EULER, REY PASTOR Y LA SUMABILIDAD DE SERIES[1]

Luis Español González
Luis.espanol@unirioja.es

Emilio Fernández Moral
Eferna35@gmail.com

0.- Introducción.

Hacia 1928, cuando alternaba entre las capitales argentina y española, Rey Pastor[2] escribió una monografía titulada *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, publicada en 1931 por la Universidad de Buenos Aires (REY, 1931). Como nos referiremos a esta obra con frecuencia, le asignaremos el nombre abreviado de *Talcys*. El objetivo de la obra, moderna en su época, era dar un tratamiento unificado a los procesos de sumación generalizada de series e integrales divergentes, planteando así una línea de investigación en Buenos Aires y Madrid. Rey Pastor proponía un estudio correlativo de series e integrales, en el que no acertó del todo, pero aquí nos referiremos sólo a las series.

Rey Pastor se formó en Zaragoza, Madrid, Berlín y Gotinga, y después de ganar brillantemente dos oposiciones empezó a ejercer como catedrático de análisis matemático en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central (Madrid) en 1914. Alejado de las enseñanzas del doctorado por razones de escalafón, tuvo oportunidad de dirigir investigación, en particular tesis doctorales, en el Laboratorio y Seminario Matemático que la Junta para Ampliación de Estudios (JAE) puso en marcha en 1915. Lo hizo en tres tipos de temas que le fueron marcados por las circunstancias de su iniciación a la investigación matemática. La geometría fue el tema de su tesis doctoral en la línea de Torroja. Fijarse en la historia de las matemáticas formaba parte del trasfondo ideológico del momento, demostrando el secular atraso científico

1 Este trabajo surge de la información acumulada para realizar la edición crítica (REY, 2006) de la obra de Julio Rey Pastor *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación* (REY, 1931).

2 Julio Rey Pastor (Logroño 1888 - Buenos Aires 1962) vivió en Buenos Aires, sin perder el contacto con España, desde 1921 (véase RÍOS; SANTALÓ; BALANZAT, 1979).

español y proclamando la necesidad de una renovación científica acorde con los niveles europeos. Por su parte, se interesó en el análisis complejo al preparar las oposiciones a la cátedra, intentando mejorar y dar rigor a los programas. Para su trabajo en estos tres temas aprovechó los dos cursos pasados en universidades alemanas (ESPAÑOL, 2006b).

Superada la primera etapa de su actividad investigadora, hacia 1918 comenzó a diseñar una nueva línea de trabajo que parece responder ya a su gusto más personal, línea que asomó en un trabajo de 1919 (REY, 1919) pero que no se concretó hasta la segunda mitad de la década siguiente, una vez transcurridos los primeros años de asentamiento en Buenos Aires. Ésta es la línea de *Talcys*, en la que empezó a dar cursos en 1925/26 y a publicar artículos en 1928, manteniendo una actividad intensa hasta 1936. Rey Pastor elaboró una teoría general de sumación de series (e integrales) divergentes que, tomando como base una definición de suma generalizada inspirada directamente en Euler, englobaba los diversos métodos existentes de cálculo efectivo, incluido uno debido a él mismo[3].

En la sección 1 daremos una reseña del origen problemático de la sumación de series divergentes y de las soluciones planteadas a partir del argumento probabilístico de Leibniz. Luego, en la sección 2, expondremos la definición de suma que dio Euler, necesariamente imprecisa por el tiempo en que fue dada, por lo que fue criticada en torno a 1900, cuando ya los métodos particulares de sumación efectiva proliferaban, por autores como Pringsheim o Borel, y más tarde también por Knopp, debido a la falta de unicidad de la suma propuesta. Finalmente, en la sección 3, veremos cómo, frente a los autores antes citados, Rey Pastor propone una adecuada interpretación de la definición euleriana que salva la unicidad y se muestra eficaz como definición general abstracta.

1.- La suma probabilística.

En las primeras páginas de *Talcys*, como antes en otros escritos (REY, 1916), Rey Pastor hace referencia al origen del problema de las series divergentes[4]. Comenzaremos con una reseña de este origen problemático

[3] Véase ESPAÑOL; SÁNCHEZ, 2001 y ESPAÑOL, 2006a.
[4] Véase PRINGSHEIM; MOLK, 1907: 264-266, en particular la nota 159.

y de las soluciones planteadas a partir del argumento probabilístico de Leibniz.

Desde Euler se designó a menudo a la serie alternada 1 – 1 + 1 – 1 + 1 … como *serie de Leibniz*[5]. La razón de ello era la carta (LEIBNIZ, 1713) que iba a jugar un importante papel en la disputa a que dio lugar la “paradoja no inelegante” encontrada en 1696 por Jacobo Bernoulli[6]: 1 – 1 + 1 – 1 + … = ½ . En dicha carta, Leibniz está contestando a Christian Wolf, a propósito de la contradicción aparente en la aseveración 1 – 1 + 1 – 1 + … = ½ “nuevamente planteada hace poco por Guido Grandi … pues aunque parezca ocurrir infinitas veces 1 – 1 = 0, no es evidente de qué modo a partir de la suma de infinitos ceros puede resultar ½”, y retoma el mismo modo de obtención de J. Bernoulli:

> *“volvamos a la serie de los términos de la progresión geométrica (es la única que necesitamos para nuestra reflexión) cual es $1/(1 + x) = 1 – x + xx – x^3$ + etc. hasta el infinito, o bien $1/(1 + xx) = 1 – xx + x^4 – x^6$ + etc. hasta el infinito, y consideremos lo que sucede si $x = 1$: resulta evidentemente, no sin admiración por parte de quien lo considere, $1/(1 + 1)$, o sea $½ = 1 – 1 + 1 – 1$ + etc. hasta el infinito.”* (LEIBNIZ, 1713: 384).

Leibniz se pronuncia sin restricciones a favor de esta igualdad, desarrollando primero una argumentación geométrica de *continuidad*[7], para terminar dando una “solución del enigma, quizá inesperada, pero ciertamente singular”, que basa en la naturaleza de las series infinitas:

> *“Ciertamente la serie finita 1 – 1 + 1 – 1 + etc. puede presentarse de dos maneras, bien constando de un número par de términos y acabando en – 1, como*
>
> $$1 – 1,\ \text{o}\ 1 – 1 + 1 – 1,\ \text{o}\ 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1,$$
>
> *o hasta donde se quiera llegar, en cuyo caso siempre da 0, o bien constando de un número impar de términos y acabando en + 1 , como*

[5] EULER, 1754: 587, 589. Maria Pastori (1895-1975) la denominó *serie de Grandi* (PASTORI, 1927: 307-310).
[6] La paradoja era que la suma de infinitos números enteros fuera un número racional.
[7] Véase LEIBNIZ, 1713: 384-385; contiene una referencia a la figura 154 al final del volumen.

$$1, \text{ o } 1-1+1, \text{ o } 1-1+1-1+1,$$

o hasta donde se quiera, en cuyo caso da siempre 1. Pero cuando la serie es infinita, 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + etc. *hasta el infinito, de modo que se excede cualquier número* [de términos], *al tiempo que se difumina la naturaleza de ese número se difumina también la asignabilidad de par o impar …*

Y así como quienes escriben sobre estimaciones de azar enseñan que cuando haya que tomar un promedio entre dos cantidades que se presenten en la misma proporción se debe elegir la media aritmética, que es la mitad de su suma, así la naturaleza de las cosas aquí observa la misma ley de justicia*; y por consiguiente, como* 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + etc. *en el caso de número finito par de términos es 0, y en el caso de número finito impar de términos es 1, se sigue que para una multitud de infinitos términos difuminada entre un caso y otro, donde las atribuciones de par o impar se confunden y se tiene la misma proporción de una cosa que de otra, ha de ser* (0 + 1)/2 = ½, *como era propuesto.*

Aunque este género de argumentación pueda verse como más metafísico que matemático, es sin embargo firme: y, por otra parte, el uso de las reglas de la verdadera metafísica *(que va más allá de la nomenclatura de los términos usados) en Matemática, en Análisis, en la misma Geometría, es más frecuente de lo que la gente cree".* (LEIBNIZ, 1713: 386-387).

Tras volver a su primer argumento de continuidad, Leibniz concluye:

"En ocasiones ha de ser no sólo agradable, sino también muy útil para establecer reflexiones exactas acerca del infinito y descubrir más y más las fuentes de una nueva doctrina, que se deduzca lo mismo a partir de la propia naturaleza de las series y del infinito. Al mismo tiempo habrá que cuidar que la nueva ciencia no quede ni en lo más mínimo desacreditada por defender paradojas. Y así, a la objeción de que a partir de ceros, sean cuantos sean, de ningún modo puede resultar algo, no debería responderse distinguiendo entre el caso finito y el infinito, como si la regla resultase engañosa en el infinito; sino que admitida la regla en toda generalidad, debería manifestarse, como aquí se ha hecho, que es su aplicación la que queda entonces suspendida". (LEIBNIZ, 1713: 387).

Daniel Bernoulli, en 1771[8], extendió la regla probabilística de Leibniz para

cualquier serie en que las sumas parciales formasen una sucesión periódica, obteniendo por ejemplo 1 + 0 – 1 + 1 + 0 – 1 + … = (1 + 1 + 0)/3 = ⅔, 1 – 1 + 0 + 1 – 1 + 0 + … = (1 + 0 + 0)/3 = ⅓, anticipando la suma que dará el método de Cesàro.

Laplace en 1812, unos años después de la aparición de la "objeción de Callet" y su revisión por Bossut y Lagrange[9], criticó el modo de razonamiento probabilístico de Leibniz; en la Introducción a la *Teoría analítica de las probabilidades*, y dentro del epígrafe *Ilusiones en la estimación de probabilidades* se lee, en efecto:

"También pongo en la lista de las ilusiones la aplicación que Leibnitz y Daniel Bernoulli han hecho del cálculo de probabilidades a la sumación de series (…) Pero estas series pueden resultar del desarrollo de una infinidad de fracciones distintas, (…) Así la serie más uno, menos uno, más uno, etc.*, puede nacer del desarrollo de una fracción cuyo numerador es la unidad más la variable, y cuyo denominador es este numerador aumentado en el cuadrado de la variable. Suponiendo la variable igual a la unidad, este desarrollo se trueca en la serie propuesta, y la fracción generatriz resulta igual a ⅔; las reglas de las probabilidades darían entonces un resultado falso, lo que demuestra cuán peligroso sería emplear razonamientos semejantes, sobre todo en las Ciencias matemáticas a las que debe distinguir eminentemente el rigor de sus procedimientos".* (LAPLACE, 1812: 3ª ed., CXVIII-CXX).

Y sin embargo, más tarde Fourier deja escrito (FOURIER, 1822: 231):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} &= \left(\text{sen } x-\frac{1}{2}\text{ sen } 2x+\frac{1}{3}\text{ sen } 3x-\text{etc.}\right)\\ &-\left(\text{sen } x-\frac{1}{2^{3}}\text{ sen } 2x+\frac{1}{3^{3}}\text{ sen } 3x-\text{etc.}\right)\\ &-\left(\text{sen } x-\frac{1}{2^{5}}\text{ sen } 2x+\frac{1}{3^{5}}\text{ sen } 3x-\text{etc.}\right)\end{aligned}$$

8 En BERNOULLI, 1771: según PASTORI (1927: 309). Sobre la historia del método de sumación de Cesàro que citamos al final de este párrafo véase (FERRARO, 1999).

9 Véase BOSSUT; LAGRANGE, 1801; trataremos este asunto en la sección siguiente.

$$-\left(\operatorname{sen} x-\frac{1}{2^7}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{3^7}\operatorname{sen} 3x-\text{etc.}\right)$$
$$-\left(\operatorname{sen} x-\frac{1}{2^9}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{3^9}\operatorname{sen} 3x-\text{etc.}\right)$$
$$-\text{etc.}$$

Distinguiendo los coeficientes de sen x, sen 2x, sen 3x, sen 4x, etc., y poniendo en lugar de 1/n – 1/n3 + 1/n5 – 1/n7 + etc. su valor n/ (n2 + 1), se tendrá

$$\frac{1}{2}\pi\frac{e^x-e^{-x}}{e^\pi-e^{-\pi}}=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\frac{1}{1}}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2+\frac{1}{2}}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3+\frac{1}{3}}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{4+\frac{1}{4}}+\text{etc.}$$

donde, para n = 1, está admitiendo sin problemas[10] la igualdad 1 – 1 + 1 – 1 + … = ½ .

Frobenius, cuando generaliza el teorema del límite de Abel en un artículo de 1880 titulado *Sobre la serie de Leibniz*, pone el tema sobre una base más firme demostrando el siguiente teorema[11]:

> *"Si* $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ y $(s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1})/n$ *tiende a un límite finito M cuando n crece indefinidamente, entonces la serie* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ *es convergente para los valores de x entre -1 y 1, y la función así representada tiende al valor límite M cuando x converge a 1 por valores continuamente crecientes".* (FROBERNIUS, 1880: 262).

10 Véase PRINGSHEIM; MOLK, 1907: 265, nota 161. BOREL (1901: 8) excusaba así el presente cálculo de Fourier: "Fourier sabía perfectamente lo que hacía y no corría ningún riesgo de equivocarse". En BROMWICH (1908: 263-264) comenta que de hecho el resultado del cálculo es correcto, ya que el primer coeficiente de la serie de Fourier de senos para la función π / 2 (sinh *x*) / (sinh π) es ½ .

11 Frobenius concede a Leibniz la prioridad en el enunciado (sin prueba) de este teorema (véase FERRARO, 1999: 116). En el capítulo III de *Talcys*, Rey Pastor da dos pruebas de este teorema; la primera (párrafo 100) como caso *m* = 1 de un resultado de comparación entre las que llama sumabilidad (*Cm*) de Cesàro y sumabilidad (*A*) de Abel; la segunda (párrafo 124) en un contexto aún más general.

2.- La suma euleriana. Objeciones.

Cuando Rey Pastor introduce en *Talcys* (REY, 1931: 9) su definición general de suma de una serie, que luego veremos, escribe en una nota a pie de página (de la que mantenemos la cursiva) que está otorgando "el significado que debe darse a la definición de Euler: *Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur."*

Esta definición de Euler, cuya procedencia no fue indicada por Rey Pastor, aparece textual en una carta a Goldbach fechada el 7 de agosto de 1745, en la que Euler comienza comentando "una pequeña disputa sobre las series divergentes" que mantiene desde hace algún tiempo con Nicolás Bernoulli y en la que su posición es que "cada una de dichas series debe tener un *valor* determinado", al que en principio no convendría la palabra *suma* en su connotación habitual para las series convergentes. Citamos el fragmento de dicha carta que viene al caso:

> *"Pero como una tal serie se origina del desarrollo de una expresión finita, he dado esta nueva definición de suma de una tal serie:*
> Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur.[12]
> *El Sr. Bernoulli aprueba completamente esta definición, aunque aún duda de si no podría originarse exactamente la misma serie divergente del desarrollo de distintas expresiones finitas, con lo cual según esta definición debieran asignársele valores diferentes. Sobre esto no ha dado ningún ejemplo, pero yo creo que es seguro que nunca se va a poder originar la misma serie del desarrollo de dos expresiones finitas verdaderamente distintas. De donde se sigue indudablemente que una serie, ya sea divergente o convergente, debe tener un determinado valor o suma".* (FUSS, 1843: vol. I, Lettre LXXXIII, 324).

Prosigue su carta Euler mostrando el ejemplo de la serie 1 – 1 + 2 – 6 + 24 – 120 + etc.[13], a la que hace aparecer como valor del área $\int_0^x \frac{dt}{1-\log t}$ para *x*

12 *Sic.*; la carta está escrita en alemán.

13 Es decir, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!$: la *serie hipergeométrica de Wallis*, según la denominación de EULER (1754: 594).

= 1, cuando la integral se calcula recurrentemente por partes[14], y de la gráfica deduce que el valor de la serie es algo mayor que ½ . A continuación, comoquiera que la misma serie resulta, para x = 1, del desarrollo en fracción continua

$$1-1x+2x^2-6x^3+24x^4-120x^5+720x^6-5040x^7+\text{etc.}$$
$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\text{etc.},}}}}}$$

Euler comunica a Goldbach el valor aproximado s = 0.5963475922 que ha obtenido a partir de ello para la *suma* de la serie dada[15].

En lo que se refiere a la discusión con Nicolás Bernoulli en la que primeramente vería la luz la definición de Euler, se conservan dos cartas del segundo al primero[16] de las que presentamos sendos extractos:

> *"… no puedo convencerme de lo que estableces al dar a una serie divergente, a la que aún continuada hasta el infinito siempre le faltará algo, exactamente el valor de la cantidad desarrollada en serie. Pues por ejemplo 1/(1 – x) no es = 1 + xx + x^3 + … + x^∞ , sino = 1 + xx + x^3 + … + x^∞ + $x^{\infty+1}$/(1 – x)".* (FUSS, 1843: vol. II, 701-702).
>
> *"Por lo tanto creo que debe responderse que las sumaciones ficticias de tales series divergentes no llevarán a error, bien cuando por serie divergente deba entenderse cierta cantidad desarrollada en serie* [quantitas aliqua in seriem resoluta] *o bien cuando, sin consideración de las cantidades de donde nacen las series divergentes, varias series de este tipo aparezcan en un cálculo y los restos infinitos omitidos en la sumación se cancelen mutuamente. Pero en otros casos las sumaciones de este tipo podrán llevar fácilmente a error. Por ejemplo, de que la serie recurrente 1 + 1 + 2 + 3 + 5*

[14] Véase también EULER (1754: 604).

[15] Véase también EULER (1754: 607-611), donde la aproximación final es s = 0.5963473621372, y FUSS y FUSS, 1862: vol. 1, 547: esta referencia la cita y desarrolla Bromwich en (BROMWICH, 1908: 266-267).

[16] De 6 de abril y 29 de noviembre de 1743: FUSS, 1843: vol. II, 701-707 y 708-713; citadas por Pringsheim en PRINGSHEIM; MOLK (1907: 262, nota].

> *+ 8 + 13 + etc. esté formada a partir de la cantidad 1/(1 – 1 – 1) = – 1 y la serie geométrica 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + etc. a partir de la cantidad 1/(1 – 2) = – 1, no debe concluirse que estas dos series sean iguales ya que, salvo el primero, cada término de ésta es mayor que cada término de aquella, siendo la diferencia más y más creciente, aunque las diferencias constituyan la serie 0 + 1 + 2 + 5 + 11 + 24 + etc. nacida de la cantidad (1 – 1)/(1 – 3 + 1 + 2) = 0. También resulta absurdo decir que la serie recurrente 1 + 3 + 8 + 19 + 43 + etc. es igual a su solo primer término, el todo igual a una mínima parte, no obstante estar formada aquella a partir de la cantidad 1/(1 – 3 + 1 + 2) = 1".* (FUSS, 1843: vol. II, 709-710)[17].

El primer ejemplo de una misma serie divergente que, originada a partir del "desarrollo de expresiones finitas distintas", admitía diversos valores, lo presentó J. Fr. Callet, autor bien conocido por sus importantes ediciones de *Tablas de logaritmos*, en una memoria presentada a la Clase de Ciencias Matemáticas y Físicas del Instituto de Francia y cuya revisión por Bossut y Lagrange se publicó en 1801. Callet (BOSSUT; LAGRANGE, 1801: 4-5) hacía aparecer la serie 1 – 1 + 1 – 1 + … primeramente por falsa división de la fracción 1/(1 + 1), pero a continuación por falsa división de (1 + 1)/(1 + 1 + 1) y, en general, de cualquier fracción m/n comprendida entre 0 y 1;

> *"De donde se sigue que no se puede decir que la suma de la serie 1 – 1 + 1 – 1 + etc. es más bien ½ que ⅔, o en general que* m/n; *lo que pone en defecto el principio adelantado por Daniel Bernoulli".* (BOSSUT; LAGRANGE, 1801: 5).

Bossut y Lagrange daban a la objeción de Callet la forma, más adecuada, de que a partir del desarrollo en potencias de x de la fracción, para $n > m$,

$$\text{“}\ \frac{1+x+x^2+\text{etc.}+x^{m-1}}{1+x+x^2+\text{etc.}+x^{n-1}}=1-x^m+x^n-x^{m+n}+x^{2n}-x^{m+2n}+\text{etc.},$$

esta serie se convierte en 1 – 1 + 1 – 1 etc. cuando x = 1; pero si se ordena

[17] En BROMWICH, 1908: 266; 2ª ed., 322, se da la referencia (FUSS; FUSS, 1862: vol. 1, 536) para la objeción de N. Bernoulli que Euler comunicaba a Goldbach, con un planteamiento en cierto modo inverso al de esta última cita. La definición euleriana se vio publicada después en EULER (1754: 593) y EULER (1755: § 111 (ed. Springer, 61)).

el cociente según las potencias de x, supliendo las potencias que faltan por términos multiplicados por cero, y es a continuación cuando se hace x=1, se encontrará que está compuesta de periodos de n términos tales como 1,0,0 … -1,0,0,0 …; de suerte que sumando sucesivamente los términos de la serie, estas sumas formarán periodos de n términos tales como 1,1,1 … y 0,0,0 etc. Así, según la regla de Bernoulli, la suma media será (1 + 1 + 1+…)/n = m/n, *como resulta de la fracción propuesta haciendo en ella x=1.*

Aunque se pueda de esta manera justificar la regla de Bernoulli, hay que confesar que el principio del que ella depende es demasiado precario como para que pueda servir a establecerla sólidamente". (BOSSUT Y LAGRANGE, 1801: 7).

Como explicaba Maria Pastori,

"Lagrange hace aquello que en el análisis moderno se llama una diluizione non uniforme. *Como habíamos visto, también DANIEL BERNOULLI había diluido no uniformemente la serie de GRANDI obteniendo así valores distintos de ½. En su lugar, una dilución uniforme como la siguiente:*

$$1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + \dots$$

no altera la suma *de la serie".* (PASTORI, 1927: 310).

Édouard Le Roy, en la parte final de su extensa memoria (LE ROY, 1900) *Sobre las series divergentes y las funciones definidas por un desarrollo de Taylor*, llegaba a precisar así la definición de Euler:

"Voy a asociar a la serie numérica divergente $\sum_0^\infty \alpha_n$ *la serie entera* $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$. *Supongamos ante todo que esta serie tenga radio de convergencia finito. Sea f(z) la función que define. Admitamos, para fijar ideas, que f(z) exista en todo el plano y sea holomorfa salvo en puntos singulares aislados. A la serie numérica dada le hago corresponder el valor f(1), único o no según que f(z) sea uniforme o no, finito o no según que z = 1 sea o no un punto singular de f(z) (puede ocurrir que f(1) sea finito aunque z = 1 sea un punto singular). Hecho lo cual, digo que la serie es* sumable *y* que su suma es f(1)*".* (LE ROY, 1900: 410).

Rey Pastor adopta, en el artículo (REY, 1930) que presentó en el ICM de Bolonia de 1928, y también en *Talcys*, esta misma interpretación de Le Roy, concretamente (REY, 1931: 9): *Suma de una serie* $\sum u_r$ *es el valor que toma en el punto t = 1 la función generatriz definida por la serie* $\sum u_r t^r$, como el significado que debe darse a la definición de Euler, y la denomina *definición euleriana*[18]. Más explícitamente, en 1933 explicaba que la definición de Euler es suficientemente vaga como para poder interpretarla de este modo:

"Dado un desarrollo en serie $\sum a_n x^n$ *de una expresión f(x) (combinación en número finito de operaciones elementales), suma de la serie numérica* $\sum a_n h^n$ *es el valor f(h). Sustitúyase el rudimentario concepto de función analítica de Euler por el actual, y se tiene una definición perfectamente clara".* (REY, 1933: 217).

Al referirse en *Talcys* a las objeciones anteriormente señaladas, Rey Pastor lo hace invocando a los autores más recientes (REY, 1931: 9): "Esta definición de Euler ha sido rotundamente rechazada por Borel, Pringsheim, Knopp, etc." Rey Pastor recoge, en particular, esta cita de Knopp[19] a propósito de la igualdad 1 – 1 + 1 – 1 + … = ½: "la misma serie podría proceder de otras expresiones analíticas totalmente distintas y se obtendría otro valor, por ejemplo:

$$\frac{1-t^2}{1-t^3} = \frac{1+t}{1+t+t^2} = 1 - t^2 + t^3 - t^5 + t^6 - t^8 + \dots$$

que para $t = 1$ vale ⅔". Rey Pastor se enfrenta en *Talcys* a estos objetores reproduciendo casi textualmente, y ampliando, el comienzo de su comunicación (REY, 1930). Unos años después, en 1933, escribía:

"Como fundador de la teoría moderna de la convergencia puede considerarse a CESÀRO; como propulsor a BOREL, como precursor a EULER, que en este problema, como en tantos otros, vio más lejos que sus propios

18 Afirmaba además: "No es restringir la generalidad el dar a *t* precisamente el valor 1, pues por un cambio de variable $t = t'/a$ transformamos el punto $a \neq 0$ en el punto 1".

19 *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 2te Auf., 1924, pág. 442 (*sic*). La página 442 corresponde a la primera edición del libro (KNOPP, 1922) de Konrad Knopp. En la segunda edición alemana, que se tradujo al inglés en 1928, la cita aparece en la página 458. El resto de nuestras referencias a esta obra remiten a la última versión inglesa, (KNOPP, 1951). Rey Pastor llegó a disponer de la tercera edición alemana, Berlín 1931, antes de la aparición impresa de *Talcys*.

sucesores ABEL y CAUCHY. Mientras éstos atendían exclusivamente a la idea de aproximación numérica, *y basaron la teoría de los algoritmos indefinidos en el concepto de error indefinidamente pequeño, EULER se situaba en un punto de vista* funcional, *que al cabo del tiempo había de predominar sobre aquel".* (REY, 1933: 191)[20].

Trataremos de completar a continuación el contexto de la expresión "rotundo rechazo de la definición euleriana" que utiliza Rey Pastor, con citas pertinentes de Pringsheim, Borel y Knopp[21]. Estos autores toman concretamente el ejemplo de la serie de Leibniz, y critican una frase de EULER (1754) sacada de contexto que ciertamente no resume el pensamiento de Euler sobre las series divergentes[22]:

"Pues si en un cálculo llego a esta serie 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + etc. y en su lugar sustituyo ½, nadie podrá imputarme en justicia un error, y en cambio a nadie dejaría de saltarle a la vista si en lugar de la serie pusiera otro número cualquiera". (EULER, 1754: 593; BARBEAU; LEAH, 1976: 148).

Pringsheim, en su artículo *Series infinitas* para la Enciclopedia Teubner, escribía:

"Así, por ejemplo, a partir de la fórmula $\frac{1}{1+x}=\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}(-1)^{\nu}x^{\nu}$, *donde la serie es convergente para* $|x|<1$, *L. Euler concluye, para* $x=1$, *que se tiene* $\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}(-1)^{\nu}=\frac{1}{2}$.

Pero se tiene también, para $|x|<1$,

(a) $$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}(x^{\nu p}-x^{\nu p+1})=(1-x)\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}x^{\nu p}=\frac{1}{1+x+\ldots+x^{p-1}},$$

(b) $$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}(-1)^{\nu}x^{\nu+(-1)^{\nu}}=(x-1)\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}x^{2\nu}=-\frac{1}{1+x},$$

(c) $$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}(-1)^{\nu}x^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}x^{\nu}-\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}x^{\nu}=0;$$

[20] Sobre la historia de la suma de Cesàro véase FERRARO (1999).
[21] Véase también BROMWICH (1908: 261-267) y HARDY (1949: capítulo 1 y notas).
[22] Véase la nota 68 de A. Durán en EULER (1748: 109-110).

el símbolo [ν/2] representa el mayor entero contenido en ν/2. Cada una de las tres series de las que se acaba de escribir la suma reduciéndose, para x = 1, a la serie alternada

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{2\nu}+(-1)^{2\nu+1}+\ldots,$$

la suma de esta última serie podría ser 1/p , -½ o cero tan legítimamente como ½. Es pues evidente que la nota de L. Euler *según la cual, cuando* un cálculo cualquiera *haya conducido a la serie alternada*

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{2\nu}+(-1)^{2\nu+1}+\ldots,$$

se puede sustituir su suma $\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}(-1)^{\nu}$ *por ½, contiene una afirmación errónea incluso de principio y que no reposa en ninguna base analítica".* (PRINGSHEIM; MOLK, 1907: 263-265).

Borel, en la primera edición de las *Lecciones sobre las series divergentes* (BOREL, 1901: 4-8) atenúa[23] la anterior apreciación de Pringsheim; tras presentar una relación histórica de los trabajos con la serie de Leibniz desde Jacobo Bernoulli (Euler, objeción de Callet, Lagrange, ejemplos (b) y (c) de Pringsheim) añade:

"Sería fácil multiplicar y variar estos ejemplos; ¿hay que concluir de ello, con Pringsheim, que la afirmación de Euler está desprovista de todo valor y debe ser rechazada completamente? No lo creemos así. Importa, en efecto, subrayar que los antiguos geómetras no tenían costumbre de construir artificialmente expresiones analíticas complicadas para probar esta o aquella opinión; se contentaban habitualmente con operar sobre las expresiones que se les presentaban naturalmente en el curso de sus investigaciones.

Debe sobrentenderse pues expresamente, en la afirmación de Euler que, si se llega a la serie *1 – 1 + 1 – 1 + … (debiendo tener en cuenta, desde luego, las observaciones recordadas antes de Lagrange, respecto de series que es natural considerar como incompletas, y completarlas mediante términos nulos…)* por no importa qué cálculo, se puede sin vacilación

[23] Véase la (temporalmente posterior) nota 162 de Molk en PRINGSHEIM; MOLK (1907: 265).

reemplazarla por ½, *mientras se trate de cálculos que uno se haya visto conducido a hacer de una manera natural, y no de expresiones construidas a propósito para poner la regla en defecto. Por tanto, para probar que la afirmación de Euler es falsa, colocándose en el punto de vista de Euler, habría que proporcionar el ejemplo de un geómetra que,* sin ninguna preocupación con respecto a las series divergentes y a la legitimidad de su empleo *hubiera encontrado, en el transcurso de un cálculo cuyo objetivo fuera una investigación de orden totalmente diferente, una serie tal como la última anterior, para la cual la regla de Euler quedase en defecto.*

En tanto no se proporcione un tal ejemplo, podrá decirse que esa regla es exacta, desde el punto de vista práctico y experimental". (BOREL, 1901: 6-8).

Rey Pastor criticaba a Borel, en su comunicación al congreso de Bolonia:

"Esta falta de premeditación por parte del calculista que parece exigir el insigne analista francés para la validez de la definición euleriana, hace depender la suma, no ya de la coordinación de los términos con la serie natural, sino de un factor subjetivo, inadmisible en una definición matemática. Además, esos mismos ejemplos, malintencionadamente preparados, pueden presentarse en otros problemas, propuestos con absoluta ingenuidad". (REY, 1930: 335, nota 2).

Y en *Talcys* decía (REY, 1931: 10) que, para valorar la clásica objeción de la unicidad, "es preciso ante todo recordar que cada serie está definida por una función u_n del índice; dar una serie no sólo es definir un *conjunto* de números, sino una *coordinación* de un conjunto con la sucesión natural. Por tanto, la alteración del orden, la asociación, la intercalación de ceros, producen series distintas, que sólo en ciertos casos tienen sumas iguales". Como ejemplo, determinaba que la suma de la serie numérica 1 + 0 – 1 + 1 + 0 – 1 + 1 + 0 – 1 + … vale ⅔ por todos los métodos (como ya lo había hecho notar Lagrange).

Pero, respecto de que "una serie está definida por una función del índice", también Borel, algo más adelante había expuesto:

"Se debe pues considerar, en una serie, el lugar de cada término como formando parte integrante de dicho término*; una serie no es solamente una colección numerable de números; es una tal colección, cuyos elementos están dispuestos en un orden determinado, y este orden importa tanto como el valor de los elementos. …*

Esta manera de considerar las series: una colección de números, de los cuales cada uno tiene un lugar determinado*, es, en mi opinión,* del todo esencial en el Análisis*". (BOREL, 1901: 17-18).*

Por su parte, Knopp presenta su objeción como sigue, aportando además del "contraejemplo" de Callet-Lagrange, que es el que ha recogido en su cita Rey Pastor, otro nuevo:

"Es claro que esta convención [la definición euleriana de suma de una serie] no tiene una base precisa. Aunque, por ejemplo, la serie 1 – 1 + 1 – 1 + … resulta de una manera muy sencilla de la división 1/(1 – x) para x = – 1, y por lo tanto debería igualarse a ½, no hay razón para que la misma *serie no pudiera proceder de otras expresiones analíticas y, a la vista de esos otros métodos de deducirla, se obtuviese otro valor diferente. La serie anterior puede de hecho obtenerse, para x = 0, de la función f(x) representada para todo x > 0 por la serie de* Dirichlet

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}-\frac{1}{4^x}+\dots,$$

o de

$$\frac{1+x}{1+x+x^2}=\frac{1-x^2}{1-x^3}=1-x^2+x^3-x^5+x^6-x^8+\dots$$

para x = 1. A la vista del segundo método de deducción deberíamos tomar 1 – 1 + … = ⅔, pero según el primero no hay evidencia inmediata de qué valor pueda tener f(0). Desde luego no necesariamente *debe ser ½.*

El principio de Euler es por consiguiente en todo caso inseguro, y fue sólo el inusual instinto de Euler *para lo matemáticamente correcto el que lo libró en general de conclusiones falsas a pesar del copioso uso que él hizo de series divergentes de este tipo".* (KNOPP, 1951: 458-459).

3.- La suma funcional de Rey Pastor.

Rey Pastor pensaba que era más correcta la definición funcional para la suma de una serie, pues ampliaba la exigencia mínima de permanencia de las leyes aritméticas. Las objeciones a la falta de unicidad de la definición funcional podían salvarse formulando correctamente la misma, como hizo en (REY, 1930) y *Talcys* y se ha visto en la sección anterior.

No obstante, Rey Pastor observa que la definición euleriana adolece de otros inconvenientes diferentes del tan llamativo de la unicidad. Menciona los siguientes (REY, 1931: 10-12):

> "1. *Que el punto 1 sea singular y no exista para t = 1, por consiguiente, el valor de la función generatriz que da origen a la serie, a pesar de que la serie sea en algún caso convergente.*
>
> 2. *Podrían no conservarse los límites +∞, –∞.*
>
> 3. *La función generatriz podría no ser una función uniforme.*
>
> 4. *La definición euleriana exige la sumación de la serie potencial en el sentido clásico, esto es, la obtención de una expresión aritmética equivalente, lo que significa una restricción considerable".*

Pero Rey Pastor muestra que todos estos inconvenientes se subsanan incorporando límites radiales a la definición euleriana, obteniendo así la siguiente *definición funcional radial* de suma generalizada:

> *"Llamaremos suma generalizada de una serie numérica* $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ *al límite a que tiende la rama de su función generatriz definida por la serie* $\sum_{r=0}^{\infty} u_r t^r$ *cuando t tiende radialmente a 1, partiendo del origen".*

Unos años más tarde, Rey Pastor citaba la 2ª edición del libro de Borel, ampliada por Bouligand, (BOREL, 1928), contemporánea del ICM de Bolonia, así como la 3ª edición (Berlín, 1931) del libro de Knopp, exponiendo que

> "[en ellas] *sigue rechazándose el concepto euleriano de sumación, con pequeñas atenuantes,* [por lo que] *creemos conveniente ampliar las ideas expuestas en aquella memoria* [se refiere a (REY, 1930)]. (REY, 1933: 217).

> *"No entrando a analizar aquí los defectos de la definición euleriana, que en Rey (1931: 9-12) hemos estudiado extensamente, es curioso observar que ninguno de los autores que rechazan tal definición parecen haber notado la más grave de sus deficiencias, que no es la falta de unicidad, sino* la falta de conservación de la suma ordinaria, *como acontece, por ejemplo, con todas las series convergentes de términos positivos* u_n *tales que* $\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n} = 1$; *pues la serie generatriz* $\sum u_n x^n$, *por el teorema de VIVANTI*[24], *tiene 1 como punto singular, careciendo de valor numérico f(1)".*
>
> *"Siendo condición esencial para toda generalización la de comprender al concepto primitivo, esta sola deficiencia hace inaceptable la definición euleriana. Para sustituirla, evitando todos sus inconvenientes, hemos propuesto la siguiente: 'suma de una serie numérica* $\sum u_n$ *es el límite a que tiende la rama de función analítica definida por la serie* $\sum u_n t^n$ *cuando t tiende radialmente a 1, a partir del origen".* (REY, 1933: 217-218).

Esta definición funcional, añade el autor en *Talcys*, presupone la existencia de la función generatriz en un círculo de radio finito y no nulo, es decir, la finitud del límite superior $\overline{\lim}\sqrt[r]{|u_r|}$, pero "fijado el camino radial para efectuar la prolongación analítica de la función generatriz, el valor generalizado de la serie o integral, cuando existe, es único".

Y, cumplida la anterior condición, "las únicas series no sumables son las siguientes (REY, 1931: 14-15):

> "1. *Aquellas cuya generatriz tiene como polo el punto t = 1.*
>
> 2. *Aquellas cuya generatriz tiene el punto t = 1 como singular esencial, inaccesible radialmente, esto es, sin límite finito radial.*
>
> 3. *Aquellas cuya generatriz tiene algún punto singular entre 0 y 1".*

La denominación de *suma generalizada* queda justificada porque el valor obtenido en el caso de una serie convergente coincide con la suma ordinaria: "Si la serie $\sum u_r$ converge, el punto $t = 1$ es interior a la circunferencia de convergencia de la función generatriz, o está en ella. En el primer caso *f*(1) existe

24 El teorema de Vivanti, o de Pringsheim-Vivanti, que cita aquí Rey pastor, afirma: *Si una serie de potencias de coeficientes positivos tiene radio de convergencia finito r > 0, entonces el punto z = r es un punto singular de la función analítica de la que aquella serie es un elemento.* Fue establecido por Vivanti (sin demostración explícita: VIVANTI (1893: 112), y la primera demostración es de PRINGSHEIM (1894: 42).

y coincide con la suma U de $\sum u_r$; en el segundo, por el teorema de continuidad de Abel[25], existe lím $f(t)$ para $t \to 1^-$ y es igual a U; luego en ambos casos la suma generalizada existe y coincide con la suma ordinaria".

De esta definición funcional radial de suma generalizada nace inmediatamente el que Rey Pastor denomina (REY, 1931: 18) *Algoritmo de sumación de Abel* para una serie posiblemente divergente, dado por

$$(A)\sum_{r=0}^{\infty} u_r = \lim_{t\to 1^-}\sum_{r=0}^{\infty} u_r t^r = \lim_{z\to 0^+}\sum_{r=0}^{\infty} u_r e^{-zr}.$$

Rey Pastor anota que, para integrales, Hardy había presentado[26] el algoritmo correlativo

$$(A)\int_0^{\infty} u(r)\,dr = \lim_{t\to 1^-}\int_0^{\infty} u(r)\,t^r\,dr = \lim_{z\to 0^+}\int_0^{\infty} u(r)\,e^{-zr}\,dr,$$

Con lo que su definición para series constituía al mismo tiempo un punto de partida básico en el desarrollo de su idea de unificar en una teoría correlativa los métodos conocidos de sumación generalizada de series e integrales divergentes.

4.- Bibliografía.

ABEL, Niels H. (1826) "Recherches sur la série…". En: *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*, 2^{me} éd. (1881), L. SYLOW; S. LIE eds., Oslo, Grøndall & Son, vol. 1, 219-250.

BARBEAU, Edward J. y LEAH, P.J. (1976) "Euler's 1760 paper on divergent series", *Historia Mathematica*, vol. 3, 141-160.

BERNOULLI, Daniel (1771) "De summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu", *Novi Commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ*, vol. 16, 12-14 y 71-90.

BOREL, Émile (1901) *Leçons sur les séries divergentes*, 1^{e} éd., París, Gauthier-Villars.

BOREL, Émile (1928) *Leçons sur les séries divergentes*, 2^{me} éd., revue et entière-

[25] ABEL, 1826: 223-224. Véase KNOPP, 1951: 177, nota.
[26] HARDY, 1903: 49-51.

ment remaniée avec le concours de G. Bouligand, París, Gauthier-Villars. Reimp. (1988) Sceaux, J. Gabay.

BOSSUT, Charles; LAGRANGE, Joseph L. de (1801) "Rapport sur un mémoire présenté à la classe, par le citoyen Callet", *Mémoires de l'Institut national des sciences et arts* (Classe des Sciences mathématiques et physiques), tomo 3, París, Badouin, 1-11.

BROMWICH, Thomas J. I'A. (1908) *An introduction to the theory of infinite series*, 1ª ed., Londres, Macmillan & Co. 2ª ed. revisada (1926), Londres, Macmillan & Co.

ESPAÑOL, Luis (2006a) "Julio Rey Pastor y la suma de series". En: *J. Rey Pastor, Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, XLIII-LXXXIII.

ESPAÑOL, Luis (2006b) "Julio Rey Pastor. Primeros años españoles: hasta 1920", *La Gaceta de la RSME*, vol. 9, 545-585.

ESPAÑOL, Luis; SÁNCHEZ, Carlos (2001) "Julio Rey Pastor y la teoría de sumación de series divergentes", *Llull. Revista de la SEHCYT*, vol. 24, 89-118.

EULER, Leonhard (1748) *Introducción al análisis de los infinitos*, traducción de J.L. Arantegui anotada por A.J. Durán del volumen 1 de la *Introductio in analysin infinitorum*, Lausana. Editores: A.J. Durán y F.J. Pérez, Sevilla, SAEM "Thales", Real Sociedad Matemática Española, 2000.

EULER, Leonhard (1754) "De seriebus divergentibus", *Novi commentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ*, vol. 5, 205-237. En: *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series I, vol. 14, Leipzig y Berlín, B.G. Teubner, 1924, 585-617.

EULER, Leonhard (1755) *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi infinitorum ac doctrina serierum*, Berlín, Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae. En: *Leonhardi Euleri Opera Omnia sub auspiciis societatis scientiarum naturalium helveticæ*}, series I, vol. 10, Leipzig y Berlín, B.G. Teubner, 1913. Versión inglesa de J.D. Blanton: *Foundations of differential calculus*, Nueva York, Springer, 2000.

FERRARO, Giovanni (1999) "The first modern definition of the summ of a divergent series: an aspect of the rise of 20th century mathematics", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 54, 101-135.

FOURIER, Jean-Baptiste J. (1822) *Théorie analytique de la chaleur*, París, F. Didot père et fils. Reimp. (1988), Sceaux, J. Gabay.

FROBENIUS, Ferdinand G. (1880) "Ueber die Leibnitzsche Reihe", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 89, 262-264.

FUSS, Paulus H., ed. (1843) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle, précédée d'une notice sur les travaux de Léonard Euler, tant imprimés qu'inédits, et publiée sous les auspices de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 2 vols., San Petersburgo, Imprimérie de l'Académie Impériale des Sciences. Reimp (1968): The Sources of Science, Number 35, Nueva York y Londres, Johnson Reprint Corporation.

FUSS, Paulus H.; FUSS, Nicolaus, eds. (1862) *Leonardi Euleri opera posthuma mathematica et physica. Anno 1844 detecta quæ Acad. Scient. Petropolitanæ obtulerunt ejusque auspiciis ediderunt auctoris pronepotes Paulus Henricus Fuss et Nicolaus Fuss*, 2 vols., San Petersburgo.

HARDY, Godfrey H. (1903) "Researches in the theory of divergent series and divergent integrals", *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 35, 22-66.

HARDY, Godfrey H. (1949) *Divergent Series*, Oxford, Oxford University Press.

KNOPP, Konrad (1922) *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von R. Courant, Bd. 2., Berlín, J. Springer. 2ª ed. ampliada: (1924), Berlín, J. Springer. 3ª ed. corregida y aumentada: (1931), Berlín, J. Springer.

KNOPP, Konrad (1951) *Theory and application of infinite series*, Londres, Blackie and Son, Ltd. Traducida al inglés de la 2ª edición alemana, y revisada conforme a la 4ª (1947), por Miss R.C.H. Young. Reimp. (1990), Nueva York, Dover Pub. Inc.

LAPLACE, Pierre S. de (1812) *Théorie analytique des probabilités*, París. 2ª ed. (1814), París. 3ª ed. (1820), París, V. Courcier. Esta última reimpresa en *Œuvres complètes de Laplace*, vol. 7 (1886), París, Gauthier-Villars.

LEIBNIZ, Gottfried W. (1713) "Epistola ad V.Cl. Christianum Wolfium, Professorem Matheseos Halensem, circa Scientiam infiniti", *Actorum Eruditorum, quae Lipsiæ publicantur, Supplementa*, Tomus V. En *G.W. Leibniz Mathematische Schriften* herausgegeben von C.I. Gerhardt, Band V: *Die mathematischen Abhandlungen*, Olms paperbacks Band 45 (1971), Hildesheim-Nueva York, Georg Olms Verlag, 382-387 y figura 154 al final del volumen. Este volumen es una reimpresión reprográfica del original *Leibnizens Mathematische Schriften* herausg. von C.I. Gerhardt, Zweite Abtheilung, Band I (1858), La Haya.

LE ROY, Édouard (1900) "Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor", *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques* (2), vol. 2, 317-430.

PASTORI, Maria (1927) "Le serie divergente", *Periodico di Matematiche*, Serie IV, vol. VII, 302-320.

PRINGSHEIM, Alfred (1894) "Ueber Functionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen", *Mathematische Annalen*, vol. 44, 41-56.

PRINGSHEIM, Alfred; MOLK, Jules (1907) "Algorithmes illimités", *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, París y Leipzig, Gauthier-Villars y B.G. Teubner, tomo I, vol. 1, artículo I4, 209-328. Reimp. (1992), Sceaux, J. Gabay.

REY PASTOR, Julio (1916) *Introducción a la matemática superior*, Madrid, Corona.

REY PASTOR, Julio (1919) "La investigación matemática", *Boletín de Crítica, Pedagogía, Historia y Bibliografía* (Suplemento de la Rev. Mat. Hispano-Americana), vol. 1 (4), 97-109.

REY PASTOR, Julio (1930) "Prolongación analítica y sumación de series divergentes", *Atti del VI Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 1928*, tomo II, Bolonia, N. Zanichelli, 335-347.

REY PASTOR, Julio (1931) *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, Trabajos del Seminario Matemático Argentino, Núm. 5, Extracto de la publicación Nº 12 de la Serie B. Buenos Aires, Imprenta de la Universidad. Boletín del Seminario Matemático Argentino, publicación Nº 12 de la Serie B, (1932), Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 51-226.

REY PASTOR, Julio (2006) *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos. (Edición crítica, con notas y comentarios, de E. Fernández. Acompañada de dos estudios complementarios, de A.J. Durán y L. Español respectivamente).

REY PASTOR, Julio (1933) "Aplicaciones de los algoritmos lineales de convergencia y sumación", *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, vol. VII(11), 191-222.

RÍOS, Sixto; SANTALÓ, Luis A.; BALANZAT, Manuel (1979) *Julio Rey Pastor, matemático*, Madrid, Instituto de España.

VIVANTI, Giulio (1893) "Sulle serie di potenze", *Rivista di Matematica*, vol. 3, 111-114.