

# UN MODELO CONSTITUTIVO PARA EL ANÁLISIS DE SÓLIDOS ELASTOPLÁSTICOS SOMETIDOS A GRANDES DEFORMACIONES

## Parte II: Implementación numérica y ejemplos de aplicación

CARLOS GARCÍA GARINO \*  
y  
JAVIER OLIVER \*\*

\* *Instituto Tecnológico Universitario, Facultad de Ingeniería,  
Universidad Nacional de Cuyo, Centro Universitario  
Parque Gral San Martín, 5500 Mendoza, Argentina*

\*\* *E.T.S. de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos  
Gran Capitán s/n, E-08034, Barcelona, España*

### RESUMEN

En este trabajo se discute la implementación numérica de un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos con grandes deformaciones. Dicho modelo se ha propuesto en la parte I de este trabajo. La integración de la ecuación constitutiva se basa en un algoritmo del tipo predictor elástico-corrector plástico. El algoritmo obtenido para las tensiones es muy simple y eficiente. El corrector plástico conduce a utilizar el algoritmo de retorno radial de la misma manera que en el problema de pequeñas deformaciones. A partir de un funcional de Hu-Washizu se obtiene la expresión del cálculo de las fuerzas internas. La discretización espacial se realiza mediante elementos finitos Q1/P0. Finalmente se resuelven varios ejemplos de aplicación.

### SUMMARY

In this paper the numerical implementation of the finite strain elastoplastic constitutive model presented in part I is given. The integration of the constitutive equation is based on an elastic-predictor plastic-corrector scheme. The resulting algorithm is very simple and efficient. The plastic corrector step leads to the usage the radial return algorithm in the same format as for the infinitesimal elastoplastic problem. A Hu-Washizu functional is used in order to compute the internal forces. The spatial discretization is taken into account by mean of a Q1/P0 quadrilateral elements. Several application problems are solved.

Recibido: Enero 1994

## INTRODUCCIÓN

Este trabajo discute la implementación computacional de un modelo elastoplástico con grandes deformaciones, basado en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación, y en un potencial hiperelástico. Este modelo ha sido propuesto en la parte I de este trabajo<sup>1</sup>.

En pequeñas deformaciones, al permanecer fija la geometría, no existen dificultades adicionales al tratar el problema elastoplástico, respecto del problema elástico. En presencia de grandes deformaciones el problema se complica mucho, y la dificultad esencial consiste en *acoplar* convenientemente una teoría como la hiperelástica, basada en una relación constitutiva secante, con la de la plasticidad que esencialmente está formulada en tasas o velocidades de deformación.

Tradicionalmente esta clase de problemas han sido abordados en la comunidad computacional mediante modelos basados en la teoría de la hipoeelasticidad, como puede verse en el trabajo de Hughes<sup>2</sup>. El éxito de este enfoque está basado simplemente en reformular de manera incremental la ecuación constitutiva elástica, con lo que se obtiene un formato semejante al del problema con deformaciones infinitesimales. De esta manera resulta sencillo implementar un modelo de este tipo en cualquier programa no lineal de elementos finitos. El precio a pagar es que estos modelos deben satisfacer objetividad incremental, y sufren diversos inconvenientes tanto numéricos como teóricos, pese a lo cual siguen siendo ampliamente utilizados.

En la práctica computacional el desarrollo de modelos basados en la descomposición multiplicativa y la noción de hiperelasticidad ha sido mucho más lento. En los primeros trabajos de este tipo debidos, entre otros, a Lee y coautores<sup>3</sup> los resultados se reformulaban de manera incremental para el tratamiento numérico. De esta forma en la práctica se empleaban esquemas exactamente iguales a los de los modelos hipoeelásticos.

En los últimos años se han producido considerables avances en el tratamiento numérico de los modelos basados en la hiperelasticidad, fundamentalmente debido a las contribuciones de Simo y Ortiz<sup>4-6</sup>. El modelo teórico desarrollado<sup>1</sup> está escrito en este contexto y los aspectos claves de la implementación numérica del modelo resultan:

- Integración de la ecuación constitutiva.
- Empleo de un funcional de Hu-Washizu.
- Discretización mediante elementos finitos mixtos.
- Linealización del residuo.

En el trabajo se discute la integración de la ecuación constitutiva, para lo cual se emplea un algoritmo del tipo predictor elástico-corrector plástico. La forma débil del problema se obtiene a partir de un funcional de Hu-Washizu. El problema se discretiza mediante el elemento mixto Q1/P0, cuadrilátero lineal con presión constante. Finalmente en el trabajo se discuten varios problemas de aplicación.

## INTEGRACIÓN DE LA ECUACION CONSTITUTIVA

### Algoritmo Predictor-Corrector

El algoritmo se basa en descomponer el problema de evolución del sólido elastoplástico, en otros dos problemas<sup>4,7</sup>; un predictor elástico y un corrector plástico, de tal forma que la resolución de los mismos sea equivalente a resolver el problema original.

La actualización de las variables se realiza a partir de los desplazamientos incrementales  $\Delta \mathbf{u}$ , y de las variables del problema  ${}^t \mathbf{b}^{e-1}$  y  ${}^t \boldsymbol{\alpha}$  almacenadas en la base de datos del programa para la última configuración conocida  ${}^t \Omega$ . La nueva configuración  ${}^{t+\Delta t} \Omega$  se obtiene a partir del incremento de desplazamientos  $\Delta \mathbf{u}$ , superpuesto a la última configuración conocida  ${}^t \Omega$ , en la que se satisfacen simultáneamente las ecuaciones constitutiva y de equilibrio. Estas dos configuraciones están relacionadas mediante el tensor gradiente de la deformación incremental  $\mathbf{f}$ . El nuevo tensor gradiente de la deformación resulta  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot {}^t \mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{f} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$

### Problema Elástico

Para este problema las variables plásticas no cambian luego resulta

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{pPR} = {}^t \mathbf{F}^p$$

La componente elástica predictora del tensor gradiente de la deformación  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{ePR}$ , se calcula empleando la descomposición multiplicativa  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$  del tensor gradiente de la deformación y el predictor  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{pPR}$ , como se muestra a continuación

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{ePR} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} \cdot ({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{pPR})^{-1} = \mathbf{f} \cdot ({}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^p)^{-1} = \mathbf{f} \cdot {}^t \mathbf{F}^e \quad (1)$$

El predictor del tensor elástico de Finger  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{b}^{e-1PR}$  resulta entonces<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{b}^{e-1PR} &= \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{e-T} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{e-1} \right)^{PR} = \\ &= \mathbf{f}^{-T} \cdot \left( {}^t \mathbf{F}^{e-T} \cdot {}^t \mathbf{F}^{e-1} \right) \mathbf{f}^{-1} = \mathbf{f}^{-T} {}^t \mathbf{b}^{e-1} \mathbf{f}^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

a partir de este resultado se obtiene el predictor del tensor elástico de Almansi:  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^{ePR} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{g} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{b}^{e-1PR})$ . Las tensiones predictoras  $\boldsymbol{\tau}^{PR}$  se calculan a partir de la ecuación (17) del modelo teórico<sup>1</sup>, en función del tensor elástico de Almansi  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^e$ . Es importante destacar que el problema elástico se basa en el cálculo de una expresión exacta (definición del tensor de Almansi), con lo que se evitan las costosas integraciones numéricas típicas de los modelos hipoplásticos.

### Problema Plástico

En este caso la configuración deformada permanece fija y las variables internas se actualizan para satisfacer la ecuación constitutiva. Para este problema Simo<sup>6</sup> ha propuesto integrar el flujo plástico en la configuración original con el fin de satisfacer objetividad incremental.

En este momento es donde cobran relevancia la relación entre el tensor empleado para caracterizar el flujo plástico del modelo  $\mathbf{d}^p$  con la componente plástica del tensor derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}^p$ , que se ha destacado en la Observación 2 de la parte I de este trabajo<sup>1</sup>

$$\dot{\mathbf{C}}^p = 2 \phi^* \mathbf{d}^p \quad (3)$$

Para el problema asociado resulta  $\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}$  y  $f$  es el criterio de fluencia y  $\gamma$  el multiplicador plástico. Luego resulta

$$\dot{\mathbf{C}}^p = 2 \phi^* (\dot{\gamma} \mathbf{n}) = 2 \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{N}$  indica la normal a la superficie de fluencia  $F$  en el espacio de tensiones del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

La ecuación (4) se discretiza mediante un esquema en diferencias que se integra empleando un algoritmo de Euler implícito, con lo que se obtiene

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{C}^p = {}^t \mathbf{C}^p + 2 \gamma {}^{t+\Delta t} \mathbf{N} \quad (5)$$

Esta ecuación puede reescribirse en función de variables espaciales. Para ello se calcula el correspondiente push-forward y resulta

$$\phi_* {}^{t+\Delta t} \mathbf{C}^p = \phi_* {}^t \mathbf{C}^p + 2 \gamma {}^{t+\Delta t} \mathbf{n} \quad (6)$$

donde  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{n} = \phi_* {}^{t+\Delta t} \mathbf{N}$  es la normal a la superficie de fluencia en la configuración deformada al final del incremento.

La expresión espacial del tensor  $\phi_* {}^{t+\Delta t} \mathbf{C}^p$  se ha resaltado en la Observación 1 de la parte I de este trabajo<sup>1</sup>

$$\phi_* {}^{t+\Delta t} \mathbf{C}^p = {}^{t+\Delta t} \mathbf{b}^{e-1} \quad (7)$$

Para calcular el tensor  $\phi_* {}^t \mathbf{C}^p$ , se expresa al tensor  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}$  en función de  ${}^t \mathbf{F}$  y  $\mathbf{f}$ . Luego resulta<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \phi_* {}^t \mathbf{C}^p &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{-T} \cdot {}^t \mathbf{C}^p \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{-1} = \\ &= \mathbf{f}^{-T} \cdot ({}^t \mathbf{F}^{e-T} \cdot {}^t \mathbf{F}^{e-1}) \cdot \mathbf{f}^{-1} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{b}^{e-1PR} \end{aligned} \quad (8)$$

Utilizando las ecuaciones (6), (7), y (8), el tensor de Finger  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1}$  al final del incremento resulta<sup>8</sup>

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1PR} + 2\gamma {}^{t+\Delta t}\mathbf{n}, \quad 2\mu\gamma = \frac{{}^{t+\Delta t}f^{PR}}{1 + \frac{H}{3\mu}} \quad (9)$$

donde  $H$  es el parámetro de endurecimiento isótropo,  $\mu$  es el modulo de rigidez a cortante del material, y  ${}^{t+\Delta t}f^{PR}$  es el valor predictor de la función de fluencia. El esquema numérico resultante se resume en el Cuadro 1.

Dados los desplazamientos  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ , y las variables almacenadas en la base de datos:  ${}^t\mathbf{u}$ ,  ${}^t\mathbf{b}^{e-1}$ , y  ${}^t\boldsymbol{\alpha}$ :

i Se actualiza la geometría y se calcula el tensor  $\mathbf{f}$ :

$$\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u} \quad ; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{x} = {}^o\mathbf{x} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$$

$$\nabla\mathbf{u} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial{}^{t+\Delta t}\mathbf{x}} \quad ; \quad \mathbf{f}^{-1} = \mathbf{I} - \nabla\mathbf{u}$$

ii Actualize el tensor elástico de Finger:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1PR} = \mathbf{f}^{-T} \cdot {}^t\mathbf{b}^{e-1} \cdot \mathbf{f}^{-1}$$

iii Calcule el tensor elástico de Almansi y las tensiones de Kirchhoff:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^e = \frac{1}{2}({}^{t+\Delta t}\mathbf{g} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1}) \quad ; \quad {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial\psi({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^e)}{\partial{}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^e}$$

iv Verifique el criterio de fluencia y calcule el corrector plástico si corresponde:

```
IF  $f({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}) > 0$ 
  THEN go to v
  ELSE go to vii
ENDIF
```

v Se corrige el tensor elástico de Finger mediante el algoritmo de retorno radial según la ec (9).

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1PR} + 2\gamma {}^{t+\Delta t}\mathbf{n}$$

vi Se corrige el tensor elástico de Almansi y las tensiones de Kirchhoff:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^e = \frac{1}{2}({}^{t+\Delta t}\mathbf{g} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1}) \quad ; \quad {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial\psi({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^e)}{\partial{}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^e}$$

vii almacena  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1}$ , y  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}$  en la base de datos y finaliza.

Cuadro 1. Algoritmo de Integración del modelo propuesto

**Observación 1** Es muy importante destacar que se ha obtenido una expresión *aditiva* que relaciona el valor final del tensor de Finger con su valor predictor. Este resultado es idéntico en su estructura al del problema de pequeñas deformaciones, y de esta manera pueden utilizarse los mismos algoritmos del problema infinitesimal. En este trabajo se emplea el algoritmo de Retorno Radial debido a su extrema sencillez y eficacia. Nótese también que en este aspecto el algoritmo resultante comparte todas las ventajas de los esquemas utilizados habitualmente en el contexto de los modelos basados en la hipoeelasticidad, simplificando de esta forma algunas formulaciones anteriores en el contexto de los códigos hiperelásticos.

El resultado numérico obtenido surge como una consecuencia directa de la regla de flujo adoptada en la formulación del modelo teórico. De esta manera se destaca la importancia crucial que posee la metodología de trabajo empleada que, entre otras hipótesis, define la regla de flujo *a priori*. Una ventaja importante del resultado obtenido es que evita calcular *explícitamente* la descomposición multiplicativa, con lo que se ahorran costosas operaciones a nivel de punto de Gauss que resultan necesarias en otros trabajos<sup>9,10</sup>.

## ECUACIONES DE GOBIERNO DEL PROBLEMA

El problema queda definido por las ecuaciones de equilibrio, la cinemática, la ecuación constitutiva y las condiciones de contorno que se escriben a continuación

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \rho_0 \mathbf{b} &= 0 \\ \mathbf{e}^e &= \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{b}^{e-1}) \quad \mathbf{F}^p \\ \boldsymbol{\tau} &= \frac{\partial \hat{\psi}^e(\mathbf{e}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t} \quad \text{en } \Gamma_t \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Gamma_u \end{aligned} \right\} \text{Problema I} \quad (10)$$

donde  $\rho$  es la densidad del sólido y  $\mathbf{b}$  indica las fuerzas de volumen. La normal al sólido se indica mediante  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{t}$  el vector de tracciones, que definen las condiciones de contorno en la frontera  $\Gamma_t$ . Las desplazamientos impuestos en la frontera  $\Gamma_u$  se indican mediante  $\bar{\mathbf{u}}$ .

Como se ha visto en el capítulo anterior la energía libre se descompone en una componente elástica  $\hat{\psi}^e$  y otra plástica  $\hat{\psi}^p$ . Es frecuente postular que la energía libre elástica  $\hat{\psi}^e$ , se descompone a su vez en una parte volumétrica  $\hat{\psi}_v^e$  y otra desviadora  $\hat{\psi}_d^e$ . Luego resulta

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}^e(\mathbf{e}^e) + \hat{\psi}^p(\boldsymbol{\alpha}) = \hat{\psi}_v^e(\operatorname{tr} \mathbf{e}^e) + \hat{\psi}_d^e(\operatorname{dev} \mathbf{e}^e) + \hat{\psi}^p(\boldsymbol{\alpha}) \quad (11)$$

Las ecuaciones (10), conjuntamente con la ecuación (11) brindan todos los elementos para escribir la forma débil del problema mediante un principio variacional como Trabajos Virtuales<sup>11</sup>. Sin embargo en los procesos gobernados por la plasticidad aparece un cierto comportamiento incompresible, y esto es particularmente notable en el caso de los metales. Si se emplea una técnica variacional estandar para escribir la forma débil del problema, entonces pueden aparecer fenómenos de bloqueo de la solución numérica.

Por esta razón es conveniente postular otro problema, equivalente al primero. Agregando dos nuevos campos  $\theta$  y  $p$ , que en la forma local del problema equivalen a la deformación volumétrica y a la presión media, respectivamente.

$$\psi^e(\text{dev } \mathbf{e}^e(\mathbf{u}), p, \theta) = \psi_v^e(\theta) + \psi_d^e(\text{dev } \mathbf{e}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\alpha}) \quad (12)$$

El problema queda definido por las siguientes ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \boldsymbol{\tau} + \rho_o \mathbf{b} &= 0 \\ \text{dev } \mathbf{e}^e &= -\frac{1}{2} \text{dev } \mathbf{b}^{e-1} \\ \text{tr } \mathbf{e}^e &= \theta \\ \text{dev } \boldsymbol{\tau} &= \frac{\partial \psi_d^e(\text{dev } \mathbf{e}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} \\ \text{tr } \boldsymbol{\tau} &= 3 p \end{aligned} \right\} \text{Problema II} \quad (13)$$

más las condiciones de contorno indicadas en el problema original.

Es importante destacar que el problema II es completamente equivalente al primero ya que la ecuación (13.c) impone  $\text{tr } (\mathbf{e}^e) = \theta$  y la ecuación (13.e) impone que  $p = \frac{1}{3} \text{tr } (\boldsymbol{\tau})$ .

### Principio Variacional

La forma débil del problema equivalente se puede escribir mediante el funcional de Hu-Washizu<sup>12</sup> que se escribe en función de los tres campos independientes mediante

$$\pi_{HV}(\mathbf{u}, \theta, p) = \int_{\Omega} [\psi_v^e(\theta) + \psi_d^e(\text{dev } \mathbf{e}^e)] + p (\text{tr } \mathbf{e} - \theta) dv + \pi_{ext} \quad (14)$$

La primera variación del funcional de Hu-Wahizu que permite escribir la forma débil del problema conduce a las siguientes ecuaciones variacionales

$$\delta \pi_{HV}|_{\delta(\mathbf{u})} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \Psi_d(\text{dev } \mathbf{e}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} \text{dev } \nabla(\delta \mathbf{u}) + p \text{div}(\delta \mathbf{u}) \right] dv + \pi_{ext} = 0 \quad (15)$$

$$\delta \pi_{HV}|_{\theta} = \int_{\Omega} \delta \theta \left( \frac{\partial \Psi_v(\theta)}{\partial \theta} - p \right) dv = 0 \quad (16)$$

$$\delta \pi_{HV}|_p = \int_{\Omega} \delta p (\text{tr } \mathbf{e}^e - \theta) dv = 0 \quad (17)$$

donde  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \theta$ , y  $\delta p$  son las variaciones admisibles de los campos de desplazamiento, deformación y presión, respectivamente. La ecuación (15) brinda la forma débil de la ecuación de equilibrio local dada por la ecuación (13.a). Las ecuaciones (16) y (17) resultan la forma débil de las ecuaciones (13.c) y (13.e). Las variaciones del funcional en las direcciones  $\delta(\mathbf{u})$ ,  $\delta \theta$ , y  $\delta p$  se indican mediante  $\delta\pi_{HV}|_{\delta(\mathbf{u})}$ ,  $\delta\pi_{HV}|_p$  y  $\delta\pi_{HV}|_{\theta}$ , respectivamente. Luego puede escribirse

$$\delta\pi_{HV} = \delta\pi_{HV}|_{\delta(\mathbf{u})} + \delta\pi_{HV}|_p + \delta\pi_{HV}|_{\theta} = 0 \quad (18)$$

Teniendo en cuenta la ecuación constitutiva dada por las ecuaciones (13.d) y (13.e) resulta

$$\delta\pi_{HV}|_{\delta(\mathbf{u})} = \int_{\Omega} [dev \boldsymbol{\tau} : dev \nabla(\delta \mathbf{u}) + p \operatorname{div}(\delta \mathbf{u})] dv + \delta \pi_{ext} = 0 \quad (19)$$

y la integral del primer miembro se indica en adelante como  $\delta\pi_{int}$ . La variación del trabajo externo  $\delta \pi_{ext}$  da lugar a los términos de carga usuales<sup>11</sup>.

Teniendo en cuenta que el gradiente de la variación de los desplazamientos puede escribirse según sus componentes esféricas y desviadoras como

$$\nabla(\delta \mathbf{u}) = dev \nabla(\delta \mathbf{u}) + \frac{1}{3} \operatorname{div}(\delta \mathbf{u}) \mathbf{1} \quad (20)$$

la variación de la energía interna resulta finalmente

$$\begin{aligned} \delta\pi_{HV}|_{\delta(\mathbf{u})} &= \int_{\Omega} (dev \boldsymbol{\tau} + p \mathbf{1}) \left( dev \nabla(\delta \mathbf{u}) + \frac{1}{3} \operatorname{div}(\delta \mathbf{u}) \mathbf{1} \right) dv \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \nabla(\delta \mathbf{u}) dv \end{aligned} \quad (21)$$

Esta integral nos expresa la forma que toma el cálculo de las fuerzas internas. La presión, que para el caso de Von Mises no depende de la plasticidad, resulta un campo independiente, y su cálculo se trata más adelante cuando se detalla la aproximación por elementos finitos. El cálculo de la componente desviadora del tensor de tensiones en cambio se debe ajustar al modelo constitutivo discutido en el trabajo anterior<sup>1</sup>, y la integración de la ecuación constitutiva se trata en el próximo apartado.

## Linealización

Para linealizar el residuo que surge en el problema no lineal incremental debido a las diferencias entre  $\delta\pi_{int}$  y  $\delta\pi_{ext}$ , que tienen lugar en el proceso incremental se calcula la parte lineal de las fuerzas internas  $\delta\pi_{int}$ . A partir de la ecuación (21) se puede escribir una expresión equivalente en la configuración original mediante:

$$\delta\pi_{int} := \int_{V_o} \mathbf{FS} \operatorname{GRAD}(\delta \mathbf{u}) dV_o \quad (22)$$



donde se ha definido en la configuración original el operador  $GRAD$  según

$$GRAD (\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{X}}$$

La parte lineal resulta

$$\begin{aligned} d\delta\pi_{int} &= d \int_{V_o} \mathbf{F} \mathbf{S} GRAD(\delta \mathbf{u}) dV_o = \\ &= \int_{V_o} [d\mathbf{F} \mathbf{S} GRAD(\delta \mathbf{u}) + \mathbf{F} d\mathbf{S} GRAD(\delta \mathbf{u})] dV_o \end{aligned} \quad (23)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (20) y (22), y que el valor del término correctivo definido por la , puede escribirse en función de los valores predictores resulta

$$\mathbf{S} = p \mathbf{C}^{-1} + DEV \mathbf{S}^{PR} - 2 \mu \gamma^{t+\Delta t} \mathbf{N} = p \mathbf{C}^{-1} + \alpha DEV \mathbf{S}^{PR} \quad (24)$$

donde  $\alpha$  es un factor corrector que *escala* los valores predictores y  $DEV (\cdot) = (\cdot) - ((\cdot) : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1}$ . La ecuación (24) se puede escribir en función de argumentos eulerianos como:  $\boldsymbol{\tau} = p \mathbf{1} + \alpha dev \boldsymbol{\tau}^{PR}$ . La forma final de la ecuación (23) se obtiene, después de laboriosos pero relativamente sencillos cálculos de álgebra tensorial<sup>6,8,13,14</sup>.

$$\begin{aligned} d\delta\pi_{int} &= \int_{V_o} GRAD(d\mathbf{u}) \mathbf{S} GRAD(\delta \mathbf{u}) dV_o \\ &+ \int_{V_o} \left\{ GRAD(d\mathbf{u}) \mathbf{F}^{-1} : (-2 p \mathbf{I}_c) : GRAD(\delta \mathbf{u}) \mathbf{F}^{-T} \right\} dV_o \\ &+ \int_{V_o} \left\{ GRAD(d\mathbf{u}) \mathbf{F}^{-1} : \mathbf{a}^{ep} : GRAD(\delta \mathbf{u}) \mathbf{F}^{-T} \right\} dV_o \\ &+ \int_{V_o} dp \mathbf{F}^{-T} GRAD(\delta \mathbf{u}) dV_o \end{aligned} \quad (25)$$

donde la integral  $\int_{V_o} GRAD(d\mathbf{u})^T \mathbf{S} GRAD(\delta \mathbf{u}) dV_o$  es la conocida matriz de rigidez geométrica y  $\mathbf{a}^{ep} = \phi_* \mathbf{A}^{ep}$  es el tensor elastoplástico algorítmico espacial.

La forma euleriana o espacial de estas ecuaciones resulta

$$\begin{aligned} d\delta\pi_{int} &= \int_v \nabla(d\mathbf{u}) : \boldsymbol{\tau} : \nabla(\delta \mathbf{u}) dv \\ &+ \int_v \left\{ \nabla^s(d\mathbf{u}) : [-2 p \mathbf{I} + \mathbf{a}^{ep}] : \nabla^s(\delta \mathbf{u}) \right\} dv \\ &+ \int_v dp div(\delta \mathbf{u}) dv \end{aligned} \quad (26)$$

Nótese que la expresión espacial da lugar al empleo de las matrices  $\mathbf{B}$  usuales en pequeñas deformaciones, que son ralas y ahorran valiosas operaciones respecto a una formulación como  $\bar{\mathbf{B}}$  en la que resultan matrices llenas. Además la matriz  $\bar{\mathbf{B}}$  da lugar a más términos que la matriz de rigidez geométrica usual<sup>15</sup>, y por estas razones ha caído

en desuso en el contexto de las grandes deformaciones frente a la efectividad de los métodos mixtos. También es interesante destacar que el término

$$\int_v \{ \nabla^s(d\mathbf{u}) : (-2 p \mathbf{I}) : \nabla^s(\delta\mathbf{u}) \} dv$$

distingue a un elemento mixto, por ejemplo el cuadrilátero lineal con presión constante, Q1/PO, del elemento equivalente obtenido en base a integrar la presión de manera selectiva, con un punto de Gauss ubicado en el centro del elemento. Este último, al ser variacionalmente inconsistente, y estar formulado en base a un solo campo no incluye en la matriz de rigidez el término debido a la presión.

### Discretización

El funcional de tres campos se discretiza mediante elementos finitos. Para ello se emplea el cuadrilátero lineal con presión constante Q1/P0 propuesto originalmente Naagtegal, Park y Rice<sup>16</sup>. Las funciones de forma del elemento son las siguientes

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N} \mathbf{a} \\ p &= \mathbf{h}_p^T \mathbf{p}_a \\ \theta &= \mathbf{h}_\theta^T \theta_a \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

aunque las funciones  $\mathbf{h}_p$  y  $\mathbf{h}_\theta$  pueden ser arbitrarias en este trabajo si adopta  $\mathbf{h}_p = \mathbf{h}_\theta = \mathbf{h}$ . El vector  $\mathbf{a}$  indica los desplazamientos nodales, y los vectores  $\mathbf{p}_a$  y  $\theta_a$  indican los grados de libertad asociados a la presión y a la deformación volumétrica, respectivamente. Estos vectores por lo general no se asocian a los nodos del elemento. La ecuación (18) se aproxima mediante las ecuaciones (27). Luego la ecuación variacional incremental dada por la ecuación (26) resulta<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} d\delta\pi_{int} &:= \int_v \nabla(d\mathbf{u}) : \boldsymbol{\tau} : \nabla(\delta\mathbf{u}) dv \\ &+ \int_v \{ \nabla^s d\mathbf{u} : [-2 p \mathbf{I} + a^{ep}] : \nabla^s(\delta\mathbf{u}) \} dv \\ &+ K \int_v \overline{div}(d\mathbf{u}) \otimes \overline{div}(\delta\mathbf{u}) dv \end{aligned} \quad (28)$$

Para el elemento mixto Q1/P0 existe un solo grado de libertad para determinar tanto la presión como la deformación volumétrica. En este caso la matriz  $\mathbf{h}$  se reduce a una sola función constante e igual a la unidad. Luego resulta

$$\overline{div}(\cdot) = \frac{\int_v div(\cdot) dv}{\int_v dv} \quad (29)$$

De esta manera se poseen todos los elementos necesarios para implementar el modelo constitutivo en un código de elementos finitos no lineal.

## EJEMPLOS DE APLICACIÓN

### Ménsula elastoplástica en deformación plana

Para validar el modelo se analiza un test académico propuesto en el marco del proyecto GRECO, y del que se disponen resultados numéricos obtenidos por distintos centros de investigación que han sido recopilados por El Moutassim<sup>17</sup>.

Se trata de analizar el comportamiento de la viga en ménsula de la Figura 1, bajo la acción de un desplazamiento impuesto en el extremo libre, hasta alcanzar una deformación igual al canto de la viga. La viga se ha discretizado con 48 elementos de isoparamétricos de 8 nodos, empleando una regla de integración de cuatro puntos de Guss. La geometría y datos del material se indican en la Figura 1.

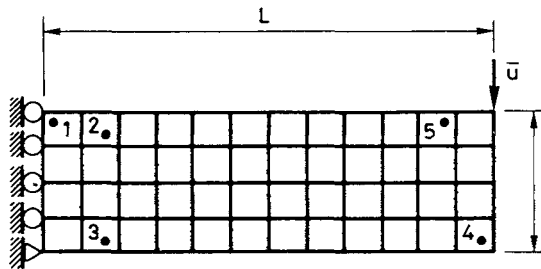


Figura 1. Ménsula elastoplástica: malla 48 elementos Q8

La motivación para estudiar este problema utilizando elementos cuadriláteros cuadráticos de 8 nodos (Q2), proviene de los numerosos resultados disponibles en la literatura. Todos los resultados referenciados han sido recopilados por El Moutassim<sup>17</sup>, y se han obtenidos con modelos hipoeelásticos, excepto el indicado como Provence II que se basa en un modelo hiperelástico escrito en función de deformaciones logarítmicas<sup>9</sup>. Para evitar problemas de incompresibilidad los elementos se subintegran, empleando una regla uniforme, como se ha mencionado más arriba.

Las Figuras 2.1-2.4 muestran la deformada de la viga en escala real y los contornos de deformación plástica efectiva para los niveles de carga de  $u = 0.5 l$  y  $u = l$  respectivamente.

En general puede decirse que los resultados obtenidos concuerdan de manera excelente con los disponibles, como muestra la Tabla I para las tensiones y deformaciones plásticas efectivas. La comparación se realiza para los puntos de Gauss indicados en la Figura 1, ya que el comportamiento en ellos permite validar la ecuación constitutiva bajo diferentes condiciones. Así, como puede verse en la Figura 2, el punto 1 posee grandes deformaciones y pequeñas rotaciones, los puntos 2 y 3 poseen grandes deformaciones y rotaciones moderadas (ver Figura 2.3), el punto 5 posee grandes deformaciones y rotaciones, y por último el punto 4 posee grandes rotaciones y pequeñas deformaciones.

El problema ha sido resuelto con 80 incrementos de carga iguales ( $\Delta u = 0.125l$ ). La velocidad de convergencia obtenida es cuadrática y, en general han sido suficientes

dos iteraciones para que la norma de fuerzas residuales sea inferior al 0.5 %. El número total de iteraciones para el problema ha sido de 174, y el tiempo de CPU empleado es de 45 seg en un ordenador vectorial CONVEX C-120. Estos valores muestran que el modelo converge con buena aproximación para grandes incrementos de carga. Braudel et al<sup>18</sup> han procesado el mismo problema y sólo han obtenido convergencia con 160 incrementos de carga iguales.

Punto de Gauss	CODIGO	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_{xy}$	$\bar{e}_p$
1	Este trabajo	73.48	- 1.170	36.09	2.119	0.2475
	Liège	73.66	- 1.333	36.19	2.167	0.2475
	INSA	73.66	- 1.126	36.18	2.099	0.2487
	CEMEF	73.64	- 1.128	36.19	2.096	0.2485
	Compiègne	73.58	- 1.129	36.16	2.091	0.2480
	Provence I	73.65	- 1.124	36.20	2.100	0.2486
	Provence II	73.66	- 1.125	36.20	2.098	0.2487
2	Este trabajo	58.12	2.666	30.28	14.83	0.1446
	Liège	58.29	2.612	30.33	14.82	0.1457
	INSA	58.18	2.643	30.31	14.82	0.1451
	CEMEF	58.18	2.666	30.31	14.83	0.1451
	Compiègne	58.20	2.669	30.32	14.81	0.1451
	Provence I	58.16	2.638	30.29	14.82	0.1451
	Provence II	58.16	2.639	30.288	14.82	0.1451
3	Este trabajo	- 75.88	- 11.65	- 43.75	13.95	0.2063
	Liège	- 76.28	- 11.99	- 44.22	- 14.00	0.2063
	INSA	- 75.75	- 11.70	- 43.70	- 13.97	0.2051
	CEMEF	- 75.71	- 11.68	- 43.67	- 13.96	0.2049
	Compiègne	- 75.70	- 11.65	- 43.66	- 13.94	0.2049
	Provence I	- 75.71	- 11.68	- 43.68	- 13.96	0.2049
	Provence II	- 75.72	- 11.69	- 43.69	- 13.96	0.2049
4	Este trabajo	- 0.856	- 0.358	- 0.364	- 0.087	0.0000
	Liège	- 0.756	- 0.364	- 0.336	- 0.108	0.0000
	INSA	- 0.889	- 0.364	- 0.374	- 0.099	0.0000
	CEMEF	- 0.898	- 0.366	- 0.379	- 0.100	0.0000
	Compiègne	- 0.914	- 0.369	- 0.385	- 0.101	0.0000
	Provence I	- 0.891	- 0.365	- 0.376	- 0.099	0.0000
	Provence II	- 0.894	- 0.364	- 0.378	- 0.100	0.0000
5	Este trabajo	35.43	60.78	30.51	3.573	0.0553
	Liège	36.21	62.27	31.49	4.266	0.0560
	INSA	35.52	61.09	30.81	3.650	0.0545
	CEMEF	35.47	61.10	30.69	3.602	0.0545
	Compiègne	35.43	61.33	30.77	3.654	0.0544
	Provence I	35.49	61.06	30.68	3.613	0.0545
	Provence II	35.47	61.12	30.70	3.619	0.0544

Tabla I. 48 elementos Q8. Comparación de resultados

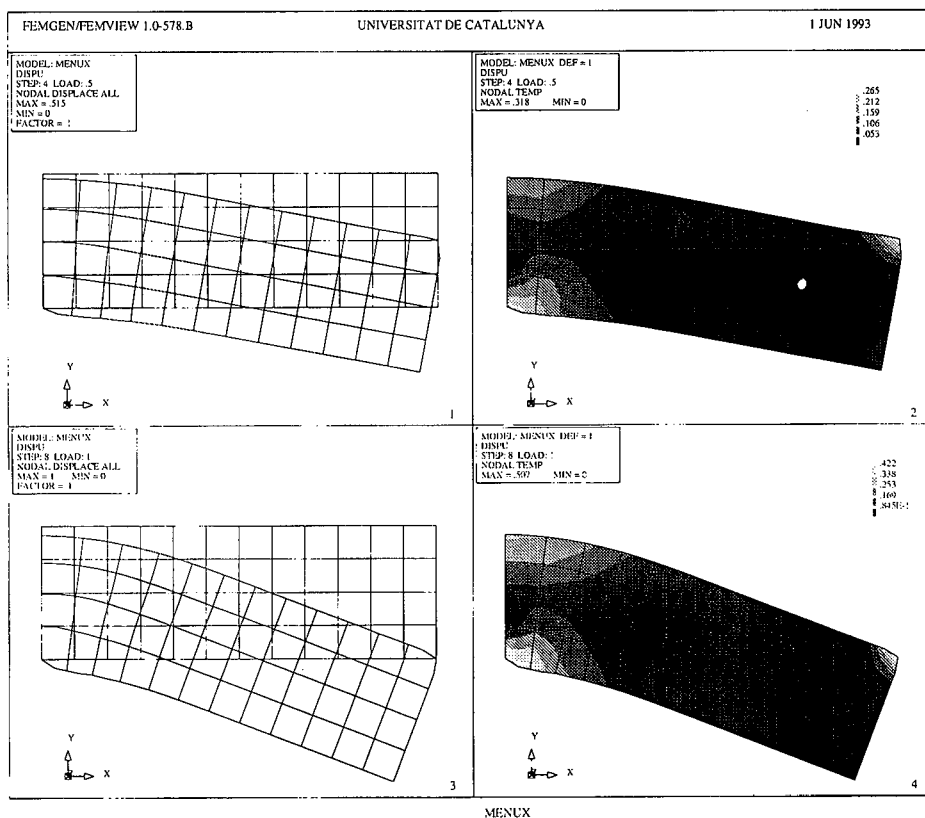


Figura 2. Deformadas de la viga y contornos de  $\dot{\epsilon}_p$  para  $u = 0.5h$  y  $u = h$

**Conformado de un disco cilíndrico**

En este problema se modela el aplastamiento de un disco axilsimétrico<sup>6,19</sup>. El disco se modela mediante 100 elementos cuadriláteros con presión constante. Se ha impedido el deslizamiento tangencial en la interfase impidiendo los desplazamientos horizontales del cilindro en la interfase. Los datos del problema se muestran en la Figura 3, en donde se muestra la malla deformada.

$$R = 6, h = 1,5, E = 1\ 000, \nu = 0,3, \sigma_y = 1, H = 3$$

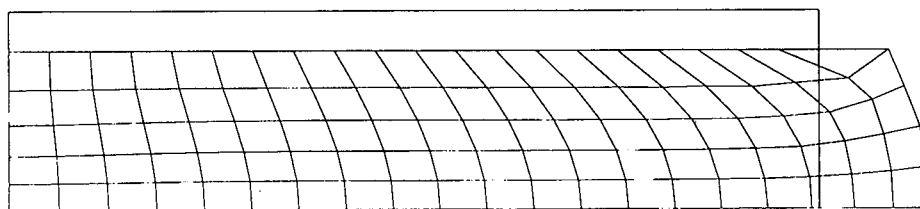


Figura 3. Deformada del cilindro

Los resultados muestran muy buena concordancia con los de referencia, como se ve en la Figura 4.

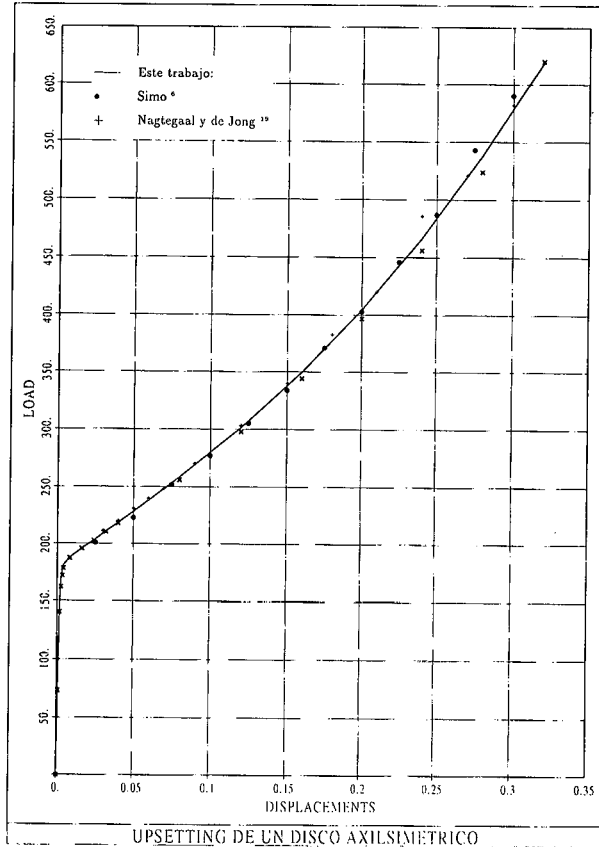


Figura 4. Carga versus desplazamiento

### Test OSU: estiramiento de una lámina circular con un punzón hemisférico

Este problema<sup>20</sup> consiste en estudiar, para el caso de estiramiento, la embutición de una lámina circular mediante un punzón hemisférico. La geometría y datos del material se muestran en la Figura 5.

La malla de elementos finitos empleada consiste en catorce elementos en la dirección radial y dos elementos en el espesor. Los nodos corresponden a los propuestos originalmente en el test<sup>20</sup>. Se analizan tres casos: problema sin rozamiento y problemas con rozamiento con coeficiente de fricción  $\mu = 0.15$  y  $\mu = 0.30$ , respectivamente. En todos los casos se comparan los resultados obtenidos mediante las curvas de la carga del punzón en función de su desplazamiento, y también comparando los perfiles de la deformación plástica efectiva equivalente.

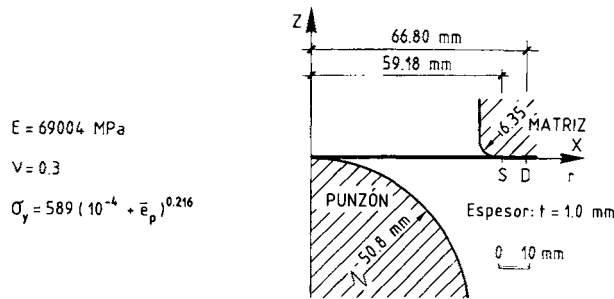


Figura 5. Estiramiento de una placa circular mediante un punzón hemisférico: geometría y propiedades del material

### Interfase no friccional

En este caso las deformaciones plásticas se concentran debajo del polo del punzón, a medida que éste avanza. En consecuencia con el aumento de la deformación plástica efectiva se verifica la disminución de espesor correspondiente.

En la Figura 6 se muestra la evolución de la carga en el punzón en función del avance del mismo, encontrándose una muy buena concordancia con los resultados de referencia debidos a Agelet<sup>21</sup>, Dubois<sup>22</sup> y Ponthot<sup>23</sup>.

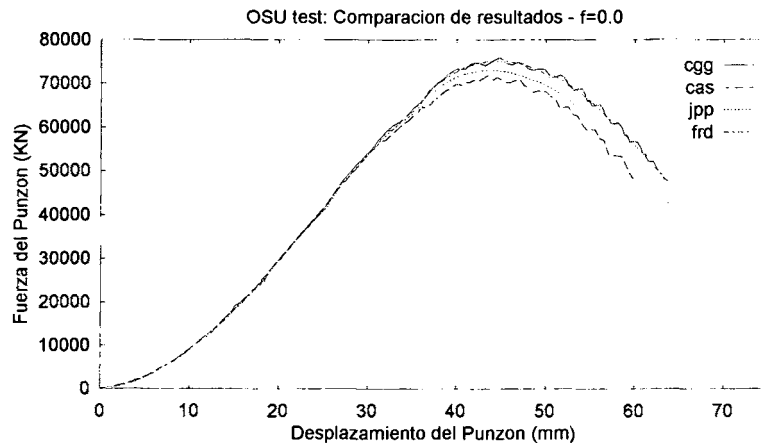


Figura 6. Estiramiento de una placa circular mediante un punzón hemisférico: Carga versus desplazamiento del punzón

Es notable destacar que las curvas obtenidas con formulaciones constitutivas y discretizaciones muy diferentes son prácticamente las mismas hasta una embutición de 35 mm, aproximadamente. En este trabajo se ha continuado embutiendo hasta aproximadamente 60 mm de avance del punzón, lo que permite observar que en la zona del máximo de carga aparecen algunas diferencias entre los resultados comparados. El modelo propuesto compara bien con otros resultados obtenidos con modelo de sólido.

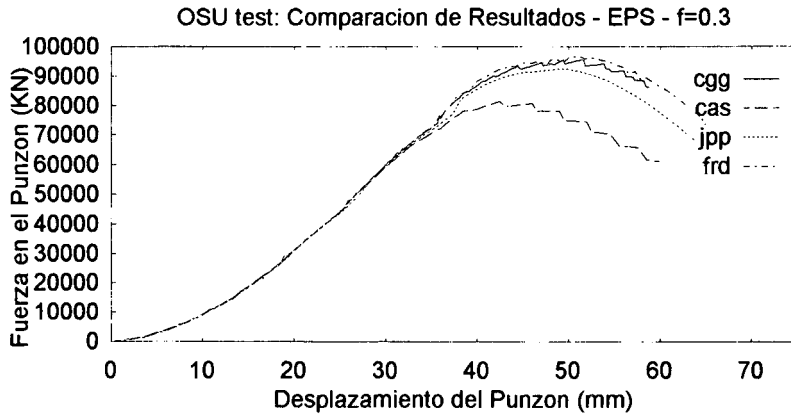


Figura 10. Estiramiento de una placa circular mediante un punzón hemisférico  $\mu = 0.30$ : Carga versus desplazamiento en el punzón

La evolución de los perfiles de deformación plástica efectiva para diferentes avances del punzón se muestra en la Figura 11. En dicha figura puede observarse que el valor máximo de la deformación plástica efectiva se desplaza aún más hacia la matriz que en el caso previo con coeficiente de rozamiento  $\mu = 0.15$ . También la misma figura permite observar que el valor máximo o pico de deformación plástica efectiva aparece mucho más concentrado o localizado que en el caso anterior.

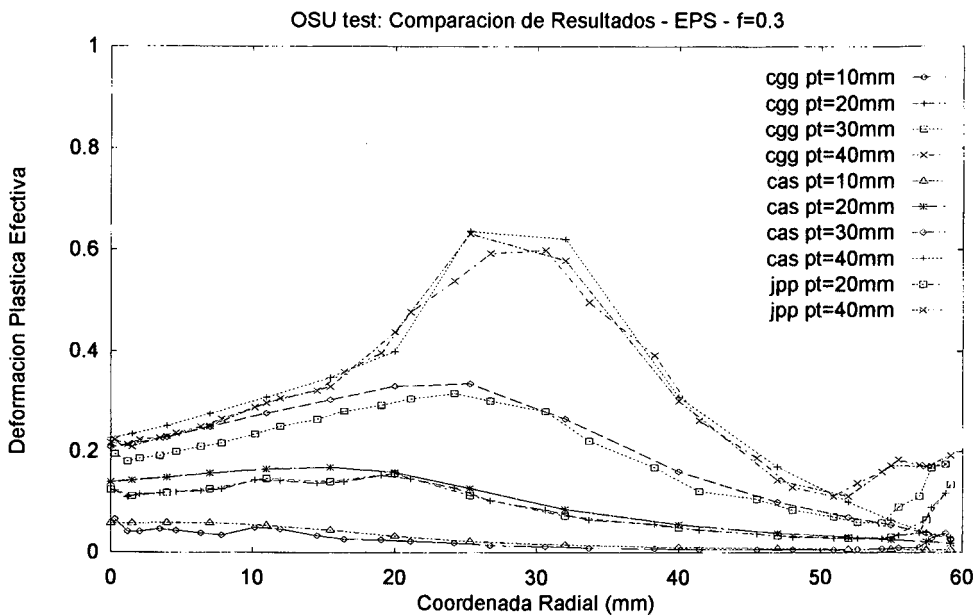


Figura 11. Estiramiento de una placa circular mediante un punzón hemisférico  $\mu = 0.30$ : Evolución de los perfiles de deformación plástica efectiva



### Influencia de la fricción en el resultado del problema

Para ilustrar los cambios cualitativos que se han descrito en los puntos anteriores, en la Figura 12 se muestran la lámina deformada y los contornos de igual deformación plástica efectiva, para los tres casos estudiados, para un avance del punzón de 30 mm. En la misma se confirman las conclusiones extraídas de las curvas que muestran los perfiles de deformación plástica efectiva.

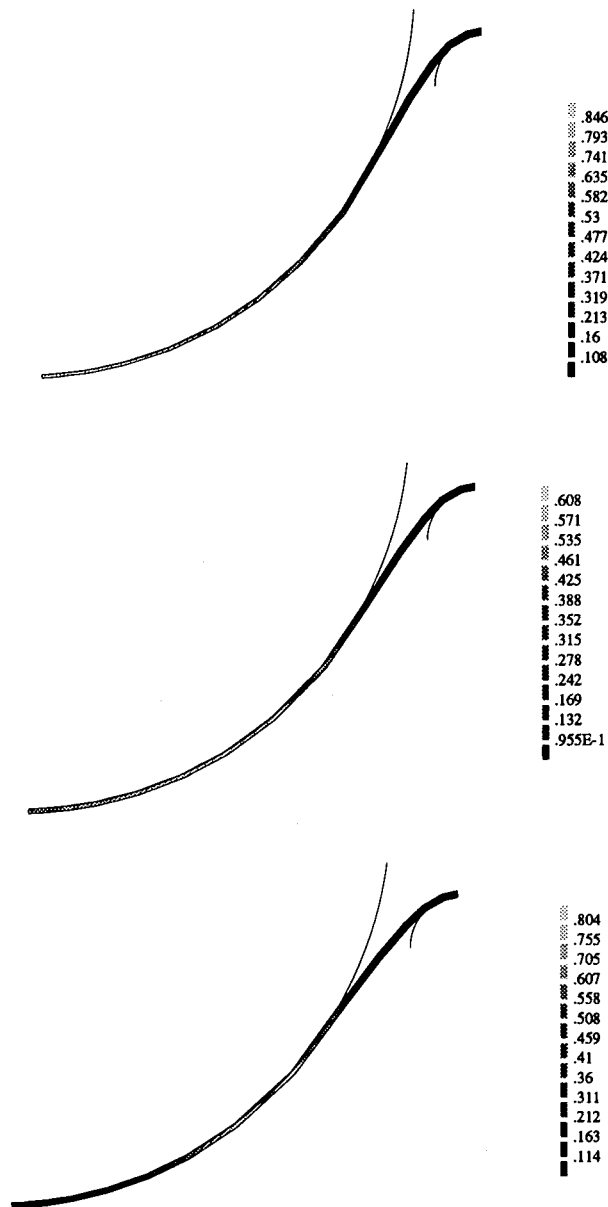


Figura 12. Estiramiento de una lamina circular: deformada y contornos de  $e^p$

Desde el punto de vista cuantitativo puede decirse que el aumento del coeficiente de rozamiento conduce a un aumento de la rigidez de la estructura, como puede observarse en la Figura 13 en la que se comparan las curvas carga versus desplazamiento del punzón para  $\mu = 0$ ,  $\mu = 0.15$  y  $\mu = 0.30$ .

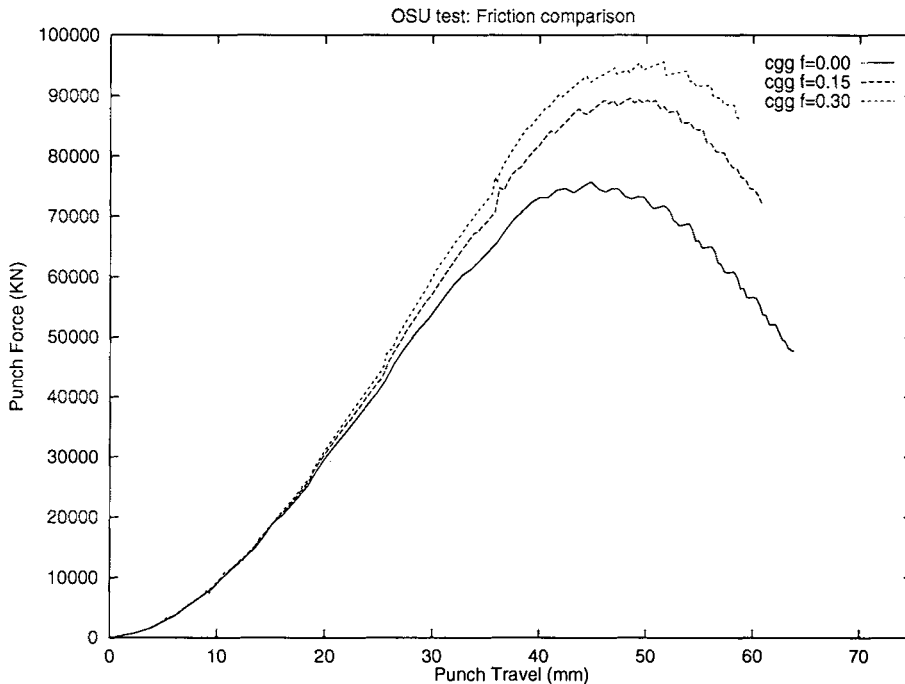


Figura 13. Influencia del rozamiento en la respuesta del problema: Comparación de las curvas carga versus desplazamiento del punzón

Como puede observarse en la Figura 13, la respuesta se rigidiza a medida que aumenta el rozamiento. Este fenómeno puede explicarse teniendo en cuenta que para la interfase sin fricción toda la lámina se encuentra traccionada desde el eje de simetría hasta la matriz. En cambio, en presencia del rozamiento la longitud *activa* disminuye, ya que la tracción en la lámina se hace menor debido a las fuerzas tangenciales en la interfase, al respecto pueden verse las Figuras 7, 8 y 11 para este problema. Por otra parte, como surge de estas últimas figuras, el rozamiento provoca que los perfiles de deformación plástica efectiva resulten mucho más concentrados, o si se quiere, hacen que el problema *localize* con mayor facilidad.

Los resultados obtenidos para las diferentes interfases estudiadas pueden considerarse muy buenos, ya que se ha encontrado una excelente concordancia cualitativa y cuantitativa entre los resultados de este trabajo y los de referencia, especialmente en lo que se refiere a la comparación de las curvas de carga versus desplazamiento del punzón. Los perfiles de deformación plástica efectiva también ajustan muy bien desde el punto de vista cualitativo, y ajustan, para el caso más desfavorable  $\mu = 0$  con un error inferior al 10%, que se hace prácticamente nulo para el caso de  $\mu = 0.3$ .

El esfuerzo computacional necesario para obtener estos resultados puede considerarse excelente, ya que el orden de los tiempos de CPU es semejante a los indicados por Agelet<sup>21</sup> utilizando la formulación de flujo.

Cabe destacar que los análisis realizados muestran que es más complejo y costoso resolver los diferentes casos a medida que se incrementa el coeficiente de rozamiento. Este aspecto, que hasta puede parecer intuitivo, hace deseable que el tema se investigue con mayor profundidad en trabajos posteriores, con el fin de mejorar los algoritmos de contacto y rozamiento, que no han sido el objetivo primordial en este trabajo.

Es interesante destacar que el problema sin rozamiento se ha procesado en un ordenador personal compatible con un procesador DX486 a 33 Mhz en menos de 1 minuto. Este dato ilustra acerca de la posibilidad concreta de realizar aplicaciones industriales en problemas 2D con una inversión inicial muy baja.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado la implementación numérica del modelo propuesto para metales en la parte I<sup>1</sup> del mismo. Para ello se emplea un algoritmo predictor elástico-corrector plástico.

La actualización multiplicativa del tensor de Finger surge naturalmente de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación. Esta descomposición no se calcula en forma explícita ahorrando así costosas operaciones a nivel de punto de integración de los elementos.

La expresión aditiva que se obtiene para el corrector plástico es consecuencia de la integración objetiva de la regla de flujo, que tiene lugar en la configuración original, y de la cinemática multiplicativa. Tampoco en este caso es necesario conocer explícitamente las componentes del tensor  $\mathbf{F}$ . Una consecuencia directa de este resultado es que pueden extenderse al problema con grandes deformaciones los algoritmos de integración de la ecuación constitutiva disponibles para el problema con pequeñas deformaciones. En este trabajo se emplea el algoritmo de retorno radial debido a su gran simplicidad.

En resumen, se obtiene un esquema numérico muy semejante al del problema con pequeñas deformaciones. La diferencia más notoria, además del empleo de tensores no lineales y de la actualización de la geometría, es la actualización *multiplicativa* del tensor de Finger, en lugar de la aditiva propia del problema con pequeñas deformaciones.

Estos resultados se reflejan en la implementación computacional que resulta lo suficientemente sencilla y general para programarla fácilmente en cualquier código de no lineal de elementos finitos de propósito general. Las operaciones necesarias a nivel de puntos de integración son relativamente pocas y el espacio de memoria necesario para almacenar las variables internas es exactamente el mismo que en el problema correspondiente en el caso de pequeñas deformaciones.

El tratamiento de la incompresibilidad se ha tenido en cuenta mediante el conocido elemento mixto Q1/P0, y en el cuerpo del trabajo se discute a su implementación numérica. En este caso la novedad consiste en la elección del argumento de la energía de deformación volumétrica.

La matriz de rigidez resultante es más compleja que la del problema con pequeñas deformaciones, o que la empleada en un código *hipoelástico*, debido a la presencia del término asociado a la presión, y especialmente a la mayor complejidad de la matriz algorítmica producida por la no linealidad geométrica.

La herramienta numérica resultante es robusta y confiable, y puede ser aplicada a la simulación de procesos industriales de conformado de metales tal como se ha ilustrado mediante los ejemplos de aplicación.

### AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), y a la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, las facilidades y el apoyo económico recibido durante la elaboración de este trabajo.

### REFERENCIAS

1. C. García Garino y J. Oliver: "Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones. Parte I: Formulación Teórica y aplicación a metales", *Revista Internacional de Métodos Numéricos y sus aplicaciones en Ingeniería*, Vol. 11, 1, pp. 105-122, (1995).
2. T.J.R. Hughes, "Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate-Independent Deviatoric Plasticity", en *Theoretical Foundations for large-scale Computations for Nonlinear Material Behaviour*, S.Nemat-Nasser, R.J.Asaro and G.A.Hegemier editores, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Holanda, (1984).
3. E.H. Lee, "Elastic-Plastic deformation at finite strains", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, pp. 1-6, (1969).
4. J.C. Simo y M. Ortiz, "A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 49, pp. 221-245, (1985).
5. J.C. Simo, "A Framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I Continuum Formulation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 66, pp. 199-219, (1988).
6. J.C. Simo, "A Framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part II", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 68, pp. 1-31, (1988).
7. J.C. Simo y T.J.R. Hughes, "General Return Mapping Algorithms for rate-independent Plasticity, en " *Constitutive Equations for Engineering Materials: Theory and Applications*", C.S. Desai Editor., Elsevier, (1987).
8. C. García Garino, " *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*", Tesis Doctoral, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, (1993).
9. Y. Pinto Y, " *Contact et frottement en grandes deformations plastiques. Application au serre-flan en emboutissage*", Tesis Doctoral, Universidad de Aix-en-Provence, (1990).
10. J.C. Gelin, "Application of implicit methods for the analysis of damage with temperature effects in large strain plasticity problems", en " *Numerical Methods for Nonlinear Problems*", D.R.J. Owen et al editores, Pineridge Press, (1986).

11. L.E. Malvern, "*Introduccion to Mechanics of a Continuous Medium*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1969).
12. Washizu K., "*Variational Methods in elasticity and plasticity*", Second edition, Pergamon Press, (1975).
13. K. Panoskaltzi Papouloia, "*Aspects of the Nonlinear Analysis of Elastomeric Seismic Isolators*", Ph D. Thesis, University of California at Berkeley, Febrero 1992.
14. J.C. Simo, "On a fully three-dimensional finite strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects", *Comp. Meth. in Applied Mech Engng.*, Vol. **60**, p. 153, (1987).
15. J.C. Simo, R.L. Taylor y K.S. Pister, "Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elastoplasticity", *Comp. Meth. in Applied Mech Engng.*, Vol. **51/52**, p. 177, (1985) .
16. J.C. Nagtegaal, D.M. Parks y J.R. Rice, "On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range", *Comp. Meth. in Applied Mech. Engng.*, Vol. **4**, p. 153, (1974).
17. M. El Mouatassim, "*Modelisation en Grandes Transformations des solides massifs par elements finis*", Thèse de Doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, (1989) .
18. H.J. Braudel, M. Abouaf y J.L. Chenot, " An implicit incrementally objective formulation for the solution of Elastoplastic problems at finite strain by the F.E.M. ", *Computers and Structures*, Vol. **24**, pp. 825-843, (1986).
19. J.C. Nagtegaal y J.E. de Jong, "Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **17**, pp. 15-41, (1981) .
20. J.K. Lee, R. Wagoner y E. Nakamachi, "A benchmark test for sheet metal forming analysis", Technical report, Ohio State University, (1990).
21. C. Agelet de Saracibar, "*Análisis por el método de los elementos finitos de procesos de conformado de láminas metálicas*", Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, (1990).
22. Dubois F., Comunicación Personal, (1992).
23. J.Ph. Ponthot, "*Traitement Unifie de la Mécanique des Milieux Continus Solides en Grandes Transformations per la Méthode des Elements Finis*", Tesis Doctoral, LTAS, Universidad de Lieja, (1995).
24. L.J. Sluys, "*Wave propagation, localisation and dispersion in softening*", Ph.D. Thesis, Delft University, (1992).