

El método de cuadratura diferencial generalizado: estudio de arcos circulares delgados vibrantes

Samanta J. Escanes*, Diana V. Bambill*♣ y Daniel H. Felix*

* Departamento de Ingeniería Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur
Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina
Tel.: 54 291 459 5100; Fax.:54 291 459 5157

e-mail: sescanes@uns.edu.ar; dbambill@criba.edu.ar; dhfelix@criba.edu.ar

♣ Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina

Resumen

Los arcos circulares delgados constituyen un tema de permanente interés en el campo de la ingeniería estructural. En muchas de sus aplicaciones, el ingeniero de diseño necesita disponer de parámetros dinámicos que caractericen su comportamiento. En el presente trabajo se determinan las frecuencias naturales de los primeros modos normales de vibración en el plano, considerándose en el planteo tradicional los efectos de la inercia rotatoria así como también los de las deformaciones axiales de los arcos. Los extremos de los arcos se suponen elásticamente vinculados, sus desplazamientos en el plano están restringidos traslacional y rotacionalmente por dichos vínculos. De esta manera, es posible modelar como caso particular cualquier combinación de las clásicas condiciones de borde: libre, articulación, articulación deslizable, empotramiento. El Método de Cuadratura Diferencial Generalizado, GDQM su sigla en inglés, se elige para resolver el problema planteado. Este método se encuentra en un proceso de vigorosa revitalización según puede observarse en la literatura científica internacional actual. En el trabajo se realiza a su vez un análisis de las posibilidades del método, estudiando diferentes modelos discretos generados por diferentes densidades de mallas de puntos e incorporando la inclusión de puntos δ en los extremos. Se analiza tanto la velocidad de convergencia del método como su estabilidad numérica. Los resultados obtenidos se comparan, cuando es posible, con valores disponibles en la literatura, y también con valores calculados por los autores mediante el método de elementos finitos.

Palabras claves: *Método de Cuadratura Diferencial Generalizado, arcos circulares, frecuencias naturales, inercia rotatoria.*

THE GENERALIZED DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD: STUDY OF VIBRATING THIN CIRCULAR ARCHES

Summary

Vibrating thin circular arches constitute a subject of permanent interest in the field of structural engineering. In many of its applications, the design engineer needs to know the dynamic parameters that characterize the behavior of these structures. In the present work the authors determine the natural frequencies of first normal modes of vibration of the arch in its plane. The rotatory inertia effect and the extensibility of the central axis effect are taken into account. The ends of the arches are supposed to be elastically constraint against rotation and radial and transverse displacements in the plane. By this way, it is possible to model any combination of the classic boundary conditions: free, simply supported, curve-slide joint, clamped. The Generalized Differential Quadrature Method, GDQM, is used to solve this model. The GDQM is increasingly used according to what can be observed in present international scientific literature. In the work it is made an analysis of the possibilities of the method. Different discreet models generated by different densities of points in the grid with the inclusion of δ -points at the neighborhoods of the ends. An analysis of speed of convergence of the method is performed as well as of its numerical stability. The results are compared, when it is possible, with values available in the literature, and with values calculated by the authors using the finite element method.

Keywords: *Generalized Differential Quadrature Method, circular arches, natural frequencies, rotatory inertia.*

INTRODUCCIÓN

En años recientes el uso del Método de Cuadratura Diferencial se ha incrementado. Como es sabido, el método es en esencia una técnica numérica que permite resolver ecuaciones diferenciales. Este método aproxima la derivada de una función en un punto cualquiera, como una suma lineal ponderada de todos los valores funcionales calculados en puntos de un mallado convenientemente adoptado. Este método fue desarrollado inicialmente por los investigadores R. Bellman y J. Casti¹, año 1970, y después de un uso relativamente moderado en las dos décadas siguientes, a partir de los trabajos de Charles Bert²⁻⁴ su utilización recobra vigencia.

En medio de técnicas de resolución numéricas tan efectivas y poderosas como el método de elementos finitos por un lado y procedimientos analíticos de resolución por otro, el método de cuadratura diferencial muestra tener su espacio propio como alternativa de cálculo. La razón fundamental de su uso, de acuerdo con el criterio de reconocidos autores en la materia^{4,6}, radica en el hecho de que comparándolo con otros métodos, por ejemplo, con el método de elementos finitos, requiere un mínimo esfuerzo computacional. Si se considera el actual estado del arte en la materia, la aplicación del método parece ser apropiada para la resolución de problemas estructurales de complejidad intermedia.

Actualmente se dispone de una extensa bibliografía, en publicaciones en revistas científicas¹⁻¹⁶ y libros^{17,18} que describe detalladamente la evolución en el tiempo del método y sus variantes.

El presente trabajo muestra el análisis de vibraciones naturales en el plano de arcos circulares delgados para determinar coeficientes de frecuencia utilizando este método.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESTRUCTURAL

El modelo estructural analizado se presenta en la Figura 1, y como se observa se trata de un arco circular delgado de sección constante. Sus extremos están elásticamente restringidos en el plano, a rotación y traslación. Se considera como eje del arco la línea constituida por los baricentros de las secciones transversales del arco; la ubicación de sus puntos se determina con las coordenadas radial y angular: a y θ . La coordenada radial a mide la distancia desde el centro del arco al eje y es constante en este caso particular de arco circular, en tanto que la coordenada angular θ mide la abertura angular, considerando el origen en el extremo derecho del arco y medida en sentido antihorario. También es posible definir la coordenada longitud de arco s , con la expresión $s = a\theta$.

Se denota con θ_0 la máxima amplitud de la coordenada angular θ y como S la longitud total del arco medida sobre su eje.

Los desplazamientos tangencial y radial que ejecuta el baricentro de una sección genérica del eje del arco vibrante se indican con las letras v y w , respectivamente.

Los vínculos elásticos de cada extremo del arco se modelan con resortes a traslación en las direcciones tangente y radial y con resortes rotacionales. Las constantes de rigidez de los resortes mencionados se denominan:

k_v : constante de rigidez del resorte en dirección tangente al eje del arco.

k_w : constante de rigidez del resorte en dirección transversal al eje del arco.

k_r : constante de rigidez del resorte que restringe la rotación

a la notación se le incorpora un sub-subíndice para identificar a cual extremo del arco corresponde el vínculo. (p. ej.: k_{v_1} . Ver Figura1).

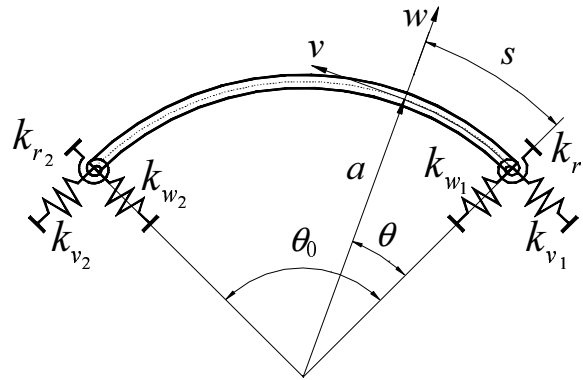


Figura 1. Arco circular delgado elásticamente vinculado en los extremos

DESCRIPCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El sistema de ecuaciones gobernantes del modelo estructural planteado es el propuesto por Federhofer⁸, que considera tanto la extensibilidad del eje del arco como el efecto de la inercia rotatoria. En este análisis no se incluye el efecto de la deformación por corte^{9,10}.

El hecho de tener en cuenta en el modelo la extensibilidad axial del arco hace que los desplazamientos radial w y tangencial v , que sufre cada sección, resulten independientes.

El sistema diferencial gobernante está conformado por dos ecuaciones diferenciales con dos variables y cuatro condiciones de borde para w y dos para v .

Resulta conveniente definir la siguiente coordenada adimensional:

$$x = \frac{\theta}{\theta_0} \quad (1)$$

cuyos valores varían entre 0 y 1.

Considerando que el arco vibra en uno de sus modos normales y llamando $W = W(x)$ y $V = V(x)$ a las amplitudes adimensionales de los desplazamientos $w(x, t)$ y $v(x, t)$, respectivamente, el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el modelo propuesto es lineal de cuarto orden y de acuerdo a Federhofer se expresa como:

$$W'''' \left[2\theta_0^2 + \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \right] W'' + \left[\theta_0^4 + \theta_0^2 \left(\frac{S}{r} \right)^2 - \lambda^2 \right] W + \left[\left(\frac{S}{r} \right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \right] \theta_0 V' = 0 \quad (2a)$$

$$V'' + \left[\theta_0^2 \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^4 + \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \right] V + \left[1 - \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^4 \right] \theta_0 W' = 0 \quad (2b)$$

El símbolo $'$ denota un orden de derivada con respecto a la variable espacial x . λ es el coeficiente adimensional de la frecuencia natural circular de vibración, ω , de la estructura en estudio:

$$\lambda = \omega S^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} \quad (3)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material, I el momento de inercia de la sección transversal y m es la masa por unidad de longitud del material del arco.

Se define como esbeltez del arco S/r , al cociente entre la longitud total del eje S y el radio de giro r de la sección transversal.

Para el planteo de las condiciones de borde en los extremos del arco, se adoptan coeficientes de rigidez adimensionales adecuados, en función de las constantes de rigidez de los vínculos elásticos mediante las siguientes expresiones:

$$\beta_r = \frac{k_r a}{EI} \quad ; \quad \beta_v = \frac{k_v a^3}{EI} \quad ; \quad \beta_w = \frac{k_w a^3}{EI} \quad (4a-c)$$

Las condiciones de borde clásicas se modelan asignando valores extremos a los coeficientes de rigidez (4a-c).

Las condiciones de borde libre se obtienen cuando todos los coeficientes de rigidez se anulan ($\beta_r = \beta_v = \beta_w = 0$), y se expresan en la forma:

$$\frac{EI}{a} \left(\frac{W''}{\theta_0^2} - \frac{V'}{\theta_0} \right) \Big|_{x=0 \text{ ó } x=1} = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{EI}{a^2} \left[\left(\frac{W'''}{\theta_0^3} + \frac{V''}{\theta_0^2} \right) + \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \left(\frac{W'}{\theta_0^3} - \frac{V}{\theta_0^2} \right) \right] \Big|_{x=0 \text{ ó } x=1} = 0 \quad (5b)$$

$$\frac{EI}{a^2} \left(\frac{S}{r} \right)^2 \left(\frac{V'}{\theta_0^3} + \frac{W}{\theta_0^2} \right) \Big|_{x=0 \text{ ó } x=1} = 0 \quad (5c)$$

En el caso de un extremo articulado, el coeficiente de rigidez rotacional es nulo en tanto los otros dos coeficientes traslacionales asumen valores que tienden a infinito ($\beta_r = 0$; $\beta_v \rightarrow \infty$; $\beta_w \rightarrow \infty$). Las correspondientes condiciones de borde resultan:

$$V|_{x=0 \text{ ó } x=1} = 0 \quad (6a)$$

$$W|_{x=0 \text{ ó } x=1} = 0 \quad (6b)$$

$$\frac{EI}{a} \left(\frac{W''}{\theta_0^2} - \frac{V'}{\theta_0} \right) \Big|_{x=0 \text{ ó } x=1} = 0 \quad (6c)$$

Si se trata de un extremo empotrado todos los coeficientes de rigidez tienden a infinito ($\beta_r \rightarrow \infty$; $\beta_v \rightarrow \infty$; $\beta_w \rightarrow \infty$). En este caso las condiciones de borde son:

$$V|_{x=0 \text{ ó } x=1} = 0 \quad (7a)$$

$$W|_{x=0 \text{ ó } x=1} = 0 \quad (7b)$$

$$W'|_{x=0 \text{ ó } x=1} = 0 \quad (7c)$$

Otro caso de vinculación clásica es el apoyo deslizando en dirección axial con restricción a rotación, para el cual resulta nulo el coeficiente de rigidez axial (no hay restricción al desplazamiento tangencial) y tienden a infinito las rigideces de los otros dos vínculos ($\beta_r \rightarrow \infty$; $\beta_v = 0$; $\beta_w \rightarrow \infty$). Las respectivas condiciones de borde resultan:

$$W|_{x=0 \text{ ó } x=1} = 0 \quad (8a)$$

$$V'|_{x=0 \text{ ó } x=1} = 0 \quad (8b)$$

$$\frac{W'}{\theta_0} - V = 0 \quad (8c)$$

Esta forma de modelar las condiciones de vínculo permite considerar los casos de vinculación intermedios en los cuales los desplazamientos en los extremos del arco no están totalmente restringidos ni completamente libres. En esa situación las constantes de rigidez de los vínculos asumen valores finitos no nulos. Las condiciones de borde que se deben satisfacer en los modelos de arco analizados con extremos elásticamente restringidos¹¹ son:

$$\frac{EI}{a} \left[\left(\frac{W''}{\theta_0^2} - \frac{V'}{\theta_0} \right) - \xi \beta_r \left(\frac{W'}{\theta_0} - V \right) \right] = 0 \quad (9a)$$

$$\frac{EI}{a^2} \left[\left(\frac{W'''}{\theta_0^3} + \frac{V''}{\theta_0^2} \right) + \xi \beta_w W + \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \left(\frac{W'}{\theta_0^3} - \frac{V}{\theta_0^2} \right) \right] = 0 \quad (9b)$$

$$\frac{EI}{a^2} \left[\left(\frac{S}{r} \right)^2 \left(\frac{V'}{\theta_0^3} + \frac{W}{\theta_0^2} \right) - \xi \beta_v V \right] = 0 \quad (9c)$$

El parámetro ξ asume su valor de acuerdo a la convención de signos adoptada para los desplazamientos indicados en la Figura 1, $\xi = -1$ para $x = 0$ y $\xi = 1$ para $x = 1$.

MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL

Se resuelve el sistema descripto mediante la utilización del método de cuadratura diferencial.

Básicamente, la aplicación del método de cuadratura diferencial generalizado se resume en seguir los siguientes pasos:

- Discretizar el dominio, generando una malla de puntos de prueba o nodos.
- Obtener los coeficientes de peso asociados a la malla de puntos generada.
- Plantear las ecuaciones análogas de cuadratura del sistema diferencial gobernante.
- Plantear las ecuaciones análogas de cuadratura de las condiciones de borde del modelo.
- Resolver el sistema de ecuaciones resultante.

La discretización del dominio analizado consiste en reemplazar el modelo continuo por un modelo discreto formado por un conjunto de puntos convenientemente elegidos sobre el eje del arco. Dichos puntos se denominan puntos de prueba o nodos¹². Existen diferentes criterios para generar la malla de nodos. En el presente trabajo se adopta una malla con distribución regular de puntos en el interior del arco, y sus coordenadas sobre el eje se expresan:

$$x_i = \frac{i-2}{n-3} \quad (10a)$$

donde i es un índice que varía entre 3 y $n-2$, y n el número total de puntos de la malla.

En el caso analizado, por tener el sistema de ecuaciones gobernante una ecuación diferencial de cuarto orden (2a), resulta conveniente colocar los dos primeros nodos de la malla en cada extremo muy próximos entre sí. La distancia entre ellos se indica mediante un parámetro adimensional que se denomina con la letra δ . Por consiguiente las coordenadas adimensionales de los nodos de los extremos tienen las siguientes expresiones:

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = \delta \quad ; \quad x_{n-1} = 1 - \delta \quad ; \quad x_n = 1 \quad (10b)$$

En la Figura 2 se muestra un esquema del mallado de puntos sobre el eje del arco.

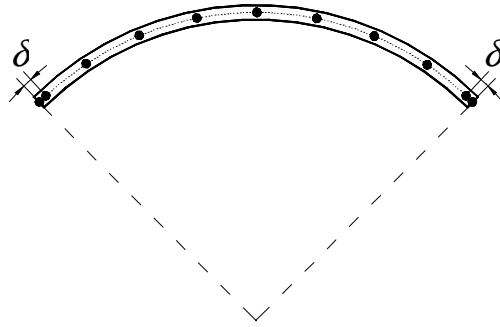


Figura 2. Modelo discreto del arco circular

La ubicación de los puntos sobre el eje del arco se determina mediante la expresión de la coordenada angular $\theta_i = x_i \theta_0$, y de la coordenada radial a constante.

Las derivadas de las variables independientes, W y V , aplicando las reglas de cuadratura diferencial, se expresan mediante las siguientes ecuaciones¹:

$$V^{(q)}(x_i) = \frac{d^q V}{dx^q} \Big|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(q)} V_k \quad ; \quad W^{(q)}(x_i) = \frac{d^q W}{dx^q} \Big|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(q)} W_k \quad (11a, b)$$

donde q indica el orden de la derivada.

Los coeficientes $A_{ik}^{(q)}$, llamados coeficientes de peso, que aparecen en las ecuaciones (11a, b), se determinan por medio de una serie de expresiones explícitas, (algunas de ellas recursivas), cuyo detalle puede verse en las referencias presentadas^{2,3}.

El proceso de cálculo puede resumirse así:

- A partir de los puntos de la malla generada (puntos de coordenadas x_i) se calculan los siguientes polinomios de Lagrange:

$$\prod(x_i) = \prod_{\nu=1, \nu \neq i}^n (x_i - x_\nu) \quad (12)$$

que se utilizan para determinar los coeficientes correspondientes a las derivadas de primer orden¹³ ($q = 1$):

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\prod(x_i)}{(x_i - x_k) \prod(x_k)} \quad \begin{array}{l} \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \\ \text{y } k \neq i, \text{ elementos fuera de la diagonal} \end{array} \quad (13a)$$

Los coeficientes de peso cumplen la condición $\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} = 0$, con la que se calculan los elementos de la diagonal²:

$$A_{ii}^{(1)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^n A_{ik}^{(1)} \quad \begin{array}{l} \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \\ \text{elementos en la diagonal} \end{array} \quad (13b)$$

- Los términos correspondientes a derivadas de segundo orden y superiores, $q > 1$, se calculan utilizando la siguiente expresión recursiva:

$$A_{ik}^{(q)} = A_{ii}^{(q-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(q-1)}}{x_i - x_k} \quad \begin{array}{l} \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \\ \text{y } k \neq i \end{array} \quad (14a)$$

y de manera análoga a lo indicado en las expresiones (13b), se obtienen los elementos de la diagonal:

$$A_{ii}^{(q)} = - \sum_{\substack{k=1 \\ \text{con } k \neq i}}^n A_{ik}^{(q)} \quad \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \quad (14b)$$

Mediante la aplicación de las reglas de cuadratura indicadas en las expresiones (11a,b) a las ecuaciones (2a,b), se obtienen las ecuaciones diferenciales análogas de cuadratura⁸:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(4)} W_k + \left[2\theta_0^2 + \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \right] \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} W_k + \left[\theta_0^4 + \theta_0^2 \left(\frac{S}{r} \right)^2 - \lambda^2 \right] W_i + \left[\left(\frac{S}{r} \right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \right] \theta_0 \sum_{k=1}^n A_{ik} V_k = 0 \quad \text{con } i = 3, 4, \dots, n-2 \quad (15a)$$

$$\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} V_k + \left[\lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 + \theta_0^2 \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^4 \right] V_i + \left[1 - \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^4 \right] \theta_0 \sum_{k=1}^n A_{ik} W_k = 0 \quad \text{con } i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (15b)$$

Las ecuaciones análogas de las condiciones de borde se obtienen a partir de las ecuaciones correspondientes a cada caso de vinculación analizado, y de las reglas de cuadratura dadas por las expresiones (11a,b).

Para la condición de borde libre, con las expresiones (5a-c) se determina:

$$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} W_i - \frac{1}{\theta_0} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} V_k = 0 \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } n \quad (16a)$$

$$\frac{1}{\theta_0^3} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(3)} W_k - \frac{1}{\theta_0^2} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} V_k + \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \left(\frac{1}{\theta_0^3} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} W_k - \frac{V_i}{\theta_0^2} \right) = 0 \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } n \quad (16b)$$

$$\left(\frac{S}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{\theta_0^3} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} V_k + \frac{1}{\theta_0^2} W_i \right) = 0 \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } n \quad (16c)$$

Para la condición de extremo articulado, con las (6a-c) se determinan:

$$V_i = W_i = 0 \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } n \quad (17a-b)$$

$$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} W_k - \frac{1}{\theta_0} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} V_k \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } n \quad (17c)$$

Para la condición de extremo empotrado, utilizando las (7a-c):

$$V_i = W_i = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} W_k = 0 \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } n \quad (18a-c)$$

Para la condición de extremo axilmente deslizante, con las (8a-c):

$$W_i = 0 \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } n \quad (19a)$$

$$\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} V_k = 0 \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } n \quad (19b)$$

$$\frac{1}{\theta_0} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} W_k - V_i \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } n \quad (19c)$$

Finalmente, para la condición de un extremo elásticamente restringido, con las (9a-c) se tienen:

$$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} W_k - \frac{1}{\theta_0} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} V_k - \xi \beta_r \left(\frac{1}{\theta_0} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} W_k - V_i \right) = 0 \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } n \quad (20a)$$

$$\frac{1}{\theta_0^3} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(3)} W_k - \frac{1}{\theta_0^2} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} V_k + \xi \beta_w W_i + \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \left(\frac{1}{\theta_0^3} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} W_k - \frac{1}{\theta_0^2} V_i \right) = 0 \quad (20b)$$

con $i = 1 \text{ ó } n$

$$\left(\frac{S}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{\theta_0^3} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} V_k + \frac{1}{\theta_0^2} W_i \right) - \xi \beta_v V_i = 0 \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } n \quad (20c)$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES RESULTANTE

El proceso indicado es el que permite obtener el sistema de ecuaciones análogas de cuadratura, a partir de las ecuaciones diferenciales gobernantes y de las condiciones de borde particulares de cada modelo. Para su resolución resulta conveniente acondicionar el sistema. En el presente trabajo se propone el siguiente proceso:

- Escribir las expresiones (15a,b) en la forma:

$$\mathbf{L}_{1,1} \mathbf{w} + \mathbf{L}_{1,2} \mathbf{v} = \lambda^2 (\mathbf{Z}_{1,1} \mathbf{w} + \mathbf{Z}_{1,2} \mathbf{v}) \quad (21a)$$

$$\mathbf{L}_{2,1} \mathbf{w} + \mathbf{L}_{2,2} \mathbf{v} = \lambda^2 (\mathbf{Z}_{2,1} \mathbf{w} + \mathbf{Z}_{2,2} \mathbf{v}) \quad (21b)$$

donde $\mathbf{L}_{i,j}$ y $\mathbf{Z}_{i,j}$ son submatrices de coeficientes del sistema (15a,b). reordenándolos en la forma:

$$\mathbf{L}_d \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \lambda^2 \mathbf{Z}_d \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (22a)$$

con \mathbf{L}_d y \mathbf{Z}_d matrices de coeficientes del sistema (15a,b).

De manera similar, se trabaja con el conjunto de ecuaciones provenientes de las condiciones de borde:

$$\mathbf{L}_b \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = 0 \quad (22b)$$

En ambos sistemas de ecuaciones, (21a,b) y (22a,b), \mathbf{w} y \mathbf{v} son los vectores que contienen los desplazamientos de los puntos del modelo discreto. El subíndice d indica que se obtienen a partir del sistema de ecuaciones diferenciales y el subíndice b indica que este conjunto de ecuaciones proviene de las condiciones de borde.

Los elementos de los vectores \mathbf{w} y \mathbf{v} se reagrupan, según correspondan a nodos de borde o a nodos internos:

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b \\ \mathbf{w}_d \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{v}_d \end{Bmatrix} \quad (23a,b)$$

A partir de las ecuaciones (22a,b) y (23a,b) se genera el sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{bb} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b \\ \mathbf{v}_b \end{Bmatrix} + \mathbf{L}_{bd} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_d \\ \mathbf{v}_d \end{Bmatrix} &= 0 \\ \mathbf{L}_{db} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b \\ \mathbf{v}_b \end{Bmatrix} + \mathbf{L}_{dd} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_d \\ \mathbf{v}_d \end{Bmatrix} &= \lambda^2 \left(\mathbf{Z}_{db} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b \\ \mathbf{v}_b \end{Bmatrix} + \mathbf{Z}_{dd} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_d \\ \mathbf{v}_d \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

siguiendo la nomenclatura propuesta por Bert².

El sistema de ecuaciones (24), se reduce al eliminar las incógnitas correspondientes a los desplazamientos de los nodos de borde \mathbf{w}_b y \mathbf{v}_b , con esto se obtiene:

$$\mathbf{L} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_d \\ \mathbf{v}_d \end{Bmatrix} = \lambda^2 \mathbf{Z} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_d \\ \mathbf{v}_d \end{Bmatrix} \quad (25)$$

donde

$$\mathbf{L} = -\mathbf{L}_{db} (\mathbf{L}_{bb})^{-1} \mathbf{L}_{bd} + \mathbf{L}_{dd} \quad (26a)$$

$$\mathbf{Z} = -\mathbf{Z}_{db} (\mathbf{Z}_{bb})^{-1} \mathbf{Z}_{bd} + \mathbf{Z}_{dd} \quad (26b)$$

Y multiplicando la expresión (25) por la inversa: $(\mathbf{Z})^{-1}$

$$\mathbf{L} \cdot (\mathbf{Z})^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_d \\ \mathbf{v}_d \end{Bmatrix} = \lambda^2 \mathbf{Z} \cdot (\mathbf{Z})^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_d \\ \mathbf{v}_d \end{Bmatrix} \quad (27a)$$

resulta

$$(\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{I}) \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_d \\ \mathbf{v}_d \end{Bmatrix} = 0 \quad (27b)$$

donde \mathbf{C} es $\mathbf{L} \cdot (\mathbf{Z})^{-1}$ e \mathbf{I} es la matriz unidad.

El sistema de ecuaciones homogéneas (27b) constituye una forma usual de expresar un problema de autovalores. De la expresión siguiente:

$$|\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{I}| = 0 \quad (28)$$

se obtienen los coeficientes de frecuencia natural λ buscados.

Los vectores de desplazamiento del modelo discreto, \mathbf{w}_d y \mathbf{v}_d , se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones (27b), para cada uno de los autovalores hallados λ . Y los vectores de desplazamiento \mathbf{w}_b y \mathbf{v}_b se pueden calcular mediante:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b \\ \mathbf{v}_b \end{Bmatrix} = -(\mathbf{L}_{bb})^{-1} \mathbf{L}_{bd} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_d \\ \mathbf{v}_d \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Para obtener la forma modal del arco vibrante¹⁹ es necesario interpolar los valores discretos de los desplazamientos, aproximándolos a una representación continua de las componentes tangencial y radial de los desplazamientos $V(x)$ y $W(x)$.

RESULTADOS NUMÉRICOS

En las tablas se presentan los valores de los coeficientes de frecuencia natural de vibración en el plano, $\lambda = \omega S^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}$, de arcos delgados, considerando los efectos de la deformación axil, eje extensible, y de la inercia rotatoria, calculados por el método de cuadratura diferencial.

Se resolvieron diferentes modelos, adoptando distintas condiciones de borde, con diferentes relaciones de esbeltez S/r , dentro del rango $S/r = 25$ (ó 23,56) y $S/r \rightarrow \infty$, (correspondiente al arco inextensible).

Para este trabajo se eligió una amplitud de arco de $\theta_0 = 90^\circ$.

En una primera etapa se realizan comparaciones de los valores de coeficientes frecuencia obtenidos por el método propuesto para arcos circulares delgados Empotrado-Empotrado y Articulado-Articulado¹⁹, con el de elementos finitos y los que publicaron otros autores. Para resolver los modelos con el método de elementos finitos se utiliza el programa ALGOR²⁰; la malla está formada por 200 elementos "viga", en los cuales se considera la deformación axil y la inercia rotatoria.

En la Tabla I se muestran los valores del coeficiente de frecuencia fundamental del arco Empotrado-Empotrado distribuidos en columnas. La primera corresponde a los obtenidos por los autores por el método de cuadratura diferencial; la segunda presenta los obtenidos por los autores utilizando el método de elementos finitos utilizando el programa ALGOR. En la tercera columna están los valores obtenidos por Austin y Veletsos¹⁵ y en la cuarta los obtenidos por Kang *et al.*⁸, quienes utilizan el mismo método de cuadratura diferencial, pero con una diferente distribución de los puntos de mallado sobre el eje del arco. Se observa que existe un muy buen acuerdo entre los coeficientes calculados con el de cuadratura diferencial, el método de elementos finitos y los de la bibliografía.

	$\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2}, \theta_0 = 90^\circ$			
S/r	M. Cuadratura diferencial ¹⁹ $n = 19, \delta = 0,00001$	M. Elementos finitos	Austin y Veletsos ¹⁵	Kang <i>et al.</i> ⁸
25	37,813	37,692	37,81	37,815
50	54,979	54,909	54,98	54,973
100	55,620	55,600	55,63	55,615
150	55,736	55,726	55,74	55,732
250	55,795	55,788	55,80	55,776
350	55,811	55,808	55,83	55,812
500	55,819	55,815	55,84	55,812
∞	55,828	55,825	—	—

Tabla I. Coeficientes de frecuencia fundamental de un arco circular delgado Empotrado-Empotrado

La Tabla II muestra una comparación similar para el arco Articulado-Articulado, también en este caso se observa una muy buena concordancia con los coeficientes de frecuencia obtenidos en este trabajo y los de la literatura científica.

Para la resolución de los casos de arcos presentados en las Tablas I y II, calculados con el método de cuadratura diferencial generalizado, se adoptaron 19 puntos de malla y un valor para δ de 0,00001. Según se puede observar de los valores presentados en ambas tablas, ese valor de δ , elegido de acuerdo a lo sugerido por Kang *et al.*⁸, permite obtener muy buenos resultados.

$\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2}, \theta_0 = 90^\circ$				
S/r	M. Cuadratura diferencial ¹⁹ $n = 19, \delta = 0,00001$	M. Elementos finitos	Austin y Veletsos ¹⁵	Kang <i>et al.</i> ⁸
23,56	32,555*	32,108	32,55	33,542
47,12	33,602	33,490	33,60	33,601
94,25	33,871	33,843	33,87	33,867
141,4	33,921	33,907	33,92	33,926
251,3	33,949	33,944	33,95	33,956
377	33,956	33,954	33,96	33,956
∞	33,967	33,959	--	--

Tabla II. Coeficientes de frecuencia fundamental de un arco circular delgado Articulado-Articulado. * $\delta = 0,0001$

En las tablas siguientes se presentan las primeras seis frecuencias naturales de vibración en el plano del arco para cada uno de los casos indicados; los valores fueron calculados simultáneamente por el método de cuadratura diferencial generalizado y el método de elementos finitos utilizando el programa comercial ALGOR. El método de cuadratura diferencial permite calcular, según puede observarse en las tablas, coeficientes de frecuencia que están en muy buen acuerdo con los del método de elementos finitos y con los resultados de otros autores publicados en la literatura.

La Tabla III muestra los primeros dos coeficientes de frecuencia natural, λ_1 y λ_2 , del arco circular delgado Empotrado - Empotrado. Se observa que para relaciones de esbeltez S/r del orden de 100 o mayores, la primera frecuencia natural prácticamente no varía. Algo similar ocurre con el segundo coeficiente λ_2 a partir de relaciones iguales o mayores a 150.

$\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2} (\theta_0 = 90^\circ, \delta = 0,00001)$								
	S/r	n					EF	Tüfekçi <i>et al.</i> ⁹
		9	11	13	15	19		
λ_1	25	37,807	37,814	37,813	37,813	37,813	37,692	--
	50	55,884	54,900	54,985	54,979	54,979	54,909	--
	100	56,556	55,538	55,626	55,619	55,620	55,600	--
	150	56,678	55,653	55,742	55,735	55,736	55,726	55,734
	250	56,739	55,712	55,801	55,794	55,795	55,788	--
	350	56,756	55,728	55,817	55,811	55,811	55,808	--
	500	56,765	55,737	55,826	55,819	55,819	55,815	--
	∞	56,774	55,744	55,834	55,827	55,828	55,825	--
λ_2	25	52,783	52,003	52,070	52,065	52,066	51,830	--
	50	65,012	64,752	64,772	64,771	64,771	64,713	--
	100	99,517	96,503	97,002	96,945	96,948	96,915	--
	150	101,50	103,02	103,29	103,23	103,23	103,21	103,60
	250	97,395	106,76	105,58	105,62	105,62	105,61	--
	350	95,189	108,71	106,03	106,19	106,18	106,17	--
	500	93,717	110,57	106,15	106,49	106,47	106,46	--
	∞	92,052	114,30	105,92	106,83	106,73	106,73	--

Tabla III. Coeficientes de frecuencia natural λ_1 y λ_2 de un arco circular delgado Empotrado- Empotrado

		$\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2} (\theta_0 = 90^\circ, \delta = 0,00001)$							
		S/r	n				EF	Tüfekçi <i>et al.</i> ⁹	
			11	13	15	17	21		
λ_3	25	86,056	86,131	86,123	86,123	86,123	86,123	86,352	–
	50	118,28	120,42	120,13	120,15	120,15	120,15	120,01	–
	100	155,33	155,92	155,74	155,77	155,76	155,76	155,73	–
	150	218,35	186,01	193,03	191,63	191,77	191,77	191,74	191,85
	250	403,56	186,76	193,88	192,45	192,60	192,60	192,58	–
	350	248,83	186,95	194,10	192,67	192,82	192,82	192,81	–
	500	220,94	187,06	194,22	192,78	192,93	192,93	192,92	–
	∞	192,05	187,16	194,33	192,89	193,04	193,04	193,04	–
λ_4	25	107,83	110,03	109,75	109,77	109,77	109,77	109,21	–
	50	163,43	159,99	160,85	160,73	160,74	160,74	160,75	–
	100	344,58	184,40	191,12	189,79	189,93	189,93	189,86	–
	150	516,29	211,15	212,88	212,65	212,67	212,67	212,65	220,30
	250	858,73	259,89	278,79	272,03	272,90	272,90	272,89	–
	350	410,28	278,34	284,22	279,77	280,55	280,55	280,54	–
	500	573,85	320,14	280,55	283,01	283,04	283,04	283,04	–
	∞	-	-	262,29	294,54	284,99	284,99	284,81	–

Tabla IV. Coeficientes de frecuencia natural λ_3 y λ_4 de un arco circular delgado Empotrado- Empotrado

		$\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2} (\theta_0 = 90^\circ, \delta = 0,00001)$							
		S/r	n				EF	Tüfekçi <i>et al.</i> ⁹	
			17	19	21	23	27		
λ_5	25	160,01	160,01	160,01	160,01	160,01	160,01	160,68	–
	50	198,59	198,79	198,77	198,77	198,77	198,77	198,65	–
	100	291,08	293,75	293,38	293,42	293,48	293,48	293,30	–
	150	300,71	303,35	302,96	303,01	303,00	303,00	302,95	305,10
	250	380,18	380,69	380,54	380,56	380,56	380,56	380,55	–
	350	517,82	401,15	410,38	408,58	408,79	408,79	408,77	–
	500	769,57	401,66	410,95	409,14	409,34	409,34	409,32	–
	∞	405,36	402,13	411,46	409,64	409,85	409,85	409,84	–
λ_6	25	174,97	175,16	175,14	175,14	175,14	175,14	174,30	–
	50	276,22	278,60	278,28	278,31	278,31	278,31	277,90	–
	100	337,91	336,91	337,12	337,09	337,09	337,09	337,12	–
	150	512,43	394,76	402,72	401,22	401,39	401,39	401,32	–
	250	863,69	400,12	409,22	407,46	407,66	407,66	407,62	–
	350	1211,3	729,28	490,64	488,47	488,75	488,75	488,74	–
	500	1733,0	509,45	541,03	530,65	531,97	531,97	531,95	–
	∞	-	-	512,25	552,89	541,79	541,79	541,79	–

Tabla V. Coeficientes de frecuencia natural λ_5 y λ_6 de un arco circular delgado Empotrado- Empotrado

La Tabla IV contiene los coeficientes de la tercera y cuarta frecuencia natural, λ_3 y λ_4 , para el arco Empotrado-Empotrado. La variación de la relación S/r afecta al coeficiente de la tercera frecuencia natural λ_3 hasta una relación del orden de 150, para valores mayores el coeficiente prácticamente mantiene su valor. En tanto que la cuarta frecuencia es mucho más sensible que la tercera a la variación de la relación de esbeltez.

		$\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2} (\theta_0 = 90^\circ, \delta = 0, 00001)$							
	S/r	n					EF	Karami <i>et al.</i> ¹⁶	Liu <i>et al.</i> ⁴
		9	11	13	15	19			
λ_1	23,56	33,245*	32,506*	32,558*	32,555*	32,555*	32,108	32,547	–
	47,12	34,376	33,547	33,605	33,602	33,602	33,490	33,601	–
	94,25	34,662	34,815	33,874	33,871	33,871	33,843	33,870	–
	141,4	34,715	33,865	33,924	33,921	33,921	33,907	–	–
	251,3	34,744	33,892	33,952	33,949	33,949	33,944	–	–
	377	34,751	33,899	33,959	33,956	33,956	33,954	33,955	–
	∞	34,757	33,904	33,964	33,962	33,967	33,959	–	33,940
λ_2	23,56	33,262*	33,296*	33,293*	33,293*	33,293*	33,626	33,294	–
	47,12	61,920	61,553	61,589	61,587	61,587	61,438	61,587	–
	94,25	79,856	76,969	77,550	77,483	77,487	77,353	77,486	–
	141,4	76,168	78,898	79,051	79,004	79,008	78,949	–	–
	251,3	70,246	81,130	79,609	79,677	79,676	79,658	–	–
	377	67,682	83,058	79,621	79,843	79,833	79,823	79,831	–
	∞	65,039	88,600	79,164	80,033	79,955	79,944	–	79,950

Tabla VI. Coeficientes de frecuencia natural λ_1 y λ_2 de un arco circular delgado Articulado- Articulado. * $\delta = 0, 0001$

		$\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2} (\theta_0 = 90^\circ, \delta = 0, 00001)$						
	S/r	n					EF	Karami <i>et al.</i> ¹⁶
		11	13	15	17	21		
λ_3	23,56	77,992*	79,724*	79,541*	79,554*	79,553*	79,132	79,536
	47,12	87,816	89,764	89,534	89,551	89,550	89,853	89,549
	94,25	141,16	143,22	142,70	142,76	142,76	142,96	142,76
	141,4	206,17	145,10	152,69	151,27	151,40	151,34	–
	251,3	378,99	145,57	153,23	151,80	151,93	151,91	–
	377	186,45	145,69	153,37	151,93	152,07	152,06	152,06
	∞	140,77	145,78	153,48	152,04	152,17	152,16	–
λ_4	23,56	80,382*	80,542*	80,521*	80,523*	80,523*	81,229	80,523
	47,12	155,44	137,84	142,43	141,703	141,77	140,97	141,77
	94,25	323,65	144,23	151,64	150,263	150,39	150,24	150,39
	141,4	487,12	200,06	203,03	202,698	202,74	202,67	–
	251,3	866,48	221,12	242,52	233,772	234,84	234,78	–
	377	390,78	244,15	238,38	236,291	236,86	236,84	236,86
	∞	-	-	213,77	249,994	238,13	237,91	–

Tabla VII. Coeficientes de frecuencia natural λ_3 y λ_4 de un arco circular delgado Articulado- Articulado, * $\delta = 0, 0001$

La Tabla V presenta los coeficientes de frecuencia natural λ_5 y λ_6 . La incidencia de la variación de la relación S/r es aún mayor en los valores de los coeficientes de estas frecuencias, tal como puede observarse.

La tres tablas siguientes, VI, VII y VIII, contienen los primeros seis coeficientes de frecuencia natural del arco delgado Articulado-Articulado. En el cálculo de algunos de los valores presentados en las tablas, correspondientes a la relación de esbeltez $S/r = 23,56$, se

		$\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2} (\theta_0 = 90^\circ, \delta = 0,00001)$						
	S/r	n					EF	Karami <i>et al.</i> ¹⁵
		17	19	21	23	27		
λ_5	23,56	136,85*	136,99*	136,99*	136,99*	136,99*	136,40	136,96
	47,12	168,75	168,89	168,87	168,88	168,88	169,89	168,88
	94,25	239,03	241,59	241,26	241,29	241,29	241,26	241,29
	141,4	249,60	252,36	251,99	252,02	252,02	252,19	--
	251,3	377,87	339,77	349,96	348,04	348,25	348,20	--
	377	565,97	340,43	350,71	348,77	348,98	348,94	348,97
	∞	330,12	340,94	351,29	349,33	349,54	349,51	--
λ_6	23,56	150,84*	150,84*	150,84*	150,84*	150,84*	151,64	150,84
	47,12	227,79	230,11	229,82	229,85	229,85	229,21	229,84
	94,25	320,29	316,36	317,53	317,38	317,39	317,09	317,39
	141,4	486,27	336,88	346,45	344,67	344,87	344,67	--
	251,3	869,88	380,92	379,84	379,99	379,97	380,03	--
	377	1307,9	438,97	477,02	464,80	466,20	466,14	466,21
	∞	-	-	442,43	489,19	475,12	474,68	--

Tabla VIII. Coeficientes de frecuencia natural λ_5 y λ_6 de un arco circular delgado Articulado- Articulado. * $\delta = 0,0001$

		$\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2} (\theta_0 = 90^\circ, \delta = 0,00001)$						
	S/r	n					EF	Tüfekçi <i>et al.</i> ⁹
		11	13	15	19	21		
λ_1	25	3,6920	3,6921	3,6920	3,6921	3,6922	-	-
	50	3,6953	3,6955	3,6954	3,6955	3,6956	3,6922	-
	100	3,6962	3,6963	3,6962	3,6963	3,6964	3,6954	-
	150	3,6963	3,6965	3,6964	3,6963	3,6967	3,6962	-
	250	3,6962	3,6965	3,6965	3,6967	3,6966	3,6964	-
	350	3,6962	3,6964	3,6965	3,6959	3,6972	3,6964	-
	500	3,6966	3,6969	3,6966	3,6964	3,6971	3,6964	-
	∞	3,7316	3,7174	3,7340	3,7686	3,8818	3,6967	3,6967
λ_2	25	17,371	17,379	17,379	17,379	17,379	-	-
	50	17,712	17,719	17,719	17,719	17,719	17,638	-
	100	17,797	17,800	17,800	17,800	17,800	17,780	-
	150	17,817	17,815	17,815	17,815	17,815	17,806	-
	250	17,837	17,822	17,823	17,823	17,823	17,819	-
	350	17,850	17,824	17,825	17,825	17,824	17,823	-
	500	17,861	17,825	17,826	17,826	17,825	17,825	-
	∞	17,881	17,824	17,827	17,823	17,816	17,827	-

Tabla IX. Coeficientes de frecuencia natural λ_1 y λ_2 de un arco circular delgado Empotrado- Libre

adoptó el valor de la distancia δ en 0,0001 para evitar inestabilidades numéricas; los valores con él calculados se indican en las tablas con "*" a la derecha del coeficiente respectivo.

La tres tablas siguientes, IX, X y XI corresponden al arco Empotrado-Libre.

Tal como puede observarse en ellas, se requiere de mallados con mayor densidad de puntos. Aún para las primeras frecuencias el valor n debe ser aumentado para lograr la estabilidad numérica y en mayor medida todavía, para calcular frecuencias superiores.

		$\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2} (\theta_0 = 90^\circ, \delta = 0,00001)$					
	S/r	n					EF
		15	19	21	23	25	
λ_3	25	45,831	45,830	45,830	45,830	45,830	-
	50	54,878	54,869	54,869	54,869	54,869	54,488
	100	56,007	55,997	55,997	55,997	55,997	55,892
	150	56,186	56,175	56,175	56,175	56,175	56,128
	250	56,276	56,264	56,264	56,263	56,264	56,247
	350	56,300	56,288	56,288	56,287	56,287	56,279
	500	56,314	56,301	56,301	56,300	56,299	56,296
	∞	56,328	56,319	56,329	56,316	56,306	56,311
λ_4	25	61,818	61,801	61,801	61,801	61,801	-
	50	99,067	98,957	98,956	98,956	98,956	98,605
	100	114,03	113,68	113,68	113,68	113,68	113,40
	150	114,89	114,58	114,58	114,58	114,58	114,45
	250	115,17	114,97	114,97	114,97	114,97	114,92
	350	115,12	115,07	115,07	115,07	115,07	115,04
	500	114,93	115,12	115,12	115,12	115,12	115,11
	∞	113,83	115,15	115,17	115,17	115,18	115,17

Tabla X. Coeficientes de frecuencia natural λ_3 y λ_4 de un arco circular delgado Empotrado- Libre

		$\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2} (\theta_0 = 90^\circ, \delta = 0,00001)$					
	S/r	n					EF
		21	23	25	27	29	
λ_5	25	108,91	108,91	108,91	108,91	108,91	-
	50	121,69	121,69	121,69	121,69	121,69	120,88
	100	185,53	185,51	185,51	185,52	185,51	185,06
	150	191,92	191,89	191,89	191,89	191,89	191,63
	250	193,32	193,28	193,29	193,29	193,29	193,18
	350	193,63	193,59	193,60	193,60	193,60	193,54
	500	193,78	193,75	193,75	193,75	193,75	193,72
	∞	193,93	193,90	193,90	193,90	193,89	193,88
λ_6	25	123,58	123,58	123,58	123,58	123,58	-
	50	190,42	190,38	190,39	190,39	190,39	188,21
	100	220,54	220,51	220,51	220,51	220,51	220,31
	150	283,97	283,47	283,52	283,52	283,53	283,11
	250	291,45	290,89	290,95	290,94	290,94	290,76
	350	292,22	291,72	291,78	291,77	291,77	291,67
	500	292,48	292,11	292,15	292,15	292,15	292,09
	∞	290,36	292,78	292,45	292,48	292,48	292,46

Tabla XI. Coeficientes de frecuencia natural λ_5 y λ_6 de un arco circular delgado Empotrado- Libre

CONCLUSIONES

El análisis de la convergencia del método de cuadratura diferencial generalizado para los modelos de arco propuestos se hace a través de la variación del número de puntos de la malla. Se determina que la convergencia de resultados utilizando este método es muy rápida y se logra con relativamente pocos puntos de malla, tal como puede observarse en las Tablas III y subsiguientes. En general, se puede notar que en el método de cuadratura diferencial hay una tendencia que se repite en los tres modelos de vinculación de arcos analizados. En todos los casos es necesario aumentar el número de puntos de mallado para lograr la convergencia de los coeficientes de frecuencias más altas.

Se destaca que los resultados se obtienen con un mínimo esfuerzo computacional aún en el caso de generar la malla con un número alto de puntos.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido patrocinado por el programa de Investigación y Desarrollo del CONICET y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, y fue desarrollado en el Departamento de Ingeniería de dicha Universidad.

Los autores agradecen al Dr. P.A.A. Laura, lamentablemente fallecido, por su guía y consejo durante el inicio de este trabajo.

REFERENCIAS

- 1 R. Bellman y J. Casti, "Differential quadrature and long-term integration", *J. Math. Anal. App.*, Vol. **34**, pp. 235-238, (1971).
- 2 C.W. Bert y M. Malik, "Differential quadrature method in computational mechanics: A review", *Applied Mechanics Review*, Vol. **49**, pp.1-28, (1996).
- 3 C.W. Bert, X. Wang y A.G. Striz, "Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method", *Acta Mechanica*, Vol. **102**, pp. 11-24, (1994).
- 4 G.R. Liu y T.Y. Wu, "Vibration analysis of beams using the generalized differential quadrature rule and domain decomposition", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **246**, N° 3, pp. 461-481, (2001).
- 5 R.H. Gutiérrez, P.A.A. Laura, y R.E. Rossi, "The method of differential quadrature and its application to the approximate solution of ocean engineering problems", *Ocean Engineering*, Vol. **21**, N° 1, pp. 57-66, (1994).
- 6 A.G. Striz, X. Wang y C.W. Bert, "Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components", *Acta Mechanica*, Vol. **111**, pp. 85-94, (1995).
- 7 E. Viola, E. Artioli, y M. Dilena, "Analytical and differential quadrature results for vibration analysis of damaged circular arches", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **288**, pp. 887-906, (2005).
- 8 K.J. Kang, C.W. Bert y A.G. Striz, "Vibration and buckling analysis of circular arches using DQM", *Computers & Structures*, Vol. **60**, N° 1, pp. 49-57, (1996).
- 9 E. TÜFEKÇÝ, y A. Arpacı, "Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **209**, N° 5, pp. 845-856, (1998).
- 10 J.S. Wu, L.K. Chiang, "A new approach for free vibration analysis of arches with effects of shear deformation and rotatory inertia considered", *Journal of Sound and Vibration* Vol. **277**, pp. 49-71, (2004).

- 11 S. Maiz, D.V. Bambill, C.A. Rossit, P.A.A. Laura, "Transverse Vibration of Bernoulli-Euler beams carrying point masses and taking into account their rotatory inertia: Exact solution", *Journal of Sound and Vibration*, doi:10.1016/j.jsv.2006.12.028, (2007).
- 12 C. Shu y W. Chen, "On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **222**, N° 2, pp. 239-257, (1999).
- 13 C. Shu y B.E. Richards, "Application of generalized differential quadrature to solve two dimensional incompressible Navier-Stokes equations", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. **15**, pp. 791-798, (1992).
- 14 H. Du, M.K. Lim y R.M. Lin, "Application of generalized differential quadrature to vibration analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **181**, N° 2, pp. 279-293, (1995).
- 15 W.J. Austin, A.S. Veletsos, C.A.L. Pereira y S.J. Wung, "Free in-plane vibration of circular arches", *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. **98**, pp. 311-329, (1972).
- 16 G. Karami y P. Malekzadeh, "In-plane vibration analysis of circular arches with varying cross-sections using differential quadrature method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **274**, pp. 239-257, (2004).
- 17 R.E. Belman y R.S. Roth, "*Methods in approximation: techniques for mathematical modeling*", Editorial D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, (1986).
- 18 C. Shu, "*Differential Quadrature and its application in Engineering*", Editorial Springer-Verlag London Limited, Gran Betaña, (2000).
- 19 S.J. Escanes, D.V. Bambill, D.H. Felix. "Análisis dinámico de arcos circulares delgados por el método de cuadratura diferencial generalizado", *Mecánica Computacional*, Vol. **XXV**, pp. 1697-1716, (2006).
- 20 ALGOR inc., "*Linear Stress and Vibration Analysis Processor Referent Manual*", Part N° 6.000.501, Revision 5.00, Pittsburg, PA, USA. (1999).