

## El método de los segmentos

Alcides Viamontes Esquivel, Ismay Pérez Sánchez y Carlos A. Recarey Morfa

Aula UCLV-CIMNE Cuba  
Universidad Central de las Villas  
Carretera de Camajuaní km 5 1/2  
CP 54830 - Santa Clara, Villa Clara, Cuba  
Teléfono/Fax 53 42 224746  
email: alve@uclv.edu.cu; ips@uclv.edu.cu; recarey@uclv.edu.cu

### Resumen

Se reporta el uso de segmentos como dominio de integración para los métodos libres de mallas de tipo Petrov-Galerkin Local (MLPG). El procedimiento acarrea ventajas en el tratamiento de dominios con forma geométrica irregular, circunda el problema de la precisión numérica en la cuadratura y permite de forma simple traspasar un número arbitrario de derivadas de la función de forma a la función de ponderación. Este trabajo describe el procedimiento algebraico necesario. Además hace referencia al estudio experimental de errores que se hizo para el presente método en casos de prueba bidimensionales; con el objetivo de constatar la estabilidad y precisión del mismo.

**Palabras clave:** *método de segmentos, métodos libres de mallas, Petrov-Galerkin local, integración numérica.*

### THE SEGMENTS METHOD

### Summary

The use of segments as integration domains for meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) methods is presented. The procedure is advantageous when applied to domains of irregular geometric shapes and simplifies the issue of precision of the numerical quadrature. The algebraic procedure described in this paper makes straightforward to transfer arbitrary number of derivatives from the trial to the test function. A numerical study of precision and stability for simple test cases in two dimensions is also presented, with the aim of assessing the precision and stability of the method.

**Keywords:** *segments method, meshless local Petrov-Galerkin, numerical integration.*

## INTRODUCCIÓN

Los métodos sin mallas han estado ganando en popularidad por su atribuida reputación de superar los problemas que surgen con las mallas en dominios geométricos complejos. La generación de la malla en problemas prácticos con métodos tipo FEM o diferencias finitas requiere frecuentes intervenciones del usuario y si el dominio sufre distorsión severa aparecen complicaciones adicionales relacionadas con remallado o pérdida de precisión debido a la distorsión de los elementos. Por otra parte, el tiempo de ordenador es mucho más barato que el tiempo-hombre, por lo que en ocasiones es deseable cangear eficiencia de cálculo por rendimiento del especialista.

Los métodos sin mallas pueden ser clasificados, de acuerdo a si usan o no integración, en dos categorías: métodos sin mallas basados en formas fuertes y métodos sin mallas basados en formas débiles. La mayor parte de los métodos numéricos que resuelven de forma aproximada ecuaciones diferenciales en derivadas parciales conducen, en algún paso, al ensamble de una matriz global, evaluando expresiones que definen los coeficientes de la matriz. Las expresiones involucran de una u otra manera la evaluación de aproximantes o interpolantes, conocidos genéricamente como “funciones de forma”. En general, los métodos sin mallas basados en formas fuertes son candidatos para una sola evaluación de las funciones de forma por cada punto, y en contrapartida los métodos basados en formas débiles necesitan varias evaluaciones para aproximar con exactitud la integral correspondiente. Aunque esta regla tiene excepciones (notablemente, el método *Point Weighted Least Squares* (PWLS)<sup>17</sup> descrito más adelante y el método de elementos difusos (DEM)<sup>15</sup>, puede usarse para clasificar los métodos en “métodos de colocación” y “métodos con integración”.

En la primera categoría pueden ponerse, entre otros, el *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH)<sup>5,13</sup> con sus variantes *Corrected Smoothed Particle Hydrodynamics* (CSPH)<sup>8</sup> y *Moving Least Squares Particle Hydrodynamics* (MLSPH)<sup>10</sup>, el método de puntos finitos,<sup>20</sup> los métodos tipo PWLS y algunos de los métodos tipo *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) que específicamente como función de ponderación utilizan el delta de Dirac. En la segunda categoría son especialmente interesantes como referencia *Element Free Galerkin* (EFG)<sup>7</sup>, los métodos *Meshless Local Petrov Galerkin*<sup>4</sup> que utilizan funciones de ponderación con dominio de medida no nula y el *Natural Element Method* (NEM)<sup>6</sup>. A continuación se bosqueja la idea principal detrás de algunos de ellos.

El método SPH se utilizó por primera vez para simulación de flujos en astrofísica, y se basa en ideas de estadística e integración por métodos de Monte-Carlo; en su variante original tiene problemas de reproductibilidad y con la aproximación de la solución cerca del contorno. Las variaciones citadas (CSPH y MLSPH) son enfoques distintos que intentan mejorarlo en esos aspectos.

Los métodos tipo PWLS trabajan con dos conjuntos de puntos; uno de ellos sirve para definir las funciones de forma y el otro para evaluar la ecuación diferencial en las funciones de forma y obtener relaciones discretas. En general, el número de ecuaciones algebraicas que se obtiene es mayor que el número de incógnitas, por lo que se utilizan técnicas variacionales y minimización de cuadrados de residuales para obtener un sistema con el mismo número de incógnitas que de ecuaciones. La matriz del sistema algebraico resultante es simétrica y de acuerdo a los autores del método en el proceso se logra una solución más estable que en otros métodos de colocación.

Los métodos de tipo MLPG con funciones de ponderación delta de Dirac son similares a los conocidos como Método de Punto Finito, en ellos la forma fuerte de la relación constitutiva se evalúa en cada punto utilizando una aproximación construida con un conjunto local de puntos, de lo que resulta un sistema de ecuaciones discreto.

Los métodos sin mallas basados en formas débiles tienen una ventaja fundamental sobre los métodos de colocación: son más estables y precisos. Las desventajas principales - mayor

costo computacional y mayor complejidad de implementación - resultan de la necesidad de integración numérica.

Para el método EFG, por ejemplo, la integración se hace sobre todo el dominio del problema y se requiere de una “grilla” global para realizarla. Dentro de cada celda se escoge un número adecuado de puntos de cuadratura y se evalúa la forma débil. El método es popular y aclamadamente robusto. Las funciones de forma utilizadas al menos en el método original son mínimos cuadrados móviles. Note que este método necesita verificar si una celda ortohédrica pertenece o no al dominio del problema, lo que es un predicado geoméricamente complejo.

En el caso del MLPG, la integración se hace sobre un dominio local, relativo al nodo. Sin embargo, especial atención debe darse a la precisión de la integración, que puede degradar fácilmente los resultados. De acuerdo a<sup>1,12</sup>, una cuadratura de precisión insuficiente puede causar deficiencia de rango en la solución numérica. Con MLPG, los problemas debido a la integración son más severos a causa de la complejidad del integrando que aparece en la formulación. Las funciones de forma construidas utilizando mínimos cuadrados móviles (MLS) pueden tener comportamiento complejo; especialmente las derivadas, que con frecuencia presentan oscilaciones en un dominio relativamente pequeño. Además, incluso el MLPG tiene que considerar la forma del dominio del problema para los dominios de integración cerca del borde con el objetivo de realizar la integración correctamente. Este método, sin embargo, tiene libertad al escoger la forma del dominio de integración, por lo que los predicados geométricos pueden simplificarse.

Puede encontrarse una descripción práctica y detallada de los métodos sin mallas más importantes en<sup>12</sup>. Una clasificación coherente y abarcadora de los mismos aparece en<sup>16</sup>.

Este trabajo trata sobre un esquema alternativo de integración para métodos de tipo MLPG; que permite tomar en cuenta con facilidad las fronteras del dominio. Al mismo tiempo, hace posible ajustar adaptativamente la exactitud de la cuadratura utilizando rutinas de integración unidimensional, disponibles públicamente en QUADPACK<sup>18</sup>, por ejemplo. El uso de formas débiles se simplifica notablemente con este esquema de integración, y es posible pasar con facilidad un número arbitrario de derivadas de la función de forma a la función de peso.

La organización del resto del contenido es como sigue: la sección *El método local de Petrov-Galerkin* trata sobre MLPG en general, la sección *Método de segmentos* trata sobre las (sencillas) transformaciones algebraicas necesarias para aplicar el método de los segmentos. Las secciones *Un ejemplo en una dimensión*, *Conducción de calor en régimen estacionario* y *Mecánica de sólidos en el plano* muestran algunos ejemplos concretos. De entre los ejemplos se profundiza más en *Conducción de calor en régimen estacionario* por ser en dos dimensiones y poseer una solución no polinomial, por lo que hay más espacio para el análisis de errores.

## EL MÉTODO LOCAL DE PETROV-GALERKIN

El método local de Petrov-Galerkin (MLPG)<sup>4</sup> es uno de los llamados métodos “verdaderamente” libres de mallas. Su esencia consiste en crear una discretización de la ecuación diferencial utilizando integración sobre un dominio local a cada nodo.

El procedimiento parte de los siguientes elementos:

- La ecuación diferencial. Por claridad en la exposición, se comienza con la forma fuerte:

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

sobre un dominio  $\Omega$  sujeto a condiciones de contorno

$$g_i(\mathbf{u}) = 0 \Big|_{\Gamma_i} \quad i = 1, 2, \dots, n_c$$

donde  $\mathbf{M}$  es un operador lineal,  $\mathbf{u}$  es un vector con las incógnitas y  $\mathbf{f}$  es una función de la posición  $\mathbf{x}$ . Los conjuntos  $\Gamma_i$  forman una partición de la frontera  $\partial\Omega$  en  $n_c$  regiones.

- Un conjunto de nodos  $\Theta$ . En general, cada nodo se identifica por un índice  $\ell$ . Las coordenadas del nodo se denotan por  $\mathbf{p}_\ell$ . El punto asociado a cada nodo está dentro del dominio del problema:  $\mathbf{p}_\ell \in \Omega$ .
- Para cada nodo  $\ell \in \Theta$ :
  - Un conjunto de nodos vecinos  $K_\ell \subset \Theta$ .
  - Un dominio de integración  $I_\ell$  que se supone completamente dentro de  $\Omega$ :  $I_\ell \subset \Omega$ .
  - Un dominio de influencia  $E_\ell$ .
  - Un espacio lineal  $U_\ell$  de funciones aproximantes de la forma  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k \in K_\ell} \tilde{u}_k \phi_k(\mathbf{x})$ ; donde el soporte de la función  $\phi_k(\mathbf{x})$  es  $E_k$ . Estas funciones pueden obtenerse por el método de mínimos cuadrados móviles (MLS) o utilizando bases radiales aumentadas (RBF)<sup>12</sup>.
  - Una función de ponderación  $w_\ell(\mathbf{x})$  con soporte en  $I_\ell$ .

Las ecuaciones que forman el sistema discreto pueden extraerse de la aseveración del método de residuos ponderados:

$$\int_{I_\ell} w_\ell(\mathbf{x}) \cdot \left[ \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \left( \mathbf{M}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \right) \right] d\Omega = 0, \quad \ell \in \Theta \quad (2)$$

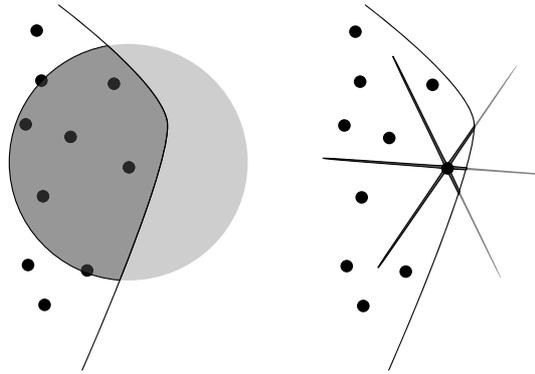
o de una expresión equivalente, obtenida, por ejemplo, utilizando el teorema de integración por partes. Note que en general (2) no implica una matriz simétrica y definida positiva. El aspecto más distintivo de MLPG es que la integración se hace en un dominio  $I_\ell$  local a cada nodo. Convencionalmente se hace que  $I_\ell$  tenga el mismo número de dimensiones que el espacio euclídeo que lo contiene; esta característica hace necesario el uso de una malla de integración, o cuando menos, un esquema de integración multidimensional. Aparte de eso, estos dominios no imponen mayores dificultades en los nodos internos, cuando  $I_\ell$  queda lejos de la frontera de  $\Omega$ .

Para los nodos que están cerca de la frontera es necesario ajustar la forma del dominio o tomar como cero el valor del integrando fuera de este. La primera variante es compleja geoméricamente, y se resuelve con frecuencia utilizando algún tipo de malla ajustada al borde para hacer la integración. La segunda variante altera las asunciones que se hacen sobre el integrando y por ende la precisión de la cuadratura; además, debe probarse si cada punto de cuadratura queda dentro o fuera del dominio.

Existen varias formas de imponer las condiciones de contorno. Puesto que el enfoque mixto<sup>22</sup> empleado en elementos finitos ha sido extendido con éxito a métodos sin mallas<sup>3,2</sup> y permite cierto grado de flexibilidad en el tratamiento de las condiciones de contorno como “esenciales” o “naturales”, pueden en teoría utilizarse los métodos enumerados en<sup>21</sup>. En los ejemplos que siguen se utiliza interpolación directa, también conocida como método de transformación<sup>9</sup>. Puede encontrarse un compendio de las formas de aplicar condiciones de contorno en<sup>16</sup>.

## MÉTODO DE SEGMENTOS

Sea una ecuación íntegro diferencial de la forma (1). El método de los segmentos es un método de residuos ponderados; más exactamente un método local de Petrov-Galerkin, con la peculiaridad de que el dominio local sobre el que se toma la integral (2) es la unión



**Figura 1.** Forma de los dominios locales. a) utilizando dominio esférico b) utilizando dominio de segmentos. Se muestra en oscuro la parte del dominio de integración que queda dentro del dominio global del problema

de segmentos (unidimensionales) cuya longitud es del mismo orden que la distancia media entre puntos de la discretización.

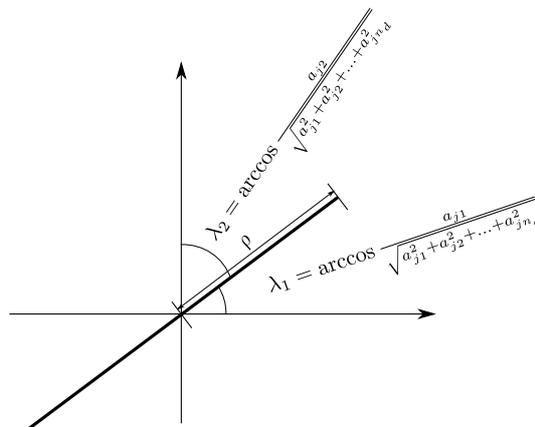
Sea en el espacio euclídeo de  $n_d$  dimensiones un punto  $\ell$  con coordenadas  $\mathbf{p}_\ell = (o_{\ell 1}, o_{\ell 2}, \dots, o_{\ell n_d})$ ; se toma un conjunto  $J_\ell$  de segmentos caracterizados por cierta longitud  $\rho_j$ , origen en  $\mathbf{p}_\ell$  y por algunas constantes (exactamente, una por cada dimensión del espacio por cada segmento)  $a_{ji}$   $i = 1, 2, \dots, n_d$ ;  $j \in J_\ell$  que definen la dirección de los segmentos. Los residuos ponderados se toman sobre la unión de todos los segmentos correspondientes a  $\mathbf{p}$ :

$$R = \sum_{j \in J(\ell)} \int_0^1 w(t) [\mathbf{M}\mathbf{u}^h(t) - \mathbf{f}] dt$$

El aspecto curioso de este método es que la integración se hace en solo una dimensión. La parametrización que se toma para cada segmento  $j$  es la siguiente:

$$x_i = o_{li} + \rho_j a_{ji} t, \quad i = 1, 2, \dots, n_d; \quad j \in J \tag{3}$$

con  $0 \leq t < 1$ . Los números  $\rho_j$  y  $a_{ji}$  caracterizan la longitud y la dirección de cada segmento, de manera que el coseno director para el  $j$ -ésimo segmento respecto al eje  $i$  es  $\frac{a_{ji}}{\sqrt{a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + \dots + a_{jn_d}^2}}$ ; en dos dimensiones una idea más precisa se ha ilustrado en la Figura 2.



**Figura 2.** Cosenos directores y longitud de un segmento  $j$  en dos dimensiones. Los ejes de coordenadas aparecen en líneas claras y el segmento es la línea oscura

La conveniencia de escoger uno u otro conjunto de valores para las constantes  $a_{ji}$  está determinado últimamente por la ecuación diferencial a la que se aplica el método, pero en la práctica los mejores resultados se han obtenido con segmentos que forman un ángulo pequeño con los ejes de coordenadas, ver la comparación en la subsección *Una instancia del problema: el cuadrado unitario en dos dimensiones*.

Las ecuaciones (3) son invertibles con respecto a  $t$  siempre que los valores  $a_{ji}$  sean distintos de cero:

$$t = \frac{x_i - o_{li}}{\rho_j a_{ji}} \quad (4)$$

Por su parte, el operador diferencial  $\mathbf{M}$  contiene términos que derivan algunas componentes de las magnitudes incógnitas en  $\mathbf{u}$ . En particular, se tienen expresiones del tipo  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ . Utilizando las expresiones (4) es posible escribir esas derivadas de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{du}{dt} \frac{\partial t}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho_j a_{ji}} \frac{du}{dt} \quad (5)$$

De manera similar puede llegarse a

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_{n_d}^{\alpha_{n_d}}} = \frac{1}{\rho^n a_{j_1}^{\alpha_1} a_{j_2}^{\alpha_2} \dots a_{j_{n_d}}^{\alpha_{n_d}}} \frac{d^{|\alpha|} u}{dt^{|\alpha|}}$$

Estas expresiones pueden utilizarse para computar formas débiles. En los ejemplos que siguen se ilustrará el procedimiento matemático para casos concretos y los resultados numéricos. Note que en muchos casos, mientras no se considere el contorno, es posible tomar dos segmentos con la misma dirección y sentidos opuestos, y hacer la integración para  $t$  en el intervalo  $(-1, 1)$ ; procedimiento que se utiliza en el ejemplo de la sección *Un ejemplo en una dimensión* y en el ejemplo de la sección *Conducción de calor en régimen estacionario*.

El uso de segmentos como dominios de integración resuelve el problema de los nodos cercanos a la frontera simplemente truncando los segmentos cuando estos tocan el borde. Este predicado puede construirse alrededor de otro: intersección rayo-frontera del dominio, puesto que un segmento puede considerarse parte de un rayo. El predicado de intersección rayo-frontera con frecuencia es parte del predicado de interioridad, si el contorno se define como una malla de superficie. Por otra parte, si el contorno se define como un CSG o como una superficie implícita, entonces la teoría del ray-tracing<sup>14</sup> abunda en cómo implementar dicho predicado. Note que, en cualquier caso, es necesario utilizar el predicado una sola vez por segmento; a diferencia del predicado de interioridad, que es necesario una vez por cada punto de cuadratura.

## UN EJEMPLO EN UNA DIMENSIÓN

### Definición del problema

En una dimensión tiene sentido tomar solo un segmento por nodo, y entonces el método es exactamente equivalente a uno de Petrov-Galerkin corriente. Esta comprobación solo tiene valor instructivo. Sea la ecuación diferencial ordinaria

$$y' - y = x + 1 \quad (6)$$

sobre el conjunto  $\Omega = \mathbb{R}$  con condiciones iniciales  $y(0) = 3$

La solución exacta de la ecuación es

$$y(x) = (y(0) + 2) e^x - x - 2$$

El gráfico de esta solución tiene el aspecto:

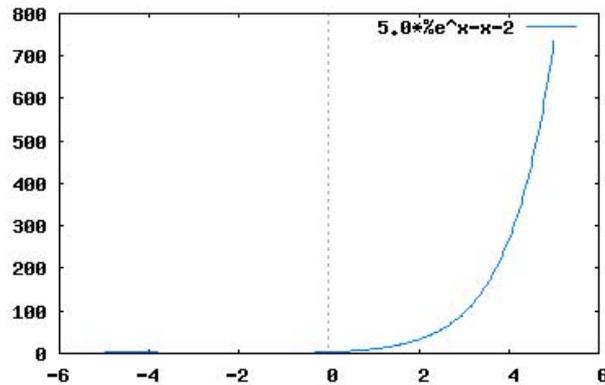


Figura 3. Solución exacta de la ecuación6 con  $y(0) = 3$

El operador diferencial  $\frac{d}{dx} - 1$  es lineal y es posible resolver esta ecuación con el método de los segmentos. En este caso el conjunto  $J$  está formado por el elemento  $\{a_{11} = 1\}$ . Las ecuaciones (3), (4) y (5) permiten escribir la ecuación diferencial (6) alrededor de cada nodo  $p_\ell$  en la forma

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} - 1 \right) (y) - (x(t) + 1) = 0$$

Al aplicar residuos ponderados:

$$\int_{-1}^1 w(t) \left[ \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} y(x(t)) - y(x(t)) \right) - (x(t) + 1) \right] dt = 0$$

Realizando la multiplicación:

$$\int_{-1}^1 w(t) \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} y(x(t)) dt - \int_{-1}^1 w(t) y(x(t)) dt - \int_{-1}^1 w(t) (x(t) + 1) dt = 0$$

Al término subrayado puede aplicársele integración por partes, y si se asume que la función de peso  $w(-1) = w(1) = 0$  se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \int_{-1}^1 \frac{dw}{dt}(t) y(x(t)) dt - \int_{-1}^1 w(t) y(x(t)) dt - \int_{-1}^1 w(t) (x(t) + 1) dt = 0 \\ - \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\rho} \frac{dw}{dt}(t) + w(t) \right] y(x(t)) dt - \int_{-1}^1 w(t) (x(t) + 1) dt = 0 \end{aligned}$$

con lo que se reducen los requerimientos de derivabilidad de  $y(x)$ . Cuando  $y(x)$  se sustituye por la aproximación  $y^h(x) = \sum_{k \in K} \tilde{y}_k \phi_k(x(t))$  se obtiene el conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$\sum_{k \in K} \tilde{y}_k \int_{-1}^1 \phi_k(x(t)) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{dw}{dt}(t) + w(t) \right] dt = - \int_{-1}^1 w(t) (x(t) + 1) dt$$

### Una instancia del problema y resultado numérico

La comprobación experimental es directa. La Tabla I se obtuvo con diez nodos de integración, utilizando mínimos cuadrados móviles de primer orden como interpolante y el *spline* de cuarto orden como función de peso. El radio de integración  $\rho$  tomado fue de 0.0166.

$x$	$y(x)$	$y^h(x)$	$ y(x) - y^h(x) $	$2 \frac{ y(x) - y^h(x) }{ y(x) + y^h(x) }$
0.0	3.0	2.98077798079	0.019222019208	0.00642793271035
0.1	3.42585459038	3.40300157791	0.0228530124686	0.0066930718426
0.2	3.9070137908	3.88230523055	0.0247085602469	0.00634421575986
0.3	4.44929403788	4.42002185132	0.0292721865599	0.00660077663837
0.4	5.05912348821	5.02862403469	0.03049945352	0.00604683125758
0.5	5.7436063535	5.70938426318	0.0342220903243	0.00597609680645
0.6	6.51059400195	6.47474315637	0.035850845587	0.00552174273951
0.7	7.36876353735	7.32884057113	0.0399229662242	0.00543258151867
0.8	8.32770464246	8.28566045856	0.0420441839054	0.00506148918654
0.9	9.39801555578	9.3516181576	0.0463973981848	0.00494915248949
1.0	10.5914091423	10.5416299192	0.049779223136	0.00471103308817

**Tabla I.** Contraste de integración numérica y valor exacto de la solución para la ecuación (6)

La rutina de integración numérica utilizada fue *Gauss-Kronrod* adaptativo con tolerancia de error relativo de 0.001. Como función de peso se utilizó un polinomio que se anula en los extremos del intervalo  $[-1; 1]$ :

$$p(x) = \begin{cases} p(-x) & x \leq 0 \\ \frac{2}{3} - 4x^2 + 4x^3 & \text{for } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4x + 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 & \text{for } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

## CONDUCCIÓN DE CALOR EN RÉGIMEN ESTACIONARIO

### Definición del problema

Para problemas de conducción de calor en régimen estacionario, en ausencias de fuentes y sumideros se tiene la ecuación:

$$\nabla^2 u = 0 \quad (7)$$

sujetos a condiciones de contorno esenciales:

$$u|_{\partial\Omega} = u_0(x) \quad (8)$$

donde  $u$  representa la temperatura. Una forma equivalente de escribir esta ecuación es

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$$

donde  $\mathbf{q} = -\gamma \nabla u$  es el vector de flujo de calor. Cuando la ecuación se escribe utilizando las derivadas entonces:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0$$

utilizando las expresiones (5):

$$\frac{1}{\rho a_{jx}} \frac{dq_x}{dt} + \frac{1}{\rho a_{jy}} \frac{dq_y}{dt} + \frac{1}{\rho a_{jz}} \frac{dq_z}{dt} = 0$$

o más resumido, utilizando notación de índices y obviando el factor común  $\frac{1}{\rho}$ :

$$\sum_{i=1,2,3} \frac{1}{a_{ji}} \frac{dq_i}{dt} = 0$$

Ahora bien, cuando para la ecuación anterior se plantea el cálculo del residuo ponderado por  $w(t)$  sobre los segmentos en  $J$ , se obtiene:

$$\sum_{\substack{i=1,2,3 \\ j \in J}} \frac{1}{a_{ji}} \int_{-1}^1 \frac{dq_i}{dt} w dt = 0 \quad (9)$$

Aplicando la fórmula de integración por partes  $\int_a^b uv' dt = uv|_a^b - \int_a^b u'v dt$  es posible deducir de (9) lo siguiente:

$$\sum_{\substack{i=1,2,3 \\ j \in J}} \frac{1}{a_{ji}} \left( q_i w|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 q_i \frac{dw}{dt} dt \right) = 0$$

Como el vector  $\mathbf{q}$  representa el flujo de calor,  $q_i = -\gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}$ , se arriba finalmente a:

$$\sum_{\substack{i=1,2,3 \\ j \in J}} \frac{1}{a_{ji}} \left( -\gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} w|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \frac{dw}{dt} dt \right) = 0 \quad (10)$$

En esta última ecuación, aparece la primera derivada de la función de peso, que usualmente es fácil de calcular, y el término  $\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)$  que involucra las primeras derivadas de la función de forma:

$$w^h(x) = \sum_{k \in K} \tilde{u}_k \phi_k(x) \quad (11)$$

donde  $K$  representa el dominio de influencia de  $x$ ,  $\phi_k$  es la función de forma asociada al nodo  $k$  y  $\tilde{u}_k$  denota el valor nodal para  $k$ . Derivando y sustituyendo en (10) se obtiene:

$$\sum_{k \in K} \tilde{u}_k \sum_{\substack{i=1,2,3 \\ j \in J}} \frac{1}{a_{ji}} \left( -w \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} [x(t)] \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} [x(t)] \frac{dw}{dt} dt \right) = 0 \quad (12)$$

Se puede evitar del todo utilizar derivadas de la función de forma realizando otro paso de integración por partes. Si la función de peso y su derivada se anulan en los límites del dominio de integración se llega a:

$$\sum_{k \in K} \tilde{u}_k \sum_{\substack{i=1,2,3 \\ j \in J}} \frac{1}{(a_{ji})^2} \int_{-1}^1 \phi_k[x(t)] \frac{d^2 w}{dt^2} dt = 0 \quad (13)$$

Para concretar, en las expresiones (12) y (13):

- $i$  toma los índices de coordenadas.
- $K(\ell) = K(p_\ell)$  es el conjunto de nodos que influyen en el dominio de integración. Este conjunto depende de la posición del nodo centro de la integración,  $p_\ell$ .
- $j$  toma los índices del conjunto de segmentos por nodo.

La última define el coeficiente que debe portar  $\tilde{u}_k$ .

Las condiciones de contorno de Dirichlet imponen valores fijos a la magnitud incógnita (temperatura) en la frontera del dominio según la ecuación (8). Una forma de imponer este tipo de condiciones de contorno es la propuesta en<sup>19,11</sup> utilizando interpolación directa. En este caso:

$$\sum_{k \in K} \tilde{u}_k \phi_k(p_\ell) = u_0(p_\ell) \quad (14)$$

### Una instancia del problema: el cuadrado unitario en dos dimensiones

Para comprobar los resultados se ensambló el sistema sobre un cuadrado (bidimensional) de lado 1, en dos arreglos distintos: un grid con los puntos distribuidos uniformemente, y un grid donde las coordenadas de los puntos habían sido perturbadas aleatoriamente.

Se emplearon las siguientes condiciones de contorno esenciales, impuestas mediante el método de interpolación directa de la ecuación (14):

$$u_0(x, y) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{si } y = 0 \\ e^{-\pi} \sin \pi x & \text{si } y = 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ó } x = 1 \end{cases} \quad (15)$$

Para este sistema de condiciones de contorno se conoce la solución exacta:

$$u(x, y) = e^{-\pi y} \sin \pi x \quad (16)$$

Se realizó la evaluación numérica en un *grid* de  $10 \times 10 = 100$  nodos, y se contrastaron la solución numérica y la exacta. La posición de cada nodo fue perturbada en una fracción<sup>1</sup>  $\omega$  del espacio promedio entre nodos; en este caso  $\omega = 0,6$ . Aunque para una solución con la forma 16 no se puede esperar que la solución numérica y la teórica coincidan con precisión de cómputo; la solución numérica obtenida puede considerarse bastante exacta. Se realizaron 200 corridas del método numérico sobre conjuntos de nodos generados aleatoriamente; y los valores que se muestran son el promedio tomado por nodo y por corrida.

<sup>1</sup>Es decir, cada coordenada  $x_{ij}$  se obtuvo por la fórmula  $(x_{ij}, y_{ij}) = (h * i + \omega\sigma, h * j + \omega\sigma)$  donde  $\sigma$  es un número aleatorio entre -1 y 1.

La Tabla II muestra los errores utilizando MLS con base lineal y base cuadrática. Era de esperar que para el interpolador cuadrático la precisión sea mucho mejor.

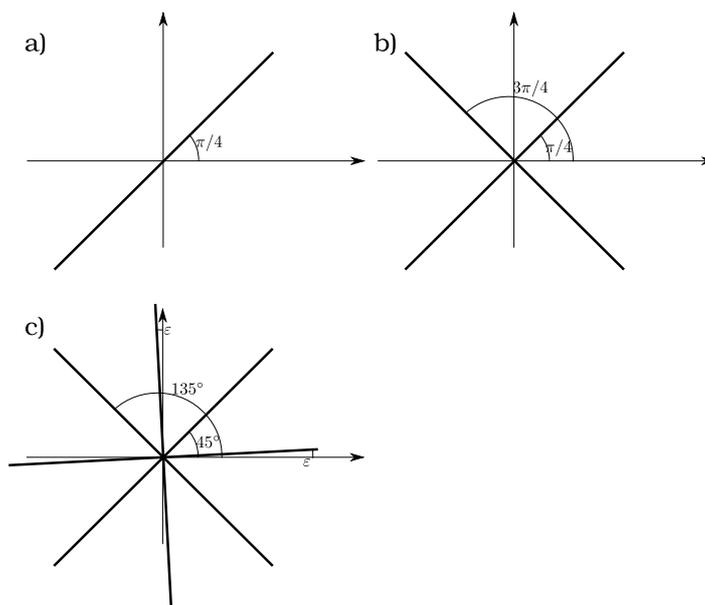
	Error absoluto	Error relativo
MLS lineal	0.00419	0.04337
MLS cuadrático	0.00066	0.00410

**Tabla II.** Errores relativo y absoluto promedio para el problema de conducción de calor en régimen estacionario, 100 nodos, 2 segmentos (ver figura)

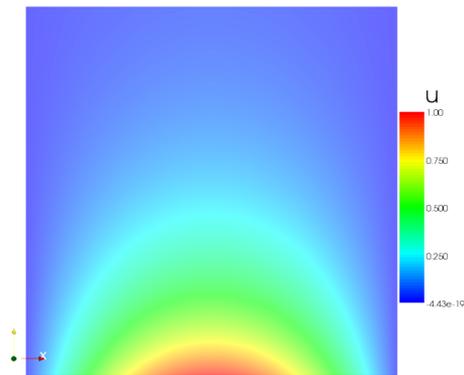
La Tabla III muestra los errores obtenidos con distintos conjuntos de segmentos; los cuáles se muestran en la Figura 4. En la tabla los coeficientes  $a_{ji}$  se dan como una matriz, donde la fila  $j$  se corresponde con el  $j$ -ésimo segmento y la columna  $i$  con la  $i$ -ésima componente coordenada. También se muestra la desviación estándar que experimentaron estos valores con respecto a todas las veces que se realizó el experimento numérico. Durante las corridas; en los casos en que se usaron dos y cuatro segmentos, el error relativo nunca superó el 2.5%. Para esta configuración, donde el número de puntos es reducido, la solución obtenida es en gran medida independiente de la distribución de los nodos.

	Matriz de coeficientes	$E_{abs}$	$E_{rel}$	$\sigma_{E_{rel}}$
a)	$\{a_{ji}\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	0.05410	0.38580	0.2058
b)	$\{a_{ji}\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	0.00181	0.01075	0.0097
c)	$\{a_{ji}\} = \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & \sin \pi/4 \\ \cos(\pi/2 - 0.02) & \sin(\pi/2 - 0.02) \\ \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \cos(\pi/2 - 0.02) & -\sin(\pi/2 - 0.02) \end{bmatrix}$	0.00127	0.00943	0.0043

**Tabla III.** Errores relativo y absoluto con distintos conjuntos de segmentos

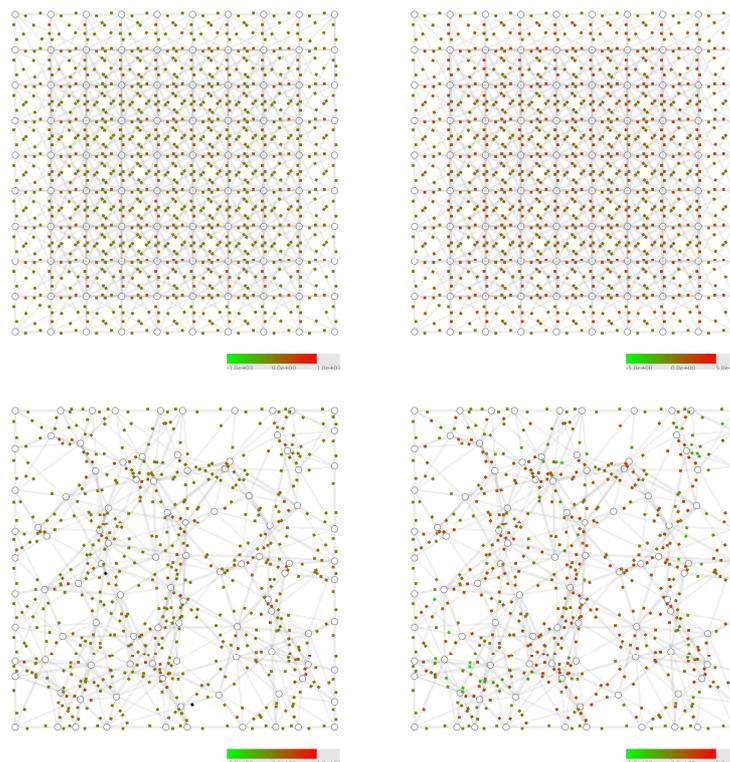


**Figura 4.** Tres disposiciones de segmentos; los parámetros se corresponden con la Tabla III



**Figura 5.** Gráfico de colores para los resultados numéricos del problema 7 con condiciones de contorno 15

Los esquemas en la Figura 6 representan gráficamente el rango de valores de los coeficientes de la matriz; estos rangos son los que en última instancia definen hasta que punto la matriz da lugar a un sistema algebraico numéricamente estable o no. Puede observarse que para una distribución regular de nodos el rango de valores de los coeficientes es más reducido.



**Figura 6.** Representaciones de la matriz de coeficientes para el problema de conducción de calor. Las líneas grises en cada uno de los cuatro diagramas indican que existen coeficientes en la matriz del sistema que relacionan un punto con otro. Los cuadrados pequeños con colores representan el valor de los coeficientes. De las cuatro figuras, la fila superior representa la distribución regular de puntos, la fila inferior una distribución irregular. En la columna de la izquierda se representa los valores, en la de la derecha los logaritmos de los valores

La Tabla IV muestra cómo se comporta la precisión variando el número de segmentos  $c$ , los valores individuales de las constantes  $a_{ij}$  se calculan de acuerdo a las fórmula

$$a_{i0} = \cos \frac{2\pi i}{c}$$

$$a_{i1} = \sin \frac{2\pi i}{c}$$

con  $i = 0, 1, \dots, c-1$ . La exactitud no aumenta más allá de cierto umbral respecto al número de segmentos, como es de suponer: en última instancia es proporcional a la densidad de puntos de la discretización ( $h$ -enriquecimiento) y al orden máximo de los polinomios que la función de forma puede aproximar. Más bien la exactitud depende de la disposición particular de los nodos.

Cantidad de segmentos	Error relativo promedio
1	0.156
2	0.089
3	0.057
4	0.086
5	0.056
10	0.058
15	0.056
20	0.058
25	0.056

Tabla IV. Error relativo promedio para distintas cantidades de segmentos

## MECÁNICA DE SÓLIDOS EN EL PLANO

### Definición del problema

La mecánica de sólidos estudia las relaciones entre tensión y desplazamiento en un cuerpo (dominio  $\Omega$ ); tomados como campos vectoriales. La relación entre los desplazamientos y la carga externa aplicada está dada por la ecuación:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{c} \mathbf{L} \mathbf{u} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

donde  $\mathbf{u}$  representa el desplazamiento.

El operador en esta ecuación es el término  $\mathbf{L}^T \mathbf{c} \mathbf{L} \mathbf{u}$ , donde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

y  $\mathbf{c}$  es una matriz de coeficientes que depende en última instancia del material. Existen dos casos típicos bajo condiciones de isotropía que definen esta matriz:

- Tensión plana:

$$\mathbf{c} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

- Deformación plana:

$$c = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

En este ejemplo se emplean las ecuaciones de tensión plana. Para ese caso, la forma más explícita del operador es:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{cL} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Utilizando las equivalencias:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{(\rho a_x)^2} \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{(\rho a_y)^2} \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\rho^2 a_x a_y} \frac{d^2}{dt^2}$$

es posible reescribir (19) como

$$\mathbf{L}^T \mathbf{cL} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \left( \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{(\rho a_y)^2} + \frac{1}{(\rho a_x)^2} \right) \frac{d^2}{dt^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\rho^2 a_x a_y} \frac{d^2}{dt^2} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\rho^2 a_x a_y} \frac{d^2}{dt^2} & \left( \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{(\rho a_x)^2} + \frac{1}{(\rho a_y)^2} \right) \frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix}$$

donde se supone que las funciones incógnita han sido parametrizadas según la fórmula 3.

Desde este punto los pasos son los mismos: sustituir las derivadas por su equivalente según la parametrización unidimensional y formular la integración sobre la unión de los segmentos.

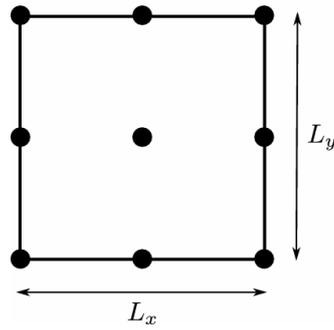
### Test de parcela estándar

Se aplicó un test de parcela estándar utilizando una parcela de dimensión  $L_x = 1,0$  y  $L_y = 1,0$ . La función

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (20)$$

se tomó para prescribir los desplazamientos en todos los contornos del plano. De acuerdo a<sup>12,22</sup>, para este caso el desplazamiento en el interior debe estar dado por la misma expresión (20).

Se utilizó como sistema de segmentos la fila b) de la Tabla III. El método pasa este test con precisión de cómputo.



**Figura 7.** Test de la parcela

$x$	$y$	$u_x$	$u_y$
0.0	0.0	0.0000	0.0000
0.0	0.5	0.0000	0.5000
0.0	1.0	0.0000	1.0000
0.5	0.0	0.5000	0.0000
0.5	0.5	0.5000	0.5000
0.5	1.0	0.5000	1.0000
1.0	0.0	1.0000	0.0000
1.0	0.5	1.0000	0.5000
1.0	1.0	1.0000	1.0000

**Tabla V.** Resultados para el test de la parcela

## CONCLUSIONES

El método de los segmentos es una variante de MLPG funcional. La integración unidimensional permite superar con facilidad algunos obstáculos que tradicionalmente ha tenido este método:

- La integración en sí: existen rutinas que manejan integración adaptativa a un costo razonablemente menor que las equivalentes para integración multidimensional.
- El paso de derivadas de la función de forma a la función de peso se hace utilizando la variante unidimensional del teorema de la divergencia, la bien conocida regla de integración por partes.
- El ajuste del dominio de integración a la forma del dominio global del problema es simple y eficiente.

Además, las soluciones obtenidas tienen buena precisión cuando la dirección y número de los segmentos se escogen adecuadamente y son independientes de la distribución de los nodos.

Aunque los ejemplos se realizaron en una o dos dimensiones y estuvieron más bien dirigidos a constatar exactitud y estabilidad, el método expuesto es una variante atractiva para problemas complejos y tridimensionales, por su capacidad de reducir el costo asociado al cálculo de las derivadas de la función de forma, de la integración numérica y de los predicados computacionales necesarios para intersectar los dominios locales con el dominio global.

## REFERENCIAS

- 1 H.Y. Kin, S.N. Atluri, J.Y. Cho, “A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (mlpg), and the local boundary integral equation (lbie) methods”, *Computational Mechanics*, Vol. **24**, pp.334–347, (1999).
- 2 H.T. Liu, S.N. Atluri, Z.D. Han, “Meshless local Petrov-Galerkin (mlpg) mixed collocation method for elasticity problems”, *CMES- Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. **1**, pp. 141–152, (2006).
- 3 S.N. Atluri, Z.D. Han y A.M. Rajendram, “A new implementation of the meshless finite volume method, through the mlpg mixed approach”, *CMES*, Vol. **6**, N° 6, pp. 491–513, (2004).
- 4 S.N. Atluri, T. Zhu, “A new meshless local Petrov-Galerkin (mlpg) approach in computational mechanics”, *Computational Mechanics*, Vol. **22**, pp. 117–127, (1998).
- 5 L.B. Lucy, “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis”, *The Astronomical Journal*, Vol. **82**, N° 12, pp. 1013–1024, (1977).
- 6 N. Sukumar, B. Moran, T. Belytschko, “The natural element method in solid mechanics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **43**, N° 5, pp. 839–887, (1998).
- 7 L. Gu, T. Belytschko, Y.Y. Lu, “Element-free Galerkin methods”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. **37**, pp. 229–256, (1994).
- 8 S. Bonet, J. Kulasegaram, “Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **47**, pp. 1189–1214, (2000).
- 9 H.P. Chen, J.S. Wang, “New boundary condition treatments in mesh-free computation of contact problems”, *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **187**, pp. 441–486, (2000).
- 10 G.A. Dilts, “Moving-least-squares-particle hydrodynamics -i. consistency and stability”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **44**, pp. 1115–1155, (1999).
- 11 G.R. Liu, L. Yan, “A modified meshless local Petrov-Galerkin method for solid mechanics”, pp. 1374–1379, Technical Science Press, Palmadale, C.A, (2000).
- 12 Liu, Gui-Rong, “*Mesh free methods: moving beyond the finite element method*”, CRC Press, (2002).
- 13 J.J. Monaghan, “An introduction to sph”, *Computer Physics Communications*, Vol. **48**, pp. 88–96, (1988).
- 14 G.H. Spencer, M.V.R.K. Murty, “General ray-tracing procedure”, *Journal of Optical Society of America*, Vol. **52**, N° 6, pp. 672–678, (1962).
- 15 G. Villon, P. Nayroles, B. Touzot, “Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements”, *Computational Mechanics*, Vol. **10**, pp. 307–318, (1992).
- 16 TP Fries, HG Matthies - Brunswick T.P. Fries, H.G. Mathies, “Classification and overview of meshfree methods”, *Informatikbericht*, Vol. **3**, (2003).
- 17 Q.X. Wang, Hua Li, K.Y. Lam, “Development of a new meshless - point weighted least squares (PWLS) method for computational mechanics”, *Computational Mechanics*, Vol. **35**, pp. 170–181, (2004).

- 18 C. Uberhuber, D. Kahaner, R. Piessens, E. deDoncker-Kapenga, “*Quadpack: a Subroutine Package for Automatic Integration*”, Vol. **1** of Series in Computational Mathematics, Springer Verlag, (1983).
- 19 T. Shu, S.N. Atluri, “A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions en the element free Galerkin method”, *Computational Mechanics*, Vol. **21**, pp. 211–222, (1998).
- 20 E. Onate, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, “A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems”, *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **139**, pp. 315–346, (1996).
- 21 X. Zhang, X. Liu, M.W. Lu, Y. Chen, “Imposition of essential boundary conditions by displacement constraint equations in meshless methods”, *Communications in numerical methods in engineering*, Vol. **17**, pp. 165–178, (2001).
- 22 O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *El Método de los Elementos Finitos*, Vol. **1**, Mc Graw Hill, (1994).