

ESTRATEGIAS ALTERNATIVAS EN LA DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE AJUSTE EN EL CÁLCULO DE LA PÉRDIDA DE CARGA POR FRICCIÓN EN TUBERÍAS CON SALIDAS MÚLTIPLES

Vicente Ángeles, Mauricio Carrillo, Laura A. Ibáñez, Ramón Arteaga, Mario A. Vázquez

Departamento de Irrigación, Universidad Autónoma Chapingo
km 38.5 Carretera México - Texcoco, Chapingo, Estado de México, CP. 056230
vangeles@correo.chapingo.mx

Resumen: En este artículo se desarrollan expresiones alternativas para cuantificar el factor de ajuste en el cálculo de la pérdida de carga por fricción en tuberías convencionales con salidas múltiples (constituídas por un solo tramo de tubería de diámetro y tipo de material similares) y tuberías telescópicas con salidas múltiples (constituídas por dos o más tramos de tubería con diámetro de diferente magnitud o tipo de material) o con servicio mixto (tramo de tubería en el que el diámetro y el tipo de material se mantienen invariables, que conduce y distribuye caudal). La característica fundamental de las expresiones para valorar los factores de ajuste es su simplicidad y similitud entre ellas, ya que la diferencia entre una y otra en ocasiones sólo se reduce al valor de una constante. Los resultados obtenidos al computar el factor de ajuste con las expresiones propuestas en las aplicaciones desarrolladas, muestran que son tan precisas como las de otros investigadores, precisión que se puede verificar fácilmente con la determinación de la pérdida de carga en una tubería con salidas múltiples, segmento a segmento entre salidas consecutivas. Se concluye así, que las ecuaciones que se proponen para valorar los distintos factores de ajuste en el cálculo de la pérdida de carga por fricción, evita la determinación tediosa segmento a segmento entre salidas consecutivas de dicha pérdida, en toda la gama de situaciones que a nivel práctico se pueda prestar en la ejecución de proyectos de riego a presión. Finalmente, pero no por ello menos importante, se prevé un grado de aceptación considerable de las ecuaciones de estos factores de ajuste por los especialistas en el ramo de la irrigación, dada su simplicidad, precisión y facilidad de cálculo de gran parte ellos a partir de una sola tabla.

INTRODUCCIÓN

Las tuberías con salidas múltiples son utilizadas en distintos sistemas de riego a presión como la aspersión convencional (fijos, semi-fijos o portátiles), la aspersión de movimiento intermitente (side roll, power roll o lateral con ruedas) y la aspersión de movimiento continuo (avance frontal); la microirrigación (goteo puntual, cinta de riego, microaspersión) y las tuberías multicompuertas para riego por gravedad. Esto hace que sea muy importante en la etapa de diseño de dichos sistemas, el disponer de expresiones que permitan con relativa facilidad el cálculo de la pérdida de carga por fricción que se presenta en las tuberías que los constituyen y así, realizar una adecuada selección de los equipos de

impulsión necesarios para un correcto funcionamiento.

Es común que la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples, sea cuantificada mediante el producto del valor de la pérdida de carga por fricción en una tubería simple sin salidas que conduce un caudal (resultado de sumar el gasto que se da en todas las salidas de la tubería con salidas múltiples) en toda su longitud y el valor de un coeficiente de ajuste que se encuentra en un rango de entre $1/3$ y 1 inclusive, el valor preciso del coeficiente de ajuste depende tanto del exponente del caudal en la fórmula que se empleó para calcular la pérdida de carga por fricción como del número de salidas presentes en la tubería con salidas múltiples. Bajo este enfoque, la pérdida de carga por fricción en tuberías

con salidas múltiples en sistemas de riego presurizados, ha sido analizada en profundidad por numerosos investigadores, baste con mencionar a: Christiansen (1942), Jensen y Fratini (1957), Scaloppi (1988), Anwar (1999) y más recientemente China y Domínguez (2006).

En este trabajo se presenta una estrategia general diferente para cuantificar la pérdida de carga por fricción en las tuberías con salidas múltiples, consistente en multiplicar la pérdida de carga por fricción que se presenta en un segmento de dicha tubería, que conduce el gasto de una salida o bien el gasto de todas ellas, con un coeficiente de ajuste que adquiere valores por lo general mayores a 1.

DESARROLLO

Pérdida de carga por fricción en tuberías simples

La pérdida de carga por fricción en una tubería simple (Figura 1) sin salidas en toda su longitud, se determina con la expresión genérica siguiente:

$$h_f = K \frac{Q^m}{D^n} L \quad (1)$$

donde h_f es la pérdida de carga por fricción, K involucra al coeficiente de conversión de unidades y al coeficiente de fricción que depende de la fórmula empleada para cuantificar h_f (Manning, Hazen-Williams, Scobey, Darcy-Weisbach, ...), Q el caudal que circula en la tubería desde el inicio hasta el final de la misma, D el diámetro interno de la tubería, L la longitud de la tubería y m y n los exponentes del caudal y del diámetro interno de la tubería, respectivamente. La ec.(1) indica que la pérdida de carga por fricción es independiente de la posición de la tubería, es decir, h_f tendrá el mismo valor independientemente de que la tubería esté colocada en posición horizontal, ascendente o descendente.

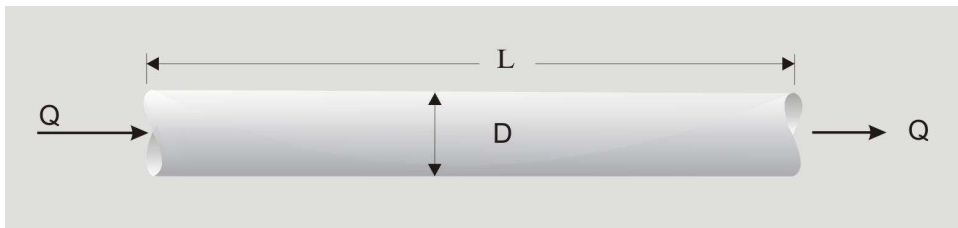


Figura 1. Tubería simple

Pérdida de carga por fricción en tuberías convencionales con salidas múltiples

El cálculo de la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples (Figura 2a) requiere la determinación segmento a segmento, desde la última salida aguas abajo hasta la primera salida aguas arriba, de la pérdida de carga por fricción provocada en cada uno de ellos, aplicando la ec.(1).

Matemáticamente esto puede expresarse por la ec.(2)

$$\begin{aligned} h_{fL} &= \sum_{i=1}^N h_{f_i} = \sum_{i=1}^N K \frac{Q_i^m}{D^n} S = \sum_{i=1}^N K \frac{(iq)^m}{D^n} S \\ &= \sum_{i=1}^N K \frac{q^m i^m}{D^n} S = \left(K \frac{q^m}{D^n} S \right) \left(\sum_{i=1}^N i^m \right) \end{aligned} \quad (2)$$

donde h_{fL} es la pérdida de carga por fricción en la tubería convencional con salidas múltiples; N número total de salidas; h_{f_i} es la pérdida de carga por fricción en cada uno de los segmentos que constituyen la tubería con salidas múltiples; q es el caudal constante de cada una de las salidas; S es la distancia constante entre dos salidas consecutivas y la distancia entre el inicio de la tubería y la primera salida.

En la Figura 2b, sea r_s la relación de S_0 y S ($r_s = S_0/S$), así la pérdida de carga en la tubería convencional con salidas múltiples es:

$$\begin{aligned} h_{fL} &= \left(K \frac{q^m}{D^n} S \right) \left(\sum_{i=1}^N i^m \right) - K \frac{(Nq)^m}{D^n} (S - S_0) \\ &= \left(K \frac{q^m}{D^n} S \right) \left(\sum_{i=1}^N i^m \right) - K \frac{N^m q^m}{D^n} (S - r_s S) \\ &= \left(K \frac{q^m}{D^n} S \right) \left(\sum_{i=1}^N i^m \right) - K \frac{q^m N^m}{D^n} S (1 - r_s) \\ &= \left(K \frac{q^m}{D^n} S \right) \left[\sum_{i=1}^N i^m - (1 - r_s) N^m \right] \end{aligned} \quad (3)$$

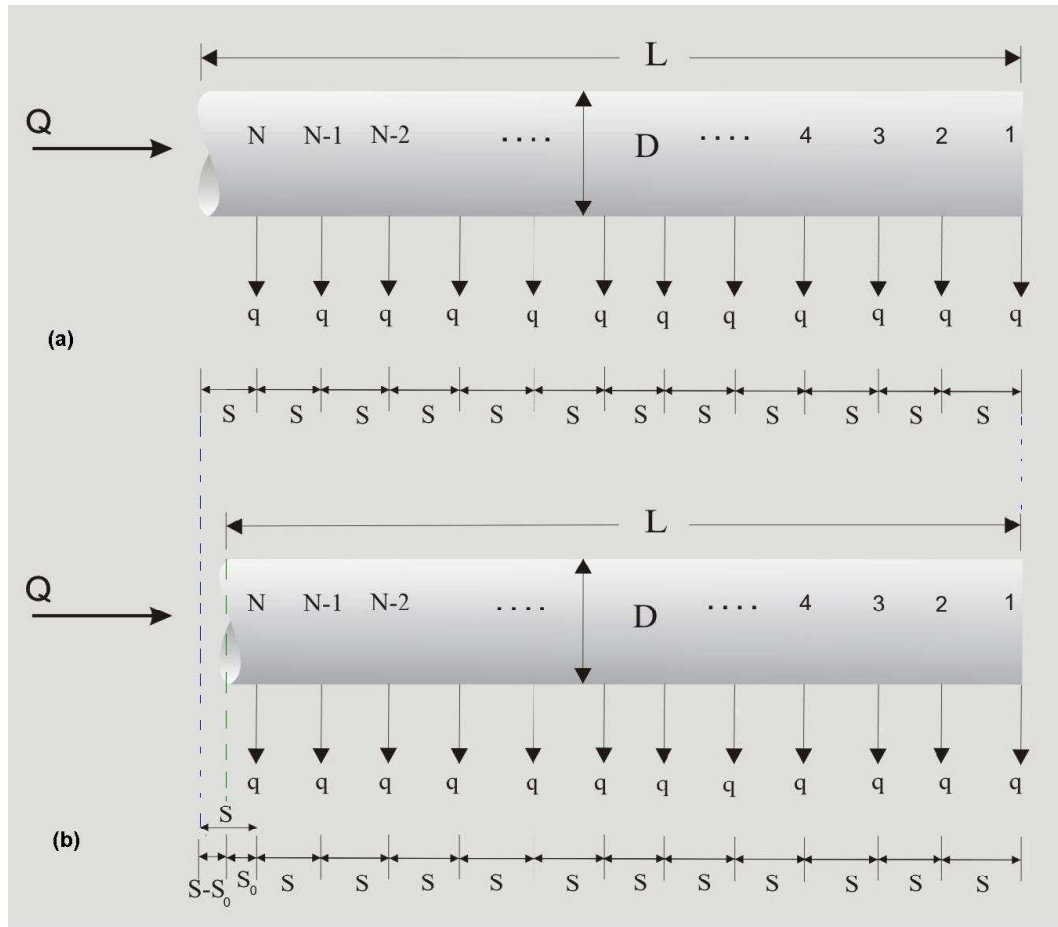


Figura 2. Tubería convencional con salidas múltiples

El primer término en el lado derecho de la ec.(3) corresponde a la pérdida de carga por fricción en el último tramo de aguas abajo de la tubería con salidas múltiples, mientras que el segundo término, representa el coeficiente de ajuste que toma en cuenta la distribución discreta y uniforme de caudal a lo largo de toda la tubería convencional con salidas múltiples.

En la ec.(3), el término $\sum_{i=1}^N i^m$ puede ser resuelto empleando la fórmula de Euler-Maclaurin para sumatorias, la cual adaptada de Anwar (1999a) y Spivey (2006) es:

$$\sum_{x=1}^{N-1} f(x) = \int_0^N f(x)dx - \frac{1}{2}[f(N) + f(0)] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(N) - f^{(2j-1)}(0)] \quad (4)$$

Aplicando la fórmula 4 al término $\sum_{i=1}^N i^m$ de la

ec.(3), se tiene

$$\sum_{i=1}^N i^m = \sum_{i=0}^N i^m = \int_0^N x^m dx + \frac{1}{2}[f(N) + f(0)] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(N) - f^{(2j-1)}(0)] \quad (5)$$

La solución general de la ec.(5) para series geométricas de potencias con enteros positivos es:

$$\sum_{i=1}^N i^m = \frac{N^{m+1}}{m+1} + \frac{N^m}{2} + \sum_{j=0}^{m/2} \frac{B_{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(N) - f^{(2j-1)}(0)] \quad (6)$$

donde a $m/2$ se le considera sólo la parte entera, B_{2j} son números Bernoulli y $f^{(2j-1)}$ son derivadas de la función.

Al aplicar la ec.(6), para los valores de interés del exponente m en las fórmulas de pérdida de carga por fricción empleadas en hidráulica, que

se encuentran entre 1 y 2, se obtiene una expresión general dada en la ecuación 7

$$\sum_{i=1}^N i^m \frac{N^{m+1}}{m+1} + \frac{N^m}{2} + \frac{mN^{m-1}}{12} \quad (7)$$

Sustituyendo la ec.(7) en el segundo término de la ec.(3) y realizando operaciones algebraicas básicas se obtiene el factor de ajuste siguiente:

$$F_1 = \frac{N^{m+1}}{m+1} + \left(r_s - \frac{1}{2}\right) N^m + \frac{mN^{m-1}}{12} \quad (8)$$

donde r_s es la relación entre la distancia -mayor o menor a S - del inicio de la tubería a la primera salida y el espaciamiento constante entre salidas consecutivas ($r_s = S_0/S$).

La relación entre el caudal total Q que se distribuirá a lo largo de toda la tubería con salidas múltiples y el caudal de una salida q , está dada por:

$$q = \frac{Q}{N} \quad (9)$$

Al sustituir la ec.(9) en la ec.(3), se calculará la pérdida de carga por fricción en el último tramo de la tubería considerando el caudal total a distribuir y el factor de ajuste de la ecuación 8 se modifica de la siguiente manera:

$$F_2 = \frac{N}{m+1} + \left(r_s - \frac{1}{2}\right) + \frac{m}{12N} \quad (10)$$

Los casos más frecuentes de valores de r_s , que se presentan en la práctica son 1 (cuando $S_0 = S$) y 1/2 (cuando $S_0 = S/2$), así la ec.(10) queda para estos casos de la siguiente manera:

Cuando $S_0 = S$, $r_s = 1$

$$F_3 = \frac{N}{m+1} + \frac{1}{2} + \frac{m}{12N} \quad (11)$$

Cuando $S_0 = S/2$, $r_s = 1/2$

$$F_4 = \frac{N}{m+1} + \frac{m}{12N} \quad (12)$$

En la Tabla 1 se muestran valores del factor F_4 calculados utilizando la ec.(12), para los valores más comunes de m .

A partir de los valores de la Tabla 1, se pueden cuantificar con relativa facilidad los factores de ajuste F_2 y F_3 , con sólo adicionar el valor resultante de $(r_s - 1/2)$ o $1/2$, respectivamente; es decir, $F_2 = F_4 + (r_s - 1/2)$ y $F_3 = F_4 + 1/2$.

Pérdida de carga por fricción en tuberías telescópicas con salidas múltiples

En la Figura 3 se presenta una tubería telescópica.

La determinación de la pérdida de carga en el tramo de aguas arriba de la tubería telescópica con salidas múltiples (Figura 3a), segmento a segmento está dado matemáticamente por:

$$\begin{aligned} hf_L &= \sum_{i=1}^N hf_i = \sum_{i=1}^N K \frac{Q_i^m}{D^n} S = \\ &= \sum_{i=1}^N K \frac{[(i + N')q]^m}{D^n} S = \\ &= \sum_{i=1}^N K \frac{q^m (i + N')^m}{D^n} S = \left(K \frac{q^m}{D^n} S \right) \\ &\quad \left[\sum_{i=1}^N (i + N')^m \right] \end{aligned} \quad (13)$$

En la Figura 3b (cuando la distancia entre la entrada de la tubería y la primera salida S_0 es diferente de S y existe longitud de tubería S_1 más allá de la última salida de aguas abajo), sea r_s la relación entre S_0 y S ($r_s = S_0/S$), r_t la relación entre S_1 y S ($r_t = S_1/S$) y $N_T = N + N'$, así la pérdida de carga en el tramo de aguas arriba de la tubería telescópica con salidas múltiples es:

$$\begin{aligned} hf_L &= \left(K \frac{q^m}{D^n} S \right) \left[\sum_{i=1}^N (i + N')^m \right] - \\ &\quad - K \frac{(N_T q)^m}{D^n} (S - S_0) + K \frac{(N' q)^m}{D^n} S_1 = \\ hf_L &= \left(K \frac{q^m}{D^n} S \right) \left[\sum_{i=1}^N (i + N')^m \right] - \\ &\quad - K \frac{q^m}{D^n} (S - r_s S) N_T^m + K \frac{q^m}{D^n} r_t S N'^m \\ hf_L &= \left(K \frac{q^m}{D^n} S \right) \left[\sum_{i=1}^N (i + N')^m \right] - \\ &\quad - K \frac{q^m}{D^n} S (1 - r_s) N_T^m + K \frac{q^m}{D^n} S r_t N'^m \\ hf_L &= \left(K \frac{q^m}{D^n} S \right) \left[\sum_{i=1}^N (i + N')^m - (1 - r_s) \right. \\ &\quad \left. N_T^m + r_t N'^m \right] \end{aligned} \quad (14)$$

La sumatoria del segundo término en la ec.(14) puede reescribirse según Spokoinyi (2003-2005), de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^N (i + N')^m = \sum_{i=1+N'}^{N+N'} i^m = \sum_{i=N'+1}^{N_T} i^m \quad (15)$$

N	m				
	1,750	1,800	1,852	1,900	2,000
1	0,509	0,507	0,505	0,503	0,500
2	0,800	0,789	0,778	0,769	0,750
3	1,140	1,121	1,103	1,087	1,056
4	1,491	1,466	1,441	1,419	1,375
5	1,847	1,816	1,784	1,756	1,700
6	2,206	2,168	2,130	2,095	2,028
7	2,566	2,521	2,476	2,436	2,357
8	2,927	2,876	2,824	2,778	2,688
9	3,289	3,231	3,173	3,121	3,019
10	3,651	3,586	3,522	3,464	3,350
11	4,013	3,942	3,871	3,807	3,682
12	4,376	4,298	4,220	4,151	4,014
13	4,738	4,654	4,570	4,495	4,346
14	5,101	5,011	4,920	4,839	4,679
15	5,464	5,367	5,270	5,183	5,011
16	5,827	5,724	5,620	5,527	5,344
17	6,190	6,080	5,970	5,871	5,676
18	6,554	6,437	6,320	6,216	6,009
19	6,917	6,794	6,670	6,560	6,342
20	7,280	7,150	7,020	6,904	6,675
21	7,643	7,507	7,371	7,249	7,008
22	8,007	7,864	7,721	7,593	7,341
23	8,370	8,221	8,071	7,938	7,674
24	8,733	8,578	8,422	8,282	8,007
25	9,097	8,935	8,772	8,627	8,340
26	9,460	9,291	9,122	8,972	8,673
28	10,187	10,005	9,823	9,661	9,339
30	10,914	10,719	10,524	10,350	10,006
32	11,641	11,433	11,225	11,039	10,672
34	12,368	12,147	11,926	11,729	11,338
36	13,095	12,861	12,627	12,418	12,005
38	13,822	13,575	13,328	13,108	12,671
40	14,549	14,289	14,029	13,797	13,338
42	15,276	15,004	14,730	14,487	14,004
44	16,003	15,718	15,431	15,176	14,670
46	16,730	16,432	16,132	15,866	15,337
48	17,458	17,146	16,834	16,555	16,003
50	18,185	17,860	17,535	17,245	16,670
55	20,003	19,646	19,288	18,968	18,336
60	21,821	21,431	21,040	20,692	20,003
65	23,639	23,217	22,793	22,416	21,669
70	25,457	25,002	24,546	24,140	23,336
75	27,275	26,788	26,299	25,864	25,002
80	29,093	28,573	28,052	27,588	26,669
90	32,729	32,145	31,559	31,036	30,002
100	36,365	35,716	35,065	34,484	33,335

Tabla 1. Valores del factor de ajuste F_4 para los valores más comunes de m

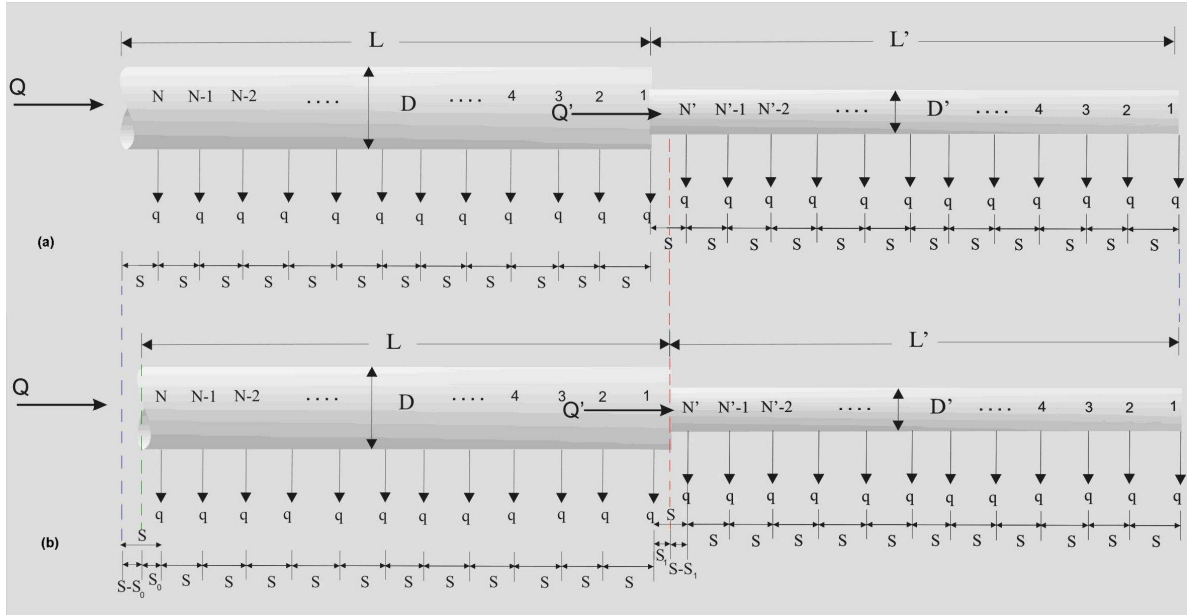


Figura 3. Tubería telescópica con salidas múltiples

La aplicación de la ecuación de Euler-Maclaurin, a la ec.(15) da como resultado:

$$\sum_{i=N'+1}^{N_T} i^m = \int_{N'}^{N_T} x^m dx + \frac{f(N_T)}{2} - \frac{f(N')}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(N_T) - f^{(2j-1)}(N')] \quad (16)$$

La solución general de la ec.(16) para series geométricas de potencias con enteros positivos, en sus tres primeros términos es:

$$\sum_{i=1+N'}^{N_T} i^m = \frac{N_T^{m+1} - N'^{m+1}}{m+1} + \frac{N_T^m - N'^m}{2} + \frac{m(N_T^{m-1} - N'^{m-1})}{12} = \sum_{i=1}^N (i + N')^m \quad (17)$$

La ec.(17) puede reescribirse en forma parecida a la ecuación 7, es decir:

$$\sum_{i=1}^N (i + N')^m = \left(\frac{N_T^{m+1}}{m+1} + \frac{N_T^m}{2} + \frac{mN_T^{m-1}}{12} \right) - \left(\frac{N'^{m+1}}{m+1} + \frac{N'^m}{2} + \frac{mN'^{m-1}}{12} \right) \quad (18)$$

Sustituyendo la ec.(18) en el segundo término de la ec.(14) y realizando operaciones algebraicas básicas se obtiene el factor de ajuste siguiente:

$$F_5 = \left[\frac{N_T^{m+1}}{m+1} + \left(r_s - \frac{1}{2} \right) N_T^m + \frac{mN_T^{m-1}}{12} \right] - \left[\frac{N'^{m+1}}{m+1} + \left(\frac{1}{2} - r_t \right) N'^m + \frac{mN'^{m-1}}{12} \right] \quad (19)$$

Si se aplica a la ec.(19), la consideración expresada por la ec.(9), se tiene:

$$F_6 = \left[\frac{N_T}{m+1} + \left(r_s - \frac{1}{2} \right) + \frac{m}{12N_T} \right] - \left(\frac{N'}{N_T} \right)^m \left[\frac{N'}{m+1} + \left(\frac{1}{2} - r_t \right) + \frac{m}{12N'} \right] \quad (20)$$

Para los casos más comunes de r_s y r_t , la ec.(20) adquiere las formas siguientes:

- Cuando $S_0 = S$ implica que $r_s = 1$ y si además $S_1 = 0$ entonces $r_t = 0$

$$F_7 = \left(\frac{N_T}{m+1} + \frac{1}{2} + \frac{m}{12N_T} \right) - \left(\frac{N'}{N_T} \right)^m \left(\frac{N'}{m+1} + \frac{1}{2} + \frac{m}{12N'} \right) \quad (21)$$

- Cuando $S_0 = S/2$ implica que $r_s = 1/2$ y si además $S_1 = S/2$ entonces $r_t = 1/2$

$$F_8 = \left(\frac{N_T}{m+1} + \frac{m}{12N_T} \right) - \left(\frac{N'}{N_T} \right)^m \left(\frac{N'}{m+1} + \frac{m}{12N'} \right) \quad (22)$$

Los factores de ajuste F_6 , F_7 y F_8 pueden determinarse apoyándose en la Tabla 1 y calculando por separado el valor de $(N'/N_T)^m$, es decir:

$$F_6 = \left[F_{4(N_T)} + \left(r_s - \frac{1}{2} \right) \right] - \left(\frac{N'}{N_T} \right)^m \left[F_{4(N')} + \left(\frac{1}{2} - r_t \right) \right] \quad (23)$$

$$F_7 = \left(F_{4(N_T)} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{N'}{N_T} \right)^m \left(F_{4(N')} + \frac{1}{2} \right) \quad (24)$$

$$F_8 = F_{4(N_T)} - \left(\frac{N'}{N_T} \right)^m F_{4(N')} \quad (25)$$

APLICACIONES

Primera aplicación, adecuada de Anwar (1999a):

Calcular la pérdida de carga por fricción en una lateral de aspersión con 288 m de longitud. La separación entre los aspersores es de 12 m. Los primeros 144 m a partir del inicio de la lateral, tienen un diámetro interno de la tubería de 100 mm; y los restantes 144 m de lateral tienen un diámetro interno de tubería de 75 mm. Hay un total de 24 aspersores en la lateral de aspersión con un caudal de descarga en cada uno de ellos de 0.5 l/s. En la solución se empleará la fórmula de Hazen-Williams para calcular la pérdida de carga por fricción (estableciendo un coeficiente de fricción de 130).

La fórmula de Hazen-Williams para el cálculo de la pérdida de carga por fricción en una tubería simple según la ecuación 1, está dada por la ec.(30)

$$h_f = 1.212 * 10^{12} \left(\frac{1}{C_{HW}} \right)^{1.852} \frac{Q^{1.852}}{D^{4.87}} \frac{L}{100} \quad (26)$$

donde h_f resulta en m, C_{HW} es el coeficiente de fricción, Q se introduce en l/s, D en mm y L en m.

Solución al tramo de aguas abajo (tubería convencional con salidas múltiples):

(a) Con $q = 0,5$ l/s, $D = 75$ mm, $S = 12$ m; h_f en dicho segmento es $3.619 * 10^{-3}$ m y la aplicación de la ecuación 8 para F_1 con $N = 12$ da como resultado 470.571; el producto de estos valores arroja una pérdida de carga de 1.703 m.

(b) Con $Q = 6$ l/s, $D = 75$ mm, $S = 12$ m; h_f en dicho segmento es $3.608 * 10^{-1}$ m y el valor de F_3 empleando la Tabla 1 entrando con $N = 12$ y $m = 1.852$ se obtiene 4.22 que sumado con $1/2$ da 4.72 (valor idéntico al de F_2 con $r_s = 1$); el producto de ambos valores da 1.703 m de pérdida de carga en el tramo 1.

Solución al tramo de aguas arriba (tubería telescópica con salidas múltiples):

(a) Con $q = 0,5$ l/s, $D = 100$ mm, $S = 12$ m; h_f en dicho segmento es $8.916 * 10^{-4}$ m y la aplicación de la ecuación 19 para F_5 con $N_T = 24$ y $N' = 12$ da como resultado 2740.078; el producto de estos valores arroja una pérdida de carga de 2.443 m.

(b) Con $Q = 12$ l/s, $D = 100$ mm, $S = 12$ m; h_f en dicho segmento es $32.085 * 10^{-2}$ m y el valor de F_7 empleando la Tabla 1 entrando con $N = 24$ y $m = 1.852$ se obtiene 8.422 que sumado con $1/2$ da 8.922, así el valor de F_7 será $8.922 - (12/24)^{1.852} * 4.72 = 7.6145$ (valor idéntico al de F_6 con $r_s = 1$ y $r_t = 0$); el producto de ambos valores da 2.443 m de pérdida de carga en el tramo 2.

Así, la pérdida de carga total en la tubería telescópica con salidas múltiples, resultado de sumar las pérdidas que se dan en los tramos 1 y 2 asciende a 4.146 m, este valor coincide completamente con el que se obtiene de la determinación de la pérdida de carga segmento a segmento en dicha tubería.

Segunda aplicación, adecuada de Anwar (1999b):

En una lateral de aluminio en riego por aspersión, el primer tramo de tubería aguas arriba con un diámetro interno de 100 mm tiene 105 m de longitud con el primer aspersor a 9 m del inicio de la lateral y los ocho aspersores restantes a un espaciamiento de 12 m. El tramo de aguas abajo con un diámetro interno de 75 mm tiene una longitud de 108 m con nueve aspersores espaciados a cada 12 m. Calcular la pérdida

de carga por fricción en la tubería si el caudal promedio de los aspersores es de 0.5 l/s (agua a 15°C, viscosidad cinemática $\nu = 1.14 \times 10^{-6}$ m²/s, rugosidad absoluta de la tubería $\varepsilon = 0.127$ mm).

La fórmula de Darcy-Weisbach para el cálculo de la pérdida de carga por fricción está dada por la siguiente expresión:

$$h_f = \frac{f}{12.1} \frac{Q^2}{D^5} L \quad (27)$$

donde h_f resulta en m, f es el coeficiente de fricción, Q se introduce en m³/s, D y L en m.

La determinación del coeficiente de fricción f se realizará con la ecuación de Churchill (1977), citado por Anwar (1999b):

$$f = \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(\alpha + \beta)^{1.5}} \right]^{1/12} \quad (28)$$

donde Re es el número de Reynolds ($Re = v * D/\nu$), con α y β dadas por

$$\beta = \left(\frac{37530}{Re} \right)^{16} \quad (29)$$

$$\alpha = \left\{ 2.457 \ln \left[\frac{1}{\left(\frac{7}{Re} \right)^{0.9} + 0.27 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)} \right] \right\}^{16} \quad (30)$$

Solución al tramo de aguas abajo (tubería convencional con salidas múltiples):

Con $Q = 4,5$ l/s, $D = 75$ mm, $S = 12$ m y $f = 0.0253$; h_f en dicho segmento es 0.214 m y el valor de F_3 empleando la Tabla 1 entrando con $N = 9$ y $m = 2$ se obtiene 3.019 que sumado con 1/2 da 3.519; el producto de ambos valores da 0.753 m de pérdida de carga en el tramo 1.

Solución al tramo de aguas arriba (tubería telescópica con salidas múltiples):

Con $Q = 9$ l/s, $D = 100$ mm, $r_s = 0.75$ y $f = 0.0232$; h_f en dicho segmento es 0.1866 m y el valor de F_6 empleando la Tabla 1 entrando con $N = 18$ y $m = 2$ se obtiene 6.009 que sumado con 1/4 da 6.259, así el valor de F_6 será 6.259 - (9/18)²*3.519 = 5.379; el producto de ambos valores da 1.0043 m de pérdida de carga.

Así, la pérdida de carga total en la tubería telescópica con salidas múltiples, resultado de sumar las pérdidas que se dan en los tramos 1 y 2 asciende a 1.757 m.

Tercera aplicación, adecuada de China y Domínguez (2006):

En una lateral de riego de microirrigación con 50 emisores, determinar la pérdida de carga por fricción entre:

1. El inicio de la lateral de riego y un punto localizado a la mitad del espaciamiento entre las salidas 36 y 37, contadas a partir del final de la misma y en sentido hacia aguas arriba (tubería telescópica corta con salidas múltiples), con $r_s = 2$ y $r_t = 0.5$.
2. El inicio de la lateral de riego y un punto localizado a un cuarto del espaciamiento entre las salidas 26 y 27, contadas a partir del final de la misma y en sentido hacia aguas arriba (tubería telescópica larga con salidas múltiples), con $r_s = 2$ y $r_t = 0.75$.
3. El punto medio del espaciamiento de las salidas 36 y 37 y el punto localizado a un cuarto del espaciamiento entre las salidas 26 y 27 contadas a partir del final de la misma y en sentido hacia aguas arriba (tubería telescópica intermedia con salidas múltiples), con $r_s = 0.5$ y $r_t = 0.75$.

Los datos disponibles son: diámetro interno 21 mm, número de emisores en la lateral 50, caudal medio del emisor 37.5 l/h, espaciamiento entre emisores consecutivos $S = 2.5$ m, espaciamiento entre el inicio de la lateral y la primera salida $S_0 = 5$ m, longitud más allá de la última salida en el sentido del flujo en la tubería telescópica corta con salidas múltiples $S_1 = 1.25$ m, longitud más allá de la última salida en el sentido del flujo en la tubería telescópica larga con salidas múltiples $S_1 = 1.875$ m.

La fórmula de Darcy-Weisbach para el cálculo de la pérdida de carga por fricción, determinando el factor de fricción f con la fórmula de Blasius ($f = 0.3164/Re^{0.25}$) está dada por la siguiente expresión:

$$h_f = 0.466 \frac{Q^{1.75}}{D^{4.75}} L \quad (31)$$

donde h_f resulta en m, Q se introduce en l/h, D en mm y L en m.

En la Tabla 2 se presentan los resultados de aplicar las fórmulas 19 y 20 propuestas en este trabajo.

Tramo	S	D	N	N'	N_T	Q	h_f	Ecuaciones Propuestas		h_{fL}
	(m)	(mm)				(l/h)	(m)	F_5	F_6	
Corto	2.5	21	14	36	50	37.5	$3.47 \cdot 10^{-4}$	11578.209		4.018
	2.5	21	14	36	50	1875	0.3262		12.315	4.018
Largo	2.5	21	24	26	50	37.5	$3.47 \cdot 10^{-4}$	15749.406		5.465
	2.5	21	24	26	50	1875	0.3262		16.752	5.465
Inter-medio	2.5	21	10	26	36	37.5	$3.47 \cdot 10^{-4}$	4171.197		1.447
	2.5	21	10	26	36	1350	0.1836		7.884	1.447
Diferencia entre las pérdidas de carga de la tubería telescópica larga y corta										1.447

Tabla 2. Resultados de la tercera aplicación

La pérdida de carga por fricción, evaluada segmento a segmento en cada uno de los tramos analizados, coincide plenamente con los resultados mostrados en la Tabla 2 y el valor total de pérdida de carga en toda la tubería es de 6.422 m.

CONCLUSIONES

Con las expresiones para los factores de salidas múltiples F_1 y F_5 , se puede determinar la pérdida de carga por fricción en cualquier tipo de situación que se presente a nivel práctico, en las tuberías con salidas múltiples (con descarga discreta a lo largo de la tubería) que constituyen a los sistemas de riego a presión utilizando sólo el caudal que se emitiría por una salida, por ello se considera que en el estado actual de conocimiento, dichas expresiones proporcionan una generalización en la cuantificación del factor de ajuste por salidas múltiples.

En la determinación de la pérdida de carga por fricción en una tubería convencional con salidas múltiples empleando las expresiones de F_2 , F_3 y F_4 , o en una tubería telescópica con salidas múltiples utilizando las expresiones de F_6 , F_7 y F_8 ; se incluye el caudal total que se va a distribuir a lo largo de toda la longitud de la tubería. Al mismo tiempo, para simplificar el cálculo de estos factores, se puede hacer uso de los valores dados en la tabla 1.

Se comprueba mediante el cálculo de la pérdida de carga por fricción segmento a segmento en una tubería con salidas múltiples (realizado por los investigadores de los ejemplos de aplicación analizados), la validez de las fórmulas propuestas en este trabajo para el cálculo de la pérdida de carga por fricción en las tuberías convencionales con salidas múltiples y las tuberías telescópicas con salidas múltiples. Además, es de observarse que la mayoría de los valores que arrojan las

fórmulas, rompen con el rango tradicional de ser menor o igual a uno.

LISTA DE SÍMBOLOS

B_{2j} : número Bernoulli, según j

C_{HW} : coeficiente de fricción para la fórmula de Hazen-Williams

D : diámetro interno de la tubería simple, de la tubería convencional con salidas múltiples o en el tramo de aguas arriba de la tubería telescópica con salidas múltiples

D' : diámetro interno en el tramo de aguas abajo en una tubería telescópica con salidas múltiples

f : factor de fricción para la fórmula de Darcy-Weisbach

F_1 : factor de ajuste por salidas múltiples, determinando h_f a partir de q y cualquier valor de r_s

F_2 : factor de ajuste para tuberías convencionales con salidas múltiples, determinando h_f a partir de Q y cualquier valor de r_s

F_3 : factor de ajuste para tuberías convencionales con salidas múltiples, determinando h_f a partir de Q y con $r_s = 1$

F_4 : factor de ajuste para tuberías convencionales con salidas múltiples, determinando h_f a partir de Q y con $r_s = 1/2$, que se puede obtener de la Tabla 1 empleando N

$F_{4(N_T)}$ = valores del factor de ajuste F_4 obtenidos de la Tabla 1 empleando N_T

$F_{4(N')}$ = valores del factor de ajuste F_4 obtenidos de la Tabla 1 empleando N'

F_5 : factor de ajuste para tuberías telescópicas con salidas múltiples en su tramo de aguas arriba, determinando h_f a partir de q y cualquier valor de r_s

- F_6 : factor de ajuste para tuberías telescópicas con salidas múltiples en su tramo de aguas arriba, determinando h_f a partir de Q y cualquier valor de r_s
- F_7 : factor de ajuste para tuberías telescópicas con salidas múltiples en su tramo de aguas arriba, determinando h_f a partir de Qy con $r_s = 1$
- F_8 : factor de ajuste para tuberías telescópicas con salidas múltiples en su tramo de aguas arriba, determinando h_f a partir de Qy con $r_s = 1/2$
- $f(x)$ = función cualquiera
- $f^{(2j-1)}$ = derivadas de $f(x)$, según el valor de j
- h_f : pérdida de carga por fricción en una tubería simple o sin distribución de caudal
- h_{f_i} : pérdida de carga por fricción en cada segmento de la tubería con salidas múltiples
- h_{f_L} : pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples
- i : entero 1, 2, 3, ...; que representa las salidas en la tubería con salidas múltiples desde aguas abajo hacia aguas arriba
- K : coeficiente, acorde con la fórmula para determinar h_f y el factor de conversión de unidades
- L : longitud total de la tubería simple, tubería convencional con salidas múltiples o del tramo de aguas arriba en una tubería telescópica con salidas múltiples
- L' : longitud total del tramo de aguas abajo en una tubería telescópica con salidas múltiples
- m : exponente de la velocidad en la fórmula de pérdida de carga por fricción empleada
- N : número de salidas en la tubería convencional con salidas múltiples o en el tramo de aguas arriba en la tubería telescópica con salidas múltiples
- N' : número de salidas en el tramo de aguas abajo de la tubería telescópica con salidas múltiples
- N_T : número total de salidas e igual a la suma de N y N'
- n : exponente del diámetro interno en la fórmula de pérdida de carga por fricción empleada
- Q : caudal que circula (que se va distribuyendo entre las salidas) por la tubería simple, por la tubería convencional con salidas múltiples o en el tramo de aguas arriba de una tubería telescópica con salidas múltiples
- Q' : caudal que circula (que se va distribuyendo entre las salidas) en el tramo de aguas abajo de una tubería telescópica con salidas múltiples
- Q_i : caudal que circula en cada segmento de la tubería con salidas múltiples
- q : caudal en cada una de las salidas
- r_s : relación entre la distancia, mayor o menor a S , del inicio de la tubería a la primera salida
- Re : número de Reynolds
- r_t : relación entre la distancia S_1 , mas allá de la última salida en el tramo de aguas arriba en una tubería telescópica con salidas múltiples y el S
- S : longitud de cada segmento de tubería entre dos salidas consecutivas
- S_0 : longitud entre el inicio de la tubería aguas arriba y la primera salida
- S_1 : longitud mas allá de la última salida en el tramo de aguas arriba en una tubería telescópica con salidas múltiples
- x = contador en la sumatoria
- α : parámetro empírico usado en la ecuación de Churchill para determinar f
- β : parámetro empírico usado en la ecuación de Churchill para determinar f
- ε : aspereza absoluta de la tubería
- ν : viscosidad cinemática

REFERENCIAS

- Anwar A., (1999a). Factor G for pipelines with equally spaced multiple outlets and outflow. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 125(1), 34–38.
- Anwar A., (1999b). Adjusted Factor G_a for pipelines with multiple outlets and outflow. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 125(6), 355–339.
- China R. y Domínguez A., (2006). Total Friction Loss along Multiple Outlets Pipes with Open End. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 132(1), 31–40.
- Spivey M., (2006). The Euler-Maclaurin Formula and Sums of Powers. *Mathematics Magazine*, 79(1), 61–64.
- Spokoinyi B., (2003-2005). Derivation of a general formula for $\sum_{i=1}^n i^k$, where $k \in N$. [En línea, ref. 12 de abril 2007]. Disponible en: <http://op-engine.com/Academic/Derivationof formula for i^k.pdf>