

# FACTORES DE AJUSTE PARA LA PÉRDIDA DE CARGA POR FRICCIÓN EN TUBERÍAS CON SALIDAS MÚLTIPLES TELESCÓPICAS O CON SERVICIO MIXTO

V. Ángeles Montiel, R. Arteaga Ramírez, M.A. Vázquez Peña, M. Carrillo García, L.A. Ibáñez Castillo

Departamento de Irrigación, Universidad Autónoma Chapingo  
km 38.5 Carretera México - Texcoco, Chapingo, Estado de México, CP. 056230  
vangeles@correo.chapingo.mx

**Resumen:** En este artículo se presentan dos expresiones para valorar el factor de ajuste en el cálculo de la pérdida de carga por fricción en tuberías con salidas múltiples telescópicas (constituidas por dos o más tramos de tubería con diámetro de diferente magnitud o tipo de material) o con servicio mixto (tramo de tubería en el que el diámetro y el tipo de material se mantienen invariables, que conduce y distribuye caudal). La característica fundamental de estos factores es su simplicidad, ya que exhiben una representación similar a la del conocido factor de ajuste para el cálculo de pérdida de carga por fricción en tuberías con salidas múltiples de Christiansen. Los resultados obtenidos al computar el factor de ajuste con las expresiones propuestas en las aplicaciones desarrolladas, muestran que son tan precisas como las de otros investigadores, precisión que se puede verificar fácilmente con la determinación de la pérdida de carga en una tubería con salidas múltiples, segmento a segmento entre salidas consecutivas. Se concluye así, que las ecuaciones que se proponen para valorar el factor de ajuste en el cálculo de la pérdida de carga por fricción en el tipo de tuberías referido, evita la determinación tediosa segmento a segmento entre salidas consecutivas de dicha pérdida, en toda la gama de situaciones que en la práctica se puedan prestar en la ejecución de proyectos de riego a presión. Finalmente, pero no por ello menos importante, es el hecho de que se prevé un grado de aceptación considerable de las ecuaciones de estos factores de ajuste por los especialistas en el ramo de la irrigación dada su simplicidad, precisión y representación conocida.

## INTRODUCCIÓN

Las tuberías con salidas múltiples son utilizadas en distintos sistemas de riego a presión como la aspersión convencional (fijos, semi-fijos o portátiles), la aspersión de movimiento intermitente (side roll, power roll o lateral con ruedas) y la aspersión de movimiento continuo (avance frontal); la microirrigación (goteo puntual, cinta de riego, microaspersión) y las tuberías multicompuertas para riego por gravedad. Esto hace que sea muy importante en la etapa de diseño de dichos sistemas, el disponer de expresiones que permitan con relativa facilidad el cálculo de la pérdida de carga por fricción que se presenta en las tuberías que los constituyen y así, realizar una adecuada selección de los equipos de impulsión necesarios para un correcto funcionamiento. La pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples, resulta ser menor

que en una tubería simple (con la misma longitud, diámetro interno idéntico y transportando un caudal constante a lo largo de toda la longitud de la tubería), ello debido a que el caudal va disminuyendo en la dirección del flujo y por tanto la velocidad y pérdida de carga por fricción se reducen en cada segmento de tubería entre dos salidas consecutivas. La evaluación estricta de la pérdida de carga por fricción en este tipo de tuberías, requiere del cálculo de la pérdida de carga por fricción en cada uno de los segmentos (ubicados entre dos salidas consecutivas y el que se encuentra desde la entrada de la tubería a la primera salida) que la componen, sin embargo, cuando el número de salidas es elevado, esta forma de cuantificar la pérdida de carga por fricción resulta impráctica. Varios han sido los investigadores que han propuesto expresiones (aplicables para ciertas condiciones específicas), que agilicen la valoración de la pérdida de carga

por fricción en una tubería de estas características, baste citar a: Christiansen (1942), Jensen y Fratini (1957), Scaloppi (1988), Anwar (1999) y más recientemente China y Domínguez (2006).

En este trabajo se presentan dos ecuaciones bastante simples y precisas que permiten computar la pérdida de carga por fricción, tanto en las tuberías con salidas múltiples telescópicas (constituidas por dos o más tramos de tubería con diámetro de diferente magnitud o tipo de material) como en alguna sección (inicial o intermedia) de una tubería con salidas múltiples (en este caso se presentará caudal aguas abajo de la última salida considerada), a este último tipo de tuberías también se le conoce como tuberías con servicio mixto (distribuyen y transportan agua).

## MATERIALES Y MÉTODOS

La pérdida de carga por fricción en una tubería simple (Figura 1) sin salidas en toda su longitud, se determina con la expresión genérica siguiente:

$$h_f = K \frac{Q^m}{D^n} L \quad (1)$$

donde  $h_f$  es la pérdida de carga por fricción;  $K$  involucra al coeficiente de conversión de unida-

des y al coeficiente de fricción que depende de la fórmula empleada para cuantificar  $h_f$  (Manning, Hazen-Williams, Scobey, Darcy-Weisbach, ...);  $Q$  caudal que circula en la tubería desde el inicio hasta el final de la misma;  $D$  diámetro interno de la tubería;  $L$  longitud de la tubería;  $m$  y  $n$  exponentes del caudal y del diámetro interno de la tubería, respectivamente. La ec.(1) indica que la pérdida de carga por fricción es independiente de la posición de la tubería, es decir,  $h_f$  tendrá el mismo valor independientemente de que la tubería esté colocada en posición horizontal, ascendente o descendente.

La pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples en toda su longitud (Figura 2), será menor que la pérdida de carga por fricción en una tubería simple sin salidas, a causa de que el caudal circulante disminuye en toda la longitud de la misma.

El cálculo de la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples requiere la determinación segmento a segmento, desde la última salida aguas abajo hasta la primera aguas arriba, de la pérdida de carga por fricción provocada en cada uno de ellos, según se muestra en la Tabla 1.

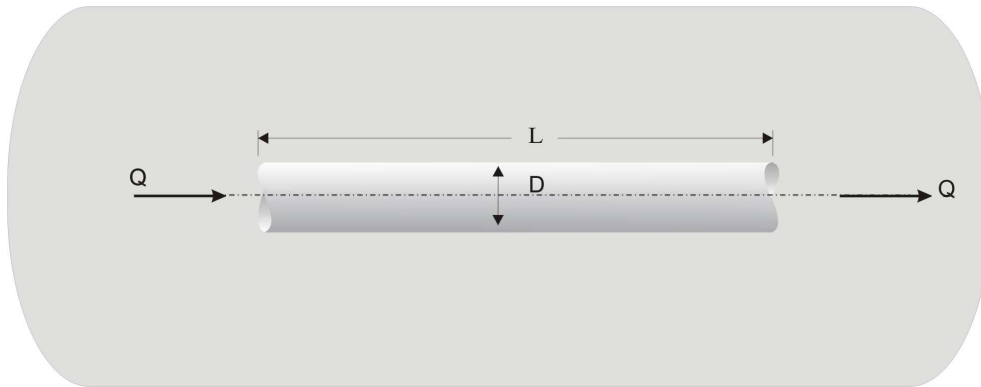


Figura 1. Tubería simple

Segmento (1)	Longitud (m) (2)	Diámetro (mm) (3)	Caudal (l/h) (4)	Pérdida de Carga (m) (5)
1	S	D	1q	$KD^{-n}S(1q)^m$
2	S	D	2q	$KD^{-n}S(2q)^m$
3	S	D	3q	$KD^{-n}S(3q)^m$
4	S	D	4q	$KD^{-n}S(4q)^m$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N-2	S	D	(N-2)q	$KD^{-n}S[(N-2)q]^m$
N-1	S	D	(N-1)q	$KD^{-n}S[(N-1)q]^m$
N	$S_0$	D	Nq	$KD^{-n}S_0(Nq)^m$

Tabla 1. Cálculo de la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples

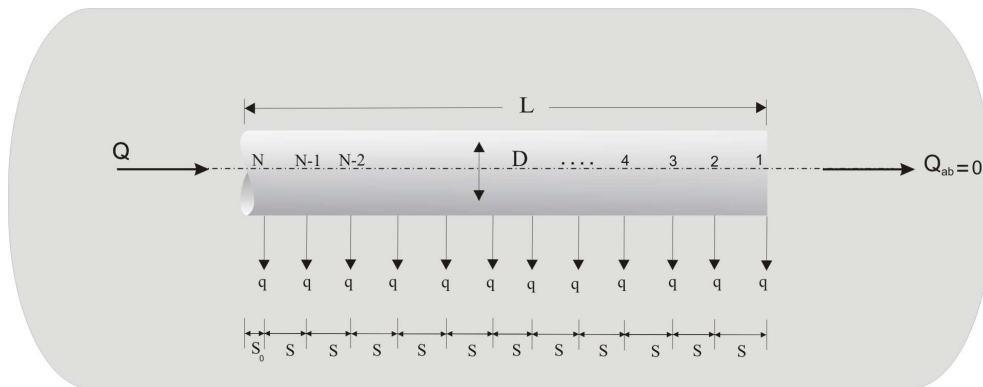


Figura 2. Tubería con salidas múltiples

Si se suman los valores de la columna 5 de la Tabla 1, se obtiene la pérdida de carga por fricción en toda la longitud de la tubería con salidas múltiples, matemáticamente esto puede expresarse por la ec. (2)

$$hf_L = \sum_{i=1}^N hf_i = \sum_{i=1}^N K \frac{q^m i^m}{D^n} S = K \frac{q^m}{D^n} S \sum_{i=1}^N i^m \quad (2)$$

donde  $hf_L$  es la pérdida de carga por fricción en la tubería con salidas múltiples;  $N$  número total de salidas;  $hf_i$  es la pérdida de carga por fricción en cada uno de los segmentos que constituyen la tubería con salidas múltiples;  $q$  es el caudal constante de cada una de las salidas;  $S$  es la distancia constante entre dos salidas consecutivas y la distancia entre el inicio de la tubería y la primera salida ( $S_0 = S$ ).

De las características establecidas anteriormente para una tubería simple y una tubería con salidas múltiples, se cumplen las siguientes dos relaciones

$$S = \frac{L}{N} \quad (3)$$

$$q = \frac{Q}{N} \quad (4)$$

Substituyendo las ecs. (3) y (4) en la ec. (2) se llega a la ec. (5)

$$hf_L = K \frac{Q^m}{D^n} L \left[ \frac{1}{N^{m+1}} \sum_{i=1}^N i^m \right] \quad (5)$$

La ec. (5) representa la manera tradicional de cuantificar la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples, es decir, se afecta la pérdida de carga por fricción en una tubería simple  $h_f$  por un factor  $F$  que tiene en

cuenta el número de salidas, por esto, la ec. (5) puede reescribirse como

$$hf_L = h_f [F] \quad (6)$$

donde a  $F$  suele denominársele factor de salidas múltiples, y que para este caso estaría dado por la ec. (7)

$$F = \frac{1}{N^{m+1}} \sum_{i=1}^N i^m \quad (7)$$

Christiansen (1942) desarrolló el factor de salidas múltiples  $F_1$ , para evitar llevar a cabo la sumatoria de la ec. (7), el cual está dado por

$$F_1 = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2N} + \frac{\sqrt{m-a}}{6N^2} \quad (8)$$

Los supuestos hechos en la deducción del factor  $F_1$  de Christiansen son

1. La distancia entre salidas consecutivas  $S$  es constante.
2. El caudal que proporciona cada salida  $q$  es constante.
3. La distancia del inicio de la tubería a la primera salida ( $S_0$ ) es igual a  $S$ .
4. No hay caudal aguas abajo de la última salida,  $Q_{ab} = 0$ .
5. Las características de tipo de material de la tubería (aspereza) y diámetro interno de la misma se mantienen constantes.

En muchas situaciones en el campo, la primera salida no puede estar localizada a un espaciamiento de la entrada de la tubería igual al que existe entre salidas consecutivas  $S$ , dejándose de cumplir el supuesto 3 de Christiansen. Jensen y Fratini (1957), derivaron un factor de salidas múltiples  $F_2$  donde la distancia entre el inicio de

la tubería y la primera salida, es igual a la mitad del espaciamiento entre salidas consecutivas. Dicho factor está dado por la ec. (9)

$$F_2 = \frac{1}{2N - 1} \left( \frac{2N}{m + 1} + \frac{\sqrt{m - 1}}{3N} \right) \quad (9)$$

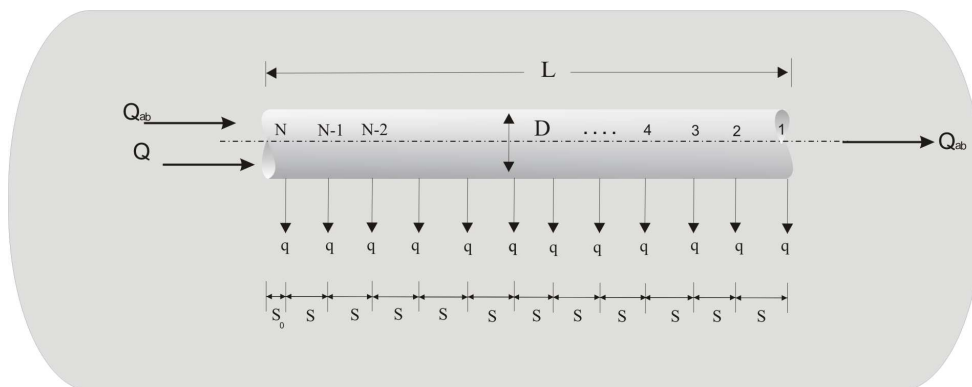
Scaloppi (1988), derivó un factor de salidas múltiples  $F_3$  tomando como base la ecuación de  $F_1$  propuesta por Christiansen, donde el espaciamiento desde el inicio de la tubería a la primera salida puede ser cualquier distancia; dejándose de cumplir el supuesto 3 de Christiansen, la expresión de dicho factor es

$$F_3 = \frac{NF_1 + r_s - 1}{N + r_s - 1} \quad (10)$$

Donde  $r_s$  es la relación entre la distancia, mayor o menor a  $S$ , del inicio de la tubería a la primera salida y el espaciamiento constante entre salidas consecutivas,  $r_s = S_0/S$ ; se puede verificar que la ec. (9) es un caso particular de la 10 sustituyendo en esta última un valor de  $r_s$  igual a  $1/2$ . Asimismo, la ec. (8) es un caso particular de la 10 con  $r_s$  igual a 1.

El caudal  $Q$  que entra a un tramo de tubería con salidas múltiples va disminuyendo a lo largo del mismo al darse la emisión del caudal  $q$  en cada una de las salidas, por esta razón, se recomienda que cuando la longitud sea muy grande se utilice una tubería telescópica (reducción del diámetro de la tubería en el sentido del flujo). En estas condiciones, ninguna de las fórmulas 8, 9 ó 10 es aplicable directamente al cálculo de la pérdida de carga por fricción, dado que para cualquier tramo de tubería con un diámetro determinado -excepto el último- existirá caudal aguas abajo de la última salida (Figura 3), dejándose de cumplir los supuestos 4 y 5 de Christiansen. El caudal aguas abajo de la última salida, en el tramo de tubería en análisis con un diámetro determinado, alimentará a las salidas que se encuentren aguas abajo en tramos sucesivos con diámetro de menor tamaño.

El cálculo de la pérdida de carga por fricción, determinando ésta en cada segmento entre dos salidas consecutivas, para una tubería con salidas múltiples telescópica o lo que equivale a presentar caudal aguas abajo de la última salida, se muestra en la Tabla 2.



**Figura 3.** Tubería con salidas múltiples con caudal aguas abajo de la última salida

Segmento (1)	Longitud (m) (2)	Diámetro (mm) (3)	Caudal (l/h) (4)	Pérdida de Carga (m) (5)	Pérdida de Carga (m) (6)
1	S	D	$1q + Q_{ab}$	$KD^{-n}S(1q + Q_{ab})^m$	$KD^{-n}Sq^m(1 + N')^m$
2	S	D	$2q + Q_{ab}$	$KD^{-n}S(2q + Q_{ab})^m$	$KD^{-n}Sq^m(2 + N')^m$
3	S	D	$3q + Q_{ab}$	$KD^{-n}S(3q + Q_{ab})^m$	$KD^{-n}Sq^m(3 + N')^m$
4	S	D	$4q + Q_{ab}$	$KD^{-n}S(4q + Q_{ab})^m$	$KD^{-n}Sq^m(4 + N')^m$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N-2	S	D	$(N-2)q + Q_{ab}$	$KD^{-n}S[(N-2)q + Q_{ab}]^m$	$KD^{-n}Sq^m[(N-2) + N']^m$
N-1	S	D	$(N-1)q + Q_{ab}$	$KD^{-n}S[(N-1)q + Q_{ab}]^m$	$KD^{-n}Sq^m[(N-1) + N']^m$
N	$S_0$	D	$Nq + Q_{ab}$	$KD^{-n}S_0(Nq + Q_{ab})^m$	$KD^{-n}S_0q^m(N + N')^m$

**Tabla 2.** Cálculo de la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples con caudal aguas abajo de la última salida

Si el caudal aguas abajo  $Q_{ab}$  en la columna 5 de la Tabla 2 se divide por el caudal constante de cada salida  $q$  se obtendrá un número de salidas  $N'$  ficticio aguas abajo y, por lo tanto, puede ser substituido  $Q_{ab}$  por  $N'q$ , generándose de esta manera la columna 6 de la Tabla 2.

La suma de los valores de la columna 6 de la Tabla 2 proporciona la pérdida de carga por fricción, en toda la longitud de la tubería con salidas múltiples con caudal aguas abajo de la última salida, esto puede expresarse mediante la ec. (11)

$$\begin{aligned} hf_L &= \sum_{i=1}^N hf_i = \sum_{i=1}^N K \frac{q^m (i + N')^m}{D^n} S \\ &= K \frac{q^m}{D^n} S \sum_{i=1}^N (i + N')^m \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $N'$  es el número de salidas ficticias aguas abajo de la última salida resultado de computar la relación  $Q_{ab}/q$ .

Substituyendo las ecuaciones 3 (con  $S_0 = S$ ) y 4 en la ec. (11) se llega a la ec. (12)

$$hf_L = K \frac{q^m}{D^n} \left[ \frac{1}{N^{m+1}} \sum_{i=1}^N (i + N')^m \right] \quad (12)$$

La ec. (12) representa también la manera tradicional de cuantificar la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples, es decir, se afecta la pérdida de carga por fricción en una tubería simple  $h_f$  por un factor  $F_4$  que toma en cuenta tanto el número de salidas ( $N$ ) en el tramo de tubería con un diámetro dado en análisis, como las ficticias ( $N'$ ) en otro tramo de tubería con igual o distinta magnitud en diámetro aguas abajo, por esto, la ec. (12) puede reescribirse como la ec. (6), siendo el factor de salidas múltiples dado por la ec. (13)

$$F_4 = \frac{1}{N^{m+1}} \sum_{i=1}^N (i + N')^m \quad (13)$$

Para llegar a una expresión en la que se evite realizar la sumatoria de la ec. (13), se considera que se tiene un número total de salidas  $N_T$  igual a la suma de  $N$  y  $N'$ , entonces la sumatoria de los  $N_T$  términos elevados a una potencia  $m$ , se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{N_T} i^m = \sum_{i=1}^{N'} + \sum_{i=1}^N (i + N')^m \quad (14)$$

De la ec. (14) se despeja la sumatoria que corresponde al tramo de tubería con diámetro

dado en análisis que tiene caudal aguas abajo, es decir

$$\sum_{i=1}^N (i + N')^m = \sum_{i=1}^{N_T} i^m - \sum_{i=1}^{N'} i^m \quad (15)$$

La ec. (8) para  $F_1$  de Christiansen, se puede expresar en forma alternativa por medio de la ec. (16)

$$F_1 = \frac{1}{N^{m+1}} \left[ \frac{N^{m+1}}{m+1} + \frac{N^m}{2} + \frac{\sqrt{m-1}(N^{m-1})}{6} \right] \quad (16)$$

Si se compara la ec. (7) y (16), se puede establecer la igualdad de la ec. (17), que representa la generalización de la sumatoria de  $N$  enteros positivos (a partir de 1) elevados a la potencia  $m$  en sus 3 primeros términos, según Christiansen

$$\sum_{i=1}^N i^m = \left[ \frac{N^{m+1}}{m+1} + \frac{N^m}{2} + \frac{\sqrt{m-1}(N^{m-1})}{6} \right] \quad (17)$$

Aplicando la ec. (17) a cada una de las sumatorias del lado derecho de la igualdad en la ec. (15), se llega a la ec. (18)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (i + N')^m &= \left[ \frac{N_T^{m+1}}{m+1} + \frac{N_T^m}{2} + \frac{\sqrt{m-1}(N_T^{m-1})}{6} \right] \\ &- \left[ \frac{N'^{m+1}}{m+1} + \frac{N'^m}{2} + \frac{\sqrt{m-1}(N'^{m-1})}{6} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

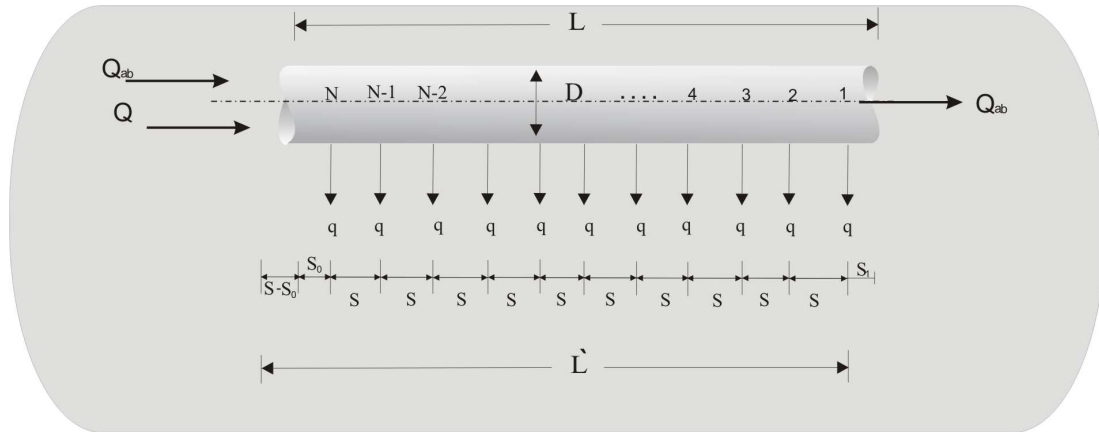
Substituyendo la ecuación 18 en la ecuación 13 y agrupando se llega a la ecuación 19

$$\begin{aligned} F_4 &= \frac{1}{N^{m+1}} \left[ \frac{N_T^{m+1} - N'^{m+1}}{m+1} + \frac{N_T^m - N'^m}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{m-1}(N_T^{m-1} - N'^{m-1})}{6} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Si en la ecuación 19  $N'$  es cero, se obtiene la ecuación 16 que proporciona el factor de salidas múltiples de Christiansen.

Los supuestos hechos en la deducción del factor  $F_4$  son

1. La distancia entre salidas consecutivas  $S$  es constante.
2. El caudal que proporciona cada salida  $q$  es constante.
3. La distancia del inicio de la tubería a la primera salida  $S_0$  es igual a  $S$ .



**Figura 4.** Tubería con salidas múltiples con caudal aguas abajo de la última salida, distancia entre el inicio de la tubería y la primera salida diferente de la distancia entre salidas consecutivas y longitud de tubería más allá de la última salida aguas abajo

4. Las características de tipo de material del tramo de tubería (aspereza) y diámetro interno del mismo se mantienen constantes en la longitud analizada.
5. Se desprecia la carga de velocidad.
6. La pérdida de carga localizada por cambio de diámetro en la tubería, si fuera el caso, se ignora.
7. El incremento en la carga de presión al pasar por cada una de las salidas a causa de la disminución del gasto, es igual a la pérdida de carga localizada causada por la turbulencia asociada con cada salida.

La ecuación 19 es equivalente a la ecuación 8 de Christiansen, pero ahora aplicable a una tubería con salidas múltiples que presente caudal aguas abajo de la última salida, mantiene la tradición del cálculo de la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples utilizando el factor  $F_1$  de Christiansen, en el sentido de que afecta a la pérdida de carga por fricción que se produce en una tubería simple que conduce un caudal igual al producto del número de salidas  $N$  y el caudal constante  $q$  que se emite por cada una de las salidas, aunque el valor del coeficiente de salidas múltiples en este caso no siempre resulte menor o igual a la unidad. En términos algebraicos, esto se expresa como

$$hf_L = K \frac{Q^m}{D^n} [F_4] \quad (20)$$

Anwar (1999a), presenta una expresión para estimar el coeficiente de salidas múltiples de la

ecuación 20 y considera en el cálculo de  $hf_L$  el caudal total  $Q_T$  que resulta de la suma del caudal que se distribuyen entre las  $N$  salidas ( $Q$ ) y el caudal aguas abajo ( $Q_{ab}$ ), es decir

$$hf_L = K \frac{(Q + Q_{ab})^m}{D^n} L[F_5] = K \frac{Q_T^m}{D^n} L[F_5] \quad (21)$$

En la ecuación 21, según Anwar (1999a),  $F_5$  está dado por

$$F_5 = \frac{1}{N^{m+1}(1 + r_c)^m}$$

$$\left( \frac{1}{m+1} \{ [N(1 + r_c) + 1]^{m+1} - [N(r_c)]^{m+1} \} - \frac{1}{2} \{ [N(1 + r_c) + 1]^m + [N(r_c)]^m \} + \frac{m}{12} \{ [N(1 + r_c) + 1]^{m-1} - [N(r_c)]^{m-1} \} \right) \quad (22)$$

En la ecuación 22,  $r_c$  representa la relación del caudal aguas abajo y el caudal que se distribuye en las  $N$  salidas ( $r_c = Q_{ab}/Q = N'/N$ ).

Cuando la distancia entre el inicio de la tubería con salidas múltiples y la primera salida es diferente de la distancia entre salidas consecutivas ( $S_0 \neq S$ ) y/o cuando existe longitud de tubería más allá de la última salida (Figura 4), habrá que realizar los ajustes correspondientes a la ecuación 20.

El primer ajuste que se hace es considerar en la ecuación 11 la relación  $Q_T/N_T$  en lugar de  $Q/N$  como valor representativo del caudal  $q$  que se emite en cada una de las salidas ( $q$  numéricamente tendrá el mismo valor cuando  $N'$  es entero, este caso se presenta en las tuberías con

salidas múltiples telescópicas), entonces la ecuación para el factor de salidas múltiples es

$$F_6 = \frac{1}{N_T^m N} \left[ \frac{N_T^{m+1} - N'^{m+1}}{m+1} + \frac{N_T^m - N'^m}{2} + \frac{\sqrt{m-1}(N_T^{m-1} - N'^{m-1})}{6} \right] \quad (23)$$

con  $Q_T = Q + Q_{ab}$ ,  $N_T = N + N'$  y  $N' = Q_{ab}/q$ .

La ecuación 23 mantiene la tradición respecto al cálculo de la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples empleado el factor  $F_1$  de Christiansen, en el sentido de que el factor de salidas múltiples es siempre menor o igual a la unidad, pero el caudal que se considera en el cálculo de la pérdida de carga por fricción en el tramo de tubería simple, resulta de sumar el producto de las  $N$  salidas y el caudal  $q$  de cada salida, con el caudal circulante aguas abajo de la última salida.

El segundo ajuste es en la pérdida de carga que se presenta en la longitud real  $L$  respecto a la longitud hipotética  $L'$  (considerada como  $N$  veces  $S$ , Figura 4), así se tiene que

$$hf_L = K \frac{Q_T^m}{D^n} L' [F_6] - K \frac{Q_T^m}{D^n} L' [F_6] (S - S_0) + K \frac{(Q_{ab})^m}{D^n} S_1 \quad (24)$$

Considerando las relaciones de longitud  $r_s = S_0/S$ ,  $r_t = S_1/S$  y  $S = L'/N$  la ecuación 24 queda

$$\begin{aligned} hf_L &= K \frac{Q_T^m}{D^n} L' [F_6] - K \frac{Q_T^m}{D^n} L' [F_6] (1 - r_s) S \\ &\quad + K \frac{(Q_{ab})^m}{D^n} r_t S \left( \frac{Q_T^m}{Q_T^m} \right) \\ hf_L &= K \frac{Q_T^m}{D^n} L' [F_6] - K \frac{Q_T^m}{D^n} L' [F_6] (1 - r_s) \frac{L'}{N} \\ &\quad + K \frac{(Q_T)^m}{D^n} r_t \frac{L'}{N} \left( \frac{Q_{ab}}{Q_T} \right)^m \\ hf_L &= K \frac{Q_T^m}{D^n} L' [F_6] - K \frac{Q_T^m}{D^n} L' [F_6] \frac{(1 - r_s)}{N} \\ &\quad + K \frac{(Q_T)^m}{D^n} L' \frac{r_t}{N} \left( \frac{N'q}{N_T q} \right)^m \quad (25) \\ hf_L &= K \frac{Q_T^m}{D^n} L' \left[ F_6 - \frac{(1 - r_s)}{N} + \frac{r_t}{N} \left( \frac{N'}{N_T} \right)^m \right] \\ hf_L &= K \frac{Q_T^m}{D^n} L' \left[ \frac{NF_6 - 1 + r_s + \left( \frac{N'}{N_T} \right)^m r_t}{N} \right] \end{aligned}$$

Para implicar a la longitud real  $L$  en la ecuación 25 y apoyándose en la Figura 4, se tiene

que

$$\begin{aligned} hf_L &= K \frac{Q_T^m}{D^n} L' \left( \frac{L}{L'} \right) \left[ \frac{NF_6 - 1 + r_s + \left( \frac{N'}{N_T} \right)^m r_t}{N} \right] \\ &= K \frac{Q_T^m}{D^n} L \left( \frac{L'}{L} \right) \left[ \frac{NF_6 - 1 + r_s + \left( \frac{N'}{N_T} \right)^m r_t}{N} \right] \\ hf_L &= K \frac{Q_T^m}{D^n} L \left( \frac{NS}{[N-1]S + S_0 + S_1} \right) \left[ \frac{NF_6 - 1 + r_s + \left( \frac{N'}{N_T} \right)^m r_t}{N} \right] \\ hf_L &= K \frac{Q_T^m}{D^n} L \left( \frac{NS}{[N-1] + r_s + r_t S} \right) \left[ \frac{NF_6 - 1 + r_s + \left( \frac{N'}{N_T} \right)^m r_t}{N} \right] \\ hf_L &= K \frac{Q_T^m}{D^n} L \left[ \frac{NF_6 - 1 + r_s + \left( \frac{N'}{N_T} \right)^m r_t}{N - 1 + r_s + r_t} \right] \quad (26) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para calcular el coeficiente de salidas múltiples para una tubería en las condiciones dadas en la Figura 4, se emplea la ec.(27)

$$F_T = \left[ \frac{NF_6 - 1 + r_s + \left( \frac{N'}{N_T} \right)^m r_t}{N - 1 + r_s + r_t} \right] \quad (27)$$

Si no existe longitud de tubería adicional aguas abajo de la última salida ( $r_t = 0$ ), la ec.(27) adquiere la forma de la ecuación 10 propuesta por Scaloppi (1998).

Anwar (1999b) llega a una expresión similar a la de Scaloppi (1998) para el coeficiente de salidas múltiples, dada por

$$F_8 = \left[ \frac{NF_5 - 1 + r_s}{N - 1 + r_s} \right] \quad (28)$$

China y Domínguez (2006), presenta una expresión para el coeficiente de salidas múltiples aplicable a las condiciones de la Figura 4, dada por

$$\begin{aligned} F_9 &= \frac{N_T}{N_T - 1 + r_s} \left[ \frac{1 - \left( \frac{N'}{N_T} \right)^{m+1}}{m+1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2r_s - 1 - (1 - 2r_t) \left( \frac{N'}{N_T} \right)^m}{2N_T} + \frac{1 - \left( \frac{N'}{N_T} \right)^{m-1}}{12N_T^2} m \right] \quad (29) \end{aligned}$$

Tramo	$L$ (m)	$D$ (mm)	$N$	$N'$	$N_T$	$Q$ (l/s)	$h_f$ (m)	$F_4$ (Ec. 19)	$F_5$ (Ec. Anwar, 1999a)	$h_{f_L}$ (m)
1	144	75	12	0	12	6	4.330		0.393	1.70
	144	75	12	0	12	6	4.330	0.393		1.70
2	144	100	12	12	24	12	3.850		0.634	2.44
	144	100	12	12	24	6	1.066	2.290		2.44
Suma										4.14

**Tabla 3.** Resultados de la primera aplicación

Entonces, para calcular la pérdida de carga por fricción, se aplica la ec.(26) (considerando la longitud completa de los tramos de tubería con salidas múltiples  $L = (N' + N - 1) * S + S_0$ ), sustituyendo  $F_7$  por  $F_9$ .

## RESULTADOS

Se aplicarán las ecuaciones propuestas en este trabajo a los ejemplos dados por Anwar (1999a), Anwar (1999b) y China y Domínguez (2006), a efecto de realizar comparaciones en los resultados obtenidos.

### Primera aplicación, Anwar (1999a)

Calcular la pérdida de carga por fricción en una lateral de aspersión con 288 m de longitud. La separación entre los aspersores es de 12 m. Los primeros 144 m a partir del inicio de la lateral, tienen un diámetro interno de la tubería de 100 mm; y los restantes 144 m de lateral tienen un diámetro interno de tubería de 75 mm. Hay un total de 24 aspersores en la lateral de aspersión con un caudal de descarga en cada uno de ellos de 0.5 l/s. En la solución se empleará la fórmula de Hazen-Williams para calcular la pérdida de carga por fricción (estableciendo un coeficiente de fricción de 130).

La fórmula de Hazen-Williams para el cálculo de la pérdida de carga por fricción en una tubería simple según la ec.(1), está dada por

$$h_f = 1,212 * 10^{12} \left( \frac{1}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D^{4,871}} \frac{L}{100} \quad (30)$$

donde  $h_f$  resulta en m,  $C_{HW}$  es el coeficiente de fricción,  $Q$  se introduce en l/s,  $D$  en mm y  $L$  en m.

La lateral de aspersión tiene, entonces, los siguientes dos tramos:

Tramo 1. El tramo de aguas abajo con un diámetro interno de 75 mm, longitud de 144 m y sin caudal aguas abajo.

Tramo 2. El tramo de aguas arriba con un diámetro interno de 100 mm, longitud de 144 m y con caudal aguas abajo para alimentar al tramo 1.

En la Tabla 3 se presentan los resultados de aplicar tanto la fórmula de Anwar (1999a) como la fórmula 19 propuesta en este trabajo.

La pérdida de carga por fricción, evaluada segmento a segmento desde aguas abajo hasta aguas arriba, proporciona un valor de 4.14 m similar al evaluado, tanto con la fórmula de Anwar (1999a) como con la fórmula 19 propuesta en este trabajo.

### Segunda aplicación, Anwar (1999b)

Una lateral de aluminio en riego por aspersión tiene una longitud total de 213 m. El primer tramo de tubería aguas arriba tiene 105 m de longitud con el primer aspersor a 9 m del inicio de la lateral y los ocho aspersores restantes a un espaciamiento de 12 m entre ellos. El diámetro interno de este tramo es de 100 mm. El tramo de aguas abajo tiene una longitud de 108 m con nueve aspersores espaciados a cada 12 m. Este tramo tiene un diámetro interno de 75 mm. Calcular la pérdida de carga por fricción en la tubería si el caudal promedio de los aspersores es de 0.5 l/s (asumir agua a 15°C con viscosidad cinemática  $\nu = 1,14 * 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, y aspereza absoluta de la tubería  $\varepsilon = 0.127$  mm).

La fórmula de Darcy-Weisbach para el cálculo de la pérdida de carga por fricción está dada por la siguiente expresión

$$h_f = \frac{f}{12,1} \frac{Q^2}{D^5} L \quad (31)$$

donde  $h_f$  resulta en m,  $f$  es el coeficiente de fricción,  $Q$  se introduce en m<sup>3</sup>/s,  $D$  y  $L$  en m.

La determinación del coeficiente de fricción se realizará con la ecuación de Churchill (1977)

$$f = \left[ \left( \frac{8}{Re} \right) + \frac{1}{(\alpha + \beta)^{15}} \right]^{1/12} \quad (32)$$



Tramo	$L$ (m)	$D$ (mm)	$N$	$N'$	$N_T$	$Q$ (l/s)	$h_f$ (m)	(Ec. 23) $F_6$	(Ec. 27) $F_7$	(Ec. Anwar, 1999b) $F_5$ $F_8$	$hf_L$ (m)
1	108	75	9	0	9	4.5	1.926			0.391	0.753
	108	75	9	0	9	4.5	1.926	0.391			0.753
2	105	100	9	9	18	9	1.633			0.625 0.615	1.004
	105	100	9	9	18	9	1.633	0.625	0.615		1.004
Suma											1.757

**Tabla 4.** Resultados de la primera aplicación

donde  $Re$  es el número de Reynolds ( $Re = v * D/\nu$ ), con  $\alpha$  y  $\beta$  dadas por las ecuaciones siguientes

$$\beta = \left( \frac{37530}{Re} \right)^{16} \quad (33)$$

$$\alpha = \left\{ 2,457 \ln \left[ \frac{1}{\left( \frac{7}{Re} \right)^{0,9} + 0,27 \left( \frac{\varepsilon}{D} \right)} \right] \right\}^{16} \quad (34)$$

Las características de lateral de aspersión serán entonces:

Tramo 1. Tramo de tubería aguas abajo con un diámetro interno de 75 mm, longitud de 108 m, la primera salida a 12 m e igual a la separación entre salidas consecutivas y sin caudal aguas abajo.

Tramo 2. Tramo de tubería aguas arriba con un diámetro interno de 100 mm, longitud de 105 m, la primera salida a 9 m del inicio de la lateral, con caudal aguas abajo,  $r_s = 9/12 = 0,75$  y  $r_t = 0$ .

En la Tabla 4 se presentan los resultados de aplicar tanto la fórmula de Anwar (1999b) como las ecs.(23) y (27) propuestas en este trabajo.

La pérdida de carga por fricción, evaluada segmento a segmento desde aguas abajo hasta aguas arriba, proporciona un valor de 1.757 m similar al evaluado tanto con las fórmulas de Anwar (1999b) como con las fórmulas propuestas en este trabajo.

Tercera aplicación, China y Domínguez (2006):

En una lateral de riego de microirrigación con 50 emisores, determinar la pérdida de carga por fricción entre:

1. El inicio de la lateral de riego y un punto localizado a la mitad del espaciamiento entre las salidas 36 y 37, contadas a partir del final de la misma y en sentido hacia

aguas arriba (tramo de tubería corto con servicio mixto), con  $r_s = 2$  y  $r_t = 0,5$ .

2. El inicio de la lateral de riego y un punto localizado a un cuarto del espaciamiento entre las salidas 26 y 27, contadas a partir del final de la misma y en sentido hacia aguas arriba (tramo de tubería largo con servicio mixto), con  $r_s = 2$  y  $r_t = 0,75$ .

3. El punto medio del espaciamiento de las salidas 36 y 37 y el punto localizado a un cuarto del espaciamiento entre las salidas 26 y 27 contadas a partir del final de la misma y en sentido hacia aguas arriba (tramo de tubería intermedio), con  $r_s = 0,5$  y  $r_t = 0,75$ .

La fórmula de Darcy-Weisbach para el cálculo de la pérdida de carga por fricción, determinando el factor de fricción  $f$  con la fórmula de Blasius ( $f = 0,3164/Re^{0,25}$ ) está dada por la siguiente expresión:

$$h_f = 0,4664 \frac{Q^{1,75}}{D^{4,75}} \quad (35)$$

donde  $h_f$  resulta en m,  $Q$  se introduce en l/h,  $D$  en mm y  $L$  en m.

Los datos disponibles son: diámetro interno 21 mm, número de emisores en la lateral 50, caudal medio del emisor 37.5 l/h, espaciamiento entre emisores consecutivos 2.5 m, espaciamiento entre el inicio de la lateral y la primera salida 5 m, longitud más allá de la última salida en análisis en el sentido del flujo en el tramo de tubería corto con servicio mixto 1.25 m, longitud más allá de la última salida en análisis en el sentido del flujo en el tramo de tubería largo con servicio mixto 1.875 m.

En la Tabla 5 se presentan los resultados de aplicar tanto la fórmulas de China y Domínguez (2006) como las ecs.(23) y (27) propuestas en este trabajo.

Tramo	$L$ (m)	$D$ (mm)	$N$	$N'$	$N_T$	$Q$ (l/s)	$h_f$ (m)	(Ec. 23) $F_6$	(Ec. 27) $F_7$	(Ec. China y Domínguez, 2006) $F_9$	$h_{fL}$ (m)
Corto	127.50	21		36	50	1875	16.638			0.241	4.018
	38.750	21	14	36	50	1875	5.057	0.788	0.795		4.018
Largo	127.50	21		26	50	1875	16.638			0.328	5.465
	64.375	21	24	26	50	1875	8.401	0.646	0.651		5.465
Inter-medio	127.50	21			50	1875	16.638			0.328-0.241=0.087	1.447
	25.625	21	10	26	36	1350	1.882	0.796	0.769		1.447
Diferencia entre las pérdidas de carga del tramo largo y el corto											1.447

**Tabla 5.** Resultados de la tercera aplicación

La pérdida de carga por fricción, evaluada segmento a segmento en cada uno de los tramos analizados, coincide plenamente con los resultados mostrados en la Tabla 5.

Cuarta aplicación, adaptada de China y Domínguez (2006):

En una lateral de riego de microirrigación con 10 emisores, determinar la pérdida de carga por fricción entre:

1. La salida 1, contando a partir del final del tramo de tubería con salidas múltiples y en sentido hacia aguas arriba y el final de la tubería considerada (tramo de tubería simple sin salidas de aguas abajo).
2. El inicio y final de la tubería con salidas múltiples, (tramo con 10 salidas múltiples), con  $r_s = 1$  y  $r_t = 0$ .

3. El inicio de la tubería y el final del espaciamiento correspondiente a la salida 10 de la tubería con salidas múltiples, contadas a partir del final de la misma y en sentido hacia aguas arriba (tramo de tubería simple sin salidas de aguas arriba).

Utilizando la misma información dada para la lateral de riego en la aplicación de China y Domínguez (2006) y empleando la fórmula 35, se llega a los resultados de las Tablas 6 y 7.

En la Tabla 6, al caudal de 975 l/h en el tramo de tubería simple de aguas abajo le corresponden 26 salidas de un caudal de 37.5 en cada una de ellas; mientras que al caudal de 1350 l/h que se presenta en el tramo de tubería simple de aguas arriba le corresponden 36 salidas con idéntico caudal por salida.

Número de Segmento	Longitud (m)	Diámetro (mm)	Caudal (l/h)	Pérdida (m)
1	65	21	975	2,701
2	2,5	21	1012,5	0,111
3	2,5	21	1050	0,118
4	2,5	21	1087,5	0,126
5	2,5	21	1125	0,133
6	2,5	21	1162,5	0,141
7	2,5	21	1200	0,149
8	2,5	21	1237,5	0,158
9	2,5	21	1275	0,166
10	2,5	21	1312,5	0,175
11	2,5	21	1350	0,184
12	37,5	21	1350	2,754
Total				6,916

**Tabla 6.** Resultados de la cuarta aplicación, cálculo de la pérdida de carga por fricción segmento a segmento

Tramo	$L$ (m)	$D$ (mm)	$N$	$N'$	$N_T$	$Q$ (l/s)	$h_f$ (m)	Ecuaciones Propuestas $F_4$ $F_6$ $F_7$	$hf_L$ (m)
Simple Aguas abajo	65.00	21				975	2.701		2.701
Intermedio	25.00	21	10	26	36	375	0.195	7.489	1.461
Simple Aguas arriba	37.50	21				1350	2.754		2.754
Total								6.916	
Completo	127,5	21	10	26	36	1350	9.364	0.796   0.739	6.916

**Tabla 7.** Resultados de la cuarta aplicación, con las expresiones propuestas

En la última fila de la Tabla 7, al calcular la pérdida de carga por fricción en toda la longitud de la tubería, los valores para  $r_s$  y  $r_t$  considerados fueron 16 y 26, respectivamente. También se puede comprobar, que el factor  $F_9$  propuesto por China y Domínguez (2006), arroja un valor idéntico al de  $F_7$ , por lo que los resultados de la última fila serían similares para  $h_f$  aplicando  $F_9$ .

De la solución a los problemas planteados y empleando las ecuaciones desarrolladas en este trabajo, se puede generalizar una estrategia de solución a las tuberías con salidas múltiples telescópicas y/o con servicio mixto, como se indica a continuación:

1. Determinar la pérdida de carga por fricción en el tramo de tubería con salidas múltiples con diámetro más pequeño ubicado en la parte de aguas abajo, empleando el coeficiente  $F_1$ .
2. Calcular la pérdida de carga por fricción, en los tramos de tubería con salidas múltiples con diámetro de magnitud y/o tipo de material diferente que existan ubicados en la parte intermedia de la longitud total, utilizando el coeficiente  $F_4$ .
3. Estipular la pérdida de carga por fricción en la tubería con salidas múltiples con el diámetro mayor ubicado en la parte de aguas arriba, empleando el coeficiente  $F_4$  si la distancia  $S_0$  es igual a  $S$ , pero si  $S_0$  es diferente de  $S$ , deberá emplearse el factor  $F_6$  en combinación con  $F_7$ .

## CONCLUSIONES

Con las ecuaciones y estrategia propuestas para calcular el factor de salidas múltiples, se realiza el menor número de cálculos para obtener la pérdida de carga por fricción en tuberías con salidas múltiples telescópicas o con servicio mixto.

Se emplea en las dos expresiones propuestas para el cómputo del factor de salidas múltiples, la tradicional y muy conocida representación de la fórmula de Christiansen, por lo que se prevé una aceptación y aplicación amplias de estas expresiones por los especialistas en el ramo de la irrigación.

Con las expresiones para los factores de salidas múltiples  $F_4$  y  $F_6$  propuestas (y este último en combinación con la expresión desarrollada para  $F_7$ ), se puede determinar la pérdida de carga por fricción en cualquier tipo de situación que se presente en la práctica, en las tuberías con salidas múltiples (con descarga discreta a lo largo de la tubería) que constituyen a los sistemas de riego a presión, por ello se considera que en el estado actual de conocimiento, dichas expresiones proporcionan una generalización del Factor de salidas múltiples propuesto por Christiansen (1942).

En la determinación de la pérdida de carga por fricción en un tramo de tubería con salidas múltiples empleando la expresión de  $F_4$ , se incluye sin más el caudal que se va a distribuir a lo largo del tramo de tubería en análisis así como su longitud efectiva, lo que representa una ventaja al momento de establecer el valor de estos parámetros; en cambio en la expresión de  $F_5$  dada por Anwar (1999a) se utiliza la suma del caudal que se distribuye con el caudal que se conduce. En tanto que, en la utilización de las expresiones para  $F_6$  y  $F_7$  se asigna únicamente el valor de la longitud efectiva del tramo de tubería bajo análisis, lo que también representa cierta ventaja en comparación a la longitud completa (resultado de sumar la longitud de todos los tramos que constituyen la tubería en análisis) que se usa cuando se cuantifica la pérdida de carga por fricción en un tramo de tubería con salidas múltiples utilizando la expresión para  $F_9$  propuesta por China y Domínguez (2006).

Se comprueba mediante el cálculo de la pérdida de carga por fricción segmento a segmento en una tubería con salidas múltiples (realizado por los investigadores de los ejemplos de aplicación analizados), la validez de las fórmulas propuestas en este trabajo para el cálculo de la pérdida de carga por fricción en las tuberías con salidas múltiples, que presentan caudal aguas abajo de la última salida (tuberías con servicio mixto) y tuberías con salidas múltiples telescópicas. Además, es de observarse que los valores que arroja la fórmula para  $F_4$ , rompe con el rango tradicional de ser menor o igual a uno y el uso de la fórmula para  $F_6$  obliga a calcular la pérdida de carga en el tramo de tubería simple correspondiente, empleando la suma de caudales de todas las salidas ubicadas en ella y el caudal aguas abajo de la última salida, obteniéndose valores de coeficientes menores o iguales a uno.

#### LISTA DE SÍMBOLOS

- $C_{HW}$ : coeficiente de fricción para la fórmula de Hazen-Williams
- $D$ : diámetro interno de la tubería
- $F$ : factor de ajuste por salidas múltiples
- $F$ : factor de fricción para la fórmula de Darcy-Weisbach
- $F_1$ : factor de ajuste por salidas múltiples de Christiansen (1942)
- $F_2$ : factor de ajuste por salidas múltiples de Jensen y Fratini (1957), con  $r_s = 0.5$
- $F_3$ : factor de ajuste por salidas múltiples de Scaloppi (1988), con  $r_s$  entre 0 y 1 inclusive
- $F_4$ : factor de ajuste por salidas múltiples en una tubería con salidas múltiples con  $Q_{ab} > 0$ , con  $S$  y  $q$  constantes (se cumplen los 3 primeros supuestos de Christiansen)
- $F_5$ : factor de ajuste por salidas múltiples de Anwar (1999a), con  $Q_{ab} > 0$  y  $r_s = 1$
- $F_6$ : factor de ajuste por salidas múltiples en una tubería con salidas múltiples con  $Q_{ab} > 0$ ,  $S_0 \neq S$ , y  $q$  constante
- $F_7$ : factor de ajuste por salidas múltiples general, aplicable a cualquier valor de  $S_0$  y  $S_1$ , con  $Q_{ab} > 0$
- $F_8$ : factor de ajuste por salidas múltiples de Anwar (1999b), con  $Q_{ab} > 0$  y  $r_s$  entre 0 y 1 inclusive
- $F_9$ : factor de ajuste por salidas múltiples de China y Domínguez (2006), con  $Q_{ab} > 0$ ,  $r_s$  y  $r_t$  entre 0 y 1 inclusive
- $h_f$ : pérdida de carga por fricción en una tubería simple o sin distribución de caudal
- $h_{f_i}$ : pérdida de carga por fricción en cada segmento de la tubería con salidas múltiples
- $h_{f_L}$ : pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples
- $i$ : entero 1, 2, 3, ...; que representa las salidas en la tubería con salidas múltiples desde aguas abajo hacia aguas arriba
- $K$ : coeficiente, acorde con la fórmula para determinar  $h_f$  y el factor de conversión de unidades
- $L$ : longitud total de la tubería
- $L'$ : longitud de tubería hipotética que cumple los supuestos 1 y 3 de Christiansen
- $m$ : exponente de la velocidad en la fórmula de pérdida de carga por fricción empleada
- $N$ : número total de salidas en la tubería con salidas múltiples
- $N'$ : número de salidas ficticias o reales aguas abajo de la última salida en análisis, resultado de computar  $Q_{ab}/q$
- $N_T$ : número total de salidas e igual a la suma de  $N$  y  $N'$
- $n$ : exponente del diámetro interno en la fórmula de pérdida de carga por fricción empleada
- $Q$ : caudal que circula por la tubería y que se distribuye entre las salidas
- $Q_{ab}$ : caudal que conduce la tubería
- $q$ : caudal en cada una de las salidas
- $r_s$ : relación entre la distancia, mayor o menor a  $S$ , del inicio de la tubería a la primera salida
- $r_c$ : relación de caudales  $Q_{ab}/Q$
- $Re$ : número de Reynolds
- $r_t$ : relación entre la distancia, mayor o menor a  $S$ , desde la última salida hasta el final de la tubería aguas abajo
- $S$ : longitud de cada segmento de tubería entre dos salidas consecutivas
- $S_0$ : longitud entre el inicio de la tubería aguas arriba y la primera salida
- $S_1$ : longitud entre la última salida y el extremo de la tubería aguas abajo
- $\alpha$ : parámetro empírico usado en la ecuación de Churchill para determinar  $f$
- $\beta$ : parámetro empírico usado en la ecuación de Churchill para determinar  $f$
- $\varepsilon$ : aspereza absoluta de la tubería
- $\nu$ : viscosidad cinemática

---

**REFERENCIAS**

---

- Anwar A., (1999a). Factor G for pipelines with equally spaced multiple outlets and outflow. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 125(1), 34–38.
- Anwar A., (1999b). Adjusted Factor  $G_a$  for pipelines with multiple outlets and outflow. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 125(6), 355–339.
- China R. y Domínguez A., (2006). Total Friction Loss along Multiple Outlets Pipes with Open End. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 132(1), 31–40.
- Christiansen J.E., (1942). Irrigation by Sprinkling. California Agric. Experiment Station Bull. No. 670, University of California, Davis, Calif.
- Churchill S.W., (1977). Friction-factor equation spans all fluid-flow regimes. *Chem. Engrg.*, 84(24), 91–92.
- Jensen M.C. y Fratini A.M., (1957). Adjusted “F” factors for sprinkler lateral design. *Agric. Engrg.*, 38(4), 247.
- Scaloppi E.J., (1988). Adjusted “F” factor for multiple-outlet pipes. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, ASCE, 114(1), 169–174.