

Grau en Matemàtiques

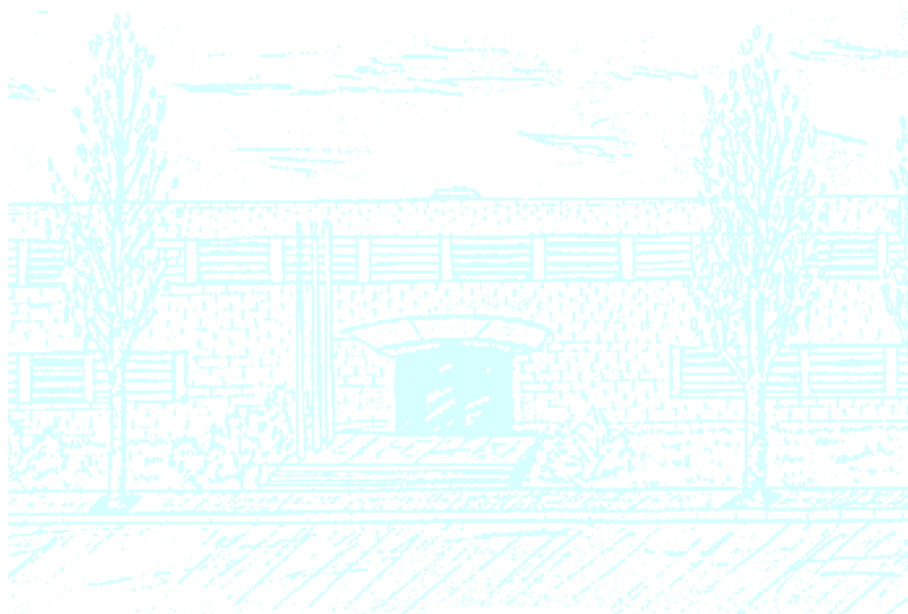
Títol: Estudi del Moviment dels Asteroides Troians

Autor: Jose Segura Díaz

Director: Mercè Ollé Torner, Esther Barrabés Vera

**Departament: Matemàtica Aplicada 1 (UPC)
Informàtica i Matemàtica Aplicada (UdG)**

Convocatòria: Juny 2015



Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Treball Fi de Grau

Estudi del Moviment dels Asteroides Troians

Jose Segura Díaz

Directors: Mercè Ollé Torner, Esther Barrabés Vera

Dpt. de Matemàtica Aplicada 1, UPC
Dpt. Informàtica i Matemàtica Aplicada, UdG

Resum

Paraules clau: Problema dels Tres Cossos Restringit, Punts de Lagrange, Varietats invariants, Òrbita de Lyapunov, Jumping Trojan

En una part teòrica, deduirem les equacions sinòdiques i altres del Problema Restringit dels Tres Cossos i trobarem els seus punts d'equilibri. Estudiarem l'estabilitat d'aquests punts i trobarem les seves varietats invariants. En el sistema Sol-Júpiter del RTBP, explicarem l'existència de *jumping trojans*, trajectòries d'intercanvi entre els punts estables L_4 i L_5 (Troians), mitjançant mètodes numèrics amb Matlab. Per fer-ho, buscarem òrbites de Lyapunov i calcularem les varietats que n'emanen. Farem ús del loop map per obtenir una representació clara d'aquestes i veurem que el fenomen del salt troià radica en les interseccions de les varietats en el loop map. Trobarem que en el sistema Sol-Terra els *jumping trojans* és un fet difícil de trobar.

Abstract

Keywords: Restricted three-body problem, Lagrange points, Invariant manifolds, Lyapunov orbit, Jumping Trojan

In a theoretical part, we deduce sinodic and other kind of equations of the restricted three-body problem and find its equilibrium points. We study the stability of these points and find its invariant manifolds. In the Sun-Jupiter system of the RTBP, we explain the existence of *jumping trojans*, trajectories of exchange of stable point between L_4 and L_5 (Trojans), using numerical methods with Matlab. In order to do this, we search for Lyapunov orbits and calculate the manifolds that emanate. We use the loop map for a clear representation of this phenomenon and see that the trojan jump lies in the intersection of the manifolds in the loop map. Then we find that in the Sun-Earth system jumping trojans are less likely to happen.

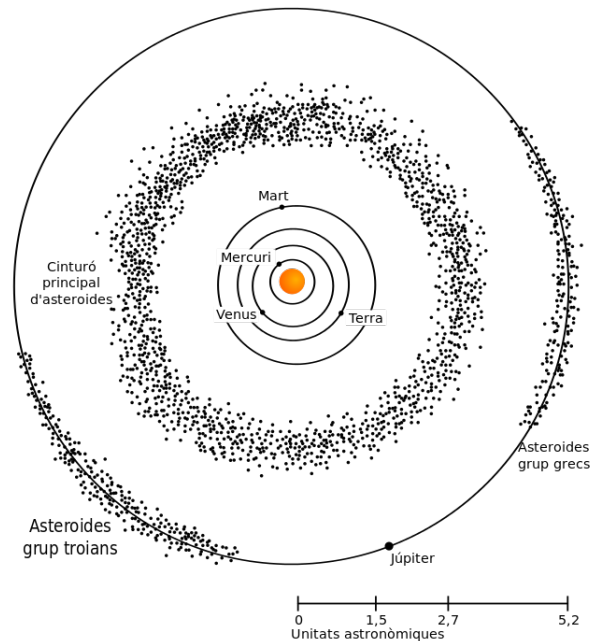
Índex general

1. Introducció	1
Part 1. El Problema dels Tres Cossos	
Restringit	3
2. Sistemes de referència del RTBP	4
3. Punts fixos: Els punts Lagrangians	11
4. Estabilitat dels punts d'equilibri	14
5. Varietats estable/inestable de L_3	17
Part 2. Estudi Numèric dels Asteroides	
Troians	19
6. Buscant les varietats numèricament	20
7. El Loop Map	23
8. Tipus d'òrbites als voltants dels punts troians	25
9. Els moviments entre troians	28
10. Els Troians del Sistema Sol-Terra	33
11. Conclusions	34
Part 3. Apèndix	35
12. Codis Matlab	36
13. Bibliografia	42

1. Introducció

Els moviments de planetes en el sistema solar ha estat sempre un ampli camp d'estudi en física i mecànica clàssica. Com una visió simple però eficient del nostre sistema, una bona aproximació és l'anomenat *Problema dels Tres Cossos Restringit*, o en anglès *Restricted Three Body Problem (RTBP)*. En aquest problema considerem dos cossos massius com dos punts girant en òrbites circulars sobre un mateix pla, i estudiem el moviment d'un tercer cos, de massa despreciable, movent-se atret per la força gravitatòria proporcionades pels dos cossos. És a dir, la simplificació del sistema solar fent servir aquest model es fa servir prenent el Sol i Júpiter com cossos de referència, i ignorant la resta degut a la seva escassa massa en comparació. Aquesta simplificació pot semblar molt extrema, però amb l'experiència es troben solucions força satisfactòries. Els inicis de l'estudi de la dinàmica gravitatòria de tres cossos es remonta a 1687, quan Isaac Newton va publicar "*Principia*". En 1772, Euler va ser el primer en introduir un sistema de coordenades rotatori (sinòdic) per al RTBP, i Jacobi(1836) en conseqüència va descobrir una integral del sistema, avui coneguda com la *Integral o Constant de Jacobi*.

Aquest treball fa ús del RTBP per estudiar el moviment dels *asteroides troians* de Júpiter. Els asteroides troians són un grup d'asteroides situats en la mateixa òrbita d'un planeta o satèl·lit (en el nostre cas, Júpiter) als voltants dels punts de Lagrange estables L_4 i L_5 (punts troians), els quals estan situats a formant un angle de 60° i -60° amb la recta des del planeta al Sol, respectivament. Reben aquest nom en referència a les guerres Troianes i als asteroides de L_4 també s'els anomena *grecs*. Alguns exemples són (588) Aquil·les, (624) Héctor, (617) Patroclus o (1868) Thersites.



Més recentment, s'han observat numèricament uns tipus d'asteroides anomenats *jumping trojans* (troians saltadors). Aquests asteroides es troben en un principi orbitant prop d'un dels punts de Lagrange estables del sistema, quan a partir de cert moment es separen d'aquesta regió i passen prop del punt de Lagrange inestable L_3 , situat en direcció contrària a Júpiter respecte al Sol, per finalment arribar al punt estable troià contrari i quedar-se orbitant al seu voltant. Uns estudis numèrics de Tsiganis, K., Dvorak, R., i Pilat-Lohinger, E. (2000) suggereixen que Thersites, un troià de Júpiter de L_4 , és un exemple de *jumping trojan*.

En aquest treball, estudiarem el RTBP des del començament, partint únicament de les suposicions del model i la llei de gravitació universal fins a poder efectuar un estudi de la dinàmica del sistema. Trobarem els punts fixos del sistema, els famosos cinc punts de Lagrange L_i i els classificarem segons com influeixen a punts propers i quin tipus de trajectòries hi podem trobar. Tot seguit, enunciarem una sèrie de teoremes i resultats teòrics del camp de Sistemes Dinàmics que ens serà la base per buscar numèricament diferents tipus de trajectòries que poden efectuar els asteroides troians, i farem servir un mètode ideat per Kenta Oshima i Tomohiro Yanao (2015) per explicar el curiós comportament dels jumping trojans.

La motivació d'aquest projecte ve donada en gran part per un article de E. Barrabés, J. M. Mondelo i M. Ollé (2009) *Dynamical aspects of multi-round horseshoe-shaped homoclinic orbits in the RTBP* on s'explorava numèricament l'existència d'òrbites homoclíniques del punt lagrangiana L_3 . Les assignatures optatives *Sistemes Dinàmics* i *Mètodes Numèrics per EDOs* em van portar a escollir aquest article per fer un petit treball, i em va introduir a les equacions del RTBP i la gran quantitat de mètodes numèrics utilitzats en aquest àmbit.

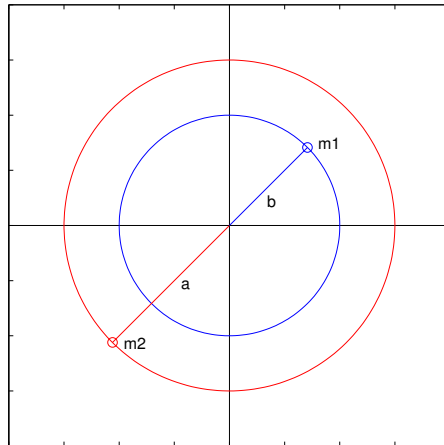
L'estudi numèric d'aquest treball s'ha fet mitjançant Matlab, i es trobaran els codis més rellevants en l'apèndix.

Part 1

**El Problema dels Tres Cossos
Restringit**

2. Sistemes de referència del RTBP

Suposem dos cossos anomenats primaris de masses $m_1 \geq m_2$ que descriuen òrbites circulars al voltant del centre de masses.



Amb $a + b = l$ i $n^2 l^3 = \mu = G(m_1 + m_2)$. Sigui $m_3 \approx 0$ de manera que m_1 i m_2 influeixen sobre m_3 però m_3 no influeix sobre m_1 i m_2 .

Considerem dos sistemes de referència:

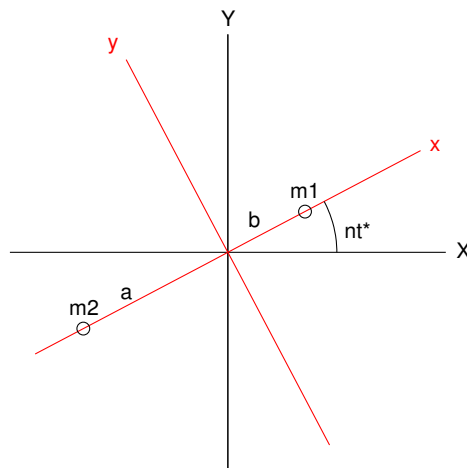


FIGURA 1. En negre: Sistema d'eixos fixos. En vermell: Sistema rotatori

2.1. Sistema sideral. Prendrem X, Y com un sistema d'eixos fixos.

Recordem que els cossos giren al voltant del centre de masses. Es compleix:

$$\begin{cases} a + b = l \\ m_1 b + m_2(-a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \\ b = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

A continuació escrivim les equacions que descriuen el moviment de les masses m_1 i m_2 . Com giren amb radi constant tenim:

$$(1) \quad m_1 : \begin{cases} X_1 = b \cos(nt^*) \\ Y_1 = b \sin(nt^*) \end{cases}$$

$$(2) \quad m_2 : \begin{cases} X_2 = a \cos(nt^* + \pi) = -a \cos(nt^*) \\ Y_2 = a \sin(nt^* + \pi) = -a \sin(nt^*) \end{cases}$$

$$r_1 = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2}$$

Escrivim ara les equacions de moviment per a m_3 al sistema sideral.

Recordem la llei de gravitació universal que descriu la força que exerceix una partícula puntual de massa m_1 situada en \mathbf{R}_1 sobre una altra de massa m_2 en \mathbf{R}_2 és:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)$$

Tenint en compte que la força gravitatòria total a m_3 és la suma de les forces de cada massa:

$$m_3 \ddot{\mathbf{R}} = F_1 + F_2 = -G \frac{m_1 m_3}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) - G \frac{m_2 m_3}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_2)$$

Separarem la equació en primera i segona component, i substituïm (X_1, Y_1) i (X_2, Y_2) segons (1) i (2).

$$(3) \quad \begin{cases} m_3 \ddot{X} = -G \frac{m_1 m_3}{r_1^3} (X - b \cos(nt^*)) - G \frac{m_2 m_3}{r_2^3} (X + a \cos(nt^*)) \\ m_3 \ddot{Y} = -G \frac{m_1 m_3}{r_1^3} (Y - b \sin(nt^*)) - G \frac{m_2 m_3}{r_2^3} (Y + a \sin(nt^*)) \end{cases}$$

Nota: Si definim $V = G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right)$ llavors:

$$\begin{cases} \ddot{X} = \frac{\partial V}{\partial X} \\ \ddot{Y} = \frac{\partial V}{\partial Y} \end{cases}$$

2.2. Sistema Sinòdic. Pendrem X, Y com un sistema rotatori que gira amb els primaris.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt^*) & -\sin(nt^*) \\ \sin(nt^*) & \cos(nt^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

Usant notació complexa $Z = X + iY$, $\bar{z} = \bar{x} + i\bar{y}$:

$$\begin{aligned}
Z &= e^{int^*} \bar{z} \\
\dot{Z} &= ine^{int^*} \bar{z} + e^{int^*} \dot{\bar{z}} \\
\ddot{Z} &= -n^2 e^{int^*} \bar{z} + 2ine^{int^*} \dot{\bar{z}} + e^{int^*} \ddot{\bar{z}} \\
&= e^{int^*} (\ddot{\bar{z}} + 2in\dot{\bar{z}} - n^2\bar{z}) \\
&= e^{int^*} [\ddot{\bar{x}} - 2n\dot{\bar{y}} - n^2\bar{x} + i(\ddot{\bar{y}} + 2n\dot{\bar{x}} - n^2\bar{y})]
\end{aligned}$$

Tornant a la forma matricial, tenim com es comporta la segona derivada en el nou sistema giratori.

$$(4) \quad \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt^*) & -\sin(nt^*) \\ \sin(nt^*) & \cos(nt^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\bar{x}} - 2n\dot{\bar{y}} - n^2\bar{x} \\ \ddot{\bar{y}} + 2n\dot{\bar{x}} - n^2\bar{y} \end{pmatrix}$$

D'altra banda, tenim la llei de gravitació universal:

$$\ddot{\mathbf{R}} = -G \frac{m_1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) - G \frac{m_2}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_2)$$

Es té en les noves coordenades:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 &= e^{int^*} (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1) \\
\mathbf{R} - \mathbf{R}_2 &= e^{int^*} (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_2)
\end{aligned}$$

Observem que $\bar{\mathbf{r}}_1 = (b, 0)$ i $\bar{\mathbf{r}}_2 = (-a, 0)$ ja que són fixos en l'eix \bar{x} . Amb el resultat (4) i la llei de gravitació en les coordenades:

$$e^{int^*} \begin{pmatrix} \ddot{\bar{x}} - 2n\dot{\bar{y}} - n^2\bar{x} \\ \ddot{\bar{y}} + 2n\dot{\bar{x}} - n^2\bar{y} \end{pmatrix} = -G \frac{m_1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1|^3} e^{int^*} (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1) - G \frac{m_2}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_2|^3} e^{int^*} (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_2)$$

En definitiva, obtenim les equacions següents:

$$(5) \quad \begin{cases} \ddot{\bar{x}} - 2n\dot{\bar{y}} - n^2\bar{x} = -G \frac{m_1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1|^3} (\bar{x} - b) - G \frac{m_2}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_2|^3} (\bar{x} + a) \\ \ddot{\bar{y}} + 2n\dot{\bar{x}} - n^2\bar{y} = -G \frac{m_1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1|^3} \bar{y} - G \frac{m_2}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_2|^3} \bar{y} \end{cases}$$

Nota: Si anomenem $\bar{V} = \frac{n^2}{2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + G(\frac{m_1}{\bar{r}_1} + \frac{m_2}{\bar{r}_2})$, amb $\bar{r}_1 = \sqrt{(\bar{x} - b)^2 + \bar{y}^2}$ i $\bar{r}_2 = \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + \bar{y}^2}$. Es té que:

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} - 2n\dot{\bar{y}} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} \\ \ddot{\bar{y}} + 2n\dot{\bar{x}} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} \end{cases}$$

Un cop trobades les equacions del RTBP en un sistema que gira amb els primaris, fem uns canvis d'escala per simplificar el resultat (5). Els canvis són els següents:

$$\begin{cases} x = \bar{x}/l \\ y = \bar{y}/l \\ t = nt^* \end{cases}$$

Dels dos primers canvis veiem que $\mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{r}}_1/l$ i $\mathbf{r}_2 = \bar{\mathbf{r}}_2/l$. Definim $\mu_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}$, $\mu_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ i $d_1 = |(x - \mu_2, y)|$, $d_2 = |(x + \mu_1, y)|$. Efectuant els canvis d'escala en les equacions (5):

$$\begin{cases} ln^2\ddot{x} - 2ln^2\dot{y} - ln^2x = -G\frac{m_1}{|l\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}(lx - b) - G\frac{m_2}{|l\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3}(lx + a) \\ ln^2\ddot{y} + 2ln^2\dot{x} - ln^2y = -G\frac{m_1}{|l\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}ly - G\frac{m_2}{|l\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3}ly \end{cases}$$

Recordem que $a = \frac{m_1l}{m_1+m_2} = \mu_1l$ i $b = \frac{m_2l}{m_1+m_2} = \mu_2l$ degut a que l'origen és el centre de masses i que $a + b = l$.

$$|l(x, y) - (b, 0)| = |l(x, y) - l(\mu_2, 0)| = l|(x - \mu_2, y)| = ld_1$$

$$|l(x, y) + (a, 0)| = |l(x, y) + l(\mu_1, 0)| = l|(x + \mu_1, y)| = ld_2$$

Amb aquests dos últims resultats, podem acabar finalment el escalat i dividir les equacions entre ln^2 .

$$(6) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\frac{G(m_1+m_2)}{l^2n^2} \left[\frac{\mu_1(x-\mu_2)}{d_1^3} + \frac{\mu_2(x+\mu_1)}{d_2^3} \right] \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{G(m_1+m_2)}{l^2n^2} \left[\frac{m_1y}{d_1^3} + \frac{m_2y}{d_2^3} \right] \end{cases}$$

Nota: Si anomenem $\bar{\Omega} = \bar{V}/l^2n^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (\frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2})$, es té que:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y} \end{cases}$$

Per acabar, ens interessa que $\frac{G(m_1+m_2)}{l^2n^2} = 1$. Per això:

- Prenem unitat de massa tal que $m_1 + m_2 = 1$. És a dir, 1 unitat de massa [M] = $(m_1 + m_2)$ kilograms.
- Prenem unitat de longitud tal que $l = 1$. És a dir, 1 unitat de longitud [L] = $\text{dist}(m_1, m_2)$ metres.
- Prenem unitat de temps tal que $G = 1$. És a dir, 1 unitat de temps [T] = T segons, tal que:

$$\begin{aligned} G = 6.664 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \frac{(m_1 + m_2)kg}{1[M]} \frac{1[L]^3}{\text{dist}(m_1, m_2)^3 m^3} \frac{T^2 s^2}{1[T]} = 1 \\ \Rightarrow T = \sqrt{\frac{\text{dist}(m_1, m_2)^3}{6.664 \cdot 10^{-11}} (m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

Amb aquestes unitats, si anomenem $\mu = m_2$ es té que $m_1 = 1 - \mu$. Fent un abús de notació, reanomenem $r_1 := d_1$, $r_2 := d_2$ per obtenir una bona notació final.

Finalment obtenim:

$$(7) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu+1)}{r_2^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = y \left[1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{cases}$$

On $\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu)$.

Aquest resultat és el que anomenem les equacions del RTBP en coordenades sinòdiques, i és el més usat per estudiar l'estabilitat del problema degut a l'existència de punts fixos. Aquest sistema d'EDOs de segon

ordre es pot reduir a un de primer ordre si augmentem la dimensió. Per tot $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E = (\mathbb{R}^2 - \{(\mu, 0), (\mu - 1, 0)\}) \times \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = \dot{x} \\ x_4 = \dot{y} \end{cases}$$

Es té que:

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = 2x_4 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \\ \dot{x}_4 = -2x_3 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \end{cases}$$

Proposició. $C = 2\Omega(x, y) - (x^2 + y^2)$ és una quantitat conservada. Anomenem C *constant de Jacobi*.

Prova.

$$\frac{d}{dt}C = 2\frac{\partial \Omega}{\partial x}\dot{x} + 2\frac{\partial \Omega}{\partial y}\dot{y} - 2x\dot{x} - 2y\dot{y} = 2\frac{\partial \Omega}{\partial x}\dot{x} + 2\frac{\partial \Omega}{\partial y}\dot{y} - 2\dot{x}\left(2y + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) - 2\dot{y}\left(-2x + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) = 0 \quad \square$$

Propietat. Les equacions satisfan la simetria

$$(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \longrightarrow (-t, x, -y, -\dot{x}, \dot{y})$$

És a dir, per cada solució del problema, existeix una altra simètrica respecte $y = 0$ en l'espai de configuracions.

Prova. Donada (x_1, x_2, x_3, x_4) solució del problema (8), definim:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = x_1(-t) \\ \bar{x}_2(t) = -x_2(-t) \\ \bar{x}_3(t) = -x_3(-t) \\ \bar{x}_4(t) = x_4(-t) \end{cases}$$

En efecte:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = -\dot{x}_1(-t) = -x_3(-t) = \bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_2 = \dot{x}_2(-t) = x_4(-t) = \bar{x}_4 \\ \dot{\bar{x}}_3 = \dot{x}_3(-t) = 2x_4(-t) + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}(x_1(-t), x_2(-t)) = 2\bar{x}_4 + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \dot{\bar{x}}_4 = -\dot{x}_3(-t) = 2x_3(-t) - \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = -2\bar{x}_3 + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}_2} \end{cases}$$

Proposició. Podem expressar el RTBP com la solució d'un sistema Hamiltonià amb energia $H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2y_1 - x_1y_2 - \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right)$, sent:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ y_1 = \dot{x} - y \\ y_2 = \dot{y} + x \end{cases}$$

Nota: Observem que $C = -2H + \mu(1 - \mu)$.

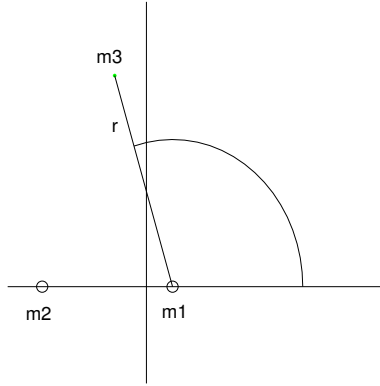
Derivant H, veiem que trobem el mateix resultat que el sistema (7).

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial y_1} = y_1 + x_2 = \dot{x} \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial y_2} = y_2 - x_1 = \dot{y} \\ \dot{y}_1 = \dot{x} - \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = y_2 - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu+1)}{r_2^3} = \dot{y} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \dot{y}_2 = \dot{y} + \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -y_1 - y \left[\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] = -\dot{x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{cases}$$

2.3. Sistema "Polar Desplaçat". Aquest tercer sistema es dedueix a partir del sinòdic i tindrà importància més endavant. Considerem el canvi de les coordenades anteriors, $(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x, y, \dot{x}, \dot{y})$ a les coordenades $(r, \theta, \bar{y}, \bar{x}) := (r, \theta, \dot{r}, r\dot{\theta})$ de la forma següent:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta + \mu \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Que consisteix en un canvi a polars després de fer un desplaçament de x a $x - \mu$, es a dir, estem col·locant el cos primari major en l'origen de coordenades, ja que es troba a distància $b = m_2 l / m_1 + m_2 = \mu$ del origen.



Partint de l'equació en coordenades sinòdiques (7):

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu+1)}{r_2^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = y \left(1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) \end{cases}$$

$$r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2} \quad r_2 = \sqrt{(x - \mu + 1)^2 + y^2}$$

Derivem:

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \theta + \mu & y &= r \sin \theta \\
\dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta & \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \\
\ddot{x} &= -(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin \theta + (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta & \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta
\end{aligned}$$

Definim $\bar{y} = \dot{r}$, $\bar{x} = r\dot{\theta}$. Si derivem:

$$\ddot{r} = \dot{\bar{y}} \quad r\ddot{\theta} = \dot{\bar{x}} - \bar{x}\bar{y}/r$$

Substituïm per \bar{x} , \bar{y} les equacions anteriors.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \bar{y} \cos \theta - \bar{x} \sin \theta & \dot{y} &= \bar{y} \sin \theta + \bar{x} \cos \theta \\
\ddot{x} &= -\left(\frac{\bar{x}\bar{y}}{r} + \dot{\bar{x}}\right) \sin \theta + \left(\dot{\bar{y}} - \frac{\bar{x}^2}{r}\right) \cos \theta & \ddot{y} &= \left(\dot{\bar{y}} - \frac{\bar{x}^2}{r}\right) \sin \theta + \left(\frac{\bar{x}\bar{y}}{r} + \dot{\bar{x}}\right) \cos \theta
\end{aligned}$$

Abans de fer el canvi a les equacions observem:

$$r_1 = \sqrt{(r \cos \theta + \mu - \mu)^2 + (r \sin \theta)^2} = r, \quad r_2 = \sqrt{(r \cos \theta + \mu - \mu + 1)^2 + (r \sin \theta)^2} = \sqrt{r^2 + 2r \cos \theta + 1} := R$$

Fem el canvi en la primera equació:

$$-\left(\frac{\bar{x}\bar{y}}{r} + \dot{\bar{x}}\right) \sin \theta + \left(\dot{\bar{y}} - \frac{\bar{x}^2}{r}\right) \cos \theta - 2(\bar{y} \sin \theta + \bar{x} \cos \theta) = r \cos \theta + \mu - \frac{(1-\mu)(r \cos \theta)}{r^3} - \frac{\mu(r \cos \theta + 1)}{R^3}$$

Manipulant:

$$\cos \theta \dot{\bar{y}} - \sin \theta \dot{\bar{x}} = \left(\frac{\bar{x}^2}{r} + 2\bar{x} + r + \frac{(1-\mu)}{r^2} - \frac{\mu r}{R^3}\right) \cos \theta - \left(-\frac{\bar{x}\bar{y}}{r} - 2\bar{y}\right) \sin \theta + \mu - \frac{\mu}{R^3}$$

Fem el canvi en la segona equació:

$$\left(\dot{\bar{y}} - \frac{\bar{x}^2}{r}\right) \sin \theta + \left(\frac{\bar{x}\bar{y}}{r} + \dot{\bar{x}}\right) \cos \theta + 2(\bar{y} \cos \theta - \bar{x} \sin \theta) = (r \sin \theta) \left(1 - \frac{(1-\mu)}{r^3} - \frac{\mu}{R^3}\right)$$

Manipulant:

$$\sin \theta \dot{\bar{y}} + \cos \theta \dot{\bar{x}} = \left(\frac{\bar{x}^2}{r} + 2\bar{x} + r + \frac{(1-\mu)}{r^2} - \frac{\mu r}{R^3}\right) \sin \theta + \left(-\frac{\bar{x}\bar{y}}{r} - 2\bar{y}\right) \cos \theta$$

Posant les 2 equacions en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{y}} \\ \dot{\bar{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{x}^2}{r} + 2\bar{x} + r + \frac{(1-\mu)}{r^2} - \frac{\mu r}{R^3} \\ -\frac{\bar{x}\bar{y}}{r} - 2\bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu - \frac{\mu}{R^3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si multipliquem per la matriu de rotació d'angle $-\theta$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{y}} \\ \dot{\bar{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{x}^2}{r} + 2\bar{x} + r + \frac{(1-\mu)}{r^2} - \frac{\mu r}{R^3} \\ -\frac{\bar{x}\bar{y}}{r} - 2\bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu - \frac{\mu}{R^3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{x}^2}{r} + 2\bar{x} + r + \frac{(1-\mu)}{r^2} - \frac{\mu r}{R^3} + \left(\mu - \frac{\mu}{R^3}\right) \cos \theta \\ -\frac{\bar{x}\bar{y}}{r} - 2\bar{y} - \left(\mu - \frac{\mu}{R^3}\right) \sin \theta \end{pmatrix}$$

En conclusió, el sistema de coordenades $(r, \theta, \bar{y}, \bar{x})$ ens dona les equacions:

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{r} = \bar{y} \\ \dot{\theta} = \bar{x}/r \\ \dot{y} = \frac{\bar{x}^2}{r} + 2\bar{x} + r + \frac{(1-\mu)}{r^2} - \frac{\mu r}{R^3} + \left(\mu - \frac{\mu}{R^3}\right) \cos \theta \\ \dot{x} = -\frac{\bar{x}\bar{y}}{r} - 2\bar{y} - \left(\mu - \frac{\mu}{R^3}\right) \sin \theta \end{cases}$$

Amb $R = \sqrt{r^2 + 2r \cos \theta + 1}$.

Nota: En coordenades polars desplaçades, la constant de jacobi és

$$C = r^2 + 2\mu r \cos \theta + \mu^2 + \frac{2(1-\mu)}{r} + \frac{2\mu}{R} + \mu(1-\mu) - (\bar{y}^2 + \bar{x}^2)$$

3. Punts fixos: Els punts Lagrangians

A continuació buscarem els punts d'equilibri del RTBP en les coordenades sinòdiques. Un punt d'equilibri en aquest sistema s'entén com les posicions on un objecte de massa negligible es manté en una posició constant en relació als dos grans cossos primaris. Aquests punts s'anomenen punts Lagrangians o L-punts i n'hi ha cinc, anomenats de L_1 fins a L_5 .

Per trobar aquests punts partim del sistema d'equacions sinòdiques (8) i imposem que el camp diferencial sigui zero: $L_i = (x, y, 0, 0)$ amb $i = 1 \dots 5$ tal que:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_4 = 0 \\ \dot{x}_3 = 2x_4 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 2x_4 + x_1 - \frac{(1-\mu)(x_1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x_1-\mu+1)}{r_2^3} = 0 \\ \dot{x}_4 = -2x_3 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = -2x_3 + x_2 \left[1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] = 0 \end{cases}$$

Observant la quarta equació, veiem que o bé $x_2 (= y)$ o bé $\left[1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right]$ han de ser zero.

- Cas 1: Suposem $y \neq 0$, és a dir $\left[1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] = 0$.

Partint de la primera equació:

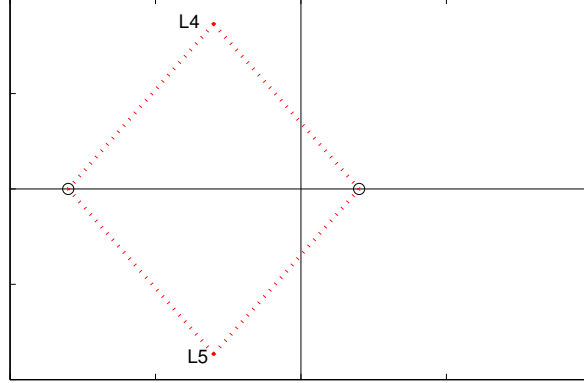
$$\begin{aligned} x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu+1)}{r_2^3} &= x \left[1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] + \frac{\mu(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(1-\mu)}{r_2^3} = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{r_1^3} &= \frac{1}{r_2^3} \Rightarrow r_1 = r_2 \end{aligned}$$

Per tant els punts es troben a la recta que té els punts a la mateixa distància dels dos primaris: $x = \frac{\mu+\mu-1}{2} = \mu - \frac{1}{2}$. A més, si imposem que $r := r_1 = r_2$ a la segona equació:

$$\left[1 - \frac{(1-\mu)}{r^3} - \frac{\mu}{r^3} \right] = 0 \Rightarrow r = 1$$

Com la distància entre els cossos primaris també es 1, es pot dir que els punts formen un triangle equilàter amb els primaris. Aquest punts són els L_4 i L_5 , i són també anomenats troians. Les seves components són per tant:

$$L_4 = \left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0 \right) \quad L_5 = \left(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0 \right)$$

FIGURA 2. Localització dels punts troians L_4 , L_5 .

- Cas 2: Suposem $y=0$. Els punts estan alineats a l'eix de les x . Per tant, $r_1 = |x - \mu|$, i $r_2 = |x - \mu + 1|$.

$$(11) \quad x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{|x - \mu|^3} - \frac{\mu(x - \mu + 1)}{|x - \mu + 1|^3} = 0$$

- Cas 2.1: Busquem primer els punts que estiguin a l'esquerra de m_2 . Com m_2 es troba a $x = \mu - 1$, suposem L_2 de la forma $(\mu - 1 - \xi, 0, 0, 0)$, $\xi > 0$. En aquest cas, la distància al segon primari $r_2 = \xi$, i la distància al primer és $r_1 = \xi + 1$. Substituint aquests resultats a l'equació anterior:

$$\mu - 1 - \xi - \frac{(1 - \mu)(\mu - 1 - \xi - \mu)}{(1 + \xi)^3} - \frac{\mu(\mu - 1 - \xi - \mu + 1)}{\xi^3} = \mu - 1 - \xi + \frac{(1 - \mu)}{(1 + \xi)^2} + \frac{\mu}{\xi^2} = 0$$

Multipliquem per $(1 + \xi)^2 \xi^2$ i queda:

$$\xi^5 + (3 - \mu)\xi^4 + (3 - 2\mu)\xi^3 - \mu\xi^2 - 2\mu\xi - \mu = 0$$

Per tal de trobar les arrels del polinomi, necessitem el teorema de Descartes.

Teorema de Descartes: El nombre d'arrels positives d'un polinomi $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ és menor o igual al nombre de canvis de signe dels coeficients a_0, a_1, \dots, a_n .

En el polinomi anterior, com $\mu < 1$, només tenim un canvi de signe, és a dir, hi ha una o cap arrel positiva. Però $P(0) < 0$ i $P(1) = 7 - 7\mu > 0$. Pel teorema de Bolzano $\Rightarrow \exists! \xi > 0$, $\xi \in (0, 1)$ tal que $L_2 := (\mu - 1 - \xi, 0, 0, 0)$ és punt d'equilibri.

Per trobar ξ , podem efectuar un càlcul numèric a partir de l'equació del punt fix que es pot aconseguir al treure ξ^3 de factor comú al polinomi:

$$\xi^3 = \frac{\mu(1 - \xi)^2}{3 - 2\mu + \xi(3 - \mu + \xi)} \iff \xi = f(\xi) := \left[\frac{\mu(1 - \xi)^2}{3 - 2\mu + \xi(3 - \mu + \xi)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

- Cas 2.2: Busquem els punts entre m_1 i m_2 . Per tant, busquem punts de la forma $(\mu - 1 + \xi, 0, 0, 0)$. La distància amb m_2 , continua sent $r_2 = \xi$, mentre que amb el major és $r_1 = 1 - \xi$. Substituint altre cop en l'equació (9):

$$\mu - 1 + \xi - \frac{(1 - \mu)(\mu - 1 + \xi - \mu)}{(1 - \xi)^3} - \frac{\mu(\mu - 1 + \xi - \mu + 1)}{\xi^3} = \mu - 1 + \xi + \frac{(1 - \mu)}{(1 - \xi)^2} - \frac{\mu}{\xi^2} = 0$$

Multipliquem per $(1 - \xi)^2 \xi^2$ i queda:

$$\xi^5 - (3 - \mu)\xi^4 + (3 - 2\mu)\xi^3 - \mu\xi^2 + 2\mu\xi - \mu = 0$$

De la mateixa forma, com $P(0) < 0$ i $P(1) = 1 - \mu > 0$, tenim que existeix una arrel entre 0 i 1 per Bolzano. A més, podem demostrar la seva unicitat mitjançant el teorema de Sturm. Per tant, existeix una única arrel ξ tal que $L_1 := (\mu - 1 + \xi, 0, 0)$ és punt d'equilibri.

Anàlogament al cas anterior, del polinomi de cinquè grau podem fer servir el mètode del punt fix per fer un càlcul numèric de ξ :

$$\xi = f(\xi) := \left[\frac{\mu(1 - \xi)^2}{3 - 2\mu - \xi(3 - \mu - \xi)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

– Cas 2.3: Per acabar, busquem els punts a la dreta de m_1 . Prenem punts de la forma $(\mu + \xi, 0, 0)$. Aquest cop tenim que $r_1 = \xi$ i $r_2 = 1 + \xi$. Substituïm a (9):

$$\mu + \xi - \frac{(1 - \mu)(\mu + \xi - \mu)}{\xi^3} - \frac{\mu(\mu + \xi - \mu + 1)}{(\xi + 1)^3} = \mu + \xi - \frac{(1 - \mu)}{\xi^2} - \frac{\mu}{(\xi + 1)^2} = 0$$

Multipliquem per $(1 + \xi)^2 \xi^2$ i queda:

$$\xi^5 + (2 + \mu)\xi^4 + (1 + 2\mu)\xi^3 - (1 - \mu)\xi^2 - 2(1 - \mu)\xi - (1 - \mu) = 0$$

Igual que en 2.1, $P(0) < 0$ i $P(1) = 7\mu > 0$, i amb el teorema de Descartes $\Rightarrow \exists! \xi \in (0, 1)$ tal que $L_3 := (\mu + \xi, 0, 0)$ és un punt d'equilibri.

Per calcular numèricament ξ , tenim la següent equació de punt fix:

$$\xi = f(\xi) := \left[\frac{(1 - \mu)(1 + \xi)^2}{1 + 2\mu + \xi(2 + \mu + \xi)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

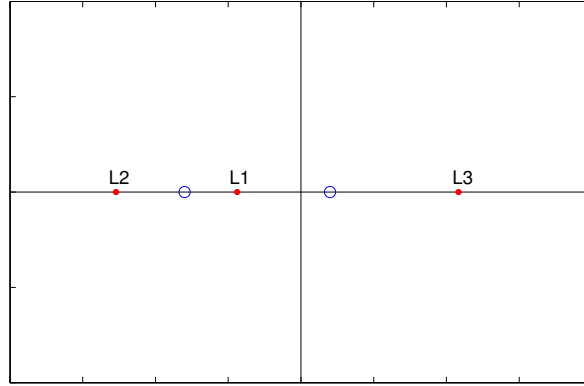


FIGURA 3. Localització dels punts L_1 , L_2 , L_3 .

Més endavant ens interessarà calcular el valor de L_3 , per tant busquem un punt inicial. Si al polinomi de cinquè grau anterior li fem el canvi de variable $\eta = \xi - 1$:

$$\begin{aligned} \eta^5 + (7 + \mu)\eta^4 + (19 + 6\mu)\eta^3 + (24 + 13\mu)\eta^2 + 2(6 + 7\mu)\eta + 7\mu &= 0 \\ \eta[\eta^4 + (7 + \mu)\eta^3 + (19 + 6\mu)\eta^2 + (24 + 13\mu)\eta + 12 + 14\mu] &= -7\mu \\ \eta &= \frac{-7\mu}{12 + 14\mu + O(\eta)} = \frac{-7\mu}{12 + 14\mu}(1 + O(\eta)) \end{aligned}$$

Prenem $\eta_0 = -\frac{7}{12}\mu$, és a dir, $\xi_0 = 1 + \eta_0 = 1 - \frac{7}{12}\mu$.

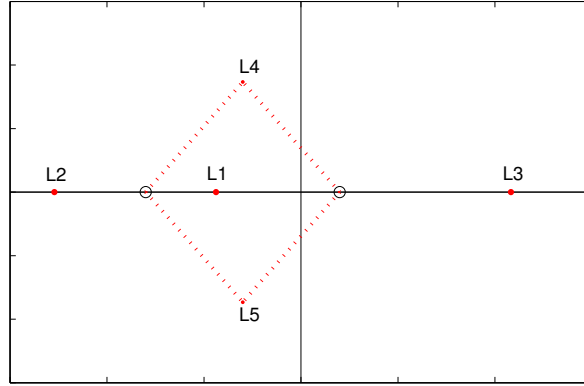


FIGURA 4. Localització dels cinc punts d'equilibri.

4. Estabilitat dels punts d'equilibri

Definició. Sigui \mathbf{e} punt d'equilibri de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$.

El punt \mathbf{e} és *estable* si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{e}\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{e}\| < \epsilon \forall t > 0$.

Direm que \mathbf{e} és *assimptòticament estable* si és estable i $\exists \delta_0 > 0$ tal que $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{e}\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{e}\| = 0$.

Direm que \mathbf{e} és *inestable* si no és estable.

Anomenarem també *varietat estable* (W^s) al conjunt de punts que tendeixen a un punt d'equilibri estable quan el temps tendeix a infinit, i *varietat inestable* (W^u) al conjunt de punts que tendeixen un punt d'equilibri inestable quan el temps tendeix a menys infinit. Utilitzarem aquests conceptes en la secció 6.

Amb el següent teorema estudiarem el comportament dels punts d'equilibri L_i .

Teorema (Principi de Linearització). Sigui $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camp C^1 , i sigui x_0 un punt d'equilibri de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$.

- (1) Si tots els valors propis de $Df(x_0)$ compleixen $Re(\lambda) < 0 \Rightarrow x_0$ és asimptòticament estable.
- (2) Si existeix un VAP amb $Re(\lambda) > 0 \Rightarrow x_0$ és inestable.

Per estudiar l'estabilitat, utilitzarem el sistema (8) de \mathbb{R}^4 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = y_4 \\ \dot{x}_3 = 2x_4 + \Omega_{x_1} \\ \dot{x}_4 = -2x_3 + \Omega_{x_2} \end{cases}$$

Calculem $DF(L_i)$:

$$(12) \quad DF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{xx} & \Omega_{xy} & 0 & 2 \\ \Omega_{xy} & \Omega_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{xx} = 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{3(1-\mu)(x-\mu)^2}{r_1^5} - \frac{\mu}{r_2^3} + \frac{3\mu(1+x-\mu)^2}{r_2^5}$$

$$\Omega_{xy} = \frac{3y(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^5} + \frac{3y\mu(1+x-\mu)}{r_2^5}$$

$$\Omega_{yy} = 1 + \frac{3y^2(1-\mu)}{r_1^5} - \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{3\mu y^2}{r_2^5} - \frac{\mu}{r_2^3}$$

El polinomi característic és:

$$\lambda^4 + (4 - \Omega_{xx} - \Omega_{yy})\lambda^2 + \Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = 0$$

Lema Als punts colineals L_1, L_2, L_3 , la matriu (12) té dos autovalors reals i dos autovalors imaginaris purs. Els anomenarem de *tipus centre-sella*.

Prova. Del càlcul de les derivades, i del fet que $y = 0$, $r_1 = x - \mu$ i $r_2 = x - \mu + 1$:

$$\begin{aligned} \Omega_{xx} &= 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{3(1-\mu)r_1^2}{r_1^5} - \frac{\mu}{r_2^3} + \frac{3\mu r_2^2}{r_2^5} = 1 + \frac{2(1-\mu)r_1^2}{r_1^3} + \frac{2\mu r_2^2}{r_2^3} > 0 \\ \Omega_{xy} &= 0 \\ \Omega_{yy} &= 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} < 0 \end{aligned}$$

Les dues primeres desigualtats són evidents. Per trobar la tercera, ho hem de veure cas per cas fent servir les tres equacions quàntiques que hem trobat.

- Cas L_1 : Recordem que $x_1 = \mu - 1 + \xi$, $r_1 = 1 - \xi$ i $r_2 = \xi$. A més l'equació quàntica que resol és:

$$\mu - 1 + \xi + (1-\mu)/r_1^2 - \mu/r_2^2 = 0$$

Quan evaluem Ω_{yy} en x_1 obtenim:

$$\begin{aligned} \Omega_{yy} &= 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \\ &= r_1^{-1} \left(r_1 - \frac{1-\mu}{r_1^2} - \frac{\mu r_1}{r_2^3} \right) \\ &= r_1^{-1} \left(1 - \xi + \mu - 1 + \xi - \frac{\mu}{r_2^2} - \frac{\mu(1-r_2)}{r_2^3} \right) \\ &= \mu r_1^{-1} (1 - 1/r_2^3) < 0 \end{aligned}$$

La desigualtat final és deguda a que $r_2 < 1$.

- Cas L_2 : Recordem que $x_2 = \mu - 1 - \xi$, $r_1 = 1 + \xi$ i $r_2 = \xi$. L'equació quàntica que resol és:

$$\mu - 1 - \xi + (1-\mu)/r_1^2 + \mu/r_2^2 = 0$$

Quan evaluem Ω_{yy} en x_1 obtenim:

$$\begin{aligned}\Omega_{yy} &= r_1^{-1} \left(r_1 - \frac{1-\mu}{r_1^2} - \frac{\mu r_1}{r_2^3} \right) \\ &= r_1^{-1} \left(1 + \xi + \mu - 1 - \xi + \frac{\mu}{r_2^2} - \frac{\mu(1+r_2)}{r_2^3} \right) \\ &= \mu r_1^{-1} (1 - 1/r_2^3) < 0\end{aligned}$$

En aquest cas, també $r_2 < 1$.

- Cas L_3 : Recordem que $x_3 = \mu + \xi$, $r_1 = \xi$ i $r_2 = \xi + 1$. L'equació quintica que resol és:

$$\mu + \xi - (1 - \mu)/r_1^2 - \mu/r_2^2 = 0$$

Quan evaluem Ω_{yy} en x_1 obtenim:

$$\begin{aligned}\Omega_{yy} &= r_1^{-1} \left(r_1 - \frac{1-\mu}{r_1^2} - \frac{\mu r_1}{r_2^3} \right) \\ &= r_1^{-1} \left(\xi - \mu - \xi + \frac{\mu}{r_2^2} - \frac{\mu(r_2 - 1)}{r_2^3} \right) \\ &= \mu r_1^{-1} (-1 + 1/r_2^3) < 0\end{aligned}$$

En aquest cas, $r_2 = 1 + \xi > 1$, al contrari dels anteriors.

Vistes les desigualtats, prenem el polinomi característic:

$$\lambda^4 + (4 - \Omega_{xx} - \Omega_{yy})\lambda^2 + \Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = 0$$

i anomenem: $A = (4 - \Omega_{xx} - \Omega_{yy})/2$ i $B = -\Omega_{xx}\Omega_{yy}$. Observem que $B > 0$. És equivalent resoldre:

$$\lambda^4 + 2A\lambda^2 - B = 0$$

$$\lambda^2 = -A \pm \sqrt{A^2 + B}$$

Tenim que els λ^2 són reals, un positiu i un negatiu. És a dir, tenim dos λ reals, iguals de signe diferent i dos λ imaginaris purs conjugats. Quan tenim valors propis d'aquesta forma, anomenem als punts de tipus *sella-centre*.

Lema Als punts triangulars L_4, L_5 , la matriu (12) té:

- Si $0 < \mu < \mu_r$: Autovalors imaginaris purs. (*Centres Genèrics*)
- Si $\mu = \mu_r$: Autovalors repetits $= \pm i\sqrt{2}/2$. (*Centres Degenerats*)
- Si $\mu_r < \mu \leq \frac{1}{2}$: Autovalors complexos. (*Selles Complexes*)

On $\mu_r = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{69}/9)$ s'anomena *valor crític de Routh*.

Prova. En aquest cas, com coneixem explícitament $L_4 = (\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0)$ i $L_5 = (\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0)$ podem calcular directament:

$$\begin{aligned}\Omega_{xx}(L_4) &= \Omega_{xx}(L_5) = 3/4 \\ \Omega_{xy}(L_4) &= -\Omega_{xy}(L_5) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\mu - \frac{1}{2} \right) \\ \Omega_{yy}(L_4) &= \Omega_{yy}(L_5) = 9/4\end{aligned}$$

Per tant el polinomi característic a resoldre és:

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}$$

Veiem que si el discriminant és zero implica que $\mu = \mu_r = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{69}/9)$. Fem casos depenent del signe del discriminant:

- Si el discriminant és positiu: És també més petit que 1 i $0 < \mu < \mu_r$. Per tant les solucions de $\lambda^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2} < 0$ són 2 imaginaris purs i els seus conjugats.
- Si el discriminant és zero: $\mu = \mu_r$. Tenim les arrels repetides $\lambda^2 = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{2}/2$
- Si el discriminant és negatiu: $\mu_r < \mu$. Tenim les arrels complexes $\lambda^2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{27\mu(1 - \mu) - 1}}{2}$, i les solucions són dos complexos i els seus conjugats.

5. Varietats estable/inestable de L_3

En les seccions anteriors hem analitzat els cinc punts d'equilibri del RTBP, juntament amb la forma dels seus autovalors. Ens centrarem en l'estudi de les òrbites periòdiques prop L_3 , que recordem que és un punt del tipus centre-sella, amb dos VAPS reals i dos imaginaris purs. Per poder observar el comportament als voltants del punt fix, hem de trobar les seves varietats estables i inestables. Necessitarem per tant els resultats que es descriuen a continuació.

Sigui l'equació

$$\dot{x} = f(x)$$

amb un punt d'equilibri en $x = p$, per tant, $f(p) = 0$. Sigui $A = Df(p)$ la matriu jacobiana de f en p . Els valors propis d' A s'anomenen els exponents del punt d'equilibri p . Sigui $\phi(t, \xi)$ la solució general de l'equació amb condició inicial $\phi(t_0, \xi) = \xi$. Donat $\epsilon > 0$, les varietats estable i inestable locals són:

$$W^s(\epsilon) = \{\xi \in \mathbb{R}^m : |\phi(t, \xi) - p| < \epsilon \quad \forall t \leq 0\} \quad W^u(\epsilon) = \{\xi \in \mathbb{R}^m : |\phi(t, \xi) - p| < \epsilon \quad \forall t \geq 0\}$$

Teorema (Teorema de la varietat estable local per equacions) Sigui A amb d VAPs amb part real negativa i $m - d$ VAPs amb part real positiva. Llavors per ϵ suficientment petit, $W^s(\epsilon)$ i $W^u(\epsilon)$ son varietats regulars de dimensió d i $m - d$ respectivament. Si $\xi \in W^{s(u)}(\epsilon)$ llavors $\phi(t, \xi) \rightarrow p$ quan $t \rightarrow \infty(-\infty)$.

Amb aquest teorema, i a partir del VAPS reals de L_3 podríem trobar numèricament les varietats estable i inestable de la part “sella”. Però estem interessats en la part “centre”, les òrbites periòdiques. Podem considerar una òrbita periòdica com una solució $\phi(t, x)$ del problema anterior tal que si T és el període i p és un punt de l'òrbita:

$$p = \phi(T, p) := \Phi_T(p)$$

En comptes de tenir una equació diferencial, tenim un difeomorfisme. El següent teorema és equivalent a l'anterior però per difeomorfismes. Sigui $A := D\Phi_T(p)$. Als VAPs d' A els anomenem *multiplicadors característics*.

Teorema (Teorema de la varietat estable local per difeomorfismes) Sigui A amb d VAPs amb valor absolut més petit que 1 i $m - d$ VAPs amb valor absolut més gran que 1. Llavors per ϵ suficientment petit, $W^s(\epsilon)$ i $W^u(\epsilon)$ son varietats regulars de dimensió d i $m - d$ respectivament. Si $\xi \in W^{s(u)}(\epsilon)$ llavors $\Phi_T^k(\xi) \rightarrow p$ quan $k \rightarrow \infty(-\infty)$.

Amb aquests resultats tenim el necessari per poder buscar les varietats estable i inestable de L_3 .

Part 2

**Estudi Numèric dels Asteroides
Troians**

6. Buscant les varietats numèricament

Un cop hem reunit els resultats teòrics necessaris, podem començar a intentar trobar i dibuixar les varietats de L_3 del sistema Sol-Júpiter ($\mu = 9.53875 \cdot 10^{-4}$). Per tenir una bona visualització, hem escollit restringir-nos a problemes amb energia fixa $E = -1.494$. Tots els càlculs numèrics d'aquest treball estan fets en Matlab. Per integrar les equacions del RTBP (8) utilitzem un mètode Runge-Kutta 78.

Per calcular el punt d'equilibri, utilitzem l'equació de punt fix trobada anteriorment:

$$\xi = f(\xi) := \left[\frac{(1 - \mu)(1 + \xi)^2}{1 + 2\mu + \xi(2 + \mu + \xi)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Amb punt inicial $\xi_0 = 1 - \frac{7}{12}\mu$ fent simple repetició de f .

Primer pas: Trobar una òrbita periòdica. El següent teorema ens assegura poder trobar una òrbita periòdica al voltant de L_3 per a cada valor de l'energia prop del valor de $E(L_3)$. Aquesta és l'anomenada Òrbita de Lyapunov.

Teorema (Teorema Central de Lyapunov). Suposem que el sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

admet una integral no degenerada i que té un punt d'equilibri amb valors propis $\pm i\omega, \lambda_3, \dots, \lambda_m$, on $i\omega \neq 0$ és imaginari pur. Si $\lambda_j/i\omega$ mai és un enter per $j = 3, \dots, m$, llavors existeix una família d'òrbites periòdiques que depèn d'un paràmetre, emanant del punt d'equilibri. A més, quan ens acostem al punt d'equilibri al llarg de la família, el període tendeix a $2\pi/\omega$ i els multiplicadors no trivials tendeixen a $\exp(2\pi\lambda_j/\omega)$, $j = 3, \dots, m$.

Amb aquest teorema tenim demostrada l'existència. Per la cerca d'una òrbita periòdica farem servir el següent mètode:

- Donat un paràmetre de massa μ , escollim una energia E i constant de Jacobi $C = \frac{1}{2}E + \mu(1 - \mu)$.
- Escollim un conjunt de punts inicials. Aquests punts han de ser a prop de L_3 , estar en l'eix x ($y = 0$) i tenir velocitat inicial vertical ($\dot{x} = 0$). La velocitat inicial en y queda determinada llevat del signe a partir d'aquestes dades i la constant de Jacobi. Pendrem $\dot{y} < 0$.
- Per cada punt, calculem la seva secció de Poincaré amb $y = 0$: Integrem les equacions del RTPB un temps suficient per que la solució torni a tallar amb l'eix x . Un cop trobats els punts on hi ha un canvi de signe en la y , fem servir el mètode de Newton per trobar el punt exacte de l'eix. Trobat el punt, ens quedem amb el valor de \dot{x} . Obtindrem una corba formada per aquests valors.
 - **El mètode de Newton (I):** Suposant $G(t)$ com la nostra secció de Poincaré, trobarem un temps T tal que $G(T) = 0$ considerant la successió temporal:

$$t^{(m+1)} = t^{(m)} - \frac{G(t^{(m)})}{G'(t^{(m)})}$$

En el nostre cas, $G(t) = y(t)$. El primer pas és buscar un $t^{(0)}$. Agafarem com a temps inicial el trobat integrant numèricament les equacions tal que hi ha un canvi de signe. A continuació necessitem $G(t^{(m)}) = y(t^{(m)})$. Per trobar el valor de y a temps $t^{(m)}$, integrarem amb Runge-Kutta fins a temps $T = t^{(m)}$. Un cop trobat el punt final, ens quedem amb la segona component. Trobar $G'(t^{(m)}) = \dot{y}(t^{(m)})$ és senzill en aquest cas, ja que \dot{y} es tracta de la quarta component del punt.

- Busquem per quins punts inicials hi ha hagut un canvi de signe en \dot{x} . Per aquests punts inicials, fem servir el mètode de la bissecció per tal de trobar el punt inicial exacte tal que $\dot{x} = 0$

Un cop finalitzat el mètode, haurem trobat un punt inicial de l'eix de les x amb velocitat vertical tal que la seva solució del RTBP també talla l'eix de les x amb velocitat vertical. Per la simetria del problema, si

continuem la solució, el següent tall amb la secció de Poincaré serà exactament en el punt inicial. Per tant, hem trobat una òrbita periòdica.

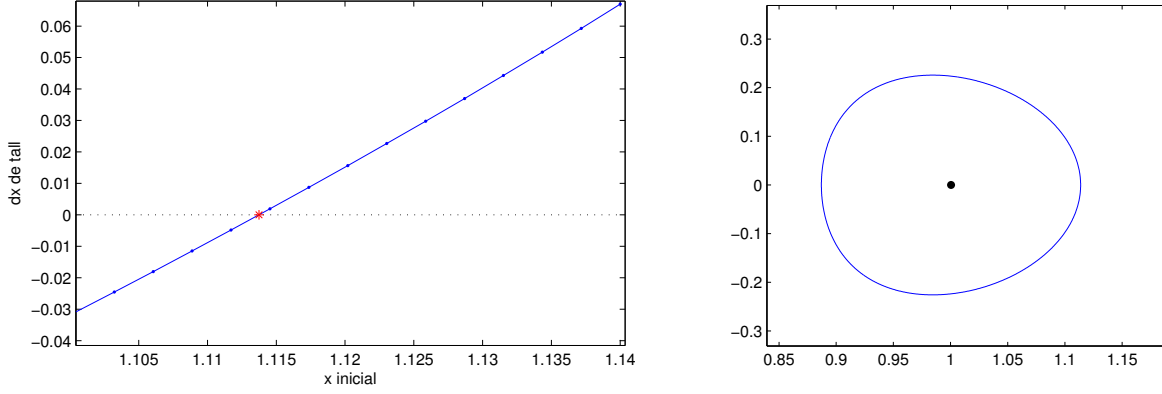


FIGURA 5. A l'esquerra: En blau, plot de les velocitats de tall $dx = \dot{x}$ de 15 punts inicials $x = L_3 + 0.1, \dots, 1.14$ amb Energia $E = -1.494$. En vermell, punt amb velocitat vertical, trobat amb bisecció. A la dreta: Òrbita periòdica generada a partir del punt (vermell) trobat $(1.11374, 0, 0, -0.22113)$, al voltant de L_3 .

Segon Pas: Trobar $D\Phi_T(x)$ (per x un punt de l'òrbita periòdica) numèricament. Per fer-ho integrem el punt de l'òrbita trobat un període fent servir les equacions variacionals.

- **Les Equacions Variacionals.** Considerem $\dot{x} = f(x)$. Sigui $\Phi_t(x)$ solució tal que $\Phi_T(x) = x$. Com que $\Phi_t(x)$ és solució: $\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = f(\Phi_t(x))$. Derivant respecte x tenim el sistema lineal homogeni:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_t(x) = D_x f(\Phi_t(x)) \frac{\partial}{\partial x} \Phi_t(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} \Phi_t(x)|_{t=0} = Id \end{cases}$$

En particular, prenent $D_x f$ segons el resultat (12):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{xx} & \Omega_{xy} & 0 & 2 \\ \Omega_{xy} & \Omega_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_4} \end{pmatrix}$$

Integrant numèricament el sistema de $4 + 4 \times 4$ equacions (4 del problema RTBP original, 16 de les variacionals), fins a temps T un període de la òrbita, trobarem la matriu $D\Phi_T(x)$.

Tercer pas: Trobar els VAPs i VEPs de la matriu $D\Phi_T(x)$. Observem que tenim dos valors propis igual a 1, un valor propi menor que 1 en valor absolut, que es correspon a la varietat estable de l'òrbita periòdica, i un valor major que 1 en valor absolut, que es correspon a la varietat inestable. Siguin λ_s, λ_u els VAPs petit i gran respectivament, i v_s, v_u els seus vectors propis unitaris.

Quart pas: Càlcul numèric de les varietats estable/inestable. Prenem el punt $p_s = p + hv_s$ on p és un punt de l'òrbita i $h > 0$ petit (Prenem $h = 10^{-6}$). Aquest punt pertany a l'aproximació lineal de la varietat estable

(local) de l'òrbita de p , ja que $D\Phi(p_s) = D\Phi(p) + hD\Phi(v_s) = p + h\lambda_s v_s$, i per tant $D\Phi^n(p_0) = p + h\lambda_s^n v_s$. Si fem $n \rightarrow \infty$, com $\lambda_s < 1$, $D\Phi^n(p_s) \rightarrow p$. Llavors, els punts que arriben fins a p_s formen part de la varietat estable. Prenent p_0 com a punt inicial del RTBP i integrant temps enrere amb el Runge-Kutta, trobem la varietat. Equivalentment si agafem $p_u = p + hv_u$ i integrem temps endavant obtenim la varietat inestable. Cal tenir en compte que podem agafar el VEP en dues direccions possibles, es a dir, que per cada varietat hi ha dues branques diferents, una prenent $+v$ i una altra prenent $-v$.

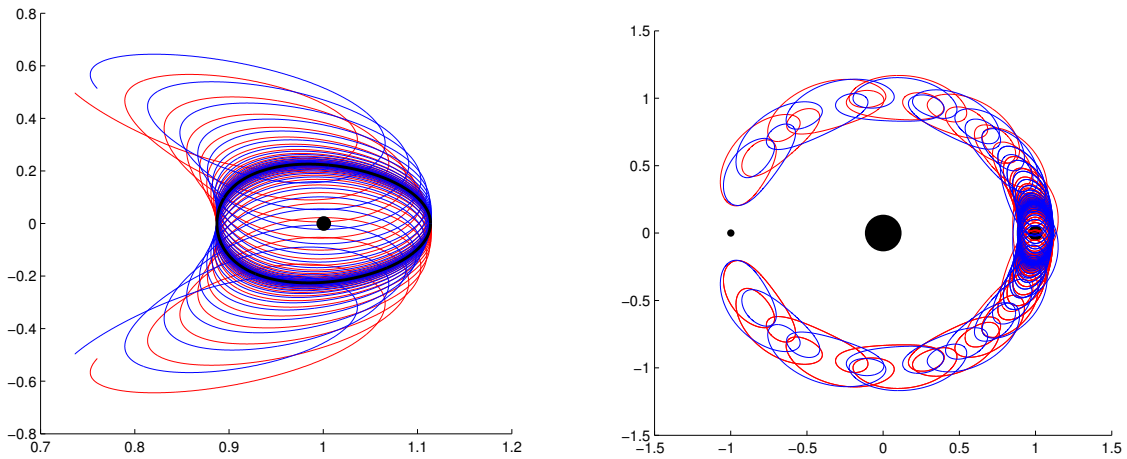


FIGURA 6. A l'esquerra: En negre, òrbita Lyapunov al voltant de L_3 amb les varietats estable (blau) i inestable(vermell) d'un punt de l'òrbita, en les dues direccions possibles. A la dreta: Mateix resultat amb temps d'integració major. Es pot observar el comportament de "horseshoe" voltant el sistema Sol-Jupiter.

Hem aconseguit implementar un mètode que ens proporciona les varietats de les òrbites periòdiques de L_3 . Observem que, donat un punt de l'òrbita obtenim una corba de dimensió 1. La varietat està formada per les corbes de tots els punts de l'òrbita, és a dir, és una varietat de dimensió 2, i té certa forma cilíndrica prop de l'òrbita periòdica. L'estudi d'aquestes varietats pot ser molt complicat, per tant, introduïrem una forma d'observar-les més simple, el Loop Map.

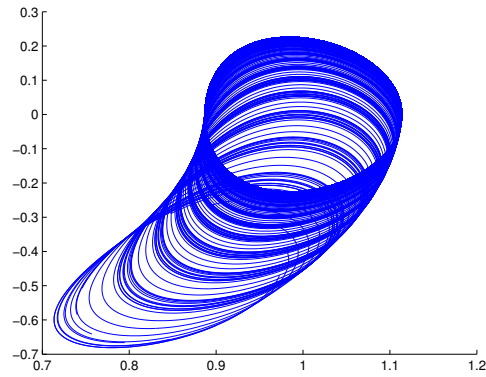


FIGURA 7. Propagació de la varietat estable de l'òrbita de Lyapunov ($E = -1.494$) per 15 punts de l'òrbita.

7. El Loop Map

Per tal de poder observar les varietats d'una forma més simple, utilitzarem una nova eina que s'escau al problema. Com podem observar, les òrbites en les que treballarem tindran gran quantitat de girs o “loops”, degut a la seva forma en espiral. Podem intentar mapejar aquests girs identificant-los pels seus punts de gir. Si passem el problema a unes coordenades polars, com les introduïdes en la secció 3, podem identificar aquests punts de gir quan $\dot{\theta} = 0$.

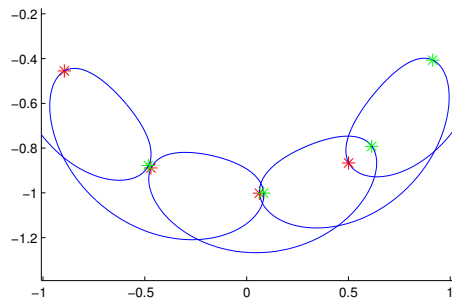


FIGURA 8. Punts de gir d'una òrbita amb punt inicial $x = 1.00100502149, y = 0, \dot{x} = 0.15, \dot{y} = -0.0012159765$. En vermell, punts amb $\dot{r} > 0$ i en blau per $\dot{r} < 0$

Observem en la figura 8 que per cada bucle hi ha dos punts de gir, un que puja ($\dot{r} > 0$) i un que baixa ($\dot{r} < 0$). A partir d'ara, identifiarem un gir per el seu punt de gir tal que $\dot{r} > 0$, i ho plotarem al pla $\theta - r$. La gràfica resultant l'anomenarem *loop map*.

Mètode per trobar els punts de gir: El mètode numèric utilitzat per trobar aquests punts és similar a l'anterior de calcular la secció de Poincaré per trobar òrbites periòdiques.

- Donats μ, C i un punt inicial, passem el punt a coordenades polars desplaçades segons descrit en la secció 3.

- Integrem fent servir les equacions del RTBP polar fent servir Runge-Kutta durant un temps donat.
- En la solució trobada, busquem els punts on la quarta component ($r\dot{\theta}$) canvia de signe.
- Fem servir el mètode de Newton per trobar el punt on $\dot{\theta} = 0$. A la vegada, diferenciem entre els casos on \dot{r} és positiu o negatiu.
 - **El mètode de Newton (II):** En aquest cas tenim $G(t) = \dot{\theta}(t)$ com la nostra secció de Poincaré, trobarem un temps T tal que $G(T) = 0$ considerant la successió temporal:

$$t^{(m+1)} = t^{(m)} - \frac{G(t^{(m)})}{G'(t^{(m)})}$$

Com abans, agafarem com a temps inicial el trobat integrant numèricament les equacions tal que hi ha un canvi de signe. A continuació necessitem $G(t^{(m)}) = \dot{\theta}(t^{(m)})$. Per trobar el valor de $\dot{\theta}$ a temps $t^{(m)}$, integrarem amb Runge-Kutta fins a temps $T = t^{(m)}$. Un cop trobat el punt final, aquest cop ens quedem amb la quarta component ($\dot{x} = r\dot{\theta}$) ja que $r > 0$. Trobar $G'(t^{(m)}) = \ddot{\theta}(t^{(m)})$ és diferent en aquest cas, però les equacions del sistema polar (10) ens donen la solució:

$$\dot{x}(t^{(m)}) = -\frac{\bar{x}(t^{(m)})\bar{y}(t^{(m)})}{r(t^{(m)})} - 2\bar{y}(t^{(m)}) - \left(\mu - \frac{\mu}{R^3(t^{(m)})}\right) \sin \theta(t^{(m)})$$

Fem servir ara el loop map en les varietats estable i inestable de l'òrbita de Lyapunov. Cal remarcar que al ser les varietats de dimensió 2, la seva secció amb $\dot{\theta} = 0$ ha de ser de dimensió 1.

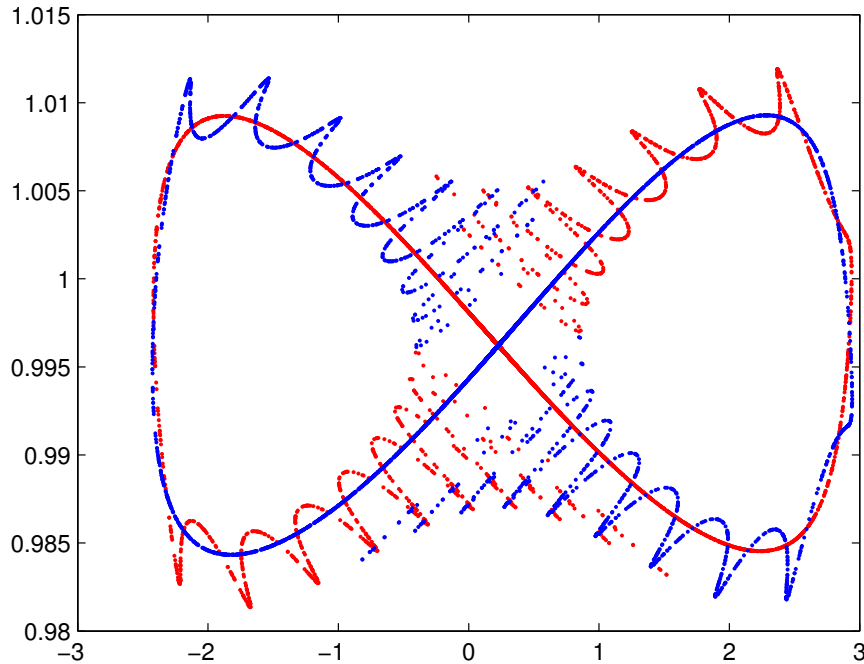


FIGURA 9. Projectió de la varietat estable(blau) i inestable(vermell) de l'òrbita de Lyapunov al voltant de L_3 en el pla $\theta - r$. La energia és $E=-1.494$ en el sistema Sol-Jupiter, i el temps d'integració és 246.

El Loop Map anterior ha estat trobat propagant 250 punts diferents de l'òrbita de Lyapunov. El temps d'integració és de 246 unitats adimensionals per una visualització més clara, mentre que per més temps s'observen estructures més complexes. Fixem-nos que en aquestes coordenades el punt L_3 està localitzat en $(r_3, \theta_3) = (0.99944, 0)$, mentre que els punts troians L_4 i L_5 es troben en $(r_4, \theta_4) = (1, 2\pi/3)$ i $(r_5, \theta_5) = (1, -2\pi/3)$. El que observem representat a la figura 9 és com les varietats estable i inestable divideixen el pla en tres zones molt diferenciades: Dues zones capturades per les varietats al voltant dels troians i una zona exterior. El que hauríem d'esperar és que una òrbita dins d'una d'aquestes zones no pugui sortir de la seva pròpia zona, ja que hauria de travessar una de les varietats. A continuació observarem la dinàmica que segueixen les òrbites a cada zona.

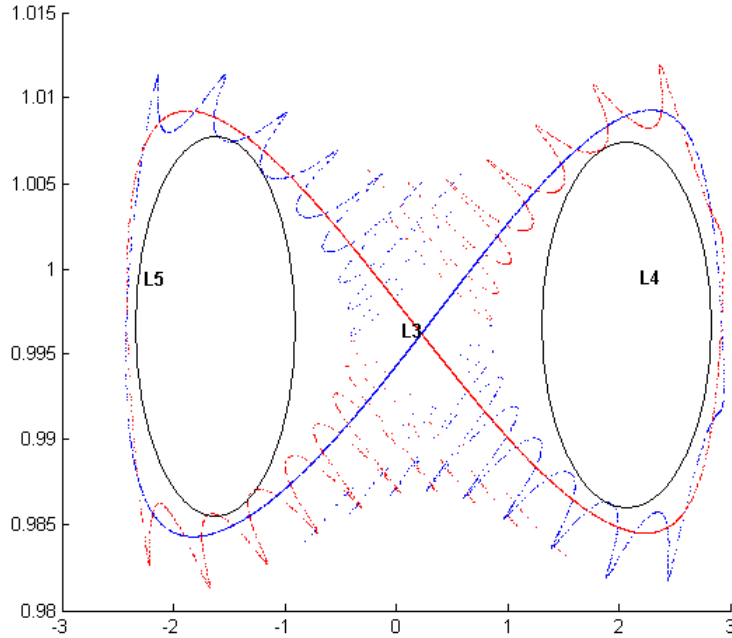


FIGURA 10. Posició dels punts L_3 , L_4 i L_5 en el loop map anterior i les zones diferenciades

8. Tipus d'òrbites als voltants dels punts troians

En aquesta secció veurem quina forma tenen les òrbites que giren al voltant dels punts L_4 , L_5 , segons si es troben en una zona propera als troians, interior a les varietats estable/inestable, i si estan en una zona exterior.

8.1. Òrbites “Tadpole”. Prenem dos punts inicials, cadascun pertanyent a l'interior de la zona de L_4 i de L_5 respectivament. Prenem $p_1 = (r, \theta) = (0.99, 2)$ i $p_2 = (r, \theta) = (0.99, -2)$. Imposem que en aquests punts hi hagi un gir, és a dir $\dot{\theta} = 0$. El valor de \dot{r} queda automàticament determinat a partir del valor de l'energia $E = -1.494$. A la figura 11 observem la dinàmica de l'òrbita en coordenades sinòdiques i en loop map.

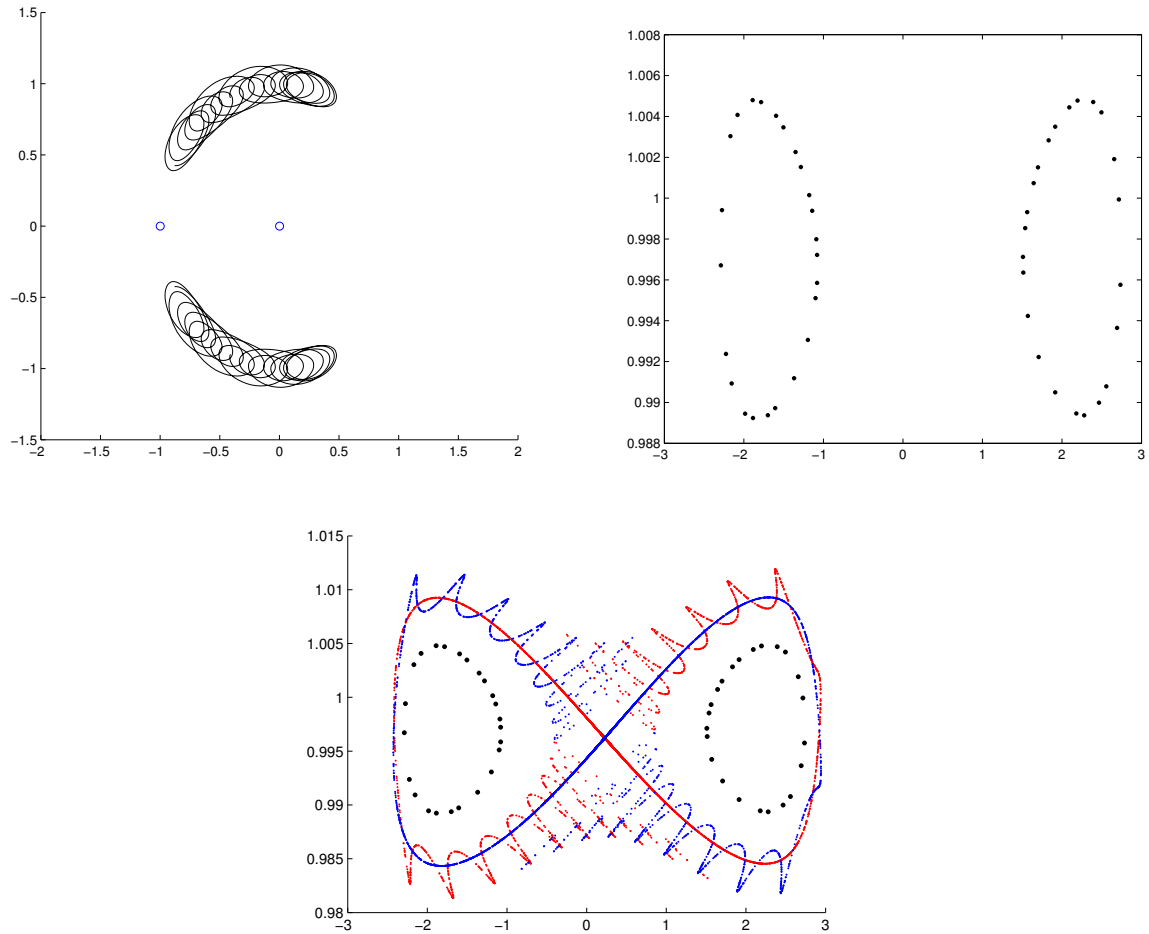


FIGURA 11. A l'esquerra: Òrbita tipus Tadpole amb energia $E = -1.494$ en el sistema Sol-Jupiter. A la dreta: Loop Map de l'òrbita. A baix: Combinació del loop map anterior y les varietats de la figura 9

Observem un resultat esperat, la trajectòria es queda capturada dins de la seva zona corresponent, envoltats per les varietats invariants, orbitant als voltants d'un troià. Aquest tipus d'òrbites s'anomenen de tipus *tadpole*, per la seva característica forma a capgrós.

8.2. Òrbites "Horseshoe". A continuació, prenem un punt proper a un dels punts estables L_4 i L_5 , però aquest cop de la regió exterior. Hem pres $p = (r, \theta) = (0.999, -2.43)$. Un cop més, imposom un bucle en aquest punt ($\dot{\theta} = 0$) i trobem la component que falta imposant el valor de l'energia.

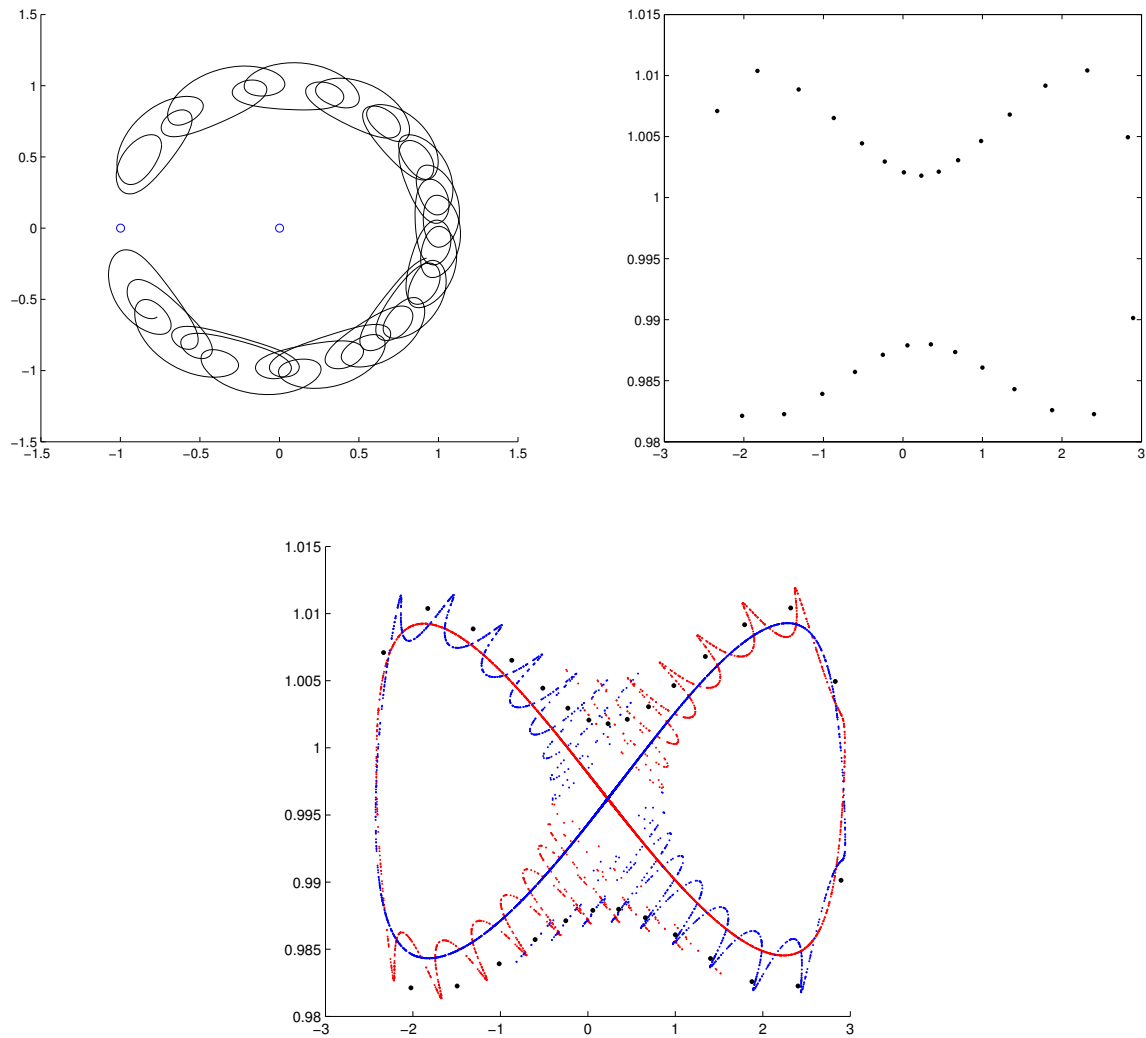


FIGURA 12. A l'esquerra: Òrbita tipus Horseshoe amb energia $E = -1.494$ en el sistema Sol-Jupiter. A la dreta: Loop Map de l'òrbita. A baix: Combinació del loop map anterior y les varietats de la figura 9

Buscant una òrbita que giri al voltant dels troians, situada a la zona exterior de les varietats, trobem les anomenades òrbites *horseshoe*. La dinàmica d'aquestes òrbites consisteix en trajectories que connecten els punts lagrangians L_4 , L_3 i L_5 , i tenen la forma característica de ferradura.

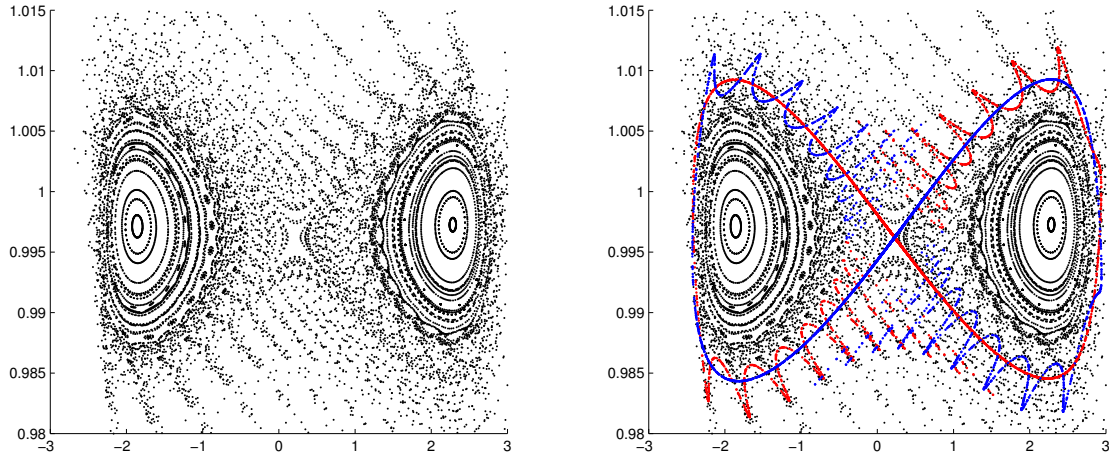


FIGURA 13. A l'esquerra: Projectió d'un conjunt de trajectòries d'energia $E = -1.494$ del sistema Sol-Jupiter en el loop map. A la dreta: Combinació del loop map anterior y les varietats de la figura 9

La figura 13 mostra les projeccions d'un conjunt de trajectòries d'energia $E = -1.494$ en el pla $\theta - r$ fent servir el loop map. Les trajectòries s'han obtingut propagant 225 condicions inicials en una malla igualment espaiada de punts del pla $\theta - r$ en la regió on $\theta \in (-\pi, \pi)$ i $r \in (0.98, 1.015)$ amb les condicions inicials $\dot{\theta} = 0$, $\dot{r} > 0$, i $E = -1.494$. El temps d'integració per cada trajectòria és de $T = 1000$ en unitats adimensionals. La figura 13 de la dreta mostra les projeccions de les varietats estable i inestable de l'òrbita de Lyapunov al voltant de L_3 superposat a la figura anterior. Aquestes figures indiquen com les òrbites capturades com les tadpole es troben en zones força regulars als voltants de L_4 i L_5 , mentre que les òrbites exteriors com les horseshoe es troben en regions més aviat caòtiques.

9. Els moviments entre troians

En aquesta secció finalment investigarem el moviment del asteroides troians que "salten" de les proximitats de L_4 a les de L_5 i a l'inrevés. En la secció anterior hem vist el comportament de trajectòries a l'interior i a l'exterior de les zones delimitades per les varietats. Veurem què succeeix si tenim punts enmig, és a dir, dins de les petites cel·les formades per interseccions les varietats estable i inestable. Com hem comprovat numèricament en la secció anterior, les trajectòries no poden travessar varietats invariants en l'espai de fases, llavors els punts que estan envoltats per varietats estable i inestable en el pla $\theta - r$ han de moure's a l'interior d'altres cel·les adjacents. Per confirmar aquest fet, prenem 625 satisfent $\dot{\theta} = 0$, $\dot{r} > 0$ i $E = -1.494$ a l'interior d'una d'aquestes interseccions, com s'observa a la figura 14.

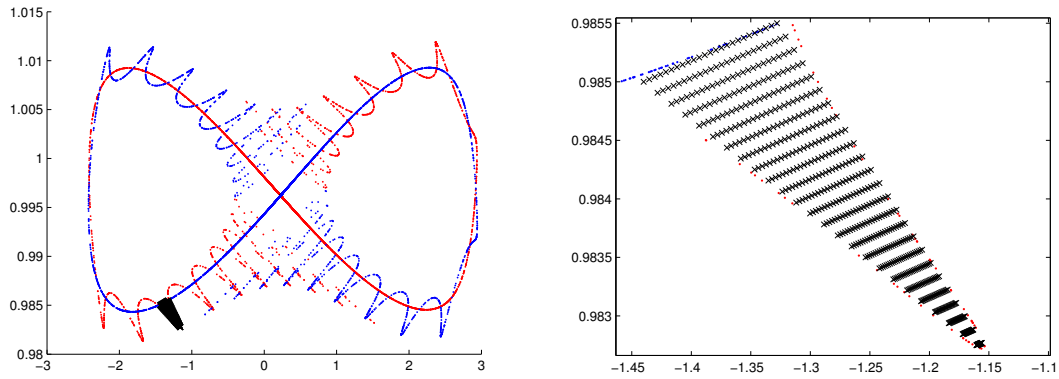


FIGURA 14. Punts inicials escollits dins d'una de les cel·les de la varietat estable amb la inestable.

A continuació propaguem aquestes condicions inicials amb temps cap endavant (verd) i cap enrere (negre) per obtenir el resultat que s'observa a la figura 15.

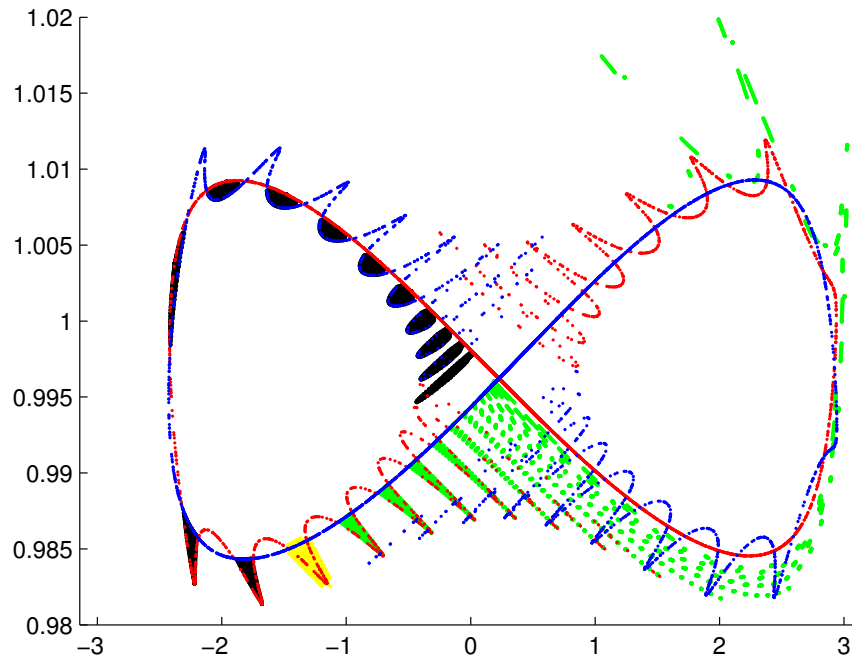


FIGURA 15. Propagació dels 625 punts inicials (groc) amb temps cap endavant (verd), i temps cap enrere (negre)

El resultat confirma que les trajectòries de dins d'una de les interseccions prop de L_5 s'escapa dels voltants d'aquest punt i acaba arribant als voltants de la zona de L_4 . Un fet importat és el següent, la propagació cap

enrere d'una de les “punxes” inferiors ($r < L_3$) de la varietat inestable queda capturada a l'interior de la regió de L_5 . Un fet similar s'observa si propaguem cap endavant des de les cel·les “punxa” inferiors de la varietat estable. Pot indicar que la trajectòria que estem buscant es troba dins de la intersecció d'aquests tipus de cel·les. Per tant escollim un punt inicial dins d'una d'aquestes interseccions: $(r, \theta) = (0.98861, 0.164)$.

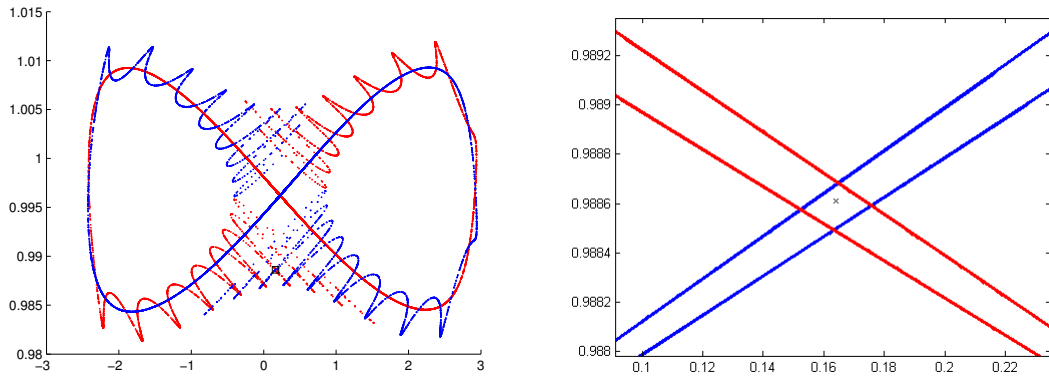


FIGURA 16. Punt inicial escollit dins d'una de les interseccions entre cel·les de la varietat estable amb la inestable.

Imposant com sempre $\dot{\theta} = 0$, $\dot{r} > 0$ i $E = -1.494$, observem la propagació desitjada. La figura 17 mostra el resultat de la propagació cap endavant (verd) i cap enrere (negre). El temps d'integració és de $T = 200$ en unitats adimensionals. El resultat és l'esperat, les propagacions cap endavant acaba capturant la trajectòria en la regió al voltant del L_4 , mentre que les propagacions cap enrere queden atrapades en la regió del L_5 . Em trobat el comportament dels anomenats *jumping trojans*, on un asteroide sembla capturat als voltants del punt troià fent una òrbita tadpole, fins que escapa a través de les proximitats de L_3 per acabar capturat en l'altre punt estable troià en una òrbita tadpole.

Podem concloure que les cel·les formades per les varietats estable i inestable de les òrbites de Lyapunov en el sistema Sol-Júpiter en el RTBP són responsables del comportament dels *jumping trojans* entre les regions L_4 i L_5 . Cal remarcar que la intersecció trobada només garanteix una revolució completa al voltant d'un punt troià. Per garantir més revolucions als voltants d'un punt lagrangià estable es podria trobar investigant interseccions d'estructures més detallades de les varietats que es podrien trobar amb més temps de computació.

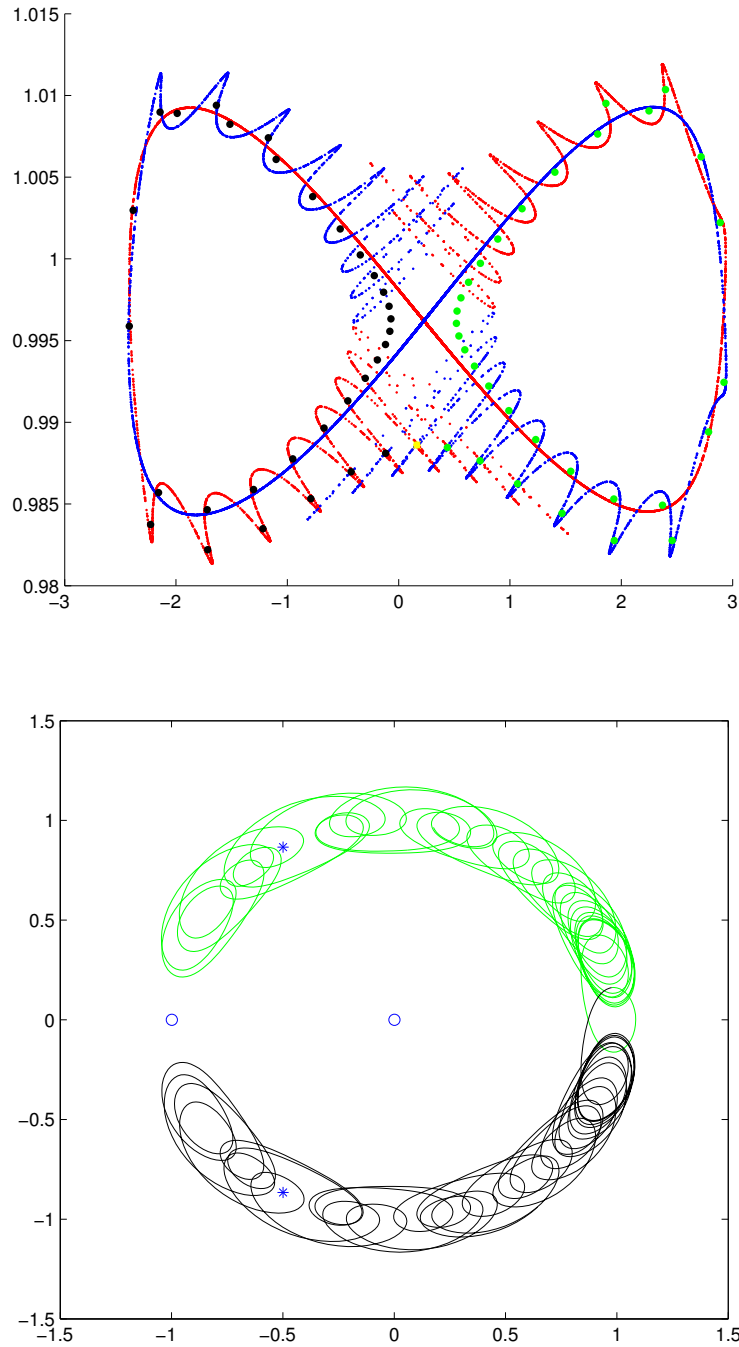


FIGURA 17. A dalt: Projectió en el pla $\theta - r$ fent servir el loop map de la propagació del punt inicial $(r, \theta) = (0.98861, 0.164)$ amb $\dot{\theta} = 0$, $\dot{r} > 0$ i $E = -1.494$ amb temps cap endavant (verd) i temps cap enrere (negre). A baix: Trajectòria del punt inicial en el sistema Sol-Júpiter en coordenades sinòdiques, en temps cap endavant (verd) i temps cap enrere (negre).

De la mateixa forma, prenent un punt inicial d'una de les interseccions entre cel·les de la part de dalt ($r > L_3$) trobem una trajectòria de *jumping trojan* en el sentit contrari, des de L_4 fins a L_5 .

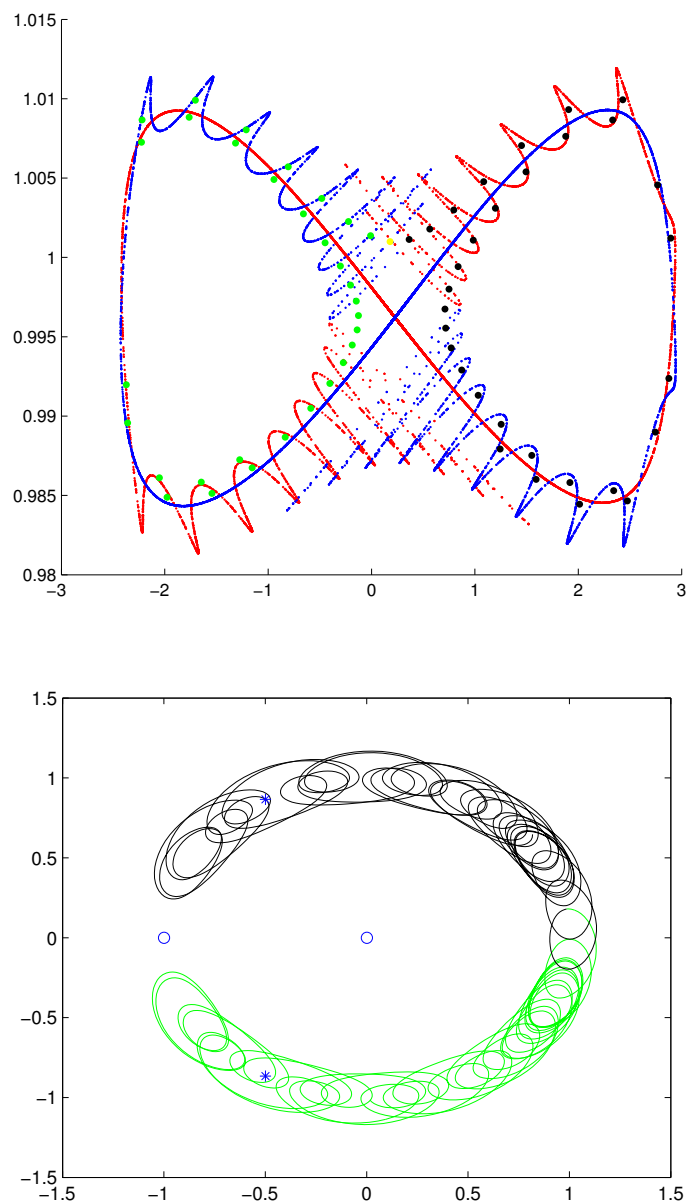


FIGURA 18. A dalt: Projectió en el pla $\theta-r$ fent servir el loop map de la propagació del punt inicial $(r, \theta) = (1.001, 0.18)$ amb $\dot{\theta} = 0$, $\dot{r} > 0$ i $E = -1.494$ amb temps cap endavant (verd) i temps cap enrere (negre). A baix: Trajectòria del punt inicial en el sistema Sol-Júpiter en coordenades sinòdiques, en temps cap endavant (verd) i temps cap enrere (negre).

10. Els Troians del Sistema Sol-Terra

Una pregunta que ens podem plantejar és si es poden trobar asteroides troians del sistema Sol-Terra que tinguin comportament de jumping trojan. Una opció és realitzar el procediment anterior però en el sistema Sol-Terra on el paràmetre de massa és $\mu = 3.036 \cdot 10^{-6}$.

Per començar, trobem l'òrbita de Lyapunov (figura 19).

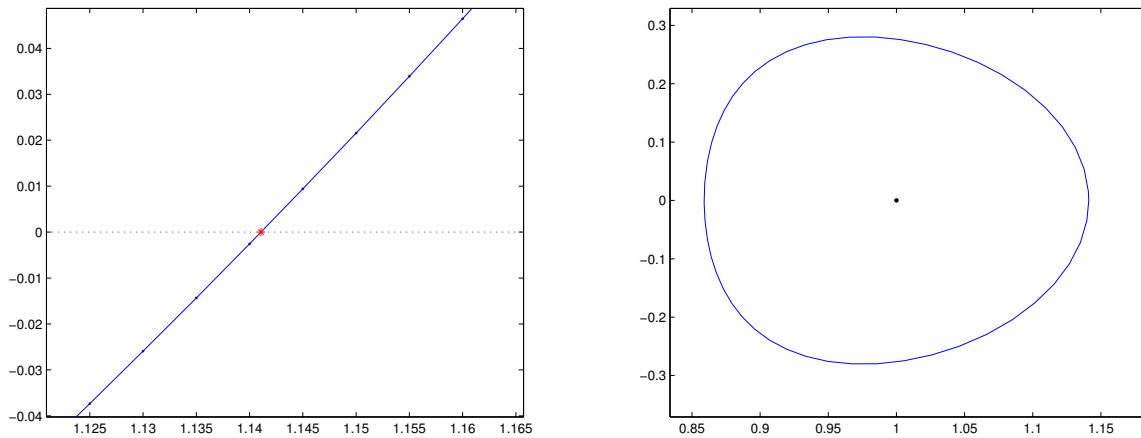


FIGURA 19. A l'esquerra: En blau, plot de les velocitats de tall $dx = \dot{x}$ de 15 punts inicials amb Energia $E = -1.49$. En vermell, punt amb velocitat vertical, trobat amb bisecció. A la dreta: Òrbita periòdica generada a partir del punt (vermell) trobat (1.14107814,0,0,-0.273477), al voltant de L_3 .

A continuació, calculem les seves varietats estable i inestable de la mateixa forma que en el sistema Sol-Júpiter, i les projectem sobre el loop map. Per calcular les varietats, escollim energia $E = -1.49$ i el temps d'integració és de $T = 6000$ en unitats adimensionals. El que observem a la figura 20 és el següent: les trajectòries de punts que surten de punts de l'òrbita són molt denses, degut a una gran quantitat de girs. De les quatre trajectòries possibles, estable/inestable i sumant/restant el vector propi de la varietat, només s'han representat dues, ja que totes juntes se superposen aparentment. En el loop map, les varietats també semblen superposades.

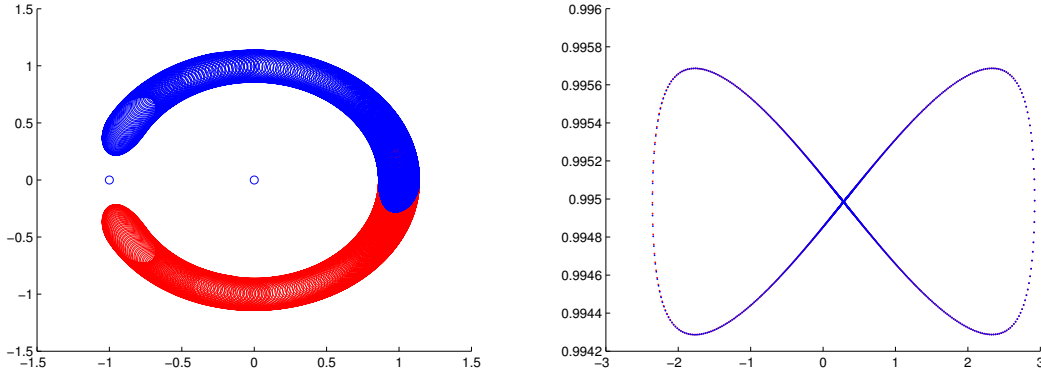


FIGURA 20. A l'esquerra: Varietats estable(blau) i inestable(vermell) de l'òrbita de Lyapunov del sistema Sol-Terra amb energia $E = -1.49$. Només s'ha dibuixat una de les dues branques de cada, ja que se superposen completament. A la dreta: Projectió de les varietats estable i inestable en el pla $\theta-r$ mitjançant un loop map. Les varietats semblen superposades.

L'observació més important és que en el loop map no sembla possible trobar cap tipus de cel·la que s'interseccioni i pugui explicar el moviment de salt d'un troià. Al no poder trobar aquest tipus de regions, l'existència de jumping trojans en el sistema Sol-Terra és molt difícil que succeeixi, a diferència del Sistema Sol-Júpiter. Aquest fet pot ser degut al baix paràmetre de massa, que fa que la Terra tingui menys influència en el moviment d'un tercer cos en el sistema.

11. Conclusions

En aquest Treball de Fi de Grau, hem deduït les equacions del problema dels tres cossos restringit i hem estudiat els seus punts d'equilibri fins a reunir els resultats teòrics necessaris per efectuar l'exploració numèrica. Aplicant mètodes numèrics, hem trobat les òrbites de Lyapunov, que existeixen al voltant de L_3 , i les hem fet servir per trobar les seves varietats estable i inestable. El que hem observat és el següent: la seva forma de ferradura podria arribar a explicar els mecanismes dels *jumping trojans*. Al tractar-se de varietats 2-dimensionals, hem comprovat l'eficàcia del loop map, una útil eina que ens ha permès visualitzar d'una forma més simple projectant els punts de gir sobre el pla $\theta - r$ i obtenint així una corba 1-dimensional. El resultat ha estat satisfactori, hem trobat en aquesta projecció una sèrie d'interseccions entre la varietat estable i la inestable, formant grans regions i petites cel·les, que restringeixen les trajectòries d'un asteroide troià. Hem vist per tant els tipus d'òrbites més característiques dels troians, les *tadpole* i les *horseshoe*, estan caracteritzades per estar dins o fora d'aquestes regions respectivament. Finalment, experimentant amb el comportament de trajectòries a l'interior de les petites cel·les, hem comprovat com el fenomen dels *jumping trojans* radica en les interseccions de les cel·les que es produeixen prop de L_3 . Aquests resultats, gràcies al suport teòric, són vàlids per altres valors d'energia que hem utilitzat, i per altres sistemes de referència que puguin haver-hi salts entre troians. En l'intent de buscar en el sistema Sol-Terra, hem vist la complicació que hi ha en buscar interseccions, ja que la densitat de girs i l'aparent superposició de les varietats fa difícil trobar-ne. La conclusió és que en el sistema Sol-Terra, els *jumping trojans* són més difícils de succeir que en el sistema Sol-Júpiter.

Part 3

Apèndix

12. Codis Matlab

12.1. Els punts de Lagrange.

```
function [x] = l1generator(mu)
%Genera el valor de x de L1 del sistema amb paràmetre de massa mu
chi0 = (mu/(3*(1-mu)))^(1/3);
for i=1:60
    chi = ((mu*(1-chi0)^2)/(3-2*mu-chi0*(3-mu-chi0)))^(1/3);
    if abs(chi-chi0)<1e-10
        x = mu-1+chi;
        break
    end
    chi0 = chi;
end
end

function [x] = l2generator(mu)
%Genera el valor de x de L2 del sistema amb paràmetre de massa mu
chi0 = (mu/(3*(1-mu)))^(1/3);
for i=1:60
    chi = ((mu*(1+chi0)^2)/(3-2*mu+chi0*(3-mu+chi0)))^(1/3);
    if abs(chi-chi0)<1e-10
        x = mu-1-chi;
        break
    end
    chi0 = chi;
end
end

function [x] = l3generator(mu)
%Genera el valor de x de L3 del sistema amb paràmetre de massa mu
chi0 = 1 - (7/12)*mu;
for i=1:60
    chi = (((1-mu)*(1+chi0)^2)/(1+2*mu+chi0*(2+mu+chi0)))^(1/3);
    if abs(chi-chi0)<1e-10
        x = mu+chi;
        break
    end
    chi0 = chi;
end
end
```

12.2. Solució del RTBP.

```
function [A] = omega(x,y,mu)
A = 0.5*(x.^2 + y.^2) + (1-mu)./sqrt((x-mu).^2 + y.^2) + ...
mu./sqrt((x-mu+1).^2 + y.^2) + 0.5*mu*(1-mu);
end

function plot_RTBP(mu,t,ci,signe)
```

```

%Plot de la propagació d'una condició inicial, amb temps positiu o negatiu
%segons "signe".
if nargin < 4, signo = 1; end

tol = 1e-12; %tolerancia del ode78
[T,Y] = ode78(@rtbp,[0,t],ci,0,tol); %soluciona el RTBP amb RK78
plot(Y(:,1),Y(:,2),'k')

function dx = rtbp(t,x) %Equacions del RTPB sinòdic
    dx1 = x(3);
    dx2 = x(4);
    dx3 = 2*x(4) + x(1) - (1-mu)*(x(1)-mu)/(((x(1)-mu)^2 + x(2)^2)^(3/2)) -...
    mu*(x(1)-mu+1)/(((x(1)-mu+1)^2 + x(2)^2)^(3/2));
    dx4 = -2*x(3) + x(2) - (1-mu)*x(2)/(((x(1)-mu)^2 + x(2)^2)^(3/2)) -...
    mu*x(2)/(((x(1)-mu+1)^2 + x(2)^2)^(3/2));
    dx= signe*[dx1;dx2;dx3;dx4];
end
end

function plot_RTBP_polar(mu,t,ci,signe)
%Plot polar de la propagació de la cond. inicial, amb temps positiu o
%negatiu segons "signe".
if nargin < 4, signe = 1; end

tol = 1e-12; %tolerancia del ode78
[T,Y] = ode78(@rtbp_p,[0,t],ci,0,tol);
plot(Y(:,1),Y(:,2))

function dx = rtbp_p(t,x) %Equacions del RTBP polar desplaçat
    dx1 = x(3);
    dx2 = x(4)/x(1);
    dx3 = (x(4)^2)/x(1) + 2*x(4) +x(1) -1/x(1)^2 + mu*(cos(x(2)) +...
    x(1)^-2 -(x(1)+cos(x(2)))*(x(1)^2 + 1 +2*x(1)*cos(x(2)))^(-3/2));
    dx4 = -x(4)*x(3)/x(1) -2*x(3) + mu*sin(x(2))*(((x(1)^2 +...
    2*x(1)*cos(x(2)) + 1)^(-3/2))-1);
    dx=signe*[dx1;dx2;dx3;dx4];
end
end

```

12.3. Òrbites de Lyapunov.

```

function [ORB,TIME]=Orbites_Periodiques
%Busca la coordenada x=ORB de l'òrbita de Lyapunov segons el mètode
%explícit, i el seu període=TIME.

mu = 9.53875e-004; %paràmetre de massa
x = linspace(l3generator(mu)+0.1,1.14,15);
y = 0; dx = 0;
E = -1.494;
C = -2*E+mu*(1-mu);
DX = []; ORB = []; DORB = []; TIME=[];

```

```

%Per cada punt, calculem el punt de tall amb y=0, ens guardem els valors x'
for k=1:length(x)
    dy = -sqrt(2*omega(x(k),y,mu)-dx-C);
    ci = [x(k), y, dx, dy];
    [tt, pp] = seccio_poincare(mu,ci,1);
    DX = [DX, pp(3)];
end
figure(1)
plot(x,DX,'.-')
hold on
plot(x,zeros(length(x),1),'k:')

%Fem el mètode de bissecció on canviï el signe de x'
for k=2:length(DX)
    if(DX(k-1)*DX(k)<0)
        [xx,dxx,ttt] = biseccio(x(k-1),DX(k-1),x(k),DX(k));
        ORB = [ORB xx];
        DORB = [DORB dxx];
        TIME = [TIME ttt];
    end
end

plot(ORB,DORB,'r*')
figure(2)
plot_RTBP(mu,2*TIME(end),[ORB(end),0,0, -sqrt(2*omega(ORB(end),0,mu)-C)]);

%Mètode de bissecció
function [resul,dresul,tt2] = biseccio(x1,dx1,x3,dx3)
    %Busca el punt amb x'=0 amb el mètode de la bissecció
    for q=1:20
        x2 = (x1+x3)/2;
        resul = x2;
        dy2 = -sqrt(2*omega(x2,y,mu)-dx-C);
        ci2 = [x2, y, dx, dy2];
        [tt2, pp2] = seccio_poincare(mu,ci2,1);
        dx2 = pp2(3);
        dresul = dx2;
        if(abs(dx2)<1e-8)break;end
        if(dx1*dx2<0)
            x3 = x2;
            dx3 = dx2;
        else
            x1 = x2;
            dx1 = dx2;
        end
    end
end

function [tt, pp] = seccio_poincare(mu,ci,j)
    tol = 1e-12; %tolerancia del ode78
    t = 300; %temps en que integrem el sistema

```

```

%Busquem aproximació inicial del temps
[T,Y] = ode78(@rtbp,[0,t],ci,0,tol);
pos = length(Y(:,1));
cont = 0;
for i = 2:length(Y(:,1))
    if (Y(i,2))*(Y(i-1,2))<0
        cont = cont+1;
    end
    if cont == abs(j)
        pos = i;
        break
    end
end
end
ti = T(pos); % Aproximació inicial del temps
% Mètode de Newton
for i=1:20
    [~,Y1] = ode78(@rtbp,[0,ti],ci,0,tol);
    Gti = Y1(end,2);
    if abs(Gti)<1e-12 break; end
    dGti = Y1(end,4);
    ti = ti - Gti/dGti;
end
if abs(Gti)>1e-12 display('no conv newton'); end
tt = ti;
pp = Y1(end,:);

function dx = rtbp(t,x){...}

end
end

```

12.4. Loop Map.

```

function loop_map(mu,ci,t)
%Calcula els punts de gir theta'=0 i el projecta al pla theta-r del
%sistema amb paràmetre de massa mu i condició inicial ci fins temps t
tol = 1e-12; %tolerancia del ode78
tt=[0];
pp=[ci];
[T,Y] = ode78(@rtbp_p,[0,t],ci,0,tol);
pos = length(Y(:,1));
for i = 2:length(Y(:,1))
    if(abs(Y(i,2))>pi) break; end
    if (Y(i,4))*(Y(i-1,4))<0
        pos = i;
        ti = T(pos); % Aproximació inicial del temps
        to = tt(end);
        po = pp(end,:);
        for j=1:15 %Mètode de Newton
            [~,Y1] = ode78(@rtbp_p,[to,ti],po,0,tol);

```

```

        Gti = Y1(end,4);
        if abs(Gti)<1e-11 break; end
        aux = rtbp_p(ti,Y1(end,:));
        dGti = aux(4);
        ti = ti - Gti/dGti;
    end
    if abs(Gti)>1e-11
        disp('NO CONV NEWTON');
    end
    %Fi Newton
    if Y1(end,3)>=0 %Escollim només els punts amb theta'>=0
        tt=[tt; ti];
        pp = [pp; Y1(end,:)];
    end
end
end
figure(1)
hold on
plot((pp(2:end,2)),pp(2:end,1),'r. ');

function dx = rtbp_p(t,x){...}

end
end

```

12.5. Càlcul de Varietats.

```

function [PVest,PVinest]=VARIETAT_OP(cond_ini,mu,t)
%Calcula la matriu Hessiana de l'òrbita periodica per trobar els punts de
%les varietats estable/inestable.
tol = 1e-12; %tolerancia del ode78
x = cond_ini(1); y = cond_ini(2); xdot = cond_ini(3); ydot = cond_ini(4);
ci = [x,y,xdot,ydot,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1]; %Condicció inicial
[T,Y] = ode78(@rtbp_var,[0,2*t],ci,0,tol); %integra les eq variacionals

mat_var = [Y(end,5:8);Y(end,9:12);Y(end,13:16);Y(end,17:20)];
[V,D]= eigs(mat_var);%Busquem els VEPS i VAPS
estable = V(:,4);
inestable = V(:,1);

%Ens quedem amb la direcció negativa dels VEPS
if(estable(2)>0) estable=-estable;end
if(inestable(2)>0) inestable=-inestable;end
v=10^(-6);
PVest = [x, y, xdot, ydot] + estable'*v;
PVinest = [x, y, xdot, ydot] + inestable'*v;
%Passem els punts a coordenades polars desplaçades
PVest_polar = coord_polar(PVest,mu);
PVinest_polar = coord_polar(PVinest,mu);

hold on

```

```
loop_map(mu,PVinvest_polar,246)
```

```
function dx = rtbp_var(t,x)    %Equacions variacionals
    dx = zeros(20,1);
    DX = x(1) - (1-mu)*(x(1)-mu)/(((x(1)-mu)^2 + x(2)^2)^(3/2)) -...
    mu*(x(1)-mu+1)/(((x(1)-mu+1)^2 + x(2)^2)^(3/2));
    DY = x(2) - (1-mu)*x(2)/(((x(1)-mu)^2 + x(2)^2)^(3/2)) -...
    mu*x(2)/(((x(1)-mu+1)^2 + x(2)^2)^(3/2));

    dx(1) = x(3);
    dx(2) = x(4);
    dx(3) = 2*x(4) + DX;
    dx(4) = -2*x(3) + DY;
    dx(5) = x(13);
    dx(6) = x(14);
    dx(7) = x(15);
    dx(8) = x(16);
    dx(9) = x(17);
    dx(10) = x(18);
    dx(11) = x(19);
    dx(12) = x(20);

    dxx = 1 - (1 - mu)/(x(2)^2 + (x(1) - mu)^2)^(3/2) + (3 *(1 - mu)* (x(1) -...
    mu)^2)/(x(2)^2 + (x(1) - mu)^2)^(5/2) - mu/(x(2)^2 + (1 + x(1) - mu)^2)^(3/2) +...
    (3 *(1 + x(1) - mu)^2 *mu)/(x(2)^2 + (1 + x(1) - mu)^2)^(5/2);
    dxy = (3 *x(2) *(1 - mu)* (x(1) - mu))/(x(2)^2 + (x(1) - mu)^2)^(5/2) +...
    (3* x(2)* (1 + x(1) - mu)* mu)/(x(2)^2 + (1 + x(1) - mu)^2)^(5/2);
    dyy = 1 + (3* x(2)^2 *(1 - mu))/(x(2)^2 + (x(1) - mu)^2)^(5/2) -...
    (1 - mu)/(x(2)^2 + (x(1) - mu)^2)^(3/2) + (3* x(2)^2* mu)/(x(2)^2 +...
    (1 + x(1) - mu)^2)^(5/2) - mu/(x(2)^2 + (1 + x(1) - mu)^2)^(3/2);

    dx(13) = dxx*x(5) + dxy*x(9) + 0*x(13) + 2*x(17);
    dx(14) = dxx*x(6) + dxy*x(10) + 0*x(14) + 2*x(18);
    dx(15) = dxx*x(7) + dxy*x(11) + 0*x(15) + 2*x(19);
    dx(16) = dxx*x(8) + dxy*x(12) + 0*x(16) + 2*x(20);
    dx(17) = dxy*x(5) + dyy*x(9) - 2*x(13) + 0*x(17);
    dx(18) = dxy*x(6) + dyy*x(10) - 2*x(14) + 0*x(18);
    dx(19) = dxy*x(7) + dyy*x(11) - 2*x(15) + 0*x(19);
    dx(20) = dxy*x(8) + dyy*x(12) - 2*x(16) + 0*x(20);

end
end
```


13. Bibliografia

Meyer, K., Hall, G., Offin, D.: *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer, Verlag New York (2009)

Oshima, K., Yanao, T.: *Jumping mechanisms of Trojan asteroids in the planar restricted three- and four-body problems* (2015).

Barrabés, E., Mondelo, J.M., Ollé, M.: *Dynamical aspects of multi-round horseshoe-shaped homoclinic orbits in the RTBP* (2009)

Szebehely, V.: *Theory of orbits. The restricted problem of three bodies*. Academic Press Inc., New York (1967)

Lambert, J.D.: *Numerical methods for ordinary differential systems: The initial value problem*. Wiley (1991)

Stoer, J., Bullirsch, R.: *Introduction to numerical analysis*, 3ed. Springer (2010)

Williams, D.R.: *Planetary Fact Sheet. NASA: National Aeronautics and Space Administration*. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/> (2014)

Weisstein, E.: *Restricted Three-Body Problem*.

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/RestrictedThree-BodyProblem.html> (2007)

Tsiganis, K., Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E.: *Thersites: a 'jumping' Trojan?*. *Astronomy and Astrophysics*, v.354, p.1091-1100 (2000)