema dels quatre colors és equivalent a l'afirmació que tot mapa cúbic és 3-aresta-acolorible.*

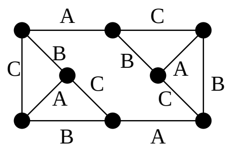
Demostració. $\Rightarrow$ Primer veurem que el teorema dels 4 colors implica el de la 3-aresta-coloració de mapes cúbics. Per a fer-ho, considerem G un mapa cúbic. Considerem una 4-coloració de les regions de G. Ara, anomenem els colors amb els què hem acolorit el mapa amb els elements del grup de Klein, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Tenim els colors $A = (0, 1)$, $B = (1, 1)$, $C = (1, 0)$ i finalment $D = (0, 0)$. Tot seguit, passem a acolorir les arestes. Per a fer-ho, donem a cada aresta el color representat per la suma dels colors de les cares que limita.



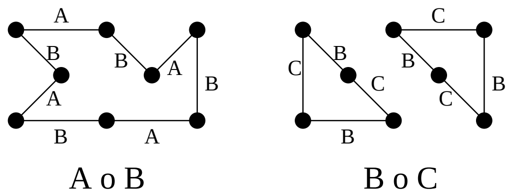
A la figura podem veure'n un exemple. De fet, és fàcil veure que, per l'operació del grup de Klein, D no podrà aparèixer a cap aresta, doncs aquesta hauria de limitar entre dues regions del mateix color, i al voltant de cada vèrtex sempre hi apareixeran els tres altres colors, A, B, C.

Això ens dóna una 3-aresta-coloració del mapa cúbic, tal i com volíem.

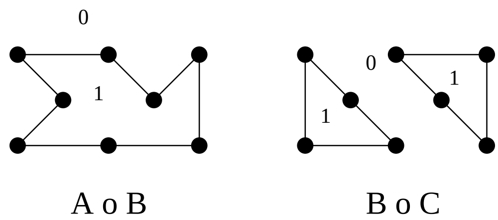
$\Leftarrow$ Per a aquesta implicació, considerem ara una 3-aresta-coloració de G.



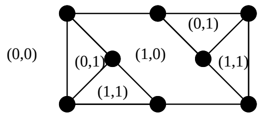
Ara, considerem el subgraf format només per les arestes acolorides A o B, i el subgraf format per les acolorides B o C. Com que tots els vèrtex tenen grau 3, i una aresta de cada color, el graf resultant és de grau 2. Això vol dir que està format per diveros cicles.



Ara, podem acolorir les regions d'aquests dos grafs usant els colors 0 i 1. És clar que podem fer-ho, perquè al no haver-hi vèrtexs de grau 3, no podem tenir tres regions contactant dues a dues. Això fa que si acolorim una regió amb un 1, tots els seus veïns puguin ser acolorits amb un 0, i tots els veïns d'aquestes amb un 1, i així successivament.



Finalment, podem superposar ambdós mapes, per a obtenir el mapa G original. Ara, a cada regió li assignem un color format per dues components, (x, y), on x és el color que tenia al mapa A o B i y és el color que tenia al mapa B o C.



És clar que sortiran com a molt 4 colors, i és senzill entendre que dues regions adjacents tindran colors diferents, ja que en com a mínim un dels dos subgrafs estaven separades per una aresta. En aquest mapa, tenien colors diferents, i per tant tindran diferent com a mínim una de les components.

□

2.4 Propietats del tall

Ja hem vist com passar d'un element del grup a un mapa cúbic. Ara voldríem veure el camí contrari. És a dir, donat un mapa cúbic, podem obtenir-ne dos arbres binaris? Aquest és el nostre objectiu, ja que donats dos arbres binaris qualssevol, sempre obtindrem un element del grup de Thompson.

Així, donat un mapa cúbic, volem trobar un conjunt d'arestes per on tallar, de manera que puguem obtenir dos arbres binaris, llevat del vèrtex arrel que tindrà grau tres a cada arbre. Cal fer algunes senzilles consideracions abans d'això, i especificar les propietats que esperem d'aquest tall.

- Quants vèrtexs ha de tenir a cada banda? Veurem que ens cal que deixi la meitat a cada banda.
- Paritat del nombre de vèrtex. Si ha de deixar el mateix nombre a cada arbre, cal que el mapa tingui un nombre parell de vèrtexs. Veurem que això és cert per a mapes cúbics.
- Cal que talli totes les regions. Això és clar, ja que si alguna regió queda tancada, no obtindrem arbres.

2.4.1 Nombre de vèrtexs en el tall.

Veurem de manera molt senzilla com les dues primeres propietats se satisfan. Hem dit que el tall que busquem ha de deixar el mateix nombre de vèrtexs a cada arbre. El motiu és que volem obtenir dos arbres amb el mateix nombre de fulles, i tots aquests arbres tenen el mateix nombre de vèrtexs. Vegem-ho:

Definició 2.8. En un arbre binari, un *caret* és un vèrtex que no és una fulla, juntament amb les dues arestes que en són descendents. Observem que un arbre binari té tants carets com vèrtexs que no siguin fulles.

Proposició 2.9. *Tot arbre binari no buit amb l fulles té exactament $v = l - 1$ vèrtexs que no són fulles, és a dir, $v = l - 1$ carets.*

Demostració. Ho veurem per inducció sobre v. Per a $v = 1$ tenim un arbre format només per un caret. És clar que aquest arbre satisfà el teorema, ja que té dues fulles.

Ara, suposem-ho vist per a arbres amb v vèrtexs. Considerem ara un arbre amb $v + 1$ vèrtexs. Aquest arbre tindrà com a mínim un caret exposat, i.e. sense descendents, per exemple corresponent al vèrtex de màxima profunditat. Si treiem aquest caret, tindrem un vèrtex menys. Per tant, el nou arbre tindrà v vèrtexs, i per hipòtesi d'inducció $l = v + 1$ fulles. El nostre arbre original té un vèrtex més que aquest, però també té una fulla més, ja que n'ha perdut una al colocar el nou caret, però ha guanyat les dues del caret. Per tant, se segueix satisfent que $v = l + 1$. □

Això vol dir, en particular, que fem el tall que fem, si satisfà que el resultat són dos arbres binaris, aquests tindran el mateix nombre de carets, doncs haurem tallat per un nombre fixat d'arestes. Però això implica, en particular, que tindrem el mateix nombre de vèrtexs a cada arbre, i per tant per a que aquest tall existeixi cal que el graf tingui un nombre parell de vèrtexs.

Proposició 2.10. *Tot graf cúbic té un nombre parell de vèrtexs.*

Demostració. Sigui G un graf cúbic, amb $|V(G)|$ vèrtexs i $|E(G)|$ arestes. Llavors, és clar que $3|V(G)| = 2|E(G)|$, doncs tots els vèrtexs tenen grau tres i si sumem els graus totes les arestes apareixen comptades dos cops.

Però la igualtat anterior implica que $|V(G)|$ ha de ser, necessàriament, parell. □

Per tant, queda clar que les dues primeres propietats se satisfan. Si trobem un tall que ens doni dos arbres binaris, aquests dos tindran el mateix nombre de vèrtexs. La tercera propietat, però, serà més complicada. Com ja hem dit, cal que el tall visiti totes les regions, exactament un cop, i a més sigui tancat, per tal de desconnectar ambdós arbres. Per tant, el què necessitem és que sigui un cicle Hamiltonià sobre el graf dual del mapa.

2.5 Cicles Hamiltonians. El Teorema de Whitney.

Fins ara, tenim un mapa cúbic, i volem trobar un tall tancat que passi per totes les regions i que separi el mapa en dos arbres binaris. És a dir, volem un cicle Hamiltonià sobre el dual, que com ja hem vist abans és una triangulació.

Definició 2.11. Un *camí Hamiltonià* en un graf és un camí que recorre el graf visitant cada vèrtex exactament un cop.

Un camí Hamiltonià tancat es diu *cicle Hamiltonià.*

Per tant, el que volem és assegurar que en tota triangulació podem trobar un cicle Hamiltonià. En general, però, el problema de trobar cicles Hamiltonians, o senzillament de saber si n'hi ha, és molt complicat, i hi ha molts grafs que no en tenen.

Per a veure això, utilitzarem el següent teorema:

Teorema 2.12. *(Whitney, 1931)*

Tota triangulació sense 1, 2 o 3 cicles llevat de les cares té un cicle Hamiltonià.

Que també podem formular, en un llenguatge més familiar, com:

Teorema 2.13. *(Whitney, 1931) Tota triangulació sense llaços, arestes dobles o triangles de tall té un cicle Hamiltonià.*

A més, això implica que no hi ha cap vèrtex de grau inferior a 3. La demostració d'aquest teorema es fa a partir del lema següent.

Lema 2.14. *Sigui G una triangulació com les considerades al teorema, és a dir, sense llaços, arestes dobles o triangles de tall. Sigui R un camí tancat dins de G, juntament a tots els vèrtexs i arestes a una banda d'R, la qual anomenem l'interior (canviant l'embedding de G al pla, podem decidir quin costat és l'interior). Siguin A i B dos vèrtexs diferents d'R, que divideixin R en dues parts, anomenades R_1 i R_2, incloent en ambdues tant A com B. Suposem que se satisfà que:*

1. *Cap parell de vèrtexs d'R_1 són adjacents dins R, és a dir, mitjançant una aresta que forma part d'R*

2. *O bé cap parell de vèrtexs d'R_2 són adjacents dins R, o bé existeix un vèrtex C d'R_2, diferent d'A i B, i tal que divideix R_2 en R_2 i R_4, de manera que ni dos vèrtexs d'R_3 ni dos vèrtexs d'R_4 són adjacents dins R.*

Llavors, podem construir un camí de A a B usant només arestes d'R i que passa a través de cada vèrtex d'R un cop, i només un.

Bàsicament, si podem dividir el circuit en dues o tres parts tals que els vèrtexs d'aquestes parts no siguin adjacents dins R, llavors podem fer un camí Hamiltonià dins R que uneixi dos dels extrems d'aquestes subdivisions. La demostració del lema és llarga i amb una gran casuística, motiu pel qual no la reproduirem al treball, tot i que es pot trobar a [8]. Tot i així, el lema és el punt principal on s'usen les hipòtesis respecte als 1, 2 i 3 cicles. Usant aquest lema, la demostració del teorema és immediata.

Demostració. (del Teorema de Whitney)

Sigui G una triangulació sense llaços, arestes dobles o triangles separadors. Llavors, prenem un dels triangles de la triangulació, de vèrtexs A, B i C com al cicle R, usant tot el graf G com a interior. Podem dividir el circuit en R_1, format pel camí d'A a B passant per C, i com a camí R_2 només l'aresta d'A a B. Pel lema, existeix un camí d'A a B que visita un cop, i només un, tots els vèrtexs de G. Aquest camí no pot passar per l'aresta que uneix A i B, i per tant podem tancar el cicle unint aquests dos vèrtexs, obtenint un cicle Hamiltonià.

□

Usant aquest teorema, podem trobar com volíem un cicle Hamiltonià en el graf dual. Això, sobre el graf original, ens dóna un tall que divideix el graf en dos arbres binaris. Cal triar, però, una de les arestes del tall, per tal que esdevingui l'arrel dels arbres. D'altra banda, el teorema ens assegura l'existència dun cicle Hamiltonià, però no la unicitat.

Aquests dos fets impliquen que, donat un graf, els dos arbres binaris que trobarem no són únics, però podem assegurar que es poden obtenir. Existeixen millores a aquest teorema, reduint les hipòtesis, o modificant-les. De totes maneres, aquest resultat és suficient, com veurem tot seguit.

2.6 La condició de Whitney

Acabem de veure el teorema de Whitney, que ens permet trobar el tall que volíem sobre un mapa cúbic. El problema eren les hipòtesis del teorema. Per a grafs, aquestes hipòtesis deien, donat un graf G:

- Cal que G sigui una triangulació.
- G no pot tenir llaços.
- G no pot tenir arestes dobles
- G no pot tenir triangles de tall.

O, equivalentment, G no pot tenir 1, 2 o 3 cicles que no siguin els triangles que formen les facetes.

Ara, volem traduir aquesta propietat a mapes, és a dir a la seva propietat dual. El cas dels 1-cicles és senzill, doncs un 1-cicle considerat en regions és un istme, com els hem definit a la primera secció, i per tant ja els hem exclòs dels mapes.

D'altra banda, el cas d'una aresta doble considerat en regions, són dues regions que comparteixen frontera en més d'un lloc. Això, en particular, implica que separen el graf en dues parts, una a l'interior i una a l'exterior. El mateix passa amb els triangles de tall, que per definició, són un conjunt de tres vèrtexs (en mapes, tres regions) tals que separen el graf en dues part, una a l'interior i una a l'exterior.

Això es pot resumir, per a mapes, com la següent propietat:

Definició 2.15. Diem que un mapa cúbic satisfà la *Condició de Whitney* si qualsevol conjunt de 1, 2 o 3 regions, la unió de les quals formi una regió connexa, forma també una regió simplement connexa.

Observació. Per al cas d'una sola regió, la Condició de Whitney implica que cap regió desconnecti el mapa. Però si aquest és el cas, el graf que dóna el mapa no és connex, i aquest és un requisit de la definició de mapa.

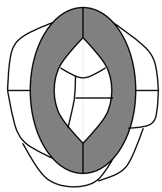
Per al cas de dues o tres regions, però, cap de les condicions anteriors eliminen aquest cas. Per tant, hem de veure que podem, mitjançant alguna modificació, arribar a la situació de no tenir cap d'aquestes dues situacions.

Proposició 2.16. *Són equivalents:*

1. *Tot mapa cúbic és 4-acolorible.*

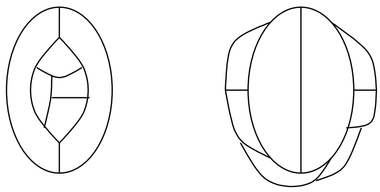
2. *Tot mapa que satisfaci la Condició de Whitney és 4-acolorible.*

Demostració. Clarament, es té que (1) $\Rightarrow$ (2). Per a veure la implicació contraria, sigui G un mapa que no satisfaci la condició W, per tenir una parella de regions que separin el graf, com a la imatge. Observem el cas de les dues regions resaltades.



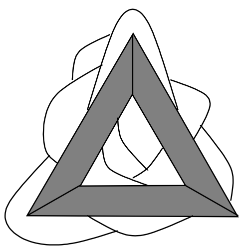
Cal observar que, encara que a dins o a fora de la regió formada per aquestes dues cares, només hi hagués una regió (per exemple, l'externa), el problema seria el mateix, i el raonament funcionaria d'igual manera.

Per a resoldre aquesta situació, a partir del mapa G, obtindrem dos mapes diferents. Ambdós contindran les regions que no satisfan la Condició de Whitney, i un d'ells conservarà el subgraf de l'interior, i l'altre el subgraf de l'exterior, com es veu a la imatge.

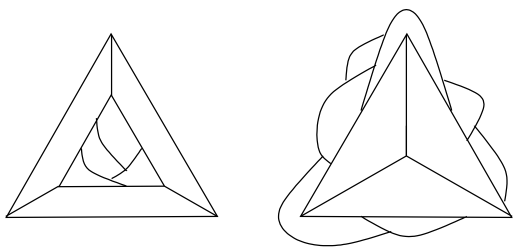


Ara, aquestes dues regions ja no són un problema de cara a satisfer la condició de Whitney. Si els nous mapes la satisfan, els podem acolorir. Si algun d'ells no la satisfà, procedim iterativament, repetint l'argument. És clar que si obtenim una 4-coloració de cada submapa, permutant els colors podem aconseguir que tinguin els mateixos colors sobre les cares que afectaven la condició de Whitney originalment, i identificant-les, obtenir una 4-coloració de tot G.

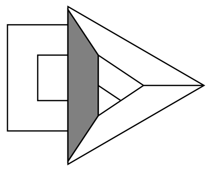
Si les cares que trenquen la condició de Whitney són tres, el mateix argument serveix. Novament, ens fixem en les regions resaltades.



Novament podem dividir el mapa en dos submapes, l'interior i l'exterior, acolorir-los per separat, i com que les tres cares hauran de tenir colors diferents, permutant els colors podem fer que tinguin els mateixos colors en ambdós submapes, i després identificar les regions per a obtenir el mapa original.



L'única cosa que queda per veure, doncs, és que sempre podem fer aquest procés. Però és clar que si un mapa no satisfà la condició de Whitney, ho fa només en un nombre finit de regions. A més, cada cop que es repeteix aquest procés, el nombre de regions disminueix, per a cada submapa, com a mínim en un. D'altra banda, és clar que el procés, quan afecta a un conjunt de regions, no afecta les altres regions, encara que aquestes estiguin en contacte. És a dir, si una regió provoca més d'un incompliment de la condició de Whitney, com en la figura següent, el procés descrit no ho canviarà, i per tant s'haurà d'iterar més d'un cop al voltant d'aquella regió.



□

2.7 Resum de l'equivalència

Finalment, veurem un resum dels resultats vistos en aquesta secció, per a mostrar-los de manera més esquemàtica i senzilla.

El primer que hem vist, és que podem treballar amb grafs cúbics, és a dir que el Teorema dels Quatre Colors és equivalent al Teorema dels Quatre Colors si ens centrem ens els grafs cúbics.

Teorema (Teorema 2.2). *Són equivalents:*

1. *Tot mapa és 4-acolorible.*
2. *Tot mapa cúbic és 4-acolorible.*

Tot seguit, hem vist que ens podem limitar a aquells mapes cúbics que satisfacin el què hem anomenat Condició de Whitney. Recordem primer la condició de Whitney.

Definició (Definició 2.15).

Diem que un mapa cúbic satisfà la *Condició de Whitney* si qualsevol conjunt d'1, 2 o 3 regions, la unió de les quals formi una regió connexa, forma també una regió simplement connexa.

I el teorema conseqüent.

Proposició (Proposició 2.16). *Són equivalents:*

1. *Tot mapa cúbic és 4-acolorible.*
2. *Tot mapa que satisfaci la Condició de Whitney és 4-acolorible.*

Per tant, fins ara hem reduït els mapes que ens interessen als mapes cúbics que satisfan la condició de Whitney. Amb aquest tipus de grafs, hem vist el teorema de Tait, que ens permet passar d'acolorir les regions del mapa, a acolorir les fronteres, de manera que dues seccions de frontera que comparteixen un vèrtex no tenen el mateix color. Cal dir que el Teorema de Tait l'hem vist abans de parlar de la condició de Whitney, ja que era la formulació original, però la demostració és anàloga per a mapes que satisfan aquesta condició.

Teorema (Teorema 2.7)**.** *El teorema dels quatre colors és equivalent a l'afirmació que tot mapa cúbic és 3-aresta-acolorible.*

Ja hem reduït el problema de la 4-coloració de mapes, a la 3-aresta-coloració de mapes cúbics que satisfan la condició de Whitney. Ara, voldríem trobar un tall d'aquests mapes que ens donés dos arbres binaris. Com ja hem vist, aquest tall hauria de ser un cicle Hamiltonià en el graf dual del mapa. Però per dualitat, el mapa cúbic esdevé una triangulació, i la condició de Whitney passa a exigir que no hi hagi triangles de tall, ni arestes dobles. Així, podem usar el Teorema de Whitney per a assegurar que hi ha un cicle Hamiltonià.

Teorema (Teorema 2.13)**.** *Tota triangulació sense llaços, arestes dobles o triangles de tall té un cicle Hamiltonià.*

L'existència d'aquest cicle Hamiltonià ens permet assegurar que hi ha un tall que transforma el mapa cúbic en dos arbres binaris. Cal dir que aquesta construcció ens permet assegurar que per a qualsevol mapa podem construir un o més parells d'arbres binaris que ens permetin acolorir el mapa. Però aquesta construcció no és única, ja que depèn del camí Hamiltionià i de la tria de l'arrel.

Igualment, per a qualsevol parell d'arbres binaris podem obtenir un mapa cúbic, però no podem obtenir tots els mapes, ja que la construcció ens donaria un cicle Hamiltonià i no tots els grafs en tenen un.

Això implica que hi ha una equivalència entre els resultats, però no una bijecció entre ambdós conjunts.

3 El Grup de Thompson

En aquesta secció estudiarem el grup de Thompson. Com ja hem vist amb anterioritat, una de les possibles representacions dels elements d'aquest grup és mitjançant parells d'arbres binaris. Però aquesta no és la que s'usa per a definir-lo, i per tant primer en veurem la definició. També veurem, més endavant, les dues presentacions algebraiques més utilitzades.

De fet, hi ha tres grups de Thompson, tots tres infinits. Ens centrarem en el grup F.

3.1 Definició i primeres propietats

El grup F és el grup format per certs homemorfismes lineals a trossos, de l'interval $[0,1]$ en ell mateix. Entenem que lineals a trossos implica que el conjunt de punts on no són diferenciables és discret, i en particular finit.

Vegem-ne la definició formal:

Definició 3.1. Definim el grup de Thompson F com el grup format pels homeomorfismes de l'interval $[0,1]$ en ell mateix tals que satisfan les següents propietats:

1. Són lineals a trossos i preserven la orientació.
2. Allà on són lineals, el pendent és una potència de 2.
3. Els punts de canvi són diàdics, és a dir, pertanyen al conjunt $([0,1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])^2$

L'operació de grup és la composició.

Tot seguit, vegem algunes observacions sobre aquesta definició, i alguns fets senzills sobre el grup F.

Observació.
- Que preservin la orientació vol dir, en particular, que $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$.
- Lineals a trossos implica que tenen un nombre finit de punts de canvi, on no són diferenciables.
- Això implica que podem descriure un element d'F com la llista dels seus punts de canvi.

  $$[(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)]$$

  Considerant que el primer punt és $(0,0)$ i el darrer és $(1,1)$, tenim que l'interval (a_i, a_{i+1}) s'aplica linealment a l'interval (b_i, b_{i+1})
- La condició (3) implica que els a_i i els b_i són diàdics, és a dir, de la forma $\frac{c}{2^m}$, amb $c, m \in \mathbb{Z}$.

- La condició (2) implica que per a cada interval, tenim que

$$\frac{b_{i+1} - b_i}{a_{i+1} - a_i}$$

  és una potència de 2.

- L'operació de composició no és commutativa.

- L'element neutre és la identitat, i l'element invers és l'invers en el sentit de funcions.

- L'element invers es pot representar invertint les coordenades dels punts de canvi, és a dir:

$$[(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)]$$

Podem observar que és possible que un element del grup F sigui la identitat en un interval, és a dir, que hi hagi segments de punts fixos. Això motiva la següent definició, que serà útil més endavant.

Definició 3.2. Per a $f \in F$, definim el seu *suport* com l'adherència del conjunt de punts $t \in [0, 1]$ tals que $f(t) \neq 1$

Això ens permet demostrar la següent propietat:

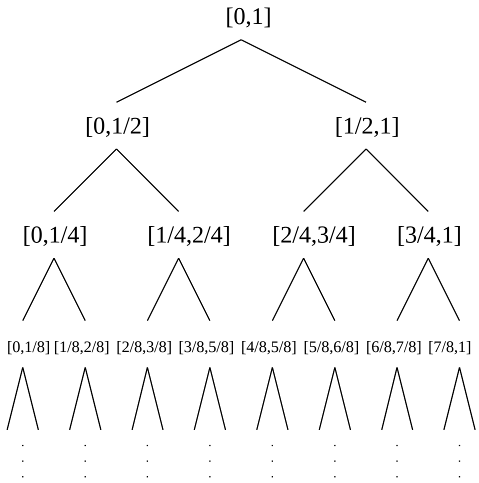
Teorema 3.3. *F és lliure de torsió.*

Demostració. Prenem $f \in F$, diferent de la identitat. Sigui P el menor punt (en les abcisses) del seu suport. P pot ser o bé el $(0, 0)$ o bé el primer punt de canvi, del tipus (a, a), per a algun a diàdic. El pendent d'f a la dreta de P és 2^k per a algun $k \neq 0$. Llavors l'element f^n té pendent 2^{nk} a la dreta de P, ja que P és fix. Per tant, f^n no serà mai la identitat. □

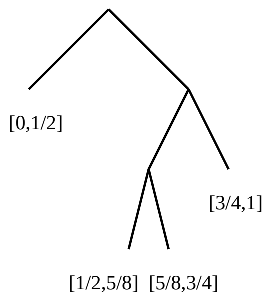
3.2 Arbres binaris

Malgrat la definició inicial del grup sigui mitjançant homeomorfismes lineals a trossos, la realització més visual, i de fet la que ens serà més útil per a aquest treball, és mitjançant parells d'arbres binaris. Ja ho hem comentat amb anterioritat, i precisament hem vist com passar d'un mapa a un parell d'arbres binaris. Tot seguit entendrem com un parell d'arbres com aquest representen un element del grup F.

Per a entendre això, cal veure que un arbre binari codifica una partició de l'interval $[0, 1]$. Observem l'arbre de la imatge, en el qual s'hi ha marcat els intervals representats per cada vèrtex. Per a remarcar la longitud dels intervals, no s'han reduït les fraccions.



Aquest arbre es pot estendre fins a qualsevol profunditat. A profunditat n, cada vèrtex representa un interval de longitud $\frac{1}{2^n}$. Per tant, és clar que qualsevol interval de longitud $\frac{1}{2^n}$, amb $n \in \mathbb{N}$ apareix en algun moment en l'arbre binari si el considerem infinit. Per tant, és clar que qualsevol arbre binari codifica una subdivisió de l'interval, i qualsevol subdivisió diàdica de l'interval es pot representar amb un arbre binari. Per exemple, aquest arbre:

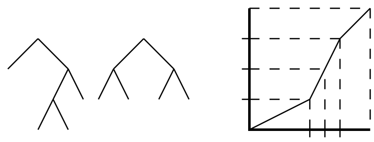


codifica la partició:

$$[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$$

de l'interval $[0, 1]$ en quatre intervals. Per tant sabem que un arbre binari representa una partició de l'interval. Llavors, dos arbres binaris representen dues particions diferents, i amb aquestes dues particions podem representar un element del grup F. Per a això, cal que els dos arbres binaris tinguin el mateix nombre de fulles. En aquest cas, les respectives particions tenen el mateix nombre d'intervals, i per tant podem obtenir un element d'F aplicant linealment cada interval de la primera partició a l'interval corresponent de la segona. Un exemple clarificarà aquest procés.

Exemple. Aquesta gràfica i aquest parell d'arbres:



representen l'element donat per la següent llista de punts de canvi.

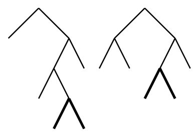
$$[(\frac{1}{2},\frac{1}{4}),(\frac{5}{8},\frac{1}{2}),(\frac{3}{4},\frac{3}{4})]$$

Però es pot veure a la gràfica que el punt $(\frac{5}{8},\frac{1}{2})$ no és realment un punt de canvi. És a dir, aquest element pot ser representat com a:

$$[(\frac{1}{4},\frac{1}{2}),(\frac{3}{4},\frac{3}{4})]$$

Això implica que en alguns casos alguna partició de l'interval pot quedar oculta al fusionar-se dos intervals consecutius, si aquests tenen el mateix pendent.

Una altra propietat dels arbres binaris és que si ambdós tenen un caret exposat de manera que les fulles es corresponguin, aquest es pot eliminar. El motiu d'això és que aquest caret representa dividir per la meitat un dels subintervals, el corresponent al vèrtex del caret, però tant en l'interval de sortida com el d'arribada. Això no canvia en res la funció i per tant s'ha de correspondre al mateix element d'F. Per exemple, malgrat el caret ressaltat, aquest parell d'arbres representa el mateix element que el parell arbres de l'exemple anterior.



De la mateixa manera que podem retirar un caret com aquest, que anomenarem *reduïble*, en podem afegir de nous si afegim un caret a cada arbre, a les respectives fulles corresponents. Això crea una relació d'equivalència entre els parells d'arbres binaris, i per a un mateix element d'F hi ha infinits parells d'arbres binaris que el representen. Per a veure això, però, cal veure que per a tot element hi ha com a mínim un arbre parell d'arbres que el representa, i aquest serà un representant de la classe corresponent a aquest element.

Proposició 3.4. *Donat un element d'F, hi ha un parell d'arbres que el representa.*

Demostració. Sigui $f \in F$, i sigui $[(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k)]$ la seva llista de punts de canvi. Sigui n un enter tal que tots els a_i, per $i = 1..k$, es poden escriure com una fracció amb denominador 2^n. De la mateixa manera, sigui l tal que això se satisfaci per als b_i.

Construïm un arbre equilibrat, de profunditat n, que representa la subdivisió en 2^n subintervals de l'interval de sortida. Fem el mateix amb un arbre de profunditat m per a l'interval d'arribada. El nombre de fulles en ambdós intervals pot ser diferent, de manera que potser hem de subdividir algun dels intervals, afegint carets a alguna de les fulles.

Considerem f restringida a l'interval $[a_i, a_{i+1}]$. Sabem que la longitud d'aquest interval és de la forma $l_i/2^n$. Si en aquest interval la funció f té pendent 2^{r_i}, se satisfà que la longitud de l'interval $[b_i, b_{i+1}]$ és $l_i 2^{r_i}$. A més, per la manera com hem subdividit l'interval d'arribada, també sabem que aquesta longitud és $l'_i/2^m$.

D'aquestes dues afirmacions en podem concloure que $l'_i = l_i 2^{s_i}$ per a algun $s_i \in \mathbb{Z}$. Tot això vol dir que les l_i fulles corresponents a l'i-èssim subinterval de sortida es corresponen amb l'_i fulles corresponents a l'i-èssim subinterval d'arribada, i la relació en nombre entre aquestes fulles és una potència de 2. Per tant, podem afegir arbres equilibrats a les fulles d'un dels dos arbres per a subdividir-les fins que el nombre de fulles a l'i-èssim interval es correspongui.

- Si $s_i > 0$, llavors l'i-èssim interval de sortida es correspon a l_i fulles, mentre l'interval d'arribada es correspon a $l_i 2^{s_i}$ fulles. És per això que hem de subdividir encara més l'interval de sortida, subdividint cada fulla corresponent a l'interval en un arbre de profunditat s_i, de manera que ambdós subintervals es correspondran al mateix nombre de fulles.

- Si $s_i < 0$, fem el mateix procediment, llevat que en aquest cas l'interval a subdividir és l'interval d'arribada. Novament, ambdós subintervals correspondran al mateix nombre de fulles.

- Finalment, si $s_i = 0$ llavors $l_i = l'_i$ i no cal fer cap subdivisió.

Ara, només resta repetir aquest procediment per a cada interval, i eliminar els carets reduïbles.

□

És clar que per a tot element d'f hi ha un parell d'arbres binaris reduït que el representa. Només cal agafar un parell qualsevol que el representi, i reduir-lo. Veure que aquest parell és únic, però, és més complicat i no ho farem fins més endavant.

D'altra banda, donarem un ordre als carets. Donat un arbre binari, considerarem els carets ordenats en inordre. És a dir, per a un vèrtex concret, el fill esquerre i tots els seus descendents (recursivament) són anteriors, i el fill dret i tots els seus descendents són posteriors.

Observem que cada vèrtex de l'arbre es correspon amb un subinterval de longitud potència de 2. Si identifiquéssim cada un d'aquests intervals amb el seu punt mig, i ordenèssim els vèrtexs conforme apareixen a l'interval $[0,1]$, aquest seria l'ordre que obtindríem, doncs tots els descendents a l'esquerra són subdivisions de la meitat esquerra de l'interval, i els descendents a la dreta són subdisvisions de la meitat dreta.

3.2.1 L'operació, entesa en arbres binaris

Ara ja hem vist com un parell d'arbres binaris representa un element del grup F. Ara ens falta entendre l'operació de grup en aquest sentit. Ja hem entès que cada arbre binari representa una subdivisió de l'interval. Primer de tot, suposem que tinguessim dos parells d'elements a operar, i tals que l'arbre central fos el mateix. Si per (T,T') representem un parell d'arbres, podríem escriure aquests dos elements com (S,T) i (T,U). En aquest cas, és clar que com que el primer element envia la subdivisió donada per S a la donada per T, i el segon envia la subdisvisió donada per T a la donada per U, llavors la composició enviarà l'interval subdividit segons S a l'interval subdividit segons U. Per tant, tenim que $(S,T)(T,U)=(S,U)$.

Ara, volem multiplicar dos elements tals que l'arbre central no sigui el mateix, diguem-ne (T,T') i (S,S'). Recordem que aquests parells d'arbres són només elements d'una classe que representa el corresponent element del grup F. El que farem serà cercar altres representants de la classe de manera que comparteixin l'arbre central. Necessitarem el següent lema.

Lema 3.5. *Dues subdivisions binàries de l'interval* $[0,1]$ *sempre tenen una subdivisió comuna. Equivalentment, donats dos arbres binaris, hi ha un únic arbre, al que anomenarem mínim comú múltiple, tal que és un arbre minimal que els conté amdós.*

Demostració. Donats dos arbres, els sobreimposem, identificant-los allà on coincideixin. L'arbre resultant és clarament el mínim comú múltiple, doncs els conté ambdós per construcció, i tots els seus carets apareixen a un dels dos arbres, i per tant de ser retirats, deixarien de contenir-lo. □

Usant el lema, si volem multiplicar (T,T') i (S,S'), hem de buscar R, el mínim comú múltiple d'T' i S. Tot seguit, busquem un representant de la classe de cada element, que siguin de la forma (T'',R) i (R,S''). El resultat del producte és, doncs, (T'',S''). Observem que si R conté T', per a obtenir un representant adequat només cal afegir els carets necessaris a T' i després afegir els mateixos carets a les fulles corresponent d'T.

A més, els arguments expressats fins ara també mostren que l'invers de l'element representat per (T,T') és l'element representat per (T',T).

3.3 La presentació infinita

A part de les dues realitzacions vistes fins ara, com a homeomorfismes i com a parells d'arbres binaris, podem estudiar el grup algebraicament, a partir de les seves presentacions. En aquest treball veurem dues presentacions que se solen utilitzar del grup F. La primera serà la presentació infinita, que és útil per la seva simetria i senzillesa.

Teorema 3.6.

$$\langle x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots | x_i^{-1} x_j x_i = x_{j+1},\ for\ i < j \rangle$$

és una presentació per al grup de Thompson F.

Aquesta secció es dedicarà bàsicament a la demostració d'aquest fet, tot i que les construccions i definicions que fem al llarg d'aquest procés ens seran útils més endavant.

El primer que cal fer és definir un homomorfisme entre el grup donat per aquesta presentació, que anomenarem G i el grup F. Després veurem que aquest homomorfisme és injectiu i exhaustiu.

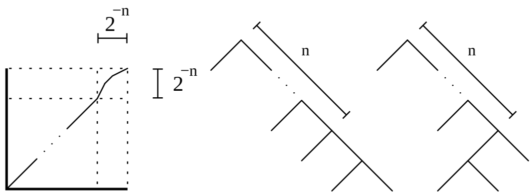
Definició 3.7. Existeix un homomorfisme

$$\Theta : G \longrightarrow F$$

definit per les imatges dels generadors. Definim la imatge del generador x_n com l'element f_n definit per la llista de punts de canvi següent:

$$\left[\left(1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n}\right), \left(1 - \frac{3}{2^{n+2}}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right), \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right]$$

Vegem, en les següents imatges, la representació de l'element f_n tant com a aplicació com com a parell d'arbres.



Com podem veure, es tracta d'un parell d'arbres format per n carets consecutius cap a la dreta, i dos carets addicionals a la darrera fulla, que es troben canviats. Això, en particular, fa que la gràfica de la funció sigui la mateixa per a tots els f_i, llevat de la posició. Cada cop la diagonal és més gran, i l'única part dins del suport és el subinterval $[1 - 2^{-n}, 1]$

És senzill veure que les relacions se satisfan, especialment per a parells d'arbres. Així, ja hem vist que tenim un morfisme de G en F. Ara falta veure que és un isomorfisme. Això, però, serà dificultós i requerirà algunes construccions prèvies.

3.3.1 Paraules Positives

Definició 3.8. Una *paraula positiva* al grup G és una paraula en els generadors x_i, per a $i \geq 0$, sense la intervenció de cap invers.

Amb aquesta construcció, considerem la presentació de G reescrita de la següent manera:

$$\langle x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots | x_j x_i = x_i x_{j+1}, \text{ for } i < j \rangle$$

Aquesta presentació defineix el *monoide de les paraules positives,* que anomenarem P. És clar que P és un submonoide de G. De la mateixa manera, és clar que $\Theta(P)$ és un submonoide d'F.

A més, si observem les relacions de P, veurem que si en una paraula positiva tenim un generador d'índex superior immediatament abans d'un d'índex inferior, els podem permutar, augmentant en 1 l'índex superior. Això ens permet donar el següent resultat.

Teorema 3.9. *Tot element de P es pot escriure com una paraula en els generadors, de la forma*

$$x_o^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

per a algun n i per a alguns enters no negatius a_i.

Demostració. Observem que alguns dels a_i poden ser 0. Ara, si tenim una paraula positiva en els generadors, el procés descrit anteriorment ens permet passar totes les aparicions del generador x_0 a l'esquerra de tot. Tot seguit, repetim el procés per a x_1, i així successivament, quan calgui. □

El mateix resultat es pot aplicar al monoide $\Theta(P)$, ja que hi valen les mateixes relacions. Voldríem conèixer la forma que tenen els parells d'arbres corresponents als elements de $\Theta(P)$.

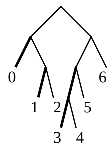
Definició 3.10. Una *espina* és un arbre binari on tots els carets pengen del fill dret de l'anterior, llevat per suposat de l'arrel.

Per exemple, com ja hem vist abans, els arbres d'arribada corresponents als generadors f_i són espines.

Definició 3.11. Donat un arbre binari, es numeren les fulles de l'esquerra a la dreta, partint de zero. Per a la i-èssima fulla, es compten els carets ascendents com a aresta esquerra que es poden seguir amunt des de la fulla, excloent si s'hi arribés, els carets de l'espina. Aquest nombre s'anomena *exponent de la i-èssima fulla* i el denotem a_i.

Vegem una imatge per a entedre la definició.

En aquesta imatge tenim exponents $a_0 = a_1 = 1$, $a_3 = 2$ i la resta 0.



El següent teorema ens dóna un resultat interessant alhora que constructiu. Ens assegura que els a_i definits al Teorema 3.9 són els exponents de les fulles definits aquí.

Teorema 3.12. *Un element de* $\Theta(P)$ *donat per l'expressió*

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \cdots f_n^{a_n}$$

es pot representar per un parell d'arbres (T, T') *on* T *té exponents a les fulles* $a_0, a_1, \ldots, a_n$*, i* T' *és una espina.*

Demostració. Ho farem per inducció. Observem que els diagrames per als generadors f_n satisfan el teorema, doncs el diagrama d'f_n té $a_n = 1$ i la resta 0. Per al pas d'inducció, si multipliquem un element tal que l'arbre d'arribada és una espina per un generador, l'única cosa que farem serà afegir un caret a la i-èssima fulla, i en tot cas allargar l'espina si s'escau. Per tant, podem construir qualsevol paraula de $\Theta(P)$ mitjançant aquest procés. □

Aquesta construcció ens permet veure l'exhaustivitat de $\Theta(P)$.

Teorema 3.13. *L'aplicació* Θ *és exhaustiva.*

Demostració. Un element $f \in F$ es pot representar per un parell d'arbres (T, T'). Observem que aquest parell es pot dividir en un producte de dos elements. Si T i T' tenen n carets, considerem R l'espina amb n carets. Llavors $(T, T') = (T, R)(R, T')$. A més, pel teorema anterior, el primer és positiu, i el segon és l'invers d'un positiu. Usant els exponents de les fulles d'aquests dos arbres, observem que $f = pq^-1$, on p i q són positius, de la forma:

$$p = f_0^{a_0} f_1^{a_1} \cdots f_n^{a_n} \qquad q = f_0^{b_0} f_1^{b_1} \cdots f_m^{b_m}$$

i per tant veiem que f és la imatge per Θ de l'element

$$x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} x_m^{-b_m} \cdots x_1^{-b_1} x_0^{-b_0}$$

□

3.3.2 Forma normal

Acabem de veure una construcció que ens permet escriure qualsevol element d'F com una paraula en els f_n. Tot i així, el quà intentàvem demostrar era que l'aplicació Θ era exhaustiva. Ara, podem aprofitar el mateix procés per a enunciar el següent resultat:

Proposició 3.14. *Tot element d'F es pot escriure de la forma:*

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \cdots f_n^{a_n} f_m^{-b_m} \cdots f_1^{-b_1} f_0^{-b_0}$$

La demostració ja ha quedat clara en la construcció feta per a provar l'exhaustivitat de Θ. Veiem que aquesta forma, però, no és necessàriament única. La mateixa relació $f_o f_2 f_0^{-1} = f_1$ és un exemple de dues expresions, ambdues d'aquesta forma, que representen el mateix element.

En particular, podem veure que si en una paraula d'aquesta forma apareixen alhora f_i i f_i^{-1}, però no apareixen f_{i+1} ni f_{i+1}^{-1}, llavors podem usar les relacions de la presentació (que ja hem vist que s'apliquen a F) per a reduir la paraula, ja que tots els generadors entre f_i i f_i^{-1} tindran com a mínim índex $i+2$. És a dir, si a_i i b_i són diferents de 0 i $a_{i+1} = bi + 1 = 0$ podem reduir l'expressió usant les relacions. Aquest procés és, de fet, l'equivalent a reduir un caret dels parells d'arbres.

Teorema 3.15. *Tot element d'F admet una expressió de la forma*

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \cdots f_n^{a_n} f_m^{-b_m} \cdots f_1^{-b_1} f_0^{-b_0}$$

on, per a tot i, si a_i i b_i són al mateix temps no nul·les, llavors o bé a_{i+1} o bé b_{i+1} (o ambdues) són també diferents de zero. A més, aquesta expressió és única i és la més curta

Definició 3.16. Donat un element $f \in F$, anomenem *forma normal d'f* a l'expressió descrita al teorema 3.15.

Demostració. (del Teorema 3.15)

Ja n'hem vist l'existència. Falta veure la unicitat. Suposem que hi ha elements amb més d'una forma normal. Prenem dues formes normals del mateix element, tals que tinguin la mínima longitud (entesa com a la suma de les dues longituds) entre tots els parells de paraules representant el mateix element, per a tots els elements. Siguin

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \cdots f_n^{a_n} f_m^{-b_m} \cdots f_1^{-b_1} f_0^{-b_0}$$

i

$$f_0^{c_0} f_1^{c_1} \cdots f_p^{c_p} f_q^{-d_q} \cdots f_1^{-d_1} f_0^{-d_0}$$

aquestes dues formes normals. Sigui k el menor índex que apareix en alguna de les dues paraules. És a dir, tenim que $a_i = b_i = c_i = d_i = 0$ per a $i < k$ i com a mínim un dels a_k, b_k, c_k, d_k, és diferent de zero. Primer veurem que l'exponent total per a f_k és el mateix. És a dir, que $a_k - b_k = c_k - d_k$. Això és clar si ens fixem en la gràfica de l'element entés com a funció. Per la forma dels f_n, el suport d'aquest element es troba contingut a $[1 - \frac{1}{2^k}, 1]$, i l'exponent total d'f_k en aquest element és $\log_2(m)$, on m és el pendent a la dreta del punt $(1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^k})$. Això serà clar si ens fixem en els generadors f_i, per a $i > k$, doncs els seus suports seran sempre més petits, i podrem trobar un entorn del punt $(1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^k})$ que no és afectat per aquests.

Per tant, com que ambdues expressions representen el mateix element, i tenen per tant la mateixa gràfica, han de tenir el mateix exponent per a f_k.

Tot seguit, veurem que gràcies a les condicions de minimalitat, es té $a_k - b_k = c_k - d_k = 0$. Si l'exponent total és positiu, llavors tant a_k com c_k són positius, i podríem eliminar un factor f_k d'ambdós paraules, contradient la minimalitat. Si fos negatiu, el mateix passaria amb f_k^{-1}. Per tant, l'exponent total ha de ser zero.

Finalment, aquest desenvolupament ens permet assegurar que un dels dos no té f_k. Això és així perquè si ambdós en tinguéssin els podríem reduir i arribar novament a dues paraules que representen el mateix element, però més curtes. Però si no és així, les dues expressions són de la forma $f_k z f_k^{-1}$ i w, on a més w té només índexs estrictament més grans que k.

Però si movem els dos generadors f_k obtenim $z = f_k^{-1} w f_k$. Ara, com tots els índexs de w són més grans que k, podem utilitzar les relacions per a arribar a $z = \bar{w}$, on $\bar{w}$ és w amb tots els índexs augmentats en un. Ara, aquestes dues paraules són més curtes que les originals. Per a no contradir la minimalitat, han de ser iguals terme a terme. Però llavors z té només índexs a partir d'$i + 2$, contradient el fet que $f_k z f_k^{-1}$ era una forma normal. Per tant, la unicitat resta provada.

Ara, per a veure que la forma normal és efectivament la més curta, basta veure que donada una paraula qualsevol en els f_i, el procés realitzat només en redueix la mida, ja que o bé s'usen els generadors, que no modifiquen la mida, o bé s'eliminen inversos adjacents. Per tant, donada una paraula, el procés fins a obtenir-ne la forma normal en redueix la mida a cada pas. Si tinguéssim una paraula més curta per a representar un element, en podríem trobar la forma normal, que seria encara més curta, fet que contradiria la unicitat.

$\square$

Hem provat la unicitat de la forma normal. Això ens permet demostrar la injectivitat de Θ.

Proposició 3.17. *L'aplicació Θ és injectiva.*

Demostració. Prenem dues paraules en els generadors x_i tals que tenen la mateixa imatge a F. Aquesta imatge té una única forma normal, que es pot trobar a F usant les relacions. Usant les mateixes relacions, però a G, podem arribar a la mateixa paraula de G. Però ara podem passar d'una paraula a l'altre usant els relators. Per tant, aquestes dues paraules representen el mateix element. □

Això acaba, de fet, la demostració del Teorema 3.6. A nivell de notació, a partir d'ara anomenarem x_i als generadors d'F.

Teorema 3.18. *Cada element de F admet un únic parell d'arbres reduït.*

Demostració. Ja sabem com a partir d'un parell d'arbres, podem obtenir una paraula que representi aquell element, usant els exponents de les fulles. A més, observem que si hi ha un caret exposat, per exemple a les fulles i i $i+1$, això implica que a_i i b_i són diferents de zero, però al mateix temps que $a_{i+1} = b_{i+1} = 0$, ja que si no ho fossin, es correspondrien amb carets penjant del fill dret del caret que havíem dit que era exposat. Per tant, al reduir el parell d'arbres, estem reduint en 1 tant a_i com b_i. Això mostra que la reducció dels arbres i la reducció amb els relators cap a la forma normal són equivalents.

L'únic altre cas és si el caret exposat es troba a la dreta de l'arbre en ambdós arbres. En aquest cas, la seva reducció no afecta a la paraula. □

Així, ja hem vist que les interpretacions del grup F com a funcions, parells d'arbres i amb la presentació algebraica infinita són equivalents i isomorfs. Això ens permet usar-los indistintament d'ara en endavant.

3.4 La presentació finita

La presentació infinita és visual i senzilla. Tot i així, en alguns casos ens pot ser més útil comptar amb una presentació finita. Tot seguit veurem que el grup F no només és finitament generat, sinó també finitament presentat.

És clar, gràcies a les relacions $x_0^{-1} x_n x_0 = x_n + 1$, que només x_0 i x_1 són necessaris per a generar tot el grup, doncs qualsevol altre generador es pot obtenir a partir d'ells, com $x_n = x_0^{-(n-1)} x_1 x_0^{n-1}$. Ara vegem que també podem obtenir un nombre finit de relacions.

Teorema 3.19. *El grup de Thompson F admet la següent presentació:*

$$\langle a, b | [ab^{-1}, a^{-1}ba], [ab^-1, a^{-2}ba^2] \rangle$$

Recordem que $[x, y]$ representa el commutador d'x i y, és a dir, $[x, y] = [xyx^{-1}y^{-1}]$

Demostració. Si H és el grup donat per aquesta presentació, definim les aplicacions:

$$\Phi : F \to H \qquad \Psi : H \to F$$

que com veurem més endavant seran inverses l'una de l'altra.

Com sempre, definirem les aplicacions a partir de la imatge dels seus generadors. Després la prova es reduirà a comprovar que els relators d'ambdues presentacions se satisfan a les imatges. Definim Φ com

$$\Psi(a) = x_0 \qquad \Psi(b) = x_1$$

Ara, la primera relació d'H, escrita en les x_i:

$$\begin{aligned}\Psi([ab^{-1}, a^{-1}ba]) &= \Psi(ab^{-1}a^{-1}baba^{-1}a^{-1}b^{-1}a) \\ &= x_0x_1^{-1}x_0x_1x_0x_1x_0^{-1}x_0^{-1}x_1^{-1}x_0 \\ &= x_0x_1^{-1}x_2x_1x_0^{-1}x_2^{-1}\end{aligned}$$

Ara, conjugant per x_0

$$x_1^{-1}x_2x_1x_0^{-1}x_2^{-1}x_0 = x_1^{-1}x_2x_1x_3^{-1}$$

Que és un dels relators d'F. Igualment, per a l'altra relació.

$$\begin{aligned}\Psi([ab^{-1}, a^{-2}ba^2]) &= \Psi(ab^{-1}a^{-2}ba^2ba^{-1}a^{-2}b^{-1}a^2) \\ &= x_0x_1^{-1}x_0^{-2}x_1x_0^2x_1x_0^{-1}x_0^{-2}x_1^{-1}x_0^2\end{aligned}$$

Novament, conjugant per x_0

$$x_1^{-1}x_0^{-2}x_1x_0^2x_1x_0^{-3}x_1^{-1}x_0^3 = x_1 - 1x_3x_1x_4 - 1$$

Que és també un relator d'F.

Ara volem veure l'invers, és a dir, la mateixa propietat per a Φ. Definim, com és natural si volem que siguin inversos, $\Phi(x_0) = a$ i $\Phi(x_1) = b$. Com ja hem dit abans, per a satisfer els relators, obtenim $\Phi(x_n) = a^{-n+1}ba^{n-1}$ per a $n \geq 2$.

Ara, resten els relators de la forma $x_i^{-1}x_jx_i = x_{j+1}$, amb $0 \leq i < j$, quan reemplacem els x_n per les seves imatges definides anteriorment. És obvi per a $i = 0$. A més, per a $i \geq 2$ podem conjugar per una potència d'x_0, i a la imatge per una potència d'a, per a arribar a un relator amb $i = 1$.

Així, només ens cal veure els de la forma $x_1^{-1}x_jx_i = x_{j+1}$, amb $j \geq 2$. Ho farem per inducció sobre j. Els casos $j = 2$ i $j = 3$ són precisament els relators d'H. Però prenent $j \geq 4$, i reescrivint-ho així:

$$b^{-1}\Phi(x_j)b\Phi(x_{j+1}^{-1}) = b^{-1}a^{-1}\Phi(x_{j-1})aba^{-1}\Phi(x_j^{-1})a$$

Ara, si reescrivim aba^{-1} com $b^{-1}aba^{-1}a^{-1}b^{-1}a$, usant el primer relator, obtenim un element donat per la hipòtesi d'inducció o un dels relators bàsics.

□

Així, hem vist que el grup F és finitament presentat. En molts casos resulta més visual la presentació infinita, però per a algunes demostracions pot ser més útil saber que podem generar tot el grup amb només dos generadors.

4 Intents de demostració

Fins ara, hem estudiat el Teorema dels Quatre Colors, el Grup de Thompson, i el procés que ens permet passar de l'un fins a l'altre. Estem en situació, doncs, de buscar una demostració del teorema, resultats equivalents, o altres resultats sobre coloracions, usant les propietats i les idees vistes en el Grup de Thompson.

El que veurem en aquesta secció serà, per tant, un recull dels intents que s'han fet en el sentit d'intentar trobar una demostració del Teorema dels Quatre Colors a partir del grup F. A més, veurem en cada cas perquè un mètode concret no ha funcionat.

Aquest capítol es pot entendre com un estudi de les primeres opcions que aquesta aproximació ofereix de cara al teorema.

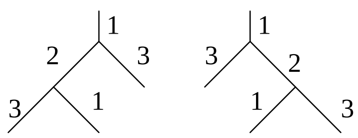
4.1 Objectiu. Coloracions del Grup de Thompson

La primera cosa que hem d'entendre és quin és el nostre objectiu. Hem construït, fins ara, un mètode per a passar d'un mapa a un element del grup. A més, hem demostrat que és equivalent 4-acolorir el mapa a 3-aresta-acolorir el graf que el dóna. Per tant, el que voldrem serà acolorir els elements del Grup de Thompson.

Definició 4.1. Sigui f un element d'F, i sigui (T, T') un parell d'arbres que el representi. A més, considerem els arbres amb una aresta addicional sortint de l'arrel. Una coloració d'f és una 3-coloració de les arestes dels dos arbres de manera que:

- Al voltant de cada vèrtex apareixen els tres colors.
- Els colors a les fulles es corresponen en ambdós arbres, fulla a fulla.
- El color a l'aresta sortint de l'arrel es correspon en ambdós arbres.

Per a entendre aquesta definició, veurem una coloració de l'element x_0, que com veurem més endavant és l'única.



Com podem observar, les fulles tenen la mateixa coloració, en ordre, a tots dos elements. A més, l'aresta sortint de les arrels també té el mateix color.

Les propietats que requerim de la coloració d'un element d'F són necessàries per a que, a l'unir les arestes tal om s'ha descrit anteriorment, obtinguem una 3-aresta-coloració del graf resultant.

Observem que, llevat d'haver de permutar els colors, sempre podem considerar que el color a l'aresta addicional de l'arrel és 1.

A més, hem definit la coloració de l'element com una coloració d'un parell d'arbres qualssevol de la classe que representa aquell element. A priori, podria ser que malgrat tenir acolorit un parell d'arbres no puguéssim acolorir tots els parells de la classe que representa aquest element. El següent resultat ens permet fer la definició anterior.

Proposició 4.2. *Sigui $f \in F$. Si tenim acolorit un parell d'arbres que representen F satisfent les condicions de la definició 4.1, llavors podem obtenir una coloració de qualsevol parell d'arbres de la classe d'equivalència que representa l'element f.*

Demostració. Com ja hem vist a la secció anterior, el que fa que hi hagi diversos parells d'arbres que representen el mateix element són els carets reduïbles. Així, l'única operació que ens permet passar entre elements de la mateixa classe és afegir o eliminar carets reduïbles. Però això ho podem fer respectant la coloració dels arbres.

Per una banda, si tenim un parell d'arbres no reduït, i que per tant té un caret exposat a cada arbre, aquest es pot eliminar, doncs per construcció aquestes dues fulles tenen els mateixos colors en ambdós arbres. A més, això implica que l'aresta ascendent d'aquest caret té també el mateix color en ambdós arbres. Per tant, aquest caret es pot eliminar respectant les condicions de la coloració.

D'altra banda, podem afegir un caret a una fulla qualsevol d'igual manera. Com l'aresta ascendent tindrà el mateix color en ambdós arbres, només hem d'escollir els colors de les fulles en el mateix ordre. □

Observem que aquest últim pas de la prova implica que aquesta coloració no és única en els parells d'arbres no reduïts, doncs en els carets reduïbles hi ha dues opcions de coloració. Això no implica, per altra banda, que els arbres reduïts tinguin una única coloració, doncs veurem més endavant que no és així.

Ara que ja tenim una definició de la coloració d'un element d'F, el nostre objectiu serà demostrar que tot element del grup F es pot acolorir. Cal observar que com que el Teorema dels Quatre Colors ja ha estat provat, sabem que podem acolorir tots els elements del grup, doncs donat un parell d'arbres els podem unir creant mapa cúbic, aresta-acolorir-lo, i recuperar els dos arbres originals. Volem doncs trobar una demostració alternativa d'aquest fet.

Així, l'enunciat següent és equivalent al Teorema dels Quatre Colors.

Teorema 4.3. *Tot element del grup F té una coloració (segons les condicions descrites a la Definició 4.1)*

Malgrat l'equivalència entre aquests dos resultats es dedueix dels raonaments vistos fins ara, no és tant immediata com pot semblar. El motiu d'això és que la construcció feta per a passar de mapes a parells d'arbres binaris elimina els triangles de tall i també els parells de regions que separen el graf. Però hi ha elements d'F que presenten aquestes situacions. Això fa que aquesta construcció no ens porti a tots els elements del grup. Per tant, podria ser que demostrant que existeix una coloració només per a uns certs elements del grup ens permetés demostrar el teorema.

Però si aquest fos el cas, com hem vist ara, el Teorema dels Quatre Colors sí que implica que tot element d'F és acolorible, fet que prova aquesta equivalència, i en particular prova que si trobéssim un subconjunt d'elements que satisfés això, provar que tots aquests són acoloribles implicaria que tots els elements del grup ho són.

En qualsevol cas, el nostre objectiu serà provar que tot element del Grup de Thompson F és acolorible.

4.2 Les coloracions i l'operació

Com que el que volem és utilitzar l'estructura algebraica del grup F per a trobar-ne una coloració, és natural estudiar com es relacionen les coloracions que hem definit amb l'operació de grup. Si donats dos elements acolorits puguéssim obtenir sempre una coloració del seu producte (tant per l'esquerra com per la dreta), només obtenint una coloració dels generadors ja hauríem demostrat que tot element del grup és acolorible.

Per a estudiar l'operació, hem d'entendre que el que estudiarem és el producte entre dos elements del grup de Thompson amb una coloració concreta.

Definició 4.4. Un *element acolorit* d'F és un element d'F juntament amb una coloració d'un dels seus parells d'arbres.

Així, volem partir de dos elements acolorits, f i g, amb les seves respectives coloracions i aconseguir una coloració d'fg. Recordem que, si $f = (T, T')$ i $g = (S, S')$ són els parells d'arbres corresponents a aquests elements, per a fer el producte en buscarem representats de la forma $f = (T'', R)$ i $g = (R, S'')$ tals que R conté tant T' com S. És clar que per a fer aquest producte necessitem unes coloracions dels nous representants de manera que coincideixin en R.

Per analogia al màxim comú múltiple definit a la secció anterior, podem definir el màxim comú divisor.

Definició 4.5. Donats dos arbres binaris arrelats, T i S, definim el seu *màxim comú divisor* com l'arbre contingut tant en T com en S, i maximal amb aquesta propietat. És a dir, si hi afegim qualsevol altre caret, deixarà d'estar contingut com a mínim en un dels dos arbres.

És clar que aquest arbre existeix, ja que com a mínim hi ha el caret de l'arrel que és comú als dos arbres. A més, per a obtenir-lo només cal sobreimposar-los i agafar la intersecció.

Observació. Donats dos arbres binaris arrelats, T i S, el seu mínim comú múltiple conté el seu màxim comú divisor.

Així, ja podem veure el següent resultat sobre les coloracions i l'operació.

Teorema 4.6. *Siguin f i g dos elements acolorits d'F. Siguin $f = (T, T')$ i $g = (S, S')$ els parells d'arbres reduïts que els representen, amb les respectives coloracions. Suposem que les coloracions de T' i S coincideixen en el seu màxim comú divisor. Llavors podem multiplicar fg i obtenir de manera natural una coloració del producte, que coincideixi amb les coloracions de T i S'.*

Demostració. Primer de tot, observem que no és necessari que els parells d'arbres siguin reduïts, ja que l'argument serveix igual malgrat no ho siguin. Tot i així, si usant un representant no reduït se satisfà aquesta condició, reduint-lo també. En canvi, si els representants de partida no fossin reduïts, podríem no ser capaços de fer servir aquest mètode en un cas en el que seria possible si eliminéssim els carets reduïbles.

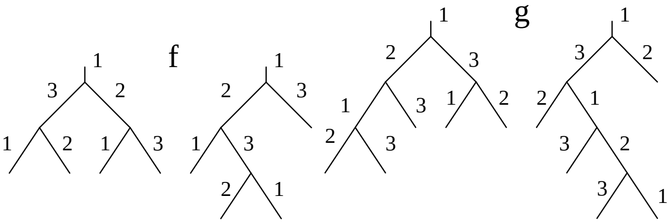
Considerem f i g com els del teorema. Busquem R, el mínim comú múltiple de T' i S. Ara, acolorim el màxim comú divisor, dins R, amb els colors que té tant a T' com a S, que coincideixen per hipòtesi. Després, acolorim la resta d'R, també amb els colors que té en els arbres corresponents, però ara els carets restants apareixeran només en un dels dos arbres. Afegir aquests carets per a obtenir un representant que tingui R com a un dels subarbres es pot fer donant-li la coloració que calgui, així que podem obtenir uns representants $f = (T'', R)$ i $g = (R, S'')$ on tots dos estan acolorits. Per construcció, $fg = (T'', S'')$ també està acolorit satisfent les condicions de la definició 4.1, i també per construcció, T'' conté T, i com que s'ha acolorit a partir d'aquest, en conté la coloració. El mateix passa per a S''.

□

Aquest procés serà més clar amb un exemple.

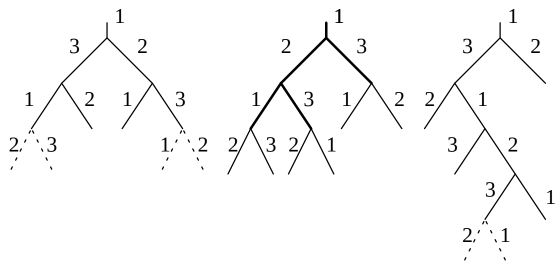
Exemple. Considerem els elements següents:

$$f = x_0 x_2 x_1^{-1} x_0^{-1} \qquad g = x_0^2 x_3 x_2^{-1} x_1^{-1} x_0^{-1}$$

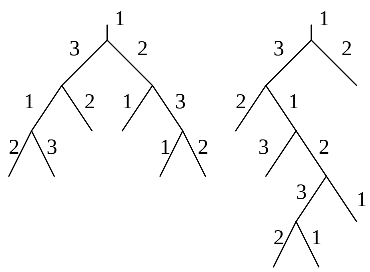


I les següents representacions com a parells d'arbres, amb aquestes coloracions.

Tot seguit, sobreimprimim els arbres corresponents, generant així el seu mínim comú múltiple. És clar que la coloració del màxim comú divisor ha de ser la mateixa, mentre que la resta de carets es poden estendre fàcilment. A la figura, veiem el màxim comú divisor ressaltat, i veiem els carets afegits als altres arbres com a línies de punts. Això ens permet veure, també, com els arbres inicial i final conserven les coloracions originals.



I finalment obtenim una coloració del producte.



Així, hem vist que si dos elements acolorits es poden multiplicar, el resultat serà també un element acolorit. El problema és que en general no podem operar dos elements acolorits qualssevol. Això motiva la següent definició.

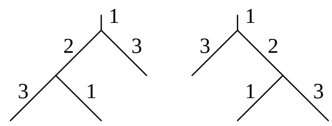
Definició 4.7. Siguin f i g elements acolorits d'F. f es diu *multiplicable per* g si se satisfan les condicions de la coloració necessàries per a poder fer el producte fg.

4.3 Coloracions dels generadors

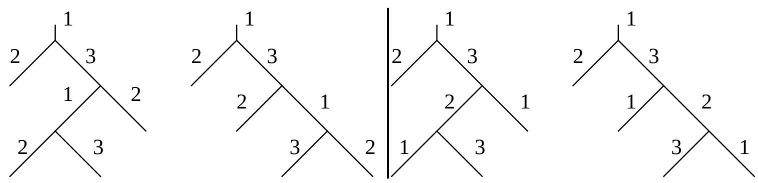
Acabem de veure que la primera aproximació, que era provar que l'operació respecta les coloracions, no és vàlida. Però tot el que hem vist sobre el Grup de Thompson ens fa adonar que, de fet, no ens cal veure que qualssevol dos elements acolorits siguin operables entre ells. Hem vist dues presentacions del grup. Ens centrarem en la presentació finita.

Si veiem que tot element del grup F és operable, en alguna coloració, per x_0, x_1, x_0^{-1} i x_1^{-1} també quedarà provat el teorema. El primer que cal fer és, doncs, veure les coloracions d'aquests dos generadors.

Per una banda, el generador x_0 té una única coloració, com veurem tot seguit. És senzill veure que és única llevat de permutació de colors.



D'altra banda, per a l'x_1 podem trobar dues coloracions diferents.



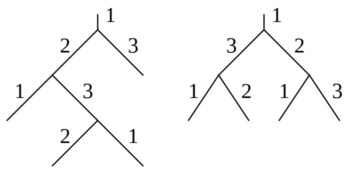
Observació. Observem que si treiem el primer caret als dos arbres d'x_1, obtenim x_0. A més, veiem que les dues coloracions tenen una coloració en aquest subarbre isomorfa a la d'x_0. La diferència entre els dues coloracions és al caret superior, en com es posen els dos colors que s'afegeixen. Després d'això, però, hem permutat els colors per a mantenir l'arrel acolorida amb un 1. Aquest fet d'acolorir un subarbre en concret el generalitzarem més endavant.

Ara ens agradaria veure que tot element d'F admet una coloració en la qual és operable per cada generador, i els seus inversos. Si això fos cert, ja hauríem acabat la prova, doncs podríem acolorir qualsevol element del grup trobant la seva paraula en x_0 i x_1 i construint la seva coloració partint de la dels generadors.

Una altra alternativa seria veure que si hi ha un element operable per tots els generadors, els productes amb els generadors i els seus inversos també ho són. Això ens permetria veure el mateix resultat.

Però el següent element té una sola coloració, i aquesta no és operable amb l'única coloració d'x_0.

$$x_0 x_1 x_0^{-1}$$



Això ens impedeix acolorir els elements amb aquesta construcció.

4.4 Coloració de Paraules Positives

Tot seguit, aprofitarem les construccions i raonaments vistos per al Grup de Thompson, en un intent d'acolorir els seus elements. El primer que intentarem serà acolorir les paraules positives. Si aconseguim això, més endavant intentarem estendre-ho a tot el grup. Recordem que una paraula positiva era aquella que era producte dels generadors de la presentació infinita, però sense implicar cap invers.

D'altra banda, en el sentit d'arbres, una paraula positiva era aquella que tenia com a arbre d'arribada una espina.

4.4.1 Primer intent. Inducció

El primer que intentarem en aquest sentit serà reduir els arbres per inducció. Per a fer això, donat un parell d'arbres corresponent a una paraula positiva (i.e. un arbre i una espina amb la mateixa quantitat de carets), treurem el caret de l'arrel del primer arbre. Això dividirà l'arbre en dos subarbres (pot ser que un sigui buit), i completant amb espines de la longitud corresponent, donarà dos paraules positives amb menor nombre de carets.

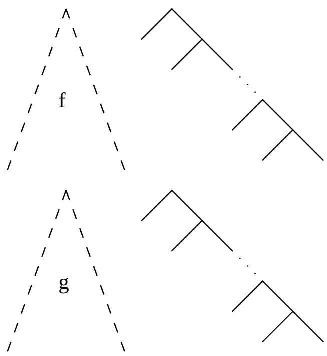
Abans d'estudiar les coloracions en aquesta construcció, veurem la construcció en el grup de Thompson.

Proposició 4.8. *Donats dos elements positius a F, en forma normal, i els parells d'arbres reduïts que els representen, podem obtenir una nova paraula positiva que els tingui com a subarbres respectius esquerre i dret en l'arbre de sortida.*

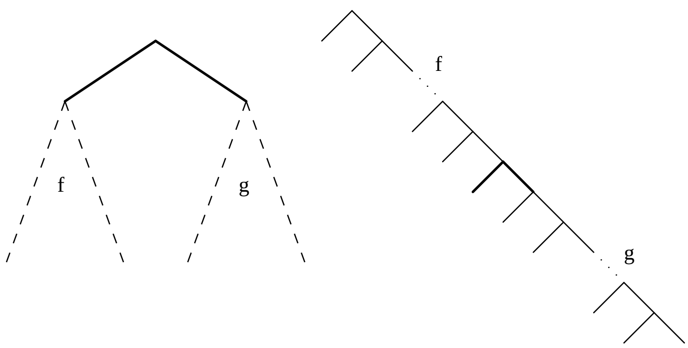
Recíprocament, donada una paraula positiva $f \in F$, en forma normal, diferent de la identitat, i els dos arbres que la representen, podem obtenir dos elements positius de manera que la construcció anterior doni l'element f. Un dels dos arbres pot ser buit.

Demostració. La construcció la farem sobre els arbres. Un cop trobats els arbres, podem trobar la paraula obtenint els exponents de les fulles.

Tenim dos parells d'arbres, un per a cada element, tals que l'arbre d'arribada és una espina. Siguin f i g aquests elements, i uns arbres genèrics de la forma següent:



On la línia discontínua marca un arbre qualsevol. Ara, prenem els arbres de sortida, i unim les seves arrels formant un caret addicional. Això genera un arbre amb un caret més que la suma dels altres dos. Per tant, l'arbre d'arribada serà una espina amb el nombre corresponent de carets. En la següent imatge es veu aquesta construcció, i es ressalten els carets que s'han afegit.



Per al recíproc, només cal agafar l'arbre i considerar els dos arbres consistents en el subarbre esquerre i els primers carets de l'espina (tants com calgui), i el subarbre dret i els darrers carets de l'espina (tants com calgui). Per construcció, haurem eliminat un caret de cada arbre.

Si un dels dos subarbres fos buit, només obtindríem un arbre, i un de buit (o, equivalentment, la identitat, afegint un caret), però podríem fer la mateixa construcció.

□

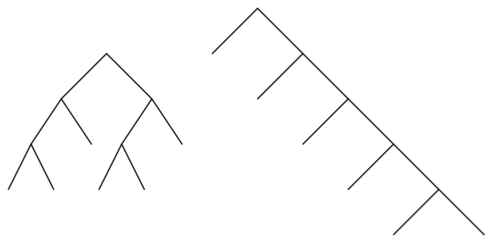
Observació. De fet, és irrellevant on afegim el caret de l'espina, des del punt de vista dels arbres. Però si els subarbres estiguessin etiquetats d'alguna manera, per exemple acolorits com veurem tot seguit, aquesta és la forma que fa que es conservin les relacions entre fulles.

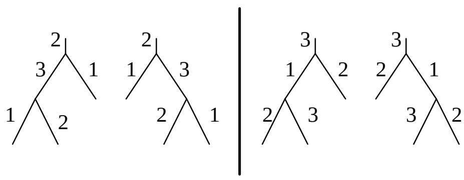
D'aquesta manera podem reduir un arbre a subarbres amb un nombre més petit de carets. Si aquesta construcció ens permetés arribar a una coloració de l'element gran a partir de les coloracions dels subarbres, per inducció quedaria demostrat el teorema.

Així, suposem que tenim un element f per a acolorir. I, mitjançant aquest procés, arribem a dos elements g i h tals que unint-los com acabem de veure obtenim f. A més, suposem que tenim g i h acolorits. Volem obtenir una coloració d'f.

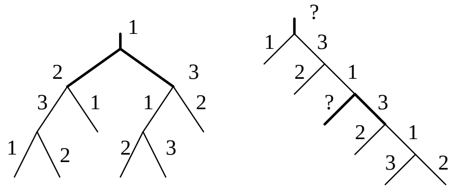
Lamentablement, això no serà possible. Veurem el motiu amb un exemple.

Exemple. Observem aquest exemple. L'element és $f = x_0^2 x_3$. El podem descompondre en dos elements, ambdós x_0. Els acolorim. Ja coneixem la coloració d'x_0, i sabem que és única. Tot i així, permutem els colors per a obtenir dues a les arrels els colors 2 i 3, per tal que l'arrel d'f tingui el color 1.





El problema el trobem, però, al fusionar els arbres, doncs al voler mantenir les coloracions ens trobem amb que l'arrel i la fulla addicional no es poden acolorir, com es veu a la imatge. Les dues arestes marcades amb un interrogant no es poden acolorir sense canviar tota la coloració dels arbres. Però la resta de fulles encaixen amb les del primer arbre, de manera que no podem modificar la coloració.



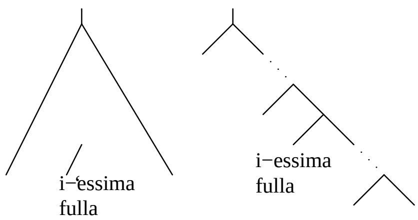
Malgrat ho hem fet per un arbre concret, és clar que passarà per a qualssevol dos arbres i qualsevol coloració d'aquests. També és clar que el caret addicional ha d'anar necessàriament en aquell punt, entre els dos elements de l'espina, doncs això fa que es conservin les coloracions a la resta de fulles.

4.4.2 Segon intent. La forma normal

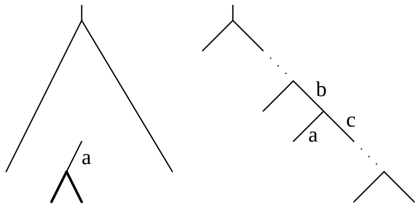
Seguim intentant acolorir les paraules positives. En aquest cas, però, aprofitarem la seva forma normal. El primer que veurem és com donat un element positiu acolorit, podem afegir-hi un caret, és a dir, multiplicar-lo per un generador, mantenint la coloració.

Proposició 4.9. *Sigui $f \in F$ un element positiu acolorit. Llavors, el podem multiplicar per un generador x_i i trobar una coloració d'fx_i induïda per la coloració d'f.*

Demostració. Com ja vam dir al definir aquests generadors, multiplicar un element positiu per x_i vol dir afegir un caret a la fulla i de l'arbre de sortida, i afegir un caret a l'espina. Si el de la imatge és el parell d'arbres corresponent a f, i el multipliquem per x_i, estarem afegint un caret addicional a la i-èssima fulla.



Suposem que tenim aquest arbre f acolorit. La coloració a tot l'arbre no ens interessa, i com veurem no la modificarem. Suposem que la fulla i-èssima té assignat el color a, i les arestes adjacents a l'espina tenen els colors b i c com a la figura.



Hem afegit un caret a l'arbre de sortida. Però encara no ho hem fet amb l'arbre d'arribada, que té un caret i una fulla menys. El procés a l'espina serà el que es veu a la següent imatge. És a dir, la que era la i-èssima fulla, que estava acolorida amb a, esdevindrà una aresta de l'espina, i afegirem dues fulles més. A més, les dues arestes adjacents defineixen els colors de les dues fulles, i per tant la manera com serà acolorit el caret nou a l'arbre de sortida.

És clar que la coloració de la resta de l'arbre no es modifica, i que per tant hem obtingut una coloració del nou element, fx_i.

Només cal veure, a més, que si l'arbre no tingués i fulles, es pot estendre a un representant d'aquest, afegint carets a la darrera fulla, fins a tenir el nombre de fulles necessari. Llavors, es pot usar el mateix procés.

□

Ara, és clar que l'algorisme següent ens permet acolorir qualsevol paraula positiva.

1. Considerar la paraula en forma normal.
2. Prendre la identitat, en tant que dues espines iguals.
3. Considear una coloració qualsevol de la identitat.
4. Afegir, en ordre d'aparició, els carets segons indiquin els generadors de la paraula. Reacolorir a cada passa com s'ha vist a la proposició anterior.

És clar que aquest algorisme funciona per a qualsevol paraula positiva en forma normal. Això ens dóna la prova del següent teorema resultat.

Teorema 4.10. *Tot element positiu d'f és acolorible.*

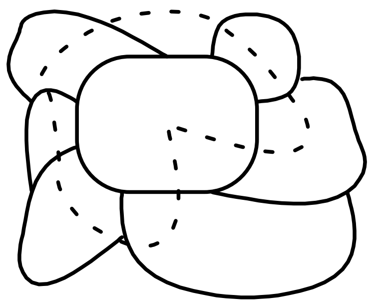
I a més, això ens permet afirmar el següent.

Corol·lari 4.11. *Tot mapa amb una regió adjacent a totes les altres és quatre-acolorible.*

Demostració. El què veurem és que tot mapa amb una regió adjacent a tota la resta té un tall que el porta a una paraula positiva, i a l'invers. Per una banda, és clar que tota paraula positiva porta a un mapa amb una regió, l'externa, ja que l'espina està en contacte amb totes les regions, i a l'altra banda amb la cara externa.

Recíprocament, suposem que tenim un mapa G amb una regió adjacent a totes les altres, c, i de manera que qualssevol dues regions adjacents formen una regió simplement connexa. Recordem que això en grafs vol dir que no hi ha arestes dobles, que de fet no afecten a la coloració, però ens impedirien fer aquest raonament.

Ara, fem un camí de tall. Comencem a la regió c, i creuem una frontera qualsevol. Tot seguit, avancem paral·lelament a la frontera de c, creuant les fronteres entre les regions adjacents en l'ordre que apareixen els seus vèrtexs, i no creuant cap altra frontera. Un cop arribem a la regió anterior a aquella on hem començat, tornem a creuar la frontera cap a c. Tenim un camí tancat, que per hipòtesi passa per totes les regions. Per tant, això ens dóna dos arbres binaris. A més, per construcció, un d'aquests arbres és una espina (el corresponent a la frontera de c. A la imatge hi trobem un exemple.



Com podem veure, la línia de punts dóna un tall del mapa en dos arbres binaris. A més, si seguim la frontera de la cara central en sentit horari, veurem que l'arbre obtingut és una espina. Clarament, aquest raonament funciona en general.

□

Observem que el procés que hem fet en aquest apartat no requeria l'estructura algebraica del Grup de Thompson, i aquest procés es podia haver fet insertant els carets en un altre ordre qualsevol.

4.4.3 Nombre cromàtic dels grafs outerplanar.

Més endavant intentarem usar el resultat que acabem de veure per a avançar en la demostració del Teorema dels Quatre Colors. Tot i així, aquí tenim un resultat que es dedueix d'aquest teorema. Abans d'enunciar-lo, però, cal una definició.

Definició 4.12. Un graf es diu *outerplanar* si té un embedding al pla tal que és planar, i en el qual tots els vèrtexs es troben a la cara externa.

Vegem una definició alternativa que ens serà més útil, i que és clarament equivalent.

Definició 4.13. Un graf es diu *outerplanar* si el resultat d'afegir-li un nou vèrtex, amb arestes cap a tots els altres vèrtexs, és un graf planar.

El resultat que veurem tot seguit ens parla del nombre cromàtics dels grafs *outerplanar*. És un resultat conegut, però la aquí proposada és una demostració alternativa que, malgrat ser més complicada, és conseqüència de la construcció que hem fet fins ara.

Corol·lari 4.14 (del Teorema 4.10)**.** *El nombre cromàtic dels grafs outerplanar és tres.*

Demostració. Sigui G un graf que satisfà la segona definició dels grafs *outerplanar*. Considerem un embedding planar d'aquest graf, amb el vèrtex addicional, i considerem el seu dual. Clarament, aquest és un mapa i satisfà que hi ha una regió (la corresponent al vèrtex que hem afegit) adjacent a totes les altres. Per tant, podem acolorir aquest mapa amb quatre colors.

Per tant, tenim una 4-coloració de G. A més, el color del vèrtex addicional no pot apareixer en cap altre vèrtex, doncs aquest és adjacent a tots. Per tant, tenim una 3-coloració de G.

$\square$

4.4.4 Coloració de les espines

Tot seguit, intentarem usar el Teorema 4.10 per a avançar cap a la demostració del Teorema dels Quatre Colors. Hem vist que podem acolorir tots els elements positius d'F. A més, tot element del Grup de Thompson es pot descompondre en pq^{-1}, amb p i q positius.

El problema és que, un cop hem acolorit d'aquesta manera els elements positius p i q, per a que això s'estengui a una coloració de pq^{-1}, les espines (l'arbre d'arribada) han de tenir la mateixa coloració en ambdós casos. Però si volem que això s'estengui a tots els elements del grup, el què necessitem és acolorir canònicament l'espina, de manera que tots els parells d'arbres es puguin acolorir acolorint primer els elements positius, i després unint-los, aprofitant que tenen la mateixa coloració a l'espina. El següent resultat, però, prova que aquest procés no és possible.

Proposició 4.15. *Donada una espina amb n carets acolorida, E, sempre podem trobar un arbre T tal que l'element (T, E) no es pugui acolorir conservant la coloració d'E.*

Demostració. Considerem l'espina E i una coloració qualsevol. Procedirem a crear un arbre T que sigui incompatible amb aquesta coloració d'E. Construïm un arbre qualsevol amb $n-2$ carets. Per exemple, podem prendre una espina amb $n-2$ carets.

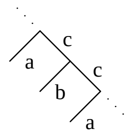
Ara, observem les fulles i, $i+1$ i $i+2$ d'E, amb $i = 0..n-2$. Això fa que prenguem tres fulles consecutives qualssevol, però no la darrera (l'única que és descendent dret del seu caret). Aquestes tres fulles estan acolorides necessàriament d'una de les següents maneres:

(a) aba, és a dir, amb un color repetit, però a les fulles dels extrems.

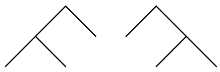
(b) aab o abb, és a dir, amb un color repetit en fulles consecutives.

(c) abc, és a dir, amb tres colors diferents.

Primer de tot, observem que el cas (a) no és possible en realitat, ja que les arestes entre aquestes fulles haurien de tenir el mateix color.



Ara, construirem l'arbre T en funció del tipus de coloració que trobem. Partirem de l'arbre en $n-2$ carets. A la i-èssima fulla hi afegirem un subarbre format per dos carets. Vegem que això farà coincidir les fulles i, $i+1$ i $i+2$ amb les tres fulles d'aquest subarbre. Amb dos carets, només hi ha dos arbres possibles.



Per al cas *(b)*, ficarem l'arbre que faci coincidir el caret exposat amb les dues fulles del mateix color, fet que impedeix acolorir l'element.

Per al cas *(c)*, ambdós arbres tindran el mateix efecte, doncs els colors del caret exposat forçaran el color de l'aresta superior, que haurà de ser del mateix color que l'altra aresta del mateix caret, novament impedint-ne la coloració.

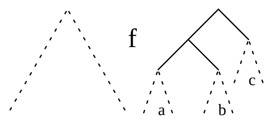
□

Aquest resultat ens diu que aquest mètode no es pot estendre, o com a mínim no directament, a tot el grup F.

4.5 Reinterpretació de l'Operació

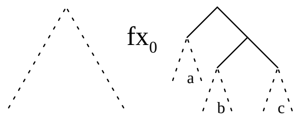
Tot seguit veurem una nova manera d'entendre l'operació, primer per als generadors, i després per a elements en general del grup, que ens pot portar a entendre millor també com es transmet la coloració a través de l'operació.

Per als generadors x_i, i donat un element $f \in F$, podem descriure l'operació fx_i com una rotació al voltant de l'i-èssim vèrtex de l'espina de l'arbre d'arribada d'f. Vegem-ho en el cas de l'x_0.



Llavors, al fer el producte, els subarbres a, b i c passen a estar en la següent situació:

Podem entendre que hi ha hagut un gir al voltant del vèrtex (en aquest cas de l'arrel). És fàcil estendre aquest exemple a tots els generadors x_i. Però, a part d'entendre-ho com a una rotació,



el que hem vist a l'exemple anterior és que el subarbre d'f corresponent al primer arbre d'x_0 ha passat a ser el corresponent al segon arbre d'x_0, mantenint l'estructura dels seus subarbres. Això ho podem estendre a la resta d'elements.

Proposició 4.16. *Siguin $f, g \in F$, representats per un parell d'arbres, $f = (T, T')$ i $g = (S, S')$. Suposem que T' conté S. Llavors fg es pot representar per un parell d'arbres $fg = (T, R)$ on R està format per T', canviant S (que hi era contingut) per S' i mantenint els subarbres a les fulles corresponents.*

Demostració. El resultat és senzill de veure, doncs si T' conté S, a l'operar només modificarem el representant de g que tenim, fins que aquest tingui com a arbre de sortida T', doncs en aquest cas aquest serà el seu mínim comú múltiple. Però el procés que seguirem serà afegir a cada fulla d'S els subarbres necessaris, i fer el mateix a les fulles corresponents d'S'. Per tant, el representant que obtindrem serà $g = (T', R)$, amb R com el descrit a l'enunciat.

□

Observació. Sempre podem considerar que T' conté S, prenent un representant adequat d'f, així que això val en general.

A més, aquesta propietat no se satisfà només al multiplicar per la dreta.

Observació. La proposició anterior és simètrica, en el sentit que si fos S qui contingués T', podríem representar fg per un parell d'arbres (R', S'), on en aquest cas R' seria S amb el T' contingut substituït per T.

Aquest resultat, però, és coherent amb el que hem vist fins ara pel que fa a coloracions, en tant que el subarbre S dins T' (que és de fet el màxim comú divisor) pot estar acolorit de qualsevol manera, i si no coincideix amb la coloració d'S en g, no podrem fer aquest producte. De fet, ens podrem trobar qualsevol coloració d'S com a subarbre, ja que al no tenir directament les fulles, la coloració serà la induïda pels subarbres. Ens caldrà trobar una coloració de g que tingui l'arbre S acolorit com ho està dins T'.

Per tant, voldríem veure que per a tota coloració d'S podem trobar una coloració d'S' que hi sigui compatible. És clar que això no és cert en general, ja que tenim elements, com per exemple el generador x_0, que tenen una única coloració possible.

Això ens fa preguntar-nos si hi ha algun element que satisfaci aquesta propietat, a part de la identitat. Encara més, voldríem buscar una presentació alternativa, o com a mínim un conjunt de generadors (no ens caldrien les relacions) que satisfacin aquesta propietat. Si ho trobéssim, novament, hauríem demostrat el teorema.

Lamentablement, tot seguit veurem que no existeix cap element llevat de la identitat que satisfaci aquesta propietat. Abans ens caldrà aquest lema.

Lema 4.17. *Sigui un arbre binari T. Podem escollir el color en dues fulles, i després 3-aresta-acolorir l'arbre, de manera que a cada vèrtex hi apareguin els tres colors.*

Demostració. Construïm el camí que va d'una fulla a l'altra. Com que és un arbre, aquest camí és únic si no acceptem que passi més d'un cop per la mateixa aresta. Ara, acolorim aquest camí alternant entre els colors d'ambdues fulles. Si el camí té longitud senar, a l'aresta central ens caldrà usar el tercer color.

Si a les dues fulles hi hem triat el mateix color, haurem de triar un altre color amb què alternar, i en aquest cas si el camí té longitud parell ens pot caldre usar el tercer color a l'aresta central.

Ara, és fàcil veure que podem estendre la coloració des del camí. És a dir, en cada vèrtex del camí, a l'aresta restant li assignem el color que falta. A partir d'aquí, podem seguir acolorint posant a cada vèrtex els dos colors restants en l'ordre que vulguem.

□

Aclarim que en aquest lema hem acolorit un sol arbre binari, no un parell d'arbres, i per tant no un element del grup. Però això ens permet demostrar el següent resultat.

Proposició 4.18. *No existeix cap element d'F, llevat de la identitat, tal que tota coloració d'un dels arbres s'estengui a una coloració de tot l'element.*

Demostració. És clar que la identitat si que ho satisfà, ja que en qualsevol representant, la identitat té els dos arbres iguals.

Considerem un parell d'arbres reduït, (T, T'), diferent de la identitat. Suposem que tota coloració de T s'ha de poder estendre a T' satisfent que el resultat sigui una coloració de l'element. Construirem una coloració de T que no es pugui estendre. Necessàriament, T' té com a mínim un caret exposat, en el sentit que no té descendents, i que no es correspon amb un caret de T, ja que sinó no seria reduïble.

Ara, considerem les dues fulles de T corresponents a aquest caret. Usant el lema, podem trobar una coloració de T tal que aquestes dues fulles tinguin el mateix color. Aquesta coloració, per tant, no es pot transmetre, doncs dues fulles del mateix caret (i per tant adjacents) a T' tindrien el mateix color. $\square$

Això ens impedeix seguir per aquest camí, finalitzant així el darrer intent d'avançar cap a una prova que farem en aquest treball.

4.6 Altres resultats

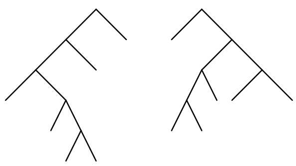
Finalment, per acabar aquesta secció, veurem dos resultats que hem trobat durant aquest treball, però que no hem integrat en cap dels intents de demostració.

Primer de tot, veurem un mètode per a reduir un element.

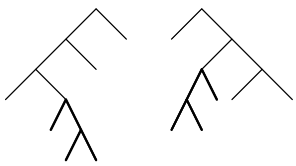
Proposició 4.19. *Sigui f un element del Grup de Thompson. Considerem un parell d'arbres que el representi, $f = (T, T')$. Si hi ha k fulles consecutives, per a algun k, de manera que aquestes fulles juntament amb els seus carets ascendents formen un subarbre de $k-1$ carets a cada arbre, llavors aquests subarbres es poden retirar, obtenint dos elements amb menys carets, i acolorir-los per separat, recuperant l'element f i obtenint-ne una coloració. Recíprocament, de la coloració d'f podem obtenir una coloració dels altres elements.*

Abans de demostrar-lo, en veurem un exemple que ens pot facilitar la comprensió de l'enunciat.

Exemple. Considerem l'element $x_0^2 x_1 x_2 x_1^{-2}$. El següent parell d'arbres el representa:

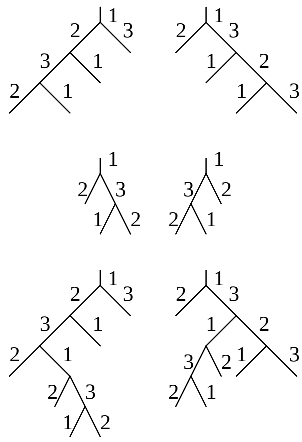


Observem el subarbre format per les fulles 1, 2 i 3. És x_0^{-1}



Per tant, podem acolorir per separat els dos elements.

Finalment, els podem tornar a unir. Observem que la fulla on els unim té el mateix color als dos arbres (per definició de les coloracions). Per tant, podem reconstruir f.



Demostració. És clar que si se satisfan les hipòtesis podem convertir l'element en dos elements diferents. Igualment, és clar que si partim de dos elements diferents, aquest procés ens permet obtenir un element amb més carets.

Ens falta veure que aquest procés respecta les coloracions. Però això és senzill, ja que per construcció, si tenim una coloració dels subarbres, aquests tenen el mateix color a l'arrel. D'altra banda, els arbres corresponents a la resta de l'element han de tenir el mateix color a les fulles.

Permutant els colors del subarbre, podem fer que el color a la fulla i el color a l'arrel coincideixin, i per tant podem fer aquesta unió.

Per al recíproc, l'única cosa que podem afirmar és que hi ha una coloració tal que en l'aresta per la que volem tallar hi ha el mateix color. La prova que aquesta coloració existeix és que la podem trobar pel procés que acabem de descriure. □

Aquest resultat és doncs una generalització de la reducció de carets en arbres, amb la diferència que en aquest cas no arribem al mateix element. Tot i així, ens podria permetre reduir d'alguna manera els elements que hem d'acolorir.

Observació. De fet, quan fem aquesta construcció, estem repetint el procés que hem fet per assegurar que un mapa satisfeia la Condició W. En particular, les regions a cada banda dels subarbres extrets formen una regió no simplement connexa. Per tant, els elements que satisfan això són elements als que no arribaríem des d'un mapa.

Vegem també un altre resultat, que és sobretot un recordatori de la construcció feta per a obtenir un element del grup F des d'un mapa cúbic.

Proposició 4.20. *Considerem els elements del grup com a parells d'arbres amb una aresta a l'arrel. Llavors, l'aplicació que a cada parell d'arbres hi assigna el parell d'arbres consistent a* *prendre la primera fulla com a arrel i reconstruir l'arbre resultant, resulta en un altre element del grup de Thompson i en respecta la coloració.*

Demostració. Només cal recordar que donat un mapa, trobàvem un camí Hamiltonià sobre les seves regions, i l'usàvem com a tall. Un cop fet aquest tall, escollíem arbitràriament una aresta com a arrel. L'aplicació descrita només canvia l'aresta triada com a arrel per la següent. Com que tot element del grup es pot convertir en un mapa que té un camí Hamiltonià, aquest procés serveix per a tot element del grup. A més, el fet que l'aplicació es definieixi per al mapa, demostra que respecta l'operació. □

Per tant, aquesta aplicació envia cada element a un altre (no necessàriament diferent), de manera que si en podem acolorir un dels dos, automàticament podem acolorir l'altre. A més, repetint el procés diverses vegades, tornarem al primer element (quan el que era arrel torni a ser-ho) obtenim un conjunt d'elements diferents però les coloracions dels quals són equivalents.

5 Conclusions

Al llarg d'aquest treball, a part de fer un recull introductori tant sobre el Teorema dels Quatre Colors, com sobre el Grup de Thompson F, hem volgut estudiar la relació entre ambdós. Abans d'això, però, hem hagut d'entendre bé el Teorema, tan a nivell històric com de possibles demostracions. I, sobretot, s'ha realitzat un estudi del Grup de Thompson i les seves possibles interpretacions i representacions, doncs era un grup que desconeixia i que ja des de bon principi presenta unes propietats profundes i interessants.

Un cop fet això, l'objectiu del treball era estudiar si existia una manera de relacionar aquests dos conceptes, a priori sense cap relació. En aquest sentit, hem aconseguit el nostre objectiu de trobar una relació que ens permetés estudiar el Teorema des de les propietats, i l'estructura algebraica, del grup.

Això obre un nou camí per a intentar demostrar el Teorema dels Quatre Colors, utilitzant eines de la Teoria de Grups que no s'havien usat en aquest aspecte.

A partir d'aquí, hem intentat usar les propietats més immediates del grup per a avançar en la demostració. Malgrat no haver arribat a cap resultat profund, hem entés com funciona l'operació del grup sobre els arbres, i possiblement l'estudi de les coloracions permeti una millor comprensió del grup. Hem començat diversos intents de demostració, i els hem estudiat fins que hem trobat un punt on no eren viables.

Tot i així, ens hem centrat en l'estructura algebraica del grup, i hem rebutjat alguns intents doncs se sortien d'aquesta estructura, malgrat encara podrien ser objecte d'estudi.

En conclusió, hem trobat un nou mètode per a estudiar el Teorema dels Quatre Colors, fet que al començar no era clar si aconseguiriem, i aquesta és la principal aportació del treball, a part dels primers intents de demostració, que malgrat no funcionar il·lustren com els resultats vistos poden contrubuir a aquest estudi.

5.1 Camins oberts

Finalment, volia fer una petita reflexió sobre les coses que es poden fer a partir d'ara en aquest aspecte. Com ja s'ha dit, hi ha hagut alguns possibles resultats que hem rebutjat per diversos motius, especialment per falta de temps. En particular, ens hem volgut centrar en usar l'estructura algebraica del grup, sense usar altres propietats.

Un dels principals estudis que no hem aconseguit fer és la traducció de les coloracions a les altres interpretacions del Grup de Thompson. En aquest sentit, aconseguir traduir la coloració dels arbres a les paraules o a les aplicacions pot permetre veure nous resultats, o trobar resultats equivalents al teorema però en altres termes.

A part d'això, els dos darrers resultats que hem vist, les proposicions 4.19 i 4.20, permeten estudiar les coloracions dels parells arbres amb eines internes al grup, però diferents de l'operació.

En particular, sobre la proposició 4.19, es podria intentar trobar una expressió algebraica per a aquesta reducció (per exemple com a aplicacions), o una expressió per als elements que no es poden reduir així, que ens permetés intentar una demostració del teorema per inducció, demostrant-lo només per a aquells arbres que no es puguin reduir mitjançant aquest procés.

D'altra banda, la proposició 4.20 defineix una aplicació que genera classes de diverses mides, fet que en principi no encoratja el trobar-ne propietats algebraiques. Tot i així, defineix classes d'equivalència que conserven les coloracions, així que pot ser interessant estudiar-les en profunditat. A més, aquesta i altres aplicacions del grup, que malgrat no ser algebraiques tenen propietats geomètriques, poden obrir altres camins cap a una possible demostració.

Aquests són alguns exemples de possibilitats que hem vist durant el treball i que per un o altre motiu, principalment el temps, no hem estudiat en profunditat. Veiem doncs que, malgrat hem tancat els principals camins que hem estudiat, encara queden opcions i aquesta línia encara pot donar lloc a resultats interessants.

Referències

[1] Biggs, N.L., Lloyd, E.K., Wilson, R.J. *Graph Theory 1736-1936* Oxford University Press, 1976

[2] Burillo,J. *Thompson's Group F.* Notes no publicades.

[3] Cannon, J.W., Floyd, W.J., Parry, W.R.. *Introductory Notes on Richard Thompson's Groups.* L'enseignement Mathématique, Vol.42. 1996

[4] Kauffman, L.H. *Map coloring and the vector cross product.* J. Combin. Theory Ser. B 48 (1990)

[5] Thomas, R. *An Update on the Four-Colour Theorem.* Notices of the AMS, vol.45, num.7. 1998

[6] Weisstein,E.W. "Fritsch Graph."From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/FritschGraph.html

[7] Wilson, R.J. *Introducción a la teoría de grafos.* Alianza Universidad, 1983

[8] Whitney, H. *A theorem on graphs.* The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 32, No. 2 (Apr., 1931)