

El modelo de daño localizado aplicado al análisis de estructuras de obra de fábrica

Roberto Clemente

Universidad Politécnica de Cataluña
Dpto. de Ingeniería de la Construcción
Tierra de Melide 28, portal B, 3º A
28050 Madrid, España
Tel.: 34 91 685 168 446
e-mail: clemente@cimne.upc.edu

Miguel Cervera

Universidad Politécnica de Cataluña
Dpto. de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería
Jordi Girona s/n, Edificio C-1, Campus Norte
08034 Barcelona, España
Tel.: 34 93 401 6492; Fax: 34 93 401 1048
e-mail: miguel.cervera@upc.edu

Pere Roca

Universidad Politécnica de Cataluña
Dpto. de Ingeniería de la Construcción
Jordi Girona s/n, Edificio C-1; Campus Norte
08034 Barcelona, España
Teléfono: 93 401 73 81; Fax: 93 405 41 35
e-mail: pere.roca.fabregat@upc.edu

Resumen

La simulación de fisuras localizadas en materiales cuasifrágiles mediante la mecánica computacional es un tema de investigación que aún se encuentra abierto. En este trabajo se plantea un modelo continuo para estudiar la fisuración en estructuras de obra de fábrica. El modelo propuesto, llamado *modelo de daño localizado*, combina el modelo de daño distribuido tracción/compresión, ampliamente aplicado en el estudio del hormigón, con un algoritmo de *rastreo* de fisuras. La capacidad del modelo se hace patente al aplicarlo al estudio de un arco semicircular de obra de fábrica con carga asimétrica, cuyos resultados son mucho más realistas que los que se obtienen con el modelo de daño distribuido en su forma original.

Palabras claves: *localización, fisuras, daño, obra de fábrica, arcos.*

LOCALISED DAMAGE MODEL APPLIED TO THE ANALYSIS OF MASONRY STRUCTURES

Summary

The simulation of localised cracks on quasibrittle materials by means of computational mechanics is a research topic that is still open. In this work, a continuous model to study cracking on masonry structures is raised. The proposed model, called *localised damage model*, combines the smeared crack tension/compression damage model -widely employed to study the behaviour of concrete- with a *crack tracking* algorithm. The model performance is showed when applied to the analysis of a semicircular masonry arch with asymmetric load. The results obtained from the localised damage model are more realistic than those obtained from the smeared crack model in its original form.

Keywords: *localization, cracking, damage, masonry, arches.*

INTRODUCCIÓN

Los modelos que describen el daño como una variable distribuida en el volumen de la estructura se utilizan normalmente para el análisis de estructuras de hormigón armado, proporcionando resultados aceptables. Sin embargo, el análisis de estructuras no reforzadas, y particularmente el de la obra de fábrica, requiere un enfoque más sofisticado capaz de describir el daño localizado que se observa normalmente en estas estructuras, tanto en condiciones de servicio como en condiciones últimas.

En el llamado *modelo de daño distribuido tracción/compresión* (Cervera, 2003), el daño en cualquier punto se define por medio de un valor escalar (llamado variable de daño) que afecta la rigidez elástica y representa el nivel de degradación del material, variando desde el material intacto (elástico) hasta el completamente dañado, sin rigidez. El modelo emplea dos variables de daño: una para estados tensionales de tracción y otra para los de compresión, permitiendo comportamientos diferentes según el signo de las tensiones.

Los primeros resultados obtenidos tras la aplicación de este modelo en el análisis por medio del método de los elementos finitos de estructuras de obra de fábrica demostraron que el daño se simula de manera poco realista, distribuyéndose en grandes zonas de la estructura. Para subsanar esto, se presenta en este trabajo un modelo que permite describir el daño localizado en forma de fisuras discretas, a través de un *algoritmo de rastreo de fisuras* combinado con el modelo de daño distribuido tracción/compresión. Dicho algoritmo es capaz de detectar el punto en el contorno de la estructura en el que se origina la fisura y luego simular su desarrollo en función de la magnitud y dirección de las tensiones principales de tracción. El algoritmo marca los elementos finitos ubicados en la trayectoria de la fisura, permitiendo que puedan experimentar daño, mientras que el resto de los elementos tiene un comportamiento elástico lineal. La combinación del modelo de daño distribuido y el algoritmo de rastreo se ha denominado *modelo de daño localizado*.

Como ejemplo de aplicación del modelo de daño localizado en estructuras de obra de fábrica se estudia un arco semicircular bajo peso propio y una carga puntual asimétrica. Los resultados obtenidos se validan con un estudio del arco mediante el método del análisis límite.

A continuación se presenta una breve reseña acerca del comportamiento de la obra de fábrica y diferentes métodos para su análisis como elemento estructural. En el siguiente punto se plantea el modelo de daño escalar distribuido, que sirve de base para la implementación del algoritmo de rastreo. Seguidamente se plantea el estado del arte en la simulación numérica de fisuras localizadas, comentando los dos enfoques empleados más comúnmente: fisura discreta y fisura distribuida. Luego se describe el algoritmo de rastreo de fisuras, junto con algunos ejemplos ilustrativos y de validación. Finalmente, se realiza el análisis bidimensional de un arco semicircular con carga asimétrica, empleando los modelos de daño distribuido y localizado, con el fin de comparar los resultados obtenidos con cada uno de ellos.

MODELIZACIÓN DE LA OBRA DE FÁBRICA

Comportamiento estructural

Dos rasgos principales destacan en las estructuras constituidas por la obra de fábrica. En primer lugar, los elementos de obra de fábrica (si se observan como un sólido continuo) son marcadamente anisótropos; es decir, presentan propiedades diferentes según la dirección de aplicación de las cargas. En segundo lugar, poseen relativa baja resistencia a la tracción. Ambos fenómenos se deben a la presencia de las juntas, que actúan como planos de debilidad en el supuesto continuo formado por las unidades. Estas conclusiones aparecen documenta-

das en los trabajos de Samarasinghe y Hendry (1980), Page (1980, 1981, 1983) y Samarasinghe *et al.* (1982).

Existen muchos factores que influyen en la respuesta de un elemento estructural de obra de fábrica, como por ejemplo el tamaño y la disposición de las unidades, el material que compone las unidades o el tipo de mortero y la interacción entre ellos. En Hendry (1990) y Lourenço (1996), entre otros, se puede encontrar información detallada de estas observaciones, así como de diversos métodos de caracterización del material.

Línea de empujes y análisis límite de un arco de obra de fábrica

Los primeros análisis científicos que se hicieron para calcular estructuras de obra de fábrica estaban orientados hacia los arcos. Dichos estudios datan de finales del siglo XVII, cuando Hooke, y más tarde Gregory, postularon el *método antifunicular* para su diseño (Huerta, 1996). Las hipótesis de este método planteaban que la forma correcta de un arco corresponde a la catenaria invertida de un cable flexible, de peso proporcional al que se verá sometida la estructura real. Además, se afirmaba que un arco de forma diferente será estable sólo si dicha catenaria invertida está contenida dentro de su espesor.

Partiendo de lo anterior, Moseley plantea la teoría de la *línea de empujes* en 1833. El arco se divide en dovelas (reales o imaginarias), se observan los planos de contacto entre ellas y se calcula allí la magnitud y ubicación de la resultante de las fuerzas de contacto. Al lugar geométrico de estos puntos se le denomina línea de empujes. Esta teoría afirma que la estabilidad del arco está asegurada siempre que la línea de empujes se encuentre en su interior. Sin embargo, en un arco de suficiente espesor existen prácticamente infinitas líneas de empujes posibles, siendo imposible determinar *a priori* cuál de ellas es la que representa la configuración de equilibrio real. No obstante, en general no es necesario determinar la línea de empujes real de la estructura, sino que normalmente el hecho de encontrar una línea de empujes *cualquiera* dentro del espesor del arco y en equilibrio con las cargas es garantía suficiente de su estabilidad (Huerta, 1996)

Partiendo del estudio de las líneas de empujes, Heyman propuso en 1966 el método del *análisis límite*, que se basa en los siguientes principios (Heyman, 1999): a) la piedra no tiene resistencia a tracción; b) la piedra no alcanza su resistencia a compresión, y c) no existe deslizamiento entre las piedras.

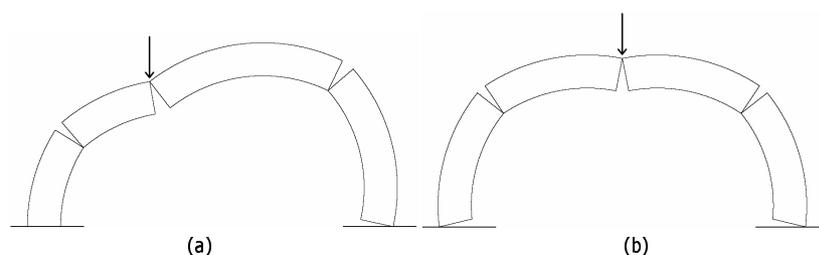


Figura 1. Mecanismos de colapso de un arco simétrico: a) carga simétrica, b) carga asimétrica

Una estructura estudiada bajo los principios del análisis límite alcanza el colapso cuando se forma un número suficiente de articulaciones como para transformar la estructura en un mecanismo. En el método se determina la formación de una articulación cuando la línea de empujes se hace tangente al contorno de la fábrica. Para el caso de un arco simétrico con carga simétrica, se necesitan cinco articulaciones para hacerlo inestable, mientras que cuatro rótulas bastan para hacer colapsar a un arco con carga asimétrica (Figura 1). Una manera de determinar la carga última de un arco de mampostería consiste pues en determinar bajo qué magnitud de carga se forman las rótulas necesarias para su colapso.

Micromodelos y macromodelos

Otras propuestas más modernas para modelar la obra de fábrica se formulan basadas en la descripción del comportamiento del material a nivel constitutivo. Por ejemplo, los llamados *micromodelos* simulan el comportamiento de las unidades y de las juntas por separado, acoplando las ecuaciones correspondientes para obtener una respuesta global del material compuesto. Estos modelos son adecuados para hacer estudios locales en las estructuras, donde se esperan estados tenso-deformacionales marcadamente heterogéneos y la interacción unidad-mortero influye de manera importante en los resultados.

Como alternativa a los micromodelos se puede suponer que la obra de fábrica es un material continuo y homogéneo. De esta manera su comportamiento puede definirse en términos de tensiones y deformaciones continuas. Para lograr esto se han propuesto diversas técnicas de homogeneización, que tratan de relacionar las características micro de la obra de fábrica con las características macro de un material homogéneo equivalente (Lourenço, 1996; Gambarotta y Lagomarsino, 1997; Zucchini y Lourenço, 2002). Estos *macromodelos* se utilizan generalmente en el estudio de estructuras grandes sometidas a estados de tenso-deformacionales homogéneos.

En el momento de formular o elegir el modelo constitutivo que simule la obra de fábrica es necesario considerar la diferencia entre los comportamientos a tracción y a compresión, tanto en rigidez como en resistencia. Asimismo, el carácter anisótropo del material tiene que quedar reflejado de alguna manera en el modelo. Algunos macromodelos con no linealidad aplicados al análisis estructural de la obra de fábrica se encuentran en Lourenço (1996), Saetta *et al.* (2000), Creazza *et al.* (2000), Creazza *et al.* (2001), Berto *et al.* (2001), Frunzio *et al.* (2001), Roede-Cabo y Ayala (2001), Brencich *et al.* (2001).

MODELO DE DAÑO DISTRIBUIDO TRACCIÓN/COMPRESIÓN

El modelo parte del concepto de tensión efectiva $\bar{\sigma}$, definida como la tensión asociada a las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ bajo un régimen elástico lineal, o $\bar{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}$, siendo \mathbf{D} el tensor constitutivo elástico. Este tensor se divide en dos partes, separando sus componentes positivas o de tracción $\bar{\sigma}^+$ de las negativas o de compresión $\bar{\sigma}^-$, de la siguiente manera:

$$\bar{\sigma}^+ = \sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad \bar{\sigma}^- = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}^+ \quad (1)$$

donde $\bar{\sigma}_i$ es la tensión principal i -ésima; los vectores \mathbf{p}_i corresponden al vector unitario asociado a la dirección principal i y $\langle \bullet \rangle$ son los paréntesis de Macaulay.

Se definen también dos variables internas de daño, cada una asociada con un signo de las tensiones: d^+ para el daño a tracción y d^- para el daño a compresión. Bajo estas consideraciones, la ecuación constitutiva tiene la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d^+) \bar{\sigma}^+ + (1 - d^-) \bar{\sigma}^- \quad (2)$$

Estas variables indican el nivel de daño, de manera que $d^\pm = 0$ significa que el material no ha dañado y $d^\pm = 1$ señala el colapso total del material, que ya no es capaz de soportar tensiones. El empleo de una variable diferente para cada signo de las tensiones permite definir distintos comportamientos para tracción y para compresión.

La norma de tensiones efectivas es una magnitud escalar positiva que sirve para comparar diferentes estados tensionales en dos o tres dimensiones. Planteada en sus partes positiva τ^+ y negativa τ^- , tiene la forma:

$$\tau^\pm = (\bar{\sigma}^\pm : \mathbf{C}^\pm : \bar{\sigma}^\pm)^{1/2} \quad (3)$$

donde los tensores de cuarto orden \mathbf{C}^+ y \mathbf{C}^- son idénticos, isótropos y definidos positivos, definidos en este trabajo como $\mathbf{C}^\pm = \frac{1}{E} \mathbf{D}$.

Partiendo de las definiciones anteriores, se pueden introducir dos criterios de daño diferentes, g^+ y g^- :

$$g^\pm (\tau^\pm, r^\pm) = \tau^\pm - r^\pm \leq 0 \quad (4)$$

Donde r^+ y r^- son variables internas que se pueden interpretar como los umbrales de daño actualizados, ya que su valor controla la magnitud de las superficies de daño respectivas en cada instante de tiempo. Sus valores iniciales son $r_0^\pm = f_e^\pm$, donde f_e^+ y f_e^- representan los valores umbral de tensiones de tracción y de compresión, respectivamente, a partir de los cuales comienza a desarrollarse el daño. La definición explícita de los valores actuales de las variables internas r^\pm tiene la forma:

$$r^\pm = \text{máx} [r_0^\pm, \text{máx} (\tau^\pm)] \quad (5)$$

Los criterios definidos arriba implican que existe evolución del daño cuando la condición (4) deja de cumplirse. En este caso, se actualiza el valor de r^\pm con la expresión (5) hasta que el criterio de daño se cumpla nuevamente.

Finalmente, los índices de daño d^+ y d^- son definidos explícitamente como una función de la forma $0 \leq d^\pm (r^\pm) \leq 1$. El comportamiento post-pico se define por medio de la energía de fractura G_f^\pm del material. Este parámetro se normaliza respecto a la longitud característica de los elementos finitos, para asegurar objetividad respecto al tamaño de la malla (Cervera, 2003).

SIMULACIÓN DE LA FISURACIÓN A TRACCIÓN

Los enfoques principales para la simulación numérica de la fisuración a tracción son el de *fisura discreta* y el de *fisura distribuida*.

Enfoque de fisura discreta

Las primeras aplicaciones del método de los elementos finitos al estudio estructural del hormigón en la década de 1960 ya se enfrentaban al problema de propagación de fisuras (Clough, 1962; Ngo y Scordelis, 1967; Nilson, 1968). Las principales dificultades a resolver eran cómo insertar una fisura en una malla de elementos finitos y el establecimiento de criterios para su propagación.

Como primera solución la fisura se simulaba separando puntos nodales que inicialmente ocupaban la misma posición [ver Figura 2a)]. Obviamente esta técnica depende ampliamente de la malla, ya que las fisuras sólo pueden formarse siguiendo un camino de nodo a nodo a través de los bordes de los elementos. Además, el método implica la variación de la topología de la malla durante el cálculo, aumentando considerablemente el coste computacional.

Esta técnica fue mejorada luego introduciendo elementos nuevos de manera que sus bordes se ubicaran a lo largo de la fisura [ver Figura 2b)]. Esto consigue reducir (sin eliminarla) la dependencia de la malla, pero es necesario efectuar frecuentes remallados para obtener una correcta simulación de la propagación de la fisura. A pesar de que se han diseñado muchas técnicas de remallado (Díez *et al.*, 2000; Zienkiewicz *et al.*, 1995), normalmente incrementan de manera importante el tiempo de cálculo.

Para definir el momento en que una fisura debe propagarse se utilizaba inicialmente el criterio de tensión a tracción máxima. Sin embargo, rápidamente se reconoció que los campos de tensiones y deformaciones alrededor de la punta de la fisura son singulares, lo que hace que el criterio de tracción máxima no sea confiable. Así, se empezaron a utilizar criterios basados en la energía, a partir de la teoría de la Mecánica de Fractura. Además se desarrollaron elementos finitos especiales, al ponerse de manifiesto que los elementos estándar no son apropiados para simular esos estados de tensión-deformación singulares (Tong y Pian, 1973; Owen y Fawkes, 1983).

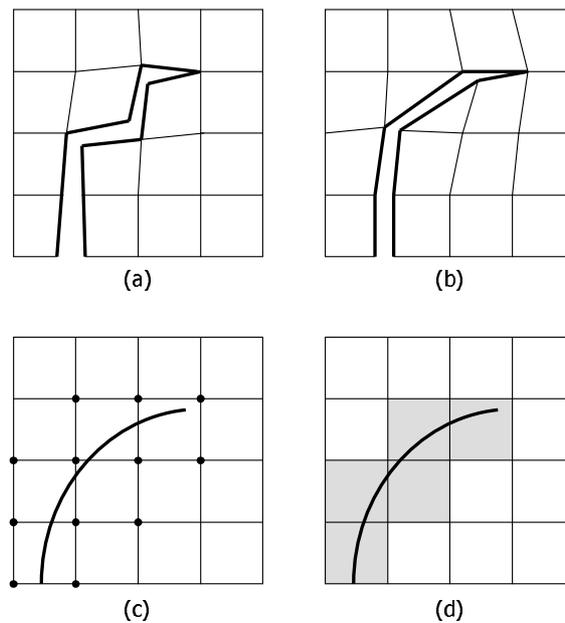


Figura 2. Simulación de la fisura discreta: a) sin remallar; b) con remallado; c) con enriquecimiento nodal; d) con enriquecimiento elemental

Como alternativa, recientemente Belytschko *et al.* (Belytschko y Black, 1999; Möes *et al.*, 1999; Sukumar *et al.*, 2000) han propuesto el llamado método de los *elementos finitos extendido* (también conocido como X-FEM) que soluciona muchas de las desventajas del enfoque de la fisura discreta mencionadas arriba. Este método plantea la propagación de la fisura en la malla de elementos finitos (sin remallado), añadiendo grados de libertad adicionales en aquellos nodos pertenecientes a los elementos a través de los cuales pasa la fisura [ver Figura 2c)], donde se resaltan los nodos “enriquecidos”. Estos grados de libertad representan el salto en los desplazamientos en la dirección perpendicular a la propagación de la fisura, y el campo singular que se desarrolla en la punta de la fisura.

Otro de los puntos de vista para simular las fisuras discretas es el llamado enfoque de las *discontinuidades fuertes* (ver Simo *et al.*, 1993; Oliver, 1995; Oliver *et al.*, 2004; Oliver y Huespe, 2004). Este enfoque plantea una nueva formulación para elementos finitos con “discontinuidades embebidas” que dependen de las condiciones estáticas y cinemáticas supuestas. En este caso, la interpolación estándar de elementos finitos es enriquecida con un término que representa el salto en los desplazamientos. Es importante destacar que esta formulación necesita el uso de algoritmos de rastreo para establecer el camino que seguirá la fisura y enriquecer así los elementos que se encuentren en dicho camino [ver Figura 2d), donde se resaltan los elementos enriquecidos]. Esto, junto al control explícito de la disipación de energía en la formación de la fisura, representa otro vínculo con la tradición establecida de la mecánica de fractura.

Según una clasificación propuesta en Jirásek (2000) existen tres clases de formulaciones con discontinuidades embebidas, a saber:

1. Formulación simétrica estáticamente óptima. En ella se satisface correctamente la condición de continuidad de tracciones en la discontinuidad interna, pero no se puede representar de forma adecuada la condición cinemática. Ejemplos de esta formulación se encuentran en Belytschko *et al.* (1998) y en Larsson y Runesson (1996), entre otros.
2. Formulación simétrica cinemáticamente óptima. La discontinuidad interna está bien reflejada desde el punto de vista cinemático, pero lleva a una aproximación errónea de las tracciones en la discontinuidad. Ver, por ejemplo, Lofti y Shing (1995).
3. Formulación no simétrica estática y cinemáticamente óptima. En esta formulación las condiciones estáticas y cinemáticas son satisfechas correctamente. Sin embargo, y al contrario de los dos casos anteriores, la formulación origina una matriz tangente no simétrica. Esta formulación se utiliza en los trabajos de Dvorkin *et al.* (1990), Simo y Oliver (1994), entre otros.

Por otro lado, Manzoli (2005) hace un análisis comparativo de estas tres formulaciones entre sí, más la formulación continua con un método de construcción de trayectoria de fisura similar al propuesto en el este trabajo. Allí se concluye, entre otras cosas, que una formulación continua combinada con un algoritmo de construcción de trayectoria de fisura puede ser útil para simular el proceso de la localización en materiales cuasi frágiles.

Enfoque de fisura distribuida

La formulación de daño distribuido para la simulación de las fisuras a tracción tiene sus orígenes en la mecánica computacional de medios continuos. Esto implica que los criterios tanto de propagación como de dirección de fisura están básicamente planteados en términos de tensiones y deformaciones. Los modelos de fisura distribuida suponen que el material dañado se mantiene continuo, por lo que no es necesario hacer cambios en la malla de elementos finitos durante el cálculo. La degradación del material se simula cambiando sus propiedades mecánicas (rigidez y resistencia) en función de la evolución del estado tenso-deformacional.

Examinada bajo las hipótesis de la mecánica de los medios continuos, la creación de una fisura por tensiones de tracción (fractura tipo I) es un fenómeno físico que consiste en la acumulación de deformaciones en una zona determinada de un sólido sometido a carga creciente.

Durante la formación de la fisura se libera la energía elástica acumulada por el material en la zona donde se localizan las deformaciones. La liberación de esta energía puede ocurrir de forma repentina, fallando el material sin mostrar apenas deformaciones (comportamiento frágil) o de una forma más suave, con deformaciones apreciables antes de la

rotura (comportamiento dúctil). Así, por ejemplo, en los materiales cerámicos la fractura ocurre bajo deformaciones relativamente bajas, mientras que en materiales como el acero se pueden formar grandes deformaciones antes de alcanzar el colapso total. En los llamados materiales cuasi frágiles (como el hormigón, y para efectos de este trabajo, la obra de fábrica) se observa un comportamiento intermedio: la energía se libera en su totalidad para valores moderados de deformación.

Una vez se ha liberado la energía, el material ya no es capaz de soportar tracciones en esa zona, formándose entonces una fisura discreta. El proceso total se puede caracterizar con dos parámetros característicos de cada material: la resistencia a tracción (tensión en la cual comienza a degradarse el material) y la energía de fractura (energía que se debe liberar para crear una unidad de área de fisura).

Descripción fenomenológica

La aproximación de fisura distribuida ha sido ampliamente utilizada desde que Rashid (1968) la aplicara al hormigón por primera vez. De hecho, actualmente se encuentra implementada en muchos códigos de elementos finitos comerciales con muy pocos cambios respecto a la versión original. La implementación es relativamente simple, pues basta con añadir una subrutina de un nuevo modelo constitutivo en cualquier código no lineal de elementos finitos.

Uno de los primeros inconvenientes que encontraron los investigadores al tratar de aplicar esta formulación es que si el daño distribuido ocurre en una franja de un elemento finito de ancho, la disipación de energía es proporcional al tamaño de dicho elemento. Así, si se refina la malla hasta tamaños infinitesimales, desaparece la disipación de energía, lo cual es físicamente inadmisibles. Este problema fue solventado por Bazant y Oh (1983), quienes propusieron el *modelo de banda de fisura*. En dicho modelo, el ablandamiento del material se relaciona con la energía de fractura del material y, además, con el tamaño del elemento finito a través del cual pasa la fisura.

Sin embargo, otro problema se hizo patente posteriormente: las soluciones del enfoque de fisura distribuida presentan también dependencia de la orientación de la malla. Hay que destacar que los resultados son perfectos cuando la malla está orientada de manera “apropiada” para la evolución de la fisura, pero obviamente sigue siendo necesario eliminar esta dependencia de alguna manera. De hecho, se ha sugerido el remallado como solución parcial de este problema (Zienkiewicz *et al.* 1995a, 1995b).

Últimamente la investigación en Mecánica Computacional en sólidos ha estado orientada hacia la solución de este problema. Si se encara el problema desde un punto de vista global, un modelo computacional de daño basado en el enfoque de fisura distribuida debe estar compuesto por los siguientes tres ingredientes (Cervera y Chiumenti, 2006):

- i. Un modelo continuo que defina las variables y las ecuaciones del problema de valores de contorno a resolver
- ii. Un modelo constitutivo para las partes intactas y dañadas del dominio
- iii. Un proceso de discretización espacial y temporal que transforme las ecuaciones diferenciales continuas en ecuaciones algebraicas discretas

Estos aspectos deben ser independientes entre sí, cada uno con sus bases bien establecidas, para asegurar una solución correcta.

Muchos de los trabajos recientes se basan en la afirmación de que el origen del problema de dependencia de la orientación de la malla está en el hecho de que cuando se produce ablandamiento del material (con el consiguiente cambio a pendiente negativa de la curva tensión-deformación local) las ecuaciones de gobierno del problema continuo pierden su

carácter elíptico natural. Así, para remediar esto se han planteado diferentes modelos locales, en los que efectivamente se evitan altos gradientes de desplazamientos. Estos modelos tienen en común la utilización de un parámetro que limita la localización, llamado normalmente *longitud característica*. (NOTA: ¿limitadores de localización?)

De acuerdo a su formulación, los métodos planteados bajo el esquema de fisura distribuida se pueden clasificar en *modelos de gradiente* (De Borst y Mühlhaus, 1992; Schreyer y Chen, 1986; Peerlings *et al.*, 1998; De Borst, 2001), *modelos no locales* (Bazant y Pijaudier-Cabot, 1988; Hall y Hayhurst, 1991; De Vree *et al.*, 1995; Comi *et al.*, 2002), *modelo de Cosserat o micropolar* (De Borst, 1991; De Borst *et al.*, 1993), *regularización viscosa* (Dubé *et al.*, 1996; Wang *et al.*, 1997), *regularización numérica* (Bazant, 1976; Oliver, 1989), *remallado* (Jirásek y Patzák, 2001; Díez *et al.*, 2000; Zienkiewicz *et al.*, 1995).

A pesar de la tendencia que apunta a estudiar y modificar los puntos i y ii de la lista anterior, en este trabajo los esfuerzos se enfocarán hacia la parte de discretización espacial (punto iii). Esto se puede justificar partiendo del hecho de que con una malla “adecuada” es posible simular perfectamente una fisura, y por tanto, las sospechas respecto al origen del problema se dirigen hacia el proceso de discretización antes que hacia la formulación de las ecuaciones de gobierno.

Error local de aproximación

De acuerdo con lo comentado en párrafos precedentes, el problema de creación y propagación de fisuras (bajo el enfoque de fisura distribuida) sigue básicamente un procedimiento que consiste en dos pasos. En cada incremento de carga, y para una distribución dada del daño en el sólido, el primero de estos pasos consiste en resolver el problema mecánico para calcular el campo de tensiones. Luego, el siguiente paso es la actualización de la distribución del daño. Esta actualización implica dos operaciones diferentes: a) actualizar el índice de daño en aquellos elementos ya dañados, y b) decidir cuáles elementos intactos dañarán en el incremento de carga actual.

El paso a) es trivial, ya que el índice de daño es una función directa de la historia de deformaciones. Sin embargo, el paso b), relacionado con la dirección de propagación, requiere un estudio más detallado.

En la formulación clásica del modelo de daño distribuido se supone implícitamente que el criterio para definir el inicio de una fisura (el cual está expresado en términos de tensiones/deformaciones) debería también definir automáticamente la dirección de propagación. Esta hipótesis es válida en el problema continuo, donde la evaluación de las tensiones y deformaciones, así como de sus direcciones, son correctas. Sin embargo, en el problema discreto, los campos de tensiones y deformaciones en las cercanías de la punta de la fisura distan mucho de ser exactos (Cervera *et al.*, 2003). De hecho, la punta de la fisura es un punto singular, y la norma L_∞ del error en los gradientes de desplazamientos (deformaciones) en la solución discreta es no acotada. Como consecuencia, la utilización del criterio de umbral de daño para definir la dirección de la propagación origina una dependencia de la orientación de la malla, lo cual es inaceptable.

Este error debido a la discretización espacial en los alrededores de la punta de la fisura es la mayor dificultad que hay que superar en el problema de la propagación de fisuras a tracción (Cervera y Chiumenti, 2006).

La evaluación de la dirección de propagación se puede considerar como un problema diferenciado, obviamente acoplado con la ecuación de equilibrio interno. En este caso, es necesario implementar una técnica o método que permita resolver de manera fiable este problema.

En este trabajo se propone un método basado en un algoritmo de *rastreo*, que permite trazar un camino entre los elementos finitos para delimitar las zonas donde se formarán o propagarán las fisuras en cada incremento de carga.

ALGORITMO DE LOCALIZACIÓN

Introducción

El algoritmo se ejecuta en cada paso de carga del análisis, antes del cálculo de los tensores de tensiones. El procedimiento se divide en dos partes. En la primera se detectan los puntos donde nacen nuevas fisuras. En la segunda parte se estudia cada una de las fisuras existentes para decidir cuáles de ellas pueden evolucionar en el paso de tiempo actual, y en qué dirección. El método está implementado para trabajar con elementos triangulares de tres nodos (CST).

Primera parte: detección de fisuras nuevas

Datos de entrada:

- Tensión principal de tracción en los elementos ubicados en el contorno.
- Elementos marcados como *origen de fisura* en pasos anteriores.

1. Marcado de nuevos elementos que sean origen potencial de fisuras. Para esto se utilizan los siguientes criterios:

- Las fisuras se originarán sólo en elementos ubicados en el contorno, cuando las tensiones principales de tracción superen el valor de la resistencia del material.
- Para cada elemento origen de fisura confirmado existe un parámetro llamado *radio de exclusión*, que es una distancia dentro de la cual no se permite la creación del origen de otra fisura. Este parámetro es definido por el usuario.
- Si existen varios elementos de contorno que han superado la resistencia a tracción simultáneamente, se determinará como origen de fisura aquel elemento que posea la mayor tensión a tracción. Luego se activará el radio de exclusión de este elemento y a partir de allí se podrán marcar como origen de fisura sólo aquellos elementos que se encuentren fuera de este radio.

2. Cálculo de las *coordenadas de origen de fisura*. Estas coordenadas son las del punto medio entre los dos nodos del elemento origen que están ubicados en el contorno. En caso de que haya tres nodos ubicados en el contorno, se toma el centro de gravedad del elemento como el punto de origen de fisura (ver Figura 3).

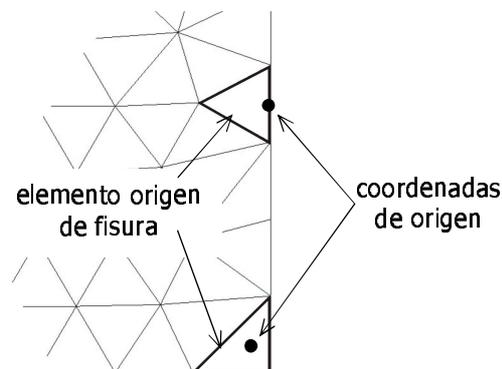


Figura 3. Ubicación de coordenadas de origen de fisura respecto al elemento

Datos de salida:

- Elementos origen de fisura potenciales
- Coordenadas de origen de fisura de cada elemento origen de fisura potencial.

Segunda parte: propagación de fisuras

Datos de entrada:

- Elementos origen de fisura potenciales
- Coordenadas de origen de fisura de cada elemento origen de fisura potencial.
- Magnitud y dirección de la tensión principal de tracción de todos los elementos.
- Elementos pertenecientes a fisuras consolidadas, actualizados desde el paso de carga anterior.

1. Determinación de *elementos punta de fisura* para cada fisura existente. Estos elementos se definen como aquellos que estando ya dañados tienen un elemento vecino (y sólo uno) también dañado.

2. Para cada uno de los elementos punta de fisura y los elementos origen de fisura se practica el siguiente procedimiento:

- i. Determinación de las coordenadas de salida. Se traza un vector con dirección perpendicular a la dirección principal de tracción y que pase por las coordenadas de entrada del elemento. Las coordenadas de salida son la intersección de ese vector con el lado del elemento que corresponda. En la Figura 4a) el elemento punta de fisura es el elemento I.
- ii. El elemento vecino cuyo lado en común corresponda con el lado donde están ubicadas las coordenadas de salida del elemento punta de fisura se marca como potencial para esta fisura y para el paso de tiempo actual [ver Figura 4b)].
- iii. Las coordenadas de entrada de este elemento (elemento J en la Figura 4) son iguales a las coordenadas de salida del elemento anterior (elemento I en la Figura 4).

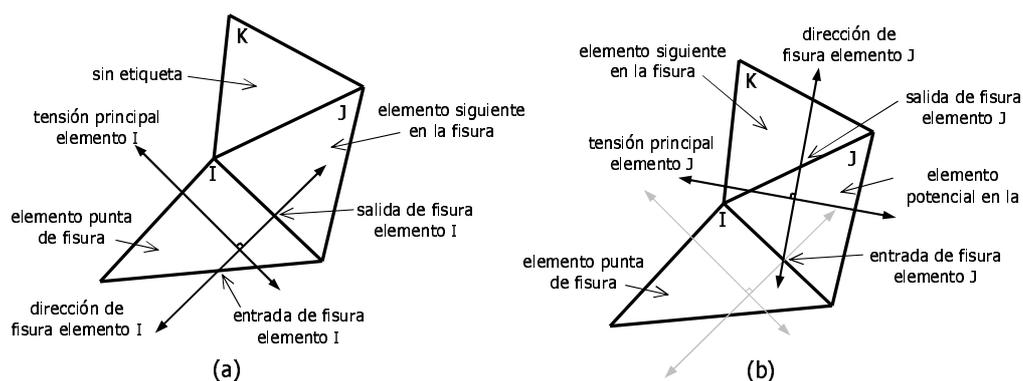


Figura 4. a) Determinación de las *coordenadas de salida* de la fisura (elemento I); b) Determinación de nuevo elemento potencial y de las *coordenadas de entrada* de la fisura (elemento J)

- iv. Se repiten estos pasos tomando el nuevo elemento potencial como punta de fisura (elemento J en la Figura 4).

El procedimiento anterior se repite hasta que se cumpla alguno de los siguientes criterios:

- *Criterio de umbral de tensiones.* Cuando la tensión principal de tracción del elemento actual es menor a un umbral definido por el usuario. La experiencia ha demostrado que un valor igual al 75 % de la resistencia a tracción generalmente funciona bien.
- *Criterio de unión de fisuras.* Cuando el nuevo elemento detectado ya se encuentra dañado o marcado como potencial. Esto representa una unión entre dos fisuras, en cuyo caso se da por terminado el desarrollo de la fisura actual y no se siguen rastreando elementos potenciales.
- *Criterio de fin de fisura.* Cuando una fisura apunta hacia un contorno.

3. En cuanto se cumple alguno de los criterios anteriores se pasa a la siguiente fisura, y se reinicia el ciclo hasta completar todas las fisuras existentes en el problema.

Datos de salida:

Cada elemento posee una de las tres etiquetas siguientes:

- Elemento intacto, no susceptible al daño (fuera del recorrido de fisuras potenciales)
- Elemento intacto, susceptible al daño (dentro del recorrido de una fisura potencial)
- Dañado (pertenece a una fisura consolidada, tendrá comportamiento inelástico el resto del cálculo)

El modelo constitutivo de daño tracción/compresión ha sido modificado de tal manera que pueda reconocer estas etiquetas y, por tanto, discernir el tipo de comportamiento que tendrá cada elemento. Además, allí también se le modifica la etiqueta a aquellos elementos potenciales que efectivamente dañan, añadiéndolos así a la lista de elementos pertenecientes a fisuras consolidadas. Finalmente, los elementos potenciales que no dañaron son restituidos a su estado original: intacto no susceptible al daño. Con estos datos, en el paso de carga siguiente el algoritmo es capaz de determinar las nuevas puntas de fisura, y estudiar la propagación correspondiente.

Criterio de curvatura máxima

La aplicación del modelo de daño localizado tal como está planteado presenta algunos problemas cuando existen estados tensionales de flexión. En algunos casos se manifiestan unas curvaturas bruscas que hacen que la fisura tienda a volverse sobre sí misma, provocando un “enroscamiento” que impide su correcta propagación. Este cambio espurio en la dirección de propagación se debe al complejo estado tensional alrededor de la punta de la fisura, donde las tensiones principales muestran una tendencia radial respecto a este punto. Esto ocurre normalmente cuando la punta de la fisura se encuentra próxima al eje neutro.

Para solventar este problema, se implementa una técnica de identificación y corrección de curvaturas bruscas en la ruta de la fisura antes de marcar cualquier elemento potencial. Esta técnica utiliza los siguientes parámetros, según la Figura 5:

- V_f vector de dirección promedio de fisura. Se obtiene de sumar vectorialmente la dirección de fisura de todos los elementos pertenecientes a la fisura, tanto potenciales del paso de tiempo actual como consolidados de pasos anteriores.
- V_e vector de dirección de fisura del elemento actual.
- α ángulo entre V_f y V_e .

- $\bar{\alpha}$ ángulo de curvatura máxima, especificado por el usuario al inicio del cálculo.
- \bar{V}_f vector unitario que forma un ángulo $\bar{\alpha}$ con V_f y que forma el menor ángulo con V_e .

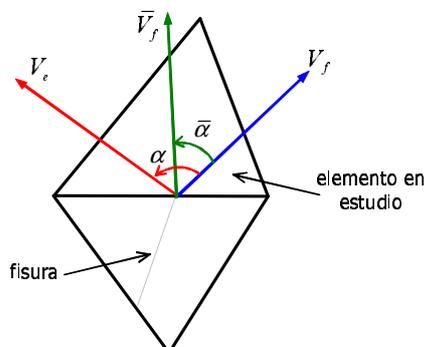


Figura 5. Criterio de curvatura máxima. Caso en el que es necesario corregir la dirección de fisura del elemento V_e

Ahora bien, si se cumple que $\alpha \leq \bar{\alpha}$, el elemento actual se marca como potencial para este paso de tiempo con la dirección V_e , y se pasa al siguiente elemento de la fisura. Si por el contrario $\alpha > \bar{\alpha}$, significa que la fisura tiende a desviarse demasiado bruscamente, y que la dirección del elemento debe corregirse. Para esta corrección existen dos criterios:

- utilizar V_f en lugar de V_e como dirección del elemento; o
- utilizar \bar{V}_f en lugar de V_e como dirección del elemento

En el primer caso se está imponiendo que la fisura mantenga la tendencia mostrada hasta ese punto. Esto es válido para fisuras rectas, o con curvaturas muy leves.

El segundo criterio permite la simulación de fisuras curvas, pero implica un procedimiento diferente para calcular la dirección promedio V_f . En este caso se limita el número de elementos que se utilizan para calcular V_f , de manera que se obligue a la fisura a seguir la tendencia de los últimos n elementos pertenecientes a ella, siendo n un parámetro definido por el usuario.

Una vez aplicado el criterio de curvatura máxima, en cualquiera de sus dos versiones, se sigue el procedimiento normal: el elemento se marca como potencial y se pasa al siguiente elemento. En el apartado siguiente se ilustra este fenómeno con un ejemplo, y se comenta el empleo del criterio del ángulo de curvatura máxima en los resultados obtenidos.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS Y DE VALIDACIÓN

Tracción pura

La geometría consiste en una placa rectangular de 200 mm x 400 mm con un agujero de radio 10 mm en el centro, sometida a desplazamientos opuestos aplicados en sus partes superior e inferior. Las hipótesis empleadas son las de deformación plana, con un espesor unitario. Se modela solamente la mitad de la placa, aprovechando el eje de simetría vertical del problema. Se utilizan dos mallas de elementos finitos triangulares de tres nodos, una con 3.818 elementos de tamaño promedio 5 mm (2.023 nodos) y otra de 14.844 elementos de tamaño promedio igual a 2.5 mm (7.648 nodos).

El problema fue analizado con el modelo de daño distribuido y con el modelo de daño localizado. Se utilizó un módulo de Young de 30 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.2; La

resistencia a tracción es de 2 MPa, y se tomó un valor de energía de fractura igual a 100 J/m².

La Figura 6 muestra la deformada (desplazamientos amplificados 100 veces) y las zonas dañadas en ambas mallas, con los dos modelos de daño. Independientemente de la malla utilizada, con el modelo de daño distribuido la distribución del daño tiende a seguir la orientación de los elementos finitos, en una dirección de aproximadamente 30° respecto a la horizontal. Este comportamiento es claramente dependiente de la orientación de la malla, y justifica por tanto la incorporación de una modificación para evitar que suceda. Con el modelo de daño localizado se obtiene una fisura perfectamente horizontal, que no depende de la orientación ni del tamaño de la malla. Además, el daño se localiza en una sola franja de elementos finitos, al contrario del otro caso, donde existe una dispersión significativa. A pesar de que la fisura localizada obtenida en la malla gruesa tiene el doble de espesor que la fisura de la malla fina, la energía de fractura liberada es la misma. Esto se demuestra en la gráfica de la Figura 7, donde las curvas de reacción vertical vs. desplazamiento impuesto en los dos casos prácticamente coinciden.

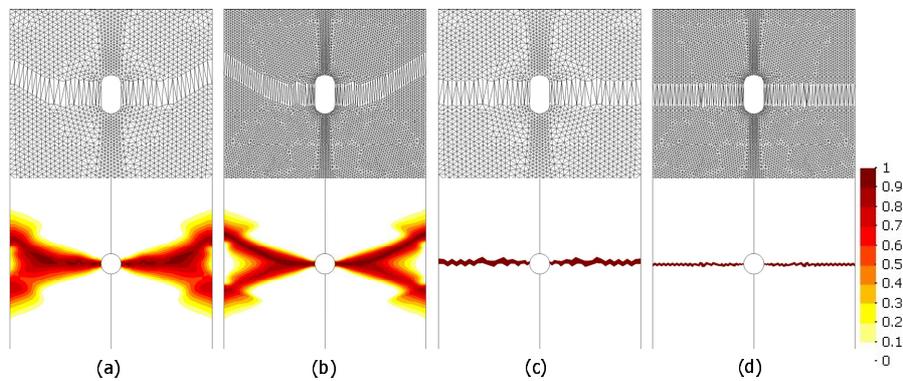


Figura 6. Deformada (x100) y daño a tracción: a) Malla gruesa MDD; b) Malla fina MDD; c) Malla gruesa MDL; d) Malla fina MDL. *MDD: modelo de daño distribuido. MDL: modelo de daño localizado*

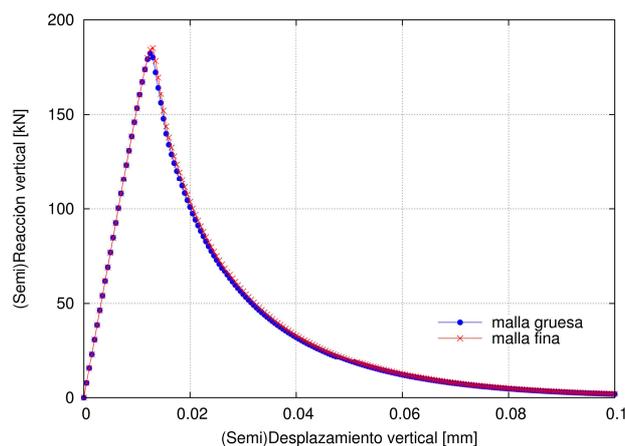


Figura 7. Reacción vs. Desplazamientos para ambas mallas. Modelo de daño localizado

Flexión en modo mixto

Se simulan dos ensayos experimentales pertenecientes a una campaña realizada por Gálvez *et al.* (1988), consistentes en unas probetas de hormigón que se han sometido a estados de flexión en modo mixto hasta la rotura. La geometría, dimensiones y condiciones de contorno se muestran en la Figura 8. En el caso 1 se supone una rigidez nula del apoyo ubicado en la parte superior izquierda ($K=0$, viga de tres puntos). En el caso 2 se toma una rigidez infinita ($K=\infty$, viga de cuatro puntos). La carga P se simula con control de desplazamiento vertical. El análisis se realiza con el modelo de daño localizado, con las siguientes características materiales: módulo de Young 38 GPa; coeficiente de Poisson 0.2; resistencia a tracción 3.0 MPa y energía de fractura 69 J/m². El análisis se hace bajo un estado plano de deformaciones, con un espesor de 50 mm. La malla empleada en los cálculos consta de 13.443 elementos triangulares lineales y 7.028 nodos. Los elementos pertenecientes a la zona donde ocurrirá el daño tienen un tamaño promedio de 2.5 mm.

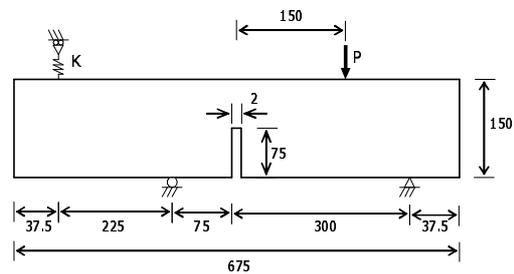


Figura 8. Dimensiones [mm] y condiciones de contorno de la probeta

En el cálculo de la probeta tipo 1 (viga de tres puntos) se utiliza un valor de ángulo de curvatura máxima $\bar{\alpha}$ de 20°. El criterio de corrección en los elementos con cambios bruscos de dirección es el de \bar{V}_f (ver sección anterior), ya que la fisura presenta cierta curvatura. En la simulación de la probeta tipo 2 (viga de cuatro puntos) se utiliza un ángulo de curvatura máxima de 32°, con el criterio de corrección de dirección de V_f . En la Figura 9 se muestran las deformaciones de ambas probetas al momento del colapso. En la Figura 10 se comparan las trayectorias de fisura simuladas con el modelo de daño localizado con los gráficos presentados en Gálvez *et al.* (1988), apreciándose una coincidencia bastante exacta.

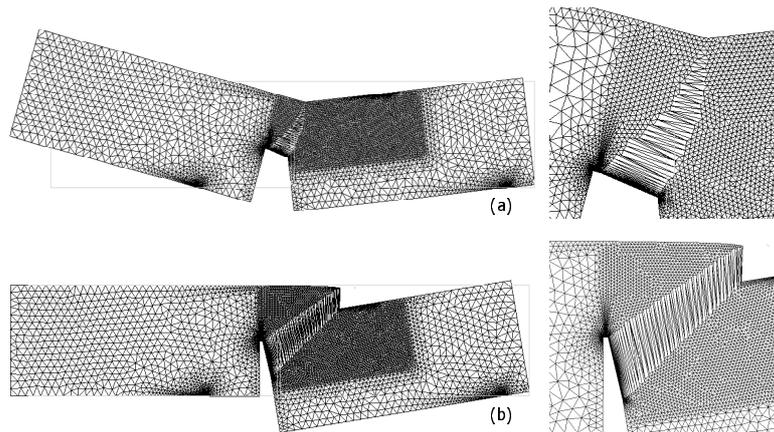


Figura 9. a) Deformada (x100) de la probeta tipo 1 en el colapso y detalle; b) Deformada (x300) de la probeta tipo 2 en el colapso y detalle

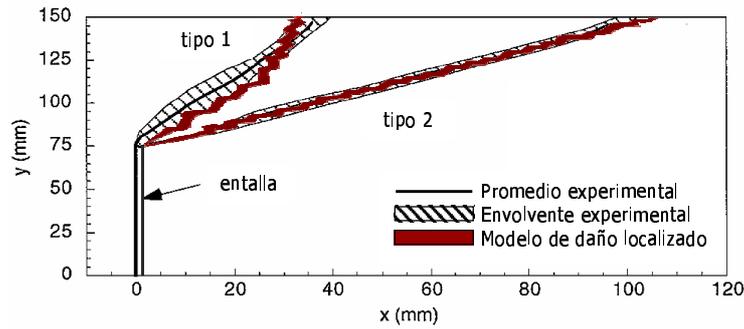


Figura 10. Comparación de las trayectorias de fisura para las probetas tipo 1 y tipo 2

En la Figura 11 se presenta la curva carga vs. abertura de la entalla (CMOD por sus siglas en inglés) junto con las envolventes experimentales de ambas probetas. En el caso 1 la curva presenta una tendencia muy similar a los resultados experimentales, con algo menos de ductilidad hacia el final del cálculo. Los resultados de la probeta tipo 2 son un poco menos rígidos en la rama de carga, aunque la carga pico concuerda perfectamente con el valor experimental. La descarga presenta una buena tendencia, aunque al alcanzar un valor de CMOD igual a 0.11 mm aproximadamente, la sección colapsa completamente.

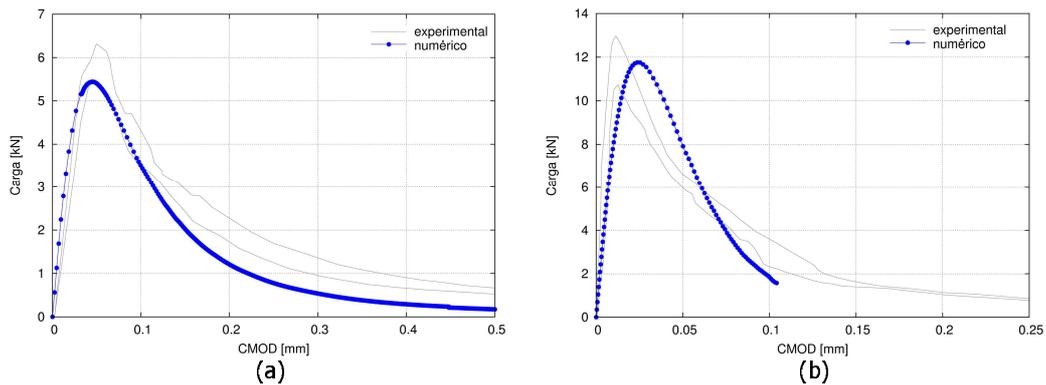


Figura 11. Carga vs. abertura de la entalla (CMOD) para a) probeta tipo 1; b) probeta tipo 2

Análisis de un arco semicircular con carga asimétrica

Geometría, materiales y carga

El arco semicircular tiene 5 m de radio y 1 m de espesor, con una carga puntual asimétrica y ambos apoyos completamente empotrados, tal como se muestra en la Figura 12a). Las características del material son: peso específico 2.100 kg/m^3 , módulo de Young 5 GPa y coeficiente de Poisson 0.2 , valores posibles para un edificio histórico de obra de fábrica.

Los parámetros para caracterizar el comportamiento no lineal son resistencia a tracción 0.2 MPa y energía de fractura 10 J/m^2 . Ambos valores corresponden aproximadamente a la décima parte de los parámetros típicos del hormigón. Todos los análisis se efectúan bajo las hipótesis de deformación plana, con un espesor unitario.

El análisis por el método de los elementos finitos está dividido en dos intervalos. En el primero se analiza la estructura bajo peso propio, y en el segundo se aplica la carga puntual P [ver Figura 12a)], tanto por control de cargas como por control de desplazamientos verticales (con la componente horizontal libre) hasta el colapso. Esta acción se aplica de

manera incremental, con pasos de 3 kN para el caso de control de cargas, y de 0.05 mm para el caso de control de desplazamientos.

La malla de elementos finitos está compuesta por 11.324 elementos triangulares de tres nodos, con un total de 5.989 nodos. La malla es considerablemente fina, con un valor promedio de tamaño de elemento de unos 5 cm.

El arco se estudia mediante el método del análisis límite para obtener un valor de referencia de carga última y la ubicación de las cuatro rótulas que causan el colapso. Luego se estudia empleando el modelo de daño distribuido y el modelo de daño localizado, y se comparan los resultados obtenidos.

Análisis límite

Previamente al análisis numérico de la estructura se realizó un cálculo a través del método de análisis límite, para disponer de un valor de referencia de la carga última y una caracterización del mecanismo de colapso. La carga última obtenida tiene un valor de aproximadamente 150 kN. Las cuatro rótulas que se forman se denotan de la A a la D, según la Figura 12b).

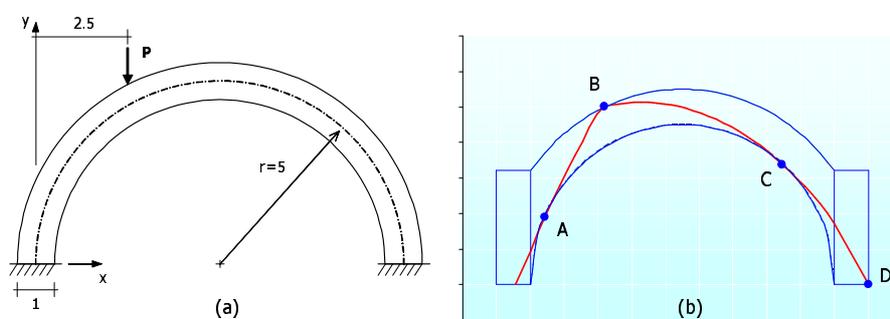


Figura 12. a) Geometría y dimensiones [m] del arco semicircular; b) Rótulas y línea de empujes obtenidas con el Método de Análisis Límite

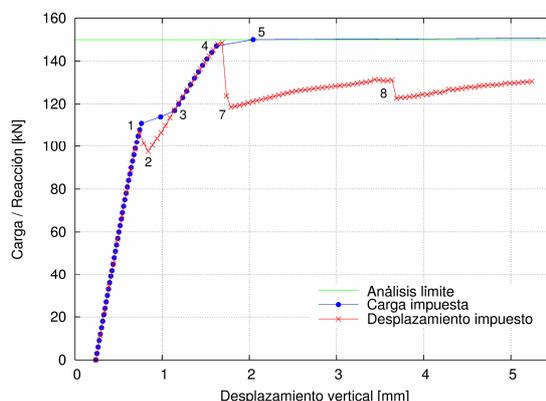


Figura 13. Curvas carga (o reacción) vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P (modelo de daño distribuido)

Modelo de daño distribuido

En la Figura 13 se muestra la curva de carga (o reacción) vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P, para los casos con control de cargas y con control de desplazamientos. De esta figura destaca que la carga última es de aproximadamente 150 kN (punto 4 en la figura), coincidiendo con el valor obtenido mediante el análisis límite.

La Figura 14 muestra la distribución del daño en diversas fases del cálculo en los puntos donde se espera la formación de rótulas, así como el mecanismo de colapso. Desde prácticamente el inicio de la aplicación de la carga los elementos ubicados en las zonas de máxima tracción comienzan a experimentar daño. Sin embargo, la respuesta de la estructura es lineal hasta que se alcanza una carga de unos 110 kN (punto 1 en la Figura 13). En este punto ocurre un incremento de la zona dañada de manera repentina, llegando al punto 3 en dos incrementos de carga. A partir del estado de carga 3 existe una evolución paulatina del daño, hasta alcanzar el punto 4. En este punto las fisuras existentes (B y D) han seguido evolucionando radialmente, mientras que en las zonas A y C existe cierto daño distribuido, pero sin indicios de la formación de rótulas.

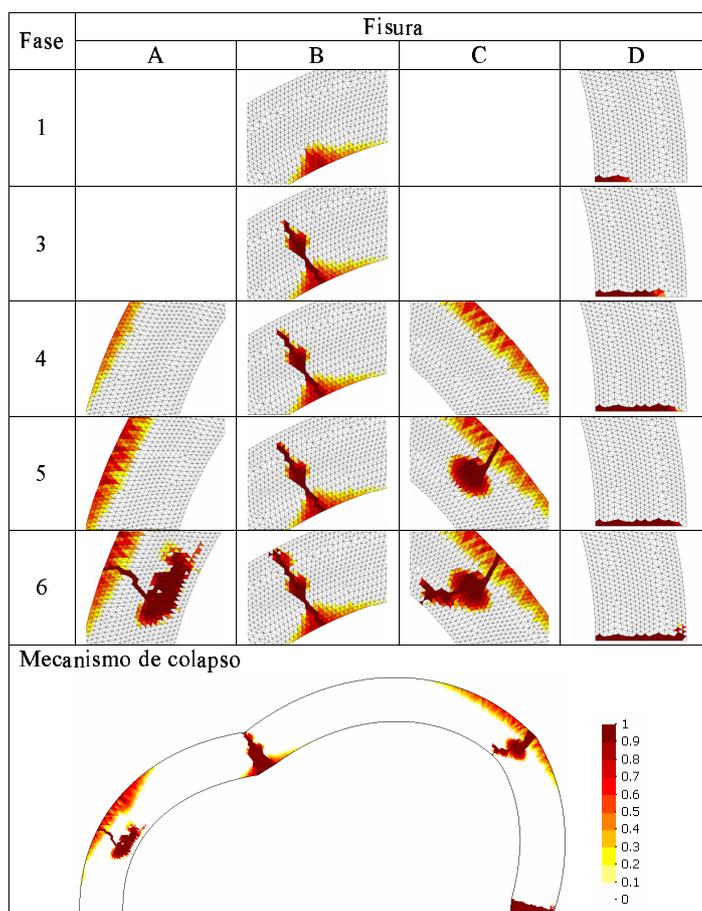


Figura 14. Daño en cada fisura en las diferentes fases indicadas en la Figura 13 y mecanismo de colapso de la estructura (control de cargas)

Luego, en los dos pasos de carga siguientes (puntos 5 y 6) se desarrollan de manera brusca las fisuras C y A, respectivamente. La fisura C presenta cierta tendencia a una dirección radial, pero hacia el eje de la sección el daño se dispersa formando una especie de bulbo. La fisura A experimenta un fenómeno similar, con la formación de una fisura más o menos localizada, que se dispersa al acercarse al eje de la sección. En el paso 6 se observa que en las otras tres rótulas la sección ha dañado completamente, lo que provoca el colapso global del arco.

Respecto al análisis con control de desplazamientos, el daño se comienza a formar a niveles muy bajos de carga y la respuesta de la estructura es prácticamente lineal hasta alcanzar una carga de 110 kN. En ese paso se observa daño leve en los puntos B y D, de manera muy similar al caso con control de cargas. El control por desplazamientos permite detectar la descarga que ocurre posteriormente (puntos 1 a 2 en la Figura 13) durante el desarrollo de las fisuras B y D. Estas fisuras presentan una tendencia radial.

Entre los estados de carga 2 y 4 de la Figura 13 el daño evoluciona hasta alcanzar la siguiente distribución: las fisuras B y D son radiales, y la primera de ellas presenta menos dispersión que su equivalente del análisis con carga impuesta. La solución, pues, depende del camino seguido para llegar a ella. Luego ocurre otra descarga (hasta el punto 7), esta vez debida a la creación repentina de las fisuras A y C. Tal como se muestra en la Figura 15, la propagación de ambas fisuras sigue la orientación de los elementos finitos en la malla, en lugar de hacerlo de forma radial. Aquí se pone de manifiesto la dependencia espuria de la discretización espacial en los resultados con el modelo de daño distribuido que se discute en el apartados anteriores.

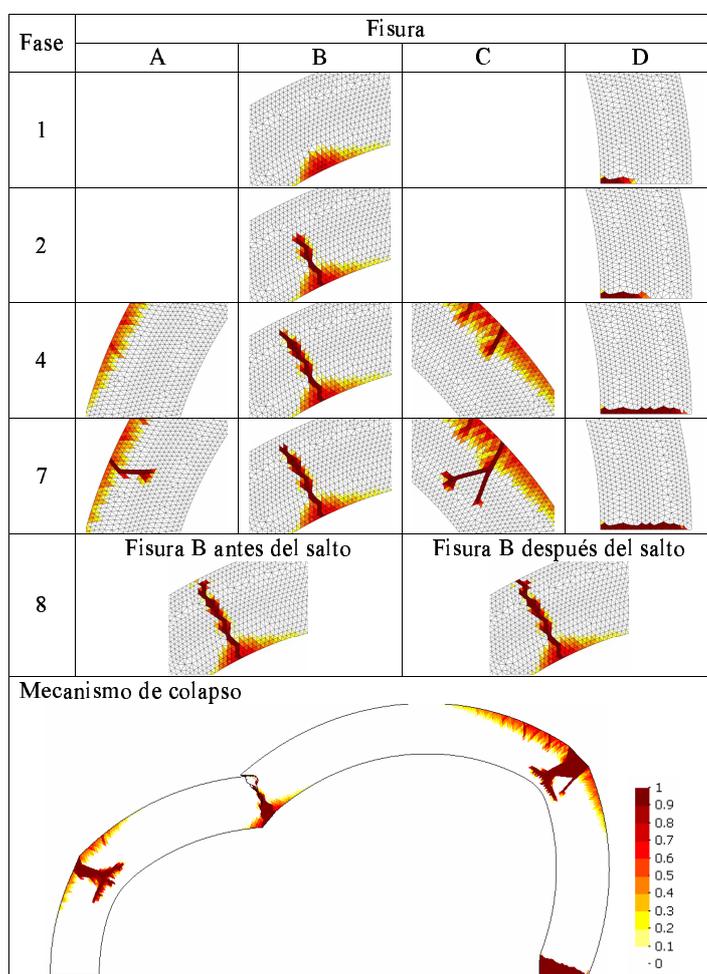


Figura 15. Daño en cada fisura en las diferentes fases indicadas en la Figura 13 y mecanismo de colapso de la estructura (control de desplazamientos)

A partir de este punto el problema evoluciona con una pequeña rigidez remanente, debida a algunos elementos que aún permanecen sin dañar ubicados en zonas comprimidas de la estructura. Sin embargo, después de incrementar aún más el desplazamiento impuesto, el daño sigue evolucionando y se produce otra descarga (punto 8). Este salto en particular ocurre al terminarse de formar la rótula B, tal como se muestra en la Figura 15, donde se muestran los estadios antes y después del salto en la respuesta.

También en la Figura 15 se muestra el mecanismo de colapso de la estructura. Obviamente, en este caso la formación del mecanismo no es completa, por el mismo criterio de imposición de desplazamientos que impide que la estructura se desplome. En la figura se aprecia cómo al momento del colapso las fisuras A y C han evolucionado en la dirección normal a la sección, sin que ello afecte apenas a la rigidez de la respuesta general de la estructura.

En conclusión, el análisis con el modelo de daño distribuido aproxima correctamente el valor de la carga de colapso. Las fisuras se forman aproximadamente en la misma ubicación que las rótulas obtenidas con el análisis límite. Sin embargo, la distribución del daño adolece de una dependencia espuria de la orientación de la malla.

Modelo de daño localizado

En los análisis realizados con el modelo de daño localizado se utilizó el criterio de corrección de dirección de V_f para fisuras rectas y un valor de 30° para definir el ángulo de desviación máximo $\bar{\alpha}$.

La Figura 16 muestra las curvas carga (o reacción) vs. desplazamiento de los dos casos estudiados. El modelo con control de desplazamientos es capaz de capturar la descarga que ocurre tras la formación de las primeras fisuras (puntos 2 a 3, Figura 16). A partir del punto 4, la respuesta de ambos modelos es similar, así como el mecanismo de colapso que se forma. Las cuatro fisuras presentan direcciones radiales, si bien la fisura A presenta una leve tendencia a girar en sentido horario, tal como se muestra en la Figura 17.

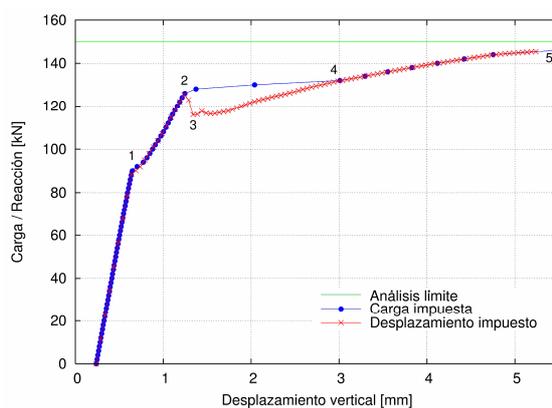


Figura 16. Curvas carga (o reacción) vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P (modelo de daño localizado)

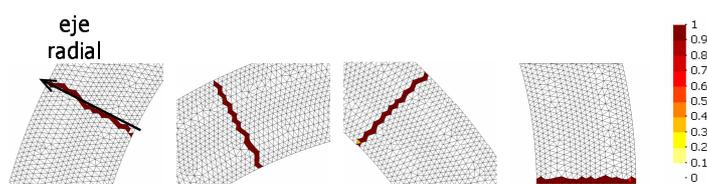


Figura 17. Daño en el estado de carga de colapso (carga impuesta y desplazamientos impuestos). Detalle de rótulas A, B, C y D

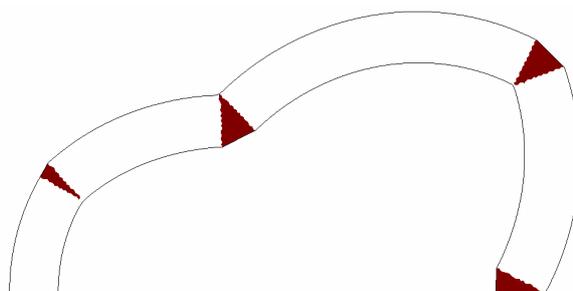


Figura 18. Mecanismo de colapso (carga impuesta y desplazamientos impuestos)

La ubicación de las fisuras, según el sistema de referencia mostrado en la Figura 12, se compara con los resultados obtenidos del análisis límite en la Tabla I. Allí se observa que en ambos casos estudiados con el modelo de daño localizado se forman las rótulas con una diferencia máxima de 2 cm, excepto la rótula C, donde la coordenada difiere unos 20 cm. Esta diferencia puede deberse al hecho de que el material tiene comportamiento elástico a compresión en los elementos ubicados hacia el final de la fisura (Clemente, 2006).

Rótula	Análisis límite	Modelo de daño localizado	
		Control de cargas	C. de desplazamientos
A	0.95	0.94	0.92
B	2.50	2.60	2.60
C	7.95	8.15	8.15
D	10.50	10.50	10.50

Tabla I. Coordenada horizontal [m] de las rótulas en el mecanismo de colapso

CONCLUSIONES

A continuación se puntualizan las conclusiones obtenidas del presente trabajo:

- Con el modelo de daño localizado se obtiene una configuración y propagación del daño en materiales cuasifrágiles más realista que la que se consigue al emplear el modelo de daño distribuido en su forma original. Se ha demostrado que la dependencia patológica que posee el modelo de daño distribuido respecto a la orientación de la malla de elementos finitos no existe en el modelo de daño localizado.
- La inclusión del algoritmo de rastreo en el modelo de daño localizado no incrementa de forma significativa el coste computacional del cálculo.

- Para el caso particular de elementos a flexión simple se encuentra que hay ocasiones en las que el complejo estado tensional en la punta de la fisura hace que el algoritmo de rastreo no pueda determinar correctamente la dirección de propagación. Esto ocurre principalmente cuando la punta de la fisura se acerca al eje neutro de la sección flexionada. Para solucionar esto se ha propuesto la incorporación de un parámetro adicional: el *ángulo de curvatura máxima*. Este parámetro no es una propiedad del material, sino que depende de las características particulares de cada problema. El empleo de este parámetro arroja buenos resultados en la simulación de fisuras discretas a flexión.
- El análisis de una estructura de obra de fábrica mediante el modelo de daño localizado permite reproducir consistentemente el desarrollo gradual de un fenómeno equivalente a la formación de rótulas plásticas, hasta alcanzar el mecanismo de colapso. En los análisis realizados los mecanismos obtenidos suelen ser bastante realistas y esperables.

REFERENCIAS

- 1 T. Belytschko y T. Black, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. **45**, N^o, pp. 601-620, (1999).
- 2 T. Belytschko, J. Fish y B.E. Engelmann, "A finite element with embedded localization zones", *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **70**, pp. 59-89, (1988).
- 3 L. Berto, R. Scotta, R. Vitaliani y A. Saetta, "An orthotropic damage model for non linear masonry walls analysis: Irreversible strain and friction effects", En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*, Paulo B. Lourenço y Pere Roca (Eds.), Universidad de Minho, Guimarães, Portugal, pp. 637-646, (2001).
- 4 M. Cervera, "*Viscoelasticity and rate-dependent continuum damage models*", Monografía CIMNE **M79**, Centre Internacional de Mètodes Numèrics en l'Enginyeria, Barcelona, España, (2003).
- 5 M. Cervera y M. Chiumenti, "Mesh objective tensile cracking via local continuum damage model and a crack tracking technique", *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **196**, pp. 304-320, (2006).
- 6 M. Cervera y M. Chiumenti, "Smearred crack approach: back to the original track", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. **30**, pp. 1173-1199, (2006).
- 7 M. Cervera, M. Chiumenti y C. Agelet de saracibar, "*Shear band localization via local J2 continuum damage mechanics*", Monografía CIMNE **M78**, Centre Internacional de Mètodes Numèrics en l'Enginyeria, Barcelona, España, (2003).
- 8 R. Clemente, "Análisis estructural de edificios históricos mediante modelos localizados de fisuración", Tesis doctoral. Universidad Politècnica de Catalunya, Barcelona, España, (2006).
- 9 R.W. Clough, "The stress distribution of Norfolk Dam", *Structures and Materials Research, Series* **100**, N^o 19, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, California, EE.UU, (1962).
- 10 C. Comi, S. Mariani y U. Perego, "From localized damage to discrete cohesive crack propagation in nonlocal continua", *Fifth World Congress on Computational Mechanics, WCCM V*, H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer y J. Eberhardsteiner (Eds.), Vienna, Austria, (2002).
- 11 G. Creazza, A.V. Saeta, R. Matteazzi y R. Vitaliani, "Analysis of masonry structures reinforced by FRP", En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*, Paulo B. Lourenço y Pere Roca (Eds.), Universidad de Minho, Guimarães, Portugal. pp. 539-545, (2001).

- 12 G. Creazza, A. Saetta, R. Matteazzi y R. Vitaliani, "Analyses of masonry vaulted structures by using 3-D damage model", *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS*, Barcelona, España, (2000).
- 13 R. De Borst, "Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum", *Eng. Comp.*, Vol. **8**, pp. 317-332, (1991).
- 14 R. De Borst, "Some recent issues in computational failure mechanics", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **52**, pp. 63-95, (2001).
- 15 R. De Borst y H.B. Mühlhaus, "Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects", *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. **35**, pp. 521-539, (1992).
- 16 R. De Borst, L.J. Sluys, H.B. Mühlhaus y J. Pamin, "Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation", *Eng. Comp.*, Vol. **10**, pp. 99-122, (1993).
- 17 J.H.P. De Vree, W.A.M. Brekelmans y M.A.J. Van Gils, "Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics", *Comp. & Struct*, Vol. **55**, pp. 581-588, (1995).
- 18 P. Díez, M. Arroyo y A. Huerta, "Adaptivity based on error estimation for viscoplastic softening materials", *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* Vol. **5**, pp. 87-112, (2000).
- 19 J.-F. Dubé, G. Pijaudier-Cabot y C. La Borderie, "Rate dependent damage model for concrete in dynamics", *J. of Eng. Mech. ASCE*, Vol. **122**, pp.939-947, (1996).
- 20 E.N. Dvorkin, A.M. Cuitiño y G. Gioia, "Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **30**, pp. 541-564, (1990).
- 21 G. Frunzio, M. Monaco y A. Gesualdo, "3D F.E.M. analysis of a Roman arch bridge", En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*, P. Lourenço y P. Roca (Eds.), Universidad de Minho, Guimarães, Portugal. pp. 591-597, (2001).
- 22 J.C. Gálvez, M. Elices, G.V. Guinea y J. Planas, "Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading", *International Journal of Fracture*, Vol. **94**, pp. 267-284, (1998).
- 23 L. Gambarotta y S. Lagomarsino, "Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II: The continuum model and its applications", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **26**, pp. 441-462, (1997).
- 24 F.R. Hall y D.R. Hayhurst, "Modelling of grain size effects in creep crack growth using a nonlocal continuum damage approach", *Proc. R. Soc. Lond. A (UK)*, Vol. **433**, N° 1888, pp. 405-421, (1991).
- 25 O.M. Heeres y R. De Borst, "Performance of low-order triangular elements during plastic flow", *Eng. Comp.*, Vol. **16**, pp. 70-87, (1999).
- 26 J. Heyman, "El esqueleto de piedra. Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica", Instituto Juan de Herrera/CEHOPU, Madrid, (1999).
- 27 S. Huerta, "La teoría del arco de fábrica: desarrollo histórico", *Revista del Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos*, OP, Ingeniería e Historia I, Vol. **38**, pp. 18-29, (1996).
- 28 M. Jirásek, "Comparative study on finite elements with embedded discontinuities", *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* Vol. **188**, pp. 307-330, (2000).
- 29 M. Jirásek, "Objective modelling of strain localization", *Revue Française de Génie Civil*, Vol. **6**, pp. 1119-1132, (2002).
- 30 M. Jirásek y B. Patzák, "Models for quasibrittle failure: theoretical and computational aspects", En *European Conference on Computational Mechanics ECCM-2001*, Cracovia, Polonia, (2001).

- 31 R. Larsson y K. Runesson, "Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity", *J. Eng. Mech. ASCE*, Vol. **122**, pp. 402-4011, (1996).
- 32 H.R. Lofti y P.B. Shing, "Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **38**, pp. 1307-1325, (1995).
- 33 P.B. Lourenço, "Computational strategies for masonry structures", Tesis doctoral, Delft University Press, Delft, The Netherlands, (1996).
- 34 O-L. Manzoli, "Simulação de propagação de fratura mediante modelos constitutivos locais combinados com técnica de construção progressiva da trajetória da descontinuidade", En *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Granada, España, (2005).
- 35 N. Mões, J. Dolbow y T. Belyscho, "A finite element method for crack growth without remeshing", *Int. J. Num. Meths. in Eng.* Vol. **46**, pp. 131-150, (1999).
- 36 D. Ngo y A.C. Scordelis, "Finite elements analysis of reinforced concrete beams", *ACI Journal*, Vol. **64**, N° 14, pp. 152-163, (1967).
- 37 A.H. Nilson, "Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method", *ACI Journal*, Vol. **65**, N° 9, pp. 757-776, (1968).
- 38 J. Oliver, "A consistent characteristic length for smeared cracking models", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **28**, pp. 461-474, (1989).
- 39 J. Oliver, "Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models", *Computational Mechanics*, Vol. **17**, pp. 277-296, (1995).
- 40 J. Oliver y C. Agelet, "*Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros*", Edicions UPC, Barcelona, España, (2000).
- 41 J. Oliver y A.E. Huespe, "Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. **193**, pp. 3195-3220, (2004).
- 42 J. Oliver, A.E. Huespe, E. Samaniego y E.W.V. Chaves, "Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. **28**, pp. 609-632, (2004).
- 43 D.R.J. Owen y A.J. Fawkes, "*Engineering Fracture Mechanics*", Pineridge Press, Swansea, (1983).
- 44 A.W. Page, "A biaxial failure criterion for brick masonry in the tension-tension range", *Int. J. of Masonry Construction*, Vol. **1**, N°, pp. 26-29, (1980).
- 45 A.W. Page, "The biaxial compressive strength of brick masonry", *Proc. Instn Civ. Engrs.*, Part **2**, N°, 71, pp. 893-906, (1981).
- 46 A.W. Page, "The strength of brick masonry under biaxial tension-compression", *Int. J. of Masonry Construction*, Vol. **3**, N° 1, pp. 26-31, (1983).
- 47 R.H.J. Peerlings, R. De Borst, W.A.M. Brekelmans y M.G.D. Geers, "Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture", *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, Vol. **3**, pp. 323-342, (1998).
- 48 Y. Rashid, "Analysis of prestressed concrete pressure vessels", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. **7**, pp. 334-344, (1968).
- 49 G.M. Roede-Cabo y A.G. Ayala, "An evaluation of methods for the determination of the structural stability of historic masonry arches", En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*, Paulo B. Lourenço y Pere Roca (Eds.), Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 557-565, (2001).

- 50 A. Saetta, R. Scotta y R. Vitaliani, "An orthotropic fourth-rank damage model for masonry structures", En *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS*, Barcelona, España, (2000).
- 51 W. Samarasinghe y A.W. Hendry, "The strength of brickwork under biaxial tensile and compressive stress", *Proc. 7th Symposium on Load Bearing Brickwork*, Londres, (1980).
- 52 W. Samarasinghe, A.W. Page y A.W. Hendry, "A Finite element model for the in-plane behaviour of brickwork", *Proc. Instn Civ. Engrs.*, Part 2, 73, pp. 171-178, (1982).
- 53 J.C. Simo y J. Oliver, "A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids", En *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, Z.P. Bažant *et al.* (Eds.) Londres, pp. 25-39, (1994).
- 54 J.C. Simo, J. Oliver y F. Armero, "An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids", *Computational Mechanics*, Vol. **12**, pp. 49-61, (1993).
- 55 N. Sukumar, N. Möes, B. Moran y T. Belyscho, "Extended finite element method for three-dimensional crack modelling", *Int. J. Num. Meths. in Eng.*, Vol. **48**, 1549-1570, (2000).
- 56 P. Tong y T.H.H. Pian, "On the convergence of the finite element method for problems with singularity", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. **9**, pp. 313-321, (1973).
- 57 W.M. Wang, L.J. Sluys y R. De Borst, "Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. **40**, pp. 3839-3864, (1997).
- 58 O.C. Zienkiewicz, M. Huang y M. Pastor, "Softening, localization and adaptative remeshing: capture of discontinuous solutions", *Comp. Mech.*, Vol. **17**, pp. 98-106, (1995a).
- 59 O.C. Zienkiewicz, M. Huang y M. Pastor, "Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing", *Int. J. Num. Meth. in Geomech.*, Vol. **19**, pp. 127-148, (1995b).
- 60 A. Zucchini y P.B. Lourenço, "A Micro-mechanical model for the homogenisation of masonry", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. **39**, pp. 3233-3255, (2002).