

Análisis computacional del pandeo de paneles cilíndricos bajo presión uniforme

Eduardo M. Sosa

Mechanical and Aerospace Engineering Department
West Virginia University
Morgantown, WV 26506-6101, Estados Unidos
e-mail: emsosa@mail.wvu.edu

Luis A. Godoy

Departamento de Estructuras, FCEFYN
Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correos 916, Córdoba 5000, Argentina
e-mail: lgodoy@com.uncor.edu

Resumen

En este trabajo se investiga una metodología de energía reducida para calcular el límite inferior de carga de pandeo de paneles cilíndricos rebajados. La formulación de esta nueva metodología está basada en los postulados establecidos en la literatura para el cálculo de límites inferiores de carga de pandeo y se ha implementado en un programa de elementos finitos de aplicaciones múltiples. Se han analizado paneles formados de material isotrópico y caracterizados por tres valores del parámetro de Batdorf. De la comparación de los resultados obtenidos con la metodología propuesta con aquellos obtenidos de análisis no lineales incluyendo diferentes niveles de imperfección geométrica, surge que el modelo de energía reducida aplicado a paneles cilíndricos no conduce a límites inferiores de carga de pandeo. Si bien este nuevo modelo de energía reducida predice cargas de pandeo inferiores a las obtenidas del análisis clásico, éstas son mayores que las obtenidas de análisis no lineales. Sin embargo, la viabilidad de la implementación de una metodología de energía reducida en un programa de elementos finitos de aplicaciones múltiples queda demostrada.

Palabras clave: *elementos finitos, energía reducida, límites inferiores, pandeo, paneles cilíndricos, presión uniforme.*

COMPUTATIONAL BUCKLING ANALYSIS OF CYLINDRICAL PANELS UNDER UNIFORM PRESSURE

Summary

A reduced energy method for the buckling of isotropic cylindrical shallow panels subjected to uniform lateral pressure is investigated. This reduced energy method is formulated according to the main postulates reported in the literature for lower bound buckling loads. This model is next implemented in a general purpose finite element code. Cylindrical panels with three different values of the Batdorf parameter are analyzed. Comparison of the results obtained with proposed methodology with those obtained from non-linear finite element analysis including different levels of imperfections, indicates that the proposed reduced energy approach applied to cylindrical shallow panels, does not predict lower bound critical pressures. Although the reduced energy approach predicts critical loads that are smaller than those predicted by a classical eigenvalue analysis, they are higher than those predicted by a non-linear analysis. However, the viability of the application of a reduced energy approach in a general purpose finite element code is demonstrated.

Keywords: *finite elements, reduced energy, lower bounds, buckling, cylindrical panels, uniform pressure.*

INTRODUCCIÓN

El análisis de estabilidad de paneles cilíndricos de pared delgada ha sido un tema de gran interés en ingeniería y mecánica aplicada desde hace unos 50 años, inicialmente por su interés en el área aeronáutica⁹ y más recientemente en estructuras civiles¹¹. En algunos casos, los paneles constituyen la estructura principal resistente, como en casos de techos metálicos sobre planta rectangular bajo peso propio, nieve u otras presiones verticales. En otros casos, los paneles surgen como un modelo de un sector de cilindro con rigidizadores en sentido del meridiano, en los que el panel representa la parte de la cáscara que se encuentra entre rigidizadores. En este trabajo se estudia la inestabilidad de paneles cilíndricos rebajados bajo presión uniforme.

El análisis de este problema requiere tomar en cuenta el comportamiento no lineal geométrico, siendo las herramientas computacionales más comunes para su estudio el análisis de bifurcación del equilibrio y el análisis no lineal geométrico incremental (ver, por ejemplo,¹² y las referencias citadas allí). El fenómeno de pandeo de cáscaras tiene la particularidad de ser muy sensible ante la presencia de pequeñas imperfecciones en la geometría o en las cargas. Debido a eso, la carga crítica computada mediante un análisis de bifurcación es solamente un límite superior con respecto a los valores que se obtendrían en experimentos o en condiciones reales de funcionamiento de la estructura. Para tener en cuenta la incidencia de imperfecciones de manera directa es necesario incorporarlas en el modelo de la cáscara y llevar a cabo estudios no lineales incrementales de seguimiento de trayectoria para diferentes valores de amplitud de imperfecciones. Bajo presiones laterales, imperfecciones en la geometría que son prácticamente inevitables, con amplitudes del orden del espesor de la cáscara, reducen la carga máxima que el sistema original puede alcanzar entre un 25 % y un 50 % del valor que se tendría en cáscaras perfectas.

Existen varios programas de elementos finitos para propósitos generales que permiten resolver estos procesos no lineales incrementales. Este procedimiento es adecuado para estudiar casos específicos en etapas finales de diseño, pero con un coste computacional significativo en cuanto a tiempo y capacidad computacional, especialmente si se necesita conocer el comportamiento poscrítico. Por ello, un análisis incremental puede no ser el más conveniente en una etapa inicial de diseño, en la que sólo se requiere estimaciones de cargas de pandeo que sean seguras. Otra situación en la que se necesitan estimaciones de cargas de pandeo (en lugar de estudios poscríticos detallados) es la construcción de curvas de fragilidad o de vulnerabilidad, que precisan de cientos o miles de análisis de diferentes geometrías y bajo distintos escenarios.

Desde mediados de la década de 1970, Croll y colaboradores han desarrollado una metodología para obtener aproximaciones a cargas críticas de pandeo usando técnicas sencillas de análisis de autovalores, pero incorporando un conocimiento sobre la mecánica del comportamiento de la cáscara que permite la adopción de hipótesis fuertes. Esto dio lugar a la teoría de límites inferiores usando enfoques de energía o de rigidez reducida⁶. Los estudios llevados a cabo por Croll y colaboradores (ver, por ejemplo, las referencias^{2,5,6,8,11}) emplearon modelos sencillos de problemas en los que es posible encontrar soluciones analíticas, o programas para propósitos específicos desarrollados de manera ad-hoc. Sin embargo, la única forma de extender el empleo de esta metodología para un uso más generalizado es adaptarla para su empleo en ambientes de programas para propósitos múltiples.

Los objetivos de este trabajo son: a) desarrollar estrategias computacionales para computar límites inferiores mediante programas para propósitos múltiples; b) distinguir entre las estrategias computacionales de rigidez reducida y de energía reducida para obtener límites inferiores de cargas de pandeo; y c) mostrar que el enfoque de energía reducida no conduce a límites inferiores en casos como el ilustrado en este trabajo.

FORMULACIÓN CLÁSICA Y DE LÍMITES INFERIORES

En esta sección se discute la metodología de implementación de análisis clásico y de límites inferiores usando programas de elementos finitos para propósitos generales.

Análisis clásico de bifurcación

El análisis clásico de estados críticos mediante un estudio de autovalores (conocido también como análisis de bifurcación del equilibrio⁷) se lleva a cabo generalmente en dos etapas; en la primera, se debe resolver el estado de equilibrio sobre la trayectoria fundamental que parte del origen, para lo que se usa un modelo de comportamiento lineal geométrico y elástico:

$$\mathbf{K}\mathbf{a}^F + \lambda\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (1)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez lineal de la cáscara, que puede escribirse como la suma de dos contribuciones, una membranar \mathbf{K}^m y otra flexional \mathbf{K}^b :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b \quad (2)$$

La solución \mathbf{a}^F de la ecuación (1) es la respuesta de desplazamientos para la trayectoria fundamental, para un sistema de cargas definido por el vector de cargas \mathbf{P} y escalado por un parámetro de carga λ . Para la trayectoria fundamental se adopta aquí el estado $\lambda = 1$, pero cualquier otro sería equivalente debido a la linealidad supuesta en la ecuación (1). Este vector \mathbf{a}^F permite computar el estado tensional en la cáscara para ese nivel de carga, que se denominado \mathbf{N}^F .

Las tensiones iniciales se usan en la segunda etapa para construir la matriz de carga-geometría (también llamada matriz de tensiones iniciales) en el nivel de un elemento, dado por⁴

$$\mathbf{K}^G = \int \beta^T \mathbf{N}^F \beta \, d\mathbf{A} \quad (3)$$

donde β es el vector de rotaciones. Finalmente, se plantea el problema de autovalores:

$$[\mathbf{K} - \lambda^C \mathbf{K}^G (\mathbf{N}^F)] \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \quad (4)$$

donde la matriz \mathbf{K}^G se ensambla con las contribuciones de la ecuación (3). El parámetro escalar λ^C es el valor propio (la carga crítica del problema) y el vector $\boldsymbol{\Phi}$ es el autovector (el modo crítico asociado a λ^C).

Análisis computacional con una metodología de Rigidez Reducida

Croll y colaboradores han mostrado el rol fundamental que desempeña la energía membranar en el fenómeno de pandeo de cáscaras. La teoría de Rigidez Reducida se basa en la observación de que los modos de pandeo que aportan una contribución significativa a la rigidez membranar, son los que pueden proveer estabilidad al sistema, pero al mismo tiempo son susceptibles de sufrir reducciones importantes en su contribución a la rigidez debido a la acción de imperfecciones pequeñas. Estas reducciones producen importantes caídas en la carga máxima que resiste el sistema, y ocurren cuando las condiciones físicas permiten que imperfecciones iniciales e interacción de modos erosionen la energía membranar. Croll plantea tres postulados de esta teoría en la forma siguiente⁶:

- El primer postulado expresa que las no linealidades geométricas importantes surgen debido a cambios en la resistencia membranar.

- El segundo postulado dice que pérdidas de rigidez poscríticas significativas solamente pueden ocurrir cuando el pandeo inicial tiene una contribución a su resistencia proveniente de la energía membranal.
- El tercer postulado plantea que los límites inferiores para pandeo en un modo determinado están dados por un análisis en el cual se elimine la energía membranal.

El procedimiento de rigidez reducida consiste en eliminar en el problema de autovalores de la ecuación (4), el aporte de las componentes estabilizantes de energía, previo análisis de la distribución de las mismas. Expresando la energía potencial total del sistema e identificando aquellas componentes de energía membranal que pueden perderse durante el pandeo, el procedimiento de límites inferiores consiste en resolver un problema de autovalores para el mismo sistema pero con las componentes apropiadas de energía membranal eliminadas. Esta eliminación debe hacerse en el cálculo del estado crítico, de manera que la energía potencial total no cuente con el aporte de estas componentes estabilizantes. Así, el nuevo estado crítico hallado representa un límite inferior, ya que las componentes que aportaban al equilibrio en forma estabilizante no son ahora tenidas en cuenta. Este planteo afecta al primer término en la ecuación (4), es decir, en la matriz \mathbf{K} , en lo que corresponde al aporte de la parte lineal del campo de tensiones y deformaciones, pero no introduce modificaciones en \mathbf{K}^G que tiene en cuenta las tensiones previas al estado crítico, que son evaluadas con la energía potencial con todas sus componentes.

Para tomar en cuenta la contribución reducida de la rigidez membranal en el comportamiento poscrítico inicial, se debe resolver el mismo problema lineal de la ecuación (1), pero deben introducirse cambios en la ecuación de autovalores (4). El segundo término en la ecuación (4) no se modifica, pero la ecuación resulta en la forma

$$\left[\left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b \right) - \lambda' \mathbf{K}^G (\mathbf{N}^F) \right] \Phi' = \mathbf{0} \quad (5)$$

donde α es un factor de reducción aplicado a la rigidez membranal (un valor adimensional mayor a 1 para producir erosión de la rigidez membranal), y λ' y Φ' son los nuevos valores y vectores propios del sistema de rigidez reducida. Con el fin de tener un control más sistemático del proceso numérico, la rigidez membranal en la ecuación (5) no se ha eliminado inicialmente, pero nótese que α debe tener un valor grande. A medida que $\alpha \rightarrow \infty$, entonces la contribución de \mathbf{K}^m tiende a cero y el límite inferior, caracterizado mediante λ^* y Φ^* , se obtiene de la condición

$$\left[\mathbf{K}^b - \lambda^* \mathbf{K}^G (\mathbf{N}^F) \right] \Phi^* = \mathbf{0} \quad (6)$$

La Figura 1 ilustra el proceso a lo largo de la trayectoria fundamental de equilibrio \mathcal{P}_1 , en el cual se supone que la cáscara responde con su rigidez membranal completa y conduce a λ^C usando la ecuación (4). Usando la metodología de rigidez reducida se obtiene un valor menor λ' , y en el límite, para $\alpha \rightarrow \infty$, entonces $\lambda' \rightarrow \lambda^*$. Nótese que si el problema se resolviera con rigidez reducida desde el comienzo (en las ecuaciones 1 y 4), entonces se encontraría un autovalor λ'' a lo largo de otra trayectoria \mathcal{P}_2 , y ésta sería una estimación sin justificación. De manera que es necesario separar ambas etapas en el análisis y computar cada una de ellas con diferentes valores de \mathbf{K}^m .

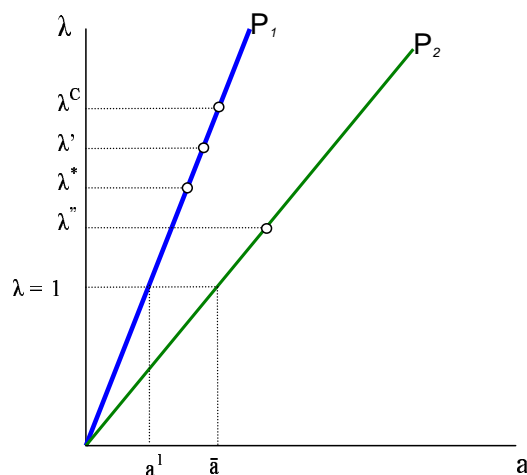


Figura 1. Trayectorias de equilibrio

Análisis computacional con una metodología de Energía Reducida

Una forma alternativa de evaluar el límite inferior es emplear ecuaciones de energía en lugar de ecuaciones de equilibrio. Consideremos un factor de reducción η definido como ^{6,11}:

$$\lambda^* = \eta \lambda^C \quad \text{donde} \quad \eta = \frac{U^{2b}}{U^{2b} + U^{2m}} \quad (7)$$

donde U^{2b} es la energía de deformación por flexión en el modo crítico y U^{2m} la energía de deformación membranar.

Para mostrar la equivalencia entre rigidez reducida y energía reducida, se puede computar la energía en la forma

$$\Phi^T \left[(\mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b) - \lambda^C \mathbf{K}^G(\mathbf{N}^F) \right] \Phi = 0 \quad (8)$$

para el problema clásico de autovalores. Para la energía reducida se escribe

$$\Phi'^T \left[\left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b \right) - \lambda' \mathbf{K}^G(\mathbf{N}^F) \right] \Phi' = 0 \quad (9)$$

En el límite, a medida que $\alpha \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\Phi^{*T} \left[\mathbf{K}^b - \lambda^* \mathbf{K}^G(\mathbf{N}^F) \right] \Phi^* = 0 \quad (10)$$

Las ecuaciones (8) y (10) pueden escribirse como

$$\Phi^T \left[(\mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b) \right] \Phi = \lambda^C \Phi^T \left[\mathbf{K}^G(\mathbf{N}^F) \right] \Phi \quad (11)$$

$$\Phi^{*T} \left[\mathbf{K}^b \right] \Phi^* = \lambda^* \Phi^{*T} \left[\mathbf{K}^G(\mathbf{N}^F) \right] \Phi^* \quad (12)$$

Suponiendo que los modos del problema clásico y el de energía reducida sean iguales, o sea

$$\Phi^* = \Phi \quad (13)$$

y lo que cambia significativamente sea sólo el valor de carga crítica, la solución se simplifica. Si $\alpha \rightarrow \infty$, entonces \mathbf{K}^m se anula. Dividiendo la ecuación (12) por la (11) se llega a

$$\frac{\Phi^{*T} [\mathbf{K}^b] \Phi^*}{\Phi^T [\mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b] \Phi} = \frac{\lambda^*}{\lambda^C} = \eta \quad (14)$$

Donde los productos de matrices constituyen las componentes de energía siguientes:

$$U^{2m} = \Phi^T \mathbf{K}^m \Phi \quad (15)$$

$$U^{2b} = \Phi^T \mathbf{K}^b \Phi \quad (16)$$

De modo que la ecuación (14) es la misma que la (7), si la aproximación definida en la ecuación (13) se verifica.

Metodología de Energía Reducida implementada en ABAQUS

Para implementar este procedimiento usando un programa para propósitos generales como ABAQUS¹, primero se resuelve el problema clásico de autovalores usando la ecuación completa (4), obteniéndose los modos Φ y las cargas críticas asociadas, λ^C .

Segundo, se resuelve un problema lineal de equilibrio que emplea un campo de desplazamiento inicial que tiene la forma del modo Φ , en lugar de usarse una carga externa definida en la ecuación (1), y se computa la energía de deformación como

$$\Phi^T [(\mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b)] \Phi = U^{2m} + U^{2b} \quad (17)$$

Ésta es la energía completa movilizada por la cáscara para desplazarse desde la configuración perfecta indeformada a la forma del autovector Φ .

Tercero, se usa el modo crítico Φ como forma de los desplazamientos iniciales en la ecuación (17), pero con un factor α que afecta la rigidez membranar:

$$\Phi^T \left[\left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b \right) \right] \Phi = \frac{1}{\alpha} U^{2m} + U^{2b} \quad (18)$$

A medida que $\alpha \rightarrow \infty$, entonces $\frac{1}{\alpha} U^{2m} \rightarrow 0$ y puede computarse U^{2b} usando la ecuación (16). Nótese que hace falta llevar a cabo estos cálculos indirectos porque los programas para propósitos múltiples, como ABAQUS¹, no permiten llevar a cabo el cómputo separado de las energías flexionales y membranar.

El elemento finito específico que se usa para realizar los cálculos en este trabajo es un elemento triangular descrito en la referencia³. Los autores han estudiado recientemente el comportamiento de otros elementos en ABAQUS para cáscaras¹⁰ y encontraron que el único que no bloquea para el tipo de análisis que se describe en este trabajo es el de la referencia³.

RESULTADOS

Para ilustrar los procedimientos clásicos y de límite inferiores utilizados se han computado cargas de inestabilidad para tres geometrías de paneles cilíndricos. Los paneles investigados son de acero con $E = 206$ GPa y $\nu = 0.3$, y sus propiedades geométricas se muestran en la Tabla I y en la Figura 2. Se consideran condiciones de borde articuladas y con posibilidades de desplazarse en la dirección horizontal sobre los lados curvos. Se analizaron tres paneles de igual largo L y longitud circular $L\phi$, pero con diferentes espesores t , de manera que se obtuvieron tres valores del parámetro Z de Batdorf de 1000, 500 y 200, donde:

$$Z = \frac{L^2}{Rt} \sqrt{(1 - \nu^2)} \quad (19)$$

Para los tres modelos propuestos identificados como M1, M2 y M3, se llevaron a cabo los siguientes análisis:

- Autovalores, para determinar modo y carga crítica.
- No lineal geométrico, incluyendo imperfecciones en la geometría.
- Autovalores con energía reducida, para determinar el límite inferior de carga de pandeo.

No se llevaron a cabo análisis de rigidez reducida dado que ya habían sido reportados por Yamada y Croll¹¹.

Modelo	L	R	t	ν	ϕ		R ϕ	$Z = \frac{L^2}{Rt} \sqrt{(1 - \nu^2)}$	$a = \frac{L}{R\phi}$
	[m]	[m]	[mm]		[deg]	[rad]	[m]		
M1	4.00	15.29	1.00	0.3	15	0.26180	4.00	1000	1.00
M2	4.00	15.29	2.00	0.3	15	0.26180	4.00	500	1.00
M3	4.00	15.29	5.00	0.3	15	0.26180	4.00	200	1.00

Tabla I. Propiedades geométricas de los modelos analizados

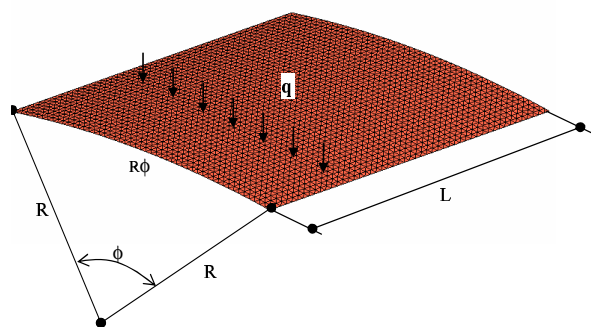
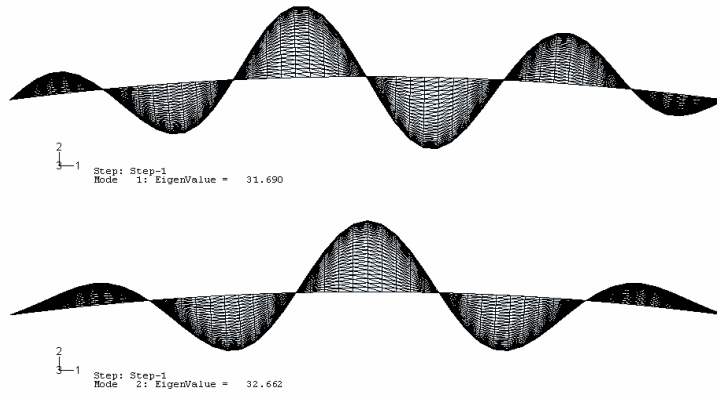


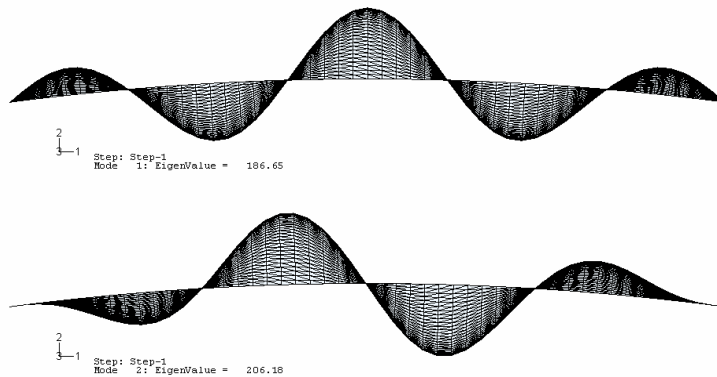
Figura 2. Geometría del panel circular rebajado

Resultados del análisis clásico de autovalores

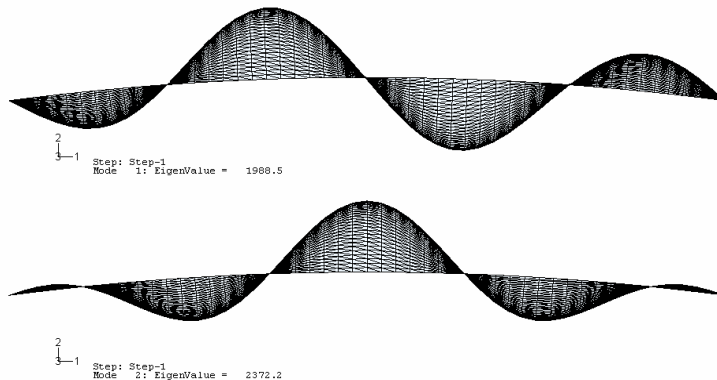
La Figura 3 muestra los modos obtenidos mediante el análisis clásico de autovalores, junto con los valores asociados de carga crítica (usando como valor de referencia $q = 1 \text{ N/m}^2$ para la trayectoria fundamental). En cada caso se ilustran los dos modos de autovalores más bajos, que corresponden a un modo simétrico y uno antisimétrico.



(a) Modelo M1: modo 1, $\lambda_1 = 31.69$; modo 2, $\lambda_2 = 32.66$.



(b) Modelo M2: modo 1, $\lambda_1 = 186.65$; modo 2, $\lambda_2 = 206.18$.



(c) Modelo M3: modo 1, $\lambda_1 = 1988.5$; modo 2, $\lambda_2 = 2372.2$.

Figura 3. Modos de pandeo obtenidos del análisis de autovalores

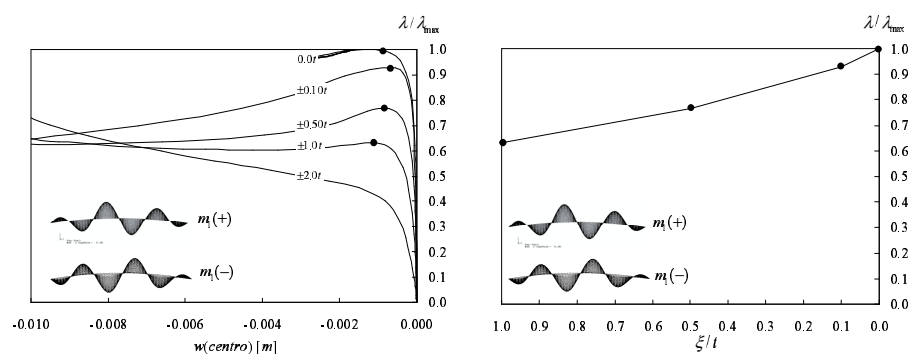
Del análisis de autovalores surge que el cambio de espesor produce un cambio significativo en los valores de las cargas críticas. Duplicar el espesor del modelo M1 produce un incremento de la carga crítica en el modelo M2 del orden de seis veces (aumentando de 31.69 Pa a 186.65 Pa).

En todos los modelos analizados se encontró que el menor del número de semi-ondas transversales corresponde al segundo modo. En los análisis subsiguientes se han considerado los dos primeros modos con el fin de establecer geometrías de imperfecciones iniciales.

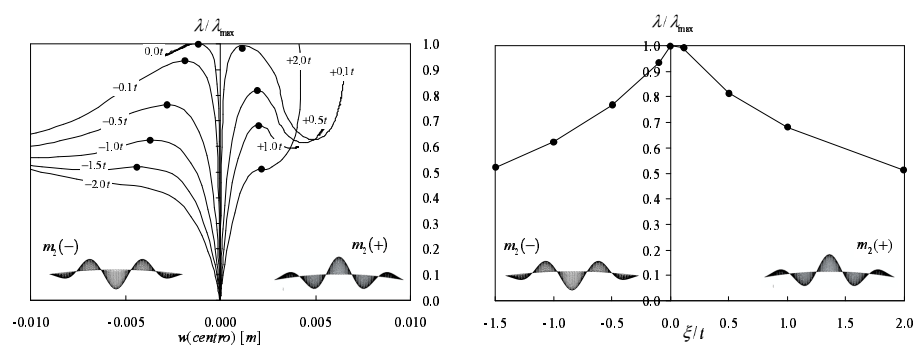
Resultados del análisis no lineal geométrico

Con el objeto de obtener valores confiables de referencia se llevaron a cabo análisis no lineales incluyendo imperfecciones en la geometría de los paneles. Para todos los modelos se impusieron como forma de imperfecciones geométricas el primer y segundo modo, con valores tanto positivos como negativos con respecto a la forma dada por el análisis de autovalores.

El eje vertical en las Figuras 4, 5 y 6 indica los valores de carga normalizados con respecto a la carga máxima de la estructura sin imperfecciones. Para los modelos M1, M2 y M3 las cargas máximas obtenidas para esa configuración de referencia son $\lambda_{max} = 30.95$ Pa, $\lambda_{max} = 180.10$ Pa y $\lambda_{max} = 2305.84$ Pa, respectivamente. Todas las trayectorias no lineales mostradas en las Figuras 4, 5 y 6 están calculadas para un punto ubicado en el centro del panel. Desplazamientos negativos indican un descenso de dicho punto y desplazamientos positivos implican un ascenso del mismo.



(a) Imperfección definida por el modo 1: $m_1(+)$ posición original; $m_1(-)$ modo invertido.



(b) Imperfección definida por el modo 2: $m_2(+)$ posición original; $m_2(-)$ modo invertido.

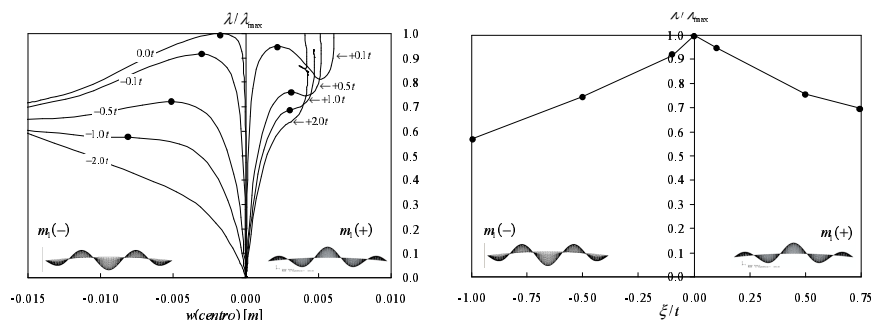
Figura 4. Trayectorias no lineales (izquierda) y curvas de sensibilidad (derecha) para diferentes niveles de imperfecciones. Modelo M1 ($t = 1$ mm; $Z = 1000$)

En todos los casos, el comportamiento es no lineal con pérdida de rigidez, hasta que se alcanza un valor máximo de carga en la trayectoria. Con desplazamientos mayores la trayectoria se vuelve inestable y cae, para recuperar la estabilidad sólo con valores grandes de desplazamientos.

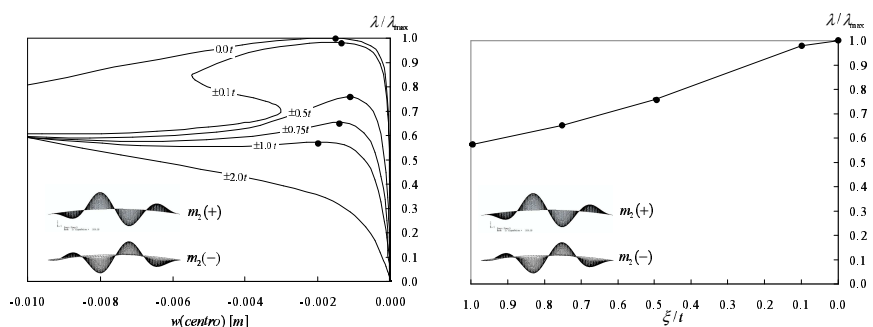
También se computaron las curvas de sensibilidad de los máximos alcanzados por las distintas configuraciones para diferentes amplitudes de la imperfección. En estructuras de ingeniería civil, imperfecciones en la geometría del orden del espesor son relativamente frecuentes, de manera que su incidencia sobre el problema de estabilidad es muy relevante.

En el modelo M1 ($Z = 1000$) se observa el siguiente comportamiento: cuando la imperfección toma la forma del primer modo, que es asimétrico con respecto a un eje vertical que pase por el centro del panel, y para todos las amplitudes, los desplazamientos de un punto en el centro del panel son negativos aun cuando se imponga el mismo primer modo, pero invertido $m_1(-)$. Mas allá de imperfecciones del orden del espesor ($1.0t$), la trayectoria no lineal es ascendente y no se puede detectar un punto límite. De la curva de sensibilidad a imperfecciones se desprende que la caída en la capacidad de carga tiende al 63 % de la carga máxima alcanzada sin imperfecciones. La Figura 4a ilustra este comportamiento.

Para el mismo modelo M1, pero con imperfecciones con la forma del segundo modo de pandeo, el comportamiento es diferente en función de la orientación del modo. En la posición $m_2(+)$ el límite inferior se alcanza para una amplitud de imperfección de dos veces el espesor, en tanto que para el modo $m_2(-)$ se alcanza con 1.5 veces el espesor. Además, la recuperación de la rigidez es más rápida cuando la forma de la imperfección tiene la forma del modo $m_2(+)$. De la curva de sensibilidad se observa que el límite inferior para ambas formas de imperfección tiende al 51 % de la carga máxima alcanzada sin imperfecciones. La Figura 4b muestra este comportamiento.



(a) Imperfección definida por el modo 1: $m_1(+)$ posición original; $m_1(-)$ modo invertido.



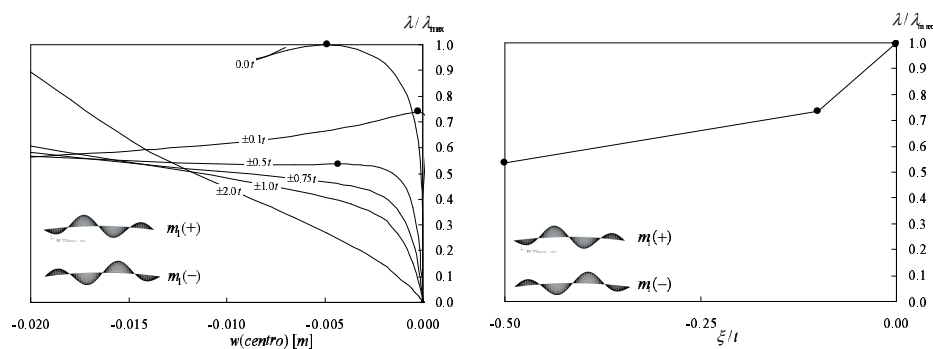
(b) Imperfección definida por el modo 2: $m_2(+)$ posición original; $m_2(-)$ modo invertido.

Figura 5. Trayectorias no lineales (izquierda) y curvas de sensibilidad (derecha) para diferentes niveles de imperfecciones. Modelo M2 ($t = 2$ mm; $Z = 500$)

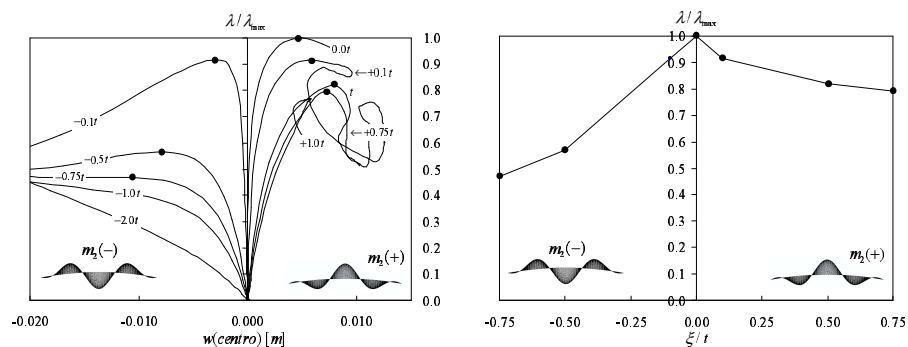
En el modelo M2 ($Z = 500$) el comportamiento para el primer modo de pandeo usado como imperfección es similar al segundo caso del modelo M1. Esto es de esperar, por tratarse de modos con el mismo número de ondas ($n = 5$). La curva de sensibilidad a imperfecciones muestra que para la forma $m_1(-)$ el límite inferior de carga se alcanza para imperfecciones del orden del espesor, tendiendo al 57 % de la carga máxima alcanzada sin imperfecciones. Por otro lado, si se considera el modo $m_1(+)$, el límite inferior tiende al 70 % de la carga máxima alcanzada sin imperfecciones. La Figura 5a muestra este comportamiento.

En el mismo modelo M2, pero considerando el segundo modo de pandeo como imperfección, se observa un comportamiento similar al primer caso del modelo M1. Se observa que en la trayectoria para una imperfección de $0.10t$ hay tendencia a producirse un salto dinámico (“snap” o “reversal”) en el comportamiento, mencionado como posible en los casos analizados por Yamada y Croll¹¹. La curva de sensibilidad muestra que el límite inferior tiende al 57 % de la carga máxima alcanzada sin imperfecciones. La Figura 5b muestra este comportamiento.

Finalmente, el modelo M3 ($Z = 200$) parece ser el caso más sensible a la forma y dirección del modo de imperfección. Cuando se impone el primer modo en posición original o invertido, los desplazamientos en el centro del panel son siempre negativos. La curva de sensibilidad muestra que el límite inferior alcanza el 53 % de la carga máxima lograda sin imperfecciones para una amplitud del orden de la mitad del espesor del panel. La Figura 6a muestra este comportamiento.



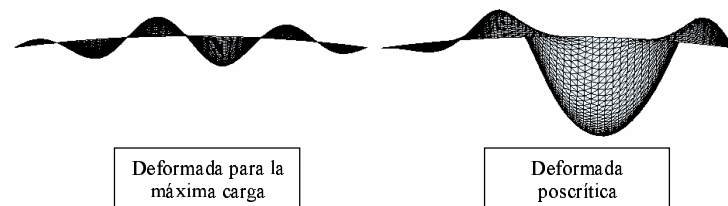
(a) Imperfección definida por el modo 1: $m_1(+)$ posición original; $m_1(-)$ modo invertido



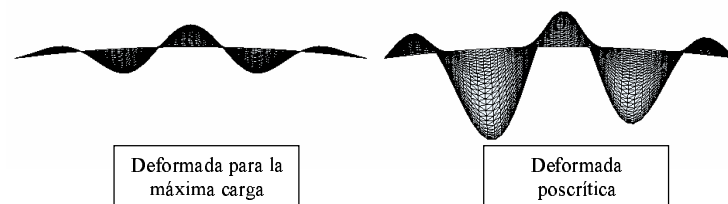
(b) Imperfección definida por el modo 2: $m_2(+)$ posición original; $m_2(-)$ modo invertido

Figura 6. Trayectorias no lineales (izquierda) curvas de sensibilidad (derecha) para diferentes niveles de imperfecciones. Modelo M3 ($t = 5$ mm; $Z = 200$)

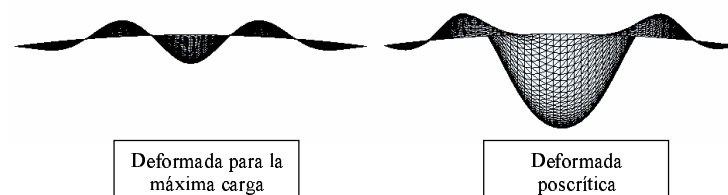
En este modelo M3 el segundo modo aplicado en su forma original $m_2(+)$ produce trayectorias no lineales con tendencia a producir saltos dinámicos para todas las amplitudes analizadas. El último punto límite que se puede detectar es para $0.75t$, con el cual la curva de sensibilidad tiende al 79 % de la máxima carga lograda sin imperfecciones. El mismo segundo modo aplicado en forma invertida $m_2(-)$ muestra que el panel es ligeramente más sensible a imperfecciones que los otros dos paneles analizados previamente. Para una amplitud de imperfección del orden del $0.75t$, el límite inferior de carga tiende al 47 % de la carga máxima alcanzada sin imperfecciones. La Figura 6b muestra este comportamiento.



(a) Modelo M1: deformadas para una imperfección de amplitud $\pm 1.0t$ dada por el modo 1



(b) Modelo M1: deformadas para una imperfección de amplitud $+1.0t$ dada por el modo 2



(c) Modelo M1: deformadas para una imperfección de amplitud $-1.0t$ dada por el modo 2

Figura 7. Deformadas en diferentes estados de carga

La Figura 7 muestra las deformadas en diferentes puntos de la trayectoria no lineal para el caso del modelo M1. Se puede observar lo siguiente:

- Cuando se supone una imperfección con la forma del primer modo como imperfección, éste se mantiene hasta alcanzar la carga máxima, pero cambia para estados post-críticos avanzados. La Figura 7a ilustra esta observación.
- Cuando se impone el segundo modo como imperfección en dirección opuesta al sentido de las cargas, éste se mantiene aun para niveles de imperfección grandes ($1.0t$). La Figura 7b demuestra este comportamiento.

- Cuando se impone el segundo modo invertido y con el máximo desplazamiento vertical en la dirección de la aplicación de las cargas, la forma del modo se mantiene pero los desplazamientos aumentan significativamente en el centro del panel cilíndrico. Esto se puede apreciar en la Figura 7c.
- Similar comportamiento se observó en los modelos M2 y M3.

Resultados del análisis de energía reducida

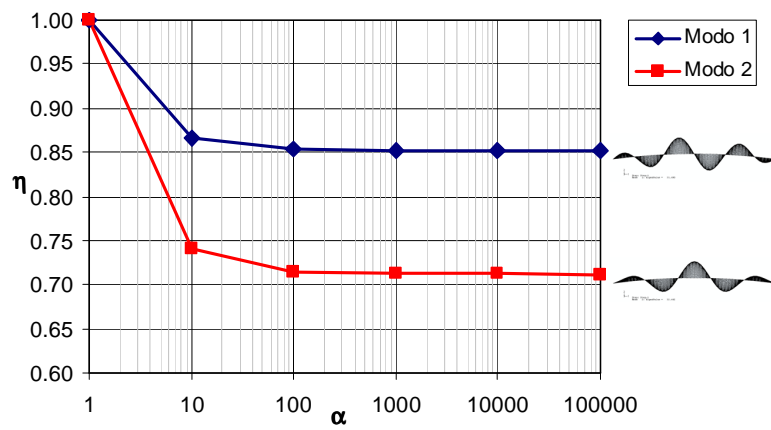
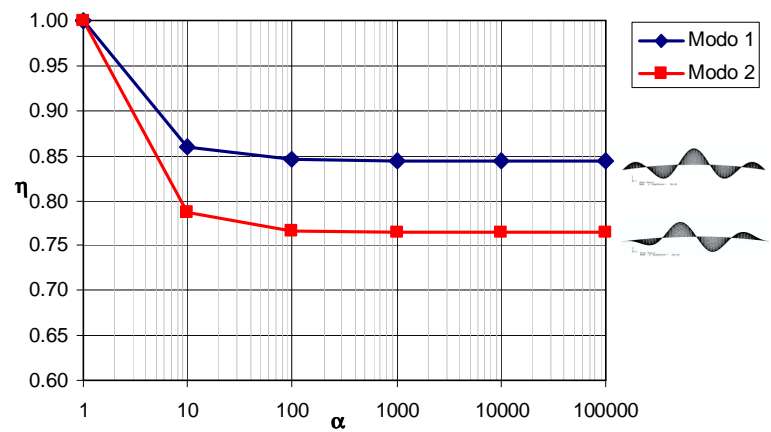
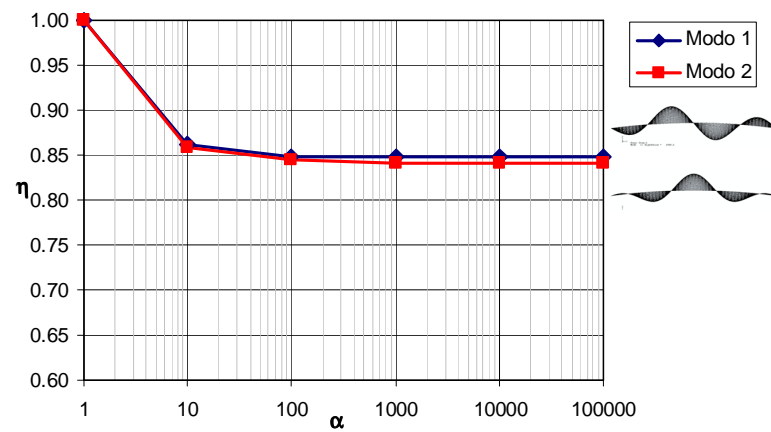
Los resultados de análisis de energía reducida se muestran en la Figura 8, y se listan en forma numérica en la Tabla II. En todos los casos, el comportamiento del elemento finito usado es satisfactorio, en el sentido de que los valores convergen a medida que el parámetro α crece y se acerca a un valor grande. En todos los casos, para $\alpha = 100$ se encuentra que la solución converge. En este sentido, el elemento tiene buen desempeño, tal como se demostró para cilindros y tanques cilíndricos¹⁰. Los valores del parámetro de reducción η deben ser aplicados al autovalor del análisis clásico, que es con respecto a lo que se ha normalizado η .

En todos los casos es el segundo modo el que conduce a cargas menores computadas con energía reducida, de manera que, aunque las cargas críticas son ligeramente menores para el modo identificado como 1 con respecto al 2, cuando se toma en cuenta la incidencia de pérdida de carga debida a imperfecciones, es el modo 2 el que conduce a cargas menores.

El método de energía reducida conduce a valores de $\eta = 0.71, 0.76$ y 0.85 para valores de $Z = 1000, 500$ y 200 , respectivamente. Comparando los resultados no lineales para el modelo M1 con los obtenidos con el modelo de energía reducida, se puede observar que para el primer modo la diferencia es del orden del 26 % y para el segundo es del 28 %. La Figura 8a muestra los resultados obtenidos con el modelo de energía reducida. Comparando los resultados no lineales de M2 con los obtenidos con el modelo de energía reducida se puede observar que la diferencia para el primer modo usado como imperfección es del 33 % y del 25 % para segundo modo. La Figura 8b muestra los resultados obtenidos con el modelo de energía reducida. Finalmente, para M3, se observa la mayor discrepancia entre modelo de energía reducida y los resultados no lineales. Para el primer modo usado como imperfección, la diferencia es del 37 % y para el segundo modo, considerando el caso del modo $m_2(-)$, la diferencia es del 44 %. La Figura 8c muestra los resultados obtenidos con el modelo de energía reducida.

Del análisis de los resultados obtenidos con el modelo de energía reducida, surgen las siguientes observaciones:

- Para todos los modelos considerados, el factor η de reducción de carga depende del modo que se use para imponer los desplazamientos prescriptos.
- El primer modo impuesto como desplazamiento prescripto predice en todos los casos los mayores valores de η , tendiendo en los tres modelos a valores similares ($\eta = 0.84$ ó 0.85).
- El segundo modo impuesto como desplazamiento prescripto predice valores de η que van creciendo a medida que Z disminuye. La máxima diferencia se nota en el modelo M1, en el que η tiende a 0.712 para el segundo modo. En el modelo M3 el factor η es prácticamente igual para ambos modos (0.848 para el primer modo y 0.842 para el segundo). Las Figuras 8a, 8b y 8c, y la Tabla II resumen estos resultados.

(a) Modelo M1 ($t = 1$ mm, $Z = 1000$)(b) Modelo M2 ($t = 2$ mm, $Z = 500$)(c) Modelo M3 ($t = 5$ mm, $Z = 200$)**Figura 8.** Resultados de análisis de energía reducida

Modelo M1 ($t = 1$ mm; $Z = 1000$)

Modo 1			Modo 2		
α	Energía	η	α	Energía	η
1	0.01051	1.000	1	0.00720	1.000
10	0.00911	0.866	10	0.00533	0.741
100	0.00897	0.853	100	0.00515	0.715
1000	0.00895	0.852	1000	0.00513	0.712
10000	0.00895	0.852	10000	0.00513	0.712
100000	0.00895	0.852	100000	0.00513	0.712

Modelo M2 ($t = 2$ mm; $Z = 500$)

Modo 1			Modo 2		
α	Energía	η	α	Energía	η
1	0.04168	1.000	1	0.04018	1.000
10	0.03586	0.860	10	0.03164	0.787
100	0.03528	0.846	100	0.03079	0.766
1000	0.03522	0.845	1000	0.03070	0.764
10000	0.03522	0.845	10000	0.03070	0.764
100000	0.03522	0.845	100000	0.03069	0.763

Modelo M3 ($t = 5$ mm; $Z = 200$)

Modo 1			Modo 2		
α	Energía	η	α	Energía	η
1	0.35600	1.000	1	0.2910	1.000
10	0.30700	0.862	10	0.2500	0.859
100	0.30200	0.848	100	0.2460	0.845
1000	0.30200	0.848	1000	0.2450	0.842
10000	0.30200	0.848	10000	0.2450	0.842
100000	0.30200	0.848	100000	0.2450	0.842

Tabla II. Resultados de análisis de energía reducida

CONCLUSIONES

Estudios de otros autores usando la metodología de rigidez o energía reducida para calcular límites inferiores en paneles cilíndricos (u otras cáscaras) han empleado el método de Ritz¹¹. Sin embargo, los autores consideran que la aplicabilidad de esta teoría se vería altamente favorecida si el analista pudiera emplear las herramientas que ya tiene a su disposición en su lugar de trabajo (programas de elementos finitos para propósitos generales), de modo que solamente precise una metodología adecuada y no tenga necesidad de programar nuevas subrutinas. Este trabajo ha estado inicialmente motivado por ese propósito, y el tema de paneles cilíndricos rebajados que pierden su estabilidad bajo presiones normales a su superficie se ha usado para ilustrar el procedimiento.

Las conclusiones del trabajo pueden resumirse de la forma siguiente:

- Se ha mostrado la viabilidad metodológica de implementar el análisis de límites inferiores basado en energía reducida usando programas como ABAQUS. La estrategia requiere de tres pasos, que son: un análisis clásico de autovalores y dos evaluaciones de energía en análisis lineales de equilibrio.

- Se ha demostrado que las estrategias de rigidez reducida y de energía reducida son claramente diferentes en cuanto a sus requerimientos. La primera trata de una estrategia fuerte, que involucra resolver un problema de autovalores modificado, mientras que la segunda usa la hipótesis de que los modos clásico y de análisis no lineal son idénticos. Sólo en algunos casos puede esperarse que ambos modos coincidan, lo que limita la generalización de la hipótesis mencionada.
- El enfoque de energía reducida no conduce a límites inferiores en paneles cilíndricos rebajados que pierden su estabilidad bajo presiones normales a la cáscara. Los resultados de energía reducida dan en este caso valores inferiores a los del análisis clásico de autovalores, pero superiores a los de análisis no lineal geométrico.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen los comentarios del Prof. James G. A. Croll (University College London) durante esta investigación. L. A. Godoy es miembro de Carrera de Investigador de CONICET.

REFERENCIAS

- 1 ABAQUS, "User's Manuals. Version 6.4", Hibbitt, Karlsson and Sorensen Inc., Rhode Island, (2003).
- 2 R. C. Batista y J.G.A. Croll, "A design approach for unstiffened cylindrical shells under external pressure". In: *Proceedings of the International Conference on Thin Walled Structures*, University of Strathclyde, Crosby Lockwood, Glasgow, (1979).
- 3 J.L. Batoz, K.J. Bathe y L.W. Ho, "A study of three-node triangular plate bending elements". *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*; Vol. **15**, pp. 1771-1821, (1980).
- 4 D.O. Brush y B.O. Almorth, "Buckling of Bars, Plates and Shells". McGraw-Hill, New York, (1975).
- 5 J.G.A. Croll, "Towards simple estimates of shell buckling loads". *Der Stahlbau*, Part I, Heft, August, pp. 243-248; Part II Heft, September, pp. 283-285, (1975).
- 6 J.G.A. Croll, "Towards a rationally based elastic-plastic shell buckling design methodology". *Thin Walled Structures*, Vol. **23**, pp. 67-84, (1995).
- 7 L.A. Godoy, "Theory of Elastic Stability: Analysis and Sensitivity". Taylor and Francis, Philadelphia, (2000).
- 8 L. A. Godoy y J. G. A. Croll, "Energy contributions in the buckling of fiber-reinforced thin-walled structures", en: *Stability of Structures*, Ed. S. Rajasekaran & S. Sridharan, Allied Publishing, Bombay, Vol. **1**, pp. 209-218, (1995).
- 9 W.T. Koiter, "Buckling and postbuckling behavior of a cylindrical panel under axial compression", NLR Report S-476, Vol. **20**, *Nat. Aero. Res. Inst.*, Amsterdam, 1956.
- 10 E.M. Sosa, L.A. Godoy y J.G.A. Croll, "Computation of lower bound buckling loads using general purpose finite element codes", *Computers and Structures*, Vol. **84**, N° 29-30, pp. 1934-1945, (2006).
- 11 S. Yamada y J.G.A. Croll, "Buckling behavior pressure loaded cylindrical panels". *ASCE J. of Engineering Mechanics*, Vol. **115**, N° 2, pp. 327-344, (1989).
- 12 Z. Waszczyszyn, C. Cichon y M. Radwanska, "Stability of Structures by Finite Element Methods", Elsevier, Amsterdam, pp. 368-376, (1994).