

Grau en Matemàtiques

Títol: Equacions de difusió no local: laplaciana fraccionari i operadors convolutius

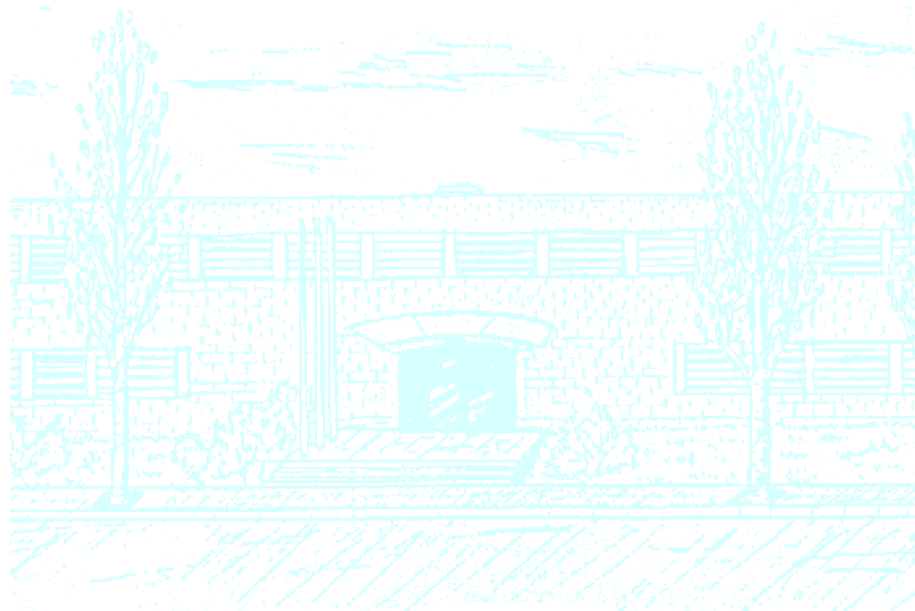
Autor: Alba Muixí Ballonga

Director: Maria del Mar González Nogueras

Departament: Matemàtica Aplicada I

Convocatòria: 2014/2015

:



Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Treball de fi de grau

**Equacions de difusió no local:
laplaciana fraccionari i operadors convolutius**

Alba Muixí Ballonga

Tutora: Maria del Mar González Noguera

Departament de Matemàtica Aplicada I

Abstract

Keywords: Nonlocal diffusion, Fractional Laplacian, Convolution model, Gamma convergence

MSC2000: 35 Partial Differential Equations, 46 Functional Analysis, 92B Mathematical Biology.

The aim of this bachelor thesis is to study two non-local generalizations of the Laplacian heat equation, in which the diffusion effect is modeled by a fractional Laplacian or by an operator of the form $Lu = J * u - u$, and to determine some hypothesis under which their solutions behave as the ones of the classical heat equation. We obtain both operators as a generalization of the Laplacian and study some of their properties, which we will use later in the main chapters of the thesis. The principal result concerns the asymptotic behavior of the convolution model solutions, and states that their decay is the same as the one for the fractional diffusion equation. We also study the Γ -convergence of the functionals which define these equations in order to show that their limit coincides in some cases.

Resum

Paraules clau: Difusió no local, Laplacà fraccionari, Model convolutiu, Gamma convergència

MSC2000: 35 Equacions en Derivades Parcial, 46 Anàlisi Funcional, 92B Biologia Matemàtica.

L'objectiu d'aquest treball de fi de grau és estudiar dues generalitzacions de l'equació de la calor, la primera enloc d'un laplacà té un laplacà fraccionari i la segona un operador de la forma $Lu = J * u - u$, i determinar certes hipòtesis sota les quals les seves solucions es comporten com les de l'equació clàssica de la calor. Obtenim els dos operadors generalitzant el laplacà i estudiem algunes de les seves propietats, que aplicarem en els capítols principals del treball. El resultat més important parla del comportament asimptòtic de les solucions del model convolutiu, i afirma que la seva decaiguda és la mateixa que la de les solucions de l'equació de difusió fraccionària. També estudiem la Γ -convergència dels funcionals que ens defineixen aquestes equacions per tal de demostrar que el seu límit coincideix en alguns casos.

Índex

Introducció	1
1 Transformada de Fourier	5
1.1 Definicions i propietats elementals	6
1.2 Solució fonamental de la calor	12
1.3 Espai de Schwartz	14
2 Del passeig aleatori al laplacà fraccionari	17
2.1 Introducció: Passeig aleatori estàndard	17
2.2 Vols de Lévy i nuclis d'integrals singulars	18
2.3 El laplacà fraccionari	21
2.4 Nuclis i símbols de Fourier	22
2.5 El laplacà fraccionari a l'espai de Fourier	23
3 De la migració de poblacions al model convolutiu	27
3.1 Presentació del model	27
3.2 Derivació del model	28
3.2.1 Comparació amb la derivació de l'equació fraccionària	30
3.2.2 Dependència de paràmetres	31
3.3 Derivació alternativa de l'equació convolutiva	31
4 Comportament asimptòtic de les equacions de difusió convolutiva	33
4.1 El problema de Cauchy	34
4.2 Teorema: comportament asimptòtic de la solució	34
4.3 Demostració del teorema	35
5 Models per a la transició de fases	47
5.1 Introducció: Equació d'Allen-Cahn	47
5.2 Nocions bàsiques de Γ -convergència	49
5.2.1 Compacitat i reescalaments	50
5.3 El teorema de Modica-Mortola	51
5.3.1 Mesura de Hausdorff	51

5.3.2	Model clàssic per a la transició de fases	51
5.3.3	Model de Cahn-Hilliard	52
5.3.4	Teorema de Modica-Mortola	52
5.4	Problema del perfil òptim i demostració del teorema de Modica-Mortola	53
5.4.1	Cas unidimensional	54
5.4.2	Cas general	57
5.5	Resultat anàleg per a l'equació convolutiva	62
5.6	Resultat anàleg per a l'equació fraccionària	63
A	Conceptes previs	65
A.1	Espais de Lebesgue	65
A.2	Teoremes de convergència per integrals	66
A.3	Convergència feble	67
A.4	Espais de Hölder	67
A.5	Diferenciació feble	68
A.6	Espais de Sobolev	69
	Bibliografia	71

Introducció

La base dels processos difusius és que intenten compensar la diferència entre el valor d'una funció u , que típicament mesura temperatura o concentració, en un punt i la mitjana de valors al voltant del punt per tal d'arribar a un equilibri. L'equació clàssica per a modelitzar aquests processos és

$$u_t = D\Delta u + f,$$

amb $D > 0$ una constant de difusió i f la part no homogènia. Aquesta equació, coneguda com a *equació de difusió* o *de la calor*, s'estudia en qualsevol curs d'Equacions en Derivades Parcials i podem citar [8, 17] com a referències d'un estudi exhaustiu.

El laplaciana

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

on n és la dimensió de l'espai, és l'operador amb derivades parcials més important. El motiu és que Δ és, essencialment, l'únic operador diferencial escalar invariant sota translacions i rotacions. Es tracta d'un operador local, és a dir, la imatge de u en un punt només depèn dels valors que prengui en un entorn del punt, suposant que el podem agafar.

De forma natural, ens podem preguntar si serà sempre suficient considerar només la dependència que tenen els punts més propers en el valor de la funció. La resposta a aquesta pregunta és complexa i depèn de molts factors; lluny de respondre-la, ens proposem estudiar un parell de situacions en que les solucions d'una equació de difusió no local es comporten, en el límit, com les de l'equació local.

Substituint el laplaciana per un operador no local a l'equació de la calor, aconseguirem tenir en compte la influència de punts llunyans en el valor de la funció en un punt. Ens centrarem en dos operadors no locals: el laplaciana fraccionari $\Delta^{\alpha/2}$, $\alpha \in (0, 2)$, i un operador convolutiu de la forma $Lu := J * u - u$, amb J una densitat de probabilitat radial.

Així doncs estudiarem equacions de la forma

$$u_t(x, t) = (J * u - u)(x, t) = \int_{\Omega} J(x - y)u(y, t)dy - u(x, t),$$

i podrem interpretar J com una ponderació de la influència de diferents punts del domini. A aquesta equació l'anomenem *equació de difusió convolutiva* i apareix en problemes d'ecologia, biologia i física, entre d'altres, vegeu per exemple [13, 18].

Notem que en el cas $J(y) \propto |y|^{-(n+\alpha)}$ no tenim la convolució ben definida al voltant de l'origen,

però si escrivim l'operador formalment arribem al laplaciana fraccionari

$$(-\Delta)^{\alpha/2}u = c_{n,\alpha}P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^{n+\alpha}} dy,$$

on $c_{n,\alpha}$ és una constant que només depèn de n , α i $P.V.$ denota el valor principal de la integral, com ja estudiarem. A més, seguint la pista que ens dona la notació, tenim que en el cas $\alpha = 2$ recuperem el laplaciana.

En general, un model local i un de no local ens donaran solucions que es comportaran de forma diferent: per exemple, veurem que a diferència del que passa en l'equació de la calor, per a l'equació convolutiva no tenim efecte regularitzant de la solució. Tanmateix, en alguns casos concrets els dos tipus de model ens porten al mateix tipus de comportament. Aquest fet pot ser útil si ens permet reduir-nos a models locals, que en general seran més senzills de tractar matemàticament.

L'objectiu d'aquest treball és veure que, sota certes hipòtesis sobre J i α , recuperem per a les solucions de les equacions de difusió no local ja esmentades, el comportament de les solucions de l'equació de la calor.

En el **primer capítol** introduïm la transformada de Fourier, una eina de gran aplicació en el camp de les EDPs que ens permetrà demostrar propietats i simplificar la resolució de certes equacions diferencials. El capítol consisteix en un recull dels resultats més importants; a més, mostrem un exemple d'aplicació tot buscant la solució de l'equació de la calor. Finalment introduïm l'espai de Schwartz, associat al concepte de la transformada, que apareixerà en capítols posteriors del treball.

En el **segon capítol** introduïm el primer dels operadors no locals que ens ocuparà: el laplaciana fraccionari. L'obtenim anàlogament a com s'obté el laplaciana a partir d'un argument de passeig aleatori, generalitzant el tipus de passeig. Estudiem l'operador donant dues definicions equivalents, una com a operador no local i l'altra a partir de la transformada de Fourier. Les dues definicions ens permeten veure de forma clara que aquest operador és una generalització no local del laplaciana.

Modelitzant la migració de poblacions arribarem, en el **tercer capítol** del treball, a l'operador convolutiu $J * u - u$. També l'obtidrem fent servir derivades funcionals, generalitzant el funcional que té com a equació d'Euler-Lagrange l'equació de la calor.

Un cop presentats els dos operadors no locals, arribem al **quart capítol** del treball. Es tracta del capítol més important i el de més dificultat tècnica. Veurem que, sota certes hipòtesis, el comportament asimptòtic de les solucions de l'equació convolutiva és el mateix que el de les solucions de l'equació fraccionària. El cas rellevant s'assoleix quan $\alpha = 2$ ja que estarem dient que, asimptòticament, les solucions del model convolutiu *no local* i les del model de la calor *local* decauen de la mateixa manera.

En particular, veurem que el comportament asimptòtic de les solucions només depèn del comportament de \hat{J} a prop de l'origen, i el resultat serà cert quan l'expansió de $\hat{J} - 1$ sigui una petita variació del símbol de Fourier del laplaciana fraccionari.

Finalment en el **cinquè** i últim **capítol**, veurem que també sota certes condicions, si reescalem les tres equacions per un paràmetre $\varepsilon \ll 1$, els punts d'acumulació de les respectives solucions u_ε minimitzen el mateix funcional i, per tant, resolen la mateixa equació d'Euler-Lagrange.

Ens caldrà introduir la noció de Γ -convergència i de mesura de Hausdorff, i presentarem el resultat a partir de l'ús d'aquestes equacions en la modelització de la transició de fases. Pel laplacà, enunciamos i demostrarem el teorema de Modica-Mortola, i per acabar enunciamos els resultats anàlegs pels dos operadors no locals.

Suposem que ja es coneixen resultats bàsics d'Anàlisi Funcional i d'Equacions en Derivades Parcial, des dels espais L^p als espais de Sobolev, passant per resultats de convergència integral. Malgrat no recollir els resultats en cap capítol del treball, a l'apèndix hi tenim un recopilatori dels resultats emprats en els diferents punts del discurs.

Capítol 1

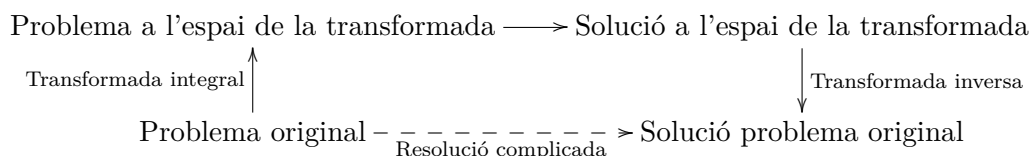
Transformada de Fourier

La transformada de Fourier és una generalització de les sèries de Fourier en que les funcions poden ser no periòdiques. És un tipus de *transformada integral*, és a dir, donada una funció f és una transformació del tipus

$$F(y) = \int_{x_1}^{x_2} K(y, x) f(x) dx$$

on la funció K s'anomena *nucli* o *kernel* de la transformació. D'aquesta manera fem correspondre a cada funció f una altra funció F definida en un espai diferent.

La transformada de Fourier ens proporciona una tècnica important per estudiar equacions en derivades parcials lineals, a coeficients constants; ens permet convertir certes EDPs en equacions algebraïques o en equacions diferencials més senzilles. La idea és la següent:



Ens caldrà, doncs, estudiar sota quines condicions podem aplicar la transformada a una funció i què ens cal per recuperar una funció a partir de la seva transformada.

Seguirem l'estudi de L.C. Evans a [8], i si no s'especifica el contrari els resultats provenen del llibre. En tota la secció les funcions estan avaluades en els complexos i $\bar{}$ denota el conjugat complex. Comencem per introduir la notació multi-índex, que ens apareixerà en parlar de derivades.

Definició 1.1 (Notació multi-índex). Un vector de la forma $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, on cada component α_i és un nombre natural, s'anomena *multi-índex* d'*ordre*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Donat un multi-índex α , definim

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u.$$

1.1 Definicions i propietats elementals

Definició 1.2 (Transformada de Fourier a L^1). Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definim la seva *transformada de Fourier* com

$$\hat{u}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n), \quad (1.1)$$

i la seva *transformada de Fourier inversa* o *antitransformada de Fourier* com

$$\check{u}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} u(x) dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n). \quad (1.2)$$

Com que $|e^{\pm ix \cdot \xi}| = 1$ i $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, aquestes dues integrals convergeixen per tot $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Clarament tenim que es tracta de dues aplicacions lineals, és a dir, donats $a, b \in \mathbb{C}$ se satisfà que $(au + bv)^\wedge(\xi) = a\hat{u}(\xi) + b\hat{v}(\xi)$, i el mateix és cert per l'antitransformada. A més, usant aquesta linealitat, si tenim $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tals que $\hat{u} = \hat{v}$ aleshores $u(x) = v(x)$ qpt $x \in \mathbb{R}^n$, i tenim el mateix per la transformada inversa.

El teorema següent, de [12], ens dóna les primeres propietats que estudiarem.

Teorema 1.1 (Propietats de la transformada de Fourier). Sigui $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Llavors,

1. \hat{u} i \check{u} són fitades i contínues.
2. Lema de Riemann - Lebesgue: $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{u}(\xi) = 0$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \check{u}(x) = 0$.
3. $(u(x - a))^\wedge(\xi) = e^{-i\xi \cdot a} \hat{u}(\xi)$.
4. $\hat{u}(\xi - a) = (e^{ia \cdot x} f'(x))^\wedge(\xi)$.

Demostració. Ho demostrem per \hat{u} . Per a \check{u} és anàleg.

1. Per veure que és una funció fitada és suficient notar que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix \cdot \xi}| |u(x)| dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Per demostrar la continuïtat prenem una successió $\xi_n \rightarrow \xi$ i hem de veure que $\hat{u}(\xi_n) \rightarrow \hat{u}(\xi)$. Ho obtenim directament aplicant el Teorema de la Convergència Dominada.

2. Ho demostrarem en la secció 1.3 del capítol, ja que en la demostració es fa servir l'espai de Schwartz.
3. i 4. es poden comprovar fàcilment a partir de la definició.

□

A continuació introduïm el conegut Teorema de Plancherel, que ens permetrà definir la transformada de Fourier a l'espai $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.2 (Plancherel). Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ aleshores $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ i

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.3)$$

Demostració. Dividim la demostració en dos passos.

1. Per començar notem que si $v, w \in L^1(\mathbb{R}^n)$ aleshores $\hat{v}, \hat{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. A més,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\hat{w}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(y)w(y)dy, \quad (1.4)$$

ja que les dues expressions valen $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} v(x)w(y)dx dy$.

Es pot calcular (vegeu l'observació 1.1) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}, \quad (t > 0).$$

Si definim $v_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon|x|^2}$ amb $\varepsilon > 0$, usant el càlcul anterior tindrem que

$$\hat{v}_\varepsilon(y) = \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}}}{(2\varepsilon)^{n/2}}.$$

Per tant, (1.4) implica que per tot $\varepsilon > 0$ tenim que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(y)e^{-\varepsilon|y|^2} dy = \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x)e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} dx. \quad (1.5)$$

2. Prenem $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ i definim $v(x) := \bar{u}(-x)$. Sigui

$$w = u * v = \int_{\mathbb{R}^n} u(y-x)v(x)dx.$$

Comencem per observar que $w \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$. Que $w \in C(\mathbb{R}^n)$ es segueix del resultat següent, que trobem a [11]:

Lema 1.1. Les translacions són contínues a $L^p(\mathbb{R}^n)$ amb la norma L^p si $1 \leq p < +\infty$. És a dir, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$ aleshores

$$\|\tau_y g - g\|_{L^p} \leq \varepsilon,$$

on $\tau_y g(x) = g(x-y)$ és la translació de g per y .

El lema es demostra fàcilment en les funcions contínues amb suport compacte, i es pot estendre per densitat a l'espai $L^1(\mathbb{R}^n)$. Usant el lema tenim que

$$\begin{aligned} |w(y+t) - w(y)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)| |u(y+t-x) - u(y-x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)| |\tau_t u(y-x) - u(y-x)| dx \\ &= \varepsilon \|u\|_{L^1}, \end{aligned}$$

sempre que t sigui prou petit. Per tant w és uniformement contínua.

Vegem que pertany a $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |w(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y) dy \right| dx = \left| \int_{\mathbb{R}^n} v(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) dx \right) dy \right| < +\infty,$$

on en la última igualtat hem usat el Teorema de Fubini-Tonelli i en la desigualtat final hem fet servir que $\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) dx$ i que $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

A més, és clar que w està fitada quasi per tot punt ja que $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i, com que es tracta d'un espai de Banach, tenim que $uv \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Així doncs també tenim $w \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

D'acord amb el teorema 1.3 a continuació, tenim que $\hat{w} = (2\pi)^{n/2} \hat{u} \hat{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Però

$$\hat{u}(\xi) = \overline{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \bar{u}(x) dx = (\text{Canvi: } x \rightarrow -x) = \hat{v}(\xi),$$

i per tant $\hat{w} = (2\pi)^{n/2} |\hat{u}|^2$.

Recordem que la solució de l'equació de la calor amb condició inicial $g \in (C^0 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$ ve donada per

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0),$$

i satisfà que

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0, 0)} u(x, t) = g(x^0) \text{ per cada punt } x^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Usant aquest resultat en el cas $x^0 = 0$ i que w és contínua i de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tenim que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} dx = (2\pi)^{n/2} w(0).$$

Com que $\hat{w} = (2\pi)^{n/2} |\hat{u}|^2 \geq 0$, podem aplicar el Teorema de la Convergència Monòtona i fent $\varepsilon \rightarrow 0^+$ a (1.5) deduïm que \hat{w} és integrable, concretament

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(\xi) d\xi = (2\pi)^{n/2} w(0),$$

i per tant $\hat{u} \in L^2$.

Finalment,

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 dy = w(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(-x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

La demostració per \check{u} és similar. □

Observació 1.1. A la demostració anterior hem usat que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \quad (t > 0).$$

Ho demostrem en un cas més general, per poder aprofitar el càlcul en demostracions posteriors. Considerem $a, b \in \mathbb{R}$, amb $b > 0$, i definim $z = b^{1/2}x - \frac{a}{2b^{1/2}}i$, $x \in \mathbb{R}$. D'aquesta manera, fent el canvi de variable obtenim que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{iax-bx^2} dx = \frac{e^{-a^2/4b}}{b^{1/2}} \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz,$$

on $\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = -\frac{a}{2b^{1/2}} \right\}$. Si deformem Γ en l'eix real obtenim

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \pi^{1/2}.$$

I d'aquí deduïm

$$\int_{\mathbb{R}} e^{iax-bx^2} dx = e^{-a^2/4b} \left(\frac{\pi}{b} \right)^{1/2}.$$

Finalment, podem generalitzar al cas en que integrem sobre \mathbb{R}^n . Prenem $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ia \cdot x - bx^2} dx = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{ia_j x_j - bx_j^2} dy_j = \left(\frac{\pi}{b} \right)^{n/2} e^{-|a|^2/4b}.$$

Obtenim directament el nostre resultat substituint a i b pels seus valors corresponents.

Ara ja ho tenim tot a punt per poder generalitzar la definició de transformada de Fourier a L^2 .

Definició 1.3 (Transformada de Fourier a L^2). Sigui $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Considerem una successió $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u_k \rightarrow u \quad \text{a } L^2(\mathbb{R}^n).$$

D'acord amb el teorema de Plancherel (teorema 1.2):

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u_k - u_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_k - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

i per tant $\{\hat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ és una successió de Cauchy a $L^2(\mathbb{R}^n)$, que és un espai complet. Conseqüentment, aquesta successió convergeix a una funció de $L^2(\mathbb{R}^n)$, que definim que sigui \hat{u} :

$$\hat{u}_k \rightarrow \hat{u} \quad \text{a } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Observació 1.2. La definició anterior té sentit doncs $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ és dens dins $L^2(\mathbb{R}^n)$, ja que les funcions contínues són denses a $L^1(\mathbb{R}^n)$ i a $L^2(\mathbb{R}^n)$ i per tant estan a la intersecció. Per aquest motiu la successió $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ està ben definida.

A més, \hat{u} no depèn de la successió $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ que escollim. Per veure-ho suposem que tenim dues successions diferents $\{u_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ i $\{u_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, convergents a la mateixa funció u en les condicions de la definició. Anomenem \hat{u}_1 i \hat{u}_2 a les transformades obtingudes a partir de les successions anteriors, respectivament. Definim la successió

$$\{v_k\}_{k=1}^{\infty}, \text{ amb } v_k = u_k^1 - u_k^2.$$

Notem que $v_k \rightarrow 0$ a $L^2(\mathbb{R}^n)$ i que $v_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aplicant Convergència Dominada obtenim

$$\hat{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{v}_k = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x) dx = 0.$$

D'altra banda

$$\hat{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{v}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{u}_k^1 - \hat{u}_k^2 = \hat{u}_1 - \hat{u}_2,$$

d'on deduïm que les dues successions ens donen la mateixa transformada de Fourier.

Teorema 1.3 (Més propietats de la transformada de Fourier). Siguin $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Aleshores,

1. $\int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \bar{\hat{v}} dy.$
2. $\widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \hat{u}$ per a tot α tal que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
3. $(u * v)^\wedge = (2\pi)^{n/2} \hat{u} \hat{v}.$
4. Teorema d'inversió de Fourier: $u = (\hat{u})^\vee.$

Sota les hipòtesis del Teorema d'inversió de Fourier tindrem que u coincideix qpt amb una funció contínua, usant el teorema 1.1.

Demostració. 1. Siguin $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Aleshores pel teorema 1.2

$$\|u + \alpha v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\hat{u} + \widehat{\alpha v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Expandint l'expressió de les normes obtenim

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 + |\alpha v|^2 + \bar{u}(\alpha v) + u(\bar{\alpha} \bar{v}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 + |\widehat{\alpha v}|^2 + \bar{\hat{u}}(\widehat{\alpha v}) + \hat{u}(\bar{\alpha} \bar{\hat{v}}) dy,$$

i tornant a aplicar el teorema 1.2

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \bar{u} v + \bar{\alpha} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \bar{\hat{u}} \hat{v} + \bar{\alpha} \hat{u} \bar{\hat{v}} dy.$$

Prenent $\alpha = 1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{u} v + u \bar{v} = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\hat{u}} \hat{v} + \hat{u} \bar{\hat{v}},$$

prenent $\alpha = i$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{u} v - u \bar{v} = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\hat{u}} \hat{v} - \hat{u} \bar{\hat{v}},$$

i combinant les igualtats obtingudes deduïm 1.

2. Si u és una funció suau i amb suport compacte,

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha u}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} D^\alpha u(x) dx \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha (e^{-ix \cdot \xi}) u(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} (i\xi)^\alpha u(x) dx = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi), \end{aligned}$$

on en la primera igualtat hem usant la fórmula d'integració per parts α vegades.

Com que les funcions $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ són denses a $L^2(\mathbb{R}^n)$ i hem suposat que $D^\alpha u$ és suau, la fórmula també és certa si $u, D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

3. Considerem dues funcions $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ i $y \in \mathbb{R}^n$. Aleshores,

$$\begin{aligned} (\widehat{u * v})(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} u(z)v(x-z) dz dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot \xi} u(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-z) \cdot \xi} v(x-z) dx \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot \xi} u(z) dz \hat{v}(\xi) \\ &= (2\pi)^{n/2} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi). \end{aligned}$$

És suficient demostrar-ho a $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ perquè es tracta d'un conjunt dens a $L^2(\mathbb{R}^n)$.

4. Seguim la demostració del teorema que apareix a [11]. Fixem $z \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ i definim $v_\varepsilon(x) = e^{ix \cdot z - \varepsilon|x|^2} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Llavors, usant els càlculs de l'observació 1.1 obtenim que

$$\hat{v}_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot (\xi - z) - \varepsilon|x|^2} dx = \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} e^{-\frac{|\xi - z|^2}{4\varepsilon}},$$

que també pertany a $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, podem usar (1.4) per deduir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{iz \cdot \xi - \varepsilon|\xi|^2} d\xi = \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-\frac{|x-z|^2}{4\varepsilon}} dx.$$

La part de la dreta de la igualtat convergeix a $(2\pi)^{n/2} u(z)$ puntualment, quan fem $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Ho veiem aplicant el resultat següent, que prenem de [11] i que demostrarem a l'observació 1.3:

Lema 1.2. Sigui $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = a$. Definim $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \varphi(\varepsilon^{-1}x)$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, aleshores

$$f * \varphi_\varepsilon \rightarrow af, \quad \text{quan } \varepsilon \rightarrow 0,$$

puntualment en la norma de L^p .

En el nostre cas, $\varphi_\varepsilon(x) = e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}$ que sabem que satisfà les hipòtesis del lema amb $a = 1$ perquè és la solució fonamental de la calor.

En fer el límit de la part de l'esquerra, podem intercanviar el límit i la integral pel Teorema de la Convergència Dominada, ja que \hat{u} és una funció fitada perquè $u \in L^1$ i $e^{-\varepsilon|y|^2}$ és integrable a \mathbb{R}^n .

Per tant obtenim:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{iz \cdot \xi} d\xi = u(z), \quad \text{qpt } z,$$

tal i com volíem. Per densitat, podem estendre el resultat al cas $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Observem que l'antitransformada de Fourier de \hat{u} , que ve donada per la integral $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y) e^{iz \cdot y} dy$, està ben definida perquè per definició de la transformada de tenim que $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ implica $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

□

Observació 1.3 (Demostració del Lema 1.2). Per donar la prova del punt 4. del teorema 1.3 per finalitzada, ens falta demostrar el lema auxiliar que hem fet servir.

Fent el canvi de variable $y = \varepsilon z$ tenim que

$$\begin{aligned} f * \varphi_\varepsilon(x) - af(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)] \varphi_\varepsilon(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-\varepsilon z) - f(x)] \varphi(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [\tau_{\varepsilon z} f(x) - f(x)] \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Apliquem ara la desigualtat de Minkowski per integrals, que també podem trobar enunciada a [11], i obtenim que

$$\|f * \varphi_\varepsilon - af\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{\varepsilon z} f - f\|_{L^p} \varphi(z) dz.$$

Observem que $\|\tau_{\varepsilon z} f - f\|_{L^p}$ està fitat per $2\|f\|_{L^p}$ i que tendeix a 0 quan $\varepsilon \rightarrow 0$ per a cada z , si apliquem la continuïtat de les translacions a L^p .

Finalment, el resultat se segueix d'aplicar el Teorema de la Convergència Dominada. □

Observació 1.4. De les demostracions dels punts 2, 3 i 4 del teorema 1.3 tenim que els resultats també són vàlids si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. En el punt 4 ens cal afegir la hipòtesi $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per assegurar que la seva antitransformada de Fourier estigui ben definida.

Observació 1.5. El punt 2 del teorema 1.3 ens mostra perquè la transformada de Fourier és interessant a l'hora de resoldre EDPs. En aplicar la transformada les derivades es tornen productes, és a dir, passem de tenir operacions analítiques a tenir operacions algebraïques, i a l'inrevés.

1.2 Solució fonamental de la calor

Com hem comentat a la introducció del capítol, la transformada de Fourier ens proporciona una eina útil per resoldre equacions en derivades parcials. Ara veurem com en el cas de l'equació de la calor ens permet arribar fàcilment a l'expressió de la seva solució.

Considerem el problema de Cauchy per a l'equació de la calor:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 & \text{a } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{a } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Resolem el PVI usant la transformada de Fourier de u només respecte de les variable espacial x . Aplicant la transformada al sistema obtenim

$$\begin{cases} \hat{u}_t + D|y|^2\hat{u} = 0 & \text{per } t > 0, \\ \hat{u} = \hat{g} & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

Per calcular la transformada de Δu hem usat la propietat 2 del teorema 1.3, que en el cas $\alpha = 2$ ens queda: $\widehat{\Delta u} = -|\xi|^2\hat{u}$.

Si definim $v = \hat{u}$, tindrem que $v_t = -D|\xi|^2v$, $v|_{t=0} = \hat{g}$. Podem resoldre fàcilment l'EDO obtinguda per v , d'on obtenim que

$$v(\xi, t) = \hat{g}(\xi)e^{-D|\xi|^2t}.$$

Per recuperar u necessitem aplicar la transformada de Fourier inversa a la solució que hem obtingut, així

$$u = (\hat{g}e^{-D|\xi|^2t})^\vee.$$

Usant la propietat 3 del teorema 1.3 obtenim

$$\widehat{g * F} = (2\pi)^{n/2}\hat{g}\hat{F} = (2\pi)^{n/2}\hat{u} \Rightarrow u = \frac{g * F}{(2\pi)^{n/2}},$$

on F és una funció tal que $\hat{F} = e^{-D|\xi|^2t}$.

Calculem l'expressió de F :

$$F(x) = (e^{-D|\xi|^2t})^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi - D|\xi|^2t} d\xi = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{D|x|^2}{4t}},$$

on en la última igualtat hem aplicat l'observació 1.1.

Finalment,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} g * \left(\frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{D|x|^2}{4t}} \right) \\ &= g * \Gamma \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy, \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0). \end{aligned} \tag{1.7}$$

La fórmula obtinguda no està ben definida a $t = 0$. Diem que (1.7) satisfà el problema de Cauchy (1.6) si verifica l'equació i si $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = g(x)$.

Hem obtingut l'expressió de la solució que ja coneixem, però d'una manera molt més directa. Tanmateix, tots els càlculs que hem fet són formals: recordem que per tal de que la transformada i l'antitransformada de Fourier estiguin ben definides les funcions sobre les que les apliquem han de satisfer certes hipòtesis, i el mateix passa pel Teorema d'inversió de Fourier.

Si $g, \hat{g} \in L^1$, o bé si $g \in L^2$, tots els passos que hem fet estan justificats.

Per tenir la integral de (1.7) ben definida és suficient que g sigui una funció fitada. En aquest cas no podem justificar els passos que hem fet, i ens faltaria veure que, efectivament, la solució formal satisfà el PVI (1.6).

1.3 Espai de Schwartz

A la secció 1 d'aquest mateix capítol, hem estudiat la transformada de Fourier i la transformada de Fourier inversa definint-les sobre l'espai $L^1(\mathbb{R}^n)$. Observem que aquestes dues aplicacions no són inverses l'una de l'altra en sentit estricte, de fet el domini de la transformada inversa és $L^1(\mathbb{R}^n)$ per definició, però la imatge de la transformada conté funcions no integrables a \mathbb{R}^n .

Per exemple si considerem $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ tindrem que $\hat{f}(y) = \frac{1 - e^{-iy}}{-iy\sqrt{2\pi}} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

De fet, el Lema de Riemann-Lebesgue ens diu que la transformada de Fourier és una aplicació lineal de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $C_0(\mathbb{R}^n)$, on $C_0(\mathbb{R}^n)$ és l'espai de les funcions contínues f que tendeixen a 0 a l'infinit, és a dir, tals que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix R tal que $|f(x)| < \varepsilon$ si $|x| > R$.

Ens podem plantejar si existeix algun subespai $S \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ que sigui invariant respecte la transformada de Fourier, en el sentit de que si $f \in S$ aleshores $\hat{f} \in S$. La resposta és sí: l'*espai de Schwartz* és un espai de funcions format per les funcions suaus tals que totes les seves derivades (inclosa la pròpia funció) són ràpidament decreixents i la transformada de Fourier és un automorfisme en aquest espai.

En aquest apartat introduïrem aquest espai i en donarem algunes de les propietats més importants. Totes els resultats es poden trobar a [12] i [20].

Definició 1.4 (Funció de Schwartz). Una *funció de Schwartz* és una funció $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

- $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- Per cada $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i per cada $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq |x|^{-d}$$

si $|x|$ és suficientment gran.

L'*espai de Schwartz* és l'espai vectorial topològic format per totes aquestes funcions i el notem $S(\mathbb{R}^n)$.

Equivalentment, podem escriure que

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \exists C_{d,k} \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^d \varphi^{(k)}(x)| \leq C_{d,k} \forall d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

Els lemes següents ens permeten veure que l'espai $S(\mathbb{R}^n)$ és dens dins de l'espai $L^p(\mathbb{R}^n)$, amb $1 \leq p < \infty$.

Lema 1.3. Les funcions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ amb suport compacte, $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, pertanyen a $S(\mathbb{R}^n)$.

Demostració. Considerem $f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Totes les derivades de f són de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i el seu suport està inclòs en el suport de f , per tant $x^d f^{(k)}(x)$ també pertany a $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i té un màxim a \mathbb{R}^n pel Teorema de Weierstrass. D'aquí deduïm, per definició de l'espai de Schwartz, que $f \in S(\mathbb{R}^n)$. \square

Lema 1.4. Per a p tal que $1 \leq p \leq \infty$ se satisfà que $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostració. El cas $p = \infty$ és trivial a partir de les definicions dels dos espais.

Considerem doncs $1 \leq p < \infty$. Per definició, les funcions de $S(\mathbb{R}^n)$ i totes les seves derivades decauen més ràpidament que l'inversa de qualsevol polinomi. Usant això obtenim el resultat, doncs si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ i $mp - (n - 1) > 1$ tenim que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{C_1}{1 + |x|^m} \right)^p dx = C_2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 + r^m} \right)^p r^{n-1} dr < +\infty,$$

on C_1, C_2 són constants, la primera dependent de f i la segona de p . □

D'aquest lema deduïm que la definició de transformada de Fourier donada per a $L^1(\mathbb{R}^n)$ té sentit en aquest espai i tots els resultats vistos anteriorment també són vàlids ara.

Lema 1.5. L'espai $S(\mathbb{R}^n)$ és dens a $L^p(\mathbb{R}^n)$, amb $1 \leq p < \infty$.

Demostració. Hem vist al lema 1.3 que $C_C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$. Usant aquest resultat i la densitat de $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p < \infty$, obtenim el que volem provar. □

Lema 1.6. Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ i α és un multi-índex, aleshores tenim que $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i que

$$D^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}.$$

Demostració.

$$\begin{aligned} D^\alpha \hat{f}(y) &= \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} e^{-ix \cdot y} dx \\ &= (-i)^{|\alpha|} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x^\alpha e^{-ix \cdot y} dx \\ &= (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}(y). \end{aligned}$$

En la segona igualtat hem fet servir la derivació sota del signe integral, ja que tenim que $f \in S(\mathbb{R}^n)$, i aleshores també $x^\alpha f \in S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Per veure que $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ només ens cal recordar que, tal i com hem vist al teorema 1.1, la transformada de Fourier d'una funció de $L^1(\mathbb{R}^n)$ és contínua i per tant es dedueix de la igualtat que acabem de provar. □

Lema 1.7. Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$, aleshores $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ i $\check{f} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Demostració. Ho provem per \hat{f} ; per \check{f} es pot veure anàlogament.

Comencem per observar que, com que acabem de veure que $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, per a les funcions d'aquest espai també són vàlides les propietats que hem vist al teorema 1.3. Concretament tenim que

$$\xi^{-\alpha} \widehat{D^\alpha f} = i^{|\alpha|} \hat{f}.$$

A més, per definició de $S(\mathbb{R}^n)$, per tot α tenim que $D^\alpha f \in S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Aplicant el lema de Riemann-Lebesgue, que ens diu que $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \hat{f}(y) = 0$, a la propietat anterior i a l'expressió del lema 1.6 obtenim que $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$. \square

Combinant aquest últim resultat amb l'últim punt del teorema 1.3 obtenim que la transformada de Fourier és un automorfisme a $S(\mathbb{R}^n)$.

Les propietats que hem vist de $S(\mathbb{R}^n)$ ens permeten demostrar el Lema de Riemann-Lebesgue, que ja hem introduït al teorema 1.1.

Teorema 1.4 (Lema de Riemann-Lebesgue). Sigui $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aleshores

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{u}(\xi) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \check{u}(x) = 0.$$

Demostració. Ho demostrarem per \hat{u} . Per \check{u} és anàleg.

Abans de començar, recordem que l'espai $C_0(\mathbb{R}^n)$ és la completació de $C_C(\mathbb{R}^n)$ respecte de la norma del suprem, i que és un espai de Banach (vegeu, per exemple, [12]).

Observem que si $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ aleshores

$$(2\pi)^{n/2} |\hat{\varphi}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx,$$

d'on prenent el suprem sobre ξ tenim que

$$(2\pi)^{n/2} \|\hat{\varphi}\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^1}.$$

Fent servir que $S(\mathbb{R}^n)$ és dens a $L^1(\mathbb{R}^n)$, tenim que si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ llavors existeix una successió $(\varphi_m) \subset S(\mathbb{R}^n)$ que convergeix a u en la norma de L^1 . La successió $(\hat{\varphi}_m)$ serà de Cauchy amb la norma del suprem ja que

$$(2\pi)^{n/2} \|\hat{\varphi}_m - \hat{\varphi}_l\|_{L^\infty} \leq \|\varphi_m - \varphi_l\|_{L^1}.$$

Com que per definició de l'espai de Schwartz, $S(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, i $C_0(\mathbb{R}^n)$ és un espai complet, existeix una funció $\hat{g} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{\varphi}_m \rightarrow \hat{g}$ uniformement. A més, $\hat{f} = \hat{g}$ ja que

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2} \left| \hat{g}(\xi) - \hat{f}(\xi) \right| &= (2\pi)^{n/2} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \hat{\varphi}_m(\xi) - \hat{f}(\xi) \right| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi_m(x) - f(x)] e^{-ix \cdot \xi} dx \right| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_m - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0, \end{aligned}$$

i d'aquí deduïm el resultat. \square

Capítol 2

Del passeig aleatori al laplacià fraccionari

Els *processos de Lévy* són un tipus de processos estocàstics que tenen diverses aplicacions en economia, física, enginyeria i ecologia, entre d'altres. Algunes d'aquestes aplicacions, així com la definició formal i algunes propietats d'aquest tipus de procés, es poden trobar a [4].

Un passeig aleatori amb passos de llargada arbitrària, que anomenem *vol de Lévy*, ens descriu en el pas a temps continu un procés de Lévy. En aquest capítol veurem un exemple de com es poden obtenir integrals singulars com el límit continu de vols de Lévy. D'aquesta manera introduïrem l'operador anomenat *laplacià fraccionari*: el definirem de dues maneres diferents, com a operador no local i mitjançant la transformada de Fourier, i veurem que les dues definicions són equivalents.

Aquesta secció està basada en l'estudi de E. Valdinoci a l'article *From the long jump random walk to the fractional laplacian*, [21].

Seguint la convenció considerada per l'autor de l'article, no tindrem en compte les constants normalitzadores, és a dir, escrivint $X = Y$ voldrem dir que existeix una constant $C > 0$ tal que $X = CY$. Tornem a considerar la definició de transformada de Fourier de [8] que ja hem usat al capítol 1, per tant podrem aplicar totes les propietats que hem estudiat.

2.1 Introducció: Passeig aleatori estàndard

Un dels problemes més coneguts relacionat amb les EDPs és la modelització d'un passeig aleatori que estudia el camí que segueix una partícula. Un passeig aleatori és la formalització de la idea intuïtiva de prendre passos successius, cadascun en una direcció aleatòria. Les distribucions de probabilitat de la longitud dels passos i de la direcció en que es realitzen ens defineixen el passeig.

Introduïm \mathbb{Z}^n , la malla formada pels punts $x \in \mathbb{R}^n$ tals que les seves coordenades són nombres enters. Donat un pas espacial $h > 0$, $h\mathbb{Z}^n$ denota la malla dels punts tals que els seves coordenades són enters multiplicats per h . Començant a $x = 0$ estudiem el moviment aleatori de la partícula sobre aquesta segona malla.

Cada punt $x \in h\mathbb{Z}^n$ té $2n$ punts veïns que són

$$x + he_j, x - he_j \quad (j = 1 \dots n),$$

on e_1, \dots, e_n és la base canònica de \mathbb{R}^n . Considerem que la partícula es pot moure d'un punt a qualsevol dels seus punts veïns amb la mateixa probabilitat, amb independència del pas anterior i en un pas temporal $\tau > 0$.

Si definim $u(x, t)$ com la probabilitat de que la partícula estigui en el punt x a l'instant t i fem $h, \tau \rightarrow 0$ obtenim que el passeig continu seguit per la partícula es modelitza per l'equació de difusió

$$u_t = D\Delta u,$$

on $\frac{h^2}{\tau} = 2nD = \text{constant}$.

La deducció completa és semblant a la que farem a la secció següent i es pot trobar a [17].

2.2 Vols de Lévy i nuclis d'integrals singulars

El nostre propòsit és estudiar una generalització del moviment aleatori d'una partícula, en la qual la partícula pot saltar entre diferents punts d'una malla infinita amb probabilitat donada per una funció \mathcal{K} . Com ja hem dit, aquest tipus de moviment aleatori es coneix com a *vol de Lévy*.

A diferència del passeig aleatori estàndard, en un vol de Lévy les partícules poden fer salts arbitràriament llargs tot i que la probabilitat de fer-los sigui petita.

Per la funció \mathcal{K} que prendrem més endavant (vegeu (2.4)), a la figura 2.1, hi tenim la representació de les trajectòries obtingudes per simulació numèrica d'un passeig aleatori estàndard i d'un vol de Lévy en el pla, pel mateix nombre de passos. Hi veiem que, efectivament, en el vol de Lévy hi apareixen salts de diferents longituds que fan que la trajectòria presenti l'estructura d'agrupacions amb passos petits, connectades per passos llargs. En el passeig estàndard, la trajectòria omple pràcticament tot l'espai i no es distingeixen agrupacions diferents.

Fixem un pas $h > 0$ i considerem un passeig aleatori sobre la malla $h\mathbb{Z}^n$.

Comencem definint la funció $\mathcal{K} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ que ens dóna la probabilitat de fer cada salt. En particular interpretem $\mathcal{K}(y)$, quan $y \in \mathbb{Z}^n$, com la probabilitat de fer un salt de 0 al punt $hy \in h\mathbb{Z}^n$.

Com que estem assignant la mateixa probabilitat a qualsevol direcció, és natural assumir que \mathcal{K} sigui parella, és a dir, $\mathcal{K}(y) = \mathcal{K}(-y)$ per tot $y \in \mathbb{R}^n$ i, com que és una probabilitat, que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}(k) = 1. \tag{2.1}$$

Per la convenció que considerem de normalització de les constants, notem que la condició (2.1) només vol dir que la sèrie sigui convergent.

Suposem que en qualsevol unitat de temps τ , una partícula salta des d'un punt qualsevol de $h\mathbb{Z}^n$ a un altre punt. La probabilitat que té una partícula de saltar del punt $hk \in h\mathbb{Z}^n$ al punt



Figura 2.1: Comparació de les trajectòries d'un passeig aleatori estàndard (esquerra) i un vol de Lévy (dreta) amb \mathcal{K} definida a (2.4), $\alpha = 1.5$. Les dues trajectòries tenen el mateix nombre de passos (aprox. 7000). Font: [15],

$h\tilde{k}$ és $\mathcal{K}(k - \tilde{k}) = \mathcal{K}(\tilde{k} - k)$, i com en la secció anterior anomenem $u(x, t)$ a la probabilitat de que la nostra partícula estigui al punt $x \in h\mathbb{Z}^n$ en l'instant $t \in \tau\mathbb{Z}^+$. També podríem interpretar $u(x, t)$ com la probabilitat de que hi hagi una partícula amb aquestes coordenades.

Clarament, $u(x, t + \tau)$ és igual a la suma de probabilitats de totes les possibles posicions $x + hk$ en l'instant t ponderada per les probabilitats de saltar de $x + hk$ a x , és a dir,

$$u(x, t + \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}(k) u(x + hk, t). \quad (2.2)$$

Per tant, si fem servir la normalització (2.1), obtenim que

$$u(x, t + \tau) - u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}(k) (u(x + hk, t) - u(x, t)). \quad (2.3)$$

Prenem $\tau = h^\alpha$ i \mathcal{K} un nucli homogeni, és a dir, excepte constants de normalització que sigui de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(y) &= |y|^{-(n+\alpha)} \text{ si } y \neq 0, \\ \mathcal{K}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

amb $\alpha \in (0, 2)$. Veurem que en aquest cas obtenim l'equació de difusió amb el laplacià $(-\Delta)^{\alpha/2}$ en fer el límit $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$.

Observem que aquesta distribució de probabilitat satisfà (2.1): fent servir el Criteri Integral per a la convergència de sèries tenim que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{1}{|y|^{n+\alpha}} dy = \int_1^\infty r^{-n-\alpha} r^{n-1} dr = \int_1^\infty r^{-(\alpha+1)},$$

que és una integral convergent perquè $\alpha + 1 > 1$. Per tant la sèrie donada per \mathcal{K} és convergent. A més, \mathcal{K} és clarament parella i observem que

$$h^n \mathcal{K}(hk) = h^n |hk|^{-(n+\alpha)} = h^{n-n+\alpha} |k|^{-(n+\alpha)} = h^{-\alpha} \mathcal{K}(k) = \tau^{-1} \mathcal{K}(k) = \frac{\mathcal{K}(k)}{\tau}.$$

Per tant podem afirmar que

$$\frac{\mathcal{K}(k)}{\tau} = h^n \mathcal{K}(hk). \quad (2.5)$$

Definim la funció

$$\psi(y, x, t) = \mathcal{K}(y) (u(x + y, t) - u(x, t))$$

i fem servir l'expressió (2.5) per reescriure (2.3) com

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{\mathcal{K}(k)}{\tau} (u(x + hk, t) - u(x, t)) \\ &= h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}(hk) (u(x + hk, t) - u(x, t)) \\ &= h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \psi(hk, x, t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

L'última expressió que hem obtingut és la suma d'aproximació de Riemann de la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y, x, t) dy.$$

Recordem que:

Definició 2.1 (Suma de Riemann d'una funció). Sigui $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funció definida en $D \subset \mathbb{R}$. Sigui $I = [a, b] \subset D$ un interval tancat, i sigui $P = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$ una partició de I amb $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. La suma de Riemann de f sobre I amb partició P es defineix com

$$S = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) (x_k - x_{k-1}), \quad x_{k-1} \leq x_k^* \leq x_k.$$

La tria de $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ és arbitrària. Es compleix que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k(b-a)}{n}\right).$$

Per tant, fent el límit $\tau = h^\alpha \rightarrow 0^+$ a (2.6), és a dir, agafant el límit continu del passeig aleatori discret, obtenim que

$$u_t(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y, x, t) dy,$$

que es pot reescriure com

$$u_t(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x + y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+\alpha}} dy. \quad (2.7)$$

Això ens mostra com podem passar de tenir un passeig aleatori discret amb salts llargs a tenir, en el límit, una integral singular amb un nucli homogeni.

Podem afegir un terme no homogeni a l'equació (2.7). Pensem $u(x, t)$ com la probabilitat de tenir una partícula en (x, t) i suposem que el sistema pot introduir partícules en totes les posicions, és a dir, és un sistema amb fonts. Anomenem $f(x, t)$ a la probabilitat per unitat de temps de que s'introdueixi una partícula a la posició x en l'instant t . La probabilitat $f(x, t)$ també podria dependre de u . En aquest cas, cal reescriure l'equació (2.2) com

$$u(x, t + \tau) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}(k) u(x + hk, t) \right) + \tau f(x, t). \quad (2.8)$$

Seguint els passos anteriors, en dividir per τ el nou terme ja no dependrà ni de h ni de τ , que són els paràmetres que tendeixen a 0. Per tant l'equació que obtindrem serà

$$u_t(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x + y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+\alpha}} dy + f(x, t). \quad (2.9)$$

2.3 El laplací fraccionari

Definició 2.2 (Laplací fraccionari). Per una funció $u \in (L^\infty \cap C^2)(\mathbb{R}^n)$ i $\alpha \in (0, 2)$, definim el laplací fraccionari com

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x + y) - u(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy \left(= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^{n+\alpha}} dy \right), \quad (2.10)$$

on $P.V.$ denota el valor principal de la integral, és a dir,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{u(x + y) - u(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy.$$

Notem que la integral (2.7) presenta una singularitat quan $y = 0$. Tanmateix, sota les hipòtesis de la definició, la integral està ben definida en valor principal, és a dir, el límit anterior existeix i la definició té sentit.

Podem assegurar que el límit és finit perquè

1. $|y|^{-(n+\alpha)}$ és integrable a l'infinit.

Fent el canvi a variables esfèriques n -dimensionals tenim que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{1}{|y|^{n+\alpha}} dy = \int_1^\infty r^{-n-\alpha} r^{n-1} dr = \int_1^\infty r^{-(\alpha+1)} < +\infty,$$

on hem usat que $\alpha + 1 > 1$ per veure que la integral és convergent.

2. $\int_{B_1} \frac{\nabla u(x) \cdot y}{|y|^{n+\alpha}} dy = 0$, ja que la funció $y/|y|^{n+\alpha}$ és imparella.

El punt 1, juntament amb que u sigui fitada, ens dóna la convergència de la integral (2.10) a l'infinit.

Aplicant el punt 2, podem escriure la integral a prop de 0 de la forma

$$\int_{B_1} \frac{u(x+y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot y}{|y|^{n+\alpha}} dy,$$

i aquesta integral és convergent perquè, fent servir l'expansió de Taylor de u ,

$$\frac{u(x+y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot y}{|y|^{n+\alpha}} \leq \frac{\|D^2 u\|_{L^\infty} |y|^2}{|y|^{n+\alpha}} = \frac{\|D^2 u\|_{L^\infty}}{|y|^{n-2+\alpha}},$$

que podem veure que és integrable a prop de 0 fent el canvi a variables esfèriques anàlogament a com ho hem fet abans.

També és interessant escriure la integral (2.10) com un quocient diferencial ponderat, que veurem que serà de segon ordre. Per fer-ho, comencem per fer el canvi de variable $z = -y$ a la integral, obtenint

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-z) - u(x)}{|z|^{n+\alpha}} dz. \quad (2.11)$$

Reescrivim l'expressió (2.11) anomenant y a z , i tenim que

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) - u(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) - u(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-y) - u(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy. \end{aligned} \quad (2.12)$$

El que hem obtingut a (2.12) ens mostra com podem escriure la integral que ens defineix el laplacà fraccionari (2.10), amb un factor 2 multiplicant, com la mitjana del quocient incremental $u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)$ respecte del pes $|y|^{n+\alpha}$.

Aquesta representació també ens és útil per eliminar la singularitat de la integral a prop del 0, ja que si u és suau i considerem la seva expansió de Taylor fins a ordre 2 obtenim que

$$\frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+\alpha}} \leq \frac{\|D^2 u\|_{L^\infty}}{|y|^{n-2+\alpha}},$$

que ja hem vist que és integrable a prop de l'origen.

2.4 Nuclis i símbols de Fourier

Donada una funció u prou regular, el passeig aleatori que hem definit a l'apartat 2.2 ens ha portat a estudiar l'operador lineal \mathcal{L} definit com

$$\mathcal{L}u = \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)) \mathcal{K}(y) dy. \quad (2.13)$$

Podem considerar la transformada de Fourier de \mathcal{L} i calcular el seu *símbol* o *multiplicador de Fourier*.

Definició 2.3 (Símbol de Fourier). Sigui \mathcal{L} un operador lineal i u una funció suficientment regular. Definim el *símbol* o *multiplicador de Fourier* de \mathcal{L} com la funció $\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\widehat{\mathcal{L}u}(\xi) = \mathcal{S}(\xi)\hat{u}(\xi), \quad \text{qpt } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.14)$$

Amb u *suficientment regular* volem dir que ens cal tenir la transformada de Fourier de u i de $\mathcal{L}u$ ben definides.

Volem buscar la relació entre \mathcal{K} i \mathcal{S} . Fent servir la definició (2.13) i notant \mathcal{F} la transformada de Fourier respecte la variable espacial x , obtenim que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\xi)\hat{u}(\xi) &= \mathcal{F}(\mathcal{L}u) \\ &= \mathcal{F}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)) \mathcal{K}(y) dy\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}(u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))) \mathcal{K}(y) dy \\ &= \left(e^{i\xi \cdot y} + e^{-i\xi \cdot y} - 2\right) (\mathcal{F}u)(\xi) \mathcal{K}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{i\xi \cdot y} + e^{-i\xi \cdot y} - 2\right) \mathcal{K}(y) dy (\mathcal{F}u)(\xi) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} (\cos(\xi \cdot y) - 1) \mathcal{K}(y) dy (\mathcal{F}u)(\xi), \end{aligned}$$

per tant hem demostrat que

$$\mathcal{S}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\cos(\xi \cdot y) - 1) \mathcal{K}(y) dy. \quad (2.15)$$

2.5 El laplacilà fraccionari a l'espai de Fourier

Donem una definició alternativa per al laplacilà fraccionari, aquest cop en l'espai de Fourier.

Seguint les propietats que hem estudiat de la transformada de Fourier, tenim que

$$\widehat{-\Delta u}(\xi) = |\xi|^2 \hat{u}(\xi).$$

Per tant, generalitzant aquesta propietat, és natural definir el laplacilà fraccionari de la forma següent:

Definició 2.4 (Laplacilà fraccionari). Donat $\alpha \in (0, 2)$, definim el *laplacilà fraccionari* d'una funció $u \in H^{\alpha/2}$ com

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\alpha (\mathcal{F}u)), \quad (2.16)$$

on \mathcal{F} denota la transformada de Fourier. Dit d'una altra manera, el laplacilà fraccionari és l'operador que té com a símbol de Fourier la funció $|\xi|^\alpha$.

Observació 2.1. Si $u \in H^{\alpha/2} = W^{\alpha/2,2}$ podem assegurar que el símbol de Fourier de la definició 2.4 està ben definit: hem de poder calcular la transformada de Fourier de u i l'antitransformada de $|\xi|^\alpha \hat{u}$. És suficient imposar que les integrals

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}^2, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\alpha} \hat{u}^2$$

siguin finites, ja que per definició de la transformada $u \in L^2$ si i només si $\hat{u} \in L^2$. En el cas en que $u \in H^{\alpha/2}$ ho podem assegurar perquè, per definició de l'espai de Sobolev, tenim que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\alpha \hat{u}^2 < \infty.$$

Vegem a continuació que les dues definicions que hem donat de laplací fraccionari, 2.2 i 2.4, són equivalents.

Seguint la notació dels apartats anteriors, podem escriure les dues definicions com

$$\mathcal{S}(\xi) = |\xi|^\alpha \text{ i } \mathcal{K}(y) = -|y|^{-(n+\alpha)}.$$

Per tant, fent servir (2.15), haurem demostrat que són equivalents si veiem que

$$|\xi|^\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+\alpha}} dy. \quad (2.17)$$

Per començar observem que si $x \in \mathbb{R}$ aleshores podem afirmar:

1. $\sin(x) \leq x$.
2. $\cos(x) \geq \cos^2(x) \Rightarrow 1 - \cos(x) \leq 1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$.
3. $(1. + 2. \Rightarrow) 1 - \cos(x) \leq \sin^2(x) \leq |x|^2$.

Si prenem $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tenim que

$$\frac{1 - \cos(y_1)}{|y|^{n+\alpha}} \leq \frac{|y_1|^2}{|y|^{n+\alpha}} \leq \frac{1}{|y|^{n-2+\alpha}},$$

que és integrable a prop de 0.

D'aquí deduïm, juntament amb que $|y|^{-(n+\alpha)}$ és integrable a l'infinit, que la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(y_1)}{|y|^{n+\alpha}} dy \quad (2.18)$$

és positiva i convergent.

Definim la funció

$$\mathcal{J}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+\alpha}} dy.$$

Vegem primer que \mathcal{J} és invariant per rotacions, és a dir, que

$$\mathcal{J}(\xi) = \mathcal{J}(|\xi|e_1). \quad (2.19)$$

Si $n = 1$:

$$\mathcal{J}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(-\xi \cdot y)}{|y|^{n+\alpha}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+\alpha}} dy = \mathcal{J}(\xi),$$

d'on $\mathcal{J}(\xi) = \mathcal{J}(|\xi|) = \mathcal{J}(|\xi|e_1)$.

Si $n \geq 2$: Considerem una rotació R tal que $R(|\xi|e_1) = \xi$ i denotem R^T la seva transposada. Obtenim que:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+\alpha}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos((R(|\xi|e_1)) \cdot y)}{|y|^{n+\alpha}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos((|\xi|e_1) \cdot R^T(y))}{|y|^{n+\alpha}} dy = (\text{Canvi de variable: } R^T y = z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos((|\xi|e_1) \cdot z)}{|z|^{n+\alpha}} dz = \mathcal{J}(|\xi|e_1). \end{aligned}$$

Per tant podem fer el canvi de variable $z = |\xi|y$ a la definició de \mathcal{J} i obtenim que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\xi) &= \mathcal{J}(|\xi|e_1) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(|\xi|y_1)}{|y|^{n+\alpha}} dy \\ &= \frac{1}{|\xi|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(z_1)}{|z/|\xi||^{n+\alpha}} dz = \frac{1}{|\xi|^n} |\xi|^{n+\alpha} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(z_1)}{|z|^{n+\alpha}} dz}_{\text{Constant}} \\ &= |\xi|^\alpha. \end{aligned}$$

Hem demostrat (2.17) i, per tant, l'equivalència entre les dues definicions de laplací fraccioniari.

Finalment, notem que podem escriure la densitat de probabilitat límit del passeig aleatori amb passos llargs que hem obtingut en la segona secció del capítol com

$$u_t = -(-\Delta)^{\alpha/2} u,$$

en el cas homogeni i com

$$u_t = -(-\Delta)^{\alpha/2} u + f,$$

en el cas no homogeni.

Capítol 3

De la migració de poblacions al model convolutiu

La dispersió espacial de cèl·lules o d'organismes és un tema central en biologia, i conseqüentment l'estudi de l'evolució d'aquesta dispersió pren una gran importància. Els models que es proposen per la dispersió d'organismes són, en gran part, de dos tipus. El primer tipus són models discrets en espai i temps: s'anomenen *patch models* i es solen tractar numèricament. El segon tipus són models continus que es basen en equacions de reacció-difusió de la forma: $u_t = D\Delta u + f(u)$.

En algunes casos, la classe de models de reacció-difusió és massa restrictiva, ja que assumeix que el moviment dels organismes està governat per un passeig aleatori estàndard. El nostre propòsit és derivar un model continu més general, però que continuï sent tractable analíticament.

Derivarem el model de dues maneres diferents: discretitzant el temps i l'espai i fent el límit per passar al model continu, seguint l'article *The evolution of dispersal* de V. Hutson, S. Matinez, K. Mischaikow, [13], i a continuació mitjançant derivades de funcionals basant-nos en l'article *Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions* del matemàtic P. Fife, [10].

3.1 Presentació del model

Fent servir la notació usual, denotem per x la posició i per t l'instant de temps. La base del model que obtindrem són les equacions de la forma

$$u_t = Du + f(u, x, t),$$

on D és un operador no local que mesura la difusió dels organismes en l'espai i es construeix a partir d'un nucli integral. Considerem el cas més senzill, que ve donat per

$$(Du)(x) = (D_{\rho,L}u)(x) = \rho \left\{ \frac{1}{L} \int_{\Omega} k \left(\frac{|x-y|}{L} \right) u(y) dy - u(x) \right\}.$$

Aquí, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és el domini espacial i k és una funció no negativa satisfent la condició de normalització

$$\int_{\mathbb{R}^n} k(y) dy = 1,$$

és a dir, k és una densitat de probabilitat.

Notem que l'operador D depèn de dos paràmetres: la *taxa de dispersió* ρ , que representa el nombre total d'individus que es dispersen per unitat de temps, i la *longitud de dispersió* L , que caracteritza la distància de dispersió.

Assumim que $\Omega = \mathbb{R}^n$, és a dir, que l'hàbitat dels organismes que considerem és tot l'espai.

Interpretem l'equació en el cas $\rho = L = 1$. Per aquests valors dels paràmetres podem reescriure l'equació com

$$u_t(x, t) = J * u - u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} J(x - y)u(y, t)dy - u(x, t), \quad (3.1)$$

amb J una funció radial, no negativa i d'integral 1.

Com hem dit, aquesta equació es pot fer servir per modelitzar processos difusius. Podem pensar $u(x, t)$ com la densitat d'una certa població al punt x en l'instant de temps t i $J(x - y)$ com la probabilitat de saltar de la posició y a la posició x . Aleshores, $(J * u)(x, t)$ és la freqüència a la que individus de la població arriben a la posició x des de tots els altres punts del domini. De la mateixa manera $-u(x, t) = -\int_{\mathbb{R}^n} J(y - x)u(x, t)dy$ és la freqüència en que els individus marxen de la posició x cap a altres llocs. En absència de fonts internes o externes, u satisfà (3.1).

L'equació (3.1) és una *equació de difusió no local* perquè $u(x, t)$ depèn dels valors de u en tot el domini a través del terme convolutiu $J * u$.

Es pot comprovar, vegeu [10], que el problema de valors inicials definit per aquesta equació comparteix moltes propietats amb el que defineix l'equació de la calor clàssica, per exemple:

- les solucions estacionàries fitades són constants,
- les dues tenen un principi del màxim, i
- les pertorbacions es propaguen amb velocitat infinita, fins i tot si el suport de J és compacte.

Tanmateix, en general (3.1) no presenta un efecte regularitzant de les solucions, com veurem en el capítol següent.

3.2 Derivació del model

Considerem una espècie en un hàbitat de dimensió n , \mathbb{R}^n , i suposem que la població es pot modelitzar per una sola funció $u(x, t)$, que representa la densitat de la població a la posició x en l'instant t . Derivarem un model continu per la població considerant una discretització en espai i temps, i fent tendir la mida dels intervals espacials i temporals a zero.

Dividim \mathbb{R}^n en intervals n -dimensionals, és a dir, en subconjunts contigus de la forma $I_1 \times \dots \times I_n$ amb I_1, \dots, I_n intervals de longitud $h > 0$ en cadascun dels eixos de coordenades. Discretitzem el temps en intervals de durada τ .

Sigui $u(I, t)$ la densitat de població que hi ha en el subconjunt I en l'instant t .

Ens agradaria trobar l'expressió pel canvi de densitat de població en un subconjunt I en un interval de temps de durada τ . Per fer-ho, comencem per assumir que els individus marxen de I per anar a un altre subconjunt J amb freqüència constant. És natural pensar que el nombre d'individus que emigren ha de ser proporcional a:

- a) La població del subconjunt I , que és $u(I, t)h^n$.
- b) La mida del subconjunt d'arribada J , que en el nostre cas és h^n .
- c) La durada de temps en què mesurem el trànsit d'individus, que és τ .

Definim $\alpha(J, I)$ la constant de proporcionalitat pels individus de I que arriben al subconjunt J . Aleshores, el nombre d'individus que marxen de I durant l'interval $[t, t + \tau]$ és

$$\sum_{\substack{J \subset \mathbb{R}^n \\ J \neq I}} \alpha(J, I)u(I, t)h^{2n}\tau. \quad (3.2)$$

Biològicament, té sentit suposar que el nombre d'individus que emigren de I per unitat de temps és finit i, per tant, que el sumatori de (3.2) convergeix. Així doncs té sentit assumir que

$$\sum_{\substack{J \subset \mathbb{R}^n \\ J \neq I}} \alpha(J, I)h^n < +\infty. \quad (3.3)$$

Fent el mateix raonament tenim que, en el mateix interval de temps, el nombre d'individus que arriben a I des dels altres subconjunts de l'espai és

$$\sum_{\substack{J \subset \mathbb{R}^n \\ J \neq I}} \alpha(I, J)u(J, t)h^{2n}\tau.$$

Per acabar, també podem tenir en compte els naixements i les morts que es poden donar en qualsevol dels subconjunts. Sigui $g(u(I, t), I)$ la taxa de natalitat per càpita a I per una certa densitat de població u ; si el signe és negatiu farà referència a la mortalitat. Assumint que aquesta taxa és constant en l'interval de temps que considerem, tenim que l'expressió

$$g(u(I, t), I)u(I, t)h^n\tau$$

ens dóna el nombre d'individus nous.

Combinant les expressions anteriors, deduïm que la densitat de població al subconjunt I en l'instant $t + \tau$ ve donada per

$$\begin{aligned} u(I, t + \tau) &= u(I, t) + \sum_{\substack{J \subset \mathbb{R}^n \\ J \neq I}} \alpha(I, J)u(J, t)h^n\tau \\ &\quad - \sum_{\substack{J \subset \mathbb{R}^n \\ J \neq I}} \alpha(J, I)u(I, t)h^n\tau + g(u(I, t), I)u(I, t)\tau. \end{aligned}$$

Dividim tots els termes per τ i passem al model continu fent el límit $h \rightarrow 0$ i $\tau \rightarrow 0$. Obtenim l'equació

$$u_t(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} [\alpha(x, y)u(y, t) - \alpha(y, x)u(x, t)]dy + g(u(x, t), x)u(x, t). \quad (3.4)$$

Assumim que la taxa de migració $\alpha(x, y)$ és homogènia i només depèn de la distància entre x i y , és a dir, de $|x - y|$. Fent servir això podem escriure l'equació (3.4) com

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \rho \left[\int_{\mathbb{R}^n} k(x - y)u(y, t)dy - u(x, t) \right] + f(u, x, t) \\ &= \rho [k * u(x, t) - u(x, t)] + f(u, x, t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

on k és una funció parella i tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} k(s)ds = 1, \quad (3.6)$$

ρ és la constant de difusió que definim com

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(|y|)dy,$$

i el terme no homogeni és $f(u, x, t) := g(u, x, t)u$. La funció k és una densitat de probabilitat i la integral que defineix ρ és finita per la hipòtesi (3.3).

Si només tenim en compte les migracions de la població, i no els naixements/morts, aleshores $f \equiv 0$ i recuperem l'equació homogènia.

3.2.1 Comparació amb la derivació de l'equació fraccionària

A l'hora de deduir l'equació convolutiva (3.5) hem seguit la mateixa estratègia de discretització i pas al límit continu que hem vist al capítol anterior per derivar l'equació de difusió fraccionària

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y, t) - u(x, t)}{|y - x|^{n+\alpha}} dy + f(x, t) \\ &= (-\Delta)^{\alpha/2} u(x, t) + f(x, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Observem, però, que en aquest cas no ens ha fet falta imposar cap restricció que ens relacioni les velocitats a que els passos h, τ tendeixen a 0, mentre que al capítol anterior ha estat necessari imposar $\tau = h^\alpha$ per poder passar al model continu. Tanmateix, hem hagut d'imposar condicions més restrictives sobre els nuclis integrals k .

A més, la deducció fent servir dinàmica de poblacions no ens serveix per l'operador $(-\Delta)^{\alpha/2}$. Formalment, podem escriure el laplací fraccionari en forma de convolució com

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y, t) - u(x, t)}{|y - x|^{n+\alpha}} dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y, t)}{|y - x|^{n+\alpha}} dy - u(x, t) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y - x|^{n+\alpha}} dy \\ &= \mathcal{K} * u(x, t) - u(x, t) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(y) dy, \end{aligned}$$

on $\mathcal{K}(y) = |y|^{-(n+\alpha)}$ (per $y \neq 0$, $\mathcal{K}(0) = 0$). Però aquesta notació només és formal, ja que com hem estudiat al capítol anterior la funció \mathcal{K} no és integrable en cap bola que contingui el 0 i per tant les integrals no estan ben definides. No podem doncs separar en dues la integral que ens defineix $(-\Delta)^{\alpha/2}$.

En la derivació, hem exclòs aquests casos problemàtics en assumir la condició (3.6).

3.2.2 Dependència de paràmetres

Com hem comentat en la introducció del model, podem ajustar-lo al comportament concret d'una població d'organismes mitjançant dos paràmetres: la taxa (o constant) de dispersió ρ i la longitud de dispersió L . La noció de ρ és fàcil de quantificar, s'interpreta com el nombre d'individus que migren per unitat de temps i es defineix com la constant multiplicativa que apareix a (3.5). Per tractar la idea de dispersió, és raonable preservar la forma de la funció α , però permetre que s'estiri o es contregui. Això ens porta a modificar la funció k introduint la longitud de dispersió L , definint

$$k_L(x) = \frac{1}{L} k\left(\frac{x}{L}\right). \quad (3.8)$$

D'aquesta manera, si per exemple doblem L , la distància esperada entre els subconjunts de sortida i d'arribada també es dobla.

3.3 Derivació alternativa de l'equació convolutiva

Com hem vist, pensar la funció u com la densitat d'una població ens suggereix de forma natural l'equació no local (3.1). En aquest apartat farem servir derivades funcionals per veure com podem obtenir aquesta equació no local generalitzant l'equació clàssica de la calor

$$u_t = \Delta u + f(u). \quad (3.9)$$

Seguim la deducció que fa Fife a [10]. Per tal de no preocupar-nos de les condicions de vora, suposem de nou que el domini de l'equació és \mathbb{R}^n . Analtzarem el cas on la constant de difusió és $\rho = 1$, per altres casos només caldria prendre com a punt de partida l'equació

$$u_t = \rho \Delta u + f(u)$$

enlloc de (3.9).

Comencem per preguntar-nos quin seria l'anàleg no local més natural pel terme Δu , i per tal de motivar la resposta comencem caracteritzant $-\Delta u$ a partir de l'anomenada *integral de Dirichlet*

$$\mathcal{E}_0[u] = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx.$$

D'aquesta definició deduïm que si $u(x, t)$ és una funció prou regular aleshores

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_0[u(\cdot, t)] = -\Delta u \cdot u_t,$$

on el producte escalar denota el producte a $L^2(\mathbb{R}^n)$ i el signe $-$ surt d'aplicar la integració per parts. Per tant, podem caracteritzar $-\Delta u$ com

$$-\Delta u = \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial u}.$$

Es diu que $-\Delta u$ és la *derivada funcional* a L_2 de \mathcal{E}_0 .

Podem interpretar l'energia \mathcal{E}_0 com una mesura de la desviació de u respecte de ser constant: tenim que $\mathcal{E}_0[u] \geq 0$ i que $\mathcal{E}_0[u] = 0$ només si u és constant. De manera natural, podem definir un funcional no local que ens dóna una mesura alternativa del mateix com

$$\mathcal{E}_{10}[u] = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{4} J(x-y)(u(x,t) - u(y,t))^2 dx dy,$$

on $J(x)$ és una funció pes no negativa, que suposem que satisfà les hipòtesis (H) anteriors. Com passava amb \mathcal{E}_0 , $\mathcal{E}_{10}[u] \geq 0$ i $\mathcal{E}_{10}[u] = 0$ si i només si u és constant. Ara tenim que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{10}[u(\cdot, t)] &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{4} J(x-y) 2(u(x) - u(y))(u_t(x) - u_t(y)) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J(x-y) u(x) u_t(x) dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J(x-y) u(x) u_t(y) dx dy \\ &= u(x) \cdot u_t(x) - J * u(x) \cdot u_t(x) \\ &= (u - J * u)(x) \cdot u_t(x), \end{aligned}$$

on el producte escalar és el de $L_2(\mathbb{R}^n)$, no hem indicat la dependència de u en t per simplificar la notació i hem fet servir la simetria de J .

Per tant, obtenim

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{10}[u]}{\partial u}(x) = u(x) - \int_{\mathbb{R}^n} J(x-y) u(y) dy = u(x) - J * u(x).$$

Així, de la mateixa manera que \mathcal{E}_{10} és l'anàleg no local de \mathcal{E}_0 , l'expressió $J * u - u$ és l'anàleg de Δu a l'equació (3.9).

Podem fer el mateix incorporant un terme no lineal $f(u)$ a l'equació de difusió definint el *funcional energètic de Ginzburg - Landau*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0[u] - \int_{\mathbb{R}^n} W(u) dx,$$

on $W'(u) = f(u)$, i

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{10}[u] - \int_{\mathbb{R}^n} W(u) dx.$$

Aleshores l'equació (3.9) és equivalent a

$$u_t = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u},$$

i la corresponent equació no local és

$$u_t = -\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial u} = J * u - u + f(u).$$

Capítol 4

Comportament asimptòtic de les equacions de difusió convolutiva

Considerem una equació no local de difusió convolutiva en \mathbb{R}^n del tipus

$$u_t(x, t) = J * u - u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} J(x - y)u(y, t)dy - u(x, t), \quad (4.1)$$

amb

$$J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ una funció radial, no negativa i amb } \int_{\mathbb{R}^n} J(r)dr = 1, \quad (\text{H})$$

és a dir, J és una densitat de probabilitat radial.

En aquesta secció ens centrarem en estudiar l'existència i unicitat de les solucions de (4.1), el seu comportament asimptòtic quan $t \rightarrow \infty$ i la convergència a solucions de models clàssics. Per fer-ho, reproduïrem alguns dels resultats de l'article *Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equations* de E. Chasseigne, M. Chaves i J.D. Rossi, [6].

La transformada de Fourier jugarà un paper molt important: ens permetrà trobar la fórmula explícita la solució del problema de Cauchy en variables de Fourier. En l'article es pren una definició de transformada de Fourier diferent a la considerada anteriorment, concretament:

Definició 4.1. Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definim la seva *transformada de Fourier* com

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n), \quad (4.2)$$

i la seva *transformada de Fourier inversa* com

$$\check{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^n} e^{ix \cdot \xi} u(x) dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n). \quad (4.3)$$

Per a aquesta definició de transformada de Fourier es pot veure que se satisfan els mateixos resultats que hem vist a la secció 1, exceptuant algunes constants que seran diferents. Per exemple, en aquest cas tindrem que, com abans,

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi),$$

però que en canvi

$$\widehat{J * u} = \hat{J} \hat{u}.$$

4.1 El problema de Cauchy

Considerem el problema de Cauchy que defineix l'equació de difusió no local (4.1)

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= J * u - u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} J(x - y)u(y, t)dy - u(x, t), \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Considerarem que una funció u és solució de (4.4) si $u \in C^0([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^n))$ i satisfà l'equació en sentit integral, és a dir, si satisfà

$$u(x, t) = u_0(x) + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} J(x - y)u(y, s)dy \right) - u(x, s)ds. \quad (4.5)$$

Aquesta definició de solució té sentit, doncs tots els termes que hi apareixen estan ben definits. Veurem més endavant (teorema 4.2) que tenim existència i unicitat per aquest tipus de solució.

La notació $C^0([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^n))$ indica que la funció $u(x, t)$ és $L^1(\mathbb{R}^n)$ respecte de la variable espacial, x , i $C^0([0, \infty))$ respecte de la temporal, t .

Veurem, a més, que el comportament de les solucions quan t tendeix a infinit depèn del comportament de la transformada de Fourier de J a prop de l'origen, i que les decaïgudes asimptòtiques són les mateixes que s'obtenen en les equacions de difusió fraccionària.

4.2 Teorema: comportament asimptòtic de la solució

El resultat més important d'aquest treball és el següent, i la resta de resultats del capítol ens serviran per provar-lo.

Teorema 4.1. Sigui u una solució de (4.4) amb $u_0, \hat{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Suposem que

$$\hat{J}(\xi) = 1 - A|\xi|^\alpha + |\xi|^\alpha h(\xi), \quad \xi \rightarrow 0,$$

amb $A > 0$ i $\alpha \in (0, 2]$ constants, $|h(\xi)| < A$ i $h(\xi) \rightarrow 0$ quan $\xi \rightarrow 0$. Aleshores el comportament asimptòtic de $u(x, t)$ ve donat per

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n/\alpha} \max_x |u(x, t) - v(x, t)| = 0,$$

on v és la solució de

$$v_t(x, t) = -A(-\Delta)^{\alpha/2}v(x, t),$$

amb condició inicial $v(x, 0) = u_0(x)$. A més, tenim que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-n/\alpha},$$

i que el perfil asimptòtic ve donat per

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \max_y \left| t^{n/\alpha} u(yt^{1/\alpha}, t) - \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} G_A(y) \right| = 0,$$

on $G_A(y)$ satisfà $\widehat{G}_A(\xi) = e^{-A|\xi|^\alpha}$.

Comentaris sobre el teorema

El resultat té sentit si tenim en compte les transformades de Fourier de les equacions de difusió convolutiva i fraccionària. Com veurem més endavant, en termes de la transformada de Fourier, la solució del PVI corresponent a $u_t = -A(-\Delta)^{\alpha/2}u$ és

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-A|\xi|^\alpha} \hat{u}_0(\xi),$$

on u_0 és la condició inicial; per a $u_t = J * u - u$ serà

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{(\hat{J}(\xi)-1)t} \hat{u}_0(\xi).$$

Estem prenent com a hipòtesi que

$$\hat{J}(\xi) - 1 = -A|\xi|^\alpha + \text{petites variacions},$$

i el que afirma el teorema és que el comportament asimptòtic de les solucions només depèn de \hat{J} per valors propers a 0 i que aquestes petites variacions no tenen efecte sobre la decaiguda asimptòtica de les solucions.

Notem que en el cas $\alpha = 2$ l'equació per a $v(x, t)$ és l'equació de difusió clàssica

$$v_t(x, t) = A\Delta v(x, t),$$

amb $A > 0$ la constant de difusió. Per tant si, $\alpha = 2$ les solucions $u(x, t)$ de (4.4) tindran el mateix comportament asimptòtic que les solucions de l'equació de la calor. Aquest fet és sorprenent, doncs recordem que l'equació de la calor és local. En aquest cas, recuperem que la taxa de decaiguda de les solucions és $t^{-n/2}$ i, fent servir el Teorema d'inversió de Fourier, que el perfil asimptòtic és una Gaussiana:

$$G_A(x) = (\hat{G}_A)^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} e^{-A|y|^\alpha} dy = \frac{1}{(4\pi A)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4A}}.$$

Com veurem més endavant, $A \cdot Id = -\frac{1}{2} D^2 \hat{J}(0)$ i per calcular la integral de l'antitransformada hem fet servir l'observació 1.1 del capítol 1.

Si el suport de J a \mathbb{R}^n és compacte, aleshores J té segon moment $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 J(x) dx < +\infty$ i per simetria el primer moment de J és nul, com veurem això vol dir que podem expressar \hat{J} com

$$\hat{J}(\xi) = 1 - A|\xi|^2 + o(|\xi|^2), \quad \xi \rightarrow 0,$$

que es correspon al cas $\alpha = 2$.

4.3 Demostració del teorema

Estructurem la prova en forma de diferents lemes i teoremes, que descomponen el teorema i que anirem demostrant successivament. Per començar estudiem algunes de les propietats de la funció J .

Lema 4.1. Sigui J una funció $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, no negativa, radial i tal que $\int_{\mathbb{R}^n} J(r)dr = 1$. Aleshores,

i) $|\hat{J}(\xi)| \leq 1, \hat{J}(0) = 1.$

ii) Si $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)|x|dx < +\infty$ aleshores

$$\left(\nabla_{\xi}\hat{J}\right)_i(0) = -i \int_{\mathbb{R}^n} x_i J(x)dx = 0$$

i si $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)|x|^2dx < +\infty$ aleshores

$$\left(D^2\hat{J}\right)_{ij}(0) = - \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j J(x)dx,$$

per tant $\left(D^2\hat{J}\right)_{ij}(0) = 0$ quan $i \neq j$ i $\left(D^2\hat{J}\right)_{ii}(0) \neq 0$. Llavors la matriu Hessiana de \hat{J} a l'origen ve donada per

$$D^2\hat{J}(0) = - \left(\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 J(x)dx\right) \cdot Id.$$

iii) Si $\hat{J}(\xi) = 1 - A|\xi|^\alpha + o(|\xi|^\alpha)$ aleshores necessàriament $\alpha \in (0, 2]$. Si $\alpha = 2$, llavors

$$A \cdot Id = -\frac{1}{2} \left(D^2\hat{J}\right)_{ij}(0).$$

Demostració. El punt *i)* es pot comprovar directament a partir de la definició 4.1 i de les nostres hipòtesis sobre la funció J .

Per veure el punt *ii)* usem el Teorema de derivació sota el signe integral i obtenim que

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial \xi_i}(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} x_i J(x)dx.$$

L'existència del primer moment de J ens assegura que aquesta integral està ben definida, ja que usant que J és radialment simètrica tenim que

$$\int_{\mathbb{R}^n} J(x)\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}dx = \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}^n} J(x)x_i dx,$$

i tornant a usar la simetria de J obtenim

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial \xi_i}(0) = -i \int_{\mathbb{R}^n} x_i J(x)dx = 0.$$

Derivant de nou,

$$\left(D^2\hat{J}\right)_{ij}(\xi) = \frac{\partial \hat{J}}{\partial \xi_j \partial \xi_i}(\xi) = - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} x_i x_j J(x)dx,$$

d'on obtenim el resultat tornant a aplicar la simetria de J . En aquest cas, la integral també està ben definida per i, j qualssevol ja que estem suposant que el segon moment de J és finit i J és radialment simètrica.

Per demostrar el punt *iii*) comencem per recordar un lema de probabilitat (vegeu, per exemple, [7]) que diu que si \hat{J} té una expansió de la forma

$$\hat{J}(\xi) = 1 + i\langle a, \xi \rangle - \frac{1}{2}\langle \xi, B\xi \rangle + o(|\xi|^2)$$

aleshores J té un segon moment i tenim que

$$a_i = \int x_i J(x) dx, \quad B_{ij} = \int x_i x_j J(x) dx < \infty.$$

Observem que en el nostre cas tindrem que $a_i = 0$ per a tot i per la simetria de J .

Llavors si suposem que *iii*) es compleix per un cert $\alpha > 2$ tindrem que $B_{ij} = 0$ per i, j qualssevol, per tant el segon moment de J seria nul, la qual cosa implica $J \equiv 0$ que és contradictori.

Finalment, si $\alpha = 2$, aplicant el punt *ii*) tenim que

$$B_{ij} = \int x_i x_j J(x) dx = - \left(D^2 \hat{J} \right)_{ij} (0)$$

i d'aquí es dedueix el resultat ja que, com hem vist en la demostració del punt anterior, $\left(D^2 \hat{J} \right) (0)$ és una matriu diagonal i per la simetria de J tots els elements de la diagonal tenen el mateix valor. A més, comparant les expansions de \hat{J} en funció de $|\xi|$, tenim $A = \frac{1}{2} B_{ii}$.

□

Hem vist en el capítol 1 que la transformada de Fourier ens permet resoldre algunes EDPs simplificant-ne l'expressió. El teorema següent utilitza aquesta tècnica per provar l'existència i la unicitat de les solucions del problema de Cauchy (4.4).

Teorema 4.2. Sigui $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aleshores existeix una única solució $u \in C^0([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^n))$ de (4.4), i ve donada per

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{(\hat{J}(\xi)-1)t} \hat{u}_0(\xi).$$

Demostració. Partim de l'equació del nostre problema de Cauchy

$$u_t(x, t) = J * u - u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} J(x-y)u(y, t) dy - u(x, t).$$

Aplicant la transformada de Fourier respecte de la variable espacial a l'equació obtenim, formalment, que:

$$\hat{u}_t(\xi, t) = \widehat{J * u} - \hat{u}(\xi, t) = \hat{u}(\xi, t) \left(\hat{J}(\xi) - 1 \right),$$

on hem usat que $\widehat{J * u} = \hat{J} \hat{u}$, que és l'equivalent de la propietat 3. del teorema 1.3 tenint en compte que la definició de transformada que considerem ara és diferent.

Hem obtingut una EDO que sabem resoldre directament, obtenint com a solució

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{(\hat{J}(\xi)-1)t} \hat{u}_0(\xi).$$

Finalment el resultat se segueix de prendre la transformada de Fourier inversa a la solució obtinguda, ja que com que $\hat{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $e^{(\hat{J}(\xi)-1)t}$ és continua i fitada la integral que surt en fer-ho està ben definida, i podem aplicar el Teorema d'inversió de Fourier.

La funció u és contínua respecte el temps t perquè \hat{u} ho és i apliquem l'antitransformada de Fourier respecte la variable espacial. A més, és una funció de $L^1(\mathbb{R}^n)$ usant que $|e^{(\hat{J}(\xi)-1)t}| < C$, d'on $|u| < C|u_0|$, i que per hipòtesis $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. \square

Observació 4.1. Es poden entendre les solucions de (4.4) directament en forma de transformada de Fourier. Notem que aquest concepte de solució és equivalent al de solució en forma integral (4.5) en les variables originals, sota les hipòtesis que considerem per a la condició inicial u_0 .

El lema següent fa referència a la solució fonamental del nostre problema, és a dir, la solució de (4.4) amb condició inicial $u_0 = \delta_0$, la funció delta de Dirac a 0.

Lema 4.2. Sigui $J \in S(\mathbb{R}^n)$, l'espai de Schwartz. La solució fonamental de (4.4) es pot expressar com

$$w(x, t) = e^{-t}\delta_0(x) + v(x, t), \quad (4.6)$$

amb $v(x, t)$ una funció suau. A més a més, si u és una solució de (4.4) es pot escriure de la forma

$$u(x, t) = (w * u_0)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} w(x - z, t)u_0(z)dz.$$

Demostració. Del teorema anterior tenim que

$$\hat{w}_t(\xi, t) = \hat{w}(\xi, t)(\hat{J}(\xi) - 1).$$

De la definició de δ_0 tenim que si f és una funció es verifica que

$$\int f(x)\delta_a(x) = f(a).$$

Per tant, tindrem que $\hat{u}_0 = \hat{\delta}_0 = 1$, i d'aquí obtenim que

$$\hat{w}(\xi, t) = e^{(\hat{J}(\xi)-1)t} = e^{-t} + e^{-t}(e^{\hat{J}(\xi)t} - 1).$$

Aplicant la transformada de Fourier inversa a aquesta expressió obtenim la primera part del lema:

$$w(x, t) = e^{-t}\delta_0(x) + \left(e^{-t}(e^{\hat{J}(\xi)t} - 1)\right)^{\sim} =: e^{-t}\delta_0(x) + v(x, t).$$

La funció $e^{-t}(e^{\hat{J}(\xi)t} - 1)$ és de $S(\mathbb{R}^n)$ perquè \hat{J} ho és i, com a conseqüència, les condicions per ser funció de Schwartz se satisfan trivialment. D'aquesta manera la funció $v(x, t)$ és suau per ser la transformada inversa d'una funció de $S(\mathbb{R}^n)$, ja que per tant també pertany a aquest espai.

Per demostrar la segona part del lema només cal veure que $w * u_0$ és una solució de (4.4), ja que llavors se segueix de la unicitat de solució del problema. Anomenem $u(x, t) = w * u_0(x, t)$

i comencem per comprovar que satisfà l'equació:

$$\begin{aligned}
 u_t(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} w_t(x - z, t) u_0(z) dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} (J * w - w(x - z, t)) u_0(z) dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} J(\xi) w(x - z - \xi, t) d\xi \right) u_0(z) dz - (w * u_0)(x, t) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J(x - y) w(y - z, t) u_0(z) dy dz - u(x, t) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} J(x - y) u(y, t) dy - u(x, t)
 \end{aligned}$$

on en la segona igualtat hem usat que w és la solució fonamental i en la última hem aplicat el teorema de Fubini.

Només resta comprovar que se satisfà la condició inicial:

$$\begin{aligned}
 (w * u_0)(x, 0) &= \int_{\mathbb{R}^n} w(x - z, 0) u_0(z) dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} (e^0 \delta_0(x - z) + v(x - z, 0)) u_0(z) dz \\
 &= u_0(x).
 \end{aligned}$$

En la última igualtat hem fet servir que $v(x, 0) = 0$, fet que es dedueix de que

$$\hat{v}(\xi, 0) = e^0(e^0 - 1) = 0 = \hat{0},$$

i per tant aplicant el Teorema d'inversió de la transformada de Fourier obtenim que $v(x, t) = 0$ qpt $x \in \mathbb{R}^n$. \square

Observació 4.2. Si enlloc de $\hat{J} \in S(\mathbb{R}^n)$ tenim que $\hat{J} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, com que suposem $J \in L^1(\mathbb{R}^n)$, i per tant $\hat{J}(\xi) \rightarrow 0$ quan $|\xi| \rightarrow 0$, la descomposició del lema anterior també és correcta i el resultat és vàlid amb l'única diferència que només podrem assegurar que la funció v sigui contínua. Per veure que v és contínua només ens cal notar que la funció $\hat{v}(\xi, t) = e^{-t}(e^{\hat{J}(\xi)t} - 1)$ és de $L^1(\mathbb{R}^n)$, i que per tant la seva antitransformada és contínua.

Observació 4.3 (Absència d'efecte regularitzant). Com hem vist al lema anterior, la solució fonamental de (4.4) pren la forma

$$w(x, t) = e^{-t} \delta_0(x) + v(x, t),$$

amb $v(x, t)$ una funció contínua si $\hat{J} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La funció $v(x, t)$ no presenta cap singularitat a $x = 0$ i la massa de la funció delta de Dirac s'hi manté, malgrat la seva massa decau exponencialment. Per tant, la conservació total de la massa implica que la massa es redistribueix per l'espai a través de la funció $v(x, t)$.

A més, la solució u del PVI (4.4) es pot escriure com

$$u = w * u_0 = e^{-t} u_0 + v * u_0,$$

i per tant la solució serà tan regular com ho sigui u_0 , però no més. Aquest fenomen contrasta amb l'efecte regularitzant de l'equació de la calor, per la qual qualsevol condició inicial com podria ser δ_0 es regularitza instantàniament i la solució corresponent és C^∞ .

A continuació demostrarem la primera part del teorema 4.1.

Teorema 4.3. Sigui u una solució de (4.4) amb $u_0, \hat{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Suposem que

$$\hat{J}(\xi) = 1 - A|\xi|^\alpha + |\xi|^\alpha h(\xi), \quad \xi \rightarrow 0,$$

amb $A > 0$ i $\alpha \in (0, 2]$ constants, $|h(\xi)| < A$ i $h(\xi) \rightarrow 0$ quan $\xi \rightarrow 0$. Llavors el comportament asimptòtic de $u(x, t)$ ve donat per

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{N/\alpha} \max_x |u(x, t) - v(x, t)| = 0,$$

on v és la solució de $v_t(x, t) = -A(-\Delta)^{\alpha/2}v(x, t)$ amb condició inicial $v(x, 0) = u_0(x)$.

Demostració. Dividim la demostració en tres passos.

Pas 1: Com en la demostració del lema previ tenim

$$\hat{u}_t(\xi, t) = \hat{u}(\xi, t)(\hat{J}(\xi) - 1).$$

Per tant

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{(\hat{J}(\xi)-1)t} \hat{u}_0(\xi).$$

D'altra banda, sigui $v(x, t)$ una solució de

$$v_t(x, t) = -A(-\Delta)^{\alpha/2}v(x, t),$$

amb la mateixa condició inicial $v(x, 0) = u_0(x)$. Aplicant la transformada de Fourier a aquesta equació obtenim que

$$\hat{v}_t = -A|\xi|^\alpha \hat{v},$$

on hem usat que $((-\Delta)^{\alpha/2}v)^\wedge = |y|^\alpha \hat{v}$. Per tant tenim que

$$\hat{v}(\xi, t) = e^{-A|\xi|^\alpha t} \hat{u}_0(\xi).$$

Observem que $\hat{u}, \hat{v} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja que les dues són el producte d'una funció fitada per \hat{u}_0 , que és una funció de $L^1(\mathbb{R}^n)$ per hipòtesis. A més, $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ segons el teorema 4.2 i v també hi pertany per ser la convolució de dues funcions de $L^1(\mathbb{R}^n)$: $v = (e^{-A|\xi|^\alpha t})^\vee * u_0$ i és fàcil comprovar que $e^{-A|\xi|^\alpha t} \in S(\mathbb{R}^n)$. Per tant, podrem aplicar el Teorema d'inversió de Fourier.

Pas 2: Ara que ja tenim expressions per a $\hat{u}(\xi, t)$ i $\hat{v}(\xi, t)$ procedim a calcular el límit de $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u} - \hat{v}|(\xi, t) d\xi$ quan fem tendir $t \rightarrow +\infty$. Podem escriure

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u} - \hat{v}|(\xi, t) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(e^{t(\hat{J}(\xi)-1)} - e^{-A|\xi|^\alpha t} \right) \hat{u}_0(\xi) \right| d\xi \\ &= \int_{|\xi| \geq r(t)} \left| \left(e^{t(\hat{J}(\xi)-1)} - e^{-A|\xi|^\alpha t} \right) \hat{u}_0(\xi) \right| d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi| < r(t)} \left| \left(e^{t(\hat{J}(\xi)-1)} - e^{-A|\xi|^\alpha t} \right) \hat{u}_0(\xi) \right| d\xi \\ &= I + II \end{aligned}$$

on $r(t)$ és una funció sobre la qual veurem que caldrà imposar certes condicions.

Separem el domini en dos pel motiu següent: la primera idea per fitar l'exponencial serà fer servir Taylor, però recordem que només podem usar $e^x - 1 \leq Cx$, $C > 0$ constant, si x és prou petit. Veurem que per fitar II podrem fer servir aquesta idea, mentre que per I haurem de procedir de manera alternativa perquè el nostre x hi serà massa gran. De fet, tindrem $x = t|\xi|^\alpha h(\xi)$, per aquest motiu r depèn del temps.

Comencem buscant una fita per I , i ho fem descomponent la integral en dues:

$$I \leq \int_{|\xi| \geq r(t)} \left| e^{-A|\xi|^\alpha t} \hat{u}_0(\xi) \right| d\xi + \int_{|\xi| \geq r(t)} \left| e^{t(\hat{J}(\xi)-1)} \hat{u}_0(\xi) \right| d\xi = I_1 + I_2.$$

Per I_1 tenim que

$$\begin{aligned} t^{n/\alpha} \int_{|\xi| \geq r(t)} e^{-A|\xi|^\alpha t} |\hat{u}_0(\xi)| d\xi &\leq t^{n/\alpha} \|\hat{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|\xi| \geq r(t)} e^{-A|\xi|^\alpha t} d\xi \\ &= \|\hat{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|\eta| \geq r(t)t^{1/\alpha}} e^{-A|\eta|^\alpha} d\eta \end{aligned}$$

on en l'últim pas hem fet el canvi de variable $\xi = \eta t^{1/\alpha}$. Clarament, la última integral tendeix a 0 quan $t \rightarrow +\infty$ si imposem que

$$r(t)t^{1/\alpha} \rightarrow +\infty \text{ quan } t \rightarrow +\infty. \quad (4.7)$$

Recordem que estem prenent com a hipòtesi que \hat{J} satisfà, si ξ és prou petit, que

$$\hat{J}(\xi) \leq 1 - A|\xi|^\alpha + |\xi|^\alpha h(\xi),$$

amb h tal que $|h(\xi)| < A$ i $h(\xi) \rightarrow 0$ quan $\xi \rightarrow 0$. Per tant, existeix $D > 0$ tal que

$$\hat{J}(\xi) \leq 1 - D|\xi|^\alpha \quad \text{si } |\xi| \leq a,$$

per un cert $a > 0$.

A més, usant el lema 4.1 i les propietats de la transformada de Fourier, tenim que existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\hat{J}(\xi) \leq 1 - \delta \quad \text{si } |\xi| \geq a,$$

ja que usant que $|\hat{J}(\xi)| \leq 1$ i que $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{J}(\xi) = 0$ perquè $J \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tenim que el valor absolut de \hat{J} serà menor estricta que 1 a partir d'un punt determinat.

Imposant que $r(t) \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow \infty$ i que hem agafat a fixat tindrem que, almenys a partir d'un cert instant de temps, $a > r(t)$. No ens importa a partir de quin t es verifica aquesta condició, ja que el nostre objectiu és estudiar el comportament asimptòtic.

Fem servir aquestes fites de \hat{J} per fitar I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|\xi| \geq r(t)} \left| e^{t(\hat{J}(\xi)-1)} \hat{u}_0(\xi) \right| d\xi \\ &= \int_{a \geq |\xi| \geq r(t)} \left| e^{t(\hat{J}(\xi)-1)} \hat{u}_0(\xi) \right| d\xi + \int_{|\xi| \geq a} \left| e^{t(\hat{J}(\xi)-1)} \hat{u}_0(\xi) \right| d\xi \\ &\leq C \int_{a \geq |\xi| \geq r(t)} e^{-tD|\xi|^\alpha} \hat{u}_0(\xi) d\xi + Ce^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Usant aquesta fita i fent el canvi de variable $\eta = \xi t^{1/\alpha}$ obtenim

$$\begin{aligned} t^{n/\alpha} I_2 &\leq C \int_{at^{1/\alpha} \geq |\eta| \geq t^{1/\alpha} r(t)} e^{-D|\eta|^{\text{alpha}}} d\eta + t^{n/\alpha} C e^{-\delta t} \\ &\leq C \int_{|\eta| \geq t^{1/\alpha} r(t)} e^{-D|\eta|^{\text{alpha}}} d\eta + t^{n/\alpha} C e^{-\delta t}, \end{aligned}$$

per tant

$$t^{n/\alpha} I_2 \rightarrow 0 \text{ quan } t \rightarrow +\infty,$$

si es compleix la condició (4.7).

Ens falta fitar II :

$$\begin{aligned} t^{n/\alpha} II &= t^{n/\alpha} \int_{|\xi| < r(t)} \left| e^{(\hat{J}(\xi) - 1 + A|\xi|^\alpha)t} - 1 \right| e^{-A|\xi|^\alpha t} |\hat{u}_0(\xi)| d\xi \\ &\leq C t^{n/\alpha} \int_{|\xi| < r(t)} t |\xi|^\alpha h(\xi) e^{-A|\xi|^\alpha t} d\xi, \end{aligned}$$

si usem la hipòtesi sobre \hat{J} i imposem que

$$t(r(t))^\alpha h(r(t)) \rightarrow 0 \text{ quan } t \rightarrow +\infty. \quad (4.8)$$

En aquest cas, fent el canvi de variable $\eta = \xi t^{1/\alpha}$, tenim que

$$t^{n/\alpha} II \leq C \int_{|\eta| r(t) t^{1/\alpha}} |\eta|^\alpha h(\eta/t^{-1/\alpha}) e^{-A|\eta|^\alpha} d\eta.$$

Ara usem el Teorema de la Convergència Dominada: $h(\eta t^{-1/\alpha}) \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow +\infty$ i l'integrand és dominat per $\|h\|_\infty |\eta|^\alpha e^{-A|\eta|^\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, per tant la integral anterior tendeix a 0 quan $t \rightarrow +\infty$.

Això ens permet concloure que

$$t^{n/\alpha} (I + II) \rightarrow 0 \text{ quan } t \rightarrow +\infty, \quad (4.9)$$

en el cas que sigui possible trobar una funció $r(t)$, $r(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$, que verifiqui les dues condicions (4.7) i (4.8). En el lema 4.3 que tenim a continuació de la demostració veurem que això és sempre possible.

Pas 3: Per finalitzar la prova només cal observar que per qualsevol funció f tal que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se satisfà que

$$f(x) = (\hat{f})^\sim(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\xi,$$

i per tant

$$|f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En particular, també serà cert pel màxim.

Com ja hem comentat en el pas 1, les funcions u, v i les seves transformades de Fourier són funcions de $L^1(\mathbb{R}^n)$, i per tant els podem aplicar aquesta propietat.

D'aquesta manera, de (4.9) deduïm que

$$t^{n/\alpha} \max_x |u(x, t) - v(x, t)| \leq t^{n/\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u} - \hat{v}|(\xi, t) d\xi \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

que és el que volíem provar. □

Hem vist, doncs, que la taxa de decaiguda de les solucions del problema de Cauchy (4.4) quan $t \rightarrow +\infty$ ve determinat pel comportament de \hat{J} a prop de l'origen.

El lema següent ens dóna l'existència de la funció $r(t)$ que satisfà (4.7), (4.8) i que tendeix a 0 quan $t \rightarrow \infty$, tal i com necessitem en la demostració anterior.

Lema 4.3. Donada una funció $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $h(\rho) \rightarrow 0$ quan $\rho \rightarrow 0$ amb $h(\rho) > 0$ per valors petits de ρ , existeix una funció r amb $r(t) \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow \infty$ que satisfà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t)t^{1/\alpha} = \infty$$

i

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t(r(t))^\alpha h(r(t)) = 0.$$

Demostració. Per t fixada suficientment gran, escollim $r(t)$ com una solució *petita* de

$$r(t)(h(r(t)))^{1/2\alpha} = t^{-1/\alpha}. \quad (4.10)$$

Amb funció *petita* entenem que pren valors propers a 0, almenys si t és prou gran.

Aquesta equació ens permet definir una funció $r(t)$ que per continuïtat tendirà a 0 quan $t \rightarrow \infty$. De fet, si suposem que existeix $t_n \rightarrow \infty$ tal que no existeix cap solució de (4.10) amb $r(t) \in (0, \delta)$ per a valors grans de t , llavors perquè es verifiqui la igualtat en el límit caldrà que $h(r) \equiv 0$ a $(0, \delta)$, que es contradictori. □

Observació 4.4. En el cas $h(t) = t^s$ amb $s > 0$, podem buscar una funció r del tipus $r(t) = t^\beta$, $\beta < 0$, i les dues condicions de l'enunciat del lema 2.3 es poden llegir com:

$$\beta + 1/\alpha > 0, \quad 1 + \beta\alpha + s\beta < 0. \quad (4.11)$$

Això implica que $\beta \in (-1/\alpha, -1/(\alpha + s))$, la qual cosa és sempre possible.

Com a conseqüència del teorema 2.3, obtenim el corol·lari següent que ens completa els resultats del teorema 2.1.

Corol·lari 4.3.1. Si $\hat{J}(\xi) = 1 - A|\xi|^\alpha + o(|\xi|^\alpha)$, $\xi \rightarrow 0$, $0 < \alpha \leq 2$, el comportament asimptòtic de les solucions de (4.4) ve donat per

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{t^{n/\alpha}}.$$

A més a més, el perfil asimptòtic està definit per

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \max_y \left| t^{n/\alpha} u(yt^{1/\alpha}, t) - \|u_0\|_{L^1} G_A(y) \right| = 0,$$

on $G_A(y)$ satisfà $\hat{G}_A(\xi) = e^{-A|\xi|^\alpha}$.

Demostració. Del teorema 2.3 obtenim que el comportament asimptòtic de les solucions de (4.4) és el mateix que el de les solucions de l'equació de difusió fraccionària:

$$v_t(x, t) = -A(-\Delta)^{\alpha/2}v(x, t),$$

que com hem vist vénen definides en termes de la transformada de Fourier per

$$\hat{v}(\xi, t) = e^{-A|\xi|^{\alpha}t}\hat{u}_0(\xi).$$

Comencem per provar la fita de la norma $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de u . Pel que acabem de dir, ho podem demostrar per v . Volem veure que $\|v(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-n/\alpha})$, i per fer-ho és suficient veure que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|v(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{t^{-n/\alpha}} < \infty.$$

Seguint el que hem vist a la demostració del teorema 2.3 tenim que

$$\begin{aligned} t^{n/\alpha} \max_x |v(x, t)| &\leq t^{n/\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}(\xi, t)| d\xi \\ &= t^{n/\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-A|\xi|^{\alpha}t} |\hat{u}_0(\xi)| d\xi \\ &\leq \|\hat{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-A|\eta|^\alpha} d\eta. \end{aligned}$$

L'expressió de la dreta és constant en el temps i és finita per ser la integral d'una funció de $L^1(\mathbb{R}^n)$, d'on deduïm la desigualtat. Remarquem que, com hem vist, $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\hat{v}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, i per tant de $\hat{u}, \hat{v} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ en deduïm que $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Fent el canvi de variable $\xi = t^{-1/\alpha}\eta$ tenim que per $t \rightarrow \infty$

$$\hat{v}(t^{-1/\alpha}\eta, t) = e^{-A|\eta|^\alpha} \hat{u}_0(\eta t^{-1/\alpha}) \longrightarrow e^{-A|\eta|^\alpha} \hat{u}_0(0) = e^{-A|\eta|^\alpha} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

D'aquí obtenim que fent $t \rightarrow \infty$,

$$|\hat{v}(t^{-1/\alpha}\eta, t) - e^{-A|\eta|^\alpha} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}| \longrightarrow 0,$$

i per tant,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}(t^{-1/\alpha}\eta, t) - e^{-A|\eta|^\alpha} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}| = 0$$

ja que podem intercanviar el límit i la integral pel Teorema de la Convergència Dominada.

Aplicant l'antitransformada de Fourier respecte de la variable η a \hat{v} veiem que

$$\begin{aligned} (\hat{v}(t^{-1/\alpha}\eta, t))^\vee(y, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \eta \cdot y} \hat{v}(t^{-1/\alpha}\eta, t) d\eta \\ &= t^{n/\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i z \cdot y t^{1/\alpha}} \hat{v}(z, t) dz \\ &= t^{n/\alpha} v(y t^{1/\alpha}, t). \end{aligned}$$

Com en la demostració del teorema 2.3, obtenim quan $t \rightarrow +\infty$ que

$$\max_y \left| t^{n/\alpha} v(yt^{1/\alpha}, t) - \|u_0\|_{L^1} G_A(y) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}(t^{-1/\alpha}\eta, t) - e^{-A|\eta|^\alpha} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}| \longrightarrow 0,$$

on $G_A(y)$ satisfà $\hat{G}_A(\xi) = e^{-A|\xi|^\alpha}$. □

Per acabar l'estudi del comportament asimptòtic de la solució de (4.4) trobem la seva taxa de decaiguda a $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Corol·lari 4.3.2. Sigui $1 < p < \infty$. Si $\hat{J}(\xi) = 1 - A|\xi|^\alpha + o(|\xi|^\alpha)$, $\xi \rightarrow 0$, $0 < \alpha \leq 2$, aleshores la decaiguda en norma L^p de la solució de (4.4) ve donada per

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n}{\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Demostració. Per interpolació (vegeu [8]) tenim que

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}}.$$

Fem servir que (4.4) preserva la norma L^1 , ja que al considerar que no hi ha fonts i que el domini és \mathbb{R}^n tenim que es conserva la massa total:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx = \text{constant}.$$

Fent servir això juntament amb el resultat del corol·lari 4.3.1 obtenim el resultat. □

Capítol 5

Models per a la transició de fases

Un altre camp on apareixen equacions de difusió a l'hora de modelitzar comportaments és en la transició de fases: estudiem com es dipositen dos fluids immiscibles, o dos estats físics del mateix fluid, en un sol recipient.

Seguint l'estudi de G. Alberti a *Variational models for phase transitions*, [1], presentarem el model de Cahn-Hilliard, relacionat amb el laplaciana, i estudiarem la convergència del seu funcional associat. Per fer-ho ens caldrà introduir el concepte de Γ -convergència i algunes de les seves propietats bàsiques.

A continuació presentarem els resultats anàlegs pels models que tenen com a energia el funcional associat al model convolutiu i al model fraccionari, respectivament. Veurem que en el cas convolutiu quan la tensió superficial entre els fluids és constant, el Γ -límit del funcional és el mateix que pel de Cahn-Hilliard. En el cas fraccionari, recuperarem el Γ -límit només per a certes potències de $\Delta^{\alpha/2}$.

5.1 Introducció: Equació d'Allen-Cahn

Considerem l'equació no lineal de reacció difusió

$$u_t - u_{xx} = \frac{1}{\varepsilon^2}(-4u^3 + 6u^2 - 2u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (5.1)$$

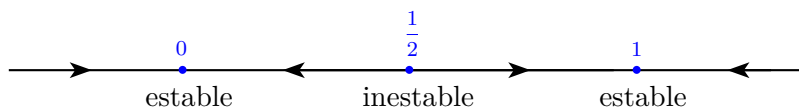
amb condicions de vora $u(-\infty) = 0$, $u(+\infty) = 1$, i condició inicial $g = g(x)$ satisfent $|g| \leq 1$.

L'equació (5.1) s'anomena *equació d'Allen-Cahn* i ens serveix per modelitzar la població de dues espècies (o fluids immiscibles) que conviuen en el mateix hàbitat. Podem pensar que u és la densitat d'una espècie A respecte a una altre B: $u = 1$ significa absència de B, $u = 0$ significa absència de A. El terme de reacció $f(u) = \frac{1}{\varepsilon^2}(-4u^3 + 6u^2 - 2u)$ modelitza una tendència de les dues espècies a separar-se (és a dir, a agrupar-se amb els individus de la mateixa espècie). El conjunt $\{u = 1/2\}$ ens determina la interfície que separa les dues espècies.

Amb l'objectiu de comprendre l'efecte de la part no homogènia sobre u , comencem per estudiar l'EDO

$$u_t = \frac{1}{\varepsilon^2}(-4u^3 + 6u^2 - 2u).$$

Els punts d'equilibri de l'equació són 0, $1/2$ i 1. El punt $x = 1/2$ és un punt d'equilibri repulsor, mentre que els altres dos punts són atractors. Si dibuixem el retrat de fases tenim que



d'on deduïm que les solucions s'acostaran a 0 o a 1 a mesura que avanci el temps. Per tant, menyspreant els efectes difusius obtenim que les dues espècies tenen tendència a separar-se.

Estudiem com són les solucions estacionàries de (5.1). Busquem les solucions $u(x)$ satisfent

$$-u_{xx} = \frac{1}{\varepsilon^2}(-4u^3 + 6u^2 - 2u).$$

Considerem la primitiva del terme no lineal $F(u) = \frac{1}{\varepsilon^2}(u^4 - 2u^3 + u^2)$. Resolem l'equació reescrivint-la com

$$-u_{xx}u_x = f(u)u_x,$$

que és equivalent a

$$-\frac{1}{2} \int (u_x^2)_x = \int f(u)u_x,$$

d'on obtenim que

$$\frac{1}{2}u_x^2 = F(u),$$

i per tant

$$u(x) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}.$$

Podem veure la forma de la solució a la figura 5.1.

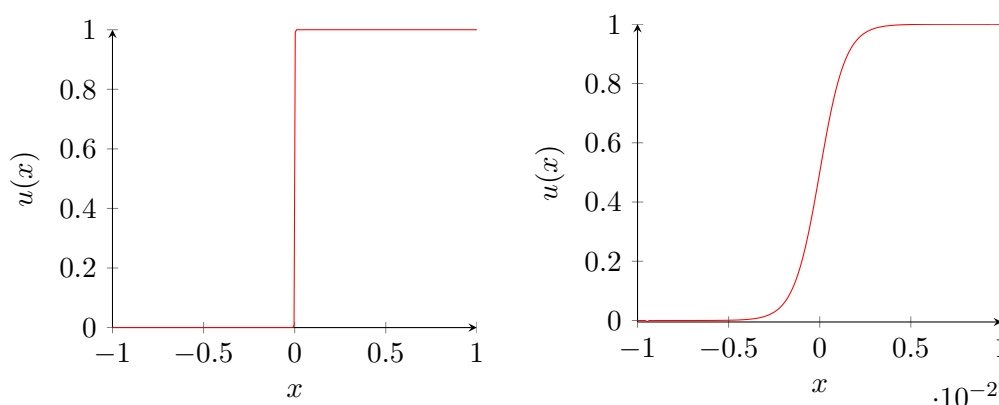


Figura 5.1: Solució estacionària de (5.1) amb $\varepsilon = 10^{-3}$

Ampliant el gràfic al voltant del 0 observem que la solució passa de 0 a 1 en un interval d'amplada d'ordre ε . En aquesta regió és on es produeix l'anomenada *transició de fase* entre les dues poblacions, i diem que la solució hi té una *layer*.

5.2 Nocions bàsiques de Γ -convergència

Considerem X un espai mètric, u un element de X , F una funció de X a $[0, +\infty]$ i ε un paràmetre que tendeix a 0. En la majoria d'aplicacions, X serà un espai de funcions u definides en un domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, i F un funcional amb domini X .

En aquest capítol, enlloc de successions de funcions (o funcionals) indexades amb un paràmetre enter que tendeixi a infinit, considerem famílies de funcions indexades per un paràmetre continu ε que tendeix a 0. Tanmateix, farem servir el terme *successió* per referir-nos a aquestes famílies ordenades, i les notarem com (u_ε) . D'aquesta manera, una *subsuccessió* de (u_ε) és qualsevol successió (u_{ε_n}) tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$.

Definició 5.1 (Successió pre-compacta). Donada una successió $(u_\varepsilon) \subset X$ diem que és *pre-compacta* en X si cada subsuccessió admet una sub-subsuccessió convergent a X .

Definició 5.2 (Γ -convergència). Sigui X un espai mètric, i per cada $\varepsilon > 0$ sigui $F_\varepsilon : X \rightarrow [0, +\infty]$. Diem que F_ε Γ -convergeix a F en X quan $\varepsilon \rightarrow 0$, i escrivim $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$, si es verifiquen les dues condicions següents:

(LB) *Fita inferior*: Per cada $u \in X$ i per cada successió (u_ε) tal que $u_\varepsilon \rightarrow u$ en X se satisfà que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u), \quad (5.2)$$

(UB) *Fita superior*: Per cada $u \in X$ existeix una successió (u_ε) tal que $u_\varepsilon \rightarrow u$ en X i

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = F(u). \quad (5.3)$$

Diem que F és el Γ -límit de F_ε .

La condició (LB) ens diu que per a qualsevol successió que escollim per aproximar u , el valor de $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ és, en el límit, més gran o igual que $F(u)$. D'altra banda, la condició (UB) ens diu que aquesta fita és òptima, és a dir, que sempre existeix una successió (u_ε) que aproxima u i tal que $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow F(u)$.

Observació 5.1. Notem que si se satisfà (LB), la igualtat (5.3) es pot substituir per

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F(u). \quad (5.4)$$

De fet, només ens val comprovar que per a cada $u \in X$ i per cada $\eta > 0$ existeix una successió $(u_\varepsilon) \subset X$ tal que $\limsup d(u_\varepsilon, u) \leq \eta$ i $\limsup F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F(u) + \eta$.

El lema següent ens ajudarà a simplificar les comprovacions de (LB) i (UB) reduint-nos a un conjunt de funcions que en alguns casos serà més senzill.

Lema 5.1. Si tenim un conjunt $\mathcal{D} \subset X$ tal que per a tot $u \in X$ existeix una successió $(u_n) \subset \mathcal{D}$ tal que $u_n \rightarrow u$ i $F(u_n) \rightarrow F(u)$, aleshores és suficient demostrar (UB) pels $u \in \mathcal{D}$, i no per tots elements de X .

Demostració. Ho demostrem mitjançant un argument diagonal senzill.

Fixat $u \in X$ existeix $(u_n) \subset D$ tal que $u_n \rightarrow u$ i $F(u_n) \rightarrow F(u)$ quan $n \rightarrow \infty$, $n = 1/\varepsilon$. Si (UB) es compleix a D llavors per a cada n existeix una successió $u_k^{(n)}$ tal que $u_k^{(n)} \rightarrow u_n$ i $F_k(u_k^{(n)}) \rightarrow F(u_n)$ quan $k \rightarrow \infty$. Prenent la subsuccessió $u_k^{(k)}$ tenim que $u_k^{(k)} \rightarrow u$ i que $F_k(u_k^{(k)}) \rightarrow F(u)$, i per tant (UB) és certa per u . \square

Proposició 5.1 (Propietats de la Γ -convergència). La noció de Γ -convergència té les propietats següents:

a) el Γ -límit F és semicontinu inferiorment en X , és a dir, si $x_0 \in X$ llavors

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} F(x) \geq F(x_0).$$

b) *Estabilitat sota perturbacions contínues:* Si $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ i G és continu,

$$F_\varepsilon + G \xrightarrow{\Gamma} F + G.$$

c) *Estabilitat de les successions minimitzants:* Si $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ i v_ε minimitza F_ε en X , aleshores cada punt d'acumulació de (v_ε) minimitza F en X .

A continuació, descriurem com farem servir aquest concepte de convergència variacional.

5.2.1 Compacitat i reescalaments

Assumim que per cada $\varepsilon > 0$ tenim un funció v_ε que minimitza el funcional F_ε en X . En preguntem què li passa a v_ε quan $\varepsilon \rightarrow 0$. De vegades, tindrem la fórmula explícita per v_ε i podrem obtenir informació del comportament asimptòtic de la funció. Normalment, però, no disposarem de cap fórmula per a v_ε i ens caldrà fer servir que v_ε resol l'equació d'Euler-Lagrange associada a F_ε , i llavors intentar veure quina equació satisfà el límit v de (v_ε) . Una opció alternativa, és prendre el Γ -límit F dels funcionals F_ε (en el cas en que existeixi), i fer servir el punt c) de la proposició anterior per veure que qualsevol punt d'acumulació v de v_ε minimitza F , i en particular resol l'equació d'Euler-Lagrange associada a F .

L'estratègia que hem plantejat per estudiar el comportament asimptòtic, només té sentit si sabem que la successió minimitzant (v_ε) és pre-compacta en X i per tant té punts d'acumulació. El sol fet que F tingui un minimitzant v no implica que v sigui un punt d'acumulació de v_ε .

Tenint això en compte, qualsevol resultat de Γ -convergència pels funcionals F_ε ha d'anar acompanyat per un *resultat de compacitat* per la corresponent successió minimitzant (v_ε) . Normalment, el que s'intenta demostrar és que el funcional F_ε sigui equicoerciu asimptòticament:

(C) *Compacitat:* Siguin (ε_n) i (u_n) successions tals que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ i $F_{\varepsilon_n}(u_n)$ està fitada; aleshores (u_n) és pre-compacta en X .

Observem que si v_ε minimitza F_ε aleshores també minimitza $\lambda_\varepsilon F_\varepsilon$ per $\lambda_\varepsilon > 0$ qualsevol. Això implica que també podem recuperar informació dels punts límits de (v_ε) a partir del Γ -límit de $\lambda_\varepsilon F_\varepsilon$. Diferents valors de λ_ε ens generaran Γ -límits diferents, i per tant ens donaran informacions diferents. Aquesta propietat ens serà útil sobretot quan F_ε convergeixi a un funcional constant F : en aquest cas el fet que cada punt límit v minimitzi F no ens dóna cap informació sobre v , en canvi el Γ -límit de $\lambda_\varepsilon F_\varepsilon$ pot ser menys trivial si escollim λ_ε adequadament. El punt crític serà determinar el $\lambda_\varepsilon > 0$ que ens permeti obtenir el màxim d'informació i aquesta tria no sempre serà evident.

5.3 El teorema de Modica-Mortola

5.3.1 Mesura de Hausdorff

En el funcional energètic clàssic per a la transició de fases que introduïrem en aquest capítol, hi apareix l'anomenada *mesura de Hausdorff*. Recordem la seva definició i comentem algunes propietats que farem servir en la demostració del teorema de Modica-Mortola.

Definició 5.3 (Mesura de Hausdorff). Sigui (X, μ) un espai mètric, $p \geq 0$ i $\delta > 0$. Per $A \subset X$, sigui

$$\mathcal{H}^{p,\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam} B_j)^p : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \text{ i } \text{diam} B_j \leq \delta \right\},$$

amb $\text{diam} B = \{\mu(x, y) : x, y \in B\}$ i la convenció que $\inf \emptyset = \infty$. El límit

$$\mathcal{H}^p(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}^{p,\delta}(A),$$

s'anomena *mesura de Hausdorff p -dimensional* de A .

Es pot demostrar que es tracta d'una mesura exterior, és a dir,

$$\mathcal{H}^p(A_1 \cup A_2) = \mathcal{H}^p(A_1) \cup \mathcal{H}^p(A_2),$$

per tot parell de conjunts amb $\mu(A_1, A_2) > 0$.

$\mathcal{H}^0(A)$ ens dóna la cardinalitat del conjunt A . Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ és una funció Lipschitz i injectiva, $\mathcal{H}^1(\gamma([0, 1]))$ ens retorna la longitud de la corba. Finalment, en el cas en que $A \subset \mathbb{R}^n$ és una superfície regular m -dimensional, $\mathcal{H}^m(A)$ coincideix amb l'àrea m -dimensional de A ; en el cas $m = n$, \mathcal{H}^n coincideix amb la mesura de Lebesgue de \mathbb{R}^n .

5.3.2 Model clàssic per a la transició de fases

Considerem un recipient que conté dos fluids immiscibles i incompressibles, per exemple, oli i aigua. En la teoria clàssica de la transició de fases, s'assumeix que a l'equilibri els dos fluids es disposen de tal manera que l'àrea de la interfície que els separa sigui mínima.

Negligint la interacció dels fluids amb les parets del recipient i l'efecte de la gravetat, aquesta situació és pot modelitzar de la forma següent: el recipient es representa per un domini regular

fitat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, i cada configuració del sistema es descriu per una funció u en Ω que val 0 en la regió ocupada pel primer fluid, i que val 1 en la que ocupa el segon fluid. Així, els conjunt de singularitats de u és la interfície entre els dos fluids, i el denotem per Su . L'espai de totes les possibles configuracions ve donat per totes les funcions $u : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ tals que $\int u = V$, on V és el volum total del segon fluid (assumim $0 < V < \text{vol}(\Omega)$). Postulem que l'energia del sistema és

$$F(u) := \sigma \mathcal{H}^2(Su),$$

on σ és l'anomenada *tensió superficial* entre els dos fluids i \mathcal{H}^2 és la mesura de Hausdorff dos-dimensional.

Per tant, $F(u)$ és una energia distribuïda en Su , i la configuració de l'equilibri és la que minimitza F en l'espai de totes les possibles configuracions.

5.3.3 Model de Cahn-Hilliard

Una opció alternativa a l'hora d'estudiar sistemes de dos fluids immiscibles és assumir que la transició entre els dos no està donada per una interfície que els separa, sinó que és un fenomen continu en una regió estreta, que a nivell macroscòpic identifiquem amb la interfície. En aquesta opció, acceptem una possible barreja dels dos fluids. En aquest cas una configuració del sistema es representa per una funció $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$ on $u(x)$ denota la mitjana de densitat de volum del segon fluid en el punt $x \in \Omega$, és a dir, $u(x) = 0$ vol dir que en x només hi ha fluid del primer tipus, $u(x) = 1/2$ vol dir que els dos fluids hi són presents amb la mateixa proporció, etcètera. L'espai de totes les possibles configuracions és el conjunt de totes les possibles $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tals que $\int u = V$ (on V torna a ser el volum del segon fluid) i el denotem per X . Com abans, postulem una energia per a cada possible configuració u que ve donada per

$$E_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega W(u),$$

amb ε un paràmetre positiu petit i W una funció contínua i positiva que només s'anul·la a 0 i 1 (*double-well potential*). A l'hora de minimitzar E_ε , el terme $\int W(u)$ afavoreix a les configuracions que prenen valors propers a 0 i a 1 (separació de fases), mentre que el terme $\varepsilon^2 \int |\nabla u|^2$ penalitza la falta d'homogeneïtat espacial. Quan ε és petit, el mínim de E_ε s'assoleix per una funció que pren valors propers a 0 i a 1 (i pren els dos per la restricció $\int u = V$) i la transició de 0 a 1 es produeix en una regió estreta (de fet, amb amplada ε).

5.3.4 Teorema de Modica-Mortola

Estudiem la connexió entre el model clàssic i el de Cahn-Hilliard. El primer en demostrar-la va ser L. Modica, [16], que va provar que els mínims de E_ε convergeixen als mínims de F . Abans de presentar el resultat de convergència, fixem la notació que farem servir. Prenem Ω un conjunt obert i fitat de \mathbb{R}^n , V tal que $0 < V < \text{vol}(\Omega)$ i notem X la classe de totes les funcions mesurables $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tals que $\int_\Omega u = V$, dotada amb la norma de L^1 . A més, notem per $BV(\Omega, \{0, 1\})$ el conjunt de totes les funcions $u : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ amb variació fitada, i Su el conjunt de singularitats essencials de u .

Recordem que una funció $f \in L^1(\Omega)$ és de variació fitada a Ω si $\int_\Omega |Df| < +\infty$.

Teorema 5.1 (Modica - Mortola). Sigui $\sigma := 2 \int_0^1 \sqrt{W(u)} du$, i per cada $\varepsilon > 0$ sigui

$$F_\varepsilon(u) := \frac{1}{\varepsilon} E_\varepsilon(u) = \begin{cases} \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega W(u) & \text{si } u \in W^{1,2}(\Omega) \cap X, \\ +\infty & \text{en els altres punts de } X, \end{cases} \quad (5.5)$$

i

$$F(u) := \begin{cases} \sigma \mathcal{H}^{N-1}(Su) & \text{si } u \in BV(\Omega, \{0, 1\}) \cap X, \\ +\infty & \text{en els altres punts de } X. \end{cases} \quad (5.6)$$

Aleshores els funcionals F_ε Γ -convergeixen a F en X , i la condició de compacitat (C) se satisfà.

De la condició de compacitat (C) se segueix el resultat següent:

Corol·lari 5.1.1. En les condicions del teorema anterior, si v_ε minimitza F_ε , o equivalentment E_ε , en X , aleshores la seqüència (v_ε) és pre-compacta en X i cada punt d'acumulació v minimitza F .

Observació 5.2. Es pot demostrar que cada funcional F_ε és semi-continu inferiorment i coerciu respecte la topologia L^1 de X , i com a conseqüència tindrà al menys un mínim.

5.4 Problema del perfil òptim i demostració del teorema de Modica-Mortola

Abans de procedir amb la demostració del teorema, comencem observant que el teorema de Modica-Mortola es redueix a les tres afirmacions següents:

(I) *Compacitat:* Donades dues successions (ε_n) i (u_n) tals que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ i $F_{\varepsilon_n}(u_n)$ és fitada, tenim que (u_n) és pre-compacta a $L^1(\Omega)$ i els seus punts d'acumulació pertanyen a $BV(\Omega, \{0, 1\})$.

(II) *Fita inferior:* Si $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$, $(u_\varepsilon) \subset W^{1,2}(\Omega)$ i $u_\varepsilon \rightarrow u$ a $L^1(\Omega)$ aleshores

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \sigma \mathcal{H}^{N-1}(Su). \quad (5.7)$$

(III) *Fita superior:* Per cada $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$ existeix $(u_\varepsilon) \subset W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_\varepsilon \rightarrow u$ a $L^1(\Omega)$, $\int u_\varepsilon = \int u$ per cada ε i

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \sigma \mathcal{H}^{N-1}(Su). \quad (5.8)$$

Primer demostrarem els tres enunciats anteriors en el cas unidimensional, i a continuació comentarem breument com generalitzar la demostració a dimensió 2. Per dimensions superiors, la generalització és similar.

5.4.1 Cas unidimensional

Podem assumir que Ω és un interval obert i fitat. En aquest cas $BV(\Omega, \{0, 1\})$ és la classe de totes les funcions $u : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ amb un nombre finit de discontinuïtats, o dit d'una altra manera, constants a trossos en Ω . Com ja sabem, \mathcal{H}^0 és la mesura que compta el nombre de punts.

Observem que si u és una funció tal que $F_\varepsilon(u)$ és finit, aleshores u pertany a l'espai $W^{1,2}(\Omega)$ i per tant té un representant continu, és a dir, u és contínua si canviem el seu valor en un conjunt de mesura nul·la. Aquest fet és conseqüència del teorema A.11 de l'apèndix. Si no es diu el contrari, sempre farem referència a aquesta versió de la funció u .

En la demostració, ens serà útil tenir en compte els punts següents:

1. *Localització de F_ε* : Podem considerar F_ε com a funció també del domini d'integració, és a dir, considerem

$$F_\varepsilon(u, A) := \varepsilon \int_A |\dot{u}|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_A W(u), \quad (5.9)$$

per cada conjunt mesurable A i cada funció u tal que $\dot{u} \in L^2(U)$ per un conjunt obert U que contingui a A . En particular, $F_\varepsilon(u) = F_\varepsilon(u, \Omega)$. El funcional $F_\varepsilon(u, A)$ s'anomena *localització* de F_ε i es pot comprovar que és una mesura positiva respecte de la variable A .

2. *Reescalament de F_ε* : Per cada A i per cada u definim la funció $u^\varepsilon(x) := u(\varepsilon x)$ i el conjunt $\frac{1}{\varepsilon}A := \{x : \varepsilon x \in A\}$. Aleshores obtenim que

$$F_\varepsilon(u, A) = F_1(u^\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}A). \quad (5.10)$$

3. *Problema del perfil òptim*: Considerem el problema de minimització

$$\bar{\sigma} := \inf \left\{ F_1(u, \mathbb{R}) : u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1 \right\}. \quad (5.11)$$

El nombre $\bar{\sigma}$ representa el cost mínim respecte de l'energia F_1 per una transició del valor 0 al valor 1 en la recta real. El problema de minimització (5.11) s'anomena *problema del perfil òptim*, i una solució γ s'anomena un *perfil òptim* per a la transició. γ serà una solució de tipus layer.

Els lemes següents ens donen la relació de $\bar{\sigma}$ amb els funcionals F_ε i amb la constant σ que apareix a l'enunciat del teorema de Modica-Mortola.

Lema 5.2. Donats un interval I i una funció $u : I \rightarrow [0, 1]$, suposem que existeixen $a, b \in I$ i $\delta > 0$ tals que $u(a) \leq \delta$ i $u(b) \geq 1 - \delta$. Aleshores per cada $\varepsilon > 0$ tenim que

$$F_\varepsilon(u, I) \geq \bar{\sigma} - O(\delta), \quad (5.12)$$

on l'estima de l'error $O(\delta)$ no depèn ni de ε ni de u .

Demostració. Assumim que $a < b$ i que $I = (a, b)$, si no és així només cal substituir I per (a, b) . Per la igualtat (5.10) només ens cal provar el lema en el cas $\varepsilon = 1$. Per tal de comparar $F_\varepsilon(u, I)$ amb $\bar{\sigma}$ estenem la funció u a tot \mathbb{R} com es mostra a la figura 5.2.

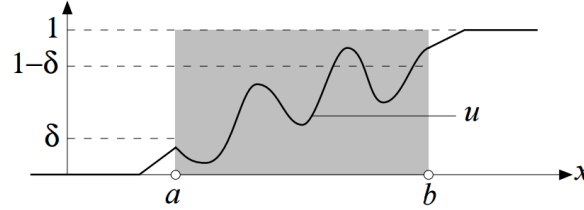


Figura 5.2: Extensió de la funció u . Font: [1].

Aleshores, usant que W s'anul·la a 0 i a 1 i que $|\dot{u}| \leq 1$ a $\mathbb{R} \setminus I$, tenim que

$$\begin{aligned} F_1(u, \mathbb{R} \setminus I) &= \int_{\mathbb{R} \setminus I} |\dot{u}|^2 dx + \int_{\mathbb{R} \setminus I} W(u) dx \\ &\leq \int_0^\delta |\dot{u}|^2 du + \int_{1-\delta}^1 |\dot{u}|^2 du + \int_0^\delta W(u) du + \int_{1-\delta}^1 W(u) du \\ &\leq 2\delta + 2\delta \max_{[0,1]} W \\ &= 2\delta(1 + C), \end{aligned}$$

on hem definit $C = \max_{[0,1]} W$. Definint $O(\delta) := 2(1 + C)\delta$ podem concloure que

$$F_1(u, I) = F_1(u, \mathbb{R}) - F_1(u, \mathbb{R} \setminus I) \geq \bar{\sigma} - O(\delta).$$

□

Proposició 5.2. El mínim del problema (5.11) s'assoleix i coincideix amb la constant σ de l'enunciat del teorema de Modica-Mortola, és a dir, $\bar{\sigma} = 2 \int_0^1 \sqrt{W(u)} du$.

Demostració. Primer demostrarem que $F_1(u, \mathbb{R}) \geq \sigma$ per cada $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ que tendeixi a 1 (resp. a 0) a $+\infty$ (resp. $-\infty$), i a continuació veurem que la igualtat s'assoleix per una u concreta.

Aplicant la desigualtat $a^2 + b^2 \geq 2ab$, amb $a := \dot{u}(x)$ i $b := \sqrt{W(u(x))}$ a la definició de $F_1(u, \mathbb{R})$ obtenim que

$$\begin{aligned} F_1(u, \mathbb{R}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}^2(x) + W(u(x)) dx \\ &\geq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{W(u(x))} \dot{u}(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{W(u)} du =: \sigma. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Recordem que en la desigualtat $a^2 + b^2 \geq 2ab$ tenim la igualtat quan $a = b$, i per tant la igualtat a (5.13) se satisfà quan u resol l'equació $\dot{u} = \sqrt{W(u)}$. Considerem el PVI

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{W(u)} \\ u(0) = 1/2 \end{cases} \tag{5.14}$$

Com que \sqrt{W} és contínua, (5.14) té una solució global a \mathbb{R} (que serà única si W és globalment Lipschitz). \square

Demostració de (I) i (II):

Per escriure de forma rigorosa la demostració, ens cal fer servir la mesura de Young. Ens limitem a recordar les propietats que farem servir de forma directa, i que resumim de [5], en l'observació següent.

Observació 5.3. Donada una successió arbitrària de funcions $u_\varepsilon : \Omega \rightarrow [0, 1]$ i una subsuccessió, que tornem a anomenar (u_ε) , existeix una família de mesures de probabilitat $\{\nu_x : x \in \Omega\}$, anomenada *mesura de Young generada per* (u_ε) , que conté el comportament asimptòtic de la subsuccessió (u_ε) .

La mesura de Young (ν_x) es pot pensar com la distribució de probabilitat límit quan $\varepsilon \rightarrow 0$ dels valors de (u_ε) a prop de x . En particular, les funcions u_ε convergeixen en forma dèbil a la funció u definida com $u(x) := \int u d\nu_x(u)$, i la convergència és forta si, i només si, ν_x és la funció delta de Dirac a x qpt $x \in \Omega$.

A més, es demostra que per a qualsevol funció $f : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua respecte de la segona variable i fitada, se satisfà que

$$\int_{\Omega} f(x, u_\varepsilon(x)) dx \longrightarrow \int_{\Omega} \left[\int_0^1 f(x, u) d\nu_x(u) \right] dx. \quad (5.15)$$

Prenem una successió (u_ε) tal que $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$, i suposem que genera una mesura de Young $\{\nu_x : x \in \Omega\}$. Aleshores, per la definició de $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ tenim que $\int_{\Omega} W(u_\varepsilon) \leq C\varepsilon$, que vol dir que les funcions u_ε prenen valors propers a 0 o 1, excepte potser en un conjunt de mesura d'ordre ε (recordem que W és contínua i estrictament positiva entre 0 i 1). Per tant $\int_{\Omega} W(u_\varepsilon) \rightarrow 0$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$ i aplicant (5.15) amb $f(x, u) := W(u)$ tenim que

$$\int_{\Omega} [W(u) d\nu_x(u)] dx = 0,$$

on u és el límit de (u_ε) .

Per hipòtesis W només s'anul·la a 0 i a 1, per tant qpt $x \in \Omega$ la mesura ν_x té suport $\{0, 1\}$ i la podem escriure com

$$\nu_x := (1 - \lambda(x)) \cdot \delta_0 + \lambda(x) \cdot \delta_1,$$

per una certa $\lambda(x) \in [0, 1]$. Seguint la notació usual, δ_t denota la delta de Dirac a t . Notem que, en aquest cas,

$$u(x) := \int u d\nu_x(u) = 0 \cdot (1 - \lambda(x)) + 1 \cdot \lambda(x) = \lambda(x), \quad \text{qpt } x \in \Omega. \quad (5.16)$$

Prenem ara un interval $I \subset \Omega$ tal que $\lambda(x) \neq 0$ qpt $x \in I$ i $\lambda(x) \neq 1$ qpt $x \in I$. Fent servir (5.16), podem concloure que les funcions u_ε prendran valors propers a 0 i valors propers a 1 en I . Aplicant el lema 5.2 tenim que $F_\varepsilon(u_\varepsilon, I) \geq \bar{\sigma} - O(1)$. La fita $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$ implica que tindrem, com a màxim, $C/\bar{\sigma}$ intervals disjunts d'aquest tipus. Per tant, λ coincideix qpt amb una funció que pren valors 0 o 1 qpt i té un nombre finit de transicions entre aquests dos valors, és a dir, u pertany a $BV(\Omega, \{0, 1\})$.

Observem que $u(x) = 0$ implica $\nu_x \equiv \delta_0$ qpt, i $u(x) = 1$ implica $\nu_x \equiv \delta_1$ qpt. Llavors, fent servir les propietats de la mesura de Young, tenim que el límit de les funcions u_ε és u i que la convergència és forta; hem provat el punt (I) del teorema.

Com que el nombre de transicions de u de 0 a 1 és per definició $\mathcal{H}^0(Su)$, l'argument anterior ens dóna la fita

$$C \geq \bar{\sigma} \mathcal{H}^0(Su). \quad (5.17)$$

La desigualtat (5.17) implica (5.7) prenent si cal subsuccessions: estem suposant que $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$ i per Bolzano-Weierstrass existirà una subsuccessió convergent que tornem a anomenar $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$, així podem prendre $C := \sup F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ tant a prop com vulguem del límit inferior de $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$.

Demostració de (III):

Per simplicitat, suposem que Ω és un interval que conté el 0 i que $u(x) = 0$ si $x < 0$, $u(x) = 1$ si $x \geq 0$. En aquest cas $Su = \{0\}$. Construïm la successió que satisfà (5.8) a partir del perfil òptim γ del problema de minimització (5.11), fent $u_\varepsilon(x) := \gamma(x/\varepsilon)$. Aleshores $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$ per cada $x \neq 0$ perquè el límit de γ a $+\infty$ és 1, mentre que el límit a $-\infty$ és 0. Finalment, per la identitat de reescalament (5.10) obtenim

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = F_1(\gamma, \frac{1}{\varepsilon}\Omega) \leq F_1(\gamma, \mathbb{R}) = \bar{\sigma} = \bar{\sigma} \mathcal{H}^0(Su).$$

No ens hem preocupat de la restricció $\int u_\varepsilon = \int u = V$; per tenir-la en compte només caldria prendre translacions de les funcions u_ε que hem definit. Esquematzem la construcció de la successió (u_ε) en un cas general, amb Ω qualsevol, en la figura 5.3.

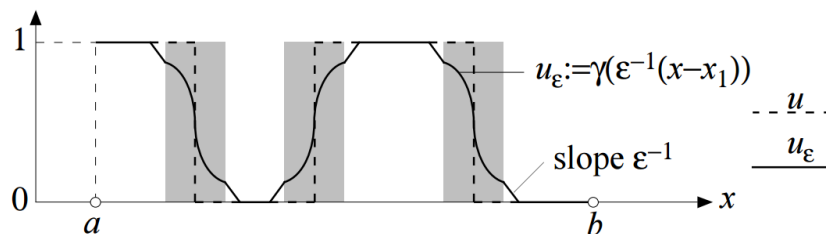


Figura 5.3: Construcció de u_ε amb $\Omega = (a, b)$ i $Su = \{x_1, x_2, x_3\}$. Font: [1].

5.4.2 Cas general

Demostrem el teorema en dimensió $n = 2$, per passar a dimensions superiors es fa anàlogament. Per fer-ho, veurem que podem deduir (I) i (II) a partir del cas unidimensional fent servir un argument amb *slices* o llesques, mentre que per provar (III) haurem de procedir de manera alternativa al cas d'una sola dimensió.

Primer, establim la notació que farem servir. Per començar considerem que Ω és un rectangle de la forma $I \times J$, amb $I, J \subset \mathbb{R}$ intervals oberts de longitud menor que 1, i escrivim $x \in \Omega$ si $x = (y, z)$ amb $y \in I, z \in J$.

Definició 5.4 (Llesques unidimensionals). Per a cada funció u definida en Ω i cada $y \in I$ definim en J la funció

$$u^y(z) := u(y, z),$$

i per cada $z \in J$ definim en I

$$u^z(y) := u(y, z).$$

Les funcions u^y i u^z s'anomenen *slices* o *llesques unidimensionals* de u .

Notem per $\bar{F}_\varepsilon(u, A)$ el funcional unidimensional definit en (5.9) per cada interval obert A i cada funció $u : A \rightarrow [0, 1]$.

Ens serà útil recordar, [9], que si $u \in W^{1,2}(\Omega)$ llavors $u^y \in W^{1,2}(J)$ qpt $y \in I$ i $u^z \in W^{1,2}(I)$ qpt $z \in J$. A més,

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x) = \dot{u}^y(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x) = \dot{u}^z(u) \quad \text{qpt } x \in \Omega.$$

Fent servir que $|\nabla u|^2 \geq \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2$ (respectivament $\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2$), obtenim de forma directa les *desigualtats de slicing* següents:

$$F_\varepsilon(u) \geq \int_I \bar{F}_\varepsilon(u^y, J) dy, \quad \left(\text{resp. } F_\varepsilon(u) \geq \int_J \bar{F}_\varepsilon(u^z, I) dz \right). \quad (5.18)$$

Per tal de demostrar (I) a partir del corresponent resultat de compacitat en dimensió u , ens cal definir la relació entre la pre-compacitat d'una successió de funcions (u_ε) , amb $u_\varepsilon : \Omega \rightarrow [0, 1]$, i la pre-compacitat de les successions de llesques (u_ε^y) i (u_ε^z) . El criteri més senzill que ens dóna una relació d'aquest tipus és el següent:

(C1) Suposem que (u_ε^y) és pre-compacta a $L^1(J)$ qpt $y \in I$ i que (u_ε^z) és pre-compacta a $L^1(I)$ qpt $z \in J$, aleshores (u_ε) també ho és a $L^1(\Omega)$.

Aquest resultat, però, no ens és útil. Necessitem un resultat més general, i l'obtenim permetent que les funcions tinguin unes certes *perturbacions*.

Definició 5.5 (δ -proximitat). Siguin $(\bar{u}_\varepsilon), (u_\varepsilon) \subset X$ dues successions de funcions, amb (X, μ) un espai mètric. Diem que (\bar{u}_ε) i (u_ε) són δ -properes si per a tot ε

$$\|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\|_\mu < \delta. \quad (5.19)$$

Fent servir aquesta definició podem enunciar la modificació de (C1) següent:

(C2) Suposem que tenim dues successions $(u_{\delta,\varepsilon})$ i $(\hat{u}_{\delta,\varepsilon})$ δ -properes a (u_ε) en $L^1(\Omega)$, i tals que $(u_{\delta,\varepsilon}^y)$ és pre-compacta a $L^1(J)$ qpt $y \in I$ i $(\hat{u}_{\delta,\varepsilon}^z)$ és pre-compacta a $L^1(I)$ qpt $z \in J$; aleshores (u_ε) és pre-compacta a $L^1(\Omega)$.

La demostració dels criteris de compacitat (C1) i (C2) es pot trobar a [3].

Demostració de (I) i (II):

Considerem una successió (u_ε) tal que $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$. Aleshores, per (5.18) tenim que

$$\int_I \bar{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^y, J) dy \leq C \quad \text{per a tot } \varepsilon > 0, \quad (5.20)$$

i tenim el mateix per $\bar{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^z, I)$. Fixem $\delta > 0$ i per cada $\varepsilon > 0$ prenem $u_{\delta, \varepsilon} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ com

$$u_{\delta, \varepsilon}^y := \begin{cases} u_\varepsilon^y & \text{si } \bar{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^y, J) \leq C/\delta, \\ 0 & \text{sinó.} \end{cases}$$

Per (5.20) tenim que $u_{\delta, \varepsilon}^y = u_\varepsilon^y \forall y \in I$ excepte en un conjunt de mesura menor que δ . Aleshores,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_{\delta, \varepsilon}\|_{L^1(\Omega)} &= \int_I \int_J |u_\varepsilon^y - u_{\delta, \varepsilon}^y| dz dy \\ &\leq |I| \delta \leq \delta, \end{aligned}$$

on hem fet servir la definició de $u_{\delta, \varepsilon}^y$ i que $|u_\varepsilon^y| \leq 1$. Per tant les successions (u_ε) i $(u_{\delta, \varepsilon})$ són δ -properes. A més, per cada $y \in I$ se satisfà que $\bar{F}_\varepsilon(u_{\delta, \varepsilon}^y, J) \leq C/\delta$, ja que $\bar{F}_\varepsilon(0, I)$, i aplicant la versió unidimensional de (I) tenim que $(u_{\delta, \varepsilon}^y)$ és pre-compacta a $L^1(J)$.

Anàlogament, podem construir una successió $(\hat{u}_{\delta, \varepsilon})$ δ -propera a (u_ε) tal que $(\hat{u}_{\delta, \varepsilon}^z)$ sigui pre-compacta a $L^1(I)$ qpt $z \in J$. El criteri de compacitat (C2) ens diu que (u_ε) és pre-compacta a $L^1(\Omega)$.

Passant si cal a subsuccessions, podem assumir que (u_ε) convergeix a una funció u a $L^1(\Omega)$. Llavors $u_\varepsilon^y \rightarrow u^y$ a $L^1(J)$ qpt $y \in I$, i aplicant el Lema de Fatou a (5.18) obtenim

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \int_I [\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^y, J)] dy. \quad (5.21)$$

Fent servir que $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$ tenim que $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^y, J) < +\infty$ qpt $y \in I$ i, aplicant la versió unidimensional de (I), que u^y pertany a l'espai $BV(J, \{0, 1\})$. A més, (5.21) juntament amb la versió unidimensional de (II) ens porta a que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \sigma \int_I \mathcal{H}^0(Su^y) dy, \quad (5.22)$$

Fent servir que $\mathcal{H}^0(Su^y)$ és el nombre de discontinuïtats essencials de u^y , (5.22) ens diu que $\int_I \|\dot{u}^y\| dy < +\infty$. Un raonament anàleg ens porta a que $\int_J \|\dot{u}^z\| dz < +\infty$.

Acabem de demostrar (I) aplicant el resultat següent, que extraïem de [9].

Proposició 5.3. Una funció $u \in L^1(\Omega)$ pertany a $BV(\Omega)$ si, i només si, $u^y \in BV(J)$ qpt $y \in I$, $u^z \in BV(I)$ qpt $z \in J$, i les integrals $\int_I \|\dot{u}^y\| dy$ i $\int_J \|\dot{u}^z\| dz$ són finites.

Finalment donem la idea de la demostració de (II), veient que podem recuperar la desigualtat per a la fita inferior (5.7) a partir de la desigualtat (5.22).

Suposem que Su és una corba regular en Ω . Aleshores la integral de la dreta de (5.22) és la mesura de la projecció de Su en I (tenint en compte la multiplicitat): per a cada $y \in I$

comptem el nombre de punts de Su . En general, la mesura d'aquesta projecció serà menor que la longitud de Su . De fet, la longitud d'una corba C en $I \times J$ és propra a la mesura de la seva projecció en I si, i només si, la normal a C té la direcció de l'eix de projecció (eix z en el nostre cas). Tenint això en compte recobrim Su , menys potser en un conjunt de mesura petita, mitjançant un nombre finit de quadrats disjunts dos a dos. Els anomenem Q_i i els disposem de manera que en cada Q_i la normal a Su sigui tan paral·lela com sigui possible a un dels costats de Q_i . Esquematzem el recobriment en la figura 5.4.

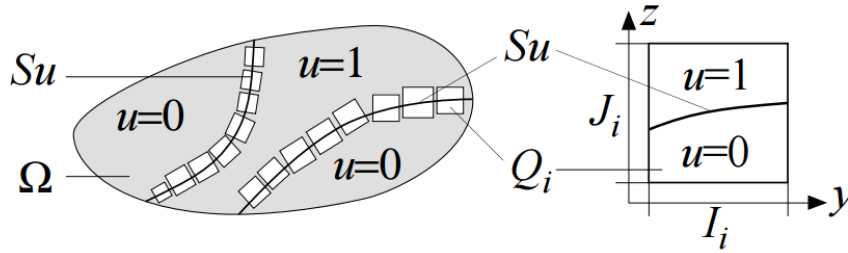


Figura 5.4: Recobriment de Su amb quadrats Q_i . Font: [1].

Aplicant la desigualtat (5.22) a cada Q_i obtenim que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, Q_i) \geq \sigma \int_{I_i} \mathcal{H}^0(Su^y) dy \simeq \mathcal{H}^1(Su \cap Q_i),$$

i prenent la suma sobre i ,

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \sum_i \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, Q_i) \geq \sigma \sum_i \mathcal{H}^1(Su \cap Q_i) \\ &\geq \sigma \mathcal{H}^1(Su) - o(1), \end{aligned}$$

on $o(1)$ és un nombre petit que es correspon a la mesura de la part de Su que no recobrim amb els Q_i .

Per fer l'argument rigorós per a Su qualsevol ens cal fer servir el teorema de Besicovitch i una descripció detallada dels conjunts del recobriment (vegeu [9]).

Demostració de (III):

Com hem comentat, no podem demostrar el punt (III) reduint-nos al cas unidimensional com en els punts anteriors. Farem servir el lema 5.1 que ens permet demostrar la fita superior només en un subconjunt dens adequat $\mathcal{D} \subset X$.

En el nostre cas escollim \mathcal{D} com la classe de totes les funcions $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$ tals que Su sigui una corba afí a trossos.

Recordem el resultat següent, que extraiem de [14].

Teorema 5.2. Sigui Ω un conjunt obert i $E \subset \Omega$ un subconjunt fitat. Diem que E és de *perímetre finit* si

$$P(E, \Omega) := \int_{\Omega} |D\mathbf{1}_E| < +\infty,$$

on $\mathbf{1}_E$ denota la funció característica de E , o equivalentment si $\mathbf{1}_E \in BV(\Omega)$. Si E és de perímetre finit, existeix una successió de conjunts suaus (E_j) que aproxima E i tal que

$$\int |\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_E| dx \longrightarrow 0, \quad \int |D\mathbf{1}_{E_j}| \longrightarrow \int |D\mathbf{1}_E|,$$

quan $j \rightarrow +\infty$. Amb conjunt suau volem dir que $\mathbf{1}_{E_j} \in C^\infty(\Omega)$. El resultat també és cert prenent els conjunts (E_j) oberts i fitats amb vora polièdrica (que en dimensió $n = 2$ vol dir afí a trossos).

Com a aplicació directa del teorema amb $E = \{x \in \Omega : u = 1\}$, cada $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$ es pot aproximar per una successió $(u_n) \subset \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{H}^1(Su_n) \rightarrow \mathcal{H}^1(Su)$.

Prenem $u \in \mathcal{D}$ i sigui $\varepsilon > 0$. Definim u_ε de la forma següent: recobrim Su amb rectangles disjunts R_i d'amplada $\varepsilon^{2/3}$, excepte potser en un conjunt amb mesura d'ordre $\varepsilon^{2/3}$. A la figura 5.5 hi tenim un esquema del procés.

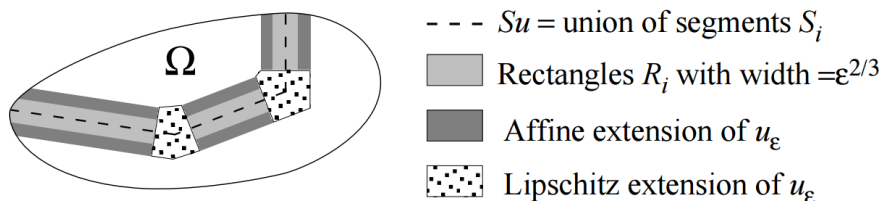


Figura 5.5: Recobriment de Su . Font: [1].

En cada rectangle R_i definim $u_\varepsilon(x) := \gamma(x_i/\varepsilon)$, on x_i és la distància orientada del punt x al segment S_i (de manera que és positiva en el costat de S_i en que $u = 1$ i negativa al costat on $u = 0$). Als rectangles més foscos extenem de manera afí la funció u_ε de manera que coincideixi amb u als extrems en contacte amb la part blanca, i escollim l'amplada de cada rectangle per fer que el pendent de u_ε sigui $1/\varepsilon$ (per tant la seva amplada és d'ordre $o(\varepsilon)$). A la regió blanca prenem $u_\varepsilon \equiv u$. A les regions amb punts definim u_ε com l'extensió Lipschitz amb la mateixa constant de Lipschitz que a la vora, la qual és d'ordre $O(\varepsilon^{-1})$.

Tal i com l'hem definit, la funció u_ε només variarà en la direcció ν_i normal a S_i . A més, fent servir la definició de $u_\varepsilon(y, z)$ a R_i i que γ és una solució del problema del perfil òptim,

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u_\varepsilon, R_i) &= \varepsilon \int_{R_i} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{R_i} W(u_\varepsilon) \\ &= \mathcal{H}^1(S_i) \left[\int_{S_j} (\gamma')^2 + \int_{S_j} W(\gamma) \right] \\ &= \mathcal{H}^1(S_i) F_1(\gamma, S_j) \\ &\leq \mathcal{H}^1(S_i) \sigma, \end{aligned}$$

mentre que la contribució a $F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega)$ de les altres regions tendeix a 0 quan $\varepsilon \rightarrow 0$.

Per tant, fent el sumatori en i

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \sigma \mathcal{H}^1(Su) + o(1),$$

on el terme $o(1)$ surt de no recobrir del tot Su amb els rectangles R_i . Com ε pot ser arbitràriament petit, hem demostrat (III). \square

5.5 Resultat anàleg per a l'equació convolutiva

En aquesta secció enunciarem el resultat anàleg al teorema de Modica-Mortola, en que els funcionals F_ε no són els associats a l'equació de difusió amb el laplaciana, sinó que ens defineixen l'equació convolutiva que ja hem estudiat en alguns dels capítols anteriors. La demostració i els detalls més tècnics es poden trobar a [2].

L'estudi del Γ -límit de funcionals no locals és interessant perquè el terme clàssic amb el gradient té en compte interaccions entre partícules o individus d'una població que estan a prop, però no considera interaccions entre partícules o individus llunyans. Ens interessa saber si les interaccions a llarga distància presenten algun efecte sobre la interfície límit.

Suposem, com en la secció anterior, que tenim un recipient Ω que conté dos fluids immiscibles. Describem cada configuració del sistema mitjançant una funció $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$ que representa la densitat del primer fluid respecte del segon fluid; els valors $u = 0$ i $u = 1$ volen dir que només hi ha un dels dos fluids en el punt.

Postulem que l'energia de cadascuna de les configuracions ve donada per

$$E(u) := \frac{1}{4} \int_{\Omega \times \Omega} J(x' - x)(u(x') - u(x))^2 dx' dx + \int_{\Omega} W(u(x)) dx,$$

on W és una funció que només s'anul·la a 0 i 1 i J és un potencial d'interacció que s'anul·la a l'infinit (més endavant concretarem les hipòtesis sobre aquestes funcions).

Com abans, la integral amb W afavoreix que la configuració prengui valors propers als *estats purs* 0 i 1, mentre que el primer terme penalitza la falta d'homogeneïtat espacial de u .

Si el potencial W pren valors grans en comparació als de J i minimitzem E sota la restricció $\int u = \text{constant}$, el segon terme de l'energia pren més importància: el mínim pren valors propers a 0 i 1, i la transició entre les dues fases es troba en una frontera estreta. Aquesta situació s'estudia passant al límit termodinàmic del funcional, és a dir, estudiant el comportament asimptòtic quan $\varepsilon \rightarrow 0$ del reescalament de l'energia

$$F_\varepsilon(u, \Omega) := \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega \times \Omega} J_\varepsilon(x' - x)(u(x') - u(x))^2 dx' dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} W(u(x)) dx, \quad (5.23)$$

on ε és un paràmetre positiu i $J_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-N} J(y/\varepsilon)$.

Recordem que el model evolutiu associat a F_ε ve descrit, reescalant el temps adequadament, per l'equació no local $u_t = \varepsilon^{-2}(J_\varepsilon * u - u - f(u))$, on f és la derivada de W i assumim que $\int J = 1$.

Abans d'enunciar el resultat de Γ -convergència per als funcionals F_ε enumerem les hipòtesis per a J i W :

- (i) W és un *double-well potential*, és a dir, és una funció no-negativa contínua i real, que només s'anul·la a 0 i 1, i tendeix a $+\infty$ a l'infinit;
- (ii) J és un *potencial d'interacció positiu*, és a dir, una funció no-negativa a \mathbb{R}^n que és parella ($J(y) = J(-y)$), pertany a $L^1(\mathbb{R}^n)$ i satisfà

$$\int_{\mathbb{R}^n} J(y)|y| dy < \infty.$$

Assumim, a més, que Ω és un subconjunt obert i regular de \mathbb{R}^n . Definim el funcional F com

$$F(u) := \int_{Su} \sigma(\nu_u) d\mathcal{H}^{n-1}, \quad (5.24)$$

per a funcions $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$, on Su és la interfase entre les fases $u = 0$ i $u = 1$, ν_u és la normal unitària a Su .

Teorema 5.3. Sota les hipòtesis anteriors, se satisfan les afirmacions següents:

- (I) *Compacitat:* donades dues successions (ε_n) i $(u_n) \subset L^1(\Omega)$ tals que $\varepsilon_n \rightarrow 0$, i $F_{\varepsilon_n}(u_n, \Omega)$ està fitada uniformement, aleshores la successió (u_n) és relativament compacta a $L^1(\Omega)$ i els seus punts d'acumulació pertanyen a $BV(\Omega, \{0, 1\})$.
- (II) *Γ -convergència:* els funcionals F_ε Γ -convergeixen a $L^1(\Omega)$ al funcional F per a totes les funcions $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$

La demostració del teorema, malgrat ser més complicada, segueix el mateix esquema que la de Modica-Mortola i el punt clau torna a ser considerar el problema del perfil òptim.

Observació 5.4. En el cas en que σ sigui constant, el Γ -límit F dels funcionals coincideix amb el que obteníem en considerar el model clàssic per a la transició de fases.

5.6 Resultat anàleg per a l'equació fraccionària

Les hipòtesis sobre J del funcional (5.23) fan que no tinguem el laplací fraccionari com a cas particular d'aquest.

A [19], hi trobem el resultat anàleg pel funcional associat a l'equació de difusió fraccionària. Veurem que per certes potències del laplací, el Γ -límit que considerarem coincideix amb el dels funcionals de Cahn-Hilliard definit a (5.6).

Com abans, considerem un domini obert i fitat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, amb complementari $\mathcal{C}\Omega$, on tenim dos fluids immiscibles i incompressibles. L'espai de totes les configuracions possibles del sistema ve donat pel conjunt de totes les funcions mesurables $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tals que $\int_\Omega u = V$, dotat amb la norma L^1 i amb V el volum del segon fluid, i el denotem per X .

Comencem definint el funcional energètic

$$J(u, \Omega) = \mathcal{K}(u, \Omega) + \int_\Omega W(u) dx,$$

on

$$K(u, \Omega) := \frac{1}{2} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+\alpha}} dx dy + \int_\Omega \int_{\mathcal{C}\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+\alpha}} dx dy,$$

i $\alpha \in (0, 2)$. Suposem que W és una funció contínua i positiva que només s'anul·la a 0 i 1, i que a més és \mathcal{C}^2 a l'interval $[0, 1]$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, el funcional J té com a equació d'Euler-Lagrange associada a l'equació de difusió fraccionària

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) + W'(u(x)) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Introduïm un paràmetre $\varepsilon > 0$ definint els funcionals

$$J_\varepsilon(u, \Omega) = \varepsilon^\alpha \mathcal{K}(u, \Omega) + \int_\Omega W(u) dx.$$

Procedim a definir els funcionals F_ε com un reescalament *adequat* de J_ε , per tal de que tinguin Γ -límit. Definim $F_\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ com

$$F_\varepsilon(u, \Omega) := \begin{cases} \varepsilon^{-\alpha} J_\varepsilon(u, \Omega) & \text{si } \alpha \in (0, 1), \\ |\varepsilon \log \varepsilon|^{-1} J_\varepsilon(u, \Omega) & \text{si } \alpha = 1, \\ \varepsilon^{-1} J_\varepsilon(u, \Omega) & \text{si } \alpha \in (1, 2). \end{cases} \quad (5.25)$$

Quan $\alpha \in (0, 1)$ definim el funcional límit $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ com

$$F(u, \Omega) := \begin{cases} \mathcal{K}(u, \Omega) & \text{si } u \in BV(\Omega, \{0, 1\}) \cap X, \\ +\infty & \text{altrament.} \end{cases} \quad (5.26)$$

Per $\alpha \in [1, 2)$ definim F com

$$F(u, \Omega) := \begin{cases} \sigma \mathcal{H}^{n-1}(Su) & \text{si } u \in BV(\Omega, \{0, 1\}) \cap X, \\ +\infty & \text{altrament,} \end{cases} \quad (5.27)$$

on σ és una constant que depèn de la dimensió de l'espai n , α i W .

Teorema 5.4. Sigui $\alpha \in (0, 2)$. Aleshores els funcionals F_ε Γ -convergeixen a F quan $\varepsilon \rightarrow 0$. A més, si existeixen successions (ε_n) i (u_n) tals que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ i $F_{\varepsilon_n}(u_n)$ està fitat uniformement, llavors (u_n) és pre-compacta en X .

Observació 5.5. En el cas $\alpha \in [1, 2)$ recuperem el Γ -límit del funcional associat al model de Cahn-Hilliard, és a dir, el model local i el fraccionari tindran la mateixa interfície en el límit.

Apèndix A

Conceptes previs

Fem un breu recordatori de tots els resultats que són necessaris per a entendre i justificar molts dels resultats dels capítols del treball, els quals suposem coneguts abans de llegir-los. Si no es diu el contrari, les demostracions es poden trobar a [8].

A.1 Espais de Lebesgue

En aquesta secció treballarem en un espai de mesura (X, \mathcal{M}, μ) . Si f és una funció mesurable en X i $1 \leq p < \infty$, definim

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p d\mu \right]^{1/p}$$

i l'espai

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ és mesurable i } \|f\|_p < \infty\}.$$

En el cas límit $p = \infty$, definim

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

i l'espai

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ és mesurable i } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Abreviarem $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ per $L^p(X)$ o L^p quan això no causi confusió. Diem que $f_n \rightarrow f$ a L^p si $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Considerem que dues funcions defineixen el mateix element de L^p si coincideixen quasi per tot punt. Per aquest motiu, els espais L^p no són espais de funcions en sentit estricte, sinó que els seus elements són classes de funcions. Per simplificar l'escriptura, notem els seus elements \bar{f} com a funcions normals f , tenint en compte que no podem dir res del seu valor en un punt, ja que f està definida excepte en un conjunt de mesura zero. Per tant, totes les propietats de f se satisfaran quasi per a tot punt.

Per a $1 \leq p < \infty$, L^p és un espai vectorial i $\|\cdot\|_p$ és una norma d'aquest espai. La base de la teoria dels espais L^p és de desigualtat de Hölder, que enunciem a continuació.

Teorema A.1 (Desigualtat de Hölder). Suposem que $1 \leq p < \infty$ i $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Si f i g són funcions mesurables en X , aleshores

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

En particular, si $p = 1$ tindrem $q = \infty$. En el cas $p = q = 2$ recuperem la coneguda desigualtat de Cauchy-Schwarz.

La condició $p^{-1} + q^{-1} = 1$ és recurrent en la teoria de L^p . Si $1 < p < \infty$, el nombre q que satisfà la condició s'anomena *exponent conjugat* de p .

Teorema A.2 (Desigualtat de Minkowski). Si $1 \leq p < \infty$ i $f, g \in L^p$, aleshores

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Aquest resultat ens mostra que per $p \geq 1$, L^p és un espai vectorial normat. A més:

Teorema A.3. Si $1 \leq p \leq \infty$, L^p és un espai de Banach.

Els teoremes següents ens donen un recull de resultats de densitat i ens permetran demostrar propietats de les funcions de L^p , fent-ho primer per funcions d'un subespai dens i estenent el resultat per continuïtat.

Teorema A.4. Si $1 \leq p < \infty$, les funcions simples són denses a $L^p(X)$. Si $p = \infty$ el mateix és cert si $\mu(X) < \infty$.

Teorema A.5. Si $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, μ és una mesura de Lebesgue i $1 \leq p < \infty$, aleshores:

1. les funcions contínues amb suport compacte són denses a L^p , i
2. les funcions infinitament diferenciables amb suport compacte també són denses a L^p .

A.2 Teoremes de convergència per integrals

La teoria d'integració de Lebesgue és especialment útil ja que ens proporciona els teoremes de convergència següents.

Teorema A.6 (Lema de Fatou). Suposem que les funcions $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ són no-negatives i integrables. Aleshores

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx. \quad (\text{A.1})$$

Teorema A.7 (Teorema de la Convergència Monòtona). Suposem que les funcions $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ són mesurables amb

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \dots.$$

Aleshores

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx. \quad (\text{A.2})$$

Teorema A.8 (Teorema de la Convergència Dominada). Suposem que les funcions de la successió $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ són integrables i que

$$f_k \rightarrow f \text{ qpt.}$$

Suposem també que

$$|f_k| \leq g \text{ qpt,}$$

amb $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aleshores

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f dx. \quad (\text{A.3})$$

Teorema A.9 (Teorema de derivació sota el signe integral). Sigui $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ compacte i sigui $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que la funció derivada $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existeix i és contínua a tot U . Aleshores, si $A \subset \mathbb{R}^n$ i $B \subset \mathbb{R}^m$, amb B obert i $A \times B \subset U$, la funció $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$F(y) = \int_A f(x, y) dx,$$

és diferenciable en B i per a tot $y \in B$

$$F'(y) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

A.3 Convergència feble

Sigui X un espai de Banach real.

Definició A.1 (Convergència feble). Diem que una successió $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ convergeix feblement a $u \in X$, i escrivim $u_k \rightharpoonup u$, si

$$u^* \cdot u_k \rightarrow u^* \cdot u,$$

on \cdot denota el producte escalar de X , per cada funcional lineal fitat $u^* \in X$.

Es pot comprovar que la convergència usual $u_k \rightarrow u$ implica la convergència feble $u_k \rightharpoonup u$. A més, si $u_k \rightharpoonup u$ se satisfà que

$$\|u\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|.$$

A.4 Espais de Hölder

Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert. Recordem que la classe de les funcions *contínues Lipschitz* està formada per funcions $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ satisfent la condició

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \quad x, y \in U, \quad (\text{A.4})$$

per una constant C que només depèn de u .

Prenem $0 < \gamma \leq 1$ i considerem les funcions u que satisfan una generalització de (A.4), concretament

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma, \quad x, y \in U \quad (\text{A.5})$$

per una constant C . Una funció que satisfaci aquesta condició diem que és *contínua Hölder* amb exponent γ .

Definició A.2. Sigui $u \in C(\bar{U})$ i $0 < \gamma \leq 1$. Definim la γ -èssima semi-norma de Hölder com

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}, \quad (\text{A.6})$$

i definim l'espai de les funcions contínues de Hölder amb exponent γ com

$$C^{0,\gamma}(\bar{U}) = \left\{ u \in C(\bar{U}) : [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} < +\infty \right\}. \quad (\text{A.7})$$

Definició A.3. Sigui $u \in C^{0,\gamma}(\bar{U})$. Definim la γ -èssima norma de Hölder com

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} = \|u\|_\infty + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}, \quad (\text{A.8})$$

on $\|u\|_\infty := \sup_{x \in U} |u(x)|$ és la norma del suprem a $C(\bar{U})$.

Es pot demostrar que $\|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$ defineix una norma a $C^{0,\gamma}(\bar{U})$.

En la definició següent estenem la definició de funcions contínues de Hölder a funcions diferenciables.

Definició A.4. L'espai de Hölder $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ és el conjunt de funcions $u \in C^k(\bar{U})$ per les quals la norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} \quad (\text{A.9})$$

és finita.

Per tant l'espai $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ és el conjunt de les funcions u que són contínuament diferenciables k vegades i tals que les seves k -èssimes derivades parcials són contínues Hölder amb exponent γ . Aquest espai de funcions presenta bones propietats, de fet:

Teorema A.10. L'espai de funcions $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ és un espai de Banach amb la norma (A.9).

A.5 Diferenciació feble

Introduïm una definició de derivada menys restrictiva que la definició usual, que ens permeti treballar amb funcions que no siguin tan regulars. Aquest concepte de derivada és el que ens permetrà introduir els anomenats espais de Sobolev.

Notem $C_C^\infty(U)$ l'espai de les funcions infinitament diferenciables amb suport compacte U . A les funcions d'aquest espai les anomenarem *funcions test*.

Definició A.5. Siguin $u, v \in L^1_{loc}(U)$ i α un multi-índex. Diem que v es la α -èssima derivada parcial feble de u , i notem

$$D^\alpha u = v,$$

si se satisfà que

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx \quad (\text{A.10})$$

per totes les funcions test $\phi \in C^\infty_c(U)$.

L'abús de notació que cometem a l'escriure de la mateixa manera la derivada feble i la derivada usual no porta a confusió, ja que qualsevol funció diferenciable és també diferenciable en forma feble. A més, les regles de derivació usuals també es poden generalitzar a la diferenciació feble. Ens serà útil tenir en compte el resultat següent:

Lema A.1. La derivada parcial feble d'ordre α de u , si existeix, està definida de manera única excepte en un conjunt de mesura nul·la.

A.6 Espais de Sobolev

Un cop introduït el concepte de derivada feble podem procedir a definir els espais de Sobolev.

Definició A.6 (Espai de Sobolev). Definim l'espai de Sobolev $W^{k,p}(U)$ com el conjunt format per les funcions $u \in L^1_{loc}(U)$ tals que per a tot α multi-índex, amb $|\alpha| \leq k$, la derivada feble $D^\alpha u$ existeix i pertany a $L^p(U)$.

En el cas $p = 2$ notem $H^k(U) = W^{k,2}(U)$, per $k = 0, 1, \dots$

Definició A.7. Si $u \in W^{k,p}(U)$, definim la seva norma com

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_U |D^\alpha u| & (p = \infty). \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Teorema A.11. Per cada $k = 1, 2, \dots$ i $1 \leq p \leq \infty$, l'espai de Sobolev $W^{k,p}(U)$ és un espai de Banach amb la norma anterior.

Lema A.2. Una funció f pertany a l'espai $H^k(\mathbb{R}^n)$ si, i només si, $(1 + |\xi|^2)^{k/2} \hat{f}(\xi)$ és de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Una part important en l'estudi dels espais de Sobolev són les inclusions d'aquests espais en d'altres. A continuació, presentem un resultat d'aquest tipus.

Definició A.8. Diem que u^* és una versió d'una funció donada u si

$$u = u^* \text{ qpt.}$$

Teorema A.12. Sigui U un subconjunt obert i fitat de \mathbb{R}^n amb ∂U de classe C^1 . Suposem que $n < p \leq \infty$ i que $u \in W^{1,p}(U)$. Aleshores u té un versió $u^* \in C^{0,\gamma}$, per $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ i se satisfà que

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

El teorema anterior ens permetrà dir que, si es verifiquen les hipòtesis de p i n , tota funció de Sobolev admet una versió contínua.

Bibliografia

- [1] G. Alberti. *Variational models for phase transitions. An approach via Γ -convergence*. In *Calculus of variations and partial differential equations* (Pisa, 1996), 95–114, Springer, 2000.
- [2] G. Alberti, G. Bellettini. *A non-local anisotropic model for phase transitions: asymptotic behavior of rescaled energies*. *European Journal of Applied Mathematics* vol. 9, 261-284, 1998.
- [3] G. Alberti, G. Bouchitté, P. Seppecher. *Phase transitions with line tension effect*. *Arch. Rational Mech. Anal.*, N° 144, 1-49, 1998.
- [4] D. Applebaum. *Lévy Processes - From Probability to Finance and Quantum Groups*. *Notices of the AMS*, vol. 51, n° 11, 1336-1347, 2004.
- [5] J.M. Ball. *A version of the fundamental theorem for Young measures*. *Lecture Notes in Physics* 344. Springer-Verlag, 1989.
- [6] E. Chasseigne, M. Chaves, J.D. Rossi. *Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equations*. *Math. Pures Appl.*, 86, 271–291, 2006.
- [7] R. Durrett. *Probability: Theory and examples*.
- [8] L.C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [9] L.C. Evans, R.F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. *Studies in Advanced Mathematics*, CRC Press, 1992.
- [10] P. Fife. *Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions*. *Trends in nonlinear analysis*, 153–191, Springer, 2003.
- [11] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley Interscience, 1999.
- [12] J. K. Hunter, B. Nachtergaele. *Applied Analysis*. World Scientific Publishing Company, 2001.
- [13] V. Hutson, S. Martinez, K. Mischaikow, G.T. Vickers. *The evolution of dispersal*. *Mathematical Biology*, N°. 47, 483-517, 2003.
- [14] F. Maggi. *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems*. Cambridge Universtiy Press, 2012.

- [15] R. Metzler, J. Klafter. *The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach*. Physics Reports, Elsevier Science B.V., 2000.
- [16] L. Modica. *The gradient theory of phase transition and the minimal interface criterion*. Arch. Rational Mech. Anal. N^o 98, 123-142, 1987.
- [17] S. Salsa. *Partial Differential Equations in Action*. Springer, 2008.
- [18] G. Palatucci, O. Savin, E. Valdinoci. *Local and global minimizers for a variational energy involving a fractional norm*, 2011.
- [19] O. Savin, E. Valdinoci. *Γ -convergence for non-local phase transitions*. Submitted paper, 2010.
- [20] E.M. Stein, R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, 2003.
- [21] E. Valdinoci. *From the long jump random walk to the fractional laplacian*. SeMA Journal: Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, N^o. 49, 2009.
- [22] N. Wolanski. *Resultados asintóticos para problemas de difusión no local*. Presentació a l'UMA, 2014.