

# Técnicas de preconditionamiento para problemas de punto de silla

Zenaida Castillo y Jean Suárez

Av. Los Ilustres, Facultad de Ciencias  
Esc. de Computación, Centro de Cálculo Científico y Tecnológico  
Caracas 1020-Venezuela  
Tel.: 58 212 6051581  
e-mail: zenaida.castillo@ciens.ucv.ve; jean.suarez@ciens.ucv.ve

## Resumen

En este artículo se presenta una evaluación numérica de preconditionadores por bloques para sistemas lineales de punto de silla, en los cuales la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  del bloque  $(1, 1)$  es no simétrica y la matriz  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  del bloque  $(2, 1)$  es de rango completo. Se consideran específicamente preconditionadores diagonales por bloques, triangulares por bloques y de tipo indefinido. Estos preconditionadores requieren para su construcción el cálculo de inversas de algunas matrices, para lo cual se propone utilizar aproximaciones de tipo SPAI. Los resultados ilustran la efectividad de los preconditionadores diagonales y triangulares en la aceleración de la convergencia del método GMRES.

**Palabras clave:** *sistemas de punto de silla, preconditionadores por bloques, aproximación dispersa de la inversa de una matriz.*

## COMPUTATIONAL TECHNIQUES FOR SADDLE POINT PROBLEMS

### Summary

In this paper we present a numerical evaluation of block preconditioners for linear systems of the saddle point kind. We consider specifically block diagonal, block triangular and block indefinite preconditioners on nonsymmetric matrices. These preconditioners require the computation of the inverse of some matrices involved and we propose to use sparse inverse approximations (SPAI). Results are promising and show the effectivity of block diagonal and block triangular preconditioners improving the convergence of Krylov methods as GMRES, suggesting the application of this approach in the large scale setting.

**Keywords:** *saddle point problems, block preconditioners, sparse approximate inverses.*

## INTRODUCCIÓN

La aproximación numérica de muchos problemas importantes en diversas áreas de las ciencias computacionales y la ingeniería, tales como dinámica de fluidos, electromagnetismo, programación cuadrática no lineal, optimización y computación gráfica<sup>4,7,8,9,26,27</sup>, conducen a la resolución de sistemas lineales de punto de silla. La estructura general de este tipo de sistemas lineales es la siguiente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & O \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_u = \underbrace{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}}_b, \quad (1)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $n \geq m$ . Este tipo de sistemas se conocen como sistemas lineales de punto de silla o de ensilladura debido a la equivalencia existente entre el problema de encontrar una aproximación a la solución exacta de (1) y el siguiente problema de optimización:

$$\begin{cases} \text{mín } J(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - f^T x \\ \text{Sujeto a la restricción } Bx = g. \end{cases}$$

Bajo este contexto, la incógnita  $y$  asociada al sistema lineal representa el vector de los multiplicadores de Lagrange y la solución de (1) es precisamente un punto de silla para el Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(x, y) = \frac{1}{2}x^T Ax - f^T x + (Bx - g)^T y.$$

Las propiedades espectrales y de simetría de la matriz bloque  $A$  tienen una gran influencia a la hora de elegir un determinado método numérico para resolver este tipo de problemas. El caso en que esta matriz es simétrica definida positiva ha sido estudiado y desarrollado ampliamente por muchos autores. En las últimas décadas los sistemas de punto de silla en los cuales  $A$  es no simétrica ha sido un tópico de investigación de gran importancia y es precisamente el tipo de problemas que consideramos en este artículo.

En la práctica, la resolución numérica de este tipo de sistemas lineales se realiza utilizando métodos iterativos en subespacios de Krylov, combinados con alguna técnica de preconditionamiento. El preconditionamiento para sistemas lineales de punto de silla ha sido objeto de un intenso estudio en los últimos años, motivado por la necesidad de acelerar la convergencia de los métodos iterativos en subespacios de Krylov. Una gran cantidad de preconditionadores se han propuesto para este tipo de problemas<sup>15</sup> y en este trabajo se consideran en particular preconditionadores diagonales por bloques<sup>13,16</sup>, triangulares por bloques<sup>5</sup> y un preconditionador de tipo indefinido<sup>2,14,19,21,22</sup>.

La construcción de cada uno de estos preconditionadores involucra el cálculo de inversas para matrices de tamaño menor al de la matriz de coeficientes de (1) y la propuesta de preconditionamiento que presentamos se fundamenta en sustituir esas inversas exactas por aproximaciones de tipo SPAI.

Este artículo está organizado como sigue: en la sección 2 se ofrece una breve descripción de los métodos iterativos en subespacios de Krylov utilizados para resolver sistemas lineales del tipo (1), en la sección 3 se presentan los preconditionadores diagonales, triangulares e indefinidos por bloques, haciendo énfasis en algunas propiedades espectrales importantes de la matriz del sistema preconditionado por la derecha; en la sección 4 se describe la técnica de preconditionamiento de Grote y Huckle (SPAI), que construye una aproximación dispersa de la inversa de una matriz por la derecha, los experimentos numéricos y sus resultados se presentan en la sección 5; las conclusiones del trabajo y algunas líneas de investigación a futuro son analizadas en la sección 6.

## RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA LINEAL

Generalmente, la matriz  $\mathcal{A}$  asociada al problema de punto de silla es dispersa y de gran tamaño, de manera que para la resolución numérica del sistema  $\mathcal{A}u = b$  es recomendable utilizar métodos iterativos, siendo los métodos en subespacios de Krylov los más utilizados en estos casos.

Los métodos iterativos en subespacios de Krylov consideran una aproximación inicial  $u_0 \in \mathbb{R}^{(n+m) \times 1}$  y un vector residual  $r_0 = b - \mathcal{A}u_0$  para definir una iteración que en el paso  $p$  genera una aproximación a la solución de (1) contenida en el espacio:

$$\mathcal{K}_p(\mathcal{A}, r_0) = \text{span}\{r_0, \mathcal{A}r_0, \mathcal{A}^2r_0, \dots, \mathcal{A}^{p-1}r_0\},$$

llamado subespacio de Krylov generado por la matriz  $\mathcal{A}$  y el vector residual  $r_0$  [23].

En el caso de que la matriz de coeficientes del sistema sea simétrica definida positiva, el método iterativo más utilizado es el gradiente conjugado, introducido por Hestenes y Stiefel en 1952<sup>12</sup>. Si la matriz es simétrica pero indefinida generalmente se emplea el método del residuo mínimo (MINRES) que fue propuesto por Paige y Saunders en 1975<sup>20</sup>. Para el caso en que la matriz de coeficientes sea no simétrica hay una gran variedad de métodos de Krylov que pueden utilizarse, siendo el método del residuo mínimo generalizado (GMRES), propuesto por Saad y Schultz<sup>24</sup>, uno de los más empleados.

Por otra parte, la estructura por bloques del sistema (1) permite desacoplar los vectores solución  $x$  e  $y$  que componen el vector  $u$ , con la finalidad de calcular por separado aproximaciones de cada una de estas incógnitas, resolviendo sistemas lineales de dimensión menor a  $n + m$  utilizando generalmente métodos iterativos en subespacios de Krylov. La principal representación de esta metodología la constituyen la reducción al sistema del complemento de Schur<sup>18,25</sup> y los métodos de proyección sobre el espacio nulo<sup>1,6</sup> que resuelven el problema equivalente a (1) dado por:

$$\begin{cases} Ax + B^T y = f \\ Bx = g. \end{cases} \quad (2)$$

La reducción al sistema del complemento de Schur se basa en la eliminación del vector incógnita  $x$  de (2), a fin de obtener el sistema lineal de  $m \times m$ :

$$BA^{-1}B^T y = BA^{-1}f - g.$$

Este sistema se conoce como sistema del complemento de Schur y la matriz  $S = BA^{-1}B^T$  se denomina complemento de Schur.

Los métodos de proyección sobre el espacio nulo encuentran una solución particular  $\hat{x}$  del problema  $Bx = g$  y una matriz  $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$  cuyas columnas constituyen una base para el espacio nulo de la matriz  $B$ . Luego, la solución general del problema  $Bx = g$  está dada por  $x = Zv + \hat{x}$ , donde el vector incógnita  $v$  es la solución del siguiente sistema lineal reducido de  $(n - m) \times (n - m)$ :

$$(Z^T AZ)v = Z^T(f - A\hat{x}).$$

## PRECONDICIONAMIENTO PARA SISTEMAS LINEALES DE PUNTO DE SILLA

La idea del preconditionamiento para el sistema lineal (1) consiste en transformar el problema original mediante premultiplicación o postmultiplicación por una matriz no singular  $\mathcal{M}$ , llamada preconditionador, a fin de obtener un sistema equivalente con condiciones espectrales favorables en el que los métodos iterativos converjan con mayor rapidez. El sistema (1) puede ser preconditionado por la izquierda:

$$\mathcal{M}Au = \mathcal{M}b,$$

o por la derecha:

$$\mathcal{A}\mathcal{M}y = b \quad \text{con} \quad x = \mathcal{M}y.$$

Por lo general el preconditionador  $\mathcal{M}$  se elige de manera que esta matriz aproxime en algún sentido a la inversa de la matriz  $\mathcal{A}$ . También es usual elegir  $\mathcal{M}$  tal que el sistema preconditionado posea pocos autovalores distintos o un polinomio mínimo de grado muy pequeño.

### Precondicionador diagonal por bloques

Para sistemas lineales del tipo (1), Murphy, Golub y Wathen<sup>16</sup> presentan un preconditionador bastante eficiente. Dicho preconditionador tiene la siguiente estructura cuando la matriz  $A$  es invertible:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & S^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

La matriz de coeficientes del sistema lineal original preconditionado por la derecha con (3) es

$$\mathcal{T} \doteq \mathcal{A}\mathcal{M}_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} I_n & B^T S^{-1} \\ BA^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_n & B^T S^{-1} \\ BA^{-1} & -\frac{1}{2}I_m \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m}\right)^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}I_n + B^T S^{-1} BA^{-1} & O \\ O & \frac{5}{4}I_m \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m}\right)^2 - \frac{1}{4}I_{n+m} = \begin{pmatrix} B^T S^{-1} BA^{-1} & O \\ O & I_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y como la matriz  $B^T S^{-1} BA^{-1}$  es idempotente, se asegura que

$$\left(\left(\mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m}\right)^2 - \frac{1}{4}I_{n+m}\right)^2 = \left(\mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m}\right)^2 - \frac{1}{4}I_{n+m}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} &\left(\left(\mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m}\right)^2 - \frac{1}{4}I_{n+m}\right)^2 - \left(\mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m}\right)^2 - \frac{1}{4}I_{n+m} = O \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\left(\mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m}\right)^2 - \frac{1}{4}I_{n+m}\right) \left(\left(\mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m}\right)^2 - \frac{1}{4}I_{n+m} - I_{n+m}\right) = O \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m} + \frac{1}{2}I_{n+m}\right) \left(\mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m} - \frac{1}{2}I_{n+m}\right) \left(\left(\mathcal{T} - \frac{1}{2}I_{n+m}\right)^2 - \frac{5}{4}I_{n+m}\right) = O \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{T} - I_{n+m}) \left(\mathcal{T} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}I_{n+m}\right) \left(\mathcal{T} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}I_{n+m}\right) = O. \end{aligned}$$

De esta última factorización en factores lineales se concluye que  $\mathcal{T}$  es diagonalizable y que posee a lo sumo 4 autovalores distintos:

$$1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Por lo tanto, para  $r \in \mathbb{R}^{(n+m) \times 1}$  arbitrario, el subespacio de Krylov:

$$\text{span}\{r, \mathcal{T}r, \mathcal{T}^2r, \mathcal{T}^3r, \dots\}$$

tiene a lo sumo dimensión 3. En particular, cualquier método iterativo de Krylov con la propiedad de terminación finita (como por ejemplo GMRES) converge en a lo sumo 3 iteraciones.

### Precondicionador triangular por bloques

Este tipo de preconditionadores fue considerado inicialmente por Bramble y Pasciak<sup>5</sup> y la matriz preconditionadora está dada por

$$\mathcal{M}_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ O & -S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1}B^TS^{-1} \\ O & -S^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B^T \\ O & -I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & S^{-1} \end{pmatrix}.$$

En este caso, la matriz del sistema preconditionado por la derecha es

$$\mathcal{T} \doteq \mathcal{A}\mathcal{M}_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} I_n & O \\ BA^{-1} & I_m \end{pmatrix},$$

de modo que:

$$\mathcal{T} - I_{n+m} = \begin{pmatrix} O & O \\ BA^{-1} & O \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathcal{T} - I_{n+m})^2 = O.$$

Como  $\mathcal{T} \neq I_{n+m}$ , pues en caso contrario se tendría que  $B = O$ , se asegura que el polinomio mínimo de esta matriz es  $Q(t) = (t - 1)^2$  (además el espectro de  $\mathcal{T}$  es igual a 1), lo cual implica que la convergencia de los métodos de Krylov con la propiedad de terminación finita, está garantizada en a lo sumo dos iteraciones.

### Precondicionadores de tipo indefinido

En este caso la matriz preconditionadora tiene la misma estructura en bloques que el problema original (1). Si  $B$  es una matriz de rango completo, entonces la matriz preconditionadora  $\mathcal{M}_I$  está dada por

$$\mathcal{M}_I = \begin{pmatrix} G & B^T \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -G^{-1}B^T \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{-1} & O \\ O & -(BG^{-1}B^T)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & O \\ -BG^{-1} & I_m \end{pmatrix},$$

donde  $G$  es alguna aproximación de  $A$  (con  $G \neq A$ ) tal que los sistemas con la matriz de coeficientes  $G$  o  $BG^{-1}B^T$  pueden resolverse eficientemente. La implementación de este preconditionador puede encontrarse en<sup>2,14,17,19,21,22</sup>.

Observe que la construcción explícita de cada uno de estos preconditionadores requiere de la disposición de las inversas para las matrices  $A$ ,  $G$ ,  $S$  y  $BG^{-1}B^T$ . En ese sentido, se propone reemplazar estas inversas exactas por aproximaciones dispersas de tipo SPAI, construidas mediante la metodología dada por Grote y Huckle en<sup>10</sup>, utilizando un patrón de dispersión estático.

## APROXIMACIÓN DISPERSA A LA INVERSA DE UNA MATRIZ (SPAI)

Dada una matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no singular, la idea básica de esta técnica es construir una matriz dispersa  $M \approx P^{-1}$  la cual minimice la norma de Frobenius de la matriz residual  $I_n - PM$ , denotada por  $\|I_n - PM\|_F$  (ver <sup>3</sup>). Por definición:

$$\|PM - I_n\|_F^2 = \sum_{k=1}^n \|Pm_k - e_k\|_2^2, \quad (4)$$

donde  $e_k$  y  $m_k$  representan la  $k$ -ésima columna de la matriz identidad y la matriz  $M$  respectivamente. Podemos minimizar (4) de dos maneras diferentes. La primera consiste en minimizar globalmente la norma de Frobenius  $\|PM - I_n\|_F$  como una función de la matriz  $M$ , empleando algún método iterativo. La otra estrategia consiste en minimizar para cada  $k = 1, \dots, n$  las funciones  $f_k$  definidas como:

$$f_k(m_k) = \|Pm_k - e_k\|_2.$$

Esta elección es muy conveniente cuando se trabaja con arquitecturas en paralelo pues el problema de minimizar  $\|PM - I_n\|_F$  se reduce a resolver  $n$  problemas de mínimos cuadrados independientes:

$$\min_{m_k} \|Pm_k - e_k\|_2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5)$$

El objetivo final es hallar una matriz  $M$ , tan dispersa como sea posible, que aproxime a  $P^{-1}$ , esta condición permite reducir (5) a  $n$  problemas de mínimos cuadrados de dimensión mucho menor que pueden resolverse fácilmente.

La dificultad principal de esta técnica radica en la determinación de un buen patrón de dispersión para la matriz  $M$ . Un buen patrón de dispersión mantiene una estructura dispersa en la matriz  $M$ , eliminando aquellas entradas de la matriz  $P^{-1}$  que contribuyan poco a la calidad de la aproximación. Por ejemplo, puede que se desee ignorar aquellas entradas pequeñas en valor absoluto y retener las más grandes. Sin embargo, para una matriz en general dispersa, normalmente no se conoce la localización de las entradas con valores grandes en la inversa por lo que seleccionar un patrón de dispersión para la inversa aproximada a priori es una tarea muy difícil. Para determinar el patrón de dispersión de  $M$  se pueden utilizar estrategias adaptativas, en la cual las entradas no nulas se definen dinámicamente, o técnicas estáticas en donde se define a priori una determinada estructura para la matriz  $M$ . Una vez definido el patrón de dispersión, por cada columna de  $M$  se aumenta el número de entradas no nulas hasta que la norma-2 del vector residual  $r_k = Pm_k - e_k$  satisfaga un criterio de tolerancia,  $\|r_k\|_2 < \varepsilon$ , para un  $\varepsilon$  dado, o cuando se alcanza un número máximo de términos no nulos en la columna  $m_k$ .

## EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan resultados numéricos para dos problemas modelo, generados con el software IFISS<sup>11</sup>, escrito por Howard Elman, Alison Ramage y David Silvester. Estos problemas provienen de la discretización de la ecuación estacionaria de Navier Stokes para un flujo incompresible:

$$\begin{cases} -\nu \nabla^2 u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases}$$

La constante  $\nu > 0$  representa la viscosidad del fluido,  $u$  es la velocidad del fluido en un punto  $x$  del dominio,  $p$  es la presión en el punto  $x$  y  $f$  agrupa la acción de las fuerzas de gravedad y la fuerza de interacción. Específicamente, se consideran los problemas NS1 y

NS2, que surgen de modelar un flujo sobre un canal bidimensional y en un dominio en forma de L, respectivamente. Además, para la discretización se utilizan elementos finitos estables  $Q_2 - Q_1$  (método de Taylor-Hood) a fin de obtener sistemas lineales con la estructura indicada en (1), para los cuales la matriz  $A$  es no singular y no simétrica; mientras que la matriz  $B$  es de rango completo. Las características de cada una de las matrices asociadas a los problemas NS1 y NS2, en cuanto a dimensiones se refiere y el número de elementos distintos de cero de cada bloque ( $\text{NZ}(A)$  y  $\text{NZ}(B)$ ), se resumen en la Tabla I.

| Problema | $\nu$ | $n$  | $\text{NZ}(A)$ | $\kappa_2(A)$      | $m$ | $\text{NZ}(B)$ |
|----------|-------|------|----------------|--------------------|-----|----------------|
| NS1      | 0.001 | 2178 | 29546          | $1.39 \times 10^3$ | 289 | 10768          |
| NS2      | 0.002 | 3083 | 36706          | $1.41 \times 10^3$ | 361 | 13503          |

**Tabla I.** Matrices de prueba

Para resolver cada sistema lineal se utiliza el método iterativo GMRES con preconditionamiento por la derecha. Se aplican preconditionadores diagonales por bloques, triangulares por bloques y de tipo indefinido. Para construir el preconditionador indefinido tomamos  $G = D_A$ , la matriz de  $n \times n$  que posee los elementos de la diagonal de  $A$ . Se escoge como iterado inicial para GMRES el vector  $x_0 = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ , el valor de  $10^{-8}$  como nivel de tolerancia para el error residual relativo y un número máximo de iteraciones igual a 1500.

La aproximación de  $A^{-1}$ , que denotaremos por  $M_1$ , se construye utilizando la metodología de Grote y se consideran tres tipos de patrones de dispersion estáticos, dados por las posiciones de las entradas no nulas de las matrices  $A^k$ , con  $k = 1, 2, 3$ . Con respecto a la aproximación para la inversa del complemento de Schur  $S$ , ésta se sustituye por el SPAI de la matriz  $\hat{S} = BD_A^{-1}B^T$  que aproxima a  $S$ . La aproximación SPAI para  $\hat{S}$  se designa por  $M_2$  y los patrones de dispersion utilizados son las posiciones de los elementos no nulos de  $\hat{S}^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Es importante destacar que la elección de un patron de relleno estático para las diferentes aproximaciones SPAI, se debe a que la construcción de cada preconditionador con el criterio dinámico de Grote y Huckle consumía mayor cantidad de tiempo y además el numero de iteraciones para la convergencia aumentaba considerablemente. En ese sentido, se obtuvieron mejores resultados con los patrones estáticos y por esa razón se presentan sólo esos resultados.

En todos los casos, se utiliza como nivel de tolerancia para el residuo asociado a la construcción de cada columna de las aproximaciones SPAI los valores  $\varepsilon = 0.4, 0.3, 0.2$  y el nivel de relleno por columna se elige de manera que la densidad de elementos no nulos del preconditionador esté cercano al de  $A^k$ .

Todos los experimentos han sido realizados en Matlab 7.0, con un computador Toshiba que posee un procesador Core Duo T2400 1.83 Ghz y 1 GB de memoria RAM.

| Problema | Iteraciones | T-Conv | Err-Rel               |
|----------|-------------|--------|-----------------------|
| NS1      | 717         | 25.07  | $4.21 \times 10^{-7}$ |
| NS2      | 866         | 42.26  | $5.18 \times 10^{-7}$ |

**Tabla II.** Resolución del sistema usando GMRES sin preconditionamiento

Los resultados de los experimentos se resumen en las tablas que se presentan a continuación. Cada problema se resuelve con y sin preconditionamiento. La Tabla II presenta el costo en iteraciones y tiempo de CPU que se requiere para reducir el error relativo en el residuo al valor indicado, cuando se usa el método GMRES sin preconditionamiento. La

Tabla III muestra el tiempo requerido para la construcción de las aproximaciones  $A^{-1}$  y  $\hat{S}^{-1}$  así como también una medida de la calidad de las mismas. Se especifica en las Tablas IV y V el número de iteraciones, tiempo de CPU requerido para alcanzar la convergencia (incluye el tiempo que consume la construcción del preconditionador), error relativo en la aproximación, error absoluto en las aproximaciones SPAI con respecto a la norma de Frobenius y Euclídea, así como también el tiempo de CPU requerido para la construcción de las aproximaciones SPAI  $M_1$  y  $M_2$ , de  $A^{-1}$  y  $\hat{S}^{-1}$  respectivamente.

| $\varepsilon$ | Tiempo( $M_1$ ) | $\ AM_1 - I_n\ _F$ | $\ AM_1 - I_n\ _2$ | Tiempo( $M_2$ ) | $\ \hat{S}M_2 - I_n\ _F$ | $\ \hat{S}M_2 - I_n\ _2$ |
|---------------|-----------------|--------------------|--------------------|-----------------|--------------------------|--------------------------|
| 0.4           | 7.9             | 15.73              | 1.02               | 1.71            | 17.1                     | 1.53                     |
| 0.3           | 13.01           | 12.98              | 1.01               | 3.14            | 61.51                    | 9.31                     |
| 0.2           | 26.23           | 8.55               | 0.99               | 6.21            | 100.33                   | 20.37                    |

**Tabla III.** Costo en tiempo y calidad de las aproximaciones SPAI para  $A^{-1}$  y  $\hat{S}^{-1}$

| Precondicionamiento - NS1 |     |         |                       |                       |                       |
|---------------------------|-----|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\varepsilon$             | $k$ | IT-TIME | NS1- $\mathcal{M}_D$  | NS1- $\mathcal{M}_T$  | NS1- $\mathcal{M}_T$  |
| 0.4                       | 1   | It      | 183                   | 98                    | >1000                 |
|                           |     | T-Conv  | 11.45                 | 11.01                 | ***                   |
|                           |     | Err-Rel | $9.82 \times 10^{-9}$ | $2.09 \times 10^{-8}$ | 0.99                  |
| 0.3                       | 2   | It      | 118                   | 51                    | > 1000                |
|                           |     | T-Conv  | 18.04                 | 17.26                 | ***                   |
|                           |     | Err-Rel | $1.64 \times 10^{-8}$ | $1.92 \times 10^{-8}$ | $1.16 \times 10^{-4}$ |
| 0.2                       | 3   | It      | 111                   | 49                    | > 1000                |
|                           |     | T-Conv  | 36.08                 | 33.64                 | ***                   |
|                           |     | Err-Rel | $1.11 \times 10^{-7}$ | $4.5 \times 10^{-8}$  | $1.03 \times 10^{-4}$ |

**Tabla IV.** Resolución del sistema NS1 con preconditionamiento

| Precondicionamiento - NS2 |     |         |                       |                       |                       |
|---------------------------|-----|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\varepsilon$             | $k$ | IT-TIME | NS2- $\mathcal{M}_D$  | NS2- $\mathcal{M}_T$  | NS2- $\mathcal{M}_T$  |
| 0.4                       | 1   | It      | 249                   | 170                   | >1000                 |
|                           |     | T-Conv  | 15.3                  | 14.04                 | ***                   |
|                           |     | Err-Rel | $1.58 \times 10^{-8}$ | $1.21 \times 10^{-8}$ | $6.73 \times 10^{-4}$ |
| 0.3                       | 2   | It      | 181                   | 78                    | > 1000                |
|                           |     | T-Conv  | 19.41                 | 17.462                | ***                   |
|                           |     | Err-Rel | $3.76 \times 10^{-8}$ | $8.68 \times 10^{-9}$ | $6.21 \times 10^{-4}$ |
| 0.2                       | 3   | It      | 161                   | 68                    | > 1000                |
|                           |     | T-Conv  | 54.92                 | 50.48                 | ***                   |
|                           |     | Err-Rel | $1.13 \times 10^{-8}$ | $2.76 \times 10^{-8}$ | $6.24 \times 10^{-4}$ |

**Tabla V.** Resolución del sistema NS2 con preconditionamiento

En cada uno de los problemas el método iterativo alcanza la convergencia, excepto al utilizar el preconditionador de tipo indefinido. Tanto el preconditionamiento diagonal como el triangular logran disminuir el número de iteraciones con respecto al método sin



precondicionar, así como también se logra disminuir el tiempo de CPU para alcanzar la convergencia, al elegir  $\varepsilon = 0.4$  como nivel de tolerancia. En ambos sentidos, los mejores resultados se obtuvieron con preconditionadores diagonales y triangulares pues se logra reducir, en un poco más de la mitad, el tiempo de convergencia de GMRES en comparación con GMRES no preconditionado.

Se observa además que a medida que  $\varepsilon$  disminuye, el tiempo de CPU en la construcción de  $M_1$  aumenta considerablemente y hace poco atractiva la idea de preconditionar estos sistemas para valores pequeños de  $\varepsilon$ .

Al utilizar los preconditionadores diagonales y triangulares, el error relativo en la solución se mantiene en el orden de  $10^{-8}$ ; sin embargo, el preconditionamiento indefinido es el menos eficiente en ese sentido, alcanzando un orden de  $10^{-4}$  en 1500 iteraciones (el máximo establecido).

## CONCLUSIONES

En los experimentos numéricos se han utilizado aproximaciones SPAI con patrones estáticos para construir preconditionadores por bloques diagonales, triangulares y de tipo indefinido en un ambiente secuencial, con la finalidad de establecer comparaciones con el método iterativo sin preconditionar, en cuanto a tiempo e iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia.

La elección de un nivel de tolerancia no muy pequeño para la construcción de cada columna de las aproximaciones SPAI y el patrón de dispersión con  $k = 1$  para  $M_1$  y  $M_2$ , permiten construir un preconditionador diagonal y triangular que disminuyen casi a la mitad el tiempo para la convergencia de GMRES, con respecto al método sin preconditionar.

Estos resultados sugieren realizar nuevos experimentos con matrices de dimensión mayor en arquitecturas paralelas, en donde posiblemente, la eficiencia del preconditionamiento no se vea tan alterada por la cantidad de tiempo que se consume al construir las diferentes aproximaciones SPAI con valores más pequeños para  $\varepsilon$ . El preconditionamiento indefinido fue el menos efectivo en todos los aspectos pues no se logró la convergencia de GMRES para ninguno de los problemas, mientras que GMRES no preconditionado alcanza la convergencia.

## REFERENCIAS

- 1 M. Arioli y G. Manzini, "A null space algorithm for mixed finite element approximation of Darcy's equation", *Comm. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **18**, N° 9, pp. 645-657, (2002).
- 2 O. Axelsson y M. Neytcheva, "Preconditioning methods for linear systems arising in constrained optimization problems", *Numer. Linear Algebra Appl.*, Vol. **10**, N° (1-2), pp. 3-31, (2003).
- 3 M.W. Benson y P.O. Frederickson, "Iterative solution of large sparse linear systems arising in certain multidimensional approximation problems", *Utilitas Math.*, Vol. **22**, pp. 127-140, (1982).
- 4 A. Björck, "*Numerical methods for least squares problems*", SIAM, Philadelphia, Second Edn., (1996).
- 5 J.H. Bramble y J.E. Pasciak, "A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems", *Math. Comp.*, Vol. **50**, N° 181, pp. 1-17, (1988).
- 6 T.F. Coleman, "*Large Sparse Numerical Optimization*", Springer, New York, (1984).
- 7 R. Glowinski, "*Numerical methods for nonlinear variational problems*", Springer series in computational physics, New York, (1984).
- 8 R. Glowinski, "*Finite element methods for incompressible viscous flow*", Vol. **IX**, Handbook of Numerical Analysis, part 3: Numerical methods for fluids, North-Holland, Amsterdam, (2003).

- 9 G.H. Golub y C.F. Van Loan, “*Matrix Computation*”, Johns Hopkins Studies in Mathematical Sciences, Johns Hopkins University Press, Baltimore, Third Edn., (1991).
- 10 M. J. Grote y T. Huckle, “Parallel preconditioning with sparse approximate inverses”, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. **10**, N° 3, pp. 838-853, (1997).
- 11 H. C. Elman, A. Ramage y D. J. Silvester, “IFISS: A Matlab toolbox for modelling incompressible flow”, <http://www.maths.manchester.ac.uk/~nareports/narep474.pdf>.
- 12 M.R. Hestenes y E. Stiefel, “Methods of conjugate gradients for solving linear systems”, *J. Res. Nat. Bureau of Standards*, Vol. **49**, pp. 409-436, (1952).
- 13 I.C.F. Ipsen, “A note on preconditioning nonsymmetric matrices”, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. **23**, N° 3, pp. 1050-1051, (2001).
- 14 L. Bergamaschi, J. Gondzio y G. Zilli, “Preconditioning indefinite systems in interior point methods for optimization”, *Comput. Optim. Appl.*, Vol. **28**, N° 2, pp. 149-171, (2004).
- 15 M. Benzi, G.H. Golub y J. Liesen, “Numerical solution of saddle point problems”, *Acta Numerica*, Vol. **14**, pp. 1-137, (2005).
- 16 M.F. Murphy, G.H. Golub y A.J. Wathen, “A note on preconditioning for indefinite linear systems”, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. **21**, pp. 1969-1972, (2000).
- 17 C. Keller, N.I.M. Gould y A.J. Wathen, “Constraint preconditioning for indefinite linear systems”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol. **21**, pp. 1300-1317, (2000).
- 18 W. McGuire y R.H. Gallagher, “*Matrix Structural Analysis*”, Wiley, New York, (1979).
- 19 N.I.M. Gould, M.E. Hribar y J. Nocedal, “On the solution of equality constrained quadratic programming problems arising in optimization”, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. **23**, N° 4, pp. 1375-1394, (2001).
- 20 C.C. Paige y M.A. Saunders, “Solution of sparse indefinite systems of linear equations”, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **12**, N° 4, pp. 617-629, (1975).
- 21 I. Perugia y V. Simoncini, “Block diagonal and indefinite symmetric preconditioners for mixed finite element formulations”, *Numer. Linear Algebra Appl.*, Vol. **7**, N° (7-8), pp. 585-616, (2000).
- 22 Rozložník y V. Simoncini, “Krylov subspace methods for saddle point problems with indefinite preconditioning”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol. **24**, N° 2, pp. 368-391, (2002).
- 23 Y. Saad, “*Iterative Methods for Sparse Linear Systems*”, SIAM, Philadelphia, Second Edn., (2003).
- 24 Y. Saad y M.H. Schultz, “GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. **7**, N° 3, pp. 856-869, (1986).
- 25 S.A. Vavasis, “Stable numerical algorithms for equilibrium systems”, *SIAM, J. Matrix Anal. Appl.*, Vol. **15**, N° 4, pp. 1108-1131, (1994).
- 26 M.H. Wright, “Interior methods for constrained optimization”, *Acta Numerica*, Vol. **1**, pp. 341-407, (1992).
- 27 S.J. Wright, “*Primal-Dual interior point methods*”, SIAM, Philadelphia, (1997).